

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ ДИСТАНЦИОННОГО ОБРАЗОВАНИЯ

В.Н.Скопинский, А.А.Захаров

# **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Часть I

МОСКВА 1999

УДК 539.3\8 (075.8)

Скопинский В.Н., Захаров А.А. Сопротивление материалов: Учебное пособие. Часть I. - М.: МГИУ, 1999 - 128с.

Учебное пособие предназначено для студентов МГИУ дистанционного образования и заочной формы обучения инженерных специальностей, изучающих курс «Сопротивление материалов». Содержание учебного пособия соответствует Государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования РФ по инженерным специальностям и рабочей программе этой учебной дисциплины.

Учебное пособие является первой частью общего курса "Сопротивление материалов" и содержит необходимый теоретический материал; некоторые разделы пособия сопровождаются решением практических примеров.

Материал учебного пособия может использоваться студентами для самостоятельной работы по изучению курса и решения практических задач, для выполнения учебных заданий (курсовых работ), при подготовке к экзаменам.

Рецензенты: Агамиров Л.В., д.т.н., профессор (МАТИ-РГТУ);  
Дмитриев В.И., к.т.н., доцент (МГАПИ)

Подготовлено к печати на кафедре «Сопротивление материалов»

Редактор З.И.Фадеева

---

ЛР № 020407 от 12.02.97г.

Подписано в печать  
Формат бум. 60x90/16  
Усл. печ. л. 7,75  
Тираж 500

Уч.-изд. л. 8,25  
Заказ № 385

Сдано в производство  
Бум. множ.  
Тем.план 1999г., №1-07

---

Ротапринт МГИУ, 109280, Москва, Автозаводская, 16 Сопротивление

ISBN 5-276-00003-4

© В.Н. Скопинский, А.А. Захаров, 1999  
© ИДО, 1999  
© МГИУ, 1999

## Содержание

|  |    |
|--|----|
| Введение .....   | 5  |
| 1. Основные понятия .....  | 6  |
| 1.1. Моделирование реального объекта.....                                    | 6  |
| 1.2. Внутренние силы. Метод сечений.....                                     | 10 |
| 1.3. Напряжения.....   | 11 |
| 1.4. Перемещения и деформации.....   | 13 |
| 1.5. Закон Гука. Основные принципы.....                                      | 14 |
| 2. Механические свойства материалов.....                                     | 17 |
| 2.1. Напряженно-деформированное состояние образца .....                      | 17 |
| 2.2. Испытание на растяжение .....   | 20 |
| 2.3. Испытание на сжатие.....  | 26 |
| 2.4. Влияние различных факторов на механические свойства<br>материалов ..... | 28 |
| 2.5. Расчёт на прочность. Коэффициент запаса .....                           | 31 |
| 3. Растяжение и сжатие .....   | 34 |
| 3.1. Определение нормальных сил .....  | 35 |
| 3.2. Основные зависимости при растяжении .....                               | 37 |
| 3.3. Перемещения сечений стержня .....                                       | 38 |
| 3.4. Учет факторов, влияющих на изменение длины стержня.....                 | 40 |
| 3.5. Расчет стержня на прочность.....  | 42 |
| 3.6. Расчёт статически определимого стержня .....                            | 43 |
| 3.7. Расчёт статически неопределимого стержня .....                          | 47 |
| 4. Кручение .....  | 51 |
| 4.1. Чистый сдвиг .....  | 51 |
| 4.2. Кручение бруса круглого сечения.....                                    | 54 |
| 4.3. Сравнительный анализ полых и сплошных валов.....                        | 58 |
| 4.4. Расчет валов на прочность и жесткость.....                              | 58 |
| 4.5. Характер разрушения валов.....  | 61 |
| 4.6. Статически неопределимые задачи на кручение .....                       | 64 |
| 4.7. Кручение бруса прямоугольного сечения .....                             | 65 |
| 4.8. Кручение тонкостенного стержня открытого профиля .....                  | 66 |
| 4.9. Расчет витых цилиндрических пружин с малым шагом.....                   | 67 |
| 5. Геометрические характеристики сечений.....                                | 70 |
| 5.1. Статистические моменты сечения.....                                     | 72 |
| 5.2. Моменты инерции сечения .....   | 73 |
| 5.3. Радиусы инерции сечения .....   | 77 |
| 6. Изгиб .....   | 78 |
| 6.1. Дифференциальные и интегральные зависимости при изгибе ..               | 78 |

|  |     |
|--|-----|
| 6.2. Основные зависимости при чистом изгибе .....              | 80  |
| 6.3. Нормальные напряжения при изгибе .....                    | 83  |
| 6.4. Рациональные формы сечения балок при изгибе .....         | 84  |
| 6.5. Напряжения при поперечном изгибе .....                    | 85  |
| 6.6. Расчет на прочность при изгибе .....                      | 88  |
| 6.7. Перемещения в балках при изгибе .....                     | 90  |
| 6.8. Балки равного сопротивления изгибу .....                  | 99  |
| 7. Статически определимые стержневые системы .....             | 102 |
| 7.1. Основные определения .....                                | 102 |
| 7.2. Расчет плоских систем .....                               | 102 |
| 7.3. Моделирование связей .....                                | 109 |
| 8. Сложное сопротивление бруса .....                           | 113 |
| 8.1. Косой изгиб .....   | 113 |
| 8.2. Косой изгиб с растяжением (сжатием) .....                 | 116 |
| 8.3. Внецентренное растяжение (сжатие) .....                   | 117 |
| 8.4. Расчет на прочность при сложном сопротивлении бруса ..... | 120 |
| Приложение 1 .....   | 121 |
| Приложение 2 .....   | 122 |
| Список дополнительной литературы .....                         | 125 |

## Введение

**Сопротивление материалов** (новое название - *механика материалов и конструкций*) является одной из основных учебных дисциплин инженерно-технических вузов. Наряду с другими фундаментальными (естественно-научными) и техническими дисциплинами сопротивление материалов помогает формировать инженерное мышление, необходимое в разработке, производстве и обслуживании технических изделий различного назначения.

В сопротивлении материалов, являющимся одним из разделов механики твёрдого деформируемого тела, рассматриваются простейшие расчётные модели конструктивных элементов, изучаются общие методы расчёта инженерных конструкций. Такие методы являются в основном приближёнными, опираются на экспериментальные данные, что позволяет использовать простые и ясные подходы в оценке прочностных возможностей различных конструктивных элементов при внешних воздействиях.

При проектировании реальных конструкций необходимо решать вопросы *прочности, жёсткости, устойчивости* конструктивных элементов, определяющие способность конструкции выполнять свои рабочие функции. Для этих основополагающих понятий можно дать такие определения. **Прочность** - способность тела воспринимать внешние воздействия, не разрушаясь. **Жёсткость** - способность тела воспринимать внешние воздействия в области допустимых (ограниченных) деформаций (перемещений). **Устойчивость** - способность тела воспринимать внешние воздействия, сохраняя первоначальное положение равновесия. Более подробно расчёты конструкций на прочность, жёсткость и устойчивость рассматриваются в специальных инженерных дисциплинах (строительная механика конструкций, прочность конструкций, теория устойчивости упругих систем, теория упругости и пластичности, механика разрушения и др.).

В сопротивлении материалов рассматриваются *деформируемые тела*, т.е. способные изменять свои размеры и форму при внешних воздействиях. При этом широко используются методы теоретической механики (механики абсолютно твёрдого тела), расчётный аппарат математического анализа. Непрерывная связь различных наук, их постоянное развитие позволяют совершенствовать методы анализа в сопротивлении материалов, использовать возможности вычислительной техники, а также расширять круг общих вопросов, необходимых при подготовке современных специалистов инженерного профиля.

# 1. Основные понятия

## 1.1. Моделирование реального объекта

Реальные объекты (конструкции) обладают большим многообразием своих характеристик, учесть которые в полном объёме невозможно. Для анализа реального объекта используется соответствующее физическое и математическое представление (моделирование), чаще всего конструктивных элементов, т.е. создаётся *расчётная модель* (или *расчётная схема*).

Моделирование осуществляется за счет некоторой схематизации реальной конструкции, включающей три основных направления: материал, геометрическая форма, нагрузки и связи.

### *Моделирование материала*

Инженерные модели используют *гипотезу сплошности среды*: материал считается непрерывной средой, заполняющей весь объем тела. При этом материал наделяется некоторыми осреднёнными, среднестатистическими свойствами, не зависящими от микроструктуры материала.

К наиболее распространённым свойствам материала относятся однородность, изотропность, упругость, пластичность. **Однородность** - независимость свойств материала от величины и местоположения выделенного из тела объема. Такая схематизация свойств материала основана на том, что размеры рассматриваемых тел (или их частей) значительно превосходят размеры структурных элементов (например, кристаллических зерен), где проявляются особенности строения материала. **Изотропность** - одинаковость свойств материала во всех направлениях. **Упругость** - способность тела восстанавливать первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки. **Пластичность** - способность тела не восстанавливать (частично или полностью) первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки. При этом в теле появляются остаточные (пластические) деформации.

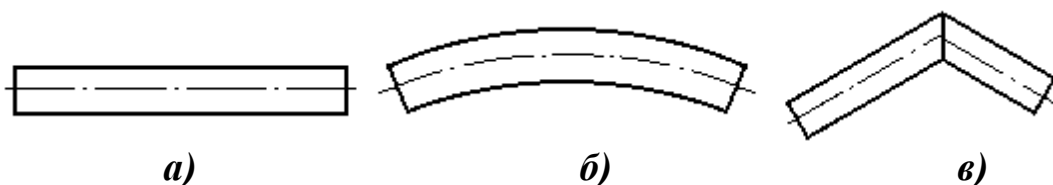
Существуют и **анизотропные** материалы, в которых свойства материала неодинаковые по различным направлениям. Различают естественную анизотропию (например, дерево) и искусственную (например, фанера, ткани и т. д.). Получение искусственно анизотропных материалов является очень перспективным направлением создания новых материалов, обладающих необходимыми свойствами. Одним из таких направлений является создание так называемых **композиционных материалов (композитов)**, соединяющих в себе относи-

тельную легкость, высокую прочность и жёсткость как наиболее полезные качества для силовых элементов конструкций. Композиты состоят из наполнителя (армирующего материала) и связующего (матрицы). Наполнителем являются волокна из различных материалов (углеродные, стеклянные, борные, органические, металлические и др.). В качестве связующего чаще всего используются полимерные материалы (эпоксидные, полиэфирные, фенольные смолы), а также и металлические (алюминиевые, титановые, стальные) или керамические материалы. Подбирая определенные компоненты «волокно - связующее», по-разному ориентируя волокна, используя различную технологию изготовления композитов, можно получить материалы с требуемыми свойствами, максимально соответствующими проектируемым конструкциям.

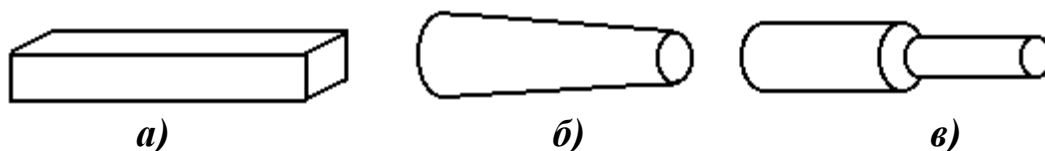
### *Геометрическое моделирование тел*

В расчётном анализе используются три геометрические модели тела: брус (стержень), оболочка и пространственное (массивное) тело.

**Брус** - модель тела, длина которого существенно превышает поперечные размеры. Модели бруса различаются в зависимости от формы оси (рис. 1.1): а) прямолинейный, б) криволинейный, в) ломаный брус; в зависимости от изменения поперечного сечения бруса по длине (рис. 1.2): а) брус постоянного сечения, б) брус переменного сечения, в) ступенчатый брус. Естественно, отмеченные характерные признаки могут сочетаться, например криволинейный брус переменного сечения. Брус и конструкции, состоящие из элементов в виде бруса (стержневые системы), являются основными объектами изучения в сопротивлении материалов.



*Рис. 1.1*



*Рис. 1.2*

**Оболочка** - модель тела, толщина которого намного меньше других размеров. Оболочки как тонкостенные конструкции различаются, главным образом, формой срединной поверхности (цилиндрическая,

сферическая, коническая оболочки и т. д.), могут быть постоянной и переменной толщины. Оболочки широко применяются в различных областях техники, т.к. способны наиболее эффективно выполнять различные функции (прочностные, технологические, эксплуатационные, эстетические) в сочетании с малой материалоемкостью конструкций. Часто оболочки выполняются в совокупности с силовыми элементами в виде бруса (подкрепленные оболочки), оболочечные конструкции могут состоять и из нескольких оболочек различной формы. В частном случае, когда поверхность является плоскостью, оболочка вырождается в *пластинку*. Оболочки и оболочечные конструкции в основном изучаются в теории оболочек и специальных курсах строительной механики различных конструкций.

Модель *пространственного тела* имеет соизмеримые размеры. Методы расчета таких моделей рассматриваются в теории упругости.

Брус, оболочка и пространственное тело рассматриваются также как *одномерная, двухмерная и трёхмерная модели* тела в соответствии с математическим описанием таких моделей.

### *Моделирование нагрузок и связей*

*Нагрузки* являются мерой внешнего воздействия на рассматриваемый объект (тело) со стороны окружающих его тел или среды. *Нагрузки* моделируются системой внешних сил, которые разделяются на объемные и поверхностные силы. *Объемные силы* распределены по объему тела, приложены к каждой его частице (силы тяжести, инерции, магнитного взаимодействия). *Поверхностные силы* действуют на участках поверхности тела (силы воздействия среды, контактного взаимодействия тел и т.д.). При моделировании нагрузки вводятся понятия сосредоточенных силы и момента (пары сил), распределенной (погонной) нагрузки.

Под *сосредоточенной силой*  $P$  (рис. 1.3,а) понимается равнодействующая поверхностных сил, действующих на относительно малой площадке поверхности тела (площадка условно стягивается в точку). Аналогично, *сосредоточенный момент*  $M$  может рассматриваться как статический эквивалент поверхностных сил, некоторые варианты распределения которых показаны на рис. 1.3,б. *Распределенная нагрузка*  $q$  (рис. 1.3,в) получается приведением поверхностных сил к линии действия (площадка нагружения условно стягивается в линию). Распределенная нагрузка может быть постоянной или переменной интенсивности.



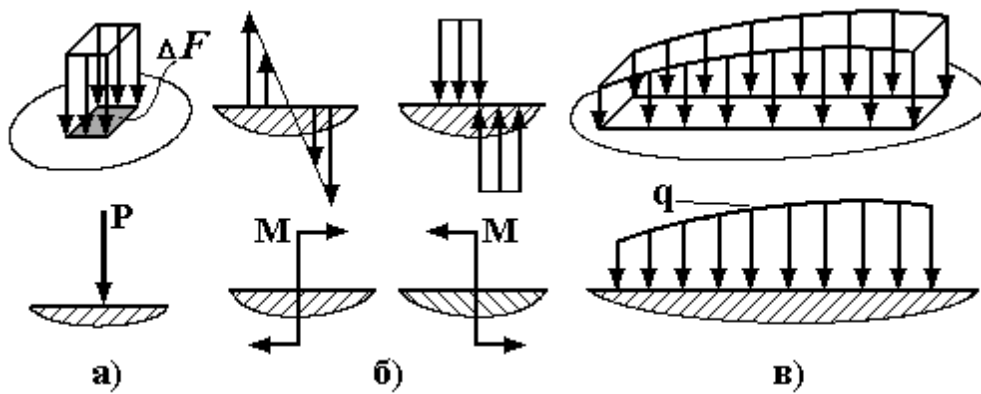


Рис. 1.3

В системе СИ единицами измерения силы являются *ньютоны* (**Н**) или *килоньютоны* (**кН**), т.е. применяется такая размерность для рассматриваемых типов нагрузки: **P** /Н, кН/; **M** /Н·м, кН·м/; **q** /Н/м, кН/м/.

В расчетной модели используется понятие *связи* как ограничения перемещений в некоторых точках тела. Наиболее часто рассматриваются *модели типовых опор* как системы связей. В качестве примера на рис. 1.4 показаны плоские модели опор. **Шарнирно-подвижная опора** или каток (рис. 1.4,а) накладывает одну связь (на рисунке это соответствует запрещению вертикального перемещения). В частности, такая связь может быть упругой (рис. 1.4,б), допускающей определённые (конечные) перемещения. **Шарнирно-неподвижная опора** моделируется двумя связями (рис. 1.4,в), которые запрещают любые линейные перемещения в плоскости. Опора типа жёсткого закрепления или **заделки** (рис. 1.4,г) запрещает линейные и угловые перемещения. Возможны и другие варианты опор за счёт наложенных связей, например подвижная заделка - закрепление, ограничивающее поворот и линейное перемещение в направлении наложенных связей (рис. 1.4,д).

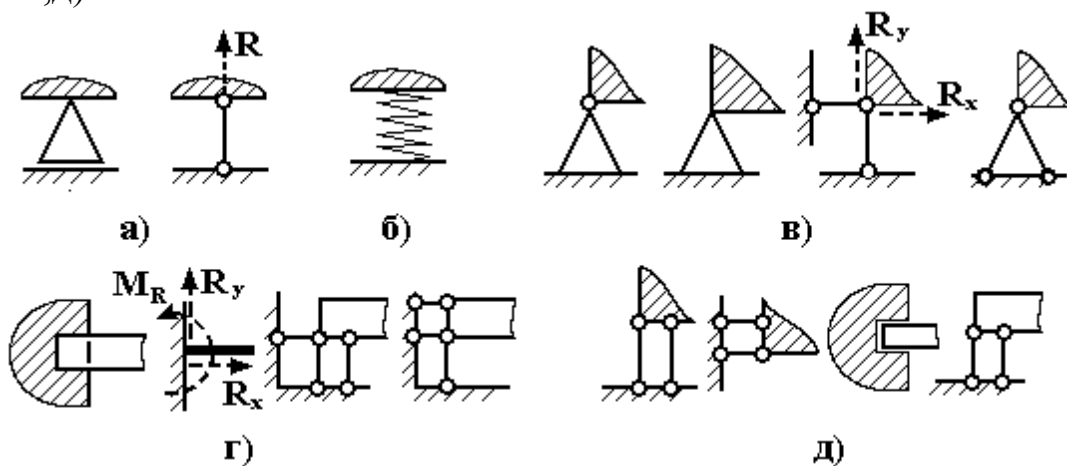


Рис. 1.4

При моделировании вариантов пространственного закрепления используется различное число связей, вплоть до шести.

В месте наложения связей в соответствующих направлениях возникают *реакции связей* (силы и моменты), которые относятся к внешним силам. Например, в шарнирно-неподвижной опоре (см. рис. 1.4,в) возникают две силы; в заделке (см. рис. 1.4,г) - две силы и момент.

Если реакции связей в системе могут быть определены с использованием уравнений статики (равновесия), то такая система называется *статически определимой*. Если же число реакций больше числа независимых уравнений статики, то такая система называется *статически неопределимой*.

По характеру изменения во времени нагрузки разделяются на статические и динамические. Считается, что *статическая нагрузка* постепенно возрастает от нуля до номинального значения и затем не изменяется с течением времени или мало изменяется. *Динамические нагрузки* характеризуются заметным изменением во времени, возникновением значительных ускорений частиц тела. Например: ударные, повторно-переменные, быстроизменяющиеся нагрузки.

Таким образом, моделирование материала и формы тела, нагрузок и связей позволяет описать качественные особенности реального объекта.

## 1.2. Внутренние силы. Метод сечений

Для *деформируемого тела* существует понятие внутренних связей, соединяющих частицы тела в единое целое. При нагружении деформируемого тела в нём возникают *внутренние силы* взаимодействия частиц тела. Приём выявления внутренних сил путем мысленного рассечения тела на две части носит название *метода сечений*. Например, если плоскость  $\Pi$  рассекает брус на две части (рис. 1.5,а), то в сечениях для левой и правой частей бруса возникают системы внутренних сил  $\mathbf{p}_л$  и  $\mathbf{p}_п$ , которые всегда взаимны по принципу действия и противодействия (рис. 1.5,б). (Рассечение тела на две части означает отбрасывание внутренних связей.) Если привести систему внутренних сил по правилам статики к центру площади сечения (т.0), то получим главный вектор  $\bar{\mathbf{R}}$  и главный момент  $\bar{\mathbf{M}}$  внутренних сил. Выберем систему координат  $Oxyz$ , где ось  $z$  направлена по нормали к сечению, а оси  $x$  и  $y$  расположены в его плоскости.

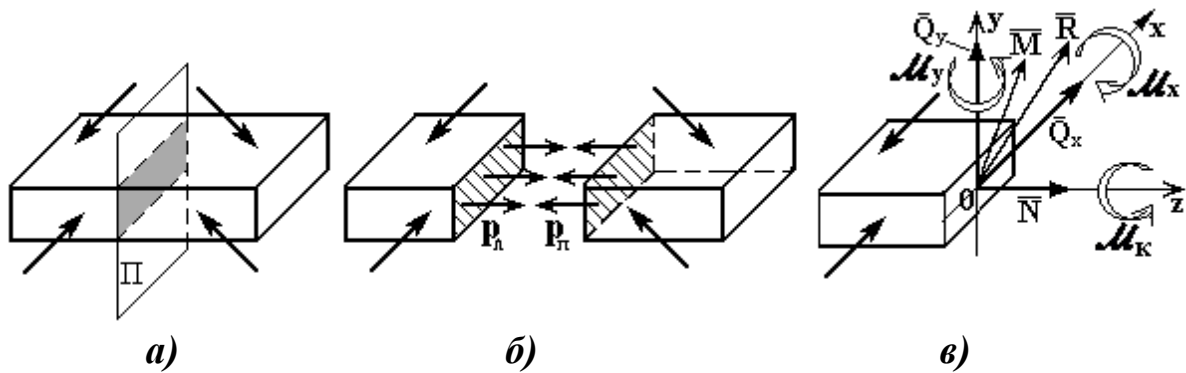


Рис. 1.5

Составляющие  $\bar{R}$  и  $\bar{M}$  по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  называются **внутренними силовыми факторами** (три силы и три момента). Они носят определённые названия:  $N$  - нормальная или продольная сила;  $Q_x$ ,  $Q_y$  - поперечные силы;  $M_x$ ,  $M_y$  - изгибающие моменты относительно осей  $x$  и  $y$ ;  $M_k$  - крутящий момент (рис. 1.5,в). Все шесть внутренних силовых факторов могут быть определены из шести *уравнений равновесия*, составленных для отсеченной части бруса.

Таким образом, определение внутренних силовых факторов по методу сечений сводится к четырем основным операциям: 1) *рассекается* брус плоскостью в некотором сечении; 2) *отбрасывается* одна из частей бруса (левая или правая); 3) *заменяется* действие отброшенной части на оставшуюся внутренними силовыми факторами; 4) *уравновешивается* оставшаяся часть бруса, т. е. из уравнений равновесия определяются внутренние силовые факторы.

При необходимости наглядного представления возникающих внутренних силовых факторов для бруса в целом строятся *эпюры отдельных внутренних силовых факторов* - графики их изменения по длине бруса.

### 1.3. Напряжения

Напряжения являются мерой интенсивности действия внутренних сил в теле. Выделим малую площадку  $\Delta F$  в окрестности т.А сечения бруса и равнодействующую внутренних сил  $\Delta \bar{R}$  на этой площадке (рис. 1.6,а). Существуют понятия *среднего напряжения*  $p_{cp}$  на площадке и *полного напряжения*  $p$  в точке, которые определяются соотношениями:

$$\bar{p}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta F}; \quad \bar{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta F} = \frac{d\bar{R}}{dF}. \quad (1.1)$$

Вектор *полного напряжения*  $\vec{p}$  может быть представлен в виде составляющих (рис. 1.6,б): *нормальное напряжение*  $\vec{\sigma}$  (направлено по нормали  $\vec{n}$  к площадке) и *касательное напряжение*  $\vec{\tau}$  (в плоскости сечения). Нормальные и касательные напряжения необходимо различать, потому что материал по-разному сопротивляется их действию. Если обозначить через  $\alpha$  угол между векторами  $\vec{p}$  и нормалью  $\vec{n}$ , то имеют место следующие соотношения:

$$\sigma = p \cos \alpha, \quad \tau = p \sin \alpha, \quad p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (1.2)$$

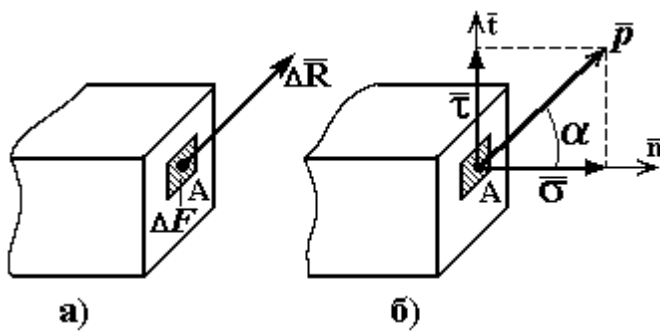


Рис. 1.6

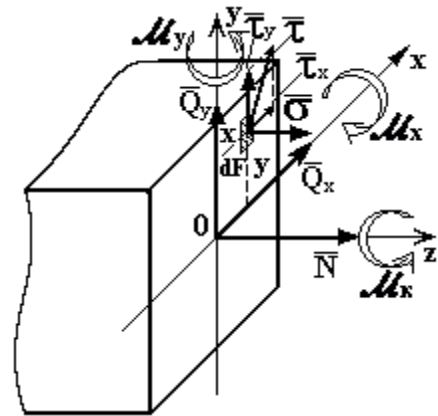


Рис. 1.7

Напряжения в точке зависят от положения площадки. Совокупность напряжений, возникающих во множестве площадок, проходящих через точку, характеризуют *напряжённое состояние в точке*. Внутренние силовые факторы являются равнодействующими внутренних сил в сечении, поэтому с учетом формул (1.1) они могут быть выражены через нормальные и касательные напряжения соотношениями (рис. 1.7):

$$\begin{aligned} N &= \int_F \sigma dF, & Q_x &= \int_F \tau_x dF, & Q_y &= \int_F \tau_y dF, \\ M_x &= \int_F \sigma y dF, & M_y &= - \int_F \sigma x dF, & \vec{i} \hat{e} &= \int_F (\tau_y x - \tau_x y) dF. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В системе СИ единицей измерения напряжения является **паскаль**:  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ . В расчетах на прочность это очень маленькая величина, поэтому практически используются **килопаскали (кПа)**, **мегапаскали (МПа)**, **гигапаскали (ГПа)**:

$$1 \text{ кПа} = 10^3 \text{ Па}; \quad 1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}; \quad 1 \text{ ГПа} = 10^9 \text{ Па}.$$

Связь единиц напряжения систем СИ и МКГСС такова:

$$1 \text{ МПа} \approx 10 \text{ кгс/см}^2 = 0,1 \text{ кгс/мм}^2.$$

## 1.4. Перемещения и деформации

Под действием нагрузки тело изменяет свою форму и размеры, т. е. деформируется. При этом точки тела меняют свое положение в пространстве. Вектор  $\bar{\delta}$ , соединяющий начальное (до нагружения) и конечное (после нагружения) положения точки, называется *линейным перемещением* точки (рис. 1.8,а). В системе координат  $Oxyz$  полное линейное перемещение имеет составляющие по осям  $\delta_x, \delta_y, \delta_z$  (также будем использовать их обозначения  $u, v, w$ ). Вводится понятие и углового перемещения  $\theta$  как угла поворота элементарного (бесконечно малого) отрезка в пространстве (см. рис. 1.8,а). Угловое перемещение также может быть представлено составляющими  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ . Перемещения точек тела при его деформировании обычно являются малыми величинами по сравнению с линейными размерами тела (такие тела называются относительно жёсткими).

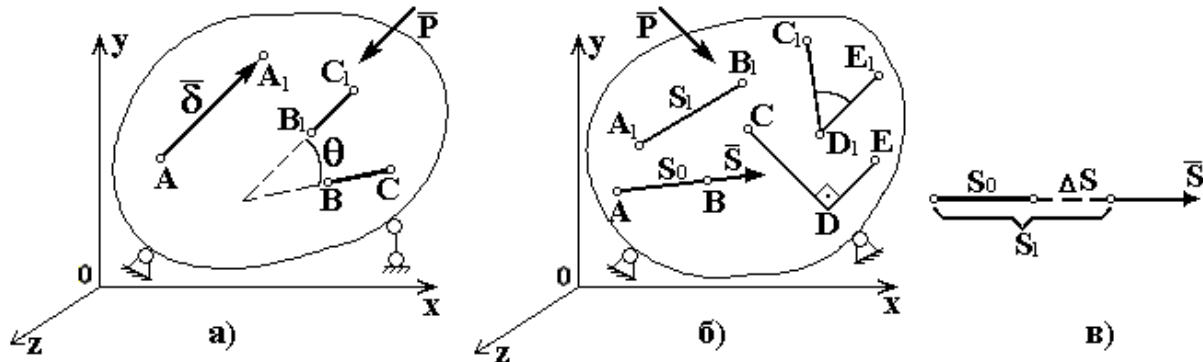


Рис. 1.8

Для характеристики интенсивности изменения формы и размеров тела при нагружении вводится понятие деформации - линейной и угловой. Под *линейной деформацией* в произвольной точке  $A$  в направлении  $\bar{s}$  (рис. 1.8,б) понимается предел отношения:

$$\bar{a}_s = \lim_{s_0 \rightarrow 0} \frac{S_1 - S_0}{S_0} = \lim_{s_0 \rightarrow 0} \frac{\bar{a}S}{S_0}. \quad (1.4)$$

Условно изменение длины малого отрезка показано на рис. 1.8,в.

Соответственно, в направлении осей  $x, y, z$  получаем компоненты (составляющие) линейной деформации  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ .

Изменение элементарного прямого угла (см. рис. 1.8,б)

$$\bar{a}_{CDE} = \lim_{CD \rightarrow 0, DE \rightarrow 0} (\angle CDE - \angle C_1D_1E_1) \quad (1.5)$$

называется *угловой деформацией* (или *деформацией сдвига*) в т.Д в плоскости CDE. В координатных плоскостях угловая деформация обозначается  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ .

Деформация является безразмерной величиной. Положительная линейная деформация (*деформация растяжения*) соответствует увеличению длины отрезка, отрицательная линейная деформация (*деформация сжатия*) - уменьшению длины отрезка, положительная угловая деформация - уменьшению прямого угла (переходу его в острый угол). Совокупность линейных и угловых деформаций во всех направлениях и плоскостях, проходящих через точку, характеризует **деформированное состояние в точке**.

Примечания.

1. Силы, напряжения, перемещения являются векторными величинами. В дальнейшем для упрощения записи и рисунков черточки для обозначения векторов не ставятся.

2. Следует иметь в виду, что термин «деформация» часто употребляется в двойном смысле. Во-первых, как физическая величина (линейная и угловая деформация). Во-вторых, как синоним деформирования; в этом смысле существуют понятия простейших видов деформации бруса - растяжение и сжатие, срез, кручение, изгиб.

### 1.5. Закон Гука. Основные принципы

Проводя опыты над различного типа пружинами, стержнями и нитями, английский учёный **Р. Гук** пришёл к выводу, что при их нагружении и при упругих деформациях в материале перемещения пропорциональны величине действующей силы  $\delta = kP$ . Эта зависимость получила название **закона Гука**. Однако коэффициент пропорциональности  $k$  зависит как от свойств материала, так и от геометрических параметров системы. В современной трактовке **закон Гука устанавливает линейную или прямо пропорциональную зависимость между напряжениями и деформациями** в точке тела. Коэффициент пропорциональности зависит только от свойств материала. Таким образом, закон Гука отражает свойства идеальной упругости материала.

Тела (системы), для которых выполняется закон Гука, называются *линейно упругими*. Системы, для которых зависимость между напряжениями и деформациями является нелинейной, называются *физически нелинейными*. Если выполняется закон Гука для материала, но зависимость между перемещениями и силами является нелинейной (при относительно больших перемещениях), то система называется *геометрически нелинейной*. В общем случае, для *нелинейных систем* могут присутствовать нелинейности обоих типов - физическая и геометрическая.

В механике деформируемых тел при анализе расчётной модели используются три основных принципа: принцип начальных размеров, принцип суперпозиции и принцип Сен-Венана.

Согласно **принципу начальных размеров** для упругих систем, в которых перемещения малы, уравнения статики (равновесия) можно составлять для недеформированного состояния. Смысл принципа показан на примере стержневой системы (рис. 1.9). Применяя метод сечений и составляя уравнение равновесия для отсечённой части системы при  $\alpha_1 \approx \alpha$

$$\sum F_y = 0; \quad 2N \cos \alpha - P = 0; \quad N = \frac{P}{2 \cos \alpha},$$

можно достаточно просто найти внутренние силы в упругих элементах (стержнях). Принцип начальных размеров *неприменим для гибких систем*, в которых имеют место большие перемещения, и для *кинематически изменяемых систем*, допускающих перемещение системы как жёсткого целого.

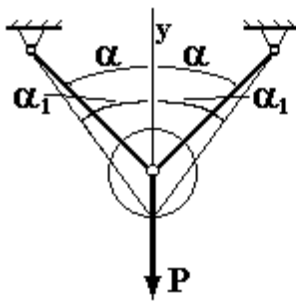


Рис. 1.9

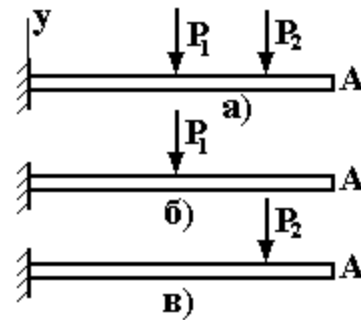
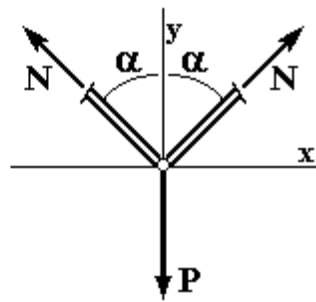


Рис. 1.10

В соответствии с **принципом суперпозиции (принципом независимости действия сил)** эффект от действия нескольких сил равен суммарному эффекту от раздельного действия каждой силы. При этом величина искомых параметров (перемещений, внутренних сил и т.д.) не зависит от порядка приложения внешних сил. Например, вертикальное перемещение концевого сечения ( $v_A$ ) консольной балки при совместном действии сил  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 1.10,а) равно алгебраической сумме перемещений при действии каждой силы (рис 1.10,б,в):

$$v_A (P_1, P_2) = v_A (P_1) + v_A (P_2).$$

Принцип суперпозиции справедлив только для систем, которые подчиняются закону Гука и принципу начальных размеров.

**Принцип Сен-Венана** устанавливает, что особенности приложения нагрузки не сказываются в упругом теле на расстояниях, превышающих характерные поперечные размеры. Например, если рассматривать случаи действия на малой площадке различных распределён-

ных нагрузок (рис. 1.11,а), причём равнодействующие этих поверхностных нагрузок одинаковые, то отличаться будут местные напряжения и деформации в пределах малой области. При удалении от места приложения нагрузки, на расстоянии порядка размера  $a$  площадки нагружения (см. рис. 1.11,а), напряжения и деформации будут практически одинаковы. Нагрузки, имеющие одинаковые равнодействующие усилия, называются *статически эквивалентными*. Таким образом, применяя принцип Сен-Венана, можно не учитывать особенности приложения внешних сил, но вне зоны их действия. Например, при расчёте троса на растяжение не играет роли способ приложения нагрузки: за счет подвески грузов или тяги через крюк (рис. 1.11,б). Отбрасывая части троса, примыкающие к его концам, и прикладывая статически эквивалентную нагрузку  $P$ , получаем единую расчётную модель стержня (см. рис. 1.11,б).

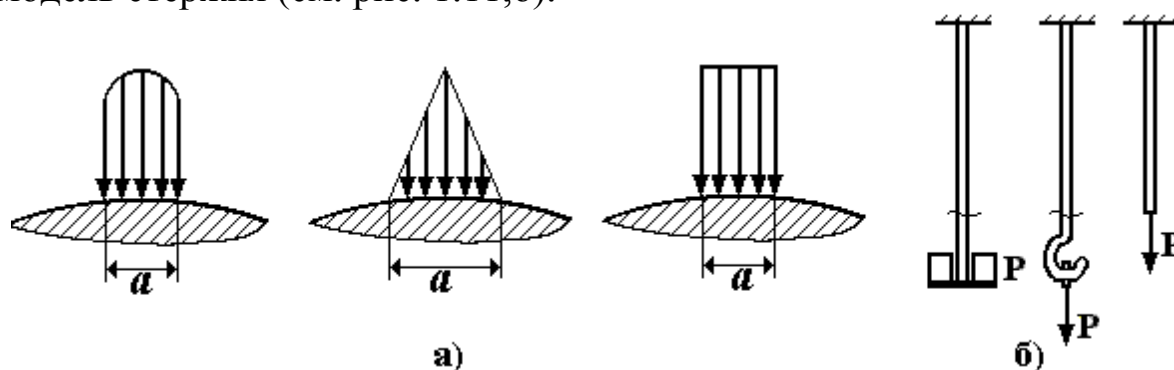


Рис. 1.11

Принцип Сен-Венана распространяется и на тела, имеющие области резкого изменения геометрической формы. Например, брус с отверстиями, зоной ступенчатого изменения сечения (рис. 1.12).

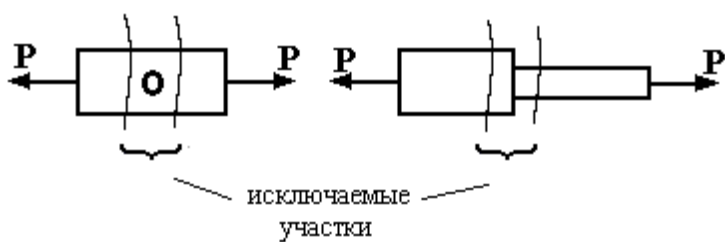


Рис. 1.12

В приближённых методах расчета, применяемых в сопротивлении материалов, часто используется *гипотеза плоских сечений* (гипотеза Бернулли): сечения бруса, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации. Эта гипотеза хорошо соблюдается, за исключением зон возмущения, оговариваемых принципом Сен-Венана.



## 2. Механические свойства материалов

Для оценки прочности и жесткости конструкций необходимо знать механические свойства используемых материалов, которые определяются при специальных испытаниях образцов. Рассмотрим процессы изучения механических свойств материалов при наиболее простых видах нагружения - растяжении и сжатии.

### 2.1. Напряженно-деформированное состояние образца

На рис. 2.1,а показана схема нагружения цилиндрического образца, который подвергается растяжению на испытательной машине. На достаточном удалении от концов образца выделяется его рабочий участок длиной  $l$ . Образец называется *нормальным*, если  $l=10d$ , если же  $l=5d$ , то *коротким*. Иногда для испытаний используются образцы прямоугольного поперечного сечения, выполненные из полосы.

На рис. 2.1,б показано нагружение и деформирование *рабочей части* образца. В соответствии с принципом Сен-Венана нагружение рабочей части образца не зависит от особенностей приложения нагрузки, а определяется равнодействующей внешних сил  $P$ . В поперечных сечениях образца на границах рабочей части возникают внутренние силы, интенсивность распределения которых характеризуется нормальными напряжениями  $\sigma$ . При растяжении рабочая часть образца удлиняется ( $\Delta l = l_1 - l$ ) в продольном направлении и сужается ( $\Delta d = d_1 - d$ ) в поперечном направлении. При этом нанесенные на поверхности образца поперечные параллельные линии не искривляются и остаются параллельными, а расстояния между ними увеличиваются. Это является экспериментальным подтверждением гипотезы плоских сечений (гипотезы Бернулли). Согласно этой гипотезе *сечение плоское до деформации остается плоским и после деформации*.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние образца при его деформировании в упругой области. Линейная деформация отрезка  $AB$  длиной  $S$  (см. рис. 2.1,б)  $\epsilon = \Delta S/S$  постоянна по сечению образца и не зависит от того, в каком месте рабочей части образца выделен этот отрезок. Отсюда следует, что продольная деформация в любой точке рабочей части образца одинакова и может определяться по формуле

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.1)$$

В данном случае, продольная деформация  $\epsilon$  - это отношение изменения длины участка к его первоначальной длине, т.е. относительное изменение длины участка.

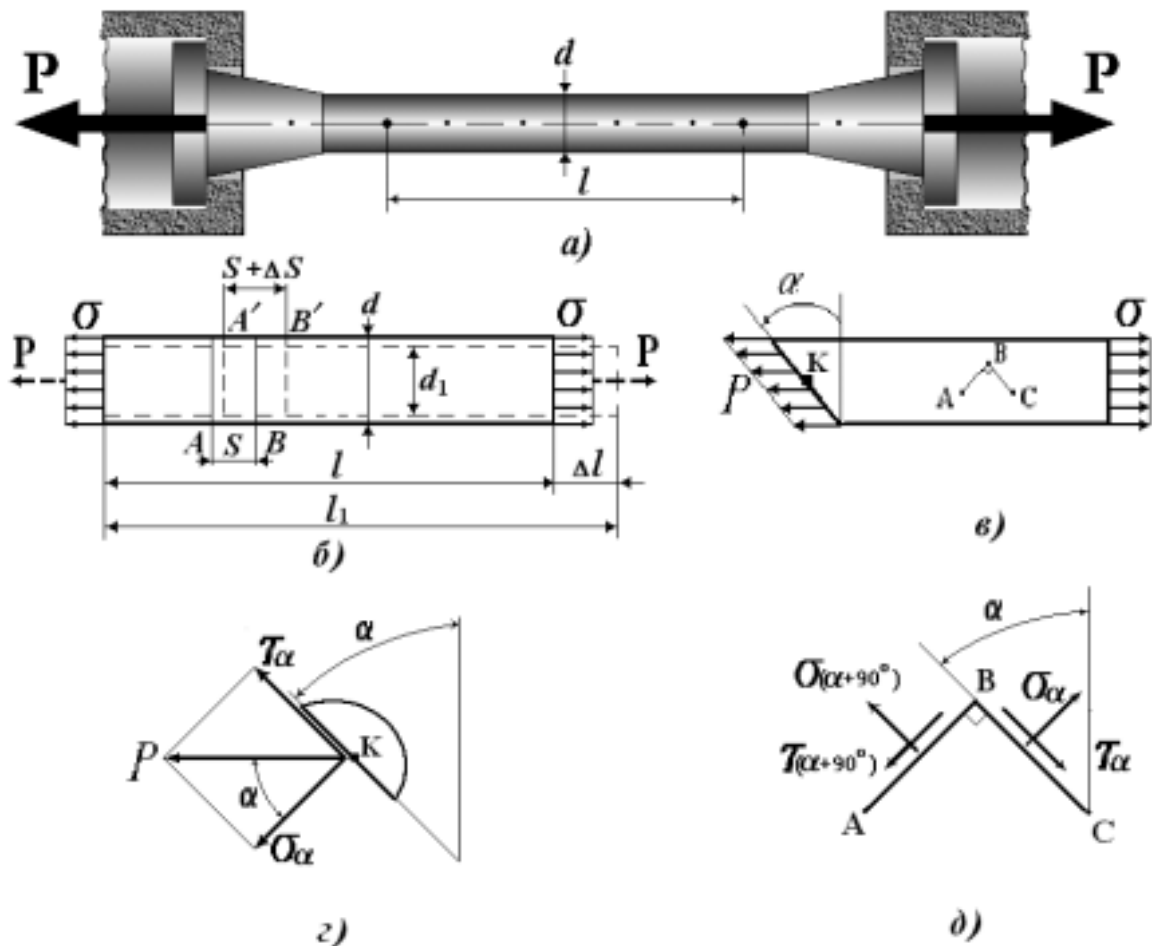


Рис. 2.1

Соответственно, поперечные деформации определяются отношением:

$$\epsilon' = \frac{\Delta d}{d}. \quad (2.2)$$

Из опыта следует, что *поперечные и продольные деформации* связаны соотношением:

$$\epsilon' = -\mu\epsilon, \quad (2.3)$$

где  $\mu$  - коэффициент Пуассона.

Коэффициент Пуассона может быть определен с использованием экспериментально замеренных поперечных и продольных деформаций:

$$\mu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right|. \quad (2.4)$$

Для изотропных материалов значения коэффициента Пуассона лежат в пределах  $0 < \mu < 0,5$ . Например, для сталей  $\mu = 0,25 \div 0,33$ .

Найдем *объемную деформацию* рабочей части образца:

$$\epsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V_1 - V}{V} = \frac{F_1 l_1}{F l} - 1,$$

где  $V = Fl$  - начальный объем рабочей части образца;  $F$  – площадь поперечного сечения образца до нагружения;  $V_1 = F_1 l_1$  - объем рабочей части образца после деформирования;  $F_1$  - площадь поперечного сечения образца после нагружения. Учитывая соотношения  $d_1 = d + \Delta d$ ,  $l_1 = l + \Delta l$  и формулы (2.1) - (2.3), получим:

$$\epsilon = \frac{(d + \Delta d)^2}{d^2} \cdot \frac{l + \Delta l}{l} - 1 = (1 - \mu\epsilon)^2 (1 + \epsilon) - 1 .$$

Пренебрегая членами с  $\epsilon^2$  и  $\epsilon^3$  как величинами более высокого порядка малости по сравнению с  $\epsilon$ , получим следующее выражение:

$$\epsilon_v = (1 - 2\mu) \epsilon . \quad (2.5)$$

Очевидно, что при растяжении  $\epsilon_v > 0$  и  $\epsilon > 0$ , поэтому  $\mu \leq 0,5$ .

В соответствии с постоянством деформаций по объему рабочей части образца приходим к заключению о неизменности напряжений во всех точках рабочей части. Такое напряженное состояние стержня (образца) называется *однородным* (точки стержня находятся в одинаковых условиях). Напряженное состояние участков образца переменного сечения (см. рис. 2.1,а) является неоднородным.

Нормальные напряжения  $\sigma$  и полные напряжения  $p$  соответственно в поперечных и наклонных сечениях рабочей части образца распределены равномерно (рис. 2.1,в). Отсюда следуют (см. рис. 2.1,б) соотношения:

$$\sigma = \frac{P}{F}; \quad p = \frac{P}{F_\alpha}, \quad (2.6)$$

где  $F_\alpha = F / \cos\alpha$  - площадь наклонного сечения.

Полные напряжения  $p$  в наклонном сечении (см. рис. 2.1,в) находятся из условия равновесия выделенной части:

$$pF_\alpha = \sigma F \quad \text{или} \quad p = \sigma \cos\alpha \quad (2.7)$$

Полные напряжения  $p$  в произвольной точке  $K$  (рис.2.1,в,г) могут быть разложены на нормальные и касательные напряжения:

$$\sigma_\alpha = p \cos\alpha; \quad \tau_\alpha = p \sin\alpha$$

Эти напряжения с учетом (2.7) определяются формулами:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2\alpha; \quad \tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha \quad (2.8)$$

Анализ формул (2.8) показывает, что нормальные напряжения  $\sigma_\alpha$  максимальны в поперечных сечениях ( $\alpha = 0$ ) стержня (образца), а касательные напряжения  $\tau_\alpha$  максимальны в сечениях под углом  $\alpha = 45^\circ$ , где они равны:

$$\tau_{\max} = \sigma / 2. \quad (2.9)$$

В продольных сечениях ( $\alpha = 90^\circ$ ) касательные и нормальные напряжения отсутствуют.

Используя соотношения (2.8), можно получить, что для взаимно перпендикулярных площадок (см. рис. 2.1,в) справедливы равенства:

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90} = \sigma, \quad |\tau_\alpha| = |\tau_{\alpha+90}|. \quad (2.10)$$

Из первого равенства следует, что сумма нормальных напряжений во взаимно перпендикулярных площадках есть величина постоянная.

Во втором равенстве проявляется общее свойство касательных напряжений - **закон парности касательных напряжений**: во взаимно перпендикулярных площадках действуют равные по величине касательные напряжения, направленные либо от ребра, либо к ребру пересечения этих площадок.

## 2.2. Испытание на растяжение

Образец из соответствующего материала растягивается на испытательной машине (см. рис. 2.1,а). Обычно испытание образца проводится до разрушения. В результате испытания образца получается **диаграмма растяжения** - кривая зависимости между растягивающей силой  $P$  и удлинением образца  $\Delta l$ , записанная автоматически диаграммным аппаратом испытательной машины. На рис.2.2,а показана характерная диаграмма растяжения для пластичного материала.

Диаграмма растяжения зависит от размеров образца. Для получения прочностных характеристик материала диаграмму растяжения перестраивают в координатах  $\sigma$ - $\epsilon$  с использованием формул (2.1), (2.6):

$$\sigma = \frac{P}{F}; \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

где  $F$  и  $l$  – площадь поперечного сечения и длина рабочей части образца до нагружения.

При этом получается **диаграмма условных напряжений**, показанная на рис. 2.2,б сплошной линией. Если по оси ординат откладывать напряжения, определяемые с учетом изменения площади поперечного сечения образца, а по оси абсцисс - наибольшие деформации в данный момент нагружения, то получается **диаграмма истинных напряжений**. Эта диаграмма показана на рис. 2.2,б пунктирной линией (заметное отличие от условной диаграммы наблюдается только от точки  $D$  на участке  $DK$ ).

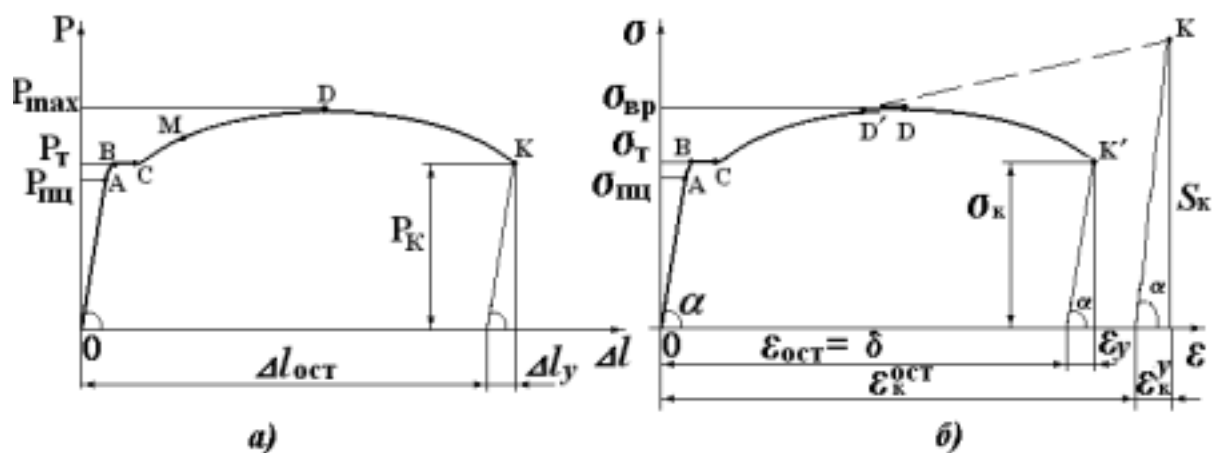


Рис. 2.2

Рассмотрим характерные участки и точки на диаграммах.

**Участок OA** носит название **зоны упругости** - материал подчиняется **закону Гука** при одноосном напряженном состоянии:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.11)$$

т.е. **напряжения прямо пропорциональны деформациям**. Коэффициент пропорциональности **E** – **модуль Юнга** (модуль продольной упругости, модуль упругости первого рода). Численно **E = tgα** (см. рис. 2.2,б). Например, для сталей **E = 190-210 ГПа**.

Наибольшее напряжение, до которого выполняется закон Гука, называется **пределом пропорциональности**:

$$\sigma_{i\ddot{o}} = \frac{P_{i\ddot{o}}}{F}. \quad (2.12)$$

При нагружении до **P = P\_шц** и последующей разгрузке образец принимает первоначальные размеры, т.е. деформируется упруго.

Вычисляя напряжения по формуле (2.6) при заданной нагрузке и экспериментально определяя деформации **ε**, можно найти величину модуля Юнга для данного материала:

$$E = \sigma / \varepsilon. \quad (2.13)$$

**Модуль Юнга и коэффициент Пуассона являются упругими характеристиками материала и при нормальных условиях зависят только от его свойств.**

**Участок BC** называется **площадкой текучести** или участком общей текучести. На этой стадии нагружения происходит существенное изменение длины образца без заметного увеличения нагрузки. Явление роста деформации без увеличения нагрузки (напряжений) называется **текучестью** материала.

Напряжение, при котором наблюдается явление текучести материала, называется **пределом текучести**:

$$\sigma_T = \frac{P_T}{F}. \quad (2.14)$$

При испытании специальных образцов можно наблюдать, что на стадии общей текучести полированная поверхность образца покрывается сеткой тонких линий или *полос скольжения* (рис. 2.3,а), называемых также *линиями Чернова*. Эти линии являются следами плоскостей скольжения (сдвига) частиц материала относительно друг друга. Они совпадают с плоскостями действия максимальных касательных напряжений  $\tau_{\max}$  и наклонены под углом  $45^\circ$  к оси образца (см. (2.9)).

В упрощенном виде механизм удлинения образца в результате соскальзывания кристаллических слоев материала по наклонным плоскостям показан на рис. 2.3,б. Соответствующие деформации образца, связанные с действием касательных напряжений, называются пластическими.

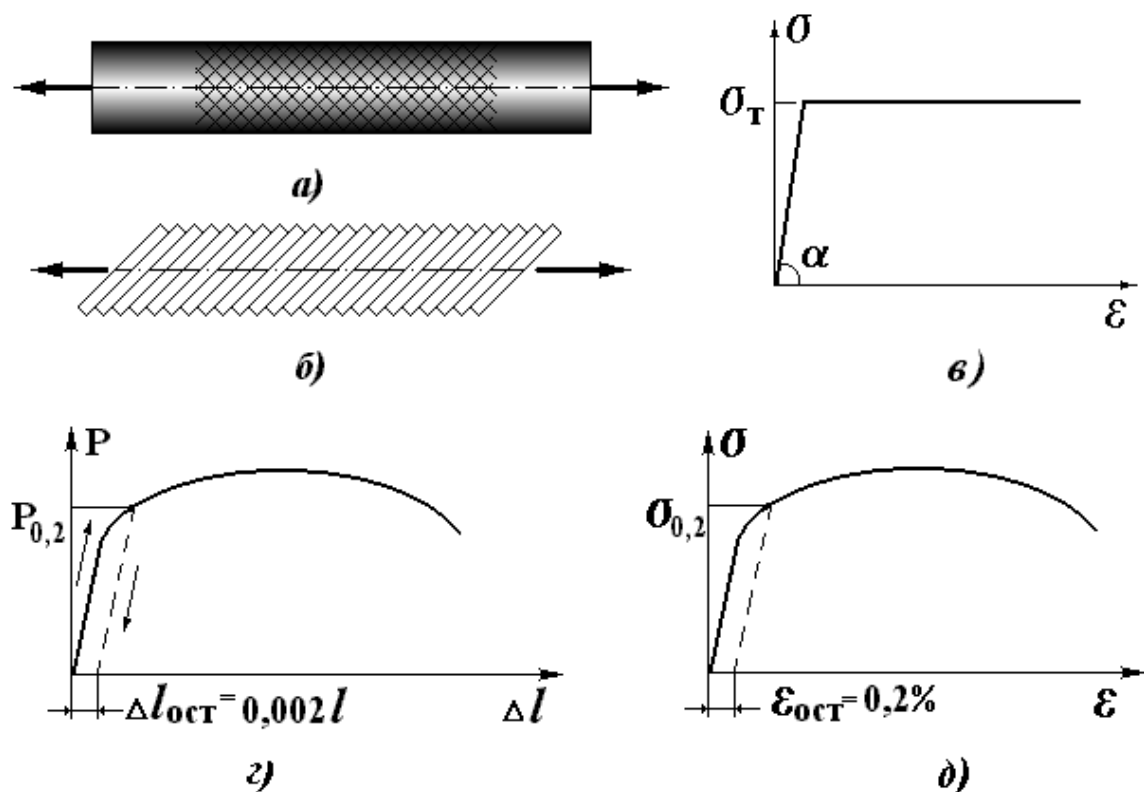


Рис. 2.3

Если появились *пластические деформации*, то при разгрузке образец не принимает первоначальные размеры. При этом образец получает *остаточные удлинения*  $\Delta l_{\text{ост}}$  и *деформации*  $\epsilon_{\text{ост}}$ . Для большинства элементов конструкций возникновение пластических дефор-

маций недопустимо, поэтому напряжения  $\sigma_T$  считаются *предельными*.

При расчетах часто используют схематизированную диаграмму *упругопластичного* материала - *диаграмму Прандтля* (рис. 2.3,в). Экспериментально установлено, что пластическое деформирование протекает без изменения объема материала и  $\mu \rightarrow 0.5$ , как следует из (2.5). Это физически объяснимо, так как пластические деформации определяются сдвигом слоев материала, а не увеличением расстояний между частицами, как в упругой зоне. В тех случаях, когда на диаграмме растяжения отсутствует площадка текучести (рис. 2.3,г), для материала определяется *условный предел текучести* (рис. 2.3,д):

$$\sigma_{0,2} = \frac{P_{0,2}}{F}. \quad (2.15)$$

Напряжение, при котором остаточная деформация равна 0,2% ( $\epsilon_{ост} = 0,002 = 0,2\%$ ) называется *условным пределом текучести*.

Сила  $P_{0,2}$  определяется с учетом *закона разгрузки*, который устанавливает, что при снятии нагрузки материал деформируется упруго в соответствии с законом Гука (см. рис. 2.3,г).

*Участок CD* называется *зоной упрочнения*. На этой стадии удлинение образца происходит при возрастании нагрузки и напряжений, но гораздо более медленном, чем при упругой деформации.

В конце зоны упрочнения сила, воспринимаемая образцом, достигает максимального значения (см. рис. 2.2). Напряжения при максимальной силе, действующей на образец, называются *временным сопротивлением*  $\sigma_{вр}$  или *пределом прочности при растяжении*:

$$\sigma_{вр} = \frac{P_{max}}{F}. \quad (2.16)$$

*Участок DK (D'K')* называется зоной *местной текучести*. На этой стадии нагружения происходит интенсивное развитие местного сужения образца - так называемой *шейки* (рис. 2.4,а).

Удлинение образца происходит в основном за счет увеличения местных деформаций в зоне шейки. Вследствие резкого сужения образца в шейке сила  $P$  уменьшается. Разрушение образца происходит при нагрузке  $P_k$  (см. рис. 2.2,а). До момента разрушения полное удлинение образца состоит из двух частей  $\Delta l = \Delta l_y + \Delta l_{ост}$ , где  $\Delta l_y$  - упругое удлинение,  $\Delta l_{ост}$  - остаточное удлинение. Соответственно, получают  $\epsilon = \epsilon_y + \epsilon_{ост}$  и различают упругую и остаточную деформацию (см. рис. 2.2,б). После разрушения в образце остаётся пластическое (остаточное) удлинение  $\Delta l_{ост}$ , а упругая часть удлинения  $\Delta l_y$  исчезает.

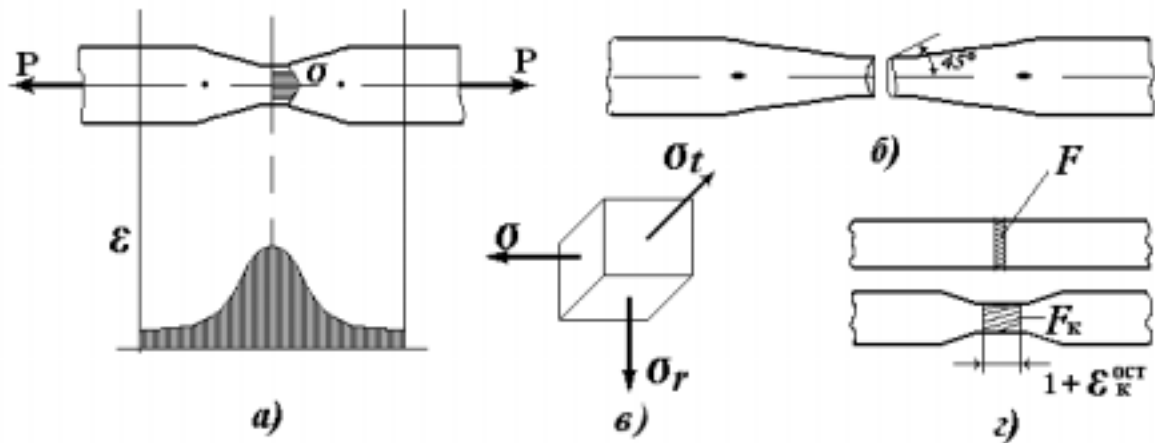


Рис. 2.4

При снижении  $P$  уменьшаются условные напряжения на участке  $DK'$ , которые можно считать напряжениями вне зоны шейки. В самой же шейке напряжения возрастают, происходит разрушение образца по типу "чашка и конус" (рис.2.4,б). Это объясняется влиянием сдвигов на периферии сечений шейки и **объемным напряженным состоянием** (рис. 2.4,в) ближе к центру, где и начинается образование трещины от действия продольных  $\sigma$ , окружных  $\sigma_t$  и радиальных  $\sigma_r$  напряжений. Таким образом, в поверхностном слое шейки наблюдается пластический характер разрушения, а в центральной части разрушение носит хрупкий характер. В момент разрушения *среднее напряжение в шейке* или *истинное сопротивление разрыву* (см. рис. 2.2,б) определяется по формуле

$$S_k = \frac{P_k}{F_k}, \quad (2.17)$$

где  $P_k$  - нагрузка в момент разрушения (см. рис. 2.2,а);

$F_k$  - площадь поперечного сечения шейки.

Величина  $\epsilon_k$  находится из условия равенства объема материала до и после испытания (рис. 2.4,г). Вблизи места разрыва часть образца единичной длины до испытания имеет объем  $F \cdot 1$ , а после разрыва  $F_k (1 + \epsilon_k^{oct})$ .

$$\text{Тогда } F = F_k (1 + \epsilon_k^{oct}) \text{ или } \epsilon_k^{oct} = \frac{F}{F_k} - 1.$$

С учетом закона разгрузки получим:

$$\epsilon_k = \epsilon_k^y + \epsilon_k^{oct} = \epsilon_k + \epsilon_k^y + \epsilon_k^{oct} = \frac{S_k}{E} + \frac{F}{F_k} - 1.$$



Касательная D'K (см. рис. 2.2,б) приближенно характеризует диаграмму истинных напряжений. До т.D условная и истинная диаграммы практически совпадают. Координаты т.K' определяются по формулам:

$$\sigma_K = \frac{P_K}{F}; \quad \epsilon_{K'} = \epsilon_y + \epsilon_{ост} = \frac{\sigma_{\hat{\epsilon}}}{E} + \frac{\Delta l_{ост}}{l}$$

Отметим, что основными прочностными характеристиками пластичного материала при растяжении являются предел пропорциональности  $\sigma_{пц}$ , предел текучести  $\sigma_T$ , предел прочности  $\sigma_{вр}$ .

Рассмотрим теперь *характеристики пластичности* материала.

Средняя остаточная деформация после разрыва  $\epsilon_{ост} = \Delta l_{ост} / l$  (см. рис. 2.2,б), выраженная в процентах, обозначается  $\delta$  и называется *относительным остаточным удлинением при разрыве*:

$$\delta\% = \frac{\Delta l_{ост}}{l} 100\% = \frac{l_K - l}{l} 100\%, \quad (2.18)$$

где  $l_K$  - длина рабочей части образца после разрыва.

*Относительное остаточное поперечное сужение* определяется по формуле

$$\psi\% = \frac{F - F_K}{F} \cdot 100\%. \quad (2.19)$$

Параметры  $\delta$  и  $\psi$  являются важнейшими характеристиками пластических свойств материала.

Обычно для *пластичных* материалов  $\delta > 10\%$ , для *малопластичных* материалов  $\delta = 5-10\%$ , для *хрупких* материалов  $\delta < 5\%$ .

Хрупкие материалы по своим свойствам резко отличаются от пластичных. На рис. 2.5 показаны характерные диаграмма растяжения и диаграмма напряжений для хрупкого материала. Сравнивая поведение образцов из пластичного и хрупкого материалов при растяжении и соответствующие диаграммы напряжений, отметим следующее.

1. Строго говоря, для хрупкого материала не соблюдается закон Гука, и линейная зависимость  $\sigma = E\epsilon$  является приближенной (рис. 2.5,б).

2. Явления текучести, упрочнения и образования шейки у образцов из хрупкого материала не наблюдаются.

3. Хрупкие материалы обладают малым сопротивлением разрыву и разрушаются при растяжении внезапно по поперечному сечению образца (рис. 2.5,а). Единственной прочностной характеристикой хрупкого материала при растяжении является предел прочности  $\sigma_{вр}$  (см. рис. 2.5,б), который определяется по формуле (2.16).

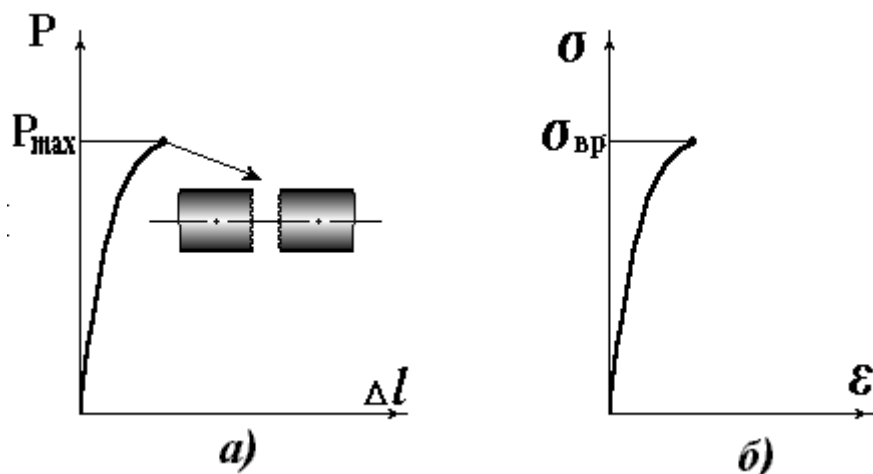


Рис. 2.5

### 2.3. Испытание на сжатие

При испытании металлических материалов на сжатие применяются короткие цилиндрические образцы (рис. 2.6,а) высотой  $h = (2-3)d$ . Это позволяет избежать продольного изгиба образцов при сжатии. При испытании строительных материалов используются образцы кубической формы (рис. 2.6, б).

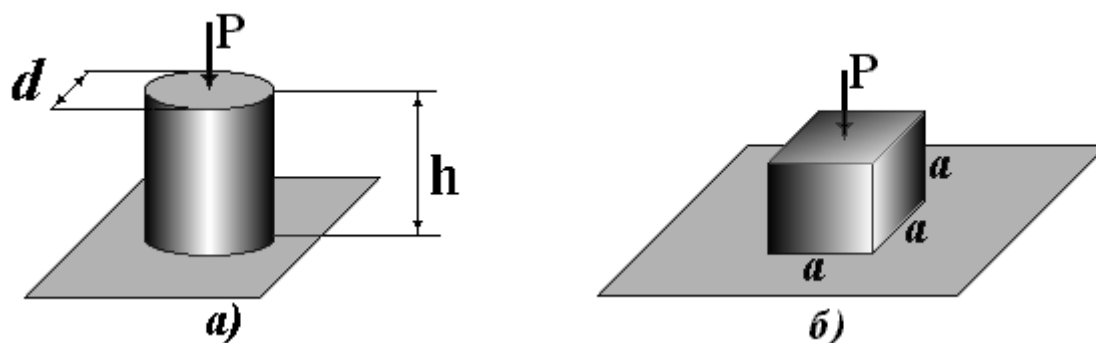


Рис. 2.6

На рис. 2.7,а показана *диаграмма сжатия* для пластичного материала, а на рис. 2.7,б - соответствующая диаграмма условных напряжений. Эти диаграммы получаются так же, как аналогичные диаграммы при испытании на растяжение.

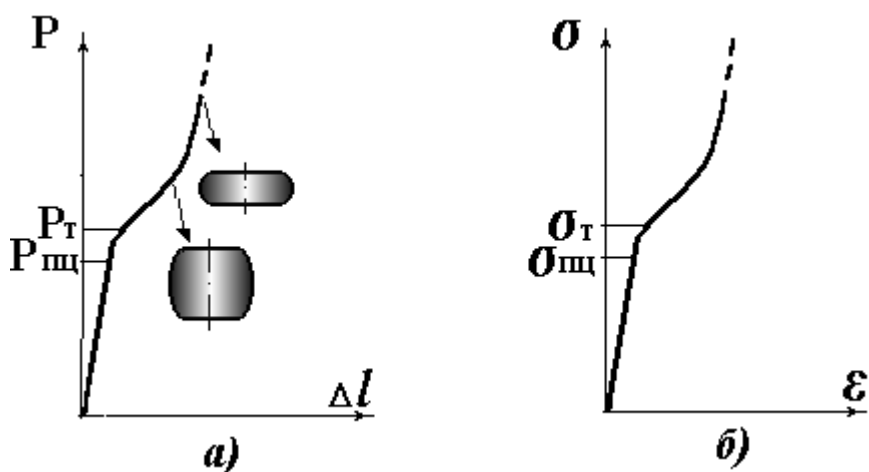


Рис. 2.7

При сжатии образцы из пластичного материала не разрушаются. После появления пластических деформаций и дальнейшего нагружения образец принимает бочкообразную форму (см. рис. 2.7,а) вследствие наличия сил трения на торцевых поверхностях. Предела прочности на сжатие для пластичных материалов не существует, так как отсутствует  $P_{\max}$ .

Сравним диаграммы, полученные при испытании на сжатие и растяжение (см. рис. 2.2 и рис. 2.7).

Для пластичного материала при сжатии также справедлив закон Гука (2.3), причем при сжатии и растяжении равны модули упругости  $E$ .

Для большинства пластичных материалов пределы пропорциональности ( $\sigma_{\text{щ}}$ ) и пределы текучести ( $\sigma_{\text{т}}$ ) при растяжении и сжатии приблизительно одинаковы, и в этом смысле говорят, что пластичные материалы одинаково работают на растяжение и сжатие. Однако, площадка текучести на диаграмме сжатия ярко не выражена.

Для малопластичных материалов обычно  $\sigma_{\text{ТС}} > \sigma_{\text{ТР}}$  (как правило, это условные пределы текучести материала при сжатии и растяжении).

Диаграмма сжатия хрупкого материала (рис. 2.8,а) внешне похожа на диаграмму растяжения (рис. 2.5,а), хотя поведения образцов при разрушении различаются. При сжатии образец разрушается от сдвига частиц по направлению действия максимальных касательных напряжений  $\tau_{\max}$  под углом  $45^\circ$  к оси. При сжатии единственной прочностной характеристикой хрупкого материала является **предел прочности при сжатии**  $\sigma_{\text{вс}}$  (рис. 2.8,б). Причем обычно  $\sigma_{\text{вс}} > \sigma_{\text{вр}}$ , т.е. хрупкий материал лучше работает на сжатие, чем на растяжение. Например, для различных марок чугуна  $\sigma_{\text{вс}}/\sigma_{\text{вр}} = 2 - 5$ .

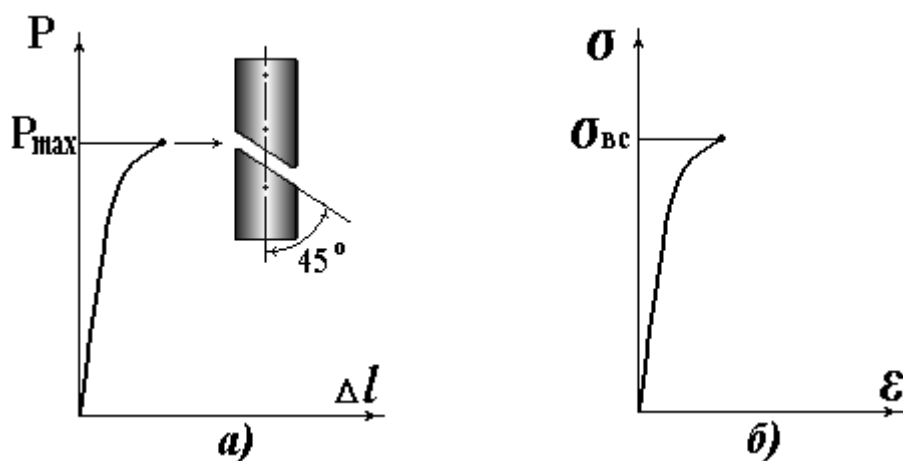


Рис. 2.8

## 2.4. Влияние различных факторов на механические свойства материалов

Отмеченные выше свойства материалов относились к испытаниям в нормальных условиях, т.е. при температуре  $20^{\circ}\text{C}$  и при скоростях деформации, обеспечивающих статический характер нагружения. В то же время эксплуатационные режимы работы реальных конструкций чаще всего отличаются от указанных условий, поэтому экспериментально изучается влияние различных факторов на механические и упругие характеристики материалов.

### 2.4.1. Упрочнение материала

Если образец нагрузить силой  $P > P_T$  (т.М на диаграмме, см. рис. 2.2,а), то процесс разгрузки изобразится прямой: линия  $ML$ , параллельна линии  $OA$  на диаграмме (рис. 2.9,а). При полной разгрузке образец окажется длиннее на величину  $\Delta l_{\text{ост}}$ .

При повторном нагружении образца диаграмма растяжения представлена на рис. 2.9,б. Отрезок  $OM$  больше отрезка  $OA$ , т.е. для материала происходит увеличение предела пропорциональности  $\sigma_{\text{пц}}$  и соответствующей величины  $\Delta l_y$ .

*Явление повышения упругих и прочностных свойств материала в результате предварительного пластического деформирования носит название **упрочнения** или **наклепа**.* После предварительного пластического деформирования ухудшаются пластические свойства материала, так как уменьшается  $\Delta l_{\text{ост}}$  (см. рис. 2.9,б), а значит уменьшается  $\delta$ .

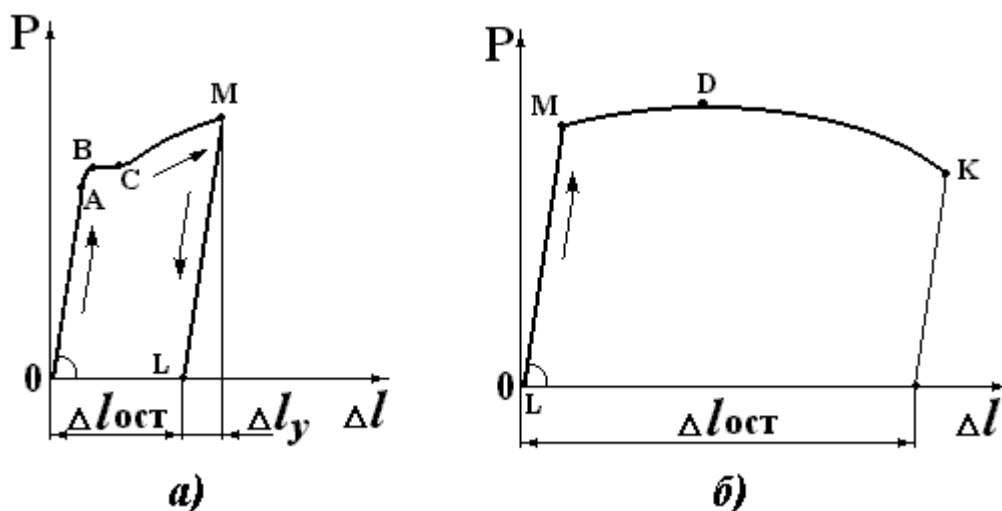


Рис. 2.9

К наклёпу, часто имеющему место в технике, относятся по-разному. В некоторых случаях он полезен и его создают искусственно (предварительная вытяжка цепей, тросов, опрессовка трубопроводов и т.п.), в других - нежелателен и его устраняют (отжиг деталей перед штамповкой и др.).

#### 2.4.2. Влияние термической обработки и температуры

Способы термической обработки широко применяются для получения необходимых механических характеристик материалов. Закалка стали значительно повышает предел текучести и предел прочности, но сильно снижает пластические свойства. При этом модуль упругости практически не меняется. Обратный эффект имеет применение отжига.

На механические характеристики металлов оказывает влияние температура. На рис. 2.10 показаны зависимости от температуры механических и упругих характеристик для малоуглеродистой стали. При  $T > 300^\circ\text{C}$  сильно уменьшаются прочностные характеристики стали. При низких температурах ( $T < 0^\circ\text{C}$ ) прочностные характеристики несколько повышаются, но ухудшаются пластические свойства стали.

#### 2.4.3. Влияние скорости деформирования

При увеличении скорости нарастания нагрузки, а следовательно скорости роста напряжений и деформаций, все пластичные материалы заметно увеличивают прочностные характеристики ( $\sigma_T$ ,  $\sigma_{вр}$ ) и ухудшают пластические свойства. Для сравнения на рис. 2.11 приведены диаграммы напряжений динамического (кривая 1) и статического (кривая 2) растяжения. Наиболее заметно сказывается влияние скорости деформирования при высоких температурах.

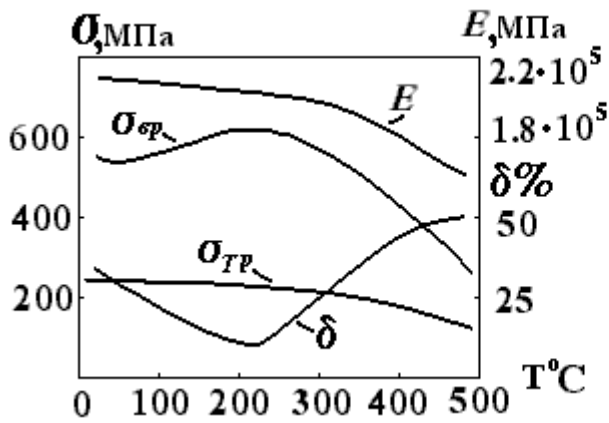


Рис. 2.10

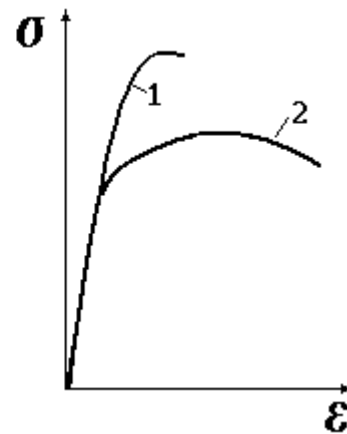


Рис. 2.11

#### 2.4.4. Ползучесть материала и релаксация напряжений

На напряжения и деформации в нагруженных деталях оказывает влияние временной фактор, т.е. проявляется влияние длительного воздействия нагрузки.

**Ползучестью материала** называется явление увеличения деформации с течением времени при постоянном напряжении. Зависимости  $\epsilon(t)$  показаны на рис. 2.12,а. В начальный промежуток времени  $0 - t_0$ , в течение которого прикладывается нагрузка, соответствующая уровню напряжений  $\sigma_0$ , в материале создается начальная деформация  $\epsilon_0$  (упругая или упругопластическая). Далее с течением времени без увеличения нагрузки происходит рост деформаций. В течение какого-то времени в материале наблюдается установившаяся ползучесть, характеризующаяся постоянной скоростью деформации (участок **AB** на интервале  $t_1-t_2$ , см. рис.2.12,а), которая может происходить очень длительное время (иногда годами).

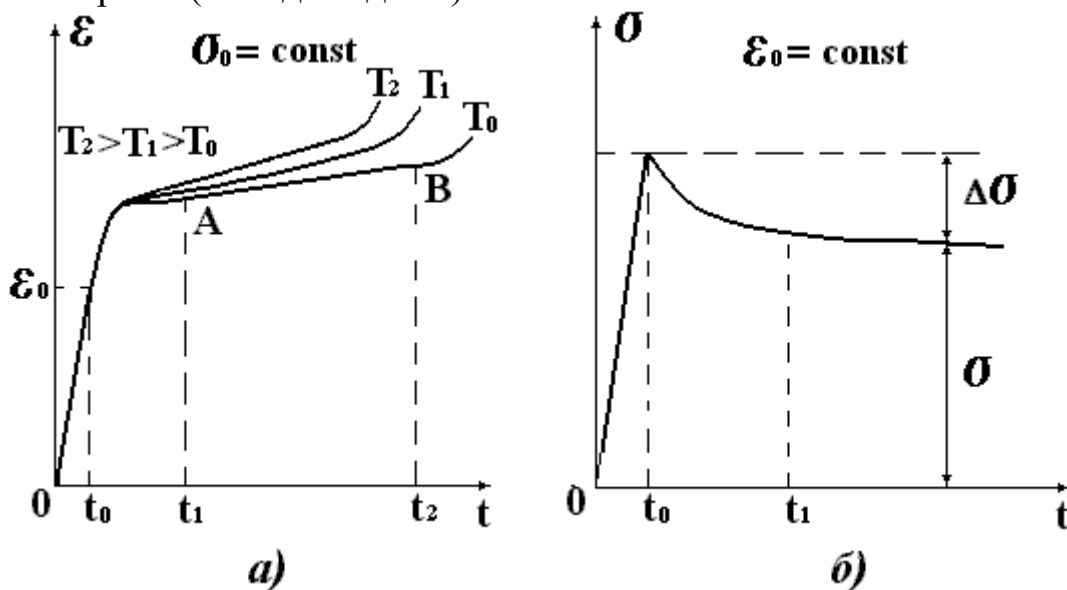


Рис. 2.12

Чем выше напряжение  $\sigma_0$ , тем более интенсивно происходит ползучесть. Особенно интенсивно явление ползучести проявляется для конструкций, работающих при высоких температурах (двигатели, химическая аппаратура и др.). С увеличением температуры  $T$  кривые ползучести идут круче (см. рис. 2.12,а).

**Релаксацией напряжений** называется явление снижения напряжений с течением времени при постоянной деформации. Зависимость  $\sigma(t)$  показана на рис. 2.12,б. Снижение напряжений наиболее интенсивно происходит в начальный промежуток времени  $t_0 - t_1$ , а затем в материале устанавливается постоянное напряжение. Чем выше деформация  $\epsilon_0$ , тем более заметно проявляется релаксация напряжений (увеличивается  $\Delta\sigma$ ). У многих материалов релаксация напряжений особенно заметна при высоких температурах. Например, происходит ослабление затяжки болтовых соединений, работающих в условиях высоких температур.

## 2.5. Расчёт на прочность. Коэффициент запаса

При проектировании конструкции выбираются необходимые критерии ее работоспособности, т.е. устанавливаются условия, при которых конструкция будет способна выполнять рабочие функции. В связи с этим существуют различные методы расчета конструкций (расчеты на прочность, жесткость, устойчивость и др.). В общем машиностроении широко применяется метод расчета на прочность по напряжениям.

### 2.5.1. Условие прочности

В результате расчетного анализа конструкции определяются напряжения в её элементах. С другой стороны, в результате испытаний получают прочностные характеристики материалов ( $\sigma_T$ ,  $\sigma_B$ ), определяющие предельное поведение материала (возникновение остаточных деформаций, разрушение). Для того чтобы конструкция была выдерживать действующие нагрузки и гарантировать её прочность с некоторым запасом, принимается **условие прочности**, которое для конструкции из пластичного материала имеет вид:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (2.20)$$

где  $\sigma_{\max}$  - наибольшие напряжения в некоторой точке конструкции;

$[\sigma]$  – допускаемое напряжение.

Напряжения  $\sigma_{\max}$  выбираются на основе общего расчёта конструкции и анализа напряжений в её элементах. Допускаемое напряже-

ние выбирается меньше предельного напряжения для данного материала. В частности, допускаемое напряжение для конструкций из пластичного материала определяется по формуле

$$[\sigma] = \sigma_T / n_T, \quad (2.21)$$

где  $\sigma_T$  - предел текучести для данного материала;  $n_T$  - коэффициент запаса по отношению к пределу текучести.

Для конструкций из хрупких материалов используют два условия прочности:

$$\begin{aligned} \sigma_{p,\max} &\leq [\sigma]_p; \\ \sigma_{c,\max} &\leq [\sigma]_c; \end{aligned} \quad (2.22)$$

где  $\sigma_{p,\max}$ ,  $\sigma_{c,\max}$  - максимальные растягивающие и сжимающие напряжения в опасных точках;  $[\sigma]_p$ ,  $[\sigma]_c$  - допускаемые напряжения при растяжении и сжатии.

Допускаемые напряжения определяются соотношениями:

$$[\sigma]_p = \frac{\sigma_{\text{âä}}}{n_{\text{â}}}; \quad [\sigma]_c = \frac{\sigma_{\text{вс}}}{n_{\text{в}}}, \quad (2.23)$$

где  $n_{\text{в}}$  - коэффициент запаса по отношению к пределу прочности.

Таким образом, для конструкций из пластичных и хрупких материалов смысл условия прочности очевиден: **максимальные напряжения не должны превышать допускаемых напряжений** для материала детали.

На рис. 2.13 показаны диаграммы напряжений для пластичного (а) и хрупкого (б, в) материалов. На диаграммах напряжений допускаемые напряжения (2.21), (2.23) определяют те значения, которые не должны превосходить действующие напряжения ни в одной точке нагруженной детали.

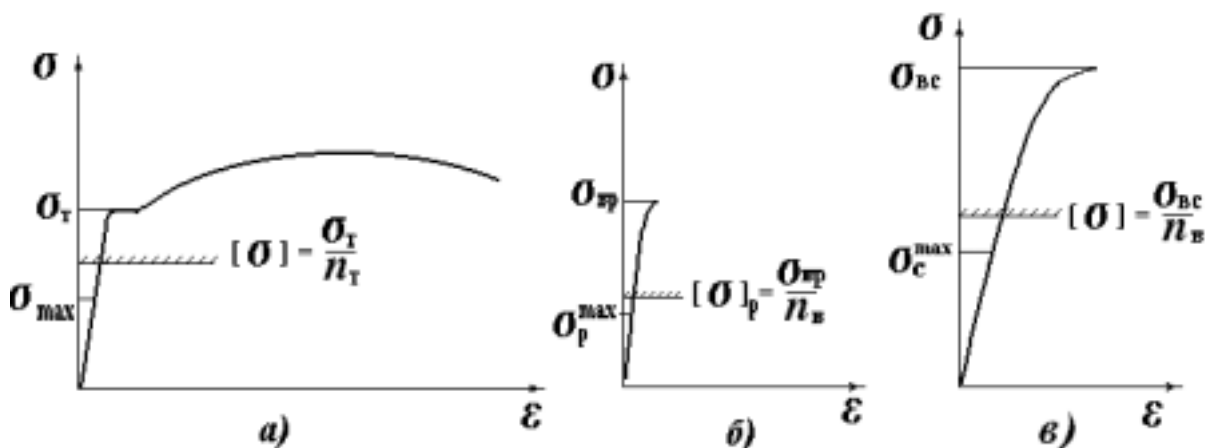


Рис. 2.13



Нередко оценку прочности делают по коэффициенту запаса:

$$\mathbf{n} \geq [\mathbf{n}], \quad (2.24)$$

где  $\mathbf{n}$  – расчётный коэффициент запаса прочности;  $[\mathbf{n}]$  – допускаемое значение запаса прочности.

Коэффициент запаса  $\mathbf{n}$  определяется для наиболее опасной точки:

$$\mathbf{n} = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{max}}, \quad (2.25)$$

где  $\sigma_{пред}$  - предельное напряжение для данного материала ( $\sigma_T$  для пластичного материала и  $\sigma_B$  для хрупкого материала).

С использованием условий прочности можно решать следующие задачи:

1. Подбор геометрических параметров детали при заданной нагрузке и допускаемом напряжении (проектировочный расчет).
2. Определение максимально допустимой нагрузки, если известны геометрические параметры и допускаемые напряжения.
3. Проверка прочности, если известны геометрические параметры, нагрузка, допускаемые напряжения (проверочный расчет).

### 2.5.2. Коэффициент запаса

Выбор коэффициента запаса требует тщательного обоснования. С одной стороны, при недостаточной его величине может произойти нарушение несущей способности конструкции (например, в результате случайного кратковременного увеличения нагрузки). С другой стороны, неоправданное завышение его величины приведет к значительному увеличению материалоемкости конструкции, а в ряде случаев - и к невозможности выполнения необходимых функций (например, в авиации). При назначении коэффициента запаса учитывается имеющийся опыт эксплуатации аналогичных конструкций, а также и влияние различных факторов. В частности, следует принимать во внимание такие факторы.

1. **Функциональные требования.** Величина  $\mathbf{n}$  существенно зависит от назначения конструкции, использующейся в той или иной отрасли техники. Например, в самолётостроении коэффициент запаса равен 1,8-2,5, а в строительстве он может быть и больше 5.

2. **Расчетные и экспериментальные методы исследования.** Совершенствование этих методов позволяет получать более достоверную и обширную информацию по анализу конструкций, а следовательно, и снижать величину  $\mathbf{n}$ .

3. **Свойства материалов.** Для конструкций из пластичных материалов величина  $n$  выбирается обычно меньше, чем при использовании хрупких материалов. Это объясняется большей однородностью пластичного материала, а также и различием возможных последствий при превышении предельных напряжений в опасных точках – появление остаточных деформаций или разрушение элемента конструкции.

4. **Характер действия нагрузки.** При статических нагрузках величина  $n$  выбирается меньшей, чем при динамических нагрузках. Это связано с неточностью определения динамических нагрузок, различием в характере поведения и разрушения материала при статическом и динамическом воздействии и другими причинами.

5. **Внешняя среда.** Наличие агрессивной среды существенно сказывается на поведении материала в процессе нагружения, на механических свойствах материалов. В таких случаях обычно увеличивают коэффициент запаса по сравнению с его величиной при нормальных условиях.

Коэффициент запаса и допускаемые напряжения не являются раз и навсегда установленными параметрами в расчетной практике. По мере накопления опыта проектирования, повышения уровня технологии изготовления и эксплуатации конструкций, степени совершенствования методов анализа конструкций происходит постепенное уменьшение величины коэффициента запаса и повышение допускаемых напряжений.

### 3. Растяжение и сжатие

Растяжение или сжатие бруса вызывается действием внешних сил вдоль оси бруса. При растяжении в поперечных сечениях бруса (стержня) возникают только нормальные силы  $N$ . В предыдущем разделе были рассмотрены простейшие схемы растяжения (рис. 3.1,а) и сжатия (рис. 3.1,б) при испытании образцов.

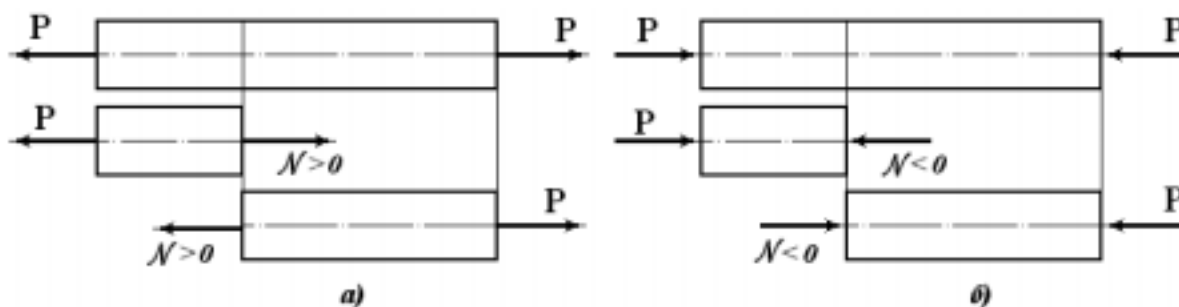


Рис. 3.1

Принято, что при растяжении нормальная сила положительная ( $N > 0$ ) и направлена от сечения, а при сжатии нормальная сила отрицательная ( $N < 0$ ) и направлена к сечению. В рассматриваемых простых случаях при растяжении  $N = P$  (см. рис. 3.1,а) и при сжатии  $N = -P$  (см. рис. 3.1,б). Рассмотрим определение нормальных сил в более сложных случаях.

#### 3.1. Определение нормальных сил

Нормальная сила  $N$  в произвольном сечении стержня определяется *по методу сечений*. Рассмотрим нагружение стержня сосредоточенными силами и равномерной погонной нагрузкой  $q_i = const$  (рис. 3.2,а).

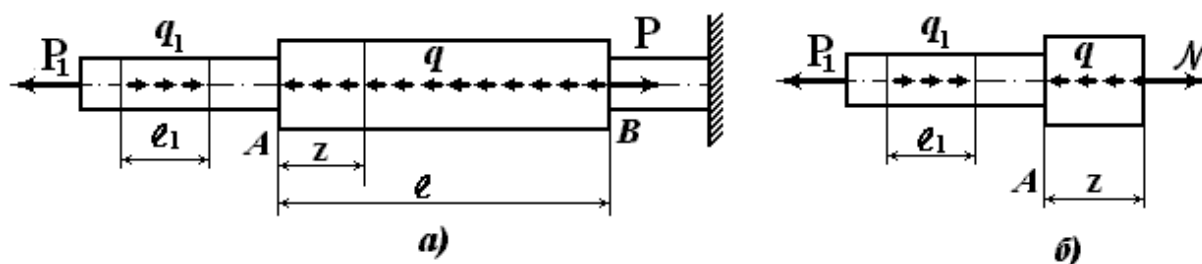


Рис. 3.2

В произвольном сечении бруса на участке  $AB$  нормальная сила  $N$  определяется из условия равновесия отсеченной части (рис. 3.2,б). В данном случае отброшена правая часть стержня, так как в заделке предварительно реакция не определена. Нормальная сила направлена

от сечения, т.е. в положительном направлении. Уравнение равновесия имеет вид:

$$\Sigma F_z = 0, \quad -P_1 + q_1 l_1 - qz + N = 0 \rightarrow N = P_1 - ql_1 + qz. \quad (3.1)$$

Выражение для  $N$  можно записать сразу, если придерживаться следующего правила: нормальная сила в сечении равна алгебраической сумме всех сил, действующих на оставшуюся часть стержня:

$$N = \sum_{i=1}^n P_i, \quad (3.2)$$

где  $P_i$  - сосредоточенные силы и равнодействующие распределенных нагрузок.

При этом внешняя сила условно считается положительной, если растягивает рассматриваемый участок, и отрицательной, если сжимает. Например, в выражении (3.1) сила  $P_1$  и равнодействующая сила  $qz$  растягивают участок длиной  $z$ , а равнодействующая сила  $q_1 l_1$  сжимает (см. рис. 3.2,б).

При  $z = 0$  нормальная сила в сечении  $A$  равна:  $N_A = P_1 - q_1 l_1$ .

При  $z = l$  нормальная сила в сечении  $B$  равна:  $N_B = P_1 - q_1 l_1 + ql$ .

Значения  $N_A$  и  $N_B$  можно получить непосредственно в сечениях, расположенных справа и слева от границ участка  $AB$  (см. рис. 3.2,а). Если принять  $P_1 = 2P$ ,  $q_1 l_1 = 2P/l$ ,  $l_1 = 0,5l$ ,  $q = P/l$ , то  $N_A = P$ ,  $N_B = 2P$ .

В соответствии с выражением (3.1) нормальная сила на участке  $AB$  меняется по линейному закону. На рис. 3.3,а показана *эпюра* (график) *нормальных сил* на выделенном участке бруса.

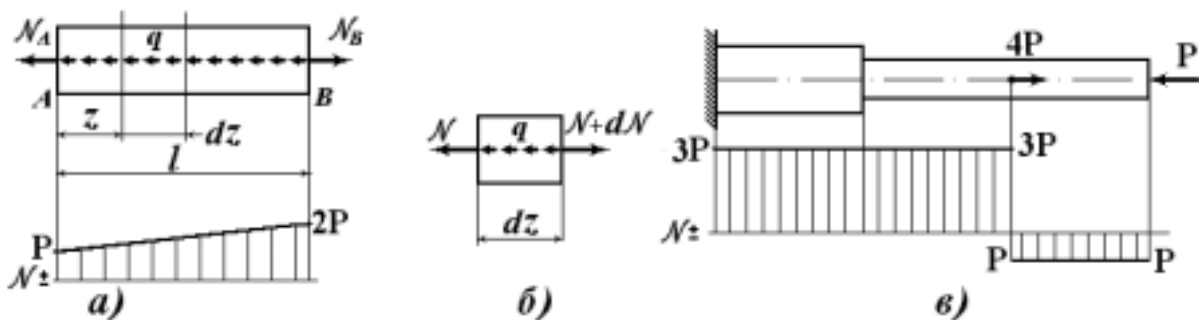


Рис. 3.3

Рассмотрим равновесие элемента бруса длиной  $dz$  (рис. 3.3,б):

$$-N - qdz + (N + dN) = 0.$$

После преобразований получим *дифференциальную зависимость* при растяжении:

$$\frac{dN}{dz} = q. \quad (3.3)$$

Из этого выражения следует, что величина  $q = \text{const}$  определяет угол наклона прямой на эпюре  $N$  (см.рис. 3.3,а). Если распределенная нагрузка на участке отсутствует ( $q=0$ ), то нормальные силы на этом участке не меняются, т.е.  $N = \text{const}$  (рис. 3.3,в). Отметим, что величина скачка на эпюре  $N$  равна значению сосредоточенной силы  $4P$ , приложенной в сечении.

В общем случае для эпюры нормальных сил соблюдается **правило скачков**: в том сечении, где приложена сосредоточенная сила на эпюре  $N$  имеет место скачок на величину этой силы.

Изменение сечения бруса не влияет на величину  $N$ .

### 3.2. Основные зависимости при растяжении

Для решения любой задачи деформируемого тела (бруса) должны быть получены три типа зависимостей.

**Кинематические зависимости** связывают деформации и перемещения при рассмотрении деформирования элемента бруса. В сопротивлении материалов эти зависимости, как правило, получаются с использованием гипотезы плоских сечений (гипотезы Бернулли).

**Физические зависимости** связывают напряжения и деформации (закон Гука).

**Статические зависимости** связывают напряжения и усилия в сечении бруса (уравнения равновесия).

Рассмотрим получение этих зависимостей при растяжении-сжатии бруса.

Кинематические зависимости получим при рассмотрении деформирования выделенного элемента бруса длиной  $dz$  (рис. 3.4,а).

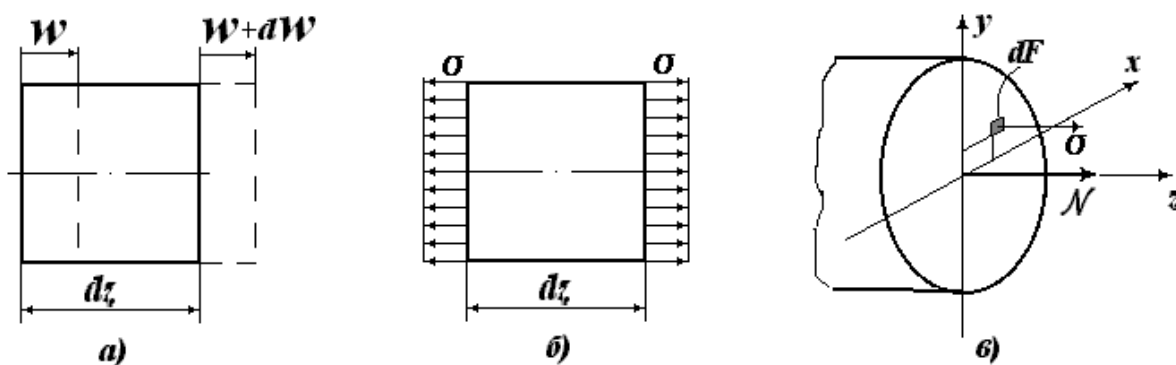


Рис. 3.4

В соответствии с гипотезой Бернулли левое сечение, оставаясь плоским, переместится на величину  $w$ , а правое сечение - на  $w + dw$ . Изменение длины элемента  $\Delta (dz) = (w + dw) - w = dw$ . Тогда линейная деформация  $\epsilon = \Delta (dz)/dz$  в пределах элемента равна:

$$\varepsilon = \frac{dw}{dz}. \quad (3.4)$$

Считаем, что напряженно-деформированное состояние элемента однородно (рис. 3.4,б), поэтому **закон Гука** запишем в виде

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (3.5)$$

Равнодействующая всех элементарных сил  $\sigma dF$  в сечении равна нормальной силе  $N$  (рис. 3.4,в). В итоге для всего сечения получим:

$$N = \int_F \sigma dF. \quad (3.6)$$

Как правило, придерживаются следующей схемы преобразования полученных зависимостей. С использованием кинематической зависимости (3.4) закон Гука записывается в виде:

$$\sigma = E \frac{dw}{dz}. \quad (3.7)$$

Это выражение используется в статической зависимости (3.6):

$$N = \int_F E \frac{dw}{dz} dF.$$

С учетом того, что для сечения  $E = \text{const}$  и  $\varepsilon = \frac{dw}{dz} = \text{const}$ , а  $\int_F dF = F$ , после преобразований получим:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{N}{EF}. \quad (3.8)$$

Дифференциальное уравнение (3.8) используется для определения перемещений сечений бруса.

Подставляя (3.8) в выражение (3.7), получим:

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (3.9)$$

Эта формула может быть получена и непосредственно из зависимости (3.6) с учетом равномерного распределения нормальных напряжений по сечению ( $\sigma = \text{const}$ , см. рис. 3.4,б).

Отметим, что формула (2.6) является частным случаем формулы (3.9) при  $N = P$  и использовалась только для определения напряжений при растяжении образца.

### 3.3. Перемещения сечений стержня

Продольные перемещения сечений стержня определяются интегрированием дифференциального уравнения (3.8):

$$w = w_0 + \int \frac{N dz}{EF}, \quad (3.10)$$

где  $w_0$  - постоянная интегрирования (перемещение сечения при  $z=0$ ).

Если учесть, что  $\varepsilon = \sigma/E = N/EF$ , то выражение (3.10) может быть записано в виде:

$$w = w_0 + \int \varepsilon dz. \quad (3.11)$$

Это выражение может быть получено и непосредственно интегрированием уравнения (3.4).

Часто необходимо определять перемещение  $w_k$  конечного ( $k$ ) сечения участка стержня, зная перемещение  $w_n$  начального ( $n$ ) сечения. Например, необходимо определить перемещение  $w_k$  конечного сечения участка, на котором  $\varepsilon = N/EF = \text{const}$  (рис. 3.5,а). Воспользовавшись формулой (3.11) при  $w_0 = w_n$ , получим:

$$w = w_n + \varepsilon z. \quad (3.12)$$

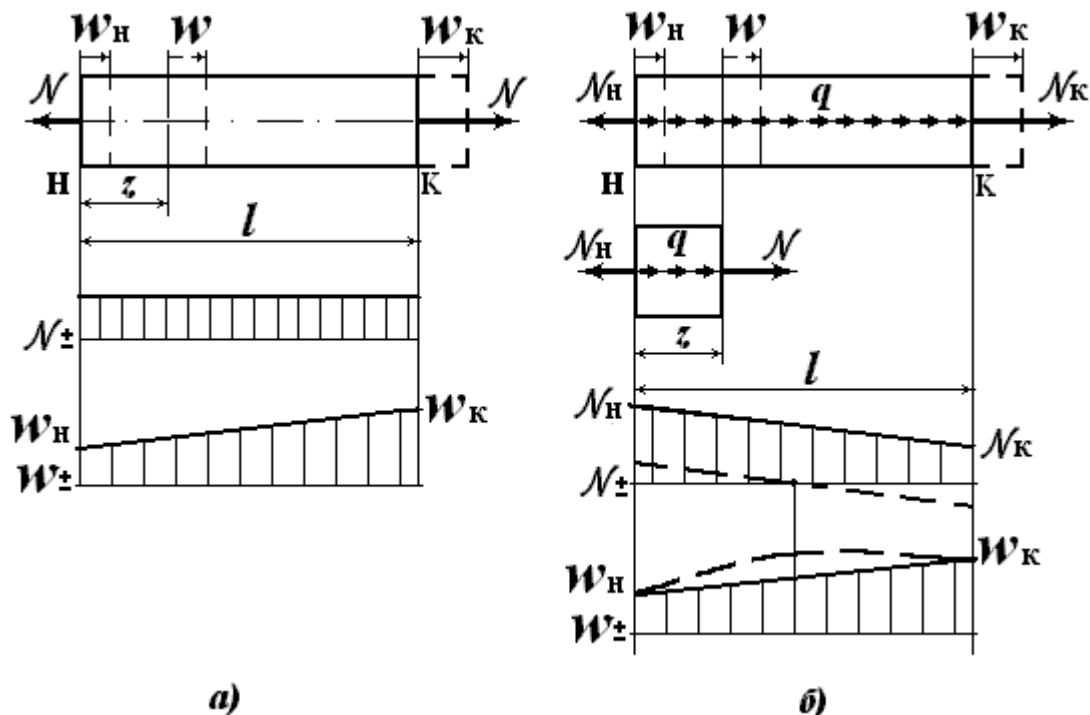


Рис. 3.5

При  $z = l$  найдем перемещение конечного сечения участка:

$$w_k = w_n + \Delta l; \quad \Delta l = \Delta l, \quad (3.13)$$

где  $\Delta l$  - изменение длины участка.

Выражение для  $\Delta l$  может быть получено и из формулы (2.1), так как деформированное состояние участка бруса такое же, как рабочей части образца.

С учетом того что  $\varepsilon=N/EF$ , вторая формула (3.13) принимает вид:

$$\Delta l = \frac{N l}{E F}, \quad (3.14)$$

где  $EF$  – жёсткость при растяжении-сжатии (этот параметр зависит от свойств материала ( $E$ ) стержня и площади его поперечного сечения).

Формула (3.14) может быть получена непосредственно из закона Гука (3.5) с учетом формул (3.9) и (2.1). Поэтому выражение (3.14) определяют как **закон Гука для участка бруса** при постоянной деформации на участке.

Если на участке бруса действует распределенная нагрузка постоянной интенсивности  $q$  (рис. 3.5,б), то нормальная сила в произвольном сечении при известном значении в начальном сечении ( $N_n$ ) равна:

$$N = N_n - qz. \quad (3.15)$$

При  $z = l$   $N_k = N_n - q l$ .

Подставляя выражение (3.15) в формулу (3.10), после интегрирования при  $w_o = w_n$  получаем:

$$w = w_n + \frac{N_n z}{EF} - \frac{qz^2}{2EF}. \quad (3.16)$$

Следовательно, эпюра  $w$  (см. рис. 3.5,б) ограничена параболой выпуклостью вверх ( $d^2w/dz^2 < 0$ ). Если на участке эпюра  $N$  пересекает ось, то в этом сечении функция  $w$  имеет экстремум ( $dw/dz = 0$ ). Этот случай на рис. 3.5,б показан штриховыми линиями. При  $z = l$  перемещение концевого сечения участка равно:

$$w_k = w_n + \frac{N_n l}{EF} - \frac{q l^2}{2EF}.$$

### 3.4. Учет факторов, влияющих на изменение длины стержня

Изменение длины стержня может вызываться различными причинами: силовым воздействием, изменением температуры, отклонением от номинальной длины стержня.

Если на стержень действуют заданные нагрузки, то изменение длины любого его участка с постоянной деформацией (рис. 3.6,а) определяется по формуле (3.14).



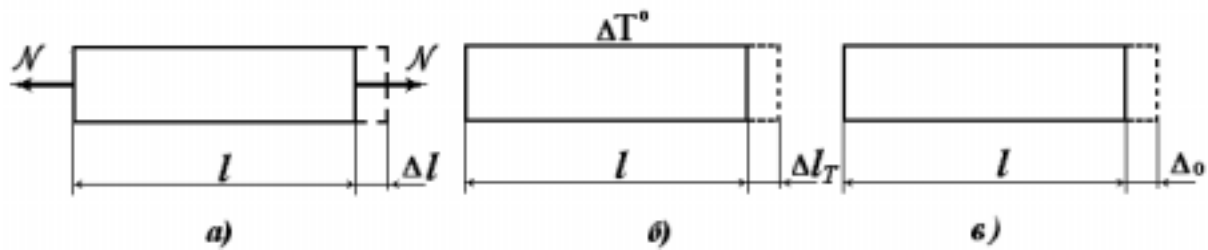


Рис 3.6

При изменении температуры стержня на  $\Delta T^\circ$  (температурное воздействие) любой его участок изменяет длину (рис. 3.6,б) на величину

$$\Delta l_T = \alpha_T \Delta T l, \quad (3.17)$$

где  $\alpha_T$  – температурный коэффициент линейного расширения материала. (Например, для стали  $\alpha_T = 1,25 \cdot 10^{-5}$  1/град.)

Соответственно возникают температурные деформации:

$$\epsilon_\Delta = \frac{\Delta l_T}{l} = \alpha_T \Delta T. \quad (3.18)$$

Если силовое и температурное воздействия осуществляются одновременно, то изменение длины и деформация определяются с использованием принципа суперпозиции:

$$\Delta l = \frac{N l}{EF} + \alpha_T \Delta T l; \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T. \quad (3.19)$$

Использование принципа суперпозиции, при котором силовая и температурная деформации рассматриваются как независимые, справедливо в том случае, когда модуль упругости  $E$  и температурный коэффициент  $\alpha_T$  не зависят от температуры. Практически это имеет место при умеренном температурном воздействии. Например, для малоуглеродистой стали при  $T < 300^\circ\text{C}$  (см. рис. 2.10).

Кроме того, изменение длины стержня или его участка может быть связано и с тем, что он изготовлен длиннее или короче своей номинальной длины на величину  $\Delta_0 = l - l_0$  (рис. 3.6,в). Отклонение от номинального размера положительно ( $\Delta_0 > 0$ ), если стержень длиннее, и отрицательно ( $\Delta_0 < 0$ ), если - короче.

С учетом всех перечисленных факторов изменение длины участка стержня определяется выражением

$$\Delta l = \frac{N l}{EF} + \alpha_T \Delta T l + \Delta_0. \quad (3.20)$$

Полное изменение длины стержня равно сумме изменений длин его участков.

### 3.5. Расчет стержня на прочность

Прочностной анализ стержня заключается в определении напряжений для стержня в целом, выявлении максимальных напряжений и сопоставлении их с допускаемыми или предельными напряжениями.

Сечение стержня, в котором возникают максимальные напряжения, называется *опасным*. Если максимальные напряжения действуют на всем участке стержня, то такой участок также называется опасным.

При расчете на прочность стержня из пластичного материала используется *условие прочности*:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]; \quad [\sigma] = \sigma_T / n_T \quad \text{или} \quad [\sigma] = \sigma_{0,2} / n_T. \quad (3.21)$$

Максимальные напряжения  $\sigma_{\max} = (N/F)_{\max}$  в опасном сечении могут быть как растягивающими (положительными), так и сжимающими (отрицательными). В последнем случае величина напряжения берется по модулю. Допускаемые напряжения  $[\sigma]$  либо заданы, либо вычисляются по второй формуле (3.21) при известном пределе текучести  $\sigma_T$  (или  $\sigma_{0,2}$ ) и коэффициенте запаса  $n_T$ .

При расчете на прочность стержня из хрупкого материала используется система условий прочности:

$$\begin{aligned} \sigma_{p,\max} &\leq [\sigma]_p; \quad [\sigma]_p = \sigma_{вр} / n_{в}, \\ \sigma_{с,\max} &\leq [\sigma]_с; \quad [\sigma]_с = \sigma_{вс} / n_{в}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Расчет ведется как для опасного сечения, в котором возникают максимальные растягивающие напряжения  $\sigma_{p,\max}$ , так и для опасного сечения с максимальными сжимающими напряжениями  $\sigma_{с,\max}$ .

Условия прочности (3.21), (3.22) подробно рассмотрены в *разделе 2.5*.

При известных допускаемых напряжениях для материала стержня могут проводиться три варианта расчетов.

1. Если заданы нагрузки и размеры сечений стержня, то проводится поверочный расчет.

2. Если заданы нагрузки, то могут быть определены размеры сечений стержня (проектировочный расчет).

3. Если заданы размеры сечений, то могут быть определены допускаемые нагрузки.

Эти варианты расчета на конкретном примере рассмотрены в следующем разделе.

### 3.6. Расчёт статически определимого стержня

Для *статически определимого стержня* (рис. 3.7) реакция в заделке (или нормальная сила в любом сечении) может быть определена с использованием уравнений статики. Если реакция в заделке предварительно не определена, то построение эпюры  $N$  рациональнее начинать со свободного конца стержня. При этом, используя метод сечений, необходимо отбрасывать часть стержня с заделкой. Последовательно применяя метод сечений на каждом участке ( $i=1, 2, 3, 4$ ), определяются нормальные силы на участках. По полученным значениям строится эпюра  $N$ . Скачки на эпюре  $N$  по величине равны силам, приложенным в соответствующих сечениях. Участок  $AB$  не деформируется, участки  $BC$  и  $DM$  растягиваются, а участок  $CD$  сжимается.

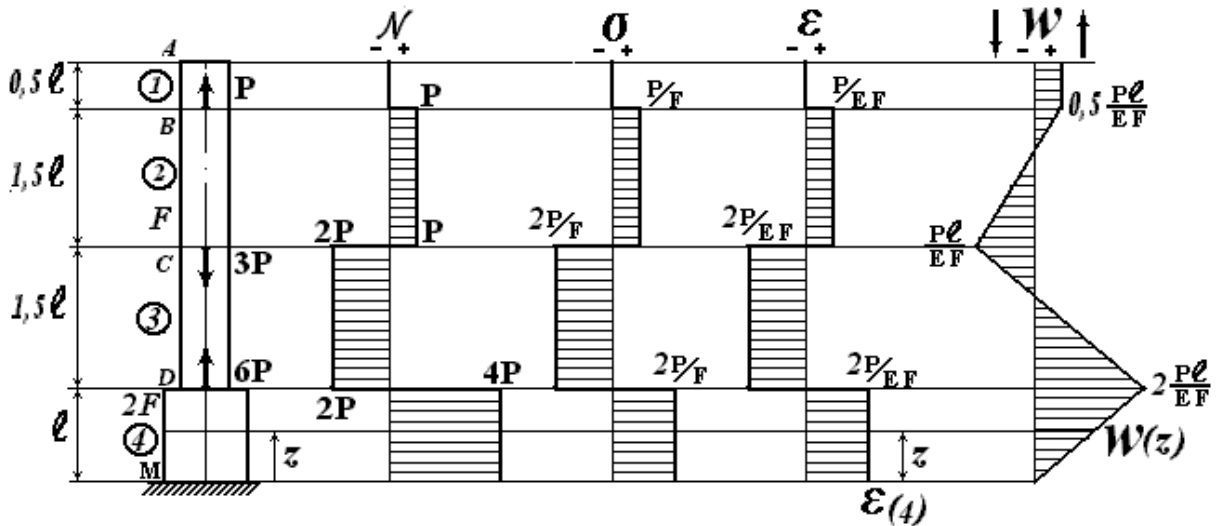


Рис. 3.7

Для построения эпюры  $\sigma$  определяются нормальные напряжения на каждом участке по формуле (3.9)

$$\sigma_{(i)} = \frac{N_i}{F_i}; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.23)$$

с учётом того, что  $F_1=F_2=F_3=F$  и  $F_4=2F$ .

Если стержень изготовлен из пластичного материала, то участки 3 и 4 равноопасны. Если стержень изготовлен из хрупкого материала, то более опасным может оказаться участок 4 (как правило, хрупкий материал хуже работает на растяжение).

Линейные деформации на участках определяются из закона Гука (3.5):

$$\varepsilon_{(i)} = \frac{\sigma_{(i)}}{E_{(i)}}; \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.24)$$

Если стержень выполнен из одного материала ( $E_{(i)} = E$ ), то эпюра  $\varepsilon$  имеет такой же вид, как и эпюра  $\sigma$ .

Эпюра осевых перемещений  $w$  строится, начиная с сечения, где известно перемещение. Для рассматриваемого стержня – от сечения  $M$ , так как  $w_M = 0$ .

В соответствии с формулами (3.13), (3.14) и учитывая, что  $w_H = w_M = 0$ , а  $w_K = w_D$ , получим перемещение сечения  $D$ :

$$w_D = \Delta l_4 = \frac{4Pl}{E \cdot 2F} = \frac{2Pl}{EF}.$$

Если на  $i$ -ом участке стержня определена деформация  $\varepsilon_{(i)} = const$ , то проще вычислять  $\Delta l_i$  по второй формуле (3.13):

$$\Delta l_i = \varepsilon_{(i)} l_i. \quad (3.25)$$

Аналогично определяем перемещения других сечений по участкам:

$$w_C = w_D + \Delta l_3 = 2 \frac{Pl}{EF} + \left(-2 \frac{Pl}{EF}\right) 1,5l = -\frac{Pl}{EF};$$

$$w_B = w_C + \Delta l_2 = -\frac{Pl}{EF} + \left(\frac{Pl}{EF}\right) 1,5l = 0,5 \frac{Pl}{EF}; \quad w_A = w_B.$$

Участок  $AB$  перемещается как жесткое тело, не деформируясь. Поэтому перемещения всех сечений на этом участке одинаковы. Сечение  $A$  перемещается вверх. Направления перемещения просто определить по участку 4. Так как этот участок растягивается ( $N_4 > 0$ ), то при  $w_D > 0$  сечение  $D$  перемещается вверх. Отсюда следует, что сечения, у которых  $w > 0$ , перемещаются вверх, и наоборот.

Полное изменение длины стержня (удлинение или укорочение), а значит и перемещение его концевого сечения относительно начального сечения, может быть определено суммированием изменений длин участков:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^m \Delta l_i, \quad (3.26)$$

где  $m$  - число участков.

В данном случае  $\Delta l = w_A = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4$ .

Из построенной эпюры  $w$  видно, что наибольшее перемещение имеет сечение  $D$  ( $w_{max} = w_D$ ).

Отметим, что в соответствии с формулой (3.4) значение деформации  $\varepsilon$  является производной от функции перемещений  $w$ . Двигаясь в положительном направлении оси  $z$  (вверх) от сечения  $M$  (см. рис.3.7), значения на эпюре  $\varepsilon$  определяют возрастание или убывание

функции перемещений  $w$ . И наоборот, перемещения являются интегральной функцией от деформаций  $\varepsilon$  формула (3.11). Например, перемещение произвольного сечения  $w(z)$  на участке 4 равно площади прямоугольника длиной  $z$  на эпюре  $\varepsilon$  ( $w(z) = \varepsilon_4 \cdot z$ ).

Рассмотрим различные варианты расчета стержня на прочность.

**Вариант 1.** Проверить прочность стержня при заданных параметрах:

$$F = 2 \text{ см}^2, P = 10 \text{ кН}, \sigma_T = 320 \text{ МПа}, n_T = 2.$$

Определяем максимальные напряжения  $\sigma_{\max}$  (см. эпюру  $\sigma$  на рис. 3.7) и допускаемые напряжения (3.21):

$$\sigma_{\max} = |\sigma_{(2)}| = \sigma_{(3)} = 2 \frac{P}{F}, \sigma_{\max} = 2 \frac{10 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 10^8 \text{ Па} = 100 \text{ МПа};$$

$$[\sigma] = \frac{320}{2} = 160 \text{ МПа}.$$

Сравнивая максимальные напряжения с допускаемыми, делаем заключение, что условие прочности (3.21) для стержня удовлетворяется.

**Вариант 2.** Определить параметр  $F$  при следующих исходных данных:

$$P = 20 \text{ кН}; [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Учитывая что  $\sigma_{\max} = 2P/F$ , условие прочности (3.21) примет вид:

$$2 \frac{P}{F} \leq [\sigma].$$

Решая это неравенство относительно параметра  $F$ , находим:

$$F \geq \frac{2P}{[\sigma]}; \quad F_{\min} = 2 \frac{20 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 2,5 \text{ см}^2.$$

**Вариант 3.** Определить максимально допустимое значение параметра нагрузки  $P$  для стержня из хрупкого материала, используя такие данные:

$$F = 2 \text{ см}^2; \sigma_{\text{вр}} = 240 \text{ МПа}; \sigma_{\text{вс}} = 960 \text{ МПа}; n_{\text{в}} = 4.$$

Материал стержня хуже работает при растяжении, поэтому наиболее опасным является участок 3 (см. эпюру  $\sigma$  на рис. 3.7). Подставляя  $\sigma_{\text{р, max}} = 2P/F$  в первое неравенство (3.22), получим:

$$2 \frac{P}{F} \leq [\sigma]_{\text{р}}; \quad [\sigma]_{\text{р}} = 240/4 = 60 \text{ МПа}.$$

Решая это неравенство, находим:

$$P \leq [\sigma]_{\text{р}} F/2; \quad P_{\text{доп}} = 60 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4} / 2 = 6 \text{ кН}.$$

**Определим изменение длины стержня** при значениях параметров:

$$F = 2 \text{ см}^2; P = 20 \text{ кН}; l = 1 \text{ м}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Как следует из эпюры  $w$  (см. рис. 3.7,б), стержень удлиняется, так как  $w_A > 0$  (сечение  $A$  перемещается вверх):

$$w_A = 0,5 \frac{20 \cdot 10^{-4} \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,5 \text{ мкм}.$$

При расчете стержня не учитывался его собственный вес. Считается, что им можно пренебречь по сравнению с действующими силами. Но в ряде практических случаев необходимо учитывать напряжения от собственного веса.

Рассмотрим стержень постоянного сечения (рис. 3.8,а), нагруженный собственным весом. Следует отметить, что расчетная схема стержня с сосредоточенной силой, равной силе веса стержня и приложенной в его центре тяжести (рис. 3.8,б), является весьма приближённой, так как нагруженной является половина стержня (см эпюру  $N$  на рис. 3.8,б). Тогда как очевидно, что в произвольном сечении 1-1 нормальная сила равна силе веса отсеченной части.

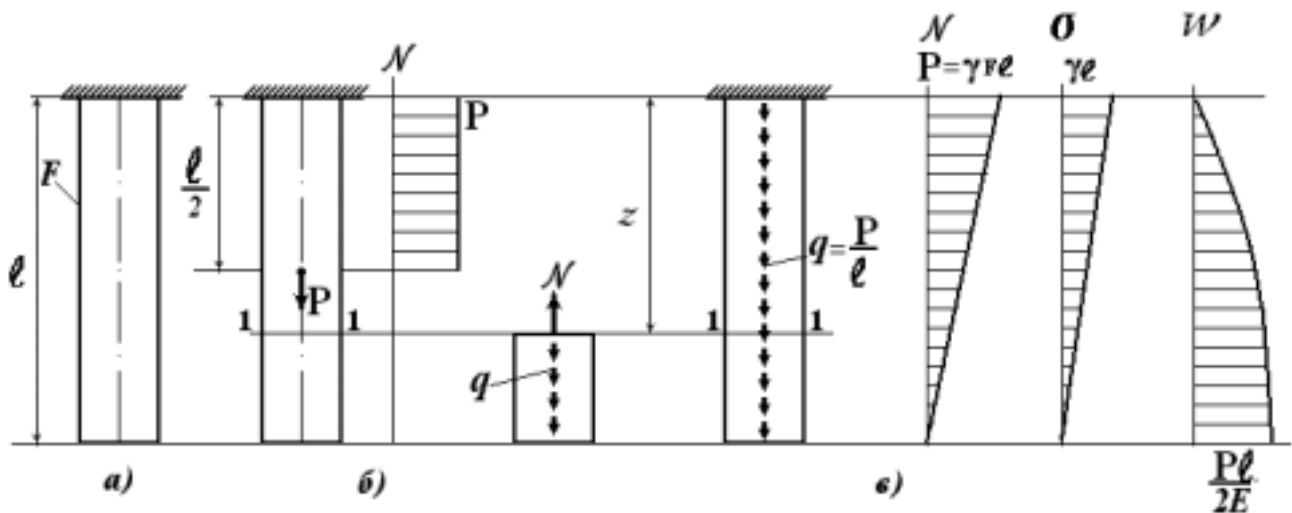


Рис. 3.8

Для расчётной схемы стержня (рис. 3.8,в) объемную нагрузку, определяемую собственным весом стержня  $P$ , заменим погонной нагрузкой интенсивности  $q = P/l$ . С учетом соотношения  $P = \gamma Fl$ , где  $\gamma$  — удельный вес материала стержня, получим  $q = \gamma F$ . Тогда  $N$  и  $\sigma$  в произвольном сечении стержня (рис. 3.8,в) определяются выражениями:

$$N = q(l - z) = \gamma F(l - z); \quad \sigma = N/F = \gamma(l - z).$$

Соответствующие эпюры  $N$  и  $\sigma$  представлены на этом же рисунке.

Найдем предельную длину стержня  $l_{np}$ , при которой максимальные напряжения в стержне у заделки достигнут предела прочности и стержень разрушится:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{вр}; \quad \gamma l_{np} = \sigma_{вр}; \quad l_{np} = \sigma_{вр}/\gamma.$$

Как видим, предельная длина стержня постоянного сечения не зависит от его площади поперечного сечения. Например, для стального стержня с  $\gamma = 7,8 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$  и  $\sigma_{\text{вр}} = 780 \text{ МПа}$  получим  $l_{\text{пр}} = 10^4 \text{ м}$ .

Более эффективно применять материал, у которого высокие прочностные характеристики ( $\sigma_{\text{вр}}$ ) и/или наименьший удельный вес ( $\gamma$ ), т.е. материал, имеющий большее значение  $l_{\text{пр}} = \sigma_{\text{вр}}/\gamma$ . В наибольшей степени таким условиям удовлетворяют волокнистые композитные материалы (углепластик, органопластик и др.).

Осевые перемещения сечений стержня определяются по формуле (3.18) при  $w_{\text{н}} = 0$  (в заделке):

$$w(z) = -\frac{q z^2}{2EF} + \frac{N_1 z}{EF} = -\frac{q z^2}{2EF} + \frac{ql z}{EF}.$$

Функция  $w(z)$  является квадратичной параболой. Перемещение концевого сечения стержня (при  $z = l$  и с учетом  $ql = P$ ) равно:

$$w = Pl/2EF.$$

Отметим, что этот же результат получается и с использованием приближённой расчетной схемы на рис. 3.8,б. Следует также отметить, что при использовании этой схемы правильно определяются максимальные напряжения в стержне у заделки, однако распределение  $N$ ,  $\sigma$  и  $w$  по длине стержня описываются неверно.

### 3.7. Расчёт статически неопределимого стержня

Статически неопределимым является стержень с двумя заделками (рис. 3.9). Две реакции не могут быть определены из одного уравнения статики:

$$\Sigma F_z = 0; \quad R_A + P - 5P + R_D = 0. \quad (3.27)$$

Второе уравнение должно быть получено из рассмотрения деформирования стержня. Для этого условно сделаем стержень статически определимым, удалив одну из заделок, например правую. Вместо удаленной заделки приложим неизвестную реакцию  $X_1 = R_A$ . Получим стержень, аналогичный (статически эквивалентный) заданному. При этом нужно учитывать, что из-за наличия двух заделок изменение полной длины стержня равно нулю (деформационное условие). В соответствии с формулой (3.26) запишем:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0. \quad (3.28)$$

Для определения  $\Delta l_i$  (3.14) получим нормальные силы  $N_i$  в сечениях каждого участка:

$$N_1 = X_1; \quad N_2 = X_1 + P; \quad N_3 = X_1 + P - 5P = X_1 - 4P. \quad (3.29)$$

Используя формулу (3.14), значения  $N_i$  (3.29) и физико-геометрические параметры участков ( $E_i, F_i, l_i$ ), уравнение (3.28) запишем в виде:

$$\frac{X_1 l}{EF} + \frac{(X_1 + P)l}{E2F} + \frac{(X_1 - 4P)l}{E2F} = 0. \quad (3.30)$$

Это уравнение является дополнительным к уравнению статики (3.27).

Уравнение (3.30) может быть преобразовано к виду :

$$\frac{2l}{EF} X_1 - \frac{3Pl}{2EF} = 0. \quad (3.31)$$

Первое слагаемое в этом уравнении определяет для эквивалентного стержня перемещение концевое сечения  $A$  от неизвестной реакции  $X_1$ , а второе слагаемое – перемещение от заданных сил. При этом коэффициент при  $X_1$  численно равен перемещению сечения  $A$  от силы  $X_1=1$ .

Решая уравнение (3.31), находим  $X_1 = R_A = 3/4P$ , а затем из (3.29) - усилия на участках. После чего строятся эпюры  $N, \sigma$  и  $w$ , которые представлены на рис. 3.9. Эпюра  $w$  построена, начиная с сечения  $D$ . Правильность решения контролируется равенством нулю перемещения сечения  $A$ .

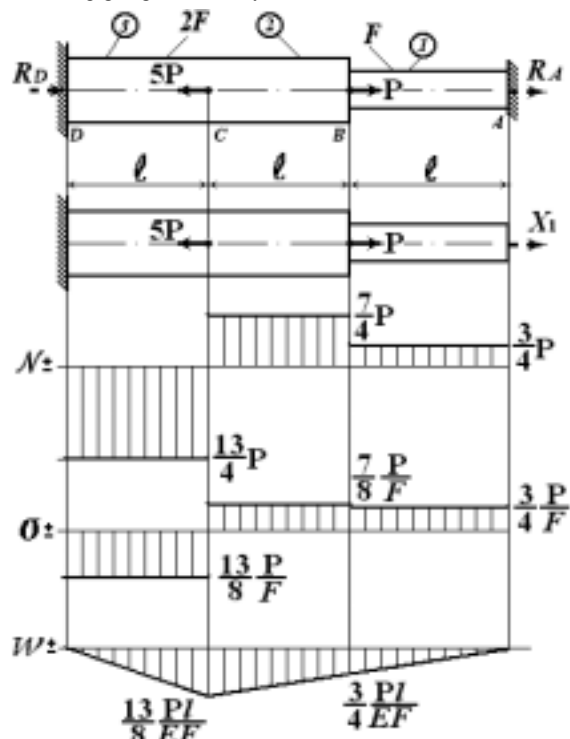


Рис.3.9

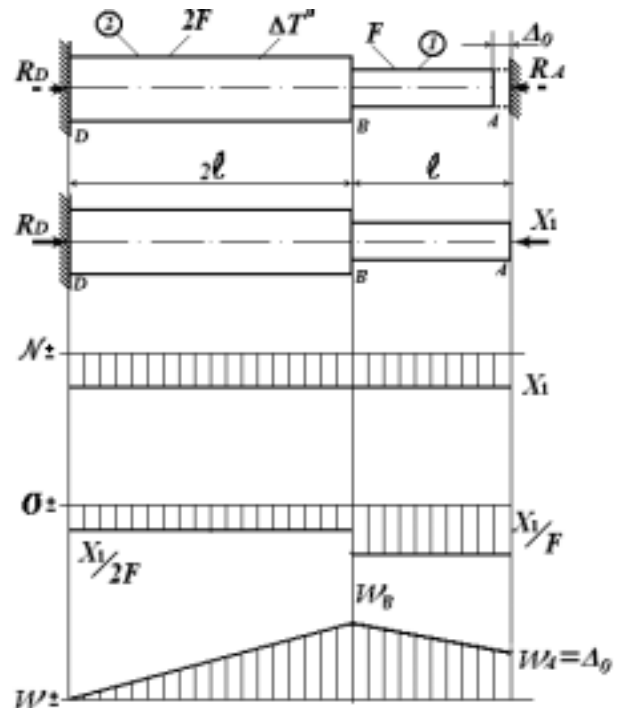


Рис.3.10

Для статически неопределимого стержня практическое значение имеет вычисление **температурных и монтажных напряжений**.



При изменении температуры статически определимого стержня в нем не возникают усилия и напряжения. Стержень просто удлиняется или укорачивается. Если же нагревать или охлаждать статически неопределимый стержень, то в нем возникают **температурные усилия и напряжения**. Это объясняется тем, что жесткие заделки не позволяют изменяться длине стержня. В результате при нагреве возникают сжимающие усилия и напряжения, а при охлаждении стержня – растягивающие усилия и напряжения.

Если длина стержня имеет отклонение от номинального размера (например, стержень выполнен длиннее на величину  $\Delta_0 = l - l_0$ ), то после принудительной установки такого стержня между жесткими опорами в нем возникают так называемые **монтажные усилия и напряжения**.

Учет вышеуказанных факторов покажем для стержня, рассмотренного в предыдущем примере (см. рис.3.9). Предположим, что стержень нагрет на  $\Delta T^\circ\text{C}$  и выполнен короче своей номинальной длины на  $\Delta_0$  (рис. 3.10). При нагреве стержень получил бы удлинение  $\Delta_T = \alpha_T \Delta T 3l$  при отсутствии правой заделки. Если  $\Delta_0 \geq \Delta_T$ , то усилия и напряжения в стержне не возникают. Если же  $\Delta_0 < \Delta_T$ , то в заделках возникают реакции  $R_A$  и  $R_D$ , которые не могут быть определены из одного уравнения статики:

$$R_D - R_A = 0; \quad R_D = R_A. \quad (3.32)$$

Отметим, что возникающие реакции самоуравновешены.

Удалим правую заделку и вместо неё в сечении  $A$  приложим неизвестную реакцию  $X_1 = R_A$ . Учитывая, что изменение длины стержня (или перемещение сечения  $A$ ) равно  $\Delta_0$ , запишем:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta_0. \quad (3.33)$$

Нормальные силы на участках стержня равны:

$$N_1 = N_2 = -X_1. \quad (3.34)$$

Используя первую формулу (3.19) для определения  $\Delta l_i$  и значения  $N_i$ , уравнение (3.33) запишем в виде:

$$\left( \frac{-X_1 l}{EF} + \alpha_T \Delta T l \right) + \left( \frac{-X_1 2l}{EF} + \alpha_T \Delta T 2l \right) = \Delta_0. \quad (3.35)$$

Решая это уравнение, получим:

$$X_1 = \frac{EF}{2l} (\Delta_T - \Delta_0); \quad \Delta_0 \leq \Delta_T, \quad (3.36)$$

где  $\Delta_T = 3\alpha_T \Delta T l$  - температурное удлинение стержня.

Если  $\Delta_T = \Delta_0$ , то  $X_1 = 0$ . На рис. 3.10 представлены эпюры  $N$ ,  $\sigma$  и  $w$ . Эпюра  $w$  построена от сечения  $D$  ( $w_D = 0$ ). При этом получим:

$$w_B = \Delta l_2 = \frac{-X_1 2l}{E2F} + \alpha_T \Delta T 2l; \quad w_A = w_B + \Delta l_1 = w_B + \frac{-X_1 l}{EF} + \alpha_T \Delta T l.$$

С учетом формулы(3.36) получим:

$$w_B = (\Delta_0 + \alpha_T \Delta T l)/2; \quad w_A = \Delta_0.$$

Последнее равенство является проверкой расчёта. Из этого условия исходили, решая задачу.

При одновременном воздействии на стержень нагрузки, температуры и наличии монтажных отклонений в соответствии с принципом суперпозиции усилия, напряжения и перемещения, полученные при соответствующем расчете стержня (см. рис. 3.9) и (см. рис. 3.10), суммируются.

## 4. Кручение

Кручение является распространённым видом деформации для элементов машиностроительных конструкций (валы, витки пружин и т.д.). При кручении материал находится в условиях чистого сдвига, что приводит к определённым особенностям как в распределении напряжений, так и в характере разрушения материала.

### 4.1. Чистый сдвиг

Опытно можно установить, что при кручении тонкостенной трубы для элементов стенки, выделенных продольными и поперечными сечениями, происходит только искажение формы, а размеры остаются неизменными (рис. 4.1,а - элемент ABCD). Это объясняется действием на гранях элемента только касательных напряжений  $\tau$  (рис. 4.1,б).

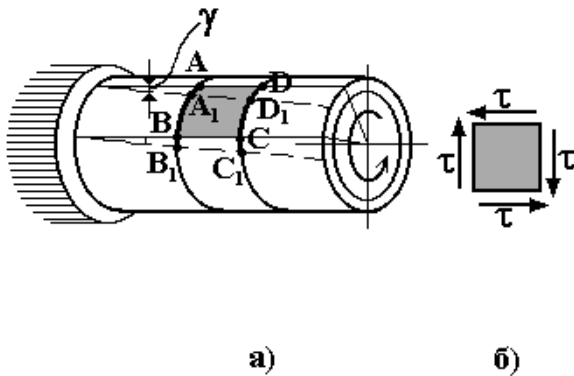


Рис. 4.1

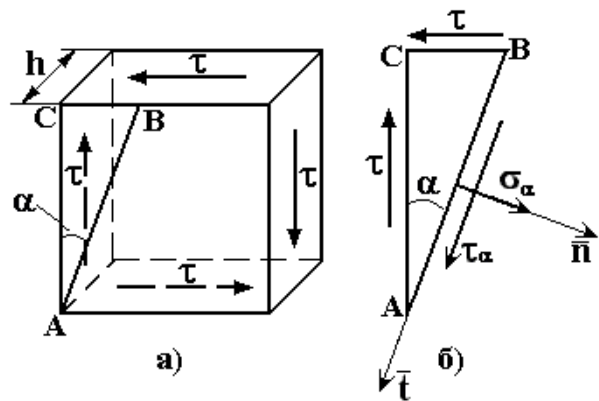


Рис. 4.2

Напряжённое состояние, при котором на гранях элемента действуют только касательные напряжения, называется **чистым сдвигом**.

Угловая деформация элемента  $\gamma$  (деформация сдвига) равна углу поворота образующих цилиндрической поверхности трубы (см. рис. 4.1,а).

### Напряжения

Напряжения при чистом сдвиге изменяются в зависимости от положения рассматриваемой площадки. Из исходного элемента толщиной  $h$ , на гранях которого действуют только касательные напряжения  $\tau$  (рис. 4.2,а), наклонным сечением под углом  $\alpha$  выделим элементарную трехгранную призму ABC (рис. 4.2,б; для простоты показан только вид в плане). В таком сечении возникает полное напряжение, которое можно представить в виде составляющих - нормального  $\sigma_\alpha$  и касательного  $\tau_\alpha$  напряжений. Составим уравнения равновесия выде-

ленного элемента, проектируя действующие силы на нормальное ( $\bar{n}$ ) и тангенциальное ( $\bar{t}$ ) направления:

$$\begin{aligned} \sum F_n = 0; \quad \sigma_\alpha \cdot AB \cdot h - \tau \cdot BC \cdot h \cdot \cos\alpha - \tau \cdot AC \cdot h \cdot \sin\alpha &= 0; \\ \sum F_t = 0; \quad \tau_\alpha \cdot AB \cdot h + \tau \cdot BC \cdot h \cdot \sin\alpha - \tau \cdot AC \cdot h \cdot \cos\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Используя очевидные соотношения  $BC=AB \cdot \sin\alpha$ ,  $AC=AB \cdot \cos\alpha$ , после преобразований из уравнений (4.1) получаем зависимости:

$$\sigma_\alpha = \tau \cdot \sin 2\alpha, \quad \tau_\alpha = \tau \cdot \cos 2\alpha. \quad (4.2)$$

В исходных площадках  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 90^\circ$  получается:  $\sigma_\alpha = 0$ ,  $\tau_\alpha = \pm\tau$ . Нормальные напряжения максимальны при  $\sin 2\alpha = \pm 1$ , т.е. при  $\alpha = \pm 45^\circ$ . В этих сечениях  $\sigma_\alpha = \pm\tau$ ,  $\tau_\alpha = 0$ , т.е. на гранях элемента, выделенного сечениями под углом  $45^\circ$  к исходным площадкам, действуют только нормальные напряжения, причем на одной паре граней - растягивающие, на другой - сжимающие (рис. 4.3). Это эквивалентное определение чистого сдвига.

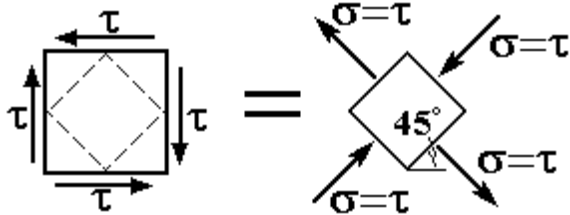


Рис. 4.3

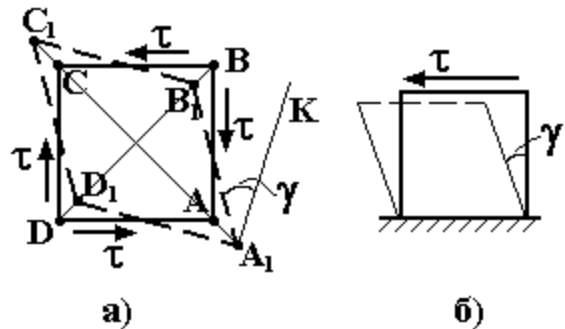


Рис. 4.4

### Деформация

При отсутствии нормальных напряжений на гранях элемента (рис. 4.4,а) не происходит изменения длины ребер. В то же время происходит удлинение диагонали AC и укорочение диагонали BD вследствие действия в этих направлениях растягивающих и сжимающих нормальных напряжений. В результате квадрат ABCD превращается в ромб  $A_1B_1C_1D_1$ , т. е. происходит искажение только формы элемента. Угол сдвига как изменение элементарного прямого угла  $\gamma = \angle B_1A_1K$  (см. рис. 4.4,а) может быть получен при наложении исходной формы элемента на деформированную ( $A_1K \perp A_1D_1$ ). Наиболее просто деформацию сдвига  $\gamma$  можно представить при условно неподвижной одной из граней элемента (рис. 4.4,б).

### Закон Гука при сдвиге

Касательные напряжения  $\tau$  и угловая деформация  $\gamma$  связаны законом Гука при сдвиге:

$$\tau = G\gamma, \quad (4.3)$$

где  $G$  - модуль упругости второго рода или модуль сдвига. Модуль сдвига является характеристикой материала. Для изотропного материала модуль сдвига связан с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\mu$  определенной зависимостью:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (4.4)$$

### Диаграмма сдвига

В результате испытания на кручение образцов из различных материалов в условиях чистого сдвига может быть построена диаграмма сдвига  $\tau=f(\gamma)$ . Обычно проводятся испытания на кручение образцов цилиндрической или трубчатой формы. Для пластичных материалов диаграммы сдвига показаны на рис. 4.5а,б, где приведены и характеристики прочности материала при сдвиге - предел пропорциональности  $\tau_{плк}$ , предел текучести  $\tau_T$ , условный предел прочности  $\tau_B$ . Чаще всего диаграмма сдвига не имеет площадки текучести (рис. 4.5,б); в этом случае определяется условный предел текучести  $\tau_{0,3}$  - напряжение, при котором остаточная деформация сдвига равна 0,3%. Однако теория пластичности позволяет построить диаграмму сдвига и непосредственно из диаграммы растяжения. Поэтому прочностные характеристики при сдвиге для пластичных материалов выражаются через прочностные характеристики при растяжении, например  $\tau_T \approx 0,6 \sigma_T$ . Для хрупких материалов обычно  $\sigma_{вр} < \tau_B < \sigma_{вс}$ , например для чугуна  $\tau_B = (0,3 \div 0,4)\sigma_{вс}$ . Диаграмма сдвига для хрупкого материала показана на рис. 4.5,в.

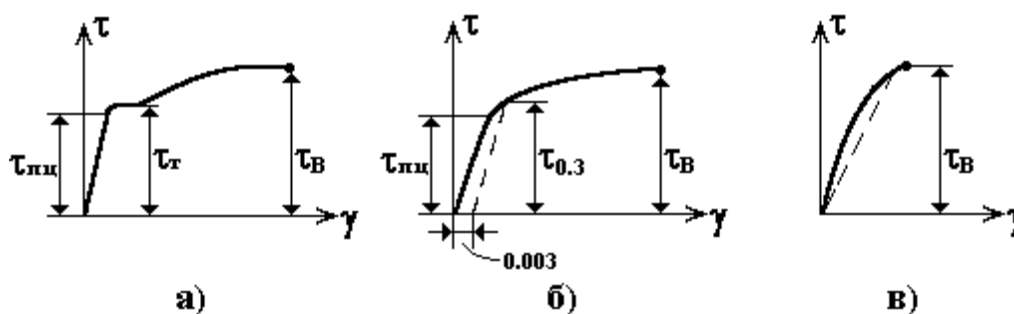


Рис. 4.5

## 4.2. Кручение бруса круглого сечения

Кручение бруса вызывается действием моментов (пар сил) относительно оси бруса (рис. 4.6,а). На расчётных схемах крутящий момент, действующий в плоскости, перпендикулярной оси бруса, схематично изображается парой сил, как показано на рис 4.6,б. Брус, работающий на кручение, часто называют *валом*.

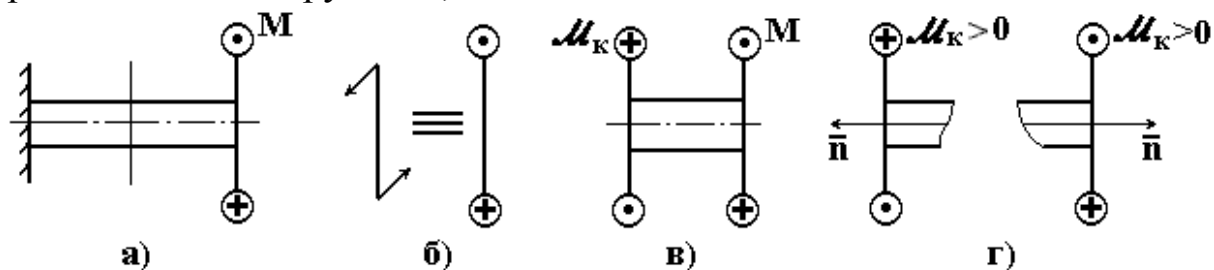


Рис. 4.6

При кручении в поперечных сечениях бруса возникает только крутящий момент  $M_k$  (рис. 4.6,в), который определяется по методу сечений. При построении эпюр  $M_k$  обычно пользуются условным *правилом знаков*: положительный момент  $M_k$  направлен против хода часовой стрелки при взгляде на сечение со стороны внешней нормали  $\bar{n}$  (рис. 4.6,г).

### 4.2.1. Основные зависимости

В теории кручения бруса круглого сечения используются геометрическая и статическая гипотезы:

1) *гипотеза плоских сечений* - поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации; при этом радиусы сечений поворачиваются на некоторый угол, оставаясь прямолинейными;

2) *статическая гипотеза* - в поперечных сечениях бруса возникают только касательные напряжения.

Для получения расчётных зависимостей рассмотрим элементарный объём длиной  $dz$ , выделенный из бруса поперечными сечениями и цилиндрической поверхностью радиуса  $\rho$  (рис. 4.7,а). При кручении бруса поперечные сечения поворачиваются относительно оси - получают *угловые перемещения*  $\varphi$ . Рассматривая геометрическую картину деформации выделенного объёма бруса, можно представить её как взаимный поворот правого сечения относительно левого на угол  $d\varphi$  (рис. 4.7,б). При этом образующие поверхности поворачиваются на угол  $\gamma$  (деформация сдвига). Отрезок  $BB_1$  можно представить двояко:

из  $\Delta ABB_1 \rightarrow BB_1 = AB \cdot \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma \cdot dz$ ; из  $\Delta OBB_1 \rightarrow BB_1 = OB \cdot d\varphi \approx \rho \cdot d\varphi$ .  
 Приравняв полученные соотношения  $\gamma dz = \rho d\varphi$ , получим зависимость:

$$\gamma = \rho \cdot \varphi', \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dz}. \quad (4.5)$$

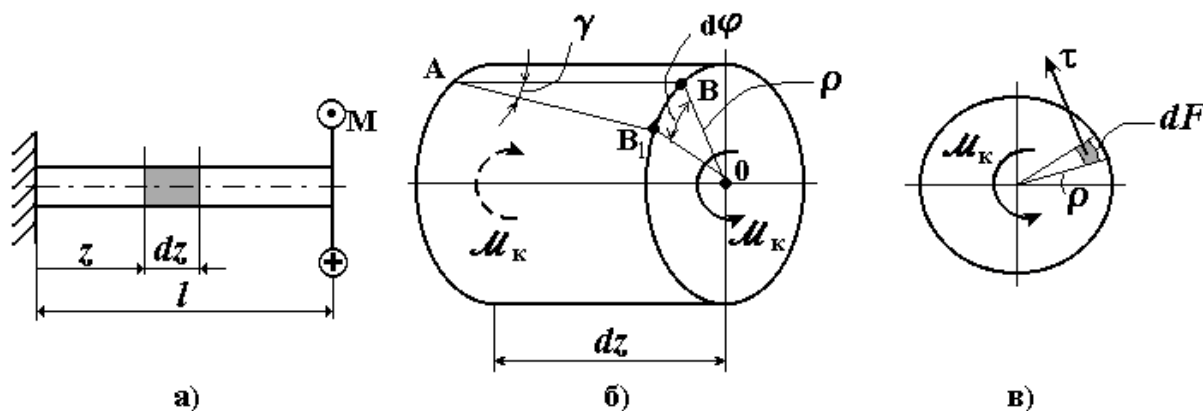


Рис. 4.7

Параметр  $\varphi'$  называется *относительным углом закручивания* и определяется как отношение взаимного угла поворота двух сечений к расстоянию между ними.

Крутящий момент  $M_k$  в поперечном сечении бруса является статическим эквивалентом действующих в этом сечении касательных напряжений (рис. 4.7, в). На каждой элементарной площадке  $dF$  касательное напряжение  $\tau$  перпендикулярно текущему радиусу  $\rho$ . Поэтому возникающий элементарный момент равен  $dM_k = \tau \cdot dF \cdot \rho$ , а для всего сечения получим:

$$\hat{M}_k = \int_F \tau \rho dF. \quad (4.6)$$

Подставляя в закон Гука (4.3) соотношение (4.5)

$$\tau = G\gamma = G\rho\varphi', \quad (4.7)$$

а полученное выражение - в зависимость (4.6), получим:

$$\hat{M}_k = \int_F G\rho^2\varphi' dF = G\varphi' \int_F \rho^2 dF = \varphi' G J_p; \quad J_p = \int_F \rho^2 dF,$$

где  $J_p$  - *полярный момент инерции сечения*;  $GJ_p$  - *жёсткость бруса на кручение*. Отсюда получается расчётная формула для относительного угла закручивания в сечении бруса:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_k}{GJ_p}. \quad (4.8)$$

### Напряжения

Подставляя зависимость (4.8) в (4.7), получаем расчётную формулу для касательных напряжений в произвольной точке сечения:

$$\tau = \frac{M \hat{e}}{J_p} \rho. \quad (4.9)$$

На рис. 4.8 показаны *эпюры касательных напряжений*  $\tau(\rho)$  для сплошного (а) и кольцевого (б) сечений: согласно формуле (4.9) напряжения распределяются вдоль радиуса по *линейному закону* и достигают максимального значения в точках при  $\rho_{\max} = D/2$ , наиболее удалённых от центра сечения.

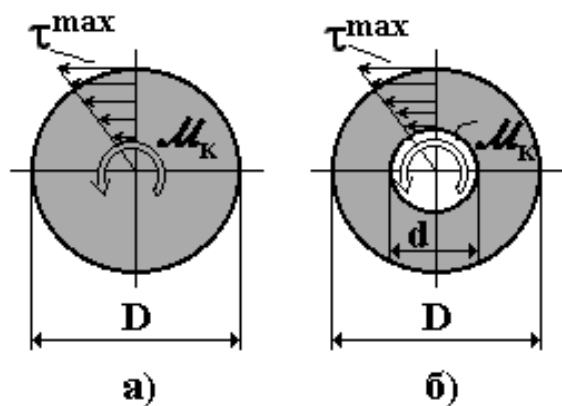


Рис. 4.8

Для вычисления максимальных касательных напряжений в сечении вводится характеристика сечения  $W_p$  - *полярный момент сопротивления*:

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}}. \quad (4.10)$$

Тогда максимальные напряжения в сечении определяются по формуле

$$\tau^{\max} = \frac{M \hat{e}}{W_p}. \quad (4.11)$$

### Перемещения

*Угловое перемещение* или *угол поворота*  $\varphi_z$  произвольного сечения  $z$  определяется интегрированием выражения (4.8):

$$\varphi_z = \varphi_0 + \int \frac{M \hat{e} dz}{G J_p} = \varphi_0 + \Delta\varphi, \quad (4.12)$$

где  $\varphi_0$  - угол поворота сечения, совпадающего с началом координат ( $z=0$ );  $\Delta\varphi$  - угол закручивания участка длиной  $z$ .

Если для участка бруса выполняются условия  $M_k = \text{const}$ ,  $GJ_p = \text{const}$ , то

$$\varphi_z = \varphi_0 + \frac{M \hat{e} z}{G J_p} \quad \text{или} \quad \varphi_z = \varphi_0 + \varphi' z; \quad \varphi' = \text{const}. \quad (4.13)$$

Формула (4.13) может быть представлена и в другой форме, удобной для практических расчётов и построения эпюр углов поворота:

$$\varphi_{\hat{e}} = \varphi_{\hat{1}} + \Delta\varphi_i; \quad \Delta\varphi_i = \frac{M \hat{e} l_i}{G J_{pi}}, \quad (4.14)$$

где  $\varphi_{\hat{n}}$  - угол поворота начального сечения участка;  $\varphi_{\hat{k}}$  - угол поворота конечного сечения участка;  $\Delta\varphi_i$  - угол закручивания  $i$ -го участка длиной  $l_i$ .



В частности, для консольного бруса (см. рис. 4.7,а) угол поворота концевого сечения определяется по формуле (4.14) при  $\varphi_0=0$ :

$$\varphi_{\max} = \frac{M \hat{e} l}{G J_p} \quad (4.15)$$

В общем случае, когда крутящий момент или диаметр поперечного сечения (или обе эти величины) изменяются непрерывно по длине вала, угол поворота сечения вала вычисляется по формуле

$$\varphi_z = \varphi_0 + \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i; \quad \Delta\varphi_i = \int_{l_i} \frac{M \hat{e}_i(z) dz}{G J_{pi}(z)}, \quad (4.16)$$

где  $n$  - число участков от начала координат до рассматриваемого сечения.

Если крутящий момент  $M_{ki}$  и жесткость  $Gj_{pi}$  постоянны в пределах каждого участка, то формула (4.12) принимает вид:

$$\varphi_z = \varphi_0 + \sum_{i=1}^n \frac{M \hat{e}_i l_i}{G J_{pi}} \quad (4.17)$$

Все приведенные формулы дают значения угла поворота  $\varphi$  в радианах.

Если вычисляется угол закручивания вала (взаимный угол поворота концевых сечений вала), то используется формула (4.17) или (4.16), принимая  $\varphi_0=0$ .

Практически для построения эпюры углов поворота  $\varphi(z)$  вала чаще всего используются зависимости (4.13), (4.14).

#### 4.2.2. Геометрические характеристики круглого сечения

Расчётную формулу полярного момента инерции удобно получить в полярной системе координат  $(\rho, \varphi)$ , в которой элемент площади равен  $dF = \rho d\rho d\varphi$  (на рис. 4.9 для общности рассматривается кольцевое сечение).

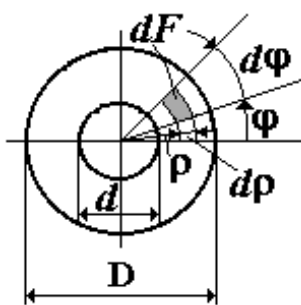


Рис. 4.9

Тогда

$$\begin{aligned} J_p &= \int_F \rho^2 dF = \int_0^{2\pi} \int_{d/2}^{D/2} \rho^3 d\rho d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{D^4}{16} - \frac{d^4}{16} \right) = \frac{\pi D^4}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] \end{aligned}$$

В итоге для кольцевого и сплошного круглого ( $d=0$ ) сечений получим расчётные формулы:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1 D^4 (1 - \alpha^4); \quad \alpha = \frac{d}{D}; \quad \text{и} \quad J_p = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1 D^4, \quad (4.18)$$

где  $\alpha = d/D$  - коэффициент полости кольцевого сечения.

Для полярного момента сопротивления *кольцевого сечения* ( $\alpha \neq 0$ ) и *сплошного круглого сечения* ( $\alpha = 0$ ) в соответствии с формулой (4.15) расчётные формулы примут вид:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx 0,2D^3 (1 - \alpha^4) \quad \text{и} \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2D^3. \quad (4.19)$$

### 4.3. Сравнительный анализ полых и сплошных валов

Из распределения касательных напряжений (4.9) в сечении ясно, что материал внутренней части вала загружен в меньшей степени, чем периферийный. Наиболее предпочтительным с точки зрения использования материала является его равномерное нагружение напряжениями, что в наибольшей степени реализуется для кольцевого сечения с большим значением  $\alpha$ . Поэтому на практике более рациональным является применение полых валов, что обеспечивает малую их материалоёмкость. Например, сравним по массе равнопрочные сплошной и полый валы, нагруженные одинаковыми моментами (рис. 4.10).

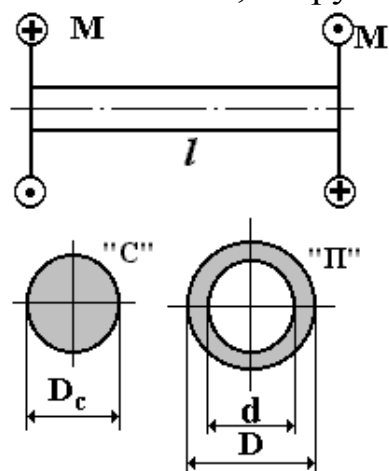


Рис. 4.10

Условие равнопрочности  $\tau_{max}^{(ii)} = \tau_{max}^{(i)}$  с учетом формулы (4.11) приводит к соотношениям  $W_p^{(ii)} = W_p^{(i)}$  или  $D_{ii} = D \sqrt[3]{1 - \alpha^4}$ ,  $\alpha = d/D$ . Отношение масс валов из одинакового материала равно отношению площадей поперечных сечений:

$$\frac{m_c}{m_i} = \frac{F_c}{F_i} = \frac{\pi D_c^2 / 4}{\pi D^2 (1 - \alpha^2) / 4} = \sqrt[3]{\frac{(1 + \alpha^2)^2}{1 - \alpha^2}}$$

Таблица 4.1

|                |   |      |      |      |      |      |
|----------------|---|------|------|------|------|------|
| $\alpha = d/D$ | 0 | 0,1  | 0,3  | 0,5  | 0,7  | 0,9  |
| $F_c/F_{ii}$   | 1 | 1,01 | 1,09 | 1,28 | 1,63 | 2,58 |

С увеличением коэффициента полости  $\alpha$  растёт и весовая эффективность применения полых валов (табл. 4.1).

### 4.4. Расчет валов на прочность и жесткость

Для обеспечения работоспособности валы должны удовлетворять условиям прочности и жесткости. При расчёте на прочность ограничиваются напряжения в сечениях вала от действующих нагрузок. Для обеспечения необходимой жёсткости вала ограничиваются угловые перемещения отдельных сечений (в местах расположения со-

пряженных деталей шкивов, зубчатых колёс и др.). Как правило, ограничения накладываются на относительные углы закручивания.

При расчете валов на кручение часто нагрузку (внешние моменты) определяют исходя из передаваемой мощности  $N$  (кВт) и скорости вращения вала  $n$  (об/мин):

$$\hat{i} = 9550 \frac{N}{n} \quad / \hat{i} \cdot \hat{i} / \quad (4.20)$$

На практике применяются валы гладкие (постоянного сечения) и ступенчатые. В случае ступенчатого вала необходимо получить расчётные напряжения и относительные углы закручивания на каждом участке постоянного сечения, т.е. построить соответствующие эпюры для вала.

Для вала при заданной нагрузке можно построить эпюру крутящих моментов. На каждом участке вала могут быть определены максимальные касательные напряжения и относительные углы закручивания по формулам (4.11) и (4.8), а для вала в целом можно построить эпюру углов закручивания с использованием зависимости (4.13) или (4.14).

При расчёте вала на прочность определяются *наибольшие значения касательных напряжений  $\tau_{\max}$  для вала* (индекс стоит внизу, в отличие от максимальных напряжений в сечении  $\tau^{\max}$ !).

*Условие прочности вала* из пластичного материала имеет вид:

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad \text{или} \quad \frac{M \hat{e}}{W_p} \leq [\tau], \quad (4.21)$$

$$[\tau] = \frac{\tau_{\delta}}{n_{\delta}} \quad \text{или} \quad [\tau] = \frac{\tau_{\hat{a}}}{n_{\hat{a}}},$$

где  $[\tau]$  - *допускаемые напряжения* вала при кручении;  $n_T$ ,  $n_B$  - *коэффициенты запаса* по текучести и по прочности;  $M_K$  - значение крутящего момента в опасном сечении (где возникают  $\tau_{\max}$ ).

Для вала из хрупкого материала может использоваться условие прочности исходя из максимальных нормальных растягивающих напряжений:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_p, \quad \sigma_{\max} = \tau_{\max} \quad \text{или} \quad \frac{M \hat{e}}{W_p} \leq [\sigma]_p, \quad [\sigma]_p = \frac{\sigma_{\hat{a}\delta}}{n_{\hat{a}}}, \quad (4.22)$$

где  $\sigma_{Bp}$  - предел прочности материала на растяжение.

Величина допускаемых напряжений при кручении зависит от различных факторов, в том числе и от материала вала. Чаще всего для пластичных материалов принимается  $[\tau] = (0,5 \div 0,6)[\sigma]_p$ , для хрупких

материалов -  $[\tau] = (0,8 \div 1,0)[\sigma]_p$ . Значения  $n_b$  для валов из хрупкого материала принимаются в 1,5-2 раза больше, чем  $n_t$  для валов из пластичного материала.

Следует отметить, что в большинстве практических случаев нагрузки, действующие на вал, вызывают деформации изгиба и кручения. Поэтому на первом этапе расчёта вала только на кручение в условии прочности используются заниженные значения допускаемых напряжений или завышенные значения коэффициентов запаса.

Для изготовления валов применяются различные материалы: углеродистые стали марок 20, 30, 40, 45, 50, легированные стали марок 20X, 40X, 30XM, 40XH и др., титановые сплавы (BT5, BT6, BT20), в некоторых конструкциях - алюминиевые сплавы (Д16, Д6 и др.).

При проведении проектировочного расчета вала определяются размеры поперечных сечений вала или значение максимально допустимой нагрузки на вал. При определении требуемых размеров сечения вала из условия прочности (4.21) получаем:

$$W_p \geq \frac{M \hat{\epsilon}}{[\tau]} \quad \text{откуда} \quad D \geq \sqrt[3]{\frac{16M \hat{\epsilon}}{\pi(1 - \alpha^4)[\tau]}}. \quad (4.23)$$

При определении допускаемой нагрузки (допускаемого внешнего момента) из формулы (4.20) получим неравенство такого вида:

$$M_k \leq W_p[\tau], \quad (4.24)$$

где в  $M_k$  входит неизвестная величина нагрузки.

**Расчет вала на жесткость** обычно проводится исходя из наибольшего относительного угла закручивания  $\phi'_{\max}$ , и **условие жесткости вала** имеет вид:

$$\phi'_{\max} \leq [\phi'] \quad \text{или} \quad \frac{M \hat{\epsilon}}{G J_p} \leq [\phi'], \quad (4.25)$$

где  $[\phi']$  - *допускаемый относительный угол закручивания для вала*.

В качестве наиболее распространенных значений  $[\phi']$  можно указать  $[\phi'] = (0,25 \div 2,0)$  град/м. Следует обратить внимание, что в формулу (4.25) значение  $[\phi']$  подставляется в рад/м.

Расчет вала на жёсткость может быть не только поверочным, но и проектировочным, т.е. служить для определения размеров сечения или допускаемой нагрузки. Так, при расчёте вала на жёсткость можно определить необходимое значение диаметра из соотношения (4.25) с учётом зависимости (4.18):

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32M \hat{\epsilon}}{\pi(1 - \alpha^4)[\phi']}}. \quad (4.26)$$

При *совместном расчёте вала на прочность и жёсткость* для определения величины диаметра вала из расчётных значений, полученных по формулам (4.23) и (4.26), выбирается наибольшее, чтобы выполнялись оба условия, т.е. какое-либо из этих условий окажется определяющим.

#### 4.5. Характер разрушения валов

При анализе поведения вала вплоть до разрушения следует принимать во внимание напряжённое состояние вала и свойства материала.

Материал вала, работающего на кручение, находится в условиях чистого сдвига. В различных сечениях вала возникают касательные и нормальные напряжения. При этом в поперечных и продольных сечениях возникают только касательные напряжения, а в сечениях под углом  $45^\circ$  к оси - только нормальные напряжения, растягивающие и сжимающие (рис. 4.11).

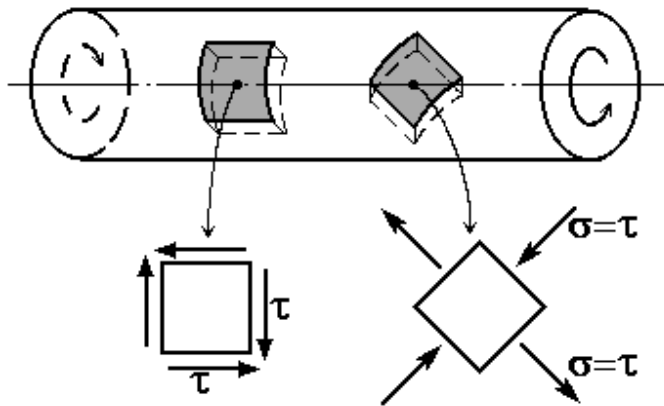


Рис. 4.11

Следует учитывать, что максимальные напряжения возникают в наружных слоях вала, причём максимальные касательные и нормальные напряжения одинаковы по величине:  $\tau_{\max} = \sigma_{\max}$ . Поэтому характер разрушения валов будет зависеть от материала, т.е. от

способности данного материала сопротивляться действию касательных и нормальных напряжений.

Для большинства пластичных материалов  $\sigma_{\text{тр}} \approx \sigma_{\text{тс}}$ ,  $\tau_{\text{т}} \approx 0,6 \sigma_{\text{т}}$ , поэтому *наиболее опасными для вала являются касательные напряжения*. Диаграммы сдвига для пластичного материала приведены на рис. 4.5,а,б. Для анализа упругопластического деформирования вала можно воспользоваться упрощённой диаграммой сдвига (рис. 4.12,а), состоящей только из линейного участка и площадки текучести (*диаграмма Прандтля*). До тех пор пока напряжения в материале не превышают предела текучести  $\tau_{\text{т}}$ , вал деформируется упруго. Величина крутящего момента, при котором появляются первые пластические деформации на поверхности вала (при условии  $\tau_{\max} = \tau_{\text{т}}$ ), определяется из формулы (4.11):  $M_{\text{т}} = \tau_{\text{т}} W_{\text{р}}$  (рис. 4.12,б). При дальнейшем увеличении нагрузки область пластической деформации материала постепен-

но будет распространяться внутрь сечения. Согласно принятой диаграмме сдвига в сечении образуется кольцевая пластическая зона (1), где  $\tau = \tau_r$ , и упругое ядро (2), где  $\tau < \tau_r$ , (рис. 4.12,в). Когда область пластической деформации достигнет центра сечения, наступает предельное состояние вала (рис. 4.12,г).

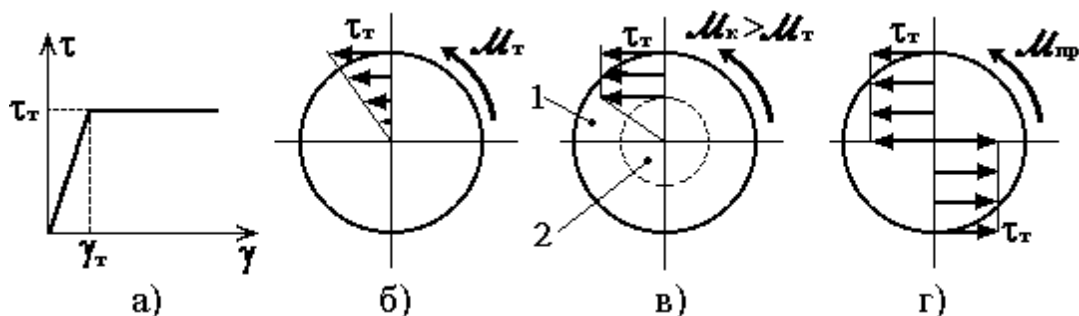


Рис. 4.12

Предельное значение крутящего момента определяется согласно выражению (4.6), учитывая, что во всех точках сечения  $\tau = \tau_r$ :

$$\hat{I}_{\text{ис}} = \int_F \tau_r \rho dF = 2\pi \int_0^D \tau_r \rho^2 d\rho = \tau_r \frac{\pi D^3}{12} \quad \hat{I}_{\text{ис}} = \tau_r \cdot W_{\text{п}}, \quad (4.27)$$

где  $W_{\text{п}} = \pi D^3 / 12$  - *пластический момент сопротивления* сечения при кручении.

Сравнивая выражения для моментов  $M_T$  и  $M_{\text{пр}}$ , видим, что их отношение составляет  $M_{\text{пр}} / M_T = 4/3$ . Отсюда можно сделать вывод: от начала возникновения пластических деформаций до потери несущей способности вала крутящий момент увеличивается ~ на 33%. Это - «запас» несущей способности вала при расчёте по предельному состоянию по сравнению с расчетом по допускаемым напряжениям ( $n_T=1$ ) за счёт неравномерного распределения касательных напряжений в сечении.

Более полное представление об упругопластическом деформировании вала даёт использование схематизации диаграммы сдвига в виде двух прямых линий (рис. 4.13,а) - участка упругой деформации (до  $\tau_r$ ) и участка линейного упрочнения (до  $\tau_b$ ). Характерные распределения напряжений в сечении на различных стадиях деформирования вала показаны на рис. 4.13,б,в. Предельное значение крутящего момента будет больше, чем при использовании диаграммы Прандтля (в зависимости от отношения  $\tau_b/\tau_r$ ).

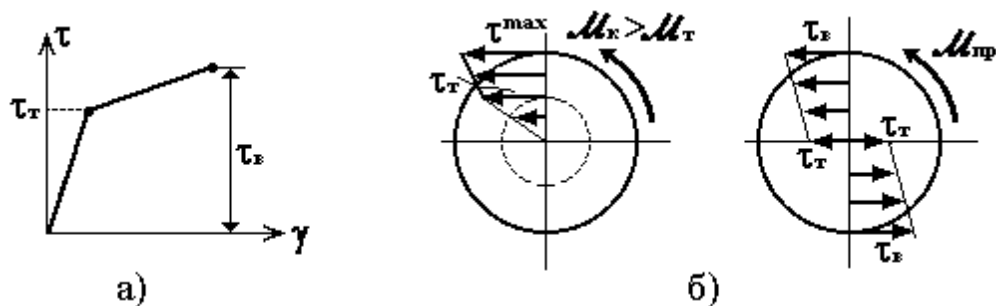


Рис. 4.13

Таким образом, разрушение валов из *пластичного материала* происходит по поперечному сечению *от действия касательных напряжений*; причем разрушению предшествует появление и развитие значительных пластических деформаций.

Для *хрупких материалов*, как правило,  $\sigma_{вр} < \tau_{в} < \sigma_{вс}$ , поэтому наиболее опасными являются нормальные растягивающие напряжения. Например, вал из чугуна разрушается по винтовым линиям под углом  $45^\circ$  к оси *от действия максимальных растягивающих напряжений* (рис. 4.14,а).

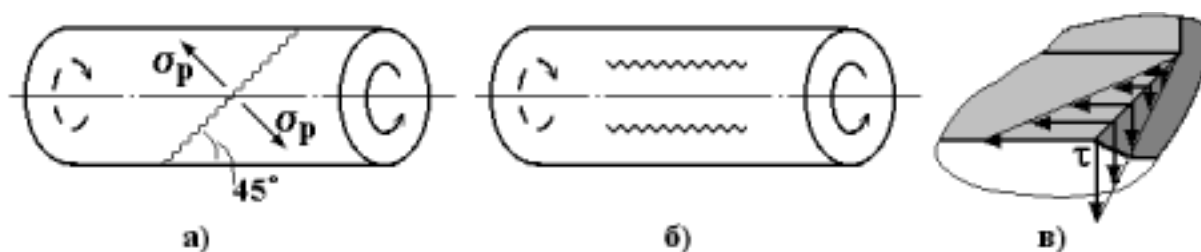


Рис. 4.14

Для *анизотропных материалов* важно знать направления наименьшего сопротивления их действующим напряжениям. Так, при кручении деревянного бруса трещины появляются на поверхности вдоль образующих (рис. 4.14,б) *от действия максимальных касательных напряжений в продольном направлении* (по закону парности касательных напряжений, рис. 4.14,в), т.к. древесина плохо сопротивляется скалыванию вдоль волокон.

При конструировании валов из композитных материалов, имеющих волокнистую структуру определенной ориентации, также следует учитывать направления действующих напряжений. Например, рационально применять композитные валы с ориентацией волокон по винтовым линиям, составляющим угол  $45^\circ$  с осью.

#### 4.6. Статически неопределимые задачи на кручение

Статически неопределимые задачи на кручение включают в себя расчёты валов, в которых реакции опор (реактивные моменты) и внутренние силы (внутренние крутящие моменты) не могут быть определены только из уравнений статики. Расчёт таких валов производят, используя условия совместности перемещений дополнительно к уравнениям статики. При наличии абсолютно жёстких связей в отдельных сечениях вала углы поворота этих сечений равны нулю. При наличии упругих связей (или ограничителей поворота отдельных сечений) задаются угловые перемещения соответствующих сечений вала, используя деформационные соотношения. Методику решения таких задач рассмотрим на примере.

**Пример 4.1.** Построить эпюру крутящих моментов для гладкого вала, жёстко закреплённого в торцевых сечениях и нагруженного внешним моментом  $M$  (рис. 4.15,а).

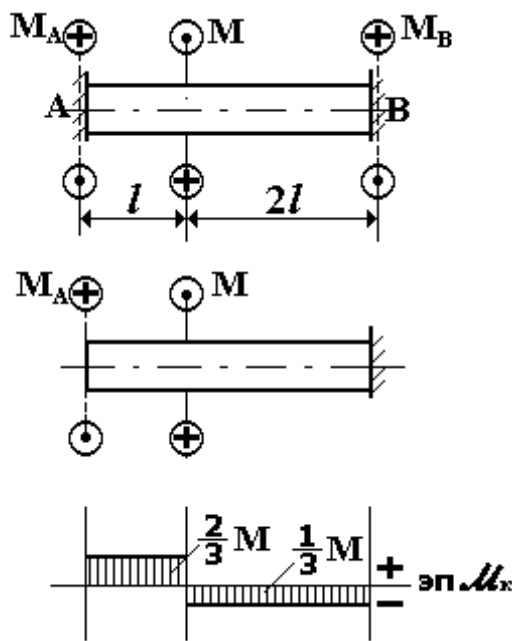


Рис. 4.15

В жёстких опорах вала возникают реактивные моменты  $M_A$  и  $M_B$  (см. рис. 4.15,а), для нахождения которых одного уравнения равновесия недостаточно:

$$\sum M_z = 0; \quad M_A - M + M_B = 0.$$

Для составления дополнительного уравнения условно перейдём к статически определимой задаче, отбросив одну из заделок. Например, отбросим левую опору и введём в качестве нагрузки неизвестный момент  $M_A$  (рис. 4.15,б). Для его определения запишем условие отсутствия угла поворота левого сечения, используя формулу (4.17):

$$\varphi_A = 0; \quad \varphi_{\bar{A}} = \varphi_0 + \sum_{i=1}^2 \frac{M \hat{e}_i l_i}{G J_{pi}}.$$

За начало отсчёта углов  $\varphi$  примем сечение В ( $\varphi_0 = \varphi_B = 0$ ). Тогда дополнительное уравнение примет вид:

$$\frac{\hat{I} \hat{e}_1 l_1}{G J_{p1}} + \frac{M \hat{e}_2 l_2}{G J_{p2}} = 0.$$



Применяя метод сечений, определяем внутренние крутящие моменты на участках  $M_{к1} = M_A$ ,  $M_{к2} = M_A - M$ . Учитывая, что  $l_1 = l$ ,  $l_2 = 2l$ ,  $GJ_{p1} = GJ_{p2} = GJ_p$ , получаем:

$$\frac{\hat{i}_{\hat{a}} \cdot l}{GJ_p} + \frac{(\hat{i}_{\hat{a}} - \hat{i}) \cdot 2l}{GJ_p} = 0 \quad \hat{i}_{\hat{a}} = \frac{2}{3} \hat{i}.$$

Дальнейший расчёт ведётся как для статически определимого вала. Определяем крутящие моменты на участках вала:  $M_{к1} = 2M/3$ ,  $M_{к2} = -M/3$ . Эпюра  $M_k$  показана на рис. 4.15,в.

#### 4.7. Кручение бруса прямоугольного сечения

Решение этой задачи намного сложнее, чем для бруса круглого сечения. В первую очередь это связано с тем, что *при кручении бруса некруглого сечения не соблюдается гипотеза плоских сечений*. Поперечные сечения бруса искривляются (происходит *депланация сечений*), что внешне можно наблюдать, например, при искажении ортогональной сетки линий на поверхности бруса прямоугольного сечения. Решение задачи о кручении бруса некруглого сечения проводится методами теории упругости, поэтому приведем лишь основные сведения, необходимые для расчета.

Отметим общие положения: 1) касательные напряжения в точках контура поперечного сечения направлены по касательной к линии контура; 2) касательные напряжения в угловых точках сечения равны нулю. Оба эти положения легко доказываются от противного.

Основные расчётные формулы - для максимальных касательных напряжений в сечении и относительного угла закручивания на участке - имеют вид, аналогичный соотношениям (4.11) и (4.8):

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\hat{e}}}{W_{\hat{e}}}; \quad \varphi' = \frac{M_{\hat{e}}}{GJ_{\hat{e}}}, \quad (4.28)$$

где  $J_k$ ,  $W_k$  - момент инерции и момент сопротивления сечения при кручении.

Угол закручивания, например для консольного бруса, определяется по формуле, аналогичной формуле (4.15):

$$\varphi = \frac{M_{\hat{e}} l}{GJ_{\hat{e}}}. \quad (4.29)$$

Для сечения прямоугольной формы распределение касательных напряжений показано на рис. 4.16. Наибольшие касательные напряжения возникают в середине больших сторон (точки А и А<sub>1</sub>), напряжения в середине малой стороны прямоугольника (т.В и т.В<sub>1</sub>) меньше по величине:

$$\tau' = \eta \tau^{\max}; \quad \eta \leq 1. \quad (4.30)$$

Геометрические характеристики прямоугольного сечения при кручении определяются соотношениями:

$$W_k = \alpha ab^2; \quad J_k = \beta ab^3; \quad a \geq b. \quad (4.31)$$

Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta$  зависят от отношения сторон  $a/b$ ; их числовые значения приведены в табл. 4.2. Для прямоугольного сечения сильно вытянутой формы ( $a/b > 10$ )  $\alpha=1/3$ ,  $\beta=1/3$ .

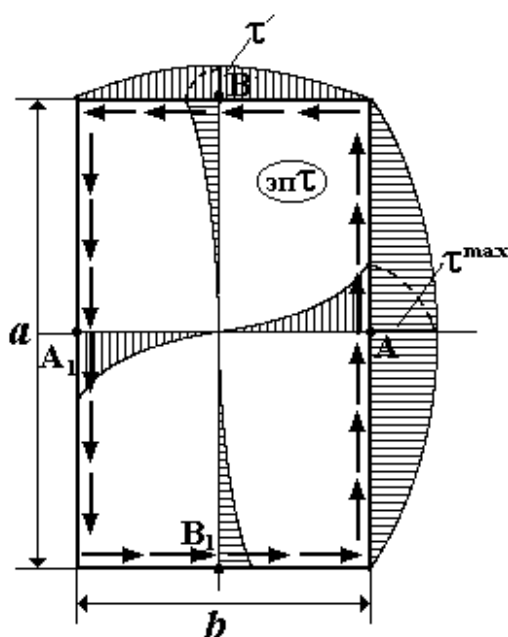


Рис. 4.16

Таблица 4.2

| a/b      | 1.0   | 1.5   | 1.75  | 2.0   | 2.5   | 3.0   | 4.0   | 4.0   | 8.0   | 10.0  | $\infty$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $\alpha$ | 0.208 | 0.231 | 0.239 | 0.246 | 0.258 | 0.267 | 0.282 | 0.299 | 0.307 | 0.313 | 0.333    |
| $\beta$  | 0.141 | 0.196 | 0.214 | 0.229 | 0.249 | 0.263 | 0.281 | 0.299 | 0.307 | 0.313 | 0.333    |
| $\eta$   | 1.0   | 0.859 | 0.820 | 0.795 | 0.766 | 0.753 | 0.745 | 0.743 | 0.742 | 0.742 | 0.742    |

#### 4.8. Кручение тонкостенного стержня открытого профиля

Стержень называется тонкостенным, если один из размеров поперечного сечения значительно превышает другой. Поперечное сечение тонкостенного стержня часто называется *профилем*. Различают *стержни открытого* (а) и *замкнутого* (б) *профиля* (рис. 4.17). В силу определения:  $s/t > 10$ ,  $s_i/t_i > 10$ , где  $s$ ,  $t$  - полная длина контура и толщина профиля;  $s_i$ ,  $t_i$  - длина и толщина  $i$ -ой части тонкостенного профиля ( $s = \sum s_i$ ). Наиболее часто применяются стержни открытого профиля. Для их расчёта при кручении применяется приближенный метод с использованием формул для бруса прямоугольного сечения. При этом возможны два подхода.

1. Если профиль может быть развернут в прямоугольник вытянутой формы (рис. 4.17,а), то для расчета применимы формулы (4.28) - (4.31) при  $\alpha=1/3$ ,  $\beta=1/3$  ( $W_k = st^2/3$ ,  $J_k = st^3/3$ ):

$$\tau^{\max} = \frac{3M \hat{e}}{st^2}; \quad \varphi' = \frac{3M \hat{e}}{G st^3}; \quad \varphi = \frac{3M \hat{e} l}{G st^3}. \quad (4.32)$$

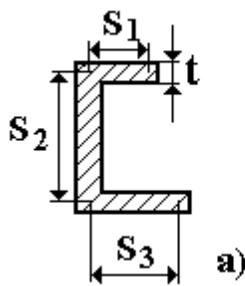


Рис. 4.17

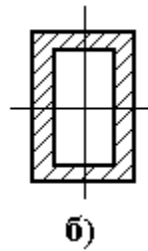
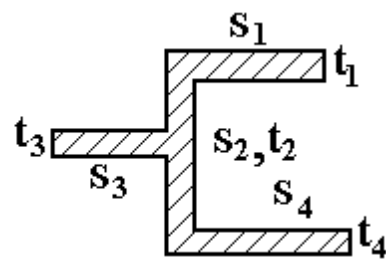


Рис. 4.18



2. В том случае, когда открытый профиль является составным и не может быть развернут в прямоугольник (рис. 4.18), то расчет ведется следующим образом. Сечение разбивается на  $n$  частей, каждая из которых воспринимает момент  $M_{ki}$ . При этом

$$J_{\hat{e}} = \sum_{i=1}^n J_{\hat{e}i}; \quad J_{\hat{e}i} = \frac{1}{3} s_i t_i^3; \quad W_{\hat{e}i} = \frac{1}{3} s_i t_i^2, \quad (4.33)$$

а угол поворота всего сечения и отдельных его частей одинаковый:

$$\varphi = \frac{M_{\hat{e}} l}{G J_{\hat{e}}} = \frac{M_{\hat{e}1} l}{G J_{\hat{e}1}} = \dots = \frac{M_{\hat{e}n} l}{G J_{\hat{e}n}}. \quad (4.34)$$

Из соотношений (4.34) следует, что крутящий момент распределяется в отдельных частях сечения пропорционально их моментам инерции:

$\hat{i}_{\hat{e}i} = \hat{i}_{\hat{e}} \frac{J_{\hat{e}i}}{J_{\hat{e}}}$ . Максимальные касательные напряжения в  $i$ -ой части профиля равны:

$$\tau_i^{max} = \frac{M_{\hat{e}i}}{W_{\hat{e}i}} = \frac{M_{\hat{e}}}{J_{\hat{e}}} \left( \frac{J_{\hat{e}i}}{W_{\hat{e}i}} \right) = \frac{M_{\hat{e}}}{J_{\hat{e}}} t_i. \quad (4.35)$$

Наибольшего значения касательные напряжения в сечении достигают на участке максимальной толщины:

$$\tau^{max} = \frac{M_{\hat{e}}}{J_{\hat{e}}} t_{max}. \quad (4.36)$$

Данный метод является приближенным, т.к. не учитывает повышенные местные напряжения (концентрацию напряжений) во внутренних углах ломаного профиля.

#### 4.9. Расчет витых цилиндрических пружин с малым шагом

Пружины широко применяются в технике в качестве упругих элементов. В частности, в механизмах, работающих в условиях динамической нагрузки, применяются пружины как амортизаторы, т.е. детали, способные получить значительную упругую деформацию. На практике наиболее распространены цилиндрические пружины, испытывающие действие растягивающих или сжимающих сил (пружины растяжения-сжатия). Обычно пружины изготавливаются из стальной проволоки круглого поперечного сечения. Материал для пружин - качественная пружинно-рессорная сталь с высокими механическими характеристиками

( $\sigma_n = 800 \div 1000$  МПа;  $\sigma_T = 950 \div 1600$  МПа;  $\sigma_B = 1500 \div 1750$  МПа;  $\tau_T = 600 \div 1000$  МПа;  $\tau_B = 850 \div 1400$  МПа).

Витая пружина представляет собой пространственный брус, в поперечных сечениях которого при нагружении возникают все внутренние силовые факторы. Для пружины с малым шагом вследствие малого угла подъема витка можно пренебречь влиянием изгибающего момента и нормальной силы. Поэтому для таких пружин растяжения или сжатия основными внутренними силовыми факторами являются крутящий момент  $M_K$  и перерезывающая сила  $Q$ , определяемые действием в поперечных сечениях касательных напряжений  $\tau$ .

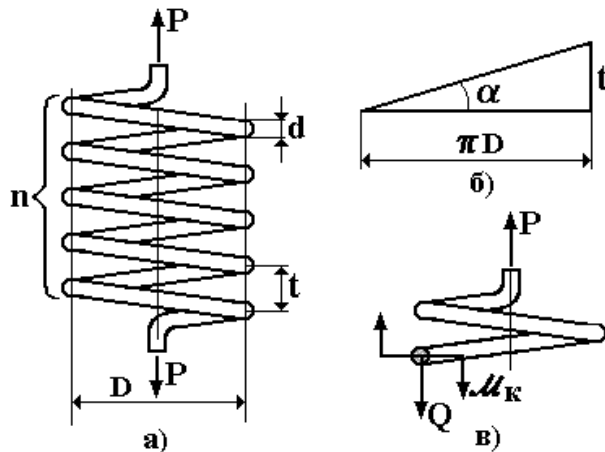


Рис. 4.19

Основными параметрами цилиндрической пружины являются (рис.4.19,а):

$D$  - средний диаметр витка;  $d$  - диаметр сечения проволоки;  $t$  - шаг витка;  $n$  - число рабочих витков.

Для отдельного витка можно ввести угол подъема  $\alpha$  (рис. 4.19,б), где  $tg\alpha = t/\pi D$ . Для пружины с малым шагом обычно  $\alpha \leq 5^\circ$ . Применяя метод сечений и рассматривая равновесие отсеченной части пружины (рис. 4.19,в), можно

определить  $Q$  и  $M_K$  для любого поперечного сечения:

$$Q \approx P; \quad M_K = \frac{1}{2} P \cdot D. \quad (4.37)$$

Рассматривая касательные напряжения от деформаций кручения и среза (последние условно считаем равномерно распределенными в сечении), для максимальных касательных напряжений получим:

$$\tau_{max} = \frac{M}{W_p} + \frac{Q}{F}, \quad \text{где } W_p = \frac{\pi d^3}{16}; \quad F = \frac{\pi d^2}{4}.$$

С учётом (4.35) расчётная формула для касательных напряжений примет вид:

$$\tau_{max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D}\right). \quad (4.38)$$

Для пружины из тонкой проволоки ( $d/D < 0,1$ ) можно пренебречь напряжениями от среза. Тогда с достаточной точностью в расчёте можно определять касательные напряжения только от кручения:

$$\tau_{max} = \frac{8PD}{\pi d^3}. \quad (4.39)$$

В то же время для силовых пружин, изготовленных из толстой проволоки (например, винтовых рессор), следует пользоваться формулой (4.38), а анализ действующих напряжений от кручения и среза показывает, что наибольшие касательные напряжения всегда возникают на внутренней стороне витка.

Под действием осевой нагрузки пружина деформируется, и происходит изменение её длины  $\Delta L$  по оси. Изменение длины пружины при действии сжимающей силы называется *осадкой пружины* ( $\lambda = \Delta L$ ). При определении осевого перемещения ( $\lambda$ ) пружины можно воспользоваться законом сохранения энергии.

Работа внешних сил  $A = \frac{1}{2} P \lambda$  (коэффициент  $1/2$  отражает статический характер нагружения) идет на создание внутренней энергии деформации  $U_{кр}$  упругой пружины. Рассматривая энергию деформации как работу внутренних сил ( $M_k$ ) на угловых перемещениях ( $\varphi$ ) для элемента бруса получим (с учетом формулы (4.8)):

$$dU_{\hat{e}\delta} = \frac{1}{2} M_{\hat{e}} \cdot d\varphi = \frac{M_{\hat{e}}^2 dz}{2G J_p}$$

Для всего бруса (пружины), т.к.  $M_k = const$ ,  $GJ_p = const$ , получим:

$$U_{\hat{e}\delta} = \int_l dU_{\hat{e}\delta} = \frac{\hat{I} \hat{e}^2 l}{2G J_p}$$

Принимая  $l \approx \pi D n$ ,  $J_p = \pi D^4 / 32$ , в итоге определяем перемещение  $\lambda$  из условия  $A = U_{кр}$ :

$$\Delta L = \lambda = \frac{8PD^3 n}{G d^4}. \quad (4.40)$$

Нетрудно получить расчетные формулы для  $\tau_{max}$  и  $\Delta L = \lambda$  для пружины из проволоки некруглого сечения, используя соответствующие выражения для геометрических характеристик  $J_k$  и  $W_k$ .

Обычно при определении перемещений по формуле (4.40) под  $n$  понимается рабочее число витков. Так, для пружины растяжения не учитывается отогнутая часть концевых витков, для пружины сжатия исключается по  $3/4$  витка с каждого торца, т.е.  $n_{раб} \approx n - 1,5$  (за счет шлифовки или поджатия концевых витков).

*Характеристикой пружины растяжения-сжатия* называется зависимость  $P(\lambda)$  между нагрузкой и перемещением, которая в области упругих деформаций материала является линейной. Параметр

$$c = \frac{P}{\lambda} = \frac{G d^4}{8D^3 n}. \quad (4.41)$$

называется *жесткостью пружины*.

## 5. Геометрические характеристики сечений

При определении напряжений и перемещений используются различные геометрические характеристики поперечных сечений бруса. Например, при растяжении - площадь сечения  $F$ , при кручении - момент инерции  $J_p$  ( $J_k$ ). В настоящем разделе обобщим понятия геометрических характеристик сечений бруса.

Геометрические характеристики сечений, представляющие интегралы вида  $\int_F f(x,y) dF$  (рис. 5.1,а), приведены в табл. 5.1.

*Геометрические характеристики сечений*    Таблица 5.1

| $f(x,y)$             | $\int_F f(x,y) dF$       | <i>Название</i>                                 | <i>Размерность</i> | <i>Интервал значений</i>           |
|----------------------|--------------------------|---|--------------------|------------------------------------|
| 1                    | $F = \int_F dF$          | Площадь сечения                                 | $\text{см}^2$      | $F > 0$                            |
| $y$                  | $S_x = \int_F y dF$      | Статический момент сечения относительно оси $x$ | $\text{см}^3$      | $S_x \geq 0$<br>$S_x \leq 0$       |
| $x$                  | $S_y = \int_F x dF$      | Статический момент сечения относительно оси $y$ | $\text{см}^3$      | $S_y \geq 0$<br>$S_y \leq 0$       |
| $y^2$                | $J_x = \int_F y^2 dF$    | Момент инерции сечения относительно оси $x$     | $\text{см}^4$      | $J_x > 0$                          |
| $x^2$                | $J_y = \int_F x^2 dF$    | Момент инерции сечения относительно оси $y$     | $\text{см}^4$      | $J_y > 0$                          |
| $xy$                 | $J_{xy} = \int_F xy dF$  | Центробежный момент инерции сечения             | $\text{см}^4$      | $J_{xy} \geq 0$<br>$J_{xy} \leq 0$ |
| $\rho^2 = x^2 + y^2$ | $J_p = \int_F \rho^2 dF$ | Полярный момент инерции сечения                 | $\text{см}^4$      | $J_p > 0$                          |

При определении геометрических характеристик сложного (составного) сечения используется свойство определенного интеграла: интеграл по всей площади сечения равен сумме интегралов по частям, на которые разбито это сечение:

$$\int_F f(x,y) dF = \sum_{i=1}^n \int_{F_i} f(x,y) dF,$$

где  $n$  - число частей сечения.

□

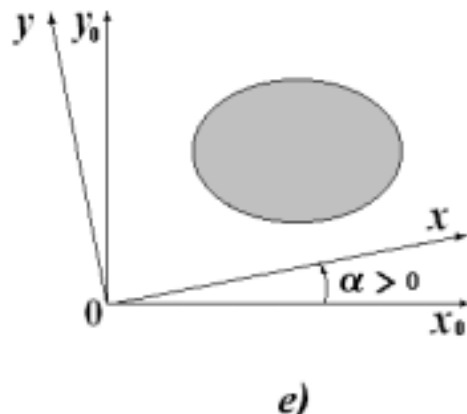
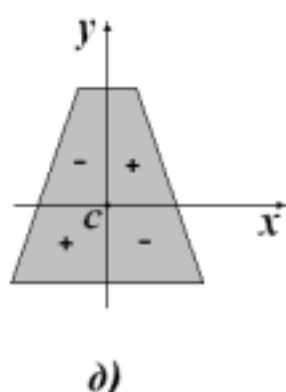
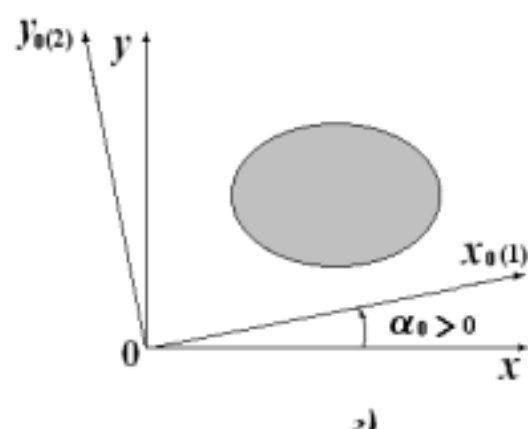
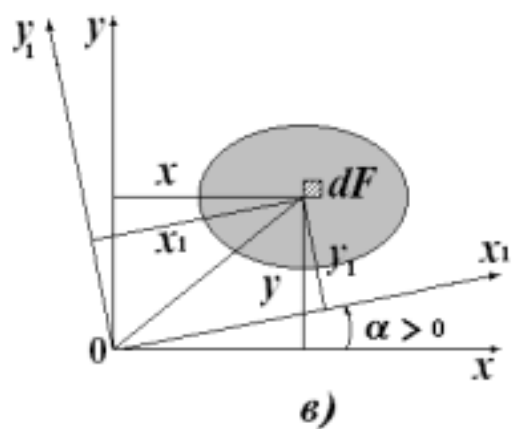
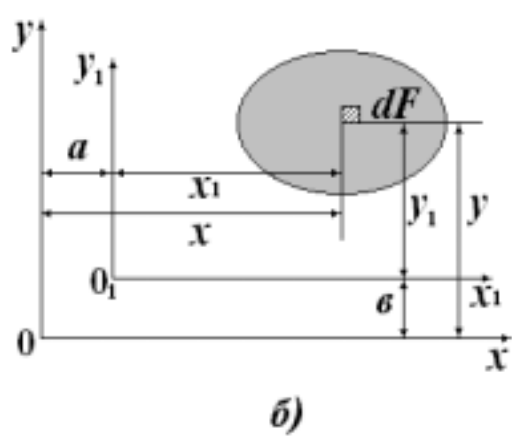
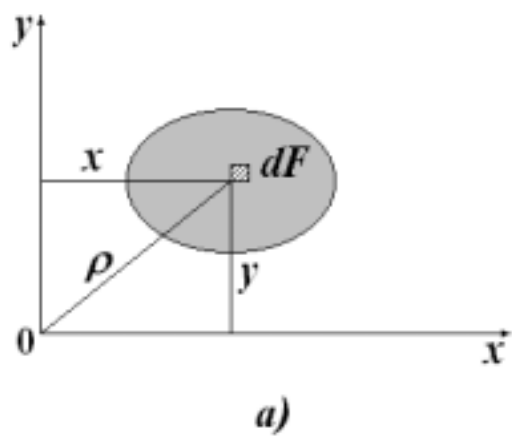


Рис. 5.1

## 5.1. Статистические моменты сечения

Статические моменты сечения  $S_x$  и  $S_y$  используются главным образом для определения положения центра площади сечения и центральных осей.

Рассмотрим изменение статических моментов при параллельном переносе осей (рис. 5.1,б). Считая известными  $F$ ,  $S_x$  и  $S_y$  в системе координат  $OXY$  определим статические моменты  $S_{xI}$ ,  $S_{yI}$  относительно новых осей  $x_I$ ,  $y_I$ .

Учитывая соотношения  $x_I = x - a$ ,  $y_I = y - b$ , получим:

$$S_{xI} = \int_F y_I dF = \int_F (y - b) dF; \quad S_{yI} = \int_F x_I dF = \int_F (x - a) dF \quad \text{или}$$

$$S_{xI} = S_x - bF; \quad S_{yI} = S_y - aF. \quad (5.1)$$

Оси  $x_I$ ,  $y_I$  можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись условия:  $S_{xI} = 0$ ,  $S_{yI} = 0$ .

**Оси**, относительно которых статические моменты сечения равны нулю, называются **центральными**. Точка пересечения центральных осей называется **центром площади сечения**.

Принимая  $S_{xI} = 0$ ,  $S_{yI} = 0$ , из выражений (5.1) координаты центра площади сечения относительно вспомогательных осей  $x$ ,  $y$  определяются по формулам (обозначим  $x_c = a$ ,  $y_c = b$ ):

$$x_c = \frac{S_y}{F}; \quad y_c = \frac{S_x}{F}. \quad (5.2)$$

Соответственно, если площадь  $F$  и положение центра площади сечения (координаты  $x_c$ ,  $y_c$ ) в системе координат  $Oxy$  известны, то статические моменты сечения относительно осей  $x$ ,  $y$  можно определить из выражений (5.2):

$$S_x = F y_c; \quad S_y = F x_c. \quad (5.3)$$

Можно показать, что статистический момент относительно любой оси, проходящей через центр площади сечения, равен нулю.

При определении центра площади сложного сечения применяется следующая процедура:

1) сечение разбивается на  $n$  частей, площади ( $F_i$ ) и положение центров ( $C_i$ ) площади которых известны;

2) задается вспомогательная система координат, в которой определяются координаты центров площадей ( $x_{ci}$ ,  $y_{ci}$ ) этих частей;

3) вычисляются координаты составного сечения по формулам:

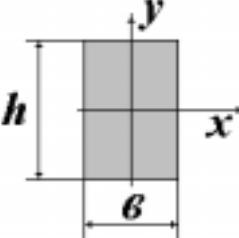
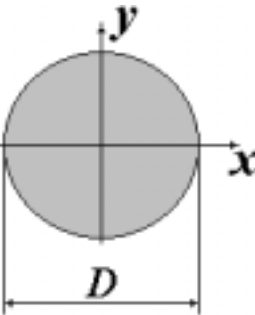
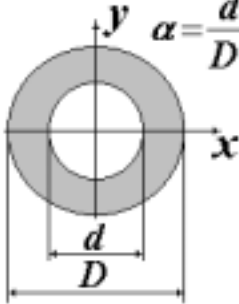
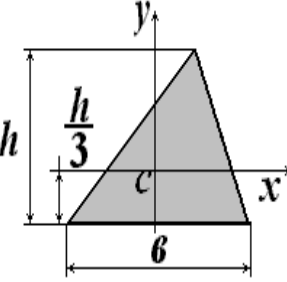
$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_{ci}}{F}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_{ci}}{F}; \quad F = \sum_{i=1}^n F_i. \quad (5.4)$$



## 5.2. Моменты инерции сечения

В табл. 5.2 приведены часто используемые формулы для моментов инерции сечений простой формы, которые получены непосредственно интегрированием (для прямоугольника приведен также и момент инерции при кручении  $J_k$ ).

Моменты инерции типовых сечений Таблица 5.2

| Вид сечения   | $J_x$  | $J_y$  | $J_p (J_k)$   |
|---|--|--|---|
|    | $\frac{bh^3}{12}$  | $\frac{hb^3}{12}$  | $\beta hb^3$  |
|   | $\frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05D^4$                               | $\frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05D^4$                               | $\frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^4$                               |
|  | $\frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0,05D^4 (1 - \alpha^4)$ | $\frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0,05D^4 (1 - \alpha^4)$ | $\frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1D^4 (1 - \alpha^4)$ |
|  | $\frac{bh^3}{36}$  | —  | —   |

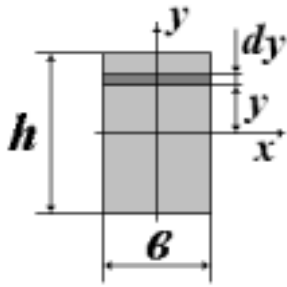


Рис. 5.2

Например, для прямоугольника (рис. 5.2) момент инерции относительно центральной оси  $x$  определяется следующим образом :

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{by^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \quad \text{или} \quad J_x = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогично получим:  $J_y = \frac{hb^3}{12}.$

Отметим, что для круга и кольца  $J_x = J_y = 0,5J_p$ . Это следует из того, что  $\rho^2 = x^2 + y^2$  (см. рис.5.1,а), следовательно,  $J_p = J_x + J_y$ .

Рассмотрим изменение моментов инерции сечения при изменении системы координат - при параллельном переносе и повороте осей.

**При параллельном переносе осей**, например, момент инерции  $J_{x1}$  изменяется следующим образом ( $x_1 = x - a$ ,  $y_1 = y - b$ , см. рис. 5.1,б):

$$J_{x1} = \int_F (y - b)^2 dF = \int_F y^2 dF - 2b \int_F y dF + b^2 \int_F dF = J_x - 2bS_x + b^2F.$$

Выполнив аналогичные преобразования и для других моментов инерции, получим:

$$\begin{aligned} J_{x1} &= J_x - 2bS_x + b^2F; & J_{y1} &= J_y - 2aS_y + a^2F; \\ J_{x1y1} &= J_{xy} - aS_x - bS_y + abF. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Если оси  $x$  и  $y$  - центральные, то  $S_x = 0$ ,  $S_y = 0$ , и тогда формулы (5.5) упрощаются:

$$J_{x1} = J_x + b^2F; \quad J_{y1} = J_y + a^2F; \quad J_{x1y1} = J_{xy} + abF. \quad (5.6)$$

Из формул (5.6) следует, что при переходе от центральных осей к нецентральной осевой момент инерции всегда увеличивается.

**При повороте осей**, учитывая, что  $x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha$ ,  $y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha$  (рис. 5.1,в), моменты инерции изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} J_{x1} &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha; \\ J_{y1} &= J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha; \\ J_{x1y1} &= \frac{1}{2}(J_x - J_y) \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (5.7)$$

Вторая формула может быть получена из первой при изменении угла  $\alpha$  на  $90^\circ$ . Складывая первые две формулы, находим:

$$J_{x1} + J_{y1} = J_x + J_y = J_p. \quad (5.8)$$

Это **свойство инвариантности** суммы осевых моментов инерции при повороте осей: **сумма осевых моментов инерции не изменяется** и равна полярному моменту инерции.

Найдем положение осей, относительно которых осевые моменты инерции  $J_{x1}$  и  $J_{y1}$  принимают экстремальные значения.

Для этого используем условие  $dJ_{x1}/d\alpha = 0$ . После преобразований получим:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (5.9)$$

Такой же результат получается из третьей формулы (5.7) при  $J_{x1y1} = 0$ .

**Оси, относительно которых осевые моменты инерции принимают экстремальные значения (один - max, другой - min), а центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями инерции** (оси  $x_0, y_0$  на рис. 5.1,г). Соответственно моменты инерции относительно этих осей называются **главными моментами инерции** ( $J_{max}, J_{min}$ ). Иногда главным осям присваивают индексы «1» и «2». Соответственно главные моменты инерции обозначаются  $J_1$  и  $J_2$ . Обычно считается, что  $J_1 = J_{max}, J_2 = J_{min}$ . На рис. 5.1,г принято, что  $J_{x0} = J_{max}$  и ось  $x_0$  обозначается цифрой 1.

Ось симметрии сечения и любая ей перпендикулярная ось являются главными осями инерции сечения. На рис. 5.1,д показаны знаки  $J_{xy}$  симметричных частей сечения. С учетом этого получается, что центробежный момент инерции всего сечения равен нулю.

Подробнее остановимся на определении главных моментов инерции. Если из формулы (5.9) определен угол  $\alpha_0$ , то из первых двух формул (5.7) при  $\alpha = \alpha_0$  находятся значения главных моментов инерции:

$$\begin{aligned} J_{x0} &= J_x \cos^2 \alpha_0 + J_y \sin^2 \alpha_0 - J_{xy} \sin 2\alpha_0; \\ J_{y0} &= J_x \sin^2 \alpha_0 + J_y \cos^2 \alpha_0 + J_{xy} \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Ясно, что если  $J_{x0} > J_{y0}$ , то  $J_{x0} = J_{max}$ , а  $J_{y0} = J_{min}$ , и наоборот.

Получим формулы для главных моментов инерции, не содержащие тригонометрических функции. Для этого запишем сумму и разность выражений (5.10):

$$\begin{aligned} J_{x0} + J_{y0} &= J_x + J_y; \\ J_{x0} - J_{y0} &= (J_x - J_y) \cos 2\alpha_0 - 2J_{xy} \sin 2\alpha_0 = (J_x - J_y) / \cos 2\alpha_0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Во второй формуле использовалась замена  $2J_{xy} = - (J_x - J_y) / \operatorname{tg} 2\alpha_0$  из выражения (5.9).

Теперь из формул (5.11) получим:

$$J_{x0} = \frac{1}{2} ((J_x + J_y) + (J_x - J_y) / \cos 2\alpha_0); \quad J_{y0} = \frac{1}{2} ((J_x + J_y) - (J_x - J_y) / \cos 2\alpha_0). \quad (5.12)$$

Очевидно, что если  $J_x > J_y$ , то  $J_{x0} > J_{y0}$ .

Используя зависимость  $1/\cos 2\alpha_0 = \pm \sqrt{1 + \tan^2 2\alpha_0}$  и формулу (5.9), запишем:

$$\frac{1}{\cos 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \frac{4J_{xy}^2}{(J_x - J_y)^2}} = \pm \frac{\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}}{(J_x - J_y)}.$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} J_{x0} &= \frac{1}{2} ((J_x + J_y) \pm \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}); \\ J_{y0} &= \frac{1}{2} ((J_x + J_y) \mp \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Верхние знаки берутся при  $J_x > J_y$ , а нижние - при  $J_x < J_y$ .

Часто формулы (5.13) объединяют в одну:

$$J_{1,2} = J_{\substack{\text{max} \\ \text{min}}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}. \quad (5.14)$$

При этом нужно дополнительно определить соответствие осей  $x_0$ ,  $y_0$  и осей 1, 2.

Если главные моменты инерции известны, то моменты инерции относительно произвольных осей (рис. 5.1,е) могут быть получены из формул (5.7) с учетом того, что  $J_{x_0y_0} = 0$ :

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x0} \cos^2 \alpha + J_{y0} \sin^2 \alpha; \\ J_y &= J_{x0} \sin^2 \alpha + J_{y0} \cos^2 \alpha; \\ J_{xy} &= 0,5(J_{x0} - J_{y0}) \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (5.15)$$

В частности, из третьей формулы следует, что максимальное значение центробежный момент сечения принимает относительно осей, повернутых на угол  $\alpha = 45^\circ$  к главным осям. При  $J_{x0} = J_1 = J_{max}$ ,  $J_{y0} = J_2 = J_{min}$  получим:

$$J_{xy}^{max} = \frac{J_1 - J_2}{2}. \quad (5.16)$$

В расчетных зависимостях для бруса используются характеристики сечений относительно главных центральных осей инерции. Для определения положения этих осей требуется:

- 1) определить координаты центра площади сечения;
- 2) определить осевые  $J_x$ ,  $J_y$  и центробежный  $J_{xy}$  моменты инерции относительно центральных осей  $x$ ,  $y$ , параллельных вспомогательным;
- 3) определить положение главных осей (угол  $\alpha_0$ ) и главные моменты инерции ( $J_{max}$ ,  $J_{min}$ ) по формулам (5.9), (5.14).

### 5.3. Радиусы инерции сечения

Моменты инерции сечения относительно осей  $x$  и  $y$  можно представить как произведения площади  $F$  сечения на квадрат некоторой величины, называемой радиусом инерции:

$$J_x = F i_x^2, \quad J_y = F i_y^2, \quad (5.17)$$

где  $i_x, i_y$  - *радиусы инерции* площади сечения относительно осей  $x$  и  $y$ .

Из выражений (5.17) следует, что:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}. \quad (5.18)$$

Главным центральным осям инерции соответствуют главные радиусы инерции сечения:

## 6. Изгиб

*Изгиб бруса* вызывается действием поперечной нагрузки (рис. 6.1,а). *Прямым изгибом* называется нагружение бруса, при котором плоскость действующей нагрузки проходит через ось бруса и совпадает с одной из главных плоскостей инерции бруса (плоскость расположения главных осей инерции поперечных сечений бруса). Частным случаем прямого изгиба является *плоский изгиб* бруса, при котором нагружение происходит в плоскости симметрии бруса.

Брус, работающий на изгиб, обычно называют *балкой*.

В поперечных сечениях бруса при прямом изгибе возникают внутренние силовые факторы - *изгибающий момент  $M$*  и *поперечная сила  $Q$* , которые определяются по методу сечений. Для них используется правило знаков, показанное на рис. 6.1,б. *Положительная поперечная сила вызывает поворот рассматриваемой части бруса по ходу часовой стрелки; положительный изгибающий момент вызывает сжатие верхних волокон бруса* (для горизонтально расположенного участка бруса). (Для произвольного положения бруса при построении эпюр обычно положительный момент откладывается со стороны сжатых волокон.)

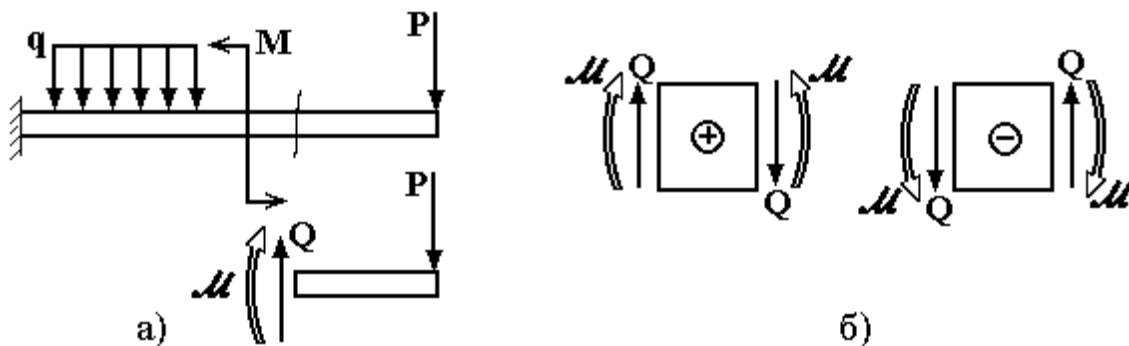


Рис. 6.1

Различают *чистый и поперечный изгиб*. При чистом изгибе в поперечных сечениях бруса возникает только изгибающий момент, при поперечном изгибе - изгибающий момент и поперечная сила.

### 6.1. Дифференциальные и интегральные зависимости при изгибе

Для внутренних силовых факторов при изгибе балки существуют определенные зависимости. Рассмотрим произвольно нагруженную балку (рис. 6.2,а), где положительное направление нагрузки  $q(z)$  сов-

падает с направлением оси  $y$ . Для элементарного участка  $dz$  балки в пределах действия только нагрузки  $q$  учтём возникающие в сечениях внутренние силовые факторы (рис. 6.2,б). В пределах малого участка  $dz$  нагрузку  $q$  можно считать равномерно распределенной,  $M$  и  $Q$  приложены в положительном направлении с учётом их изменения по длине.

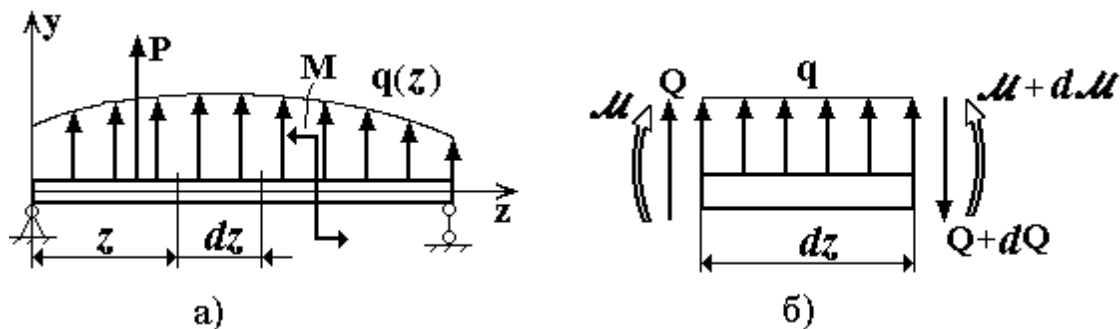


Рис. 6.2

Уравнения равновесия выделенной части балки имеют вид (для уравнения моментов поперечная ось  $x$  рассматривается для правого сечения):

$$\sum F_y = 0; \quad Q + q \cdot dz - (Q + dQ) = 0;$$

$$\sum m_x = 0; \quad -M - Q \cdot dz - q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} + (M + dM) = 0.$$

Отбрасывая во втором уравнении члены второго порядка малости, получаем дифференциальные зависимости при изгибе:

$$\frac{dQ}{dz} = q; \quad \frac{dM}{dz} = Q \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2M}{dz^2} = q \quad (6.1)$$

(третье соотношение получено на основе первых двух).

Из соотношений (6.1) путем интегрирования можно получить интегральные зависимости при изгибе:

$$Q(z) = \int_z q(z) dz + Q_0; \quad M(z) = \int_z Q(z) dz + M_0, \quad (6.2)$$

где  $Q_0$ ,  $M_0$  - значения поперечной силы и изгибающего момента в начальном сечении участка.

На основе зависимостей (6.1), (6.2) и способов исследования функций в математическом анализе следуют выводы о характере функций  $Q(z)$  и  $M(z)$ , которые можно рассматривать как *правила контроля и построения эпюр Q и M*.

1. Для участков, где  $q=0$ , эюра  $Q$  ограничена *горизонтальной прямой*, а эюра  $M$  - *наклонной прямой* (если на участке  $Q = 0$ , то  $M = const$ ).

2. Для участков, где  $q = const \neq 0$ , эюра  $Q$  ограничена *наклонной прямой*, эюра  $M$  - *квадратичной параболой*.

3. При  $q \neq 0$  выпуклость параболической эюры  $M$  противоположна направлению нагрузки  $q$ .

4. В сечении, где  $Q = 0$  при  $q \neq 0$ , эюра  $M$  имеет экстремум: **max** - при  $q < 0$ , **min** - при  $q > 0$ .

5. В сечении, где приложена внешняя сосредоточенная сила, на эюре  $Q$  имеет место *скачок* на величину этой силы, а на эюре  $M$  - *излом* навстречу силе. В сечении, где приложен внешний сосредоточенный момент, на эюре  $M$  имеет место *скачок* на величину этого момента.

6. Ордината эюры  $M$  численно равна площади эюры  $Q$  на соответствующем участке (если в пределах этого участка нет сосредоточенных моментов).

## 6.2. Основные зависимости при чистом изгибе

В теории чистого изгиба принимаются следующие кинематическая и статические *гипотезы*.

1. *Гипотеза плоских сечений*: сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации.

2. *Гипотеза ненадавливания продольных слоёв друг на друга*: продольные слои балки не взаимодействуют в поперечном направлении, т. е. нормальные напряжения в продольных сечениях равны нулю.

3. *Деформации и напряжения по ширине поперечного сечения балки постоянны*.

Эти гипотезы хорошо подтверждаются экспериментально. Если на поверхность недеформированной призматической балки нанести прямоугольную сетку линий (рис. 6.3,а), то при чистом изгибе балки сетка искажается так, что: а) поперечные линии остаются прямыми, поворачиваясь на некоторый угол; б) продольные линии искривляются по дугам окружностей и остаются перпендикулярными поперечным линиям (рис. 6.3,б). При этом изменяется и форма поперечных сечений: в растянутой в продольном направлении зоне балки происходит сужение в поперечном направлении, в сжатой зоне - расширение.



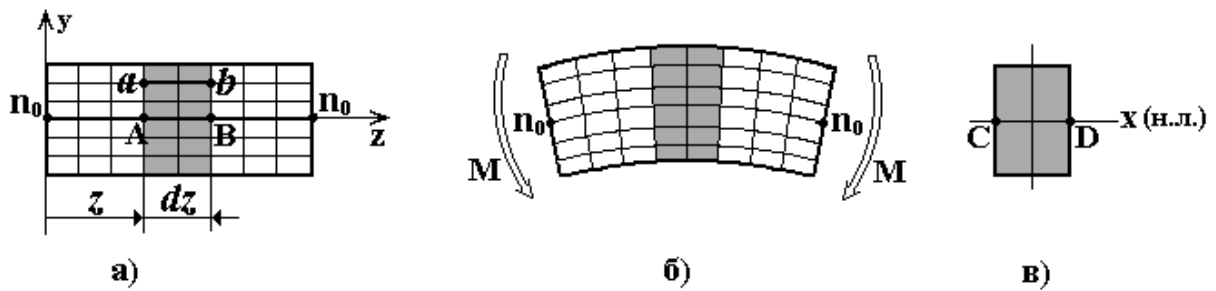


Рис. 6.3

При изгибе продольная деформация  $\epsilon(y)$  слоёв балки изменяется по высоте сечения непрерывно, причем часть волокон испытывает растяжение, часть - сжатие. Очевидно, что существует слой балки, в котором деформация отсутствует - **нейтральный слой**  $n_0-n_0$  (см. рис. 6.3,а,б). Линия пересечения нейтрального слоя и поперечного сечения называется **нейтральной линией** (линия **CD** на рис. 6.3,в).

В соответствии с общей схемой решения задачи о деформируемом теле (см. раздел 3.2) рассмотрим получение *кинематических, физических и статических зависимостей*.

Для анализа *геометрической картины* деформирования элементарной части балки (рис. 6.4) выделим отрезок **ab** произвольного слоя балки на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя (ось  $y$  расположена в плоскости изменения кривизны). При изгибе поперечные сечения, оставаясь плоскими, повернутся на угол  $d\theta$ , а изменение кривизны  $k$  нейтрального слоя определяется из геометрического условия  $dz = \rho \cdot d\theta$ :

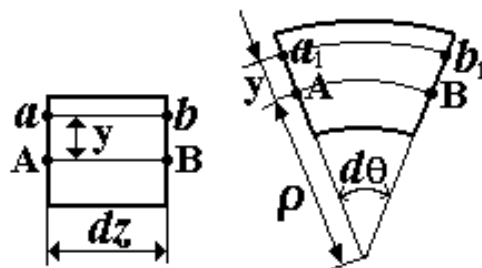


Рис. 6.4

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz}, \quad (6.3)$$

где  $\rho$  - радиус кривизны нейтрального слоя.

Линейная деформация отрезка **ab** определяется обычным образом:

$$\epsilon = \frac{\Delta(ab)}{ab} = \frac{a_1b_1 - ab}{ab}.$$

Учитывая, что  $ab = dz = \rho \cdot d\theta$ ,  $a_1b_1 = (\rho + y) d\theta$  (см. рис. 6.4), после преобразований получим:

$$\epsilon = \frac{y}{\rho} = ky. \quad (6.4)$$

Согласно гипотезам 2 и 3 продольные слои испытывают одноосное растяжение или сжатие. Поэтому физические зависимости (*закон Гука*) записываются в простейшем виде:

$$\sigma = \epsilon = \frac{y}{\rho} = Eky. \quad (6.5)$$

Согласно формуле (6.5) справедливо и такое определение *нейтральной линии*: геометрическое место точек сечения, где нормальные напряжения равны нулю.

Рассмотрим статические уравнения для произвольного сечения балки, в котором действуют только нормальные напряжения (рис. 6.5). Введём в сечении декартову систему координат так, что ось  $Ox$  совпадает с нейтральной линией сечения, ось  $Oy$  направлена вверх, ось  $Oz$  - перпендикулярно сечению. При изгибе  $N=0$ , и с учетом формул (6.5), (1.3) получаем:

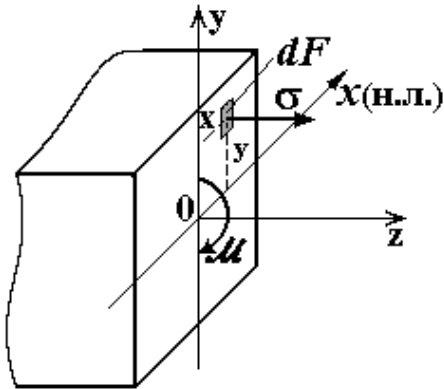


Рис. 6.5

$$N = \int_F \sigma dF = 0; \quad \int_F E \frac{y}{\rho} dF = 0;$$

$$kE \int_F y dF = 0.$$

Очевидно, что  $E \neq 0$ ,  $k = \frac{1}{\rho} \neq 0$

(для изогнутой балки), поэтому  $\int_F y dF = S_x = 0$ , т.е. ось  $x$  является центральной осью сечения.

Выбирая т.0 в центре площади сечения и учитывая, что рассматривается *прямой изгиб*, получаем, что оси  $x$  и  $y$  являются *главными центральными осями* поперечного сечения, а  $z$  - *осью балки*. Тогда  $\rho$  - радиус кривизны оси изогнутой балки.

Для изгибающего момента  $M$  в сечении имеем:

$$M = \int_F \sigma y dF = \int_F Eky^2 dF = kE \int_F y^2 dF = kEJ_x; \quad J_x = \int_F y^2 dF,$$

где  $J_x$  - момент инерции сечения относительно нейтральной линии.

(При выводе направление изгибающего момента  $M$  принято в соответствии с направлением нормальных напряжений.)

Отсюда получается зависимость для кривизны оси балки:

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_x}, \quad (6.6)$$

где  $EJ_x$  - жесткость бруса при изгибе.

### 6.3. Нормальные напряжения при изгибе

Подставляя зависимость (6.6) в формулу (6.5), получаем выражение для *нормальных напряжений в произвольной точке* поперечного сечения:

$$\sigma = \frac{M y}{J_x}. \quad (6.7)$$

Выражение (6.7) определяет закон изменения нормальных напряжений в плоскости сечения - линейная зависимость от координаты  $y$  (рис. 6.6,а).

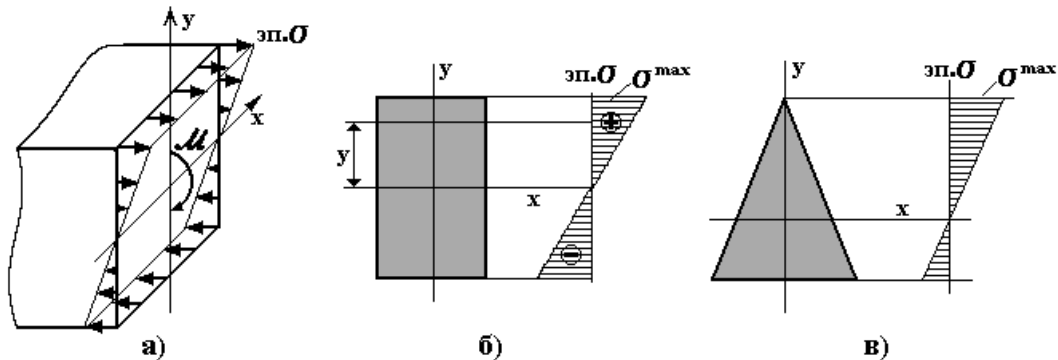


Рис. 6.6

*Максимальные нормальные напряжения в сечении* возникают в точках, наиболее удалённых от нейтральной линии:

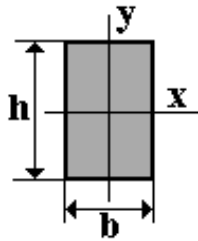
$$\sigma_{\max} = \frac{M y_{\max}}{J_x} = \frac{M}{W_x}, \quad (6.8)$$

где  $W_x$  - *момент сопротивления сечения при изгибе*:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}. \quad (6.9)$$

Условно *эюра*  $\sigma(y)$  изображается в плоскости сечения (рис. 6.6,б,в). Знаки напряжений на эюре ставятся в зависимости от направления изгибающего момента  $M$  в сечении (на рис. 6.6,б знаки показаны для момента отрицательного направления). Если сечение несимметрично относительно нейтральной линии, то максимальные растягивающие и сжимающие нормальные напряжения будут различной величины (см. рис. 6.6,в).

Момент сопротивления  $W_x$  для сечений различной формы определяется через момент инерции  $J_x$  сечений (см. раздел “Геометрические характеристики сечений”). Например, для типовых сечений получим:



- прямоугольное сечение со сторонами  $b$  и  $h$ :

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad Y_{max} = \frac{h}{2}; \quad W_x = \frac{bh^2}{6};$$

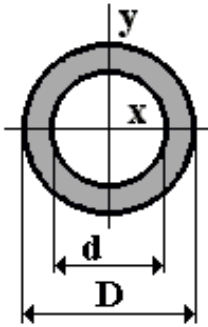
- кольцевое сечение ( $\alpha = \frac{d}{D}$ ):

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0,05D^4 (1 - \alpha^4); \quad Y_{max} = \frac{D}{2};$$

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1D^3 (1 - \alpha^4);$$

- сплошное круглое сечение ( $d=0, \alpha=0$ ):

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05D^4; \quad W_x = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1D^3.$$



#### 6.4. Рациональные формы сечения балок при изгибе

Напряжения в сечении балки распределяются неравномерно. Поэтому встаёт вопрос о проектировании балок рациональной формы сечения, обеспечивающих наилучшим образом использование материала. Вопрос в том, как обеспечить заданную прочность балки при возможно минимальной ее материалоемкости. А эти факторы зависят от характеристик сечения -  $W_x$  и  $F$ . **Рациональными формами сечений** балок при изгибе считаются такие, которые при заданной площади  $F$  обеспечивают наибольшую величину момента сопротивления  $W_x$  (или при минимальной площади  $F$  обеспечивают заданную величину  $W_x$ ). Качественным показателем рациональности сечения может служить величина  $W_x/F$ : чем она больше, тем более рациональное сечение.

Оптимально было бы использование материала только в области наибольших напряжений, т.е. распределять материал подальше от нейтрального слоя. Так как в сечении балки при изгибе возникают напряжения разного знака, то выбор рационального профиля зависит и от материала.

Пластичные материалы чаще всего имеют одинаковые (или близкие по величине) прочностные характеристики на растяжение и сжатие ( $\sigma_{тр} \approx \sigma_{сж}$ ). Поэтому для балок из пластичных материалов рационально использовать сечения, симметричные относительно нейтральной линии. А идея периферийного распределения материала привела на практике к созданию *стандартных профилей* в виде *двутавра и швеллера* (рис. 6.7). Наибольшие значения параметра  $W_x/F$  у двутав-

ра. Основываясь на таком подходе, можно убедиться, что лучше применять балки не сплошного круглого сечения, а кольцевого; не прямоугольного сечения, а коробчатого.

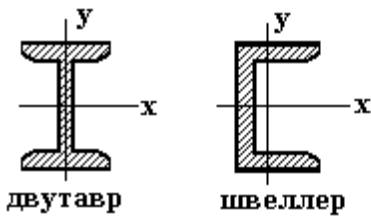


Рис. 6.7

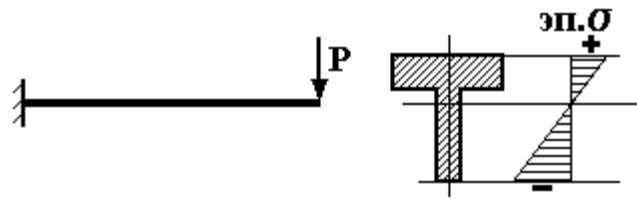


Рис. 6.8

Для балок из материалов, неодинаково работающих на растяжение и сжатие, выгодным является применение сечений, несимметричных относительно нейтральной линии. Причём положение нейтральной линии желательно иметь таким, чтобы выполнялось условие  $\sigma_p^{\max}/\sigma_c^{\max} = \sigma_{вр}/\sigma_{вс}$ . При этом важна правильная ориентация сечения в зависимости от положения растянутых и сжатых волокон. Например, для консольной чугунной балки таврового сечения (рис. 6.8) при показанном направлении нагрузки необходимо расположить балку полкой вверх, т. к. в этом случае будет  $\sigma_c^{\max} > \sigma_p^{\max}$ , а для чугуна  $\sigma_{вс} > \sigma_{вр}$ .

### 6.5. Напряжения при поперечном изгибе

При поперечном изгибе в сечениях балки возникают не только нормальные  $\sigma$ , но и касательные  $\tau$  напряжения. Поперечная сила  $Q$  в сечении является результирующим силовым фактором от действия вертикальной составляющей  $\tau$  касательных напряжений:  $Q = \int_F \tau dF$ .

В результате возникающей деформации сдвига  $\gamma$  поперечные сечения не остаются плоскими, а искривляются. Кроме того, действие поперечной нагрузки, в частности распределенной  $q(z)$ , приводит к взаимодействию продольных слоёв балки. Таким образом, строго говоря, при поперечном изгибе балки не соблюдаются гипотезы 1 и 2, принятые при чистом изгибе. Однако экспериментальные результаты, а также сопоставление с более строгим решением по теории упругости показывают, что несоблюдение отмеченных гипотез при поперечном изгибе приводит к незначительной погрешности при использовании формул чистого изгиба. Поэтому и при поперечном изгибе используются соотношения (6.6) для кривизны оси изогнутой балки и соотношения (6.7), (6.8) - для нормальных напряжений:

$$\sigma = \frac{M y}{J_x}; \quad \sigma^{\max} = \frac{M}{W_x}.$$

Для определения касательных напряжений  $\tau$  в произвольной точке сечения используется гипотеза 3 ( $\tau = \text{const}$  по ширине сечения) и закон парности касательных напряжений. Выделим элемент балки (рис. 6.9,а) (берётся участок балки, где  $q = 0$ , т.к. учёт распределённой нагрузки  $q$  приводит к появлению членов второго порядка малости, которыми можно пренебречь) и рассмотрим верхнюю часть этого элемента, отсечённую продольной плоскостью  $y_1 = \text{const}$  (рис. 6.9,б).

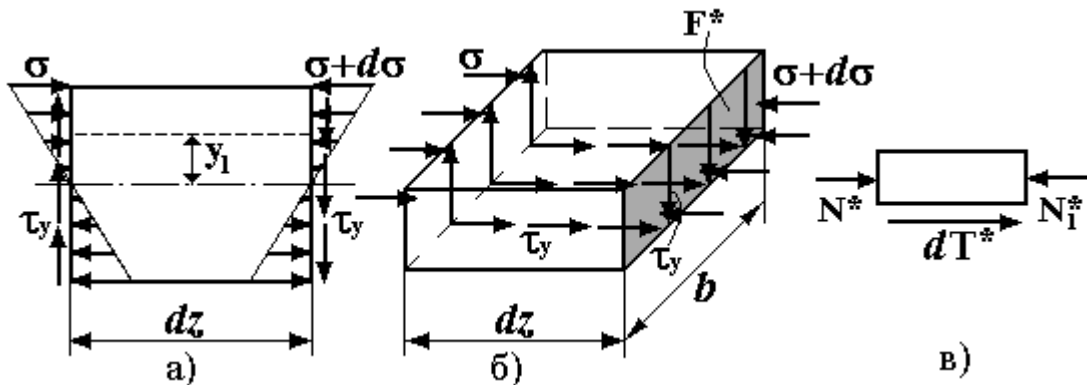


Рис. 6.9

На отсечённую часть в поперечных сечениях действуют нормальные напряжения  $(\sigma + d\sigma)$ ,  $\sigma$  и касательные напряжения  $\tau$ , а в продольном сечении действуют такие же напряжения  $\tau$  согласно закону парности касательных напряжений (Направление напряжений соответствует положительным направлениям  $M$  и  $Q$ ). Напряжения приведём к результирующим силам (рис. 6.9,в):

$$N^* = \int_{F^*} \sigma dF; \quad N_1^* = \int_{F^*} (\sigma + d\sigma) dF; \quad dT^* = \tau b dz, \quad (6.10)$$

где  $F^*$  - площадь отсечённой части поперечного сечения.

Составим уравнение равновесия для отсечённой части балки:

$$\sum F_z = 0; \quad -N_1^* + N^* + dT^* = 0 \quad \text{или} \quad dT^* = N_1^* - N^*.$$

После подстановки соотношений (6.10) в это уравнение и преобразований, а также с учетом дифференциального соотношения

$$d\sigma = \frac{dM \cdot y}{J_x} \quad \text{из (6.7), можно получить:}$$

$$\tau b dz = \int_{F^*} d\sigma \cdot dF = \int_{F^*} \frac{dM \cdot y dF}{J_x} = \frac{dM}{J_x} \int_{F^*} y dF \quad \text{или} \quad \tau = \frac{1}{b J_x} \frac{dM}{dz} \int_{F^*} y dF^*.$$

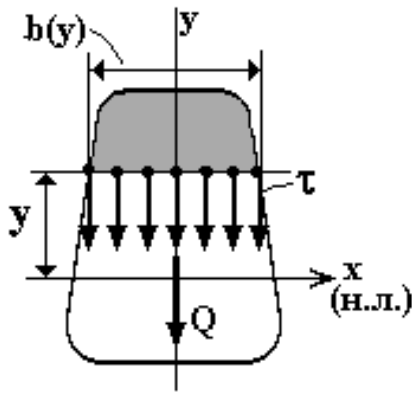


Рис. 6.10

Учитывая, что  $\int y dF = S_x^*$ ;  $\frac{dM}{dz} = Q$ ,

окончательно получаем формулу для касательных напряжений в балках, которая носит название **формулы Д.И. Журавского**:

$$\tau = \frac{Q S_x^*}{J_x b}, \quad (6.11)$$

где  $\tau$  - вертикальная составляющая касательного напряжения;  $Q$  - поперечная сила в сечении балки;  $J_x$  - момент инерции сечения относительно нейтральной линии;  $b = b(y)$  - ширина сечения на уровне  $y$ , где определяются касательные напряжения (по ширине сечения они постоянны);  $S_x^* = S_x^*(y)$  - статический момент отсеченной части сечения (расположенной выше или ниже уровня  $y$ ) (рис. 6.10). Направление касательных напряжений  $\tau$  в поперечном сечении балки соответствует направлению поперечной силы  $Q$  в этом сечении.

Для примера рассмотрим балку прямоугольного сечения со сторонами  $b$  и  $h$  (рис. 6.11,а). В соответствии с формулой (6.11) изменяется только статический момент отсеченной части сечения:

$$S_x^* = F^* y_c = b \left( \frac{h}{2} - y_1 \right) \frac{1}{2} (h + y_1) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right); \quad J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad b(y_1) = b.$$

Тогда

$$\tau = \frac{Q}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) = \frac{6Q}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right); \quad \text{è } \frac{\partial \tau}{\partial y_1} = 0 \quad \tau^{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}.$$

Для круглого сечения радиуса  $R$ , выполнив аналогичные преобразования, можно получить:

$$\tau(y_1) = \frac{4Q}{3\pi R^4} (R^2 - y_1^2); \quad \tau^{\max} = \frac{4Q}{3\pi R^2} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F}.$$

На рис. 6.11а,б приведены эпюры касательных напряжений  $\tau$  для прямоугольного и круглого сечений. В обоих случаях напряжения распределяются по высоте сечения по закону квадратичной параболы, максимальные напряжения возникают в точках нейтральной линии.

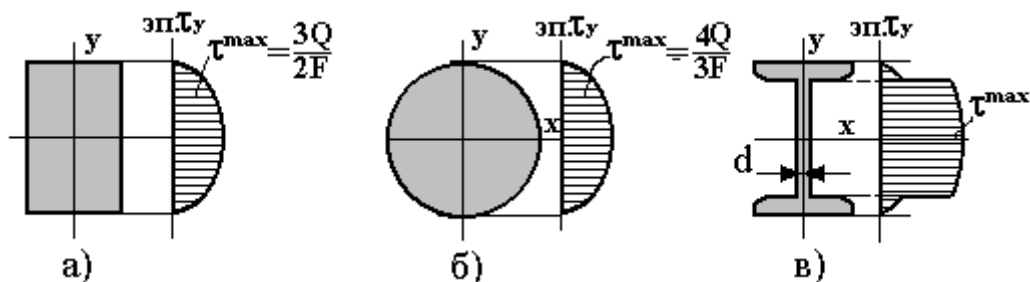


Рис. 6.11

Некоторые особенности в распределении касательных напряжений имеют место для тонкостенных профилей. Эпюра  $\tau$  для двутаврового сечения показана на рис. 6.11, в. Вследствие резкого уменьшения ширины сечения возрастает величина касательных напряжений в стенке профиля. Максимальные напряжения равны  $\tau^{\max} = QS_x^*/J_x d$ , а величины  $J_x$ ,  $S_x^*$ ,  $d$  приводятся в соответствующих таблицах ГОСТ сортамента. Приведенная эпюра  $\tau_y$  является приближенной, т. к. не учитывает местного увеличения напряжений вблизи входящего угла сечения, где стенка соединяется с полкой.

Можно сопоставить наибольшие касательные и нормальные напряжения в балках, чтобы выяснить определяющие напряжения при поперечном изгибе балок. Например, для консольной балки прямоугольного сечения (рис. 6.12) эти напряжения равны:

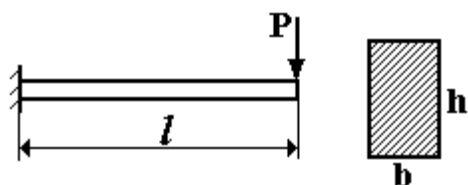


Рис. 6.12

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{Pl}{bh^2/6} = \frac{6Pl}{bh^2},$$

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2F} = \frac{3P}{2bh}.$$

Сопоставляя полученные значения  $\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = 4 \frac{l}{h}$  и учитывая, что

для бруса  $l/h > 10$ , можно сделать вывод, что для нетонкостенных балок максимальные нормальные напряжения значительно больше, чем касательные напряжения.

Следует отметить, что формула (6.11) позволяет вычислить напряжения не только в поперечных сечениях, но и в продольных (по закону парности касательных напряжений).

### 6.6. Расчет на прочность при изгибе

Для балок в большинстве практических случаев определяющими являются нормальные напряжения, а касательные напряжения играют второстепенную роль. Поэтому основным принимается условие проч-



ности по нормальным напряжениям, а условие прочности по касательным напряжениям является проверочным.

Для балок из пластичных материалов условия прочности имеют вид:

$$\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma] ; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{\delta}}{n_{\delta}} ; \quad (6.12)$$

$$\tau_{\text{max}} \leq [\tau] ; \quad [\tau] = \frac{\tau_{\delta}}{n_{\delta}} . \quad (6.13)$$

Для балок несимметричного профиля, выполненных из хрупких материалов, вместо условий (6.12) необходимо составить два условия прочности:

$$\begin{cases} \sigma_{\text{max}}^p \leq [\sigma]_p \\ \sigma_{\text{max}}^c \leq [\sigma]_c \end{cases} , \quad \text{где} \quad [\sigma]_p = \frac{\sigma_{\text{вп}}}{n_{\text{в}}} ; \quad [\sigma]_c = \frac{\sigma_{\text{вс}}}{n_{\text{в}}} . \quad (6.14)$$

При расчете *балок постоянного сечения* наибольшие нормальные напряжения возникают в сечении, где действует максимальный изгибающий момент  $M_{\text{max}}$ . В этом случае условие прочности (6.12) можно записать в виде:

$$\frac{\hat{I}_{\text{max}}}{W_{\text{x}}} \leq [\sigma] . \quad (6.15)$$

Условие (6.15) используется для подбора сечения балки при изгибе:

$$W_{\text{x}} \geq \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]} . \quad (6.16)$$

При необходимости после этого проводится проверка по условию прочности (6.13) при  $Q = Q_{\text{max}}$ .

Для балок переменного сечения ( $W_{\text{x}} \equiv W_{\text{x}}(z)$ ) условие прочности (6.15) следует записать в таком виде:

$$\left( \frac{\hat{I}}{W_{\text{x}}} \right)_{\text{max}} \leq [\sigma] . \quad (6.15^*)$$

В некоторых случаях при расчете балок на прочность следует обращать особое внимание на касательные напряжения в поперечных и продольных сечениях балок. В частности, когда рассматриваются:

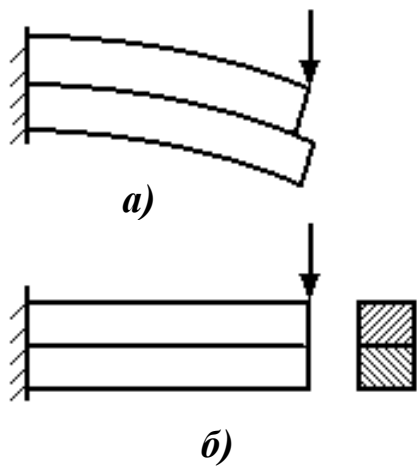


Рис. 6.13

- 1) *тонкостенные балки*;
- 2) *короткие балки из волокнистых материалов*, имеющих малую прочность на скалывание вдоль волокон (например, возможно разрушение деревянного бруска по продольной плоскости, совпадающей с нейтральным слоем (рис. 6.13,а);
- 3) *составные балки* (рис. 6.13,б), для которых возможно разрушение по продольной плоскости контакта частей балки от действия максимальных касательных напряжений.

### 6.7. Перемещения в балках при изгибе

При расчёте конструкции вычисляются не только напряжения, но и перемещения. Причём методы определения перемещений играют важную роль как в общей оценке жёсткости конструкции, так и при решении многих прикладных задач (расчёт статически неопределимых систем, динамическое нагружение конструкций, колебания упругих систем и др.).

Дадим общие понятия о перемещениях в балках, рассматривая прямой изгиб балки. Для определённости принимается общая система

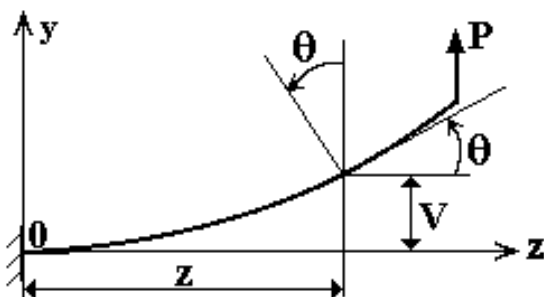


Рис. 6.14

координат  $Oyz$  (рис. 6.14), начало которой выбирается в центре площади какого-либо сечения, а ось  $z$  направлена по оси балки. (При этом следует иметь в виду, что с каждым сечением связана местная система центральных осей, параллельных исходным.)

Для поперечных сечений

балок различают два вида перемещений:

- 1) *прогиб*  $v(z)$  - *линейное перемещение* сечения (центра площади сечения) в направлении, перпендикулярном оси балки;
- 2) *угол поворота*  $\theta(z)$  - *угловое перемещение* сечения по отношению к первоначальному положению (поворот сечения относительно нейтральной линии).

Принимая, что положительное направление  $\theta$  совпадает с положительным направлением изгибающего момента  $\mathbf{M}$  в сечении, а положительное направление оси  $Oy$  - вверх (см. рис.6.14), получим  $\operatorname{tg}\theta = \frac{dv}{dz}$ . В большинстве практических случаев перемещения в балках относительно малы, так что можно считать  $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$ . Поэтому дифференциальное соотношение между прогибом и углом поворота сечения получается в виде:

$$\theta = v' ; \quad v' = \frac{dv}{dz}. \quad (6.17)$$

Рассмотрим некоторые методы определения перемещений.

### 6.7.1. Дифференциальное уравнение упругой линии балки

Ось изогнутой балки часто называют *упругой линией*. В случае прямого изгиба балки, учитывая соотношения (6.3), (6.6) и (6.17), для определения перемещений можно использовать систему дифференциальных уравнений в виде:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dz} = \frac{M}{EJ_x} \\ \frac{dv}{dz} = \theta \end{cases}. \quad (6.18)$$

Исключая второе уравнение из системы (6.18), получаем *дифференциальное уравнение упругой линии балки*:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{M}{EJ_x}. \quad (6.19)$$

Уравнение (6.19) (или система уравнений (6.18)) может применяться для определения как перемещений отдельных сечений, так и формы оси изогнутой балки. Последовательным интегрированием уравнений в системе (6.18) или уравнения (6.19) получаем:

$$\theta(z) = \int_z \frac{M}{EJ_x} dz + \theta_0; \quad v(z) = \int \int_z \frac{M}{EJ_x} dz^2 + \theta_0 z + v_0, \quad (6.20)$$

где  $\theta_0, v_0$  - постоянные интегрирования, имеющие смысл перемещений сечения балки в начале координат ( $z = 0$ ). Для балки постоянной жесткости  $EJ_x = \text{const}$  интегрирование упрощается:

$$\theta(z) = \frac{1}{EJ_x} \int_z M dz + \theta_0; \quad v(z) = \frac{1}{EJ_x} \int \int_z M dz^2 + \theta_0 z + v_0. \quad (6.21)$$

Постоянные  $\theta_0, v_0$  определяются из *граничных условий*, число которых равно двум (порядку дифференциального уравнения). Граничные условия могут составляться для  $v$  и  $v' = \theta$  в зависимости от типа закрепления балки. Например, для шарнирно опертой балки (рис. 6.15,а) граничные условия имеют вид:  $v(0) = 0, v(l) = 0$ ; для консольной балки (рис. 6.15,б):  $v(0) = 0, v'(0) = 0$ .

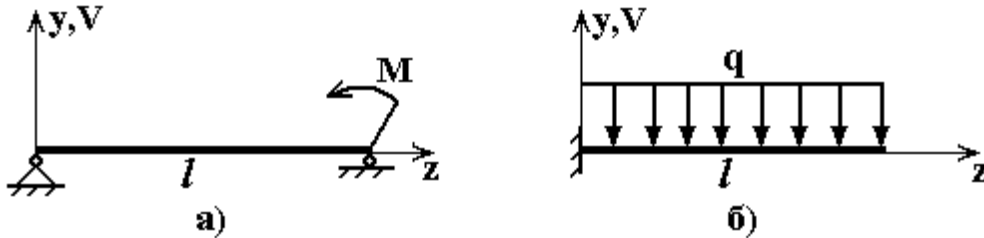


Рис. 6.15

**Пример 6.1.** Рассмотрим определение перемещений для консольной балки переменного сечения, нагруженной на свободном конце силой  $P$  (рис. 6.16). Балка имеет постоянную толщину и переменную ширину сечения ( $h=const, b=var$ ).

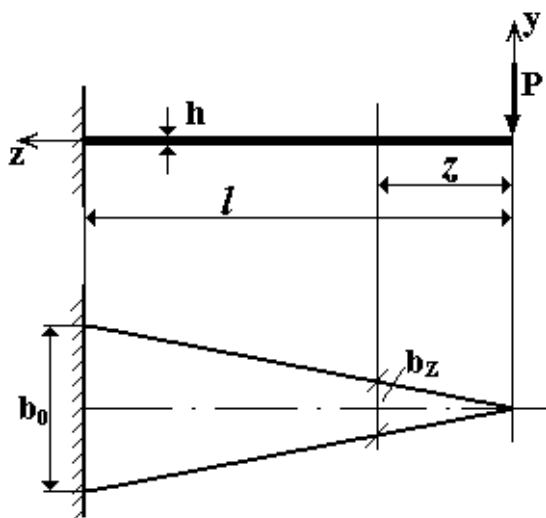


Рис. 6.16

Выберем начало координат на свободном конце балки. Тогда:

$$M(z) = -P \cdot z; \quad b(z) = b_0 z / l,$$

где  $b_0, l$  - ширина сечения в заделке и длина балки. Момент инерции произвольного сечения балки можно представить в таком виде:

$$J_x(z) = \frac{b(z)h^3}{12} = \frac{b_0 h^3}{12} \frac{z}{l} = J_0 \frac{z}{l},$$

$$\text{ä ä ä } J_0 = \frac{b_0 h^3}{12}.$$

Подставив полученные выражения в дифференциальные уравнения (6.18) и выполнив интегрирование, получим такие

выражения:

$$\theta(z) = -\frac{P l z}{E J_0} + \theta_0; \quad v(z) = -\frac{P l z^2}{2E J_0} + \theta_0 z + v_0.$$

Граничные условия имеют вид  $\theta(l) = 0, v(l) = 0$ . Подставив их в полученные выражения, находим константы интегрирования:  $\theta_0 = P l^2 / E J_0; v_0 = -P l^3 / 2E J_0$ . Тогда для функции прогибов по длине балки и величины максимального прогиба (в сечении  $z = l$ ) получим следующие выражения:

$$v(z) = -\frac{P l z^2}{2E J_0} + \frac{P l^2 z}{E J_0} - \frac{P l^3}{2E J_0} = -\frac{P l^3}{2E J_0} \left( 1 - 2 \frac{z}{l} + \frac{z^2}{l^2} \right); \quad v_{\max} = |v(0)| = \frac{P l^3}{2E J_0}.$$

Аналогичным образом нетрудно получить максимальный прогиб для консольной балки постоянного сечения ( $b_0 \times h$ ):  $v_{\max} = P l^3 / 3E J_0$ .

### 6.7.2. Метод единичной нагрузки. Интеграл Мора

Общие методы определения перемещений в упругих системах основаны на использовании вариационных принципов механики. Наиболее часто применяется **принцип возможных перемещений** (*принцип Лагранжа*): *если упругая система находится в равновесии, то сумма работ всех внешних и внутренних сил на возможных бесконечно малых перемещениях равна нулю*. В математической форме это можно записать так:

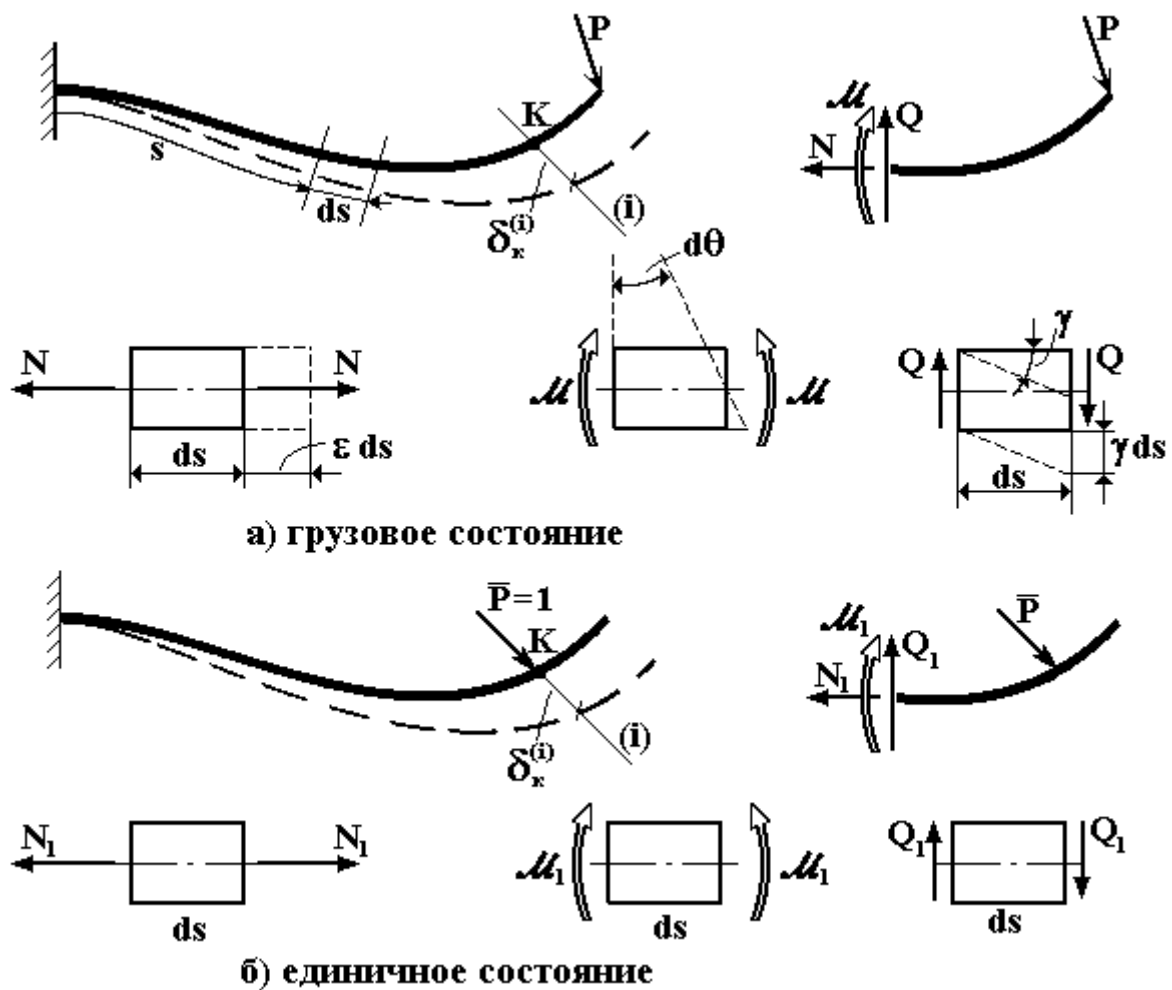
$$\sum_j \mathbf{P}_j \delta_j + U = 0, \quad (6.22)$$

где  $\mathbf{P}_j$  - внешняя сила;  $\delta_j$  - возможное перемещение точки приложения силы  $\mathbf{P}_j$ ;  $U$  - возможная работа внутренних сил.

Под *возможными* понимаются такие *перемещения*, которые могут быть осуществлены для данной системы в соответствии с имеющимися опорами, не нарушая сплошности системы. Чем меньше перемещения, тем точнее соблюдается принцип Лагранжа. Учитывая *малость перемещений в реальных упругих системах*, такие перемещения можно принимать в качестве возможных. Работа внешних и внутренних сил на возможных перемещениях называется *возможной работой*.

Пусть криволинейный брус испытывает плоскую деформацию под действием произвольной нагрузки, которую символически обозначим силой  $\mathbf{P}$  (рис. 6.17,а). Требуется определить перемещение сечения  $K$  в заданном  $i$ -ом направлении ( $\delta_{\mathbf{e}}^{(i)}$ ).

Рассмотрим два состояния заданной системы. *Исходное состояние системы* при действии реальной нагрузки, в котором возникает искомое перемещение, называется **действительным** или **грузовым состоянием**. *Вспомогательное состояние системы* определяется действием *соответствующей единичной нагрузки* и называется **единичным состоянием** (рис.6.17,б). Термин «перемещение» понимается в обобщённом смысле: линейное или угловое перемещение. **Вводимая единичная нагрузка должна соответствовать искомому перемещению: прикладывается в заданном сечении и в заданном направлении; прикладывается единичная сила ( $\bar{P} = 1$ ), если определяется линейное перемещение, или единичный момент ( $\bar{M} = 1$ ), если определяется угол поворота.**



*Рис. 6.17*

В рассматриваемом методе принцип возможных перемещений записывается для единичного состояния. При действии единичной нагрузки в поперечных сечениях бруса возникают внутренние силовые факторы: нормальная сила  $N_1$ , изгибающий момент  $M_1$  и поперечная сила  $Q_1$ . Возможные перемещения определяются *дополнительным деформированным состоянием*, которое накладывается на упругую систему, до того находившуюся в равновесии под действием приложенной нагрузки. В качестве возможных принимаются реальные перемещения бруса в грузовом состоянии, при котором в поперечных сечениях бруса возникают внутренние силовые факторы  $N, M, Q$ .

Для единичного состояния внешней силой является только  $\bar{P} = 1$ , которая совершает работу на искомым перемещениях  $\delta_{\bar{P}}^{(i)}$ ; поэтому возможная работа внешних сил равна  $\bar{P} \cdot \delta_{\bar{P}}^{(i)}$ . При составлении работы внутренних сил рассматривается деформация элемента бруса длиной  $ds$  (см. рис. 6.17). Условно считая левое сечение неподвижным, правое сечение получит такие смещения: при растяжении (сжатии) - осе-

вое перемещение  $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{s}$ ; при изгибе - поворот  $d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{k} \cdot d\mathbf{s}$ ; при сдвиге - поперечное перемещение  $\boldsymbol{\gamma} \cdot d\mathbf{s}$  (см. рис. 6.17,а). Работа  $dU$  внутренних сил для элемента бруса всегда отрицательная, т.к. эти силы являются силами упругого сопротивления и препятствуют развитию деформации. Поэтому получим:

$$dU = -N_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{s} - M_1 \cdot \mathbf{k} d\mathbf{s} - Q_1 \cdot \boldsymbol{\gamma} d\mathbf{s}.$$

Перемещения за счёт сдвига записаны при условии равномерного распределения касательных напряжений в сечении. Учитывая неравномерность их распределения при изгибе (см. раздел 6.4), вводится поправочный коэффициент  $k_c$  - коэффициент формы сечения (для прямоугольного сечения  $k_c = 6/5$ , для сплошного круглого сечения  $k_c = 10/9$  и т.д.).

Для бруса в целом работа внутренних сил получается интегрированием выражения для  $dU$  по длине  $l$ . Подстановка полученных выражений в формулу (6.22) даёт уравнение:

$$1 \cdot \delta_k^{(i)} - \int_0^l N_1 \boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{s} - \int_0^l M_1 \mathbf{k} d\mathbf{s} - \int_0^l Q_1 k_c \boldsymbol{\gamma} d\mathbf{s} = 0.$$

Откуда выражение для искомого перемещения получается в виде

$$\delta_k^{(i)} = \int_0^l N_1 \boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{s} - \int_0^l M_1 \mathbf{k} d\mathbf{s} - \int_0^l Q_1 k_c \boldsymbol{\gamma} d\mathbf{s}. \quad (6.23)$$

Подставляя в выражение (6.23) ранее полученные зависимости для деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\mathbf{k}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  через внутренние силовые факторы ( $\boldsymbol{\varepsilon} = N/EF$ ,  $\mathbf{k} = M/EJ_x$ ,  $\boldsymbol{\gamma} = Q/GF$ ), получаем расчётную формулу для определения перемещений:

$$\delta_k^{(i)} = \int_0^l \frac{N_1 N}{EF} ds + \int_0^l \frac{M_1 M}{EJ_x} ds + \int_0^l k_c \frac{Q_1 Q}{GF} ds. \quad (6.24)$$

Формула (6.24) носит название *интеграла Мора*.

В случае расчёта бруса, имеющего несколько участков, формула (6.24) может быть представлена в следующем виде:

$$\delta_k^{(i)} = \sum_{i=1}^m \left( \int_0^{l_i} \frac{N_{1i} N_i}{E_i F_i} ds + \int_0^{l_i} \frac{M_{1i} M_i}{E_i J_{xi}} ds + \int_0^{l_i} k_{ci} \frac{Q_{1i} Q_i}{G_i F_i} ds \right), \quad (6.25)$$

где  $m$  - количество участков бруса.

Вклад каждого из интегралов в формулу (6.24) различный, что обычно учитывается при расчёте конкретного бруса. Для бруса при растяжении-сжатии учитывается только первый интеграл. При плос-

ком изгибе прямолинейного бруса обычно учитывается только второй интеграл:

$$\delta_k^{(i)} = \int_0^l \frac{M_1 M}{EJ_x} dz. \quad (6.26)$$

Определение перемещений по методу единичной нагрузки проводится в следующем порядке.

1. Брус разбивается на участки в соответствии с действующей нагрузкой и характером изменения жесткости.

2. На каждом участке для грузового состояния составляются выражения для  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  в произвольном сечении бруса.

3. Рассматривается единичное состояние бруса, определяемого действием соответствующей единичной нагрузки: в направлении искомого перемещения при определении линейного перемещения прикладывается сила  $\bar{P} = 1$ , при определении углового перемещения момент  $\bar{M} = 1$ .

4. На каждом участке бруса для единичного состояния составляются выражения для  $N_1$ ,  $M_1$ ,  $Q_1$  в произвольном сечении бруса.

5. Вычисляется перемещение по формуле (6.24) (или (6.25), (6.26)).

Положительное значение показывает, что перемещение происходит по направлению приложенной единичной нагрузки, отрицательное - в направлении, противоположном приложенной единичной нагрузки.

### 6.7.3. Способ Верещагина

Использование формул (6.24) - (6.26) связано с необходимостью вычисления интегралов, иногда - путем численного интегрирования. Существуют различные способы, облегчающие вычисление этих интегралов. Один из них, *графоаналитический способ А.К. Верещагина*, применяется для *прямолинейного бруса*.

Рассмотрим прямолинейную балку постоянной жесткости ( $EJ_x = const$ ), и формулу (6.26) представим в виде

$$\delta = \frac{1}{EJ_x} \int_0^l M_1 M dz. \quad (6.27)$$

Для прямолинейной балки выражение для изгибающего момента  $M_1$  от единичной нагрузки является линейной функцией:



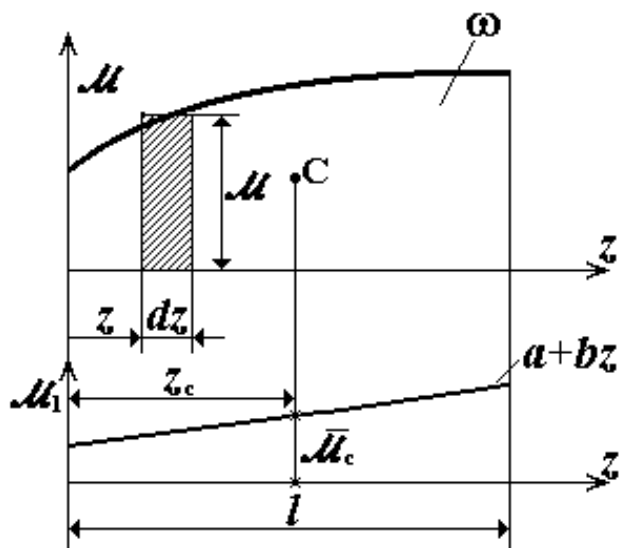


Рис. 6.18

Введём обозначения (согласно геометрическому смыслу слагаемых):

$$\int_0^l \mathbf{M} dz = \int_{\omega} d\omega = \omega - \text{площадь грузовой эпюры } \mathbf{M} \quad (\text{см. рис.6.18});$$

$$\int_0^l z\mathbf{M} dz = \int_{\omega} z d\omega = z_c \omega = S_M - \text{статический момент площади эпюры } \mathbf{M}.$$

Тогда получим:

$$\delta = \frac{1}{EJ_x} (a\omega + bz_c\omega) = \frac{\omega(a + bz_c)}{EJ_x}.$$

Сомножитель в скобках согласно выражения (6.28) является значением момента  $\mathbf{M}_1$  в сечении  $z = z_c$  (см. рис. 6.18). Обозначив  $\eta = \mathbf{M}_1(z_c) = a + bz_c$ , формула для определения перемещений по способу Верещагина примет вид:

$$\delta = \frac{\omega \cdot \eta}{EJ_x}. \quad (6.29)$$

Таким образом, вычисление перемещений по способу Верещагина сводится к перемножению площади ( $\omega$ ) грузовой эпюры  $\mathbf{M}$  на ординату ( $\eta$ ) единичной эпюры  $\mathbf{M}_1$  под центром площади грузовой эпюры.

Следует обратить внимание, что эпюры  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}$  для вычисления перемещений по формуле (6.29) должны удовлетворять определённым условиям:

1) грузова́я эпюра  $\mathbf{M}$  непрерывна и сохраняет знак на всем участке интегрирования;

□

2) площадь и положение центра площади грузовой эпюры  $\mathbf{M}$  известны или легко определяются;

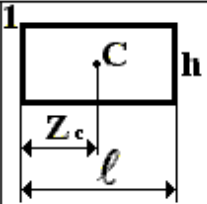
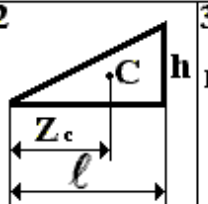
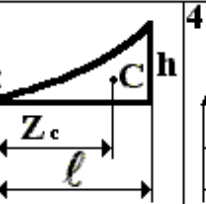
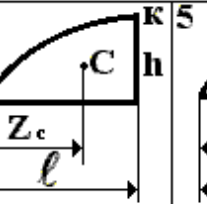
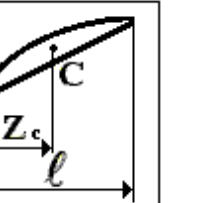
3) единичная эпюра  $\mathbf{M}_1$  является *линейной* (а не кусочно-линейной).

В том случае, если эпюры  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{M}_1$  не удовлетворяют указанным условиям, грузовая эпюра разбивается на  $n$  *простых фигур*, чтобы удовлетворялись эти условия, и перемещение вычисляется по формуле:

$$\delta = \frac{1}{EJ_x} \sum_{i=1}^n \omega_i \eta_i. \quad (6.30)$$

Вспомогательная информация для некоторых фигур приведена в табл. 6.1.

Таблица 6.1

| Эпюра   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5                 |
|---|---|---|---|---|-------------------|
|  |  |  |  |  |                   |
| $\omega$  | $hl$  | $\frac{1}{2}hl$   | $\frac{1}{3}hl$   | $\frac{2}{3}hl$   | $\frac{ql^3}{12}$ |
| $z_c$   | $\frac{1}{2}l$  | $\frac{2}{3}l$  | $\frac{3}{4}l$  | $\frac{5}{8}l$  | $\frac{1}{2}l$    |

Фигуры 3 - 5 получаются для эпюры  $\mathbf{M}$ , ограниченной *квадратичной параболой* (при действии распределенной нагрузки  $q = \text{const}$ ), причем для фигур 3, 4 (*параболические треугольники*) т.К должна быть *точкой экстремума* (*min* или *max*).

Способ Верещагина применим для вычисления любого из интегралов (6.24) с использованием соответствующих эпюр и жесткостей. Отметим ограничение и дополнительные особенности применения способа Верещагина (на примере формулы (6.29) для балки).

1. Способ Верещагина применим только для *прямолинейного бруса*.

2. Ступенчатый брус следует разбивать на участки постоянной жёсткости; тогда расчётная формула примет вид:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i \eta_i}{EJ_{xi}}. \quad (6.31)$$

3. Для бруса переменной жесткости  $EJ_x(z)$  можно построить приведенную грузовую эпюру  $\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{I} / EJ_x$ ; тогда формула (6.30) преобразуется к виду:

□

$$\delta = \sum_{i=1}^n \overline{\omega}_i \eta_i. \quad (6.32)$$

4. Если обе эпюры ( $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{M}_1$ ) являются линейными, то операция «перемножения» в формулах (6.29) - (6.31) обладает свойством *коммутативности* (перестановки), т. е. можно умножать площадь единичной эпюры  $\overline{\omega}_1$  на ординату грузовой эпюры  $\eta_p$  ( $\omega \cdot \eta = \omega_1 \cdot \eta_p$ ):

$$\delta = \frac{\omega \cdot \eta}{EJ_x} = \frac{\omega_1 \cdot \eta_p}{EJ_x}.$$

5. Знак каждого отдельного произведения  $\omega_i \eta_i$  выбирается следующим образом: если эпюра  $\mathbf{M}$  на данном участке и соответствующая ордината  $\eta_i$  расположены по одну сторону от оси, то произведение считается положительным, в противном случае - отрицательным.

### 6.8. Балки равного сопротивления изгибу

Для уменьшения материалоемкости конструкции на практике часто применяются балки переменного сечения. При расчете таких балок следует учитывать, что геометрические характеристики сечения  $J_x(z)$ ,  $W_x(z)$  являются функциями продольной координаты. Например, максимальные напряжения в сечении балки равны:

$$\sigma_{\max}^m(z) = \frac{M(z)}{W_x(z)}, \quad (6.33)$$

и анализ их только для всей балки в целом позволяет выбрать наибольшие напряжения  $\sigma_{\max}$  в опасном сечении. Частным случаем балок переменного сечения являются балки *равного сопротивления изгибу* (*равнопрочные балки*), для которых во всех сечениях максимальные напряжения одинаковы (в частности, могут быть равны допускаемым):

$$\sigma_{\max}^m(z) = \frac{|M(z)|}{W_x(z)} = \text{const} = \sigma_{\max}^m; \quad (\sigma_{\max}^m = [\sigma]). \quad (6.34)$$

Отсюда получается выражение для  $W_x(z)$ , через которое можно определять размеры сечений:

$$W_x = \frac{|M(z)|}{\sigma_{\max}^m}. \quad (6.35)$$

Закон изменения  $W_x(z)$  определяется и видом нагрузки. Например, консольная балка постоянного сечения, нагруженная сосредоточенным моментом (рис. 6.19), будет балкой равного сопротивления изгибу, т.к.  $M(z) = M$ , и из выражения (6.35) следует  $W_x = \text{const}$ .

В то же время в зависимости от формы сечения балки выбор размеров сечения является неоднозначным, поэтому может существовать бесчисленное множество равнопрочных балок. Рассмотрим это на примере консольной балки прямоугольного сечения, нагруженной силой  $P$  (рис. 6.20).

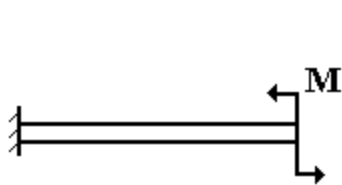


Рис. 6.19

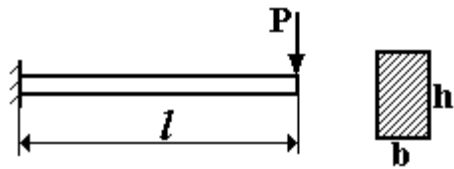
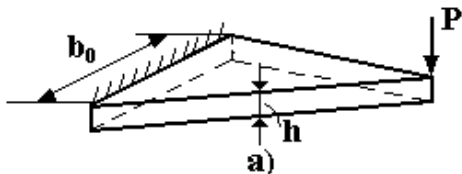


Рис. 6.20

Принимая  $\sigma_{\max} = [\sigma]$  и учитывая, что  $|M| = Pz$  (см. рис. 6.20), из выражения (6.35) получаем:

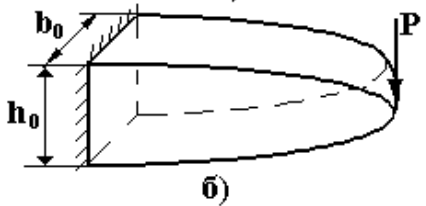


$$w_x(z) = \frac{b(z)h^2(z)}{6} = \frac{Pz}{[\sigma]} \quad (6.36)$$

Рассмотрим три варианта изменения сечения по длине балки:

- 1)  $h = \text{const}, b = b(z)$ ;
- 2)  $b = \text{const}, h = h(z)$ ;
- 3)  $h(z)/b(z) = c = \text{const}$ .

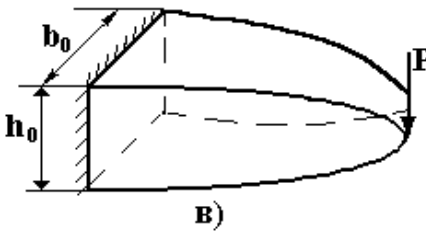
В результате для каждого варианта из выражения (6.35) получаются следующие конструктивные схемы равнопрочных балок:



б)

$$1) b(z) = \frac{6Pz}{[\sigma] h^2} \quad (\text{рис. 6.21, а});$$

$$2) h(z) = \sqrt{\frac{6Pz}{[\sigma] b}} \quad (\text{рис. 6.21, б});$$



в)

$$3) b(z) = 3\sqrt{\frac{6Pz}{[\sigma] c^2}}; \quad h(z) = 3\sqrt{\frac{6Pz}{[\sigma]}} \quad (\text{рис. 6.21, в}).$$

Рис. 6.21

Размеры сечений балок в заделке нетрудно получить при  $z = l$ .

Ясно, что существуют и другие варианты выбора параметров сечения ( $b, h$ ), и в каждом случае получается свой объём (масса) равнопрочной балки. При этом всегда получается экономия материала по сравнению с балкой постоянного сечения ( $b_0, h_0$ ) при  $\sigma_{\max} = [\sigma]$ . Так, в первом варианте получается балка в два раза меньшей массы по сравнению с балкой постоянного сечения.

При проектировании балки равного сопротивления при поперечном изгибе следует учитывать и действие касательных напряжений. В рассматриваемом

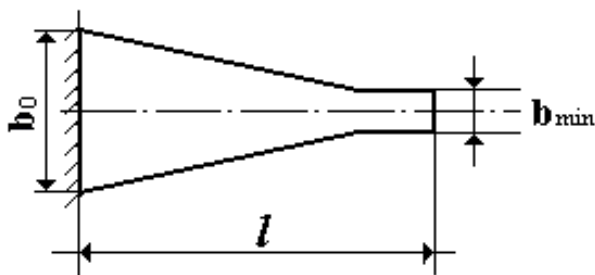


Рис. 6.22

примере (см. рис. 6.20) существуют минимальные размеры ( $b_{\min}, h_{\min}$ ) сечения, которые определяются из условия:

$$\tau_{\max} = \frac{3P}{2bh} \leq [\tau].$$

Так, в первом варианте (см. рис. 6.21, а) получается  $b_{\min} = \frac{3P}{2[\tau]h}$ , и

балку треугольной формы в плане следует «скорректировать» по ширине на свободном конце, как показано на рис. 6.22.

Балки переменного и постоянного сечения в значительной мере различаются и по перемещениям. Так, для консольной балки постоянного сечения максимальный прогиб равен  $v_{\max} = Pl^3/3EJ_0$ , а для консольной балки равного сопротивления изгибу (первый вариант) -  $v'_{\max} = Pl^3/2EJ_0$ , где  $J_0 = b_0 h^3/12$  (см. пример 6.1). Из сравнения видно, что  $v'_{\max} = 1.5v_{\max}$ . Таким образом, при одинаковой прочности балка равного сопротивления в два раза легче и в 1.5 раза более гибкая, чем балка постоянного сечения. Это свойство используется в специальных конструктивных элементах - *рессорах*, которые за счет большой деформативности позволяют уменьшить эффекты динамических воздействий. Конструктивно рессора выполняется в виде пакета листов одинаковой ширины, но различной длины (рис.

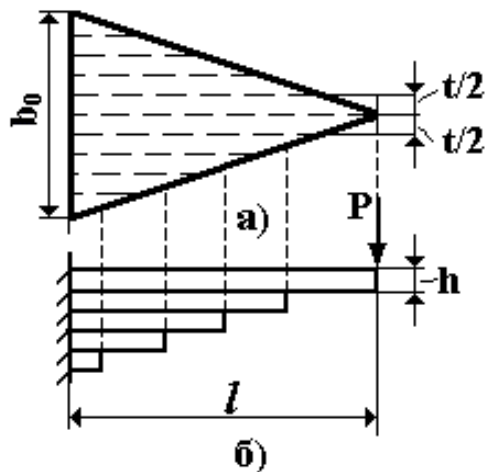


Рис. 6.23

6.23). За основу берется балка равного сопротивления изгибу треугольной формы, которая условно разрезается на  $2n$  полос шириной  $t/2$  (рис. 6.23,а). Затем полосы одинаковой длины складываются ( $n$  полос шириной  $t = b_0/n$ ), и в результате получается рессорный листовый пакет (рис. 6.23,б). В рессорах листы не связаны друг с другом (специальные устройства - хомуты - служат для того, чтобы рессора не рассыпалась), поэтому приближенно можно считать, что исходная балка треугольной формы и рессорный пакет эквивалентны. Однако на практике влияние трения между листами полностью устранить не удастся, по-

этому реальные прогибы рессор несколько меньше (~ на 10-25%), чем расчётные. Для обеспечения необходимой прочности рессоры изготавливаются из высокопрочных сталей, так что обычно допускаемые напряжения  $[\sigma] > 400$  МПа.

## 7. Статически определимые стержневые системы

### 7.1. Основные определения

*Стержневой системой* называется конструкция (или ее расчетная схема), состоящая из структурных элементов типа бруса (стержня). При выборе расчетной схемы стержневой системы следует учитывать способ соединения стержней между собой и с опорной поверхностью, так как от этого зависит, какой вид деформации будет преобладающим для стержня (растяжение-сжатие, изгиб, кручение). Как правило, соединение стержней является податливым, но в расчетных схемах чаще всего используются модели жесткого и шарнирного типа соединений.

Стержневая система называется *плоской*, если оси всех составляющих стержней расположены в одной плоскости, которая является главной плоскостью сечений. В этой же плоскости действуют внешние силы, включая и реакции опор.

Плоская система, нагруженная перпендикулярно своей плоскости, называется *плоско-пространственной*.

Для *пространственной* стержневой системы характерно произвольное положение стержней и действие внешних сил.

Часто плоские системы являются частью пространственных систем, из которых они выделяются для упрощения расчета.

Стержневая система должна быть *геометрически неизменяемой*, т.е. перемещения любой ее точки должны быть обусловлены только деформированием этой системы. Если же система может сама перемещаться как жесткое тело либо допускает взаимное перемещение составляющих её тел (элементов) без деформирования, то такая система является *геометрически изменяемой*. Если стержневая система в пределах малых перемещений геометрически изменяема, а затем становится неизменяемой, то она называется *мгновенно изменяемой*. Применение мгновенно изменяемых систем недопустимо, т.к. в упругих элементах (стержнях) таких систем возникают очень большие внутренние усилия и напряжения, которые могут привести к разрушению или появлению заметных остаточных деформаций в стержнях.

### 7.2. Расчет плоских систем

Стержневые конструкции для выполнения своих основных функций должны воспринимать действующие нагрузки, включая и реакции связей. Предположим, необходимо силу  $\mathbf{P}$ , приложенную в некоторой точке, передать на опорную поверхность через ограниченное



пространство  $ABC$  (рис. 7.1,а). Для передачи нагрузки можно использовать треугольную пластину либо два стержня, например прямоугольного сечения (рис. 7.1,б). Причем для закрепления конструкции используем минимально необходимое число связей, которые не дают перемещаться системе в пространстве, т.е. делают ее геометрически неизменяемой.

Для плоской системы должно быть наложено три связи, например с использованием неподвижного и подвижного шарниров (рис. 7.1,б,в). При этом стержневая система является *статически определенной*, так как реакции связей могут быть найдены с использованием трех уравнений статики:

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; & \quad Y_c a - Ph_1 = 0; & \quad Y_c = Ph_1/a; \\ \sum F_x = 0; & \quad X_B + P \cos\beta = 0; & \quad X_B = -P \cos\beta; \\ \sum F_y = 0; & \quad Y_B + Y_c + P = 0; & \quad Y_B = -P(h_1 + a)/a, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где  $a = l_1 \sin\alpha_1 + l_2 \sin\alpha_2$ ;  $h_1 = l_1 \cos(\alpha_1 + \beta)$ .

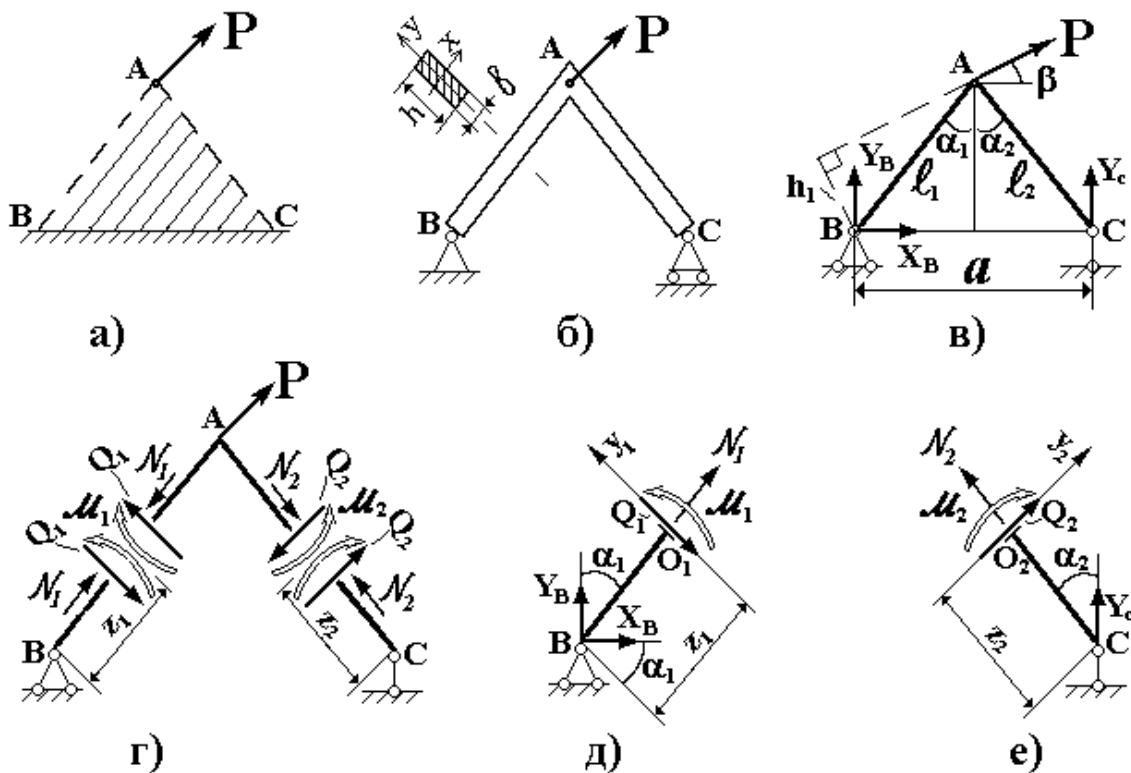


Рис. 7.1

После определения реакций могут быть найдены внутренние силовые факторы (усилия) в любом сечении стержневой системы (рис. 7.1,г). Правило знаков для нормальных сил  $N$ , поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  определены в соответствующих разделах

(“Растяжение” и “Изгиб”). Пользуясь методом сечений усилия в первом стержне (рис. 7.1,г,д) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum F_{z1} = 0; \quad N_1 + X_B \sin \alpha_1 + Y_B \cos \alpha_1 = 0; \quad N_1 = -X_B \sin \alpha_1 - Y_B \cos \alpha_1; \\ \sum F_{y1} = 0; \quad -Q_1 - X_B \cos \alpha_1 + Y_B \sin \alpha_1 = 0; \quad Q_1 = -X_B \cos \alpha_1 + Y_B \sin \alpha_1; \quad (7.2) \\ \sum M_{O1} = 0; \quad M_1 + X_B \cos \alpha_1 z_1 - Y_B \sin \alpha_1 z_1 = 0; \quad M_1 = (-X_B \cos \alpha_1 + Y_B \sin \alpha_1) z_1. \end{aligned}$$

Аналогично находятся усилия в произвольном сечении второго стержня (рис. 7.1,г,е):

$$\begin{aligned} \sum F_{z2} = 0; \quad N_2 + Y_C \cos \alpha_2 = 0; \quad N_2 = -Y_C \cos \alpha_2; \\ \sum F_{y2} = 0; \quad Q_2 + Y_C \sin \alpha_2 = 0; \quad Q_2 = -Y_C \sin \alpha_2; \quad (7.3) \\ \sum M_{O2} = 0; \quad -M_2 + Y_C \sin \alpha_2 z_2 = 0; \quad M_2 = Y_C z_2 \sin \alpha_2. \end{aligned}$$

Как видим, усилия  $N$  и  $Q$  по длине стержней не меняются, а изгибающие моменты  $M$  изменяются линейно.

Величина  $N$  имеет порядок силы  $P$ , а величина изгибающего момента  $M$  имеет порядок величины  $Pl$ . Сравним напряжения в прямоугольном сечении стержневой системы от растяжения-сжатия и изгиба:

$$\frac{\sigma_{\max}(M)}{\sigma(N)} = \frac{Pl / W_x}{P / F} = \frac{Fl}{W_x}; \quad \frac{\sigma_{\max}(M)}{\sigma(N)} = \frac{bhl}{bh^2 / 6} = \frac{6l}{h}.$$

Если учесть, что для стержней  $l/h > 10$ , то напряжения от изгиба более чем в 60 раз превышают напряжения от растяжения-сжатия. Следовательно, стержни конструкции (см. рис. 7.1,б) в основном изгибаются. В этом случае можно пренебречь напряжениями и перемещениями, связанными с растяжением (сжатием) элементов по сравнению с напряжениями и перемещениями от изгиба. **Стержневые системы**, элементы которых главным образом работают на изгиб, называются **рамами**.

Таким образом, расчет рам на прочность и жесткость можно проводить так же, как и балок. При этом, кроме нормальных напряжений от растяжения (сжатия) в большинстве случаев пренебрегают и касательными напряжениями при изгибе по той же причине, что и при расчете балок. Поэтому, как правило, нет необходимости в определении усилий  $N$ ,  $Q$  и построении соответствующих эпюр.

На рис. 7.2,а показана эпюра изгибающих моментов  $M$ . Эпюры моментов строятся на осевых линиях стержней плоской рамы. При этом величина  $M$  в сечении откладывается по нормали к оси **со сто-**



**роны сжатых волокон.** Эпюра  $\mathbf{M}$  может быть построена с использованием выражений (7.2), (7.3) для  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$ . Либо эта эпюра строится непосредственно, определяя моменты в концевых сечениях стержневой рамы с использованием схемы нагружения, показанной на рис. 7.1,в.

Следует отметить, что из условия равновесия **узла A** рамы справедливо равенство моментов, действующих в концевых сечениях сходящихся в этом узле двух стержней (рис. 7.2,б):

$$\mathbf{M}_{A1} = \mathbf{M}_{A2} = \mathbf{M}_A = Y_C l_2 \sin \alpha_2. \quad (7.4)$$

Если в каком-то узле рамы приложен внешний момент, то внутренние изгибающие моменты в сечениях возле узла будут отличаться на величину внешнего момента.

В каждом сечении плоской рамы, а значит, и узле рамы можно определить три перемещения (рис. 7.2,в): два линейных и одно угловое перемещения. Иначе говоря, узел плоской рамы имеет три **степени свободы**.

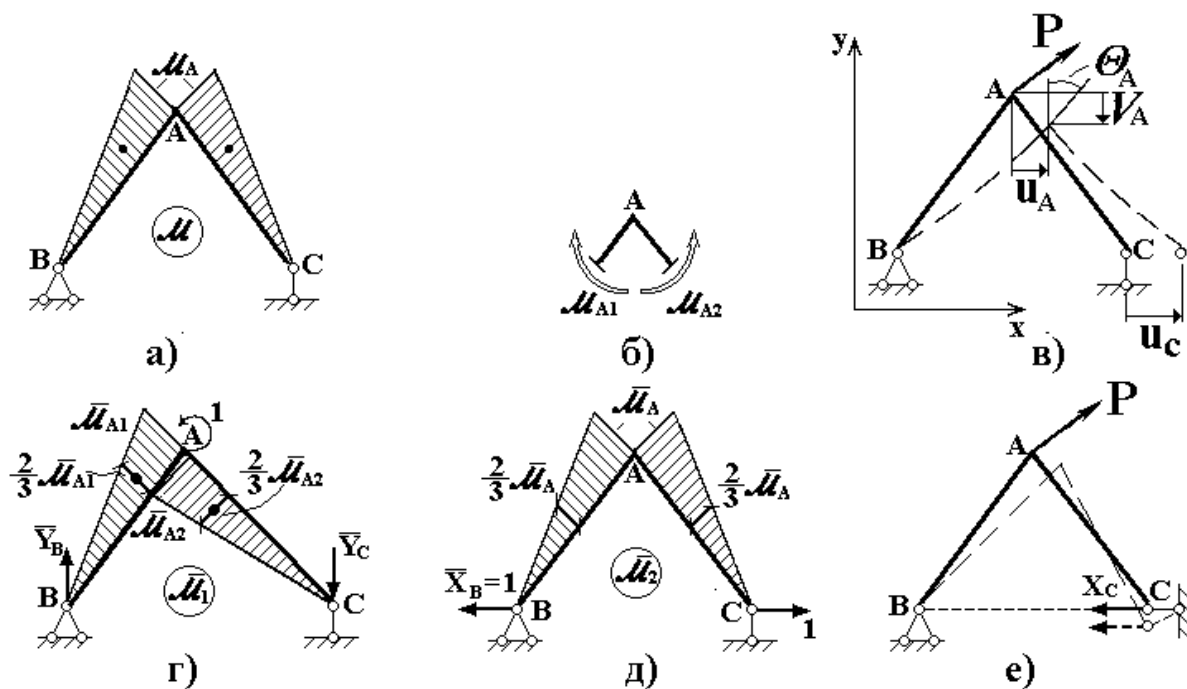


Рис. 7.2

Для определения перемещений сечений стержневой системы удобно использовать метод Максвелла-Мора и способ Верещагина. Например, для определения угла поворота ( $\theta_A$ ) узла  $A$  и горизонталь-

ного перемещения ( $u_C$ ) сечения  $C$  необходимо рассмотреть единичные состояния системы, приложив соответствующие единичные нагрузки, построить единичные эпюры  $\overline{M}_1$  и  $\overline{M}_2$  (рис. 7.2, г, д) и перемножить грузовую эпюру  $M$  (см. рис. 7.2, а) на эпюры  $\overline{M}_1$  и  $\overline{M}_2$ . В результате получим:

$$\theta_A = \frac{1}{EJ_x} \left( \left( \frac{1}{2} M_A l_1 \right) \frac{2}{3} \overline{M}_{A1} - \left( \frac{1}{2} M_A l_2 \right) \frac{2}{3} \overline{M}_{A2} \right) = \frac{M_A}{3EJ_x} (\overline{M}_{A1} l_1 - \overline{M}_{A2} l_2),$$

$$u_C = \frac{1}{EJ_x} \left( \left( \frac{1}{2} M_A l_1 \right) \frac{2}{3} \overline{M}_A + \left( \frac{1}{2} M_A l_2 \right) \frac{2}{3} \overline{M}_A \right) = \frac{M_A \overline{M}_A}{3EJ_x} (l_1 + l_2), \quad (7.5)$$

$$\overline{M}_{A1} = Y_B l_1 \sin \alpha_1; \quad \overline{M}_{A2} = Y_C l_1 \sin \alpha_2; \quad Y_B = Y_C = 1 / (l_1 \sin \alpha_1 + l_1 \sin \alpha_2);$$

$$\overline{M}_A = l_1 \cos \alpha_1 = l_2 \cos \alpha_2; \quad M_A = Y_C l_2 \sin \alpha_2.$$

Следует отметить, что не всегда три связи обеспечивают геометрическую неизменяемость плоской системы. На рис. 7.2, е представлена та же рама с тремя связями, но она является мгновенно изменяемой системой. Реакция горизонтальной связи  $X_C$  не уравнивает момент, создаваемый силой  $P$  относительно узла  $B$ . Рама должна немного повернуться относительно шарнира  $B$  как жесткое целое, после чего рама станет геометрически неизменяемой системой. При этом реакция в подвижном шарнире  $C$  изменит направление и сможет уравновесить момент, создаваемый силой  $P$ . Однако, величина реакции  $X_C$  должна быть очень большой из-за малости "плеча" реакции. Как следствие, в значительной степени возрастают изгибающие моменты и напряжения в стержнях, что может привести к потере несущей способности рамы.

Статически определимые системы имеют минимально необходимое число внешних и внутренних связей. Три внешние связи (например, заделка или неподвижный и подвижный шарниры) препятствуют перемещению рамы как жесткого целого. По три внутренние связи в любом сечении рамы препятствуют взаимному перемещению одной части рамы относительно другой. Удаление хотя бы одной внешней или внутренней связи превращает систему в геометрически изменяемую. Например, удалив одну внутреннюю связь (врезав шарнир) в узле плоской рамы, получаем изменяемую систему (рис. 7.3, а).

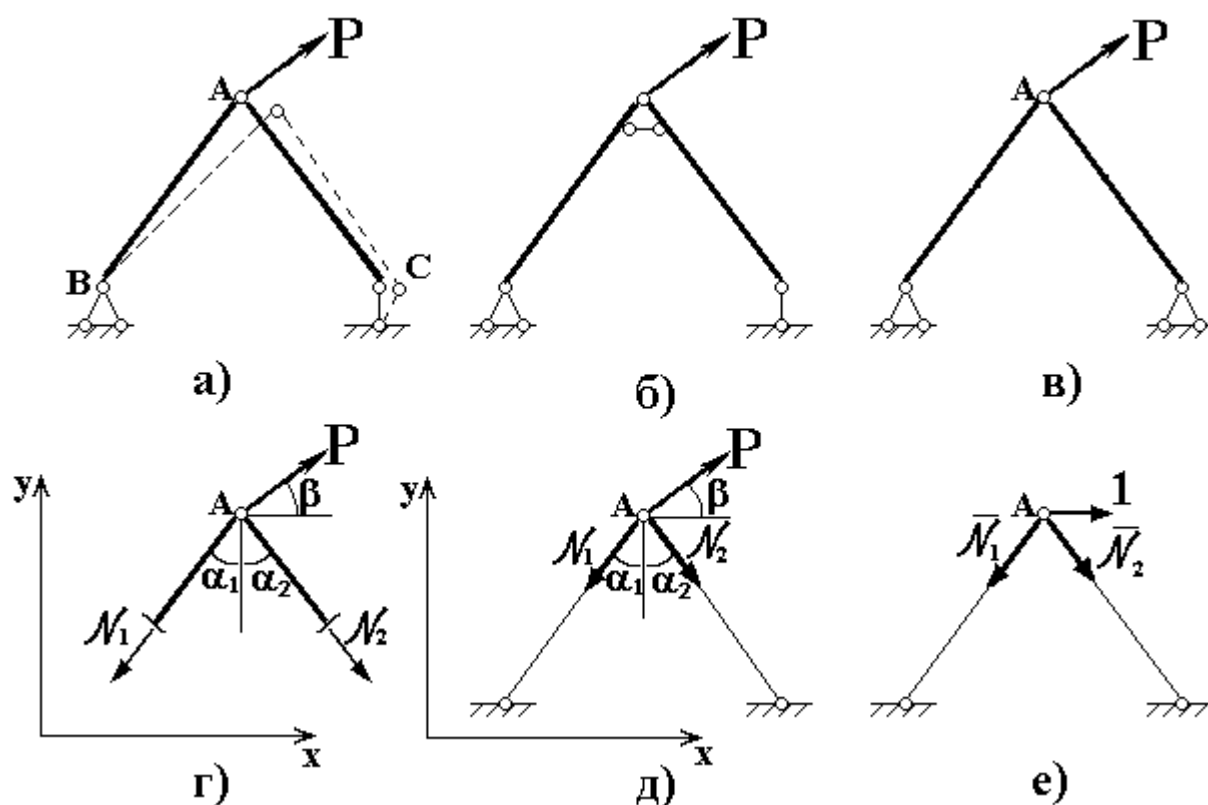


Рис. 7.3

Для восстановления геометрической неизменяемости можно ввести связь, как показано на рис. 7.3,б. Это дает наглядное представление о "жестком" узле рамы. Если же элементы соединены шарнирно, то для неизменяемости плоской стержневой системы необходимо ввести дополнительную (четвертую) внешнюю связь (рис. 7.3,в). В этом случае получаем простейшую **ферменную (шарнирно-стержневую) систему**. Из-за наличия шарниров по концам стержни в этой системе только растягиваются или сжимаются. Стержневые системы, элементы которых в основном испытывают деформацию растяжения или сжатия, называются **фермами**.

Шарнирно-стержневые системы (фермы) могут быть нагружены только силами, приложенными в узлах. Для определения усилий в системе можно использовать два способа.

В первом способе применяется **метод сечений**. **Разрезаются** стержни-связи и одна часть системы с нижними закрепленными шарнирами **отбрасывается**. В сечениях стержней действие отброшенных частей **заменяется** усилиями  $N_1$  и  $N_2$  (рис. 7.3,г). **Уравновешивая** оставшуюся часть, определяют усилия  $N_1$  и  $N_2$ . Для этого составляют два уравнения равновесия для системы сходящихся сил.

По второму способу усилия  $N_1$  и  $N_2$  по линии действия переносятся к узлу A (рис. 7.3,д). Тем самым производится преобразование

усилий в реакции упругих связей, действующих на узел  $A$ . Обратим внимание, что реакции, направленные от узла, соответствуют растягивающим усилиям в стержнях (см. рис. 7.3,г,д). Реакции  $N_1$  и  $N_2$ , (усилия в стержнях) опять-таки могут быть определены из уравнений равновесия узла:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0; \quad -N_1 \sin \alpha_1 + N_2 \sin \alpha_2 + P \cos \beta = 0; \quad N_1 &= \frac{\cos(\alpha_2 - \beta)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} P; \\ \Sigma F_y = 0; \quad -N_1 \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 + P \sin \beta = 0; \quad N_2 &= -\frac{\cos(\alpha_1 + \beta)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} P. \end{aligned} \quad (7.6)$$

При  $N_i > 0$  стержень растягивается, а при  $N_i < 0$  – сжимается.

Выражения для  $N_1$  и  $N_2$  можно получить проще, используя оси, перпендикулярные стержням.

Для определения перемещений узлов шарнирно-стержневой системы рационально использовать интеграл Мора (6.23), который с учетом постоянства деформаций по длине каждого стержня ( $\epsilon = \epsilon_i$ ) преобразуется в сумму:

$$\delta = \int_1 \overline{N} \epsilon ds = \sum_{i=1}^m \overline{N}_i \Delta l_i, \quad (7.7)$$

где  $\overline{N}_i$  – нормальная сила в  $i$ -ом стержне в единичном состоянии;  $\Delta l_i$  – изменение длины  $i$ -го стержня в грузовом состоянии;  $m$  – число стержней.

Используя закон Гука для стержня в форме (3.22), учитывающей силовое, температурное и кинематическое (за счет возможных отклонений длин от номинальных размеров) воздействия на стержень, формула (7.7) запишется в виде:

$$\delta = \sum_{i=1}^m \frac{\overline{N}_i N_i l_i}{E_i F_i} + \sum_{i=1}^m \overline{N}_i \delta_{Ti} \Delta T_i l_i + \sum_{i=1}^m \overline{N}_i \delta_{oi}. \quad (7.8)$$

Отметим, что в ферменных системах шарнирные узлы имеют только линейные перемещения или две степени свободы. Например, для определения горизонтального перемещения  $u_A$  узла  $A$  (см. рис. 7.3,д) необходимо:

1) определить усилия в грузовом состоянии  $N_1$  и  $N_2$  по формулам (7.6);

2) снять заданную нагрузку, в узле  $A$  горизонтально приложить единичную силу (рис. 7.3,е), от которой найти усилия в единичном состоянии (усилия  $\overline{N}_1$  и  $\overline{N}_2$  определяются из формул (7.6) при  $P=1$  и  $\beta = 0$ );

□

3) найти искомое перемещение, используя первую сумму в формуле (7.8):

$$u_A = \frac{\overline{N}_1 N_1 l_1}{E_1 F_1} + \frac{\overline{N}_2 N_2 l_2}{E_2 F_2}.$$

Если стержни системы только нагреваются ( $\Delta T_i > 0$ ) или охлаждаются ( $\Delta T_i < 0$ ), то для определения перемещения узла используется вторая сумма в формуле (7.8). Если стержни имеют отклонения от номинальных размеров ( $\Delta_{oi} > 0$  или  $\Delta_{oi} < 0$ ), то для определения перемещения узла после сборки относительно своего номинального положения используется третья сумма в формуле (7.8). Отметим, что при изменении температуры и отклонении от номинальных размеров в стержнях статически определимой системы усилия не возникают.

Система, показанная на рис. 7.3,а, становится геометрически неизменяемой, если добавить третий стержень (рис. 7.4,а). В этом случае получаем простую статически определимую ферму. Система, представленная на рис. 7.3,в, является простейшим примером неизменяемой системы, потому что даже малое перемещение узла невозможно без деформации стержней. Отсюда получается правило, что всякий новый узел, добавленный в процессе образования геометрически неизменяемой фермы, может быть присоединен при помощи двух стержней, оси которых не лежат на одной прямой (рис. 7.4,б,в).

### 7.3. Моделирование связей

Если жесткость прикрепляемого объекта намного выше, чем жесткость связей, то он моделируется “*абсолютно жестким телом*”. Для закрепления материальной точки (узла) с двумя степенями свободы необходимо два стержня-связи (см. рис. 7.3,в). Для закрепления абсолютно жесткого тела с тремя степенями свободы необходимо три стержня-связи (рис. 7.5,а). Для определения трех реакций в этих связях используются три уравнения статики.

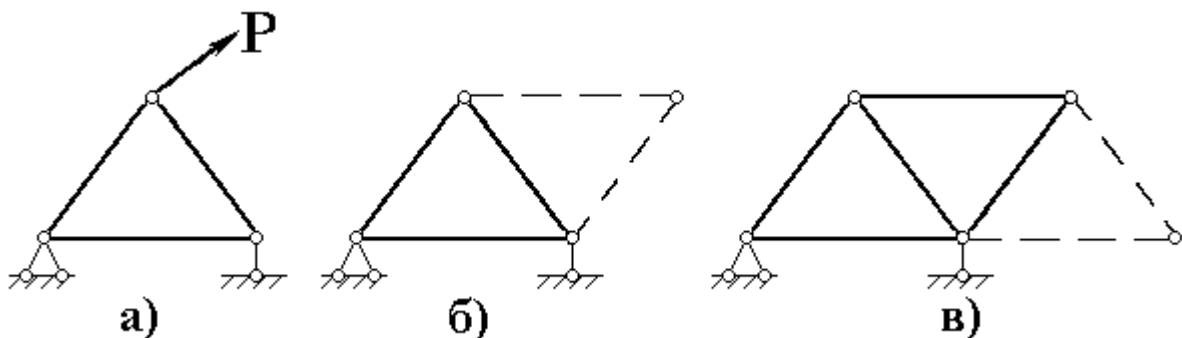


Рис. 7.4

Если реакции связей не уравнивают нагрузку, то система изменяема. Например, в системе, изображенной на рис. 7.5,б, не уравновешена горизонтальная составляющая нагрузки, а в системе, изображенной на рис. 7.5,в, не уравновешен момент от силы  $P$  относительно точки  $A$  (точка пересечения осей всех стержней). Точнее говоря, указанные системы являются мгновенно изменяемыми.

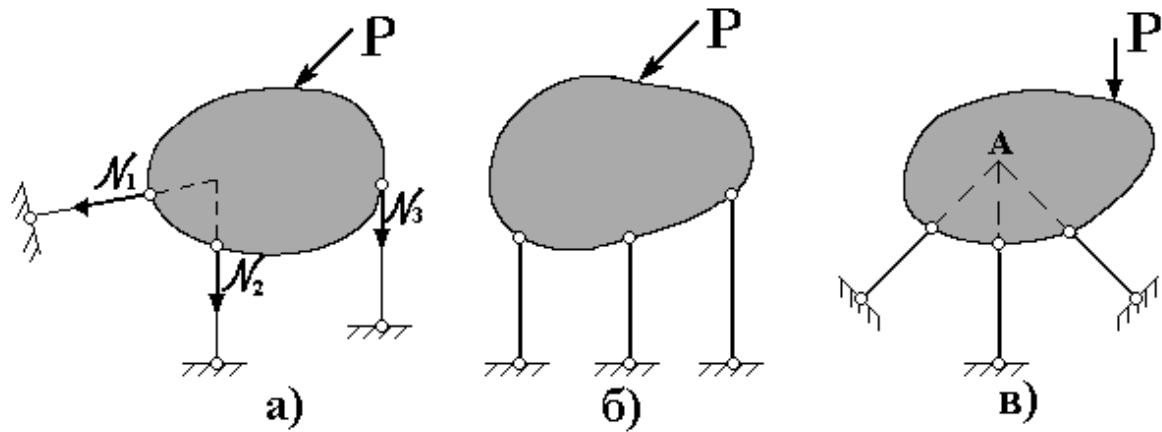


Рис. 7.5

На рис. 7.6 показаны различные варианты статически определимого закрепления абсолютно жесткого тела с помощью упругих связей-стержней и жестких связей.

На рис. 7.6,а,б,в у абсолютно жесткого тела исключаются по одной степени свободы, а в системах на рис. 7.6,г,д,е - по две степени свободы. Отметим, что при определении усилий в стержнях нерацionalmente использовать уравнения равновесия, в которые входят реакции жестких связей.

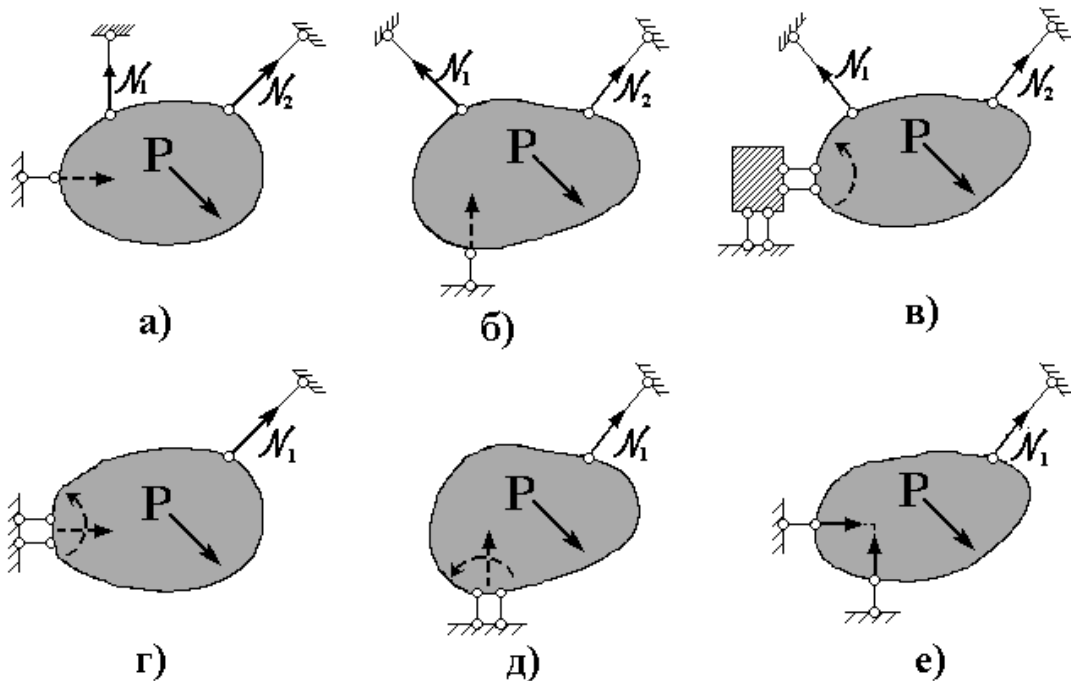


Рис. 7.6

Не рекомендуется применять стержневую систему, показанную на рис. 7.7,а, при углах  $\alpha$ , близких  $90^\circ$ . В этом случае усилия в стержнях, даже при малой величине силы  $P$ , очень велики. При  $\alpha = 90^\circ$  система превращается в мгновенно изменяемую (рис. 7.7,б).

Такую систему более рационально проектировать в виде *арки* (рис. 7.7,в) с криволинейными стержнями. В этих конструкциях существенное значение имеет как изгиб, так и сжатие элементов. Горизонтальные (распорные) реакции увеличивают сжатие элементов, но при этом существенно уменьшают изгибающие моменты.

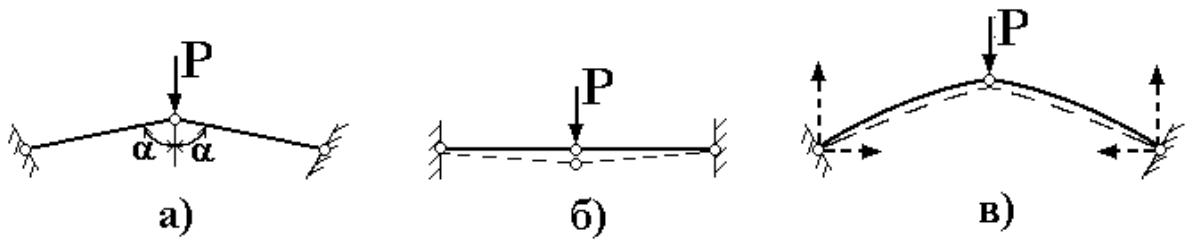


Рис. 7.7

Конструкция, показанная на рис. 7.8,а может моделироваться *комбинированной системой*, представленной на рис. 7.8,б. Элементы комбинированной стержневой системы испытывают различные виды деформаций. Балка изгибается, а пружины моделируются стержнями-связями, которые растягиваются или сжимаются. Моделирование пружин стержнями осуществляется на основе равенства их жесткостей.

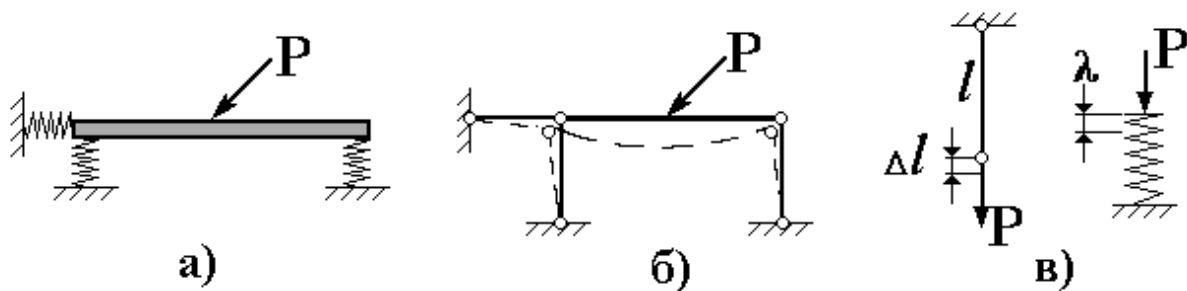


Рис. 7.8

Пружина и стержень эквивалентны по своим упругим характеристикам, если при одинаковой осевой нагрузке (рис. 7.8,в) изменение длины стержня  $\Delta l$  равно изменению длины пружины  $\lambda$  ( $\Delta l = \lambda$ ). С учетом того что  $\lambda = P/c$ ,  $\Delta l = P/EF$ , получим:

$$\frac{1}{c} = \frac{l}{EF} \rightarrow c = \frac{EF}{l},$$

где  $c$  – *жесткость* пружины или стержня-связи.

Величина, обратная жесткости, называется *податливостью* ( $1/EF$ ). Зная жесткость пружины, всегда можно подобрать эквивалентный по жесткости стержень, и наоборот.



## 8. Сложное сопротивление бруса

Ранее рассматривались простейшие виды деформации бруса, при которых от действия определённых нагрузок в поперечных сечениях бруса возникали отдельные внутренние силовые факторы: растяжение и сжатие ( $N$ ), кручение ( $M_k$ ), прямой изгиб ( $M$  и  $Q$ ). Однако в других случаях нагружения в поперечных сечениях бруса могут возникать различные сочетания внутренних силовых факторов (в общем случае - все шесть). Такая сложная деформация бруса называется *сложным сопротивлением*. Используя *принцип суперпозиции*, сложное сопротивление бруса может быть представлено как сумма простых видов деформации. Особо оговаривается лишь случай бруса относительно большой жёсткости при действии сжимающей силы, чтобы исключить возможность потери устойчивости бруса (см. часть II). Чаще всего рассматривают специальные случаи сложного сопротивления бруса: косоугольный изгиб, косоугольный изгиб с растяжением (сжатием), внецентренное растяжение (сжатие), изгиб с кручением.

### 8.1. Косоугольный изгиб

*Косоугольный изгиб* возникает в случае действия поперечной нагрузки ( $P$ ,  $M$ ,  $q$ ) в плоскости, проходящей через ось бруса и не совпадающей ни с одной из главных плоскостей инерции. Плоскость действия нагрузки называется *силовой плоскостью*. *Главной плоскостью инерции* называется плоскость, в которой расположены соответствующие главные оси инерции всех поперечных сечений бруса. В общем случае таких плоскостей две. Например, для призматического консольного бруса (рис. 8.1,а) - вертикальная ( $Oyz$ ) и горизонтальная ( $Oxz$ ) плоскости.

Примечание. Исключением составляет брус, имеющий сечение в виде круга или правильного многоугольника. Для такого бруса никогда не будет косоугольного изгиба.

Рассмотрим особенности косоугольного изгиба на примере консольной призматической балки, нагруженной силой  $P$  в торцевом сечении под углом  $\alpha$  к оси  $y$  (см. рис. 8.1,а). Разложим силу  $P$  на составляющие  $P_x$  и  $P_y$  по осям:

$$P_x = P \sin \alpha ; P_y = P \cos \alpha. \quad (8.1)$$

Каждая из этих сил действует в одной из главных плоскостей инерции и вызывает прямой изгиб. Используя принцип суперпозиции, представим косоугольный изгиб как сумму двух прямых изгибов. Опасное сечение - в заделке, где расчётные значения изгибающих моментов от сил  $P_x$  и  $P_y$  равны:

$$M_x = P_y l = Pl \cos\alpha = M \cos\alpha; \quad M_y = P_x l = Pl \sin\alpha = M \sin\alpha; \quad M = Pl. \quad (8.2)$$

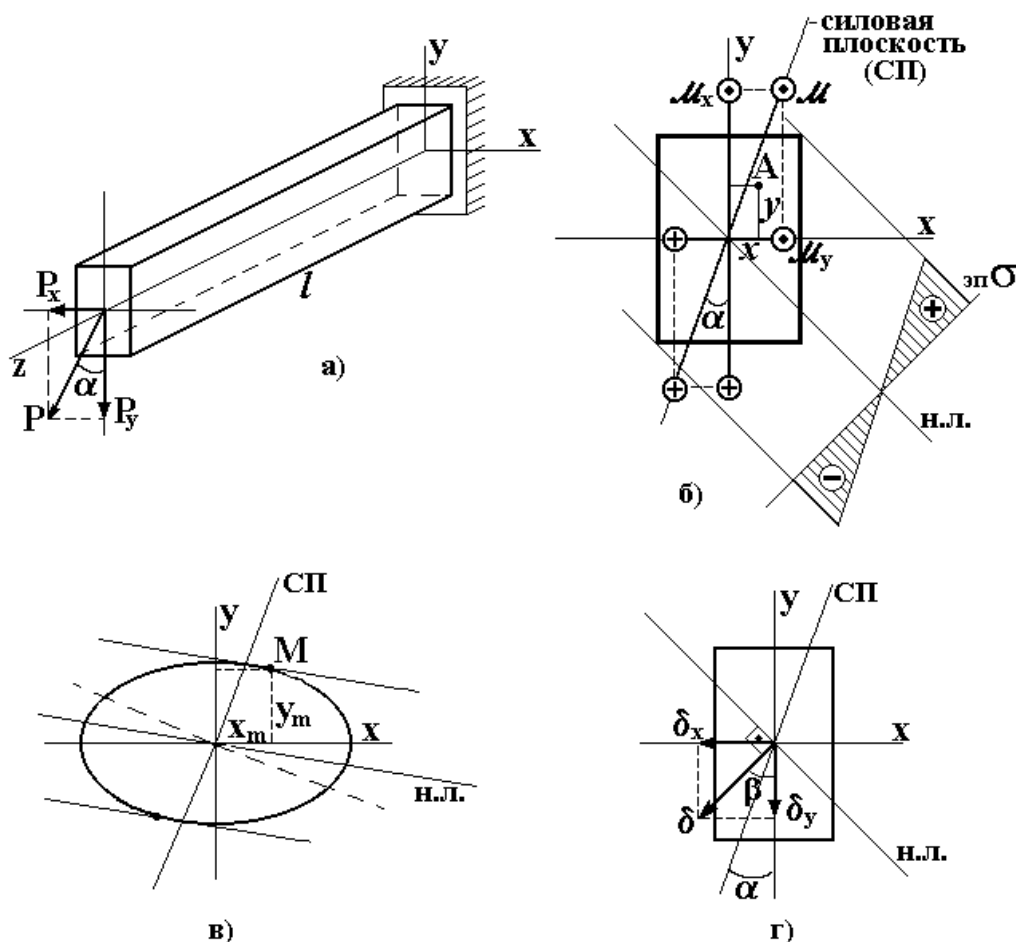


Рис. 8.1

### Напряжения при косом изгибе

Запишем выражения для нормальных напряжений в произвольной точке  $A(x, y)$  сечения балки (рис. 8.1, б), рассматривая их как сумму напряжений для каждого прямого изгиба (см. формулу (6.7)):

$$\sigma(x, y) = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x. \quad (8.3)$$

Для вычисления максимальных напряжений необходимо знать положение нейтральной линии сечения. Согласно определению нейтральная линия представляет геометрическое место точек, где нормальные напряжения равны нулю:

$$\sigma(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = 0.$$

Откуда, учитывая соотношения (8.2), получаем уравнение нейтральной линии при косом изгибе:

$$y = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} x \quad \Leftrightarrow \quad y = -\left(\frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \alpha\right) x. \quad (8.4)$$

Нейтральная линия проходит через центр сечения и расположена в квадрантах, противоположных тем, где расположена линия силовой плоскости (рис. 8.1,б). Из условия  $J_x \neq J_y$  следует, что нейтральная линия не перпендикулярна силовой плоскости. При этом нейтральная линия повернута от направления, перпендикулярного силовой плоскости, в сторону главной оси минимального момента инерции. Соответственно, при  $J_x = J_y$  невозможен косой изгиб, т.к. все центральные оси сечения являются главными (всегда имеет место прямой изгиб).

Зная положение нейтральной линии, можно построить эпюру нормальных напряжений в сечении ( $\varepsilon_{n,\sigma}$  на рис. 8.1,б). Максимальные напряжения возникают в точках, наиболее удалённых от нейтральной линии ( $x_m, y_m$  - координаты такой точки):

$$\sigma_{m \text{ ax}} = \frac{M_x}{J_x} y_m + \frac{M_y}{J_y} x_m. \quad (8.5)$$

Для сечения произвольной формы координаты  $x_m, y_m$  обычно определяются графическим образом для точек касания контура сечения линиями, параллельными нейтральной линии (рис. 8.1,в). Для сечений, имеющих наружные угловые точки и две плоскости симметрии (прямоугольник, двутавр и т.д.)  $x_m = x_{\max}, y_m = y_{\max}$ , максимальные напряжения определяются согласно формул (8.5) и (6.8) наиболее просто, используя моменты сопротивления сечения относительно осей  $x, y$  ( $W_x = J_x / y_{\max}, W_y = J_y / x_{\max}$ ):

$$\sigma_{m \text{ ax}} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}. \quad (8.6)$$

Из формулы (8.6) видно, что при косом изгибе могут значительно увеличиваться нормальные напряжения в балках, имеющих сечения с существенно различными моментами сопротивления (например, двутавр, швеллер, для которых  $W_x \gg W_y$ ).

Касательные напряжения при косом изгибе играют такую же второстепенную роль, как и при прямом изгибе. При косом изгибе величина полных касательных напряжений в определённой точке сечения находится как геометрическая сумма компонент  $\tau_x$  и  $\tau_y$ :

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}.$$

Напряжения  $\tau_x$  и  $\tau_y$  вычисляются по формуле (6.11) для каждого прямого изгиба, используя соответствующие значения поперечных сил  $Q_x$  и  $Q_y$ .

### *Перемещения при косом изгибе*

При определении перемещений также применяется принцип суперпозиции. Например, компоненты линейного перемещения центра сечения  $\delta_x$  и  $\delta_y$  в главных плоскостях инерции вычисляются с использованием какого-нибудь метода, а полное перемещение  $\delta$  (по величине и направлению) определяется как геометрическая сумма этих компонент (рис. 8.1,г):

$$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2} ; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\delta_x}{\delta_y}, \quad (8.7)$$

где  $\beta$  - угол между вектором  $\bar{\delta}$  и осью  $Oy$ .

При косом изгибе  $\beta \neq \alpha$ , а вектор  $\bar{\delta}$  полного перемещения перпендикулярен нейтральной линии (см. рис. 8.1,г).

### **8.2. Косой изгиб с растяжением (сжатием)**

В этом случае имеет место сложная деформация бруса, включающая изгиб и осевое растяжение или сжатие (рис. 8.2,а). Кроме изгибающих моментов ( $M_x$  и  $M_y$ ), определяемых для опасного сечения по формулам (8.2), учитывается и нормальная сила  $N = \pm P_0$  (знак «+» соответствует растягивающей силе  $P_0$ , знак «-» - сжимающей силе). Используя принцип суперпозиции, по аналогии с выражением (8.3) суммарные напряжения записываются следующим образом:

$$\sigma(x,y) = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x. \quad (8.8)$$

Уравнение нейтральной линии в сечении из условия  $\sigma(x,y)=0$  принимает вид:

$$y = ax + b, \quad a = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y}, \quad b = -\frac{N \cdot J_x}{M_x \cdot F}. \quad (8.9)$$

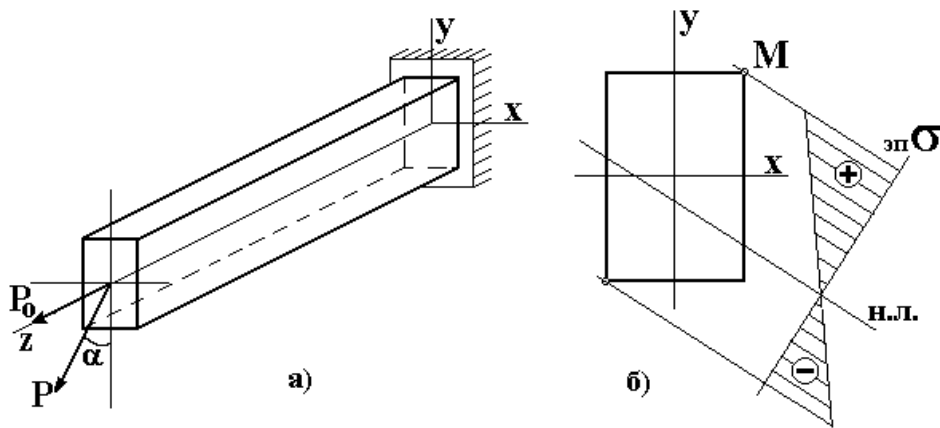


Рис. 8.2

Таким образом, нейтральная линия не проходит через начало координат в сечении. Как следствие, наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения получаются различной величины для любого сечения. Эюра нормальных напряжений в сечении (*эн.σ*) показана на рис. 8.2,б. Максимальные напряжения определяются для точки, наиболее удалённой от нейтральной линии (координаты  $x_m, y_m$  т.М на рис. 8.2,б):

$$\sigma_{m \text{ ax}} = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} y_m + \frac{M_y}{J_y} x_m . \quad (8.10)$$

### 8.3. Внецентренное растяжение (сжатие)

*Внецентренным растяжением (сжатием)* называется деформация бруса при действии двух равных и противоположно направленных сил по линии, параллельной оси бруса и не совпадающей с ней (рис. 8.3,а).

В любом поперечном сечении бруса возникают следующие внутренние силовые факторы (на рис. 8.3,б изображение нормальной силы  $N$  соответствует внецентренному растяжению):

$$N = P; \quad M_x = P \cdot y_p; \quad M_y = P \cdot x_p, \quad (8.11)$$

где  $x_p, y_p$  - координаты точки приложения силы  $P$  в торцевом сечении. (Расстояние от точки приложения силы до центра сечения называется *эксцентриситетом*.)

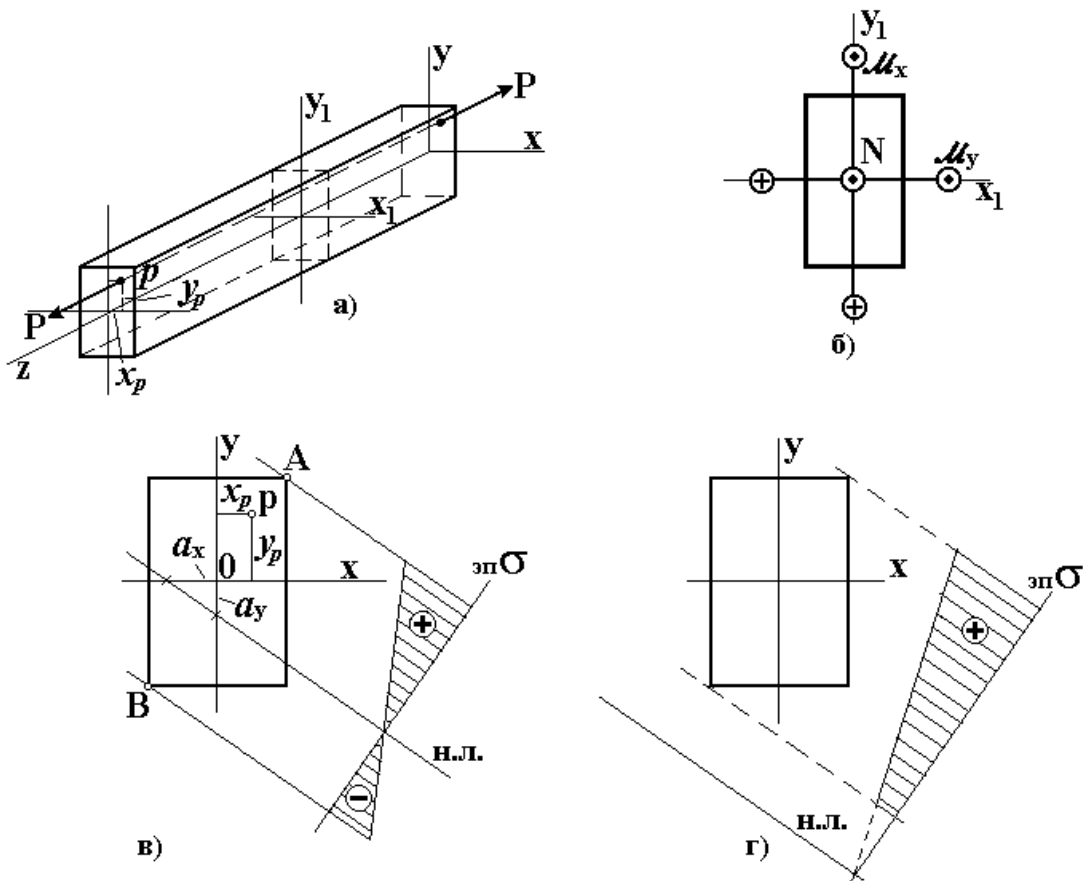


Рис. 8.3

Таким образом, внецентренное растяжение (сжатие) можно рассматривать как частный случай совместной деформации косоугольного изгиба и осевого растяжения (сжатия). Подставляя формулы (8.11) в (8.8), получим выражение для нормальных напряжений в произвольной точке сечения:

$$\sigma(x, y) = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot y_p}{J_x} y + \frac{P \cdot x_p}{J_y} x = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p y}{i_x^2} + \frac{x_p x}{i_y^2} \right), \quad (8.12)$$

где  $i_x = \sqrt{J_x / F}$ ;  $i_y = \sqrt{J_y / F}$  - радиусы инерции сечения относительно главных осей.

При внецентренном сжатии первое слагаемое в выражении (8.12) подставляется со знаком минус, т.к.  $N = -P$ .

Положение нейтральной линии определяется из условия  $\sigma(x, y) = 0$ . Тогда из выражения (8.12) получаем уравнение нейтральной линии:

$$1 + \frac{y_p y}{i_x^2} + \frac{x_p x}{i_y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{a_y} + \frac{x}{a_x} = 1 \quad (8.13)$$

Нейтральная линия в сечении не проходит через начало координат (центр сечения). Для её построения удобно использовать отрезки,

отсекаемые нейтральной линией на координатных осях:  $a_x = -i_y^2/x_p$ ,  $a_y = -i_x^2/y_p$  (рис. 8.3,в). Если  $x_p > 0$ ,  $y_p > 0$ , то отрезки  $a_x < 0$ ,  $a_y < 0$ , т.е. нейтральная линия расположена по другую сторону от центра сечения, чем точка приложения силы  $P$  (полюс  $p$ ). Эпюра нормальных напряжений в сечении ( $эп. \sigma$ ) показана на рис. 8.3,в. Чем ближе сила  $P$  к оси бруса, тем дальше уходит нейтральная линия от центра сечения. При некотором положении силы  $P$  нейтральная линия может быть расположена вне сечения (рис. 8.3,г): тогда во всех точках сечения возникают напряжения одного знака.

Как обычно, опасными являются точки, наиболее удалённые от нейтральной линии. Зная их координаты ( $x_m, y_m$ ), определяются максимальные напряжения из формулы (8.12):

$$\sigma_{m \text{ ax}} = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot y_p}{J_x} y_m + \frac{P \cdot x_p}{J_y} x_m. \quad (8.14)$$

Для сечения с выступающими угловыми точками формула (8.14) упрощается:

$$\sigma_{m \text{ ax}} = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot y_p}{W_x} + \frac{P \cdot x_p}{W_y}. \quad (8.15)$$

Для бруса из материала, по-разному сопротивляющегося растяжению и сжатию, следует определять максимальные растягивающие и сжимающие напряжения (например, в т.А и т.В сечения на рис. 8.3,в):

$$\sigma_{m \text{ ax}}^{\delta} = \sigma_{\hat{a}} = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot y_p}{W_x} + \frac{P \cdot x_p}{W_y}; \quad (8.16)$$

$$\sigma_{m \text{ ax}}^{\tilde{n}} = |\sigma_{\hat{a}}| = \left| \frac{P}{F} - \frac{P \cdot y_p}{W_x} - \frac{P \cdot x_p}{W_y} \right|.$$

Отметим практические случаи возникновения внецентренного растяжения (или сжатия) бруса:

- 1) конструктивные элементы с эксцентрично приложенной нагрузкой;
- 2) конструктивные элементы с односторонними вырезами при осевой нагрузке;
- 3) стержни с начальным прогибом.

Во всех случаях необходимо проводить расчёты на прочность, т.к. напряжения при внецентренном растяжении (сжатии) всегда больше, чем при чисто осевой деформации за счёт дополнительной деформации изгиба. Особенно это касается элементов конструкций из хрупких материалов (бетон, кирпич), для которых недопустимы рас-

тягивающие напряжения из-за низкой прочности таких материалов при растяжении.

#### 8.4. Расчёт на прочность при сложном сопротивлении бруса

Расчёт на прочность для рассмотренных случаев сложного сопротивления бруса проводится так же, как и при прямом изгибе балки (см. формулы (6.12) и (6.14) раздела 6.5). Основными являются нормальные напряжения, для которых и записывается условие прочности.

Для бруса из пластичного материала (как правило,  $\sigma_{\text{тр}} \approx \sigma_{\text{тс}}$ ) условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma]; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{\delta}}{n_{\delta}}, \quad (8.17)$$

где максимальные напряжения  $\sigma_{\text{max}}$  для бруса определяются по формулам (8.5), (8.6), (8.10), (8.14), (8.15).

Для бруса из хрупкого материала, по-разному сопротивляющегося растяжению и сжатию, записываются два условия прочности:

$$\begin{cases} \sigma_{\text{max}}^p \leq [\sigma]_p \\ \sigma_{\text{max}}^c \leq [\sigma]_c \end{cases}, \quad \text{где } [\sigma]_p = \frac{\sigma_{\text{вп}}}{n_b}; \quad [\sigma]_c = \frac{\sigma_{\text{вс}}}{n_b}. \quad (8.18)$$

При этом, используя вышеуказанные формулы для  $\sigma_{\text{max}}$ , необходимо отдельно определять максимальные растягивающие и сжимающие напряжения. Условия прочности (8.18) часто используются в расчётах элементов строительных сооружений (колонн, стен и др.) при их внецентренном сжатии.



## Приложение 1

### Вывод основных зависимостей при растяжении, кручении и изгибе стержня

При рассмотрении отдельных видов деформации (нагружения) стержня в соответствующих разделах подробно рассматривалось получение основных зависимостей и их преобразования. В приводимой ниже таблице повторены эти выводы в сжатом виде.

| Вид нагружения                          | Растяжение                     | Кручение   | Изгиб   | № ур-я |
|---|--------------------------------|--|---|--------|
| Кинематические зависимости              | $\varepsilon = \frac{dw}{dz}$  | $\gamma = \frac{d\varphi}{dz} \rho$                          | $\varepsilon = \frac{d\theta}{dz} y$                      | (1)    |
| Физические зависимости                  | $\sigma = E\varepsilon$        | $\tau = G\gamma$   | $\sigma = E\varepsilon$                                   | (2)    |
| Статические зависимости                 | $N = \int_F \sigma dF$         | $M_K = \int_F \rho \tau dF$                                  | $M = \int_F y \sigma dF$                                  | (3)    |
| (1) → (2)                               | $\sigma = E \frac{dw}{dz}$     | $\tau = G \frac{d\rho}{dz} \rho$                             | $\sigma = E \frac{d\theta}{dy} y$                         | (4)    |
| (4) → (3)<br>Дифференциальные уравнения | $\frac{dw}{dz} = \frac{N}{EF}$ | $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_K}{GJ_P}$                     | $\frac{d\theta}{dz} = \frac{M}{EJ_x}$                     | (5)    |
| (5) → (4)<br>Напряжения в сечении       | $\sigma = \frac{N}{F}$         | $\tau = \frac{M_K}{J_P} \rho$                                | $\sigma = \frac{M}{J_x} y$                                | (6)    |
| Максимальные напряжения в сечении       | $\sigma = \frac{N}{F}$         | $\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_P}$<br>$W_x = J_P / \tau_{\max}$ | $\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x}$<br>$W_x = J_x / y_{\max}$ | (7)    |

Следует обратить внимание на единообразие получения и преобразования зависимостей при различных видах нагружения, а также на полную аналогию зависимостей при кручении и изгибе.

## Приложение 2

### Основные расчетные формулы Растяжение и сжатие

| №                         | Смысл зависимости                                      | Формула   | Примечания  |
|---------------------------|--|---|---|
| 1                         | Определение внутренних сил по методу сечений           | $\sum F_z = 0 \Rightarrow N$<br>$N = \sum P_i$  | $N$ - нормальная (продольная) сила<br>$P_i$ - внешние силы  |
| 2                         | Напряжения в поперечном сечении стержня                | $\sigma = \frac{N}{F}$  | $\sigma$ - нормальные напряжения<br>$F$ - площадь поперечного сечения   |
| 3                         | Напряжения в наклонном сечении стержня                 | $\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha$<br>$\tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha$ | $\sigma$ - нормальные напряжения в поперечном сечении; $\alpha$ - угол между поперечным и наклонным сечениями   |
| 4                         | Условие прочности для стержня из пластичного материала | $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$   | $[\sigma] = \sigma_T / n_T$ - допускаемые напряжения при растяжении и сжатии  |
| 5                         | Условия прочности для стержня из хрупкого материала    | $\sigma_{p,\max} \leq [\sigma]_p$<br>$\sigma_{c,\max} \leq [\sigma]_c$                    | $[\sigma]_p = \sigma_{вр} / n_{вр}$ , $[\sigma]_c = \sigma_{вс} / n_{вс}$ - допускаемые напряжения при растяжении и сжатии  |
| 6                         | Линейная деформация на участке                         | $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$  | $l$ - длина участка<br>$\Delta l$ - изменение длины участка   |
| 7                         | Закон Гука для материала                               | $\sigma = E\varepsilon$ , $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$                                | $E$ - модуль Юнга материала   |
| 8                         | Закон Гука для участка стержня                         | $\Delta l = \frac{Nl}{EF}$  | При постоянной деформации на участке $\varepsilon = const$  |
| 9                         | Коэффициент Пуассона                                   | $\mu = \left  \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right $                                   | $\varepsilon'$ - поперечная деформация<br>$\varepsilon$ - продольная деформация   |
| 10                        | Определение поперечной деформации                      | $\varepsilon' = -\mu \varepsilon$   | $\mu$ - коэффициент Пуассона  |
| 11                        | Продольные перемещения поперечных сечений              | $w_z = w_0 + \varepsilon \cdot z$   | $w_0$ - перемещение сечения при $z=0$ на участке $\varepsilon = const$  |
| 12                        | Перемещение сечения в конце участка стержня            | $w_k = w_n + \Delta l$  | $w_n$ - перемещение начального сечения участка  |
| <b>Стержневые системы</b> |  |   |   |
| 13                        | Определение усилий из уравнений равновесия             | $\sum F_x = 0$ , $\sum F_y = 0$ ,<br>$\sum m_z = 0$ , $\Rightarrow N_i$                   | $N_i$ - нормальная сила в $i$ -ом стержне   |
| 14                        | Определение напряжений                                 | $\sigma_i = N_i / F_i$  | $\sigma_i$ - напряжения в $i$ -ом стержне   |
| 15                        | Определение перемещений по методу единичной нагрузки   | $\delta = \sum_{i=1}^m \frac{\bar{N}_i N_i l_i}{E_i F_i}$                                 | $\bar{N}_i$ - нормальная сила в $i$ -ом стержне для единичного состояния; $N_i$ - нормальная сила в $i$ -ом стержне для грузового состояния; $m$ - число стержней |

## Кручение

| №  | Смысл зависимости  | Формула  | Примечания  |
|----|--|--|---|
| 1  | Определение внутренних моментов по методу сечений                      | $\sum m_z = 0 \Rightarrow M_K$   | $M_K$ – крутящий момент в сечении   |
| 2  | Касательные напряжения в произвольной точке круглого сечения           | $\tau = \frac{M_K}{J_p} \rho$  | $J_p$ - полярный момент инерции сечения; $\rho$ - расстояние от центра сечения до точки   |
| 3  | Максимальные касательные напряжения в сечении                          | $\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p}$  | $W_p = J_p / \rho_{\max}$ - полярный момент сопротивления сечения; $\rho_{\max}$ – расстояние от центра до наиболее удаленных точек |
| 4  | Условие прочности вала при кручении                                    | $\tau_{\max} \leq [\tau]$  | $[\tau] = \tau_T / n_T$ - допускаемые напряжения  |
| 5  | Напряжения в наклонных площадках при чистом сдвиге                     | $\sigma_\alpha = \tau \sin 2\alpha$<br>$\tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha$ | $\tau$ - касательные напряжения чистого сдвига;<br>$\alpha$ - угол между поперечным и наклонным сечениями                           |
| 6  | Закон Гука при чистом сдвиге   | $\tau = G\gamma$   | $\gamma$ - угловая деформация (угол сдвига)<br>$G$ - модуль сдвига материала  |
| 7  | Связь модуля сдвига $G$ и модуля Юнга $E$                              | $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$   | $\mu$ - коэффициент Пуассона  |
| 8  | Относительный угол закручивания  | $\phi' = \frac{d\phi}{dz}; \phi' = \frac{M_K}{GJ_p}$                     | $\phi$ - функция углов поворота сечений   |
| 9  | Определение углов закручивания на участке                              | $\phi_z = \phi_0 + \phi' \cdot z$  | $\phi' = const$ - относительный угол закручивания на участке  |
| 10 | Угол закручивания участка вала   | $\Delta\phi = \phi' l = \frac{M_K l}{GJ_p}$                              | $\phi' = const$ на участке<br>$l$ - длина участка   |
| 11 | Угловое перемещение сечения в конце участка вала                       | $\phi_K = \phi_H + \Delta\phi$   | $\phi_H$ - угол поворота начального сечения; $\Delta\phi$ - угол закручивания участка   |
| 12 | Условие жесткости вала   | $\phi'_{\max} \leq [\phi']$  | $[\phi']$ - допускаемый относительный угол закручивания   |
| 13 | Касательные напряжения $\tau_{\max}$ и $\tau'$ в прямоугольном сечении | $\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K}$<br>$\tau' = \eta \tau_{\max}$            | $W_K = \alpha ab^2$ - момент сопротивления прямоугольного сечения при кручении;<br>$a, b$ - большая и малая стороны прямоугольника  |
| 14 | Угол закручивания вала прямоугольного сечения                          | $\Delta\phi = \frac{M_K l}{GJ_K}$  | $J_K = \beta ab^3$ - момент инерции прямоугольного сечения при кручении   |

## Изгиб

| №  | Смысл зависимости  | Формула  | Примечания  |
|----|--|--|---|
| 1  | Определение внутренних сил по методу сечений                   | $\sum F_y = 0 \Rightarrow Q$ $\sum m_x = 0 \Rightarrow M$            | <p><b>Q</b> - поперечная сила;<br/> <b>M</b> - изгибающий момент</p>  |
| 2  | Дифференциальные зависимости при изгибе                        | $\frac{dQ}{dz} = q; \quad \frac{dM}{dz} = Q$ $\frac{d^2M}{dz^2} = q$ | $q$ – интенсивность распределённой нагрузки   |
| 3  | Нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения | $\sigma = \frac{M}{J_x} y$   | $J_x$ - момент инерции сечения относительно главной центральной оси $x$ ; $y$ – расстояние от оси $x$ до точки  |
| 4  | Максимальные нормальные напряжения в сечении                   | $\sigma^{max} = \frac{M}{W_x}$                                       | $W_x$ - момент сопротивления сечения  |
| 5  | Условие прочности для балки из пластичного материала           | $\sigma_{max} \leq [\sigma]$   | <p><math>\sigma_{max}</math> - максимальные напряжения в балке<br/> <math>[\sigma] = \sigma_T / n_T</math> - допускаемые напряжения</p>                                 |
| 6  | Условия прочности для балки из хрупкого материала              | $\sigma_{p,max} \leq [\sigma]_p$ $\sigma_{c,max} \leq [\sigma]_c$    | <p><math>[\sigma]_p = \sigma_{вр} / n_b</math>, <math>[\sigma]_c = \sigma_{вс} / n_b</math> - допускаемые напряжения при растяжении и сжатии</p>                        |
| 7  | Касательные напряжения в произвольной точке сечения балки      | $\tau = \frac{Q \cdot S_x^*}{J_x \cdot b(y)}$                        | <p><math>b(y)</math> - ширина сечения в месте определения напряжений;<br/> <math>S_x^*</math> - статический момент отсечённой части сечения</p>                         |
| 8  | Зависимость между линейным и угловым перемещениями             | $\theta = \frac{dv}{dz}$   | <p><math>v</math> - прогиб сечения балки<br/> <math>\theta</math> - угол поворота сечения балки</p>   |
| 9  | Определение кривизны оси балки в сечении                       | $\kappa = \frac{d\theta}{dz}; \quad \kappa = \frac{M}{EJ_x}$         | <p><b>M</b> - изгибающий момент в сечении<br/> <b>EJ<sub>x</sub></b> - жесткость балки при изгибе</p>   |
| 10 | Дифференциальное уравнение упругой линии балки                 | $\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{M}{EJ_x}$                                 | $M(z)$ - функция изгибающего момента по длине балки   |
| 11 | Интеграл Мора для определения перемещений сечений балки        | $\delta = \int_l \frac{\hat{i}_1 \hat{i}}{EJ_x} dz$                  | <p><math>\delta</math> - линейное или угловое перемещение сечения балки,<br/> <b>M(z), M<sub>1</sub>(z)</b> - функции моментов для грузового и единичного состояний</p> |
| 12 | Способ Верещагина для вычисления интеграла Мора                | $\delta = \sum_i^n \frac{\omega_i \eta_i}{(EJ_x)_i}$                 | <p><math>\omega</math> - площадь «грузовой эпюры»;<br/> <math>\eta</math> - ордината на «единичной эпюре» под центром площади грузовой эпюры</p>                        |

## Список дополнительной литературы

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М.: Наука, 1986. - 544с.
2. Ицкович Г.М. Сопротивление материалов. - М.: Высшая школа, 1998. - 367 с.
3. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов. - Киев: Вища школа. Головное изд-во. 1979. - 696 с.
4. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. - М.: Наука, 1986. - 560 с.
5. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. - М.: Мир, 1976. - 669 с.
6. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для вузов / Под ред. Л.С. Минина. - М.: Высшая школа, 1999. - 592 с.