Введение

Физика - есть наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи, и законы ее движения.

Основной метод изучения природы - экспериментальный. Это значит, что ученый выявляет с помощью *измерений* связь между различными физическими величинами, которые мы вводим для описания окружающей нас среды. Затем ученые переводят все это на язык математики: формируется математическая модель данного физического явления. Кроме этого метода, существует еще два - теоретический и получивший в последнее время широкое распространение метод компьютерного моделирования. Все они дополняют друг друга.

Поэтому задача физики состоит в том, чтобы создать в нашем сознании такую картину физического мира, которая наиболее полно отражает свойства его и обеспечивает такие соотношения между элементами модели, какие существуют между элементами внешнего мира.

Итак, физика создает модель окружающего нас мира и изучает ее свойства. Но любая модель является ограниченной. При создании моделей того или иного явления принимаются во внимание только существенные для данного круга явлений свойства и связи. В этом и заключается искусство ученого - из всего многообразия выбрать главное. Приведем примеры физических моделей:

1) Три школьных этапа изучения физики: природоведение (описательная модель); подготовительная (5-8 кл.); модели с их мат. выражением (9-11 кл.)
2) II закон Ньютона - модель применимая в классической физике и в инерциальных системах отсчета (ИСО)
3) Законы Кеплера - модель движения планет как материальных точек без учета светового давления и законов общей теории относительности (ОТО)

Физические модели являются математическими, но не математика является их основой. Количественные соотношения между физическими величинами выясняются в результате измерений, наблюдений и экспериментальных исследований и лишь выражаются на языке математики. Однако другого языка для построения физических теорий не существует.

Курс общей (или экспериментальной) физики рассчитан на три семестра и состоит из 6 разделов:

МЕХАНИКА	II семестр
ТЕРМОДИНАМИКА И СТАТ. ФИЗИКА	
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ	III семестр
ВОЛНЫ	
ОПТИКА	IV семестр
АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА	

Основные учебники:	Савельев И.В. Курс общей физики т.1-3
	Курс физики т.1-3
Дополнительный :	Яворский, Детлаф Курс физики
Задачник:	Иродов И.Е. Задачи по общей физике

МЕХАНИКА

Итак, переходим к механике, которая состоит из 4 частей:
1) Кинематика
2) Динамика и статика
3) Законы сохранения
4) Колебания

Глава1.Кинематика

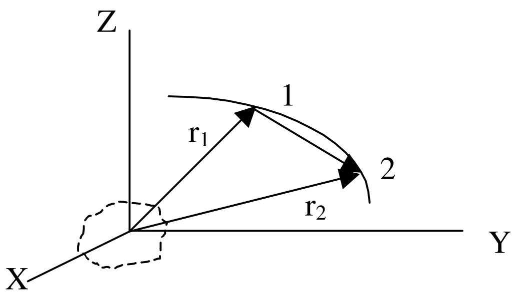
1.1Механическое движение

Движением в широком смысле слова называется всякое изменение вообще. Простейшей формой движения является механическое движение, которое заключается в изменении с течением времени положения тел или их частей друг относительно друга. В этой части курса будет изучаться движение двух модельных объектов - материальной точки и абсолютно твердого тела (АТТ). Это делается для того, чтобы выявить наиболее общие закономерности механического движения.

Материальная точка - тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями до других тел в данной задаче. Примерами такого объекта могут быть Земля при ее движении вокруг Солнца (но не для человека, находящегося на ее поверхности); молекула в разреженном газе.

Абсолютно твердое тело - это тело, деформациями которого (но не размерами) можно пренебречь в условиях данной задачи.

Как ясно из определения механического движения, необходимо определить тело отсчета, то есть то тело, относительно которого изучается движение. Кроме того, должна быть определена система координат, связанная с этим телом, и прибор для измерения времени. Все это вместе называется системой отсчета. Примером такой системы отсчета может быть декартовая система координат с началом в некоторой точке и секундомер. Иногда в качестве системы координат выбирают сферическую или цилиндрическую.

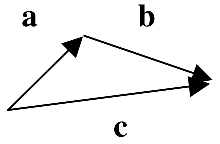


Теперь мы можем однозначно определить положение тела в пространстве. Пусть материальная точка находилась в положении 1 и переместилась в положение 2 . Линия, соединяющая точки, через которые проходило тело, называется траекторией, а ее длина характеризует пройденный путь. Так как путь - это длина , то она не может быть отрицательной.

По характеру траектории движение можно разделить на два простейших вида, которые мы и будем начать: прямолинейное и движение по окружности. Из этак движений можно составить любое, даже очень сложное движение. Отрезок *прямой,* проведенный из одной точки траектории в другую, называется перемещением. Перемещение характеризуется не только длиной отрезка па, но и его направлением, поэтому перемещение - это отрезок со стрелкой, то есть **вектор.** Законы сложении таких величин сложнее, чем чисел. Вектора складываются или вычитаются геометрически.

Вспомним основные свойства векторов.

1). Сложение и вычитание векторов (в дальнейшем вектора будут везде выделены жирным шрифтом - вместо стрелочки над буквой).



$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$

$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ - свойство коммутативности

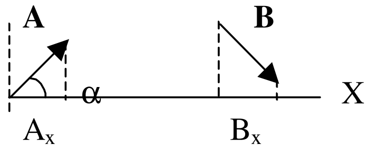
$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ - модуль суммы

2). Умножение вектора на число

$\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$

$|\mathbf{b}| = |\alpha \mathbf{a}|$

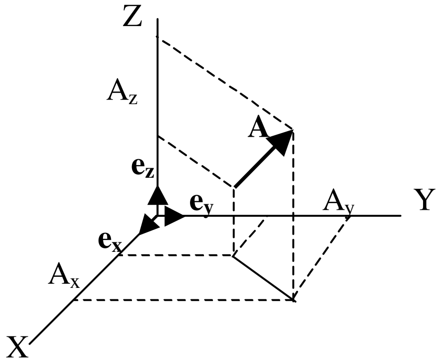
3). Проекция вектора на ось - это отрезок прямой, отсекаемый на оси двумя перпендикулярами, опущенными из начала и конца вектора



$A_x = |\mathbf{A}| \cos\alpha$

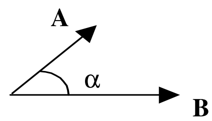
$c_x = a_x + b_x$ если $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$

4). Представление вектора в проекциях на оси.



Вектор полностью определяется заданием трех значений:
$\mathbf{A} \equiv (A_x, A_y, A_z)$
$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e_x} + A_y \mathbf{e_y} + A_z \mathbf{e_z}$, где $\mathbf{e_x}$, $\mathbf{e_y}$, $\mathbf{e_z}$ - орты (единичные вектора) соответствующей оси:
$|\mathbf{e_x}| = |\mathbf{e_y}| = |\mathbf{e_z}| = 1$

5). Скалярное произведение векторов.
$\mathbf{A}\ \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \cos(\mathbf{A},\mathbf{B})$. В результате получается скаляр. Выполняются условия:
коммутативности - $\mathbf{A}\ \mathbf{B} = \mathbf{B}\ \mathbf{A}$
ассоциативности - $(\mathbf{A}\ \mathbf{B})\ \mathbf{C} = \mathbf{A}\ (\mathbf{B}\ \mathbf{C})$



Отметим, что $\mathbf{A}\ \mathbf{B} = 0$, если $\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = 0$,
то есть вектора взаимно перпендикулярны.

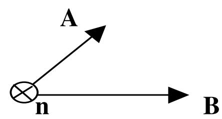
6). Модуль вектора **A**.
Для определения модуля вектора через его проекции на оси воспользуемся формулой скалярного произведения для одного вектора

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{\left(A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z\right)^2} = \sqrt{\left(A_x{}^2 e_x{}^2 + A_y^2 e_y^2 + A_z^2 e_z^2 + A_x A_y e_x e_y + \ldots\ldots\right)}\,.$$

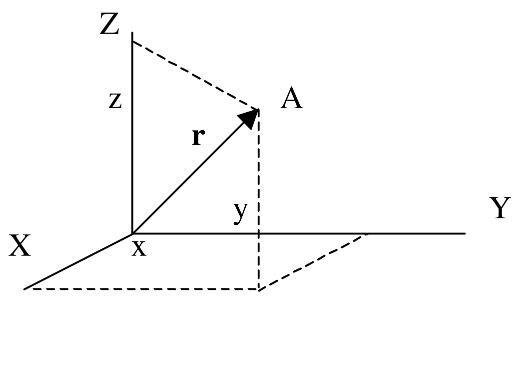
Так как $\mathbf{e_x}^2 = \mathbf{e_y}^2 = \mathbf{e_z}^2 = 1$, а $\mathbf{e_x e_y} = \mathbf{e_y e_z} = \mathbf{e_x e_z} = 0$, имеем в результате

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\,.$$

7). Векторное произведение векторов **A** и **B** - это вектор, обозначаемый символом $[\mathbf{AB}]$ или $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ и определяемый формулой: $[\mathbf{AB}] = AB \sin\alpha\, \mathbf{n}$, где
A и B - модули перемножаемых векторов, α - угол между векторами, **n** - единичный вектор нормали к плоскости в которой лежат векторы **A** и **B.** Направление **n** выбирается так, чтобы последовательность векторов **A,B,n** образовывала правовинтовую систему:
если смотреть вдоль вектора **n** , то поворот по кратчайшему пути от первого сомножителя ко второму осуществляется по часовой стрелке. Отметим, что векторное произведение параллельных векторов равно нулю.



8). Радиус - вектор - вектор, проведенный из начала координат в точку, в которой находится в данный момент движущееся тело. Его можно выразить в проекциях на оси:

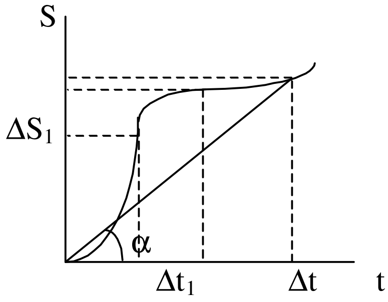


$\mathbf{r} = x\,\mathbf{e_x} + y\,\mathbf{e_y} + z\,\mathbf{e_z}$;

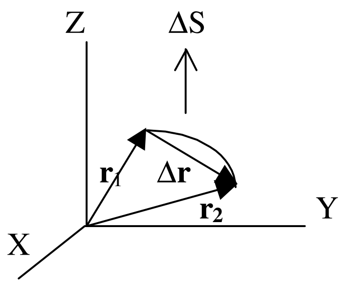
$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

1.2 Скорость: линейная и угловая скорости.

Кроме координат, перемещения и пути, важной величиной является время движения и связанная с ними скорость. Если тело за любые равные промежутки времени проходит равные пути, то движение называется равномерным; тогда величина $v = S / \Delta t$ будет определять скорость движения в любой момент времени. Если же движение в течении этого времени было неравномерным, то эта величина будет так называемой средней скоростью $\langle v \rangle = S / \Delta t$. Хотя в каждый момент времени скорость может быть и не равна средней скорости, но средняя скорость характеризует движение за этот промежуток времени в целом. Чтобы перейти к мгновенной скорости, нарисуем график зависимости пройденного пути от времени. Отметим, что $tg\alpha = S / \Delta t$. Теперь будем уменьшать промежуток времени Δt. Получим $v_1 = \Delta S_1 / \Delta t_1$ - средняя скорость на промежутке времени Δt_1. Тогда $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = v$ - мгновенная скорость или просто скорость. Это так называемая путевая скорость, то есть скорость увеличения пути. Эта



величина, однако, не характеризует направления движения. Величина же $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ называется вектором скорости и лишена этого недостатка. Иначе это можно записать $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ - производная от радиуса - вектора по времени. В проекциях на оси координат скорость можно записать так:

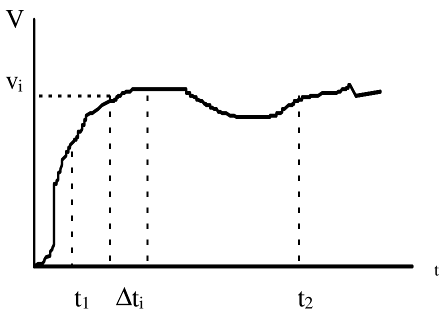


$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e_x} + v_y \mathbf{e_y} + v_z \mathbf{e_z}$,

где

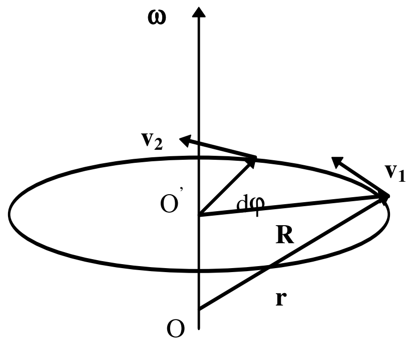
$v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, $v_z = dz/dt$.

Зная зависимость радиус - вектора $\mathbf{r}(t)$, можно определить скорость тела в любой момент времени. Но часто встречается и другая задача: известна зависимость $v(t)$ и надо определить пройденный путь. В этом случае поступают следующим образом. Выбирают такой промежуток времени, чтобы $\Delta t_i << 1$ (одной секунды). Тогда движение в этот промежуток времени можно считать равномерным и пройденный путь $\Delta S_i = v_i \Delta t_i$ (на рисунке это площадь заштрихованного прямоугольника).



Весь же путь, пройденный телом за время от t_1 до t_2, будет равен $S \cong \sum_{i=1}^{N} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{N} v_i \Delta t_i$. Чем меньше промежуток времени Δt_i, тем точнее мы можем определить пройденный путь. Таким образом, $S = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{N} v_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$ вычисляется как определенный интеграл от модуля скорости. На графике зависимости скорости от времени пройденный путь численно равен площади под кривой, ограниченной моментами времени t_1 и t_2.

Теперь дадим определение еще одной величине, описывающей движение материальной точки - угловой скорости. Для этого рассмотрим вращение малого шарика А на веревке вокруг некоторой точки. Линия, перпендикулярная плоскости вращения, проходящая через точку О', называется осью вращения. За некоторое время dt точка А повернулась на угол dφ. Тогда можно ввести понятие угловой скорости $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Но это определение не отражает направление вращения шарика. Чтобы все было определено однозначно, вводят так называемый *аксиальный* вектор



φ и **ω.** Это вектора перпендикулярные плоскости вращения и связанные с направлением вращения шарика правилом правого винта. Итак, $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}$. Найдем связь между векторами линейной и угловой скорости. Длина дуги, опирающаяся на угол dφ равна, с одной стороны $v\ dt = R\ d\varphi$, тогда $v = R\ d\varphi/dt = \omega R$. Направления этих трех векторов связаны правилом правого винта (векторное произведение векторов), тогда

$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$

1.3 Ускорение.

Если скорость тела постоянна, то движение называется равномерным. Если же она меняется, то используется для описания изменения скорости другая величина - <u>ускорение.</u> Оно определяется так:

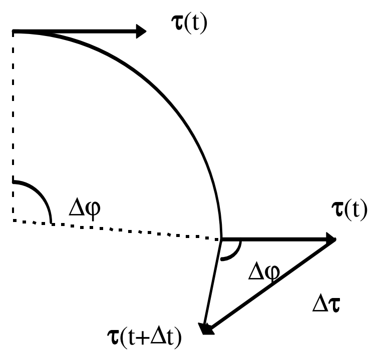
$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\mathbf{v} / \Delta t = d\mathbf{v}/dt$, или $\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$. Представим **a** в проекциях на оси: $\mathbf{a} = a_x \mathbf{e_x} + a_y \mathbf{e_y} + a_z \mathbf{e_z}$. Для того, чтобы понять, из-за чего возникает ускорение, представим вектор скорости в виде произведения модуля скорости на единичный вектор, совпадающий по направлению с направлением скорости тела $\mathbf{e_v} = \mathbf{v} / v = \boldsymbol{\tau}$ (иначе этот вектор называют тангенциальным): $\mathbf{v} = v\,\boldsymbol{\tau}$**.** Тогда ускорение можно записать так

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Рассмотрим, как ведет себя это выражение в двух простых случаях.

1). Прямолинейное движение: при этом направление скорости не меняется и $\boldsymbol{\tau} = \text{Const}$ и $\mathbf{a} = dv/dt\boldsymbol{\tau}$.

2). Равномерное движение по окружности: при этом a = dv/dt = 0 и v = Const, тогда $\mathbf{a} = v\ d\boldsymbol{\tau}/dt$.



Вычислим производную от единичного вектора **τ** и определим ее направление:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\varphi\vec{n}^*}{\Delta t} = \omega\vec{n} = \frac{v}{R}\vec{n}.$$

В этих вычислениях использовано подобие треугольников и также то, что $|\boldsymbol{\tau}(t)| = |\boldsymbol{\tau}(t+\Delta t)| = 1$. Таким образом, в этом случае ускорение направлено перпендикулярно скорости и называется центростремительным: $\mathbf{a} = v^2/R\ \mathbf{n}$.

Получим общее выражение для ускорения, записанное в так называемой естественной системе координат: в проекциях на тангенциальное и нормальное направления по отношению к траектории движения:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n} = a_\tau \boldsymbol{\tau} + a_n \mathbf{n}\ ;\ a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\ .$$

При этом $\boldsymbol{\tau}\mathbf{n} = 0$ и $a_\tau = \frac{dv}{dt}$; $a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$.

1.4 Роль начальных условий

Итак, если известна зависимость $\mathbf{r}(t)$, то можно однозначно найти зависимость скорости и ускорения от времени. Однако, при решении обратной задачи механики (известна зависимость ускорения от времени и надо найти скорость и радиус-вектор) возникают существенные особенности. Знания $\mathbf{a}(t)$ недостаточно, необходимо еще знать так называемые <u>начальные условия</u>, а именно: начальное положение тела $\mathbf{r_0}$ и начальную скорость $\mathbf{v_0}$.

Убедимся в этом:

так как $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, то $d\mathbf{v} = \mathbf{a}\ dt$ и $\mathbf{v} = \int \mathbf{a}\ dt + \mathbf{C_1}$. Возникает эта константа потому, что при обратном дифференцировании она исчезает - $d\mathbf{C_1} / dt = 0$. И определить ее можно только зная значение скорости в начальный момент времени $\mathbf{v}\big|_{t=0} = \mathbf{v_0}$. Далее, зная, что $\mathbf{v} = d\mathbf{r} / dt$, получаем $\mathbf{r} = \int \mathbf{v}\ dt + \mathbf{C_2}$.

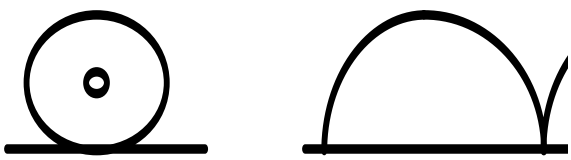
Окончательно $\mathbf{r}(t) = \iint \mathbf{a}\ dt\ dt' + \mathbf{C_1}\ t + \mathbf{C_2}$. Это общее решение обратной задачи механики. И опять необходимо знать вектор $\mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{r_0}$, что бы определить <u>частное</u> решение, соответствующее <u>данному</u> случаю. В качестве примера рассмотрим движение тела в поле силы тяжести (об этом понятии чуть позднее) с ускорением $\mathbf{g}$: $\mathbf{a} = \mathbf{g} = \mathbf{Const}$. Тогда $\mathbf{v} = \int \mathbf{g}\ dt + \mathbf{v_0} = \mathbf{v_0} + \mathbf{g}\ t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{v_0}\ t + \mathbf{g}\ t^2/2$.

Глава 2. Динамика и статика.

1.5 Инерциальные системы отсчета, I закон Ньютона.

Если рассматривать движение некоторого объекта, например самолета, в разных системах отсчете (с земли, из салона самолета или из другого самолета), то и выглядеть оно будет по разному. В качестве наглядного примера изобразим траекторию движения точки на ободе колеса вагона поезда в двух системах отсчета:

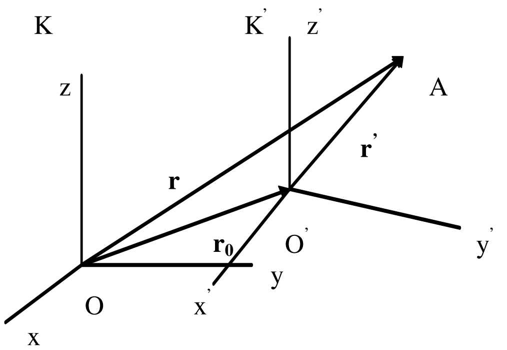
СО - вагон поезда   СО - наблюдатель на Земле. В результате первая кривая - окружность, а вторая - циклоида.



Таким образом, выбор системы отсчета для каждой конкретной задачи очень важен - он может как облегчить решение, так и усложнить его.

Имея все это ввиду, рассмотрим движение материальной точки А в двух системах отсчета, которые движутся в пространстве друг относительно друга со скоростью $\mathbf{v_0}$, а расстояние между началами координат этих систем $\mathbf{r_0}$. Эти величины могут зависеть от времени. Из рисунка видно, что $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{r}'$. Продифференцируем это выражение

$$\frac{dr}{dt} = v = \frac{dr_0}{dt} + \frac{dr'}{dt},$$ получим



$\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{v}'$. Продифференцировав еще раз, получим интересующее нас соотношение:

$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a_0}$. Это выражение показывает, что ускорение некоторого объекта в системе K' может быть вызвано как ускоренным движением объекта в системе K, так и неравномерным движением самой системы K'. По этому признаку возможно разделить все системы отсчета на две группы: <u>инерциальные</u> и <u>неинерциальные.</u>

Инерциальными называются системы, движущиеся друг относительно друга равномерно и прямолинейно. Во всех таких системах ускорение данного объекта имеет одно и то же значение ($\mathbf{a_0} = 0$).

Утверждение о существовании инерциальных систем отсчета (ИСО) Ньютон сформулировал в виде закона инерции или *первого закона Ньютона:*

Всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока внешнее воздействие не заставит его изменить это состояние.

Ясно, что ИСО бесчисленное множество. Системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с ускорением, называются неинерциальными ($\mathbf{a_0} = 0$).

Чаще всего в качестве исходной системы для определения инерциальности данной выбирается сфера неподвижных звезд. При решении задач в общей физике Землю обычно считают ИСО.

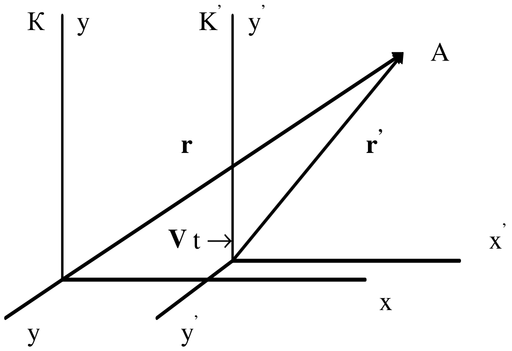
1.6 Принцип относительности Галилея.

Для ИСО справедлив принцип относительности Галилея:

Все инерциальные системы отсчета по своим механическим свойствам эквивалентны друг другу.

Это значит, что никакими механическими опытами, проводимыми «внутри» этой системы, нельзя установить, покоится эта система отсчета или движется прямолинейно и равномерно. Во всех ИСО свойства пространства и времени одинаковы, одинаковы также и все законы механики.

Теперь сформулируем математическое выражение принципа относительности Галилея - преобразование Галилея.



Пусть в некоторой точке пространства находится точка А. Выберем две ИСО - K и K', которые движутся друг относительно друга со скоростью $\mathbf{V}$ так, что оси y и y' все время параллельны, а направления осей x и x' совпадают. Тогда аналогично формулам параграф 1.5 запишем

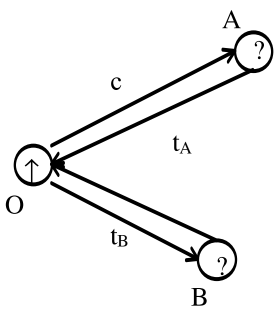
$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}\, t$ и $t' = t$. Взяв производную, получим закон сложения скоростей в классической механике:

$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v_0}$, и кроме того $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$. Это и есть преобразования Галилея, которые можно представить в другом виде:

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

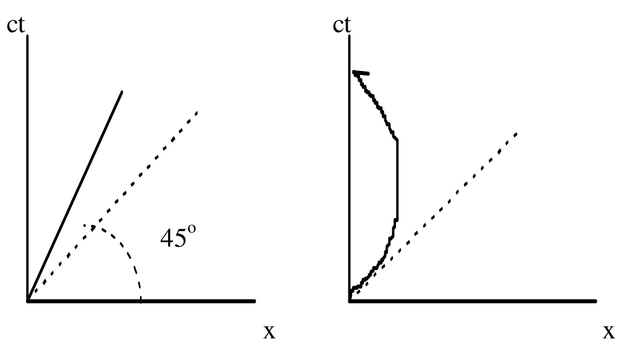
Наиболее важное в этих уравнениях то, что время существует независимо от пространства, и во всех ИСО идет одинаково (единица измерения времени - 1 секунда - одинакова во всех СО).

Однако, хотя время идет и одинаково во всех ИСО, но установить часы все равно надо так, чтобы они были синхронизованы. Это значит, что в момент времени, например, t=0 все часы должны показывать то же самое. Конечно, можно собрать все часы в одном месте и установить их всех одинаково. Но в реальных условиях это невозможно. Тогда поступают следующим образом: в качестве переносчика информации используют световую волну (или радиоволну). Из некоторой точки, где находятся эталонные часы , посылают сигнал в точку А, который отражается и возвращается в точку О. Время его движения Δt_A делится на два - получается время, за которое сигнал достигнет точки А. Теперь наблюдатель в определенный заранее момент времени t_0 посылает сигнал в точку А и наблюдатель в точке А устанавливает на своих часах время



$t = t_0 + \Delta t_A/2$, где $\Delta t_A = 2\, l_{OA}/c$. Если считать, что скорость распространения сигнала одинакова во всех направлениях, то аналогичные действия можно предпринять для любой точки пространства (на рисунке это точка В) и таким образом установить все часы синхронно.

В дальнейшем мы убедимся, что время идет независимо от пространства не абсолютно, а лишь в рамках классической механики Ньютона. То есть, если $v \ll c$, то принцип относительности Галилея справедлив. Поэтому сейчас введем понятие диаграмм Минковского, которые проще объяснить в классической механике, но иметь важное значение они будут лишь в специальной теории относительности. Итак, есть единое пространство - время (x, y, z, t) - четырехмерное. В этом пространстве движется тело - траекторию его называют *мировой линией,* а каждую ее точку - *мировой точкой.* Рисовать четырехмерное пространство сложно, поэтому изображают все на примере двумерного: x и ct. Обе оси имеют единицей измерения метр. Изобразим две мировых линии: равномерно движущуюся вдоль оси x точку (а) и траекторию мяча (б), брошенного под углом к горизонту (по оси x отложена высота подъема тела над Землей). Пунктирная линия на рисунках - это траектория светового луча, движущегося вдоль оси x со скоростью c.



1.7 Масса, импульс, II закон Ньютона.

В параграфе 1.5 был сформулирован I закон Ньютона. Из него следовало, что в ИСО только внешнее воздействие может вызвать ускоренное движение тела. Для описания этого воздействия используют понятие - сила. Поэтому <u>силой</u> называют векторную величину, характеризующую воздействие на данное тело со стороны других тел. Модуль этой величины определяет «степень» этого воздействия, а направление силы совпадает с направлением ускорения, сообщаемого телу данным воздействием.

Опыт показывает, что всякое тело оказывает сопротивление при любых попытках изменить его скорость - как по модулю, так и по направлению. Это свойство, выражающее степень неподатливости тела к изменению его скорости, называют <u>инертностью</u>. У разных тел оно проявляется в разной степени. Мерой инертности служит величина, называемая <u>массой</u>. Введем понятие массы, определив отношение масс двух различных тел по обратному отношению ускорений, сообщаемых им равными внешними воздействиями (силами):

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$. Таким образом, необходимо измерить ускорения тел, а потом методом сравнения с эталоном получить массу любого тела. Тогда $m_1a_1 = m_2a_2 = F$.

Сформулируем II закон Ньютона:

Произведение массы материальной точки на ее ускорение равно действующей на нее силе, то есть $m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}$.

Этот закон можно записать и иначе. Введем понятие импульса (старое название - количество движения) $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$, тогда с учетом $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, получаем

$m\mathbf{a} = \frac{md\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$. В этой формулировке **p** - импульс материальной точки, а **F** - сумма всех сил (равнодействующая), действующих на эту точку. Сумма сил определяется так же, как и сумма любых векторов. Теперь перечислим единицы измерения введенных величин в системе СИ:

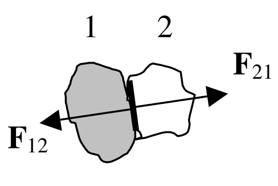
[m] = кг , [a] = м/с^2 , [F] = Н = кг м/с^2.

Очень важно отметить, что оба закона Ньютона справедливы <u>только</u> в инерциальных системах отсчета.

1.8 Силы, III закон Ньютона.

Воздействие тел друг на друга всегда носит характер взаимодействия. Если тело 2 действует на тело 1 с силой $\mathbf{F_{21}}$, то и тело 1 действует на тело 2 с силой $\mathbf{F_{12}}$. Третий закон Ньютона утверждает, что

силы, с которыми взаимодействуют два тела, равны по модулю, противоположны по направлению и приложены каждая к своему телу.



Математическое выражение этого закона выглядит так :

$$\mathbf{F_{12}} + \mathbf{F_{21}} = 0.$$

Как и первые два, этот закон тоже справедлив только в ИСО. Кроме того, он нарушается в случаях, когда скорости взаимодействующих тел близки к скорости света.

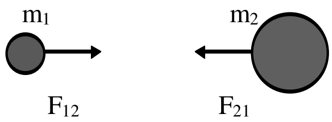
Теперь перейдем к рассмотрению природы сил. Наиболее общей классификацией сил является их разделение на фундаментальные силы, то есть не сводящиеся к другим, более простым силам. За каждую такую силу (за каждое такое взаимодействие) отвечает определенное свойство материи. Таких видов сил четыре:

1) Гравитационные силы (связаны с наличием у тел массы)
2) Электромагнитные силы (связаны с наличием у тел заряда)

3) Ядерные силы - сильные взаимодействия (силы связи протонов в ядре; связаны с наличием у нуклона изотопического спина)
4) Ядерные силы - слабые взаимодействия (проявляются в ядерных реакциях; связаны со свойством четность)

Наиболее часто встречающиеся силы в механике относятся к гравитационным (сила тяжести) и электромагнитным (сила упругости, сила трения, сила Кулона). Рассмотрим эти силы.

А) Сила гравитационного притяжения. Для этой силы существует закон всемирного тяготения, установленный для взаимодействия материальных точек или однородных сферических тел:



$F = \gamma \dfrac{m_1 m_2}{r^2}$; в этой формуле γ- универсальная гравитационная постоянная, а m_1 и m_2 - массы взаимодействующих тел, которые называются гравитационными в отличии от инертной массы, входящей во второй закон Ньютона.

В) Кулоновская сила, действующая между двумя точечными зарядами q_1 и q_2: $F = k \dfrac{q_1 q_2}{r^2}$. Эта сила может быть как силой притяжения, так и силой отталкивания (для одноименных зарядов).

Для решения конкретных задач удобно вводить в рассмотрение силы, которые можно получить из фундаментальных, но являющиеся приближенными.

Однородная сила тяжести - $\mathbf{F} = m\,\mathbf{g}$, где m - масса тела, g - ускорение свободного падения.

Упругая сила - сила, пропорциональная смещению материальной точки из положения равновесия и направленная к положению равновесия: $\mathbf{F} = -\kappa\,\mathbf{r}$.

Сила трения скольжения, возникающая при скольжении данного тела по поверхности другого тела: F = k N, где k - коэффициент трения скольжения, зависящий от природы и состояния соприкасающихся поверхностей, N - сила нормального давления (реакция опоры). Сила трения $\mathbf{F_{тр}}$ всегда направлена противоположно возможному движению тела. Кроме того, если тело находится в покое, то сила трения (в зависимости от обстоятельств) может меняться от нуля до максимального значения, равного $F_{тр}^{max} = k N$.

Сила сопротивления, действующая на тело при его поступательном движении в газе или жидкости (так называемое вязкое трение, в отличии от сухого в предыдущем пункте): $\mathbf{F} = -\beta\,\mathbf{v}$, где к - положительный коэффициент, характерный для данного тела и данной среды. Этот коэффициент зависит от скорости. Но при малых скоростях этой зависимостью можно пренебречь.

Законы сохранения в механике

1.9 Закон сохранения импульса.

Отметим сначала важную деталь. Поскольку сила - величина векторная, то II закон Ньютона для материальной точки можно представить в виде:

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x; \frac{dp_y}{dt} = F_y; \frac{dp_z}{dt} = F_z$$

Если одна из проекций силы (например, на ось y) $F_y = 0$, то в этом направлении импульс материальной точки изменяться не будет $p_y = const$. В этом случае говорят, что сохраняется проекция импульса p_y. При этом величина остальных проекций может изменяться произвольным образом (в зависимости от величины проекции силы). Если же **F** = 0 , то сохраняется вектор импульса **p = const**. Все вышесказанное можно считать законом сохранения импульса одной материальной точки.

Теперь рассмотрим систему, состоящую из N частиц. Они могут взаимодействовать друг с другом силами $\mathbf{F_{ij}}$, где i - номер одной из взаимодействующих частиц, а j - номер другой; и с какими-либо внешними объектами с силами $\mathbf{F_i}$, i - номер выбранной нами частицы. Введем понятие замкнутой системы. Система называется замкнутой, если на нее не действуют никакие внешние силы или их равнодействующая равна нулю. Теперь запишем уравнения II закона Ньютона для каждой частицы в системе:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots\ldots + \vec{F}_{1N} + \vec{F}_1 \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \ldots\ldots + \vec{F}_{2N} + \vec{F}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \ldots\ldots + \vec{F}_{NN-1} + \vec{F}_N \end{cases}$$

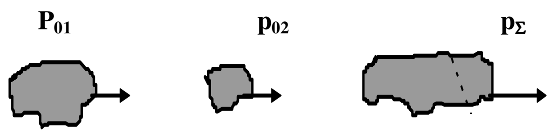
Сложим все эти уравнения вместе. Учтем, что по третьему закону Ньютона
$\mathbf{F_{ij} + F_{ji} = 0}$. Кроме того назовем полным импульсом системы сумму импульсов отдельных частиц: $\mathbf{P = p_1 + p_2 + \ldots + p_N}$. Тогда в результате получим

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{ВНЕШН.}}$$

. Это математическое выражение закона изменения импульса системы: импульс системы частиц могут изменить только внешние силы. Закон сохранения импульса сформулируем так:

В замкнутой системе полный импульс всех частиц остается неизменным.

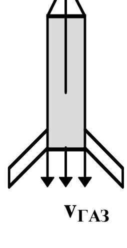
В качестве примера рассмотрим абсолютно неупругий удар двух тел. Под этим подразумевается, что в результате удара изменилось внутреннее состояние обоих тел (модель АТТ для этого случая не подходит) так, что они объединились в одно целое. Первое тело до удара имело импульс $\mathbf{p_{01}}$, а второе - $\mathbf{p_{02}}$. После удара импульс объединенного тела равен $\mathbf{p_\Sigma}$. Удар считается мгновенным, а система из двух тел - замкнутой. Поэтому конечный импульс системы равен начальному импульсу, то есть



$$\mathbf{p_{01} + p_{02} = p_\Sigma}$$

1.10 Реактивное движение

Выведем уравнение движения материальной точки с переменной массой на примере ракеты. Топливо, в основном определяющее массу ракеты, сгорает и получившийся газ имеет большую скорость, унося, таким образом, часть импульса. Если нет внешних сил, то система
«ракета + газ» замкнута и импульс ее должен сохраняться. Если же внешняя сила есть, то импульс будет изменяться так: d**p** = **F** dt. Выразим изменение импульса за время dt через массы и скорости. Пусть m(t) - масса, а v(t) - скорость ракеты в момент времени t, тогда ее импульс **p** = m **v**. Через



промежуток времени масса ракеты уменьшится на dm (dm < 0), скорость же увеличится на d**v**. Тогда новый импульс ракеты будет равен **p**(t+dt) = (m + dm) (**v** + d**v**). Чтобы получить новый импульс системы, нужно к импульсу ракеты добавить импульс газов, унесенный ими за время dt: $dm_{ГАЗ}\mathbf{v}_{ГАЗ}$. Тогда

$$d\mathbf{p} = (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + dm_{ГАЗ}\mathbf{v}_{ГАЗ} - m\mathbf{v} = \mathbf{F}\,dt.$$

Так как масса системы в целом не меняется, то $dm + dm_{ГАЗ} = 0$ и раскрыв скобки, получаем

$$m d\mathbf{v} + dm(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{ГАЗ}) = \mathbf{F}\,dt$$ или

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}(\vec{v}_{ГАЗ} - \vec{v})$$. Обозначим $\mu = \frac{dm}{dt}$ - расход топлива, а $\mathbf{u}_{отн} = \mathbf{v}_{ГАЗ} - \mathbf{v}$ - скорость истечение газов относительно ракеты. Тогда можно записать уравнение Мещерского:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mu\,\mathbf{u}_{отн}$$

Величина $\mu\mathbf{u}_{отн}$ называется реактивной силой.

Используем это уравнение для получения формулы Циолковского. Она соответствует движению свободной ракеты, то есть случаю, когда **F** = 0. Тогда
проектируя уравнение Мещерского на направление движения ракеты, имеем

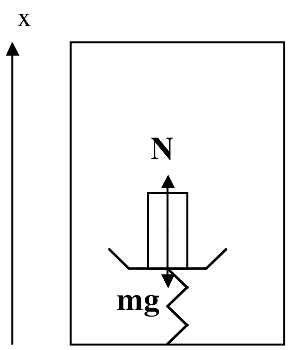
$$m\frac{dv}{dt} = -\mu u_{отн}; \frac{1}{u_{отн}}dv = -\frac{dm}{m}; \ln m = -\frac{v}{u_{отн}} + C.$$

Используем начальные условия для нахождения C: при t=0 $m=m_0$ и $v=v_0$.

Получаем $$\ln m - \ln m_0 = -\frac{v - v_0}{u_{отн}}; m = m_0 e^{-\frac{v-v_0}{u_{отн}}}; v = v_0 + u_{отн}\ln\frac{m_0}{m}$$

1.11Сила тяжести и вес тел

Вблизи поверхности Земли на тело действует сила тяжести **F = mg**. Она в основном определяется силой гравитации. Как определить вес тел? Необходимо привести тело в положение равновесия относительно подвеса или опоры и измерить силу, с какой тело давит на опору или растягивает подвес. Таким образом, вес тел - это сила, с которой тело действует на подвес или опору. Можно вывести общую формулу для веса тела. Для этого рассмотрим весы, на которых находится некоторое тело, вес которого надо определить. Поместим их в лифт, способный двигаться в любых направлениях с ускорением. Если лифт неподвижен, то по II закону Ньютона 0 = **N + mg**, а по III закону Ньютона **P + N =** 0 , где **N -** реакция опоры, а **P -** вес тела. В этом случае **P = mg** , то есть вес и сила тяжести численно равны.



Если же лифт движется в какую либо сторону с ускорением **a**, то II закон Ньютона

m**a = N +** m**g; P + N = 0** и **P₀** = m (**g - a**).

Это и есть общая формула для веса тел. Рассмотрим три случая:

1) если ускорение лифта направлено вверх, то вес тела будет больше силы тяжести P↑ = m (g + a) - перегрузка.
2) если ускорение лифта направлено вниз, то вес тела меньше силы тяжести - P↓ = m (g - a). В случае, когда g = a, наблюдается невесомость.
3) если же лифт двигается вправо с ускорением a, то II закон Ньютона записывается в проекциях на оси x и y так:

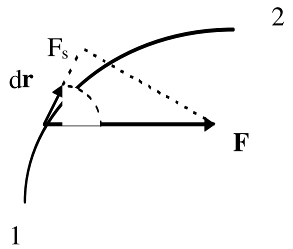
OX: $0 = P_x - mg$

OY: $ma = P_y$

Тогда $P_x = mg$ и $P_y = ma$; $P_{\rightarrow} = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = m\sqrt{g^2 + a^2}$. Таким образом, вес тел может быть как больше, так и меньше силы тяжести.

1.12 Работа силы. Мощность.

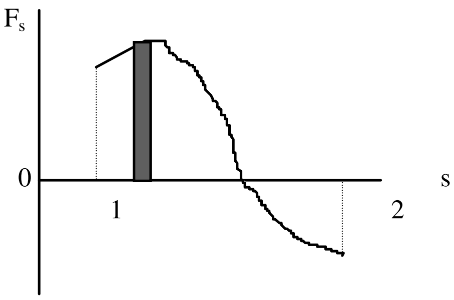
Пусть частица под действием силы **F** совершает перемещение по некоторой траектории 1 - 2. В общем случае сила **F** в процессе движения частицы может меняться как по модулю, так и по направлению. Рассмотрим элементарное перемещение d**r** , в пределах которого силу **F** можно считать постоянной. Действие силы **F** на перемещении d**r** характеризуют величиной, равной скалярному произведению **F** d**r**, которую называют элементарной работой силы **F** на перемещении d**r**. Ее можно представить и в другом виде **F** d**r** = F Cosαds = F_s ds, где α - угол между векторами **F** и d**r**, ds = $|$d**r**$|$ - элементарный путь, F_s - проекция вектора силы на вектор перемещения (указан на рисунке).



Итак, dA = F_s ds . Если угол α острый, то работа совершается положительная, если угол α тупой, то отрицательная. Если же угол α равен $\pi/2$, то работа силы равна нулю. Суммируя (интегрируя) выражение для dA по всем элементарным участкам пути от точки 1 до точки 2, найдем <u>работу силы</u> **F** на данном пути:

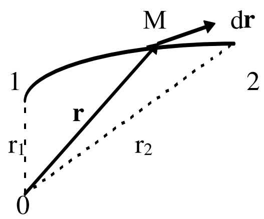
$$A = \int_1^2 F dr = \int_1^2 F_s ds$$

Этой формуле можно придать наглядный геометрический смысл. Изобразим график F_s как функцию положения частицы на траектории. Пусть, например, этот график имеет вид, показанный на рисунке. Из рисунка видно, что элементарная работа dA численно равна площади заштрихованной полоски, а работа A на пути от точки 1 до точки 2 - площади фигуры, ограниченной кривой, ординатами 1 и 2 и осью s. При этом площадь фигуры над осью s берется со знаком плюс (она соответствует положительной работе), а площадь фигуры под осью s - со знаком минус (она соответствует отрицательной работе).



Рассмотрим несколько примеров на вычисление работы.

А) Работа упругой силы **F = -** k **r** , где **r** - радиус - вектор частицы M относительно точки O. Переместим частицу M, на которую действует эта сила, по произвольному пути из точки 1 в точку 2. Найдем сначала элементарную работу силы **F** на элементарном перемещении d**r**: dA = **F** d**r** = - k **r**d**r**. Скалярное произведение **r**d**r** = r (d**r**)$_{\mathbf{r}}$ = rdr , поэтому dA = -k r dr = - d (kr^2/2). Теперь вычислим работу данной силы на всем пути, то есть проинтегрируем последнее выражение от точки 1 до точки 2:



$$A = -\int_1^2 d\left(\frac{kr^2}{2}\right) = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2}$$

Б) Работа гравитационной (или кулоновской) силы.

Пусть в точке O находится неподвижный силовой центр - материальная точка, действующая на частицу M с силой **F**, которая как для гравитационного, так и для кулоновского взаимодействий может быть представлена в виде $\mathbf{F} = (\alpha/r^2)\ \mathbf{e_r}$, где α - соответствующая постоянная ($-\gamma m_1 m_2$ для гравитационной или kq_1q_2 для кулоновской сил), r - расстояние от точки O до частицы M, $\mathbf{e_r}$ - единичный вектор в направлении радиус - вектора (рисунок полностью эквивалентен предыдущему). Элементарная работа этой силы на перемещении d**r** равна $dA = \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = (\alpha/r^2)\ \mathbf{e_r}\, d\mathbf{r} = \alpha\, dr/r^2 = -d(\alpha/r)$. Работа же этой силы на всем пути от точки 1 до точки 2

$$A_{\text{кул}} = -\int_1^2 d\left(\frac{\alpha}{r}\right) = \frac{kq_1q_2}{r_1r_2}(r_2 - r_1);\ A_{\text{грав}} = -\int_1^2 d\left(\frac{\alpha}{r}\right) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r_1 r_2}(r_2 - r_1)$$

В) Работа однородной силы тяжести $\mathbf{F} = m\,\mathbf{g}$.

Запишем эту силу в виде $\mathbf{F} = -m\,g\,\mathbf{e_z}$, где $\mathbf{e_z}$ - орт вертикальной оси, положительное направление которой выбрано вверх. Элементарная работа силы тяжести на перемещении d**r**
$dA = \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = -mg\,\mathbf{e_z}\, d\mathbf{r} = -mgdz = -d(mgz)$.

Работа же данной силы на всем пути от точки 1 до точки 2

$$A = -\int_1^2 d(mgz) = mg(z_1 - z_2)$$

Если же на частицу в процессе движения действуют несколько сил, результирующая которых $\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \ldots$, то нетрудно показать, что работа результирующей силы на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой из сил в отдельности на том же перемещении. Действительно,

$$A = \int (F_1 + F_2 + \ldots\ldots)dr = \int F_1 dr + \int F_2 dr + \ldots\ldots = A_1 + A_2 + \ldots\ldots$$

Единицей работы в системе СИ является Джоуль: 1 Дж = 1 Н * 1 м

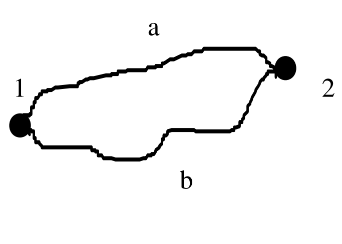
Мощность - это работа, совершаемая в единицу времени, поэтому

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v};\ A = \int_{t_1}^{t_2} N\,dt$$

В системе СИ мощность измеряется в Ваттах: 1 Вт = 1 Дж * 1 $с^{-1}$.

1.13 Консервативные силы.

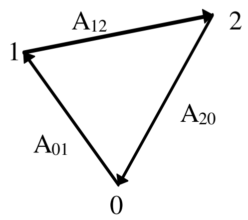
Если в каждой точке пространства на помещенную туда частицу действует сила, то говорят, что частица находится в п о л е с и л. Так, например, частица может находиться в поле сил тяжести, в поле упругих сил, в поле сил сопротивления (в потоке газа). Поле, остающееся постоянным во времени, называют с т а ц и о н а р н ы м. В стационарном силовом поле сила, действующая на частицу, зависит только от ее положения. Работа, которую совершают силы поля при перемещении частицы из точки 1 в точку 2, зависит, вообще говоря, от пути между этими двумя точками. Вместе с тем имеются стационарные силовые поля, в которых работа, совершаемая над частицей силами поля, не зависит от пути между точками 1 и 2. Силы, обладающие таким свойством, называют консервативными.



Это свойство консервативных сил можно сформулировать и иначе: *силы поля являются консервативными, если в стационарном случае их работа на любом замкнутом пути равна нулю*. Чтобы в этом убедиться, разобьем произвольный замкнутый контур на две части: 1a2 и 2b1 (изображено на рисунке). Тогда работа A на замкнутом пути $A = A_{1a2} + A_{2b1}$. Нетрудно заметить, что работа сил поля при перемещении частицы по одному и тому же пути туда и обратно отличаются только знаком, так как $d\mathbf{r_{1a}} = - d\mathbf{r_{a1}}$, следовательно, $A_{2b1} = - A_{1b2}$, поэтому $A = A_{1a2} - A_{1b2}$. По определению консервативных сил, работа их не зависит от формы пути и $A_{1a2} = A_{1b2}$. Значит A = 0. Тем самым доказана эквивалентность двух этих формулировок.

1.14 Потенциальная энергия частицы. Связь силы и потенциальной энергии

Сопоставим каждой точке поля консервативных сил значение некоторой функции $E_p(\mathbf{r})$, которую определим следующим образом. Произвольно выбранной точке О припишем значение функции E_{p0}, взятое тоже произвольно. Значение функции в любой другой точке 1 положим равным сумме E_{p0} и работы A_{10}, совершаемой силами поля при перемещении частицы из точки 1 в точку 0 $E_{p1} = E_{p0} + A_{10}$. Для точки 2 $E_{p2} = E_{p0} + A_{20}$. Тогда разность $E_{p1} - E_{p2} = A_{10} - A_{20}$. Так как для консервативных сил работа по замкнутому пути равна нулю, то $A_{01} + A_{12} + A_{20} = 0$ и $E_{p1} - E_{p2} = A_{12}$ ($\Delta E_p = - A_{12}$). Таким образом, разность потенциальных энергий двух точек поля равна работе по перемещению частицы между этими точками.



Теперь получим связь силы поля $\mathbf{F}$ и потенциальной энергией его $E_p(\mathbf{r})$.
Если известна зависимость $E_p(x,y,z)$, то можно найти $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Пусть частица перемещается вдоль оси x, тогда работа по ее переносу $dA = \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = F_x\, ds_x$, при этом $ds_y = ds_z = 0$. Тогда $dA = F_x\, dx$. Вместе с тем $dE_p = - dA$ и $F_x\, dx = - dE_p$. Выражая отсюда проекцию силы, получаем $F_x = - dE_p/dx$ при условии $ds_y = ds_z = 0$. Этот результат математики записывают в виде *частной производной:*

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

Использование буквы ∂ вместо d в частной производной позволяет отметить тот факт, что производная берется по одной переменной, а остальные переменные при этом считаются неизменными. Аналогично можно записать и проекции силы на остальные оси координат z и y. Тогда вектор силы запишется в виде

$$\mathbf{F} = F_x\, \mathbf{e_x} + F_y\, \mathbf{e_y} + F_z\, \mathbf{e_z} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\mathbf{e}_z\right).$$

Данное выражение представляет собой произведение дифференциального вектора, который носит название *градиент* и потенциальной энергии

$\mathbf{F} = - \mathrm{grad}\, E_p$. Выпишем отдельно математическую формулу для градиента

$$\mathrm{grad} \equiv \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Направление вектора $\mathbf{grad}E_p$ совпадает с направлением оси l, вдоль которой функция E_p возрастает с наибольшей скоростью, а модуль равен dE_p/dl , то есть скорости возрастания функции вдоль этой оси. Наиболее распространенное обозначение такого дифференциального вектора - оператор набла $\mathbf{grad} \equiv \nabla$, тогда $\mathbf{F} = - \mathbf{grad}\, E_p = - \nabla E_p$.

1.15 Кинетическая энергия частицы

Пусть частица массы m движется под действием некоторой силы $\mathbf{F}$ (в общем случае сила $\mathbf{F}$ может быть результирующей нескольких сил). Найдем элементарную работу, которую совершает эта сила $\mathbf{F}$ при перемещении частицы на $d\mathbf{r}$. С учетом закона сохранения импульса $\mathbf{F} = m d\mathbf{v}/dt$ и $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\, dt$, получаем

$dA = \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = m\, \mathbf{v}\, d\mathbf{v}$

Скалярное произведение $\mathbf{v}\, d\mathbf{v} = v\,(\,d\mathbf{v}\,)_v$, где $(d\mathbf{v})_v$ - проекция вектора $d\mathbf{v}$ на направление вектора $\mathbf{v}$. Эта проекция равна dv - приращение модуля вектора скорости. Поэтому $\mathbf{v}\, d\mathbf{v} = v\, dv$ и элементарная работа

$dA = m\, v\, dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$. Отсюда видно, что работа результирующей силы **F** идет на приращение некоторой величины, которую называют <u>кинетической энергией:</u> $E_к = \frac{mv^2}{2}$. Таким образом, приращение кинетической энергии частицы при ее элементарном перемещении равно $dE_k = dA$, а при конечном перемещении из точки 1 в точку 2

$E_{k2} - E_{k1} = A_{12}$

Работа силы при перемещении материальной точки равна приращению кинетической энергии этой точки.

Полученный результат без труда обобщается на случай произвольной системы частиц. Кинетической энергией системы называется сумма кинетических энергии частиц, из которых эта система состоит или на которые ее можно мысленно разделить. Напишем предыдущее уравнение для каждой частицы системы, а затем сложим все эти уравнения. В результате снова получится та же формула, но уже не для одной частицы, а для системы частиц (материальных точек). При этом под A_{12} надо понимать сумму работ всех сил, как внутренних, так и внешних, действующих на частицы. Следовательно, **приращение кинетической энергии определяется работой не только внешних, но и внутренних сил.**

1.16 Закон сохранения энергии в механике.

Вывод закона сохранения энергии в механике разделим на два этапа. Сначала получим его для одной частицы (материальной точки), а затем и для системы взаимодействующих частиц. Из определения кинетической энергии следует, что приращение кинетической энергии частицы равно элементарной работе результирующей **F** всех сил, действующих на частицу. Что это за сила? Если частица находится в интересующем нас стационарном поле консервативных сил, то на нее действует консервативная сила $\mathbf{F}_{\mathbf{конс}}$ со стороны <u>*этого*</u> поля. Кроме того, на частицу могут действовать и другие силы, имеющие иное происхождение. Назовем их <u>сторонними</u> силами $\mathbf{F}_{\mathbf{стор}}$. И те, и другие силы будут по отношению к частице являться <u>внешними</u>. Таким образом, результирующая **F** всех сил, действующих на частицу, может быть представлена в виде $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathbf{конс}} + \mathbf{F}_{\mathbf{стор}}$. Работа всех этих сил идет на приращение кинетической энергии частицы:

$\Delta E_к = A_{конс} + A_{стор}$. По определению потенциальной энергии, работа сил <u>*этого*</u> поля равна убыли потенциальной энергии частицы в этом поле: $A_{конс} = -\, \Delta E_p$ Подставив это выражение в предыдущее и перенеся величину ΔE_p влево, получим $\Delta E_k + \Delta E_p = \Delta(\,E_k + E_p\,) = A_{стор}$. Отсюда видно, что работа сторонних сил идет на приращение величины $E_k + E_p$. Эту величину - сумму кинетической и потенциальной энергий - называют <u>полной механической энергией частицы в поле</u> и обозначают $E = E_k + E_p$. Итак, $E_2 - E_1 = A_{стор}$. Это закон изменения энергии для <u>одной</u> частицы: полная механическая энергия частицы может измениться под действием только сторонних сил. Обычно в качестве сторонних сил выступают диссипативные силы, такие как силы трения, сопротивления среды, то есть силы, которые переводят механическую энергию в тепловую. Однако, сторонними можно считать любые силы, которые по тем или иным причинам не целесообразно учитывать посредством потенциальной энергии.

Сформулируем закон сохранения энергии для одной частицы:

если сторонние силы отсутствуют или таковы, что не совершают работы в течении интересующего нас времени, то полная механическая энергия частицы в стационарном поле консервативных сил остается постоянной за это время $E = E_k + E_p =$ Const.

Теперь переходим к выводу закона сохранения механической энергии для системы, состоящей из N частиц. Ранее была получена формула для кинетической энергии системы частиц. Показано, что приращение кинетической энергии системы при ее переходе из состояния 1 в состояние 2 равно работе, которую совершают все силы, действующие на все частицы системы. Разделим эти силы на внутренние и внешние, а внутренние, в свою очередь - на консервативные и диссипативные. Работу внутренних консервативных сил можно выразить через разность двух величин, называемых собственной потенциальной энергией системы $A_{внутр}^{конс} = - \Delta E_p^{соб}$. Если интересующая нас система частиц находится во внешнем стационарном поле консервативных сил, то удобно <u>все</u> внешние силы, действующие на частицы системы, разделить на силы со стороны внешнего поля (внешние силы поля) и сторонние внешние силы, не относящиеся к данному внешнему полю (внешние сторонние силы). Соответственно работа $A_{внеш}$ внешних сил может быть представлена как алгебраическая сумма работ внешних сил поля и сторонних внешних сил: $A_{внеш} = A_{внеш}^{конс} + A_{внеш}^{стор}$. Работа внешних сил поля может быть представлена как убыль потенциальной энергии системы во внешнем поле $A_{внеш}^{конс} = - \Delta E_p^{внеш}$, тогда $A_{внеш} = - \Delta E_p^{внеш} + A_{внеш}^{стор}$. Следовательно, изменение кинетической энергии системы частиц при переходе из состояния 1 в состояние 2 будет равно $\Delta E_к = - \Delta E_p^{соб} + A_{внутр}^{дис} - \Delta E_p^{внеш} + A_{внеш}^{стор}$. Окончательно, $\Delta(E_к + E_p^{соб} + E_p^{внеш}) = A_{внутр}^{дисс} + A_{внеш}^{стор}$. Это и есть закон изменения механической энергии системы частиц, находящейся во внешнем поле. Величина $E = E_к + E_p^{соб}$ называется полной механической энергией системы, а величина $E' = E_к + E_p^{соб} + E_p^{внеш}$ называется полной механической энергией системы во внешнем стационарном поле консервативных сил. С учетом всего вышесказанного математическое выражение для закона изменения механической энергии системы можно записать так:

$$E'_2 - E'_1 = A_{внеш}^{стор} + A_{внутр}^{дисс}$$

Внешние сторонние силы могут как увеличивать механическую энергию системы, так и уменьшать ее; диссипативные же силы могут лишь ее уменьшать
(переводить в другие виды энергии). Поэтому, можно сформулировать закон сохранения энергии в механике так:

в замкнутой системе, внутри которой действуют только консервативные силы, полная механическая энергия системы не изменяется с течением времени.

Под замкнутой системой подразумевается то же, что и при выводе закона сохранения импульса.

Более глубокое осмысление процесса перехода энергии из одного вида в другой позволило сделать вывод о существовании в природе универсального закона сохранения энергии:

Энергия никогда не создается и не уничтожается, она может только переходить из одной формы в другую или обмениваться между отдельными частями материи.

Этот закон является обобщением большого количества экспериментальных фактов.

1.17 Центральный абсолютно упругий удар шаров

В качестве примера использования закона сохранения энергии рассмотрим центральный абсолютно упругий удар. Центральным называется такой удар двух шаров, при котором они и до, и после столкновения движутся вдоль одной прямой, не вращаясь. Абсолютно упругим называется такой удар, при котором полная механическая энергия сталкивающихся тел сохраняется. В процессе удара сначала кинетическая энергия частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга. В итоге потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую и тела разлетаются со скоростями, определяемыми двумя условиями - законами сохранения импульса и энергии. Это возможно, так как за время соударения сторонние силы не успевают совершить сколько - ни будь заметной работы. Массы шаров равны m_1 и m_2, скорости шаров до и после столкновения равны соответственно $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ и $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$.

Закон сохранения импульса $m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2} = m_1\mathbf{u_1} + m_2\mathbf{u_2}$

Закон сохранения энергии $m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2$

Используя две математические формулы $\mathbf{A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)}$ и, если **AB = CD и A = C , то и B = D ,** получаем

$$m_1 (\mathbf{v_1} - \mathbf{u_1}) = - m_2 (\mathbf{v_2} - \mathbf{u_2})$$

$$m_1 (\mathbf{v_1} - \mathbf{u_1}) (\mathbf{v_1} + \mathbf{u_1}) = m_2 (\mathbf{u_2} - \mathbf{v_2}) (\mathbf{u_2} + \mathbf{v_2})$$

и $\mathbf{v_1} + \mathbf{u_1} = \mathbf{u_2} + \mathbf{v_2}$.

Умножая последнее равенство на m_2 и решая его совместно с первым, получаем ответ

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2\vec{v}_2 + (m_1 - m_2)\vec{v}_1}{m_1 + m_2}; \vec{u}_2 = \frac{2m_1\vec{v}_1 + (m_2 - m_1)\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Рассмотрим два простых случая:

1) Массы шаров одинаковы, тогда шары просто обмениваются скоростями, то есть $\mathbf{u_1} = \mathbf{v_2}$; $\mathbf{u_2} = \mathbf{v_1}$.
2) Тяжелый шар массы m_2 покоится, а на него налетает легкий шар массы m_1. Тогда при условии $m_1 << m_2$ скорости шаров оказываются
   $\mathbf{u_1} = -\mathbf{v_1}$; $\mathbf{u_2} = 0$.

1.18 Теорема о движении центра масс. Теорема Кенига.

Пусть система состоит из N материальных точек, положение которых в пространстве и массы определяются величинами $\mathbf{r_1}$, m_1; $\mathbf{r_2}$, m_2; .... Центром масс (или центром инерции) системы называется такая воображаемая точка, радиус - вектор которой $\mathbf{r_c}$ выражается через радиус - векторы точек системы следующим образом:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots\ldots\ldots}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Продифференцируем это выражение по времени и получим скорость, с которой движется центр масс системы материальных точек:

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\vec{P}}{M}$$

Возьмем еще одну производную по времени и получим ускорение центра масс:

$$M\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

Теперь можно сформулировать теорему о движении центра масс:

Центр масс системы материальных точек движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы, а действующая сила - геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.

Пример: по параболической траектории летит снаряд и разрывается в некоторой точке пространства. Все осколки летят в разные стороны, но центр масс снаряда продолжает двигаться по параболе.

Теперь перейдем к кинетической энергии. Ясно, что она зависит от системы отсчета, в которой измеряется. Необходимо найти закон, по которому преобразуется кинетическая энергия системы материальных точек при переходе от одной ИСО к другой. Сначала разберем случай одной частицы массы m_i и скорости $\mathbf{v_i}$ и две системы отсчета К и К', относительная скорость которых $\mathbf{V}$. Тогда по закону сложения скоростей Галилея $\mathbf{v_i}' = \mathbf{v_i} - \mathbf{V}$ и кинетическую энергию частицы в К системе можно выразить так:

$$E_{ki} = \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \frac{m_i (\vec{v}_i + \vec{V})^2}{2} = \frac{m_i v_i^2}{2} + m_i \vec{v}_i' \vec{V} + \frac{m_i \vec{V}^2}{2}$$

или $E_{ki} = E_{ki}' + 0.5\, m_i \mathbf{V^2} + (\mathbf{p_i}' \mathbf{V})$ (*) , где $\mathbf{p_i}'$ - импульс материальной точки в системе К'.

Теперь рассмотрим систему из N материальных точек. Для каждой точки напишем по уравнению (*), а затем их все сложим. Обозначая суммарный импульс частиц в системе К' через $\mathbf{P}' = m_1 \mathbf{v_1}' + m_2 \mathbf{v_2}' + ... = M\, \mathbf{v_c}'$, получаем

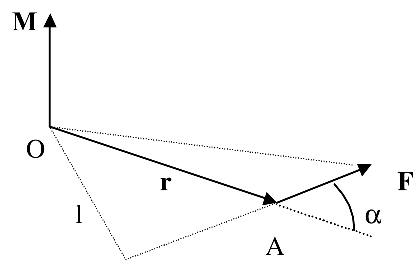
$$E_k = E_k' + \frac{1}{2} M\vec{V}^2 + \vec{P}'\vec{V} = E_k' + \frac{1}{2} M\vec{V}^2 + M\vec{v}_c'\vec{V}$$

Если в качестве системы К' выбрать систему центра инерции (движется со скоростью $\mathbf{v_c}$), то скорость $\mathbf{v_c}' = 0$ и $E_k = E_k' + 0.5\, M\mathbf{V^2}$ $(\mathbf{V} = \mathbf{v_c})$.

Теорема Кенига: Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в ее центре масс и движущейся вместе с ним, и кинетической энергии той же системы в ее относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе координат с началом в центре масс.

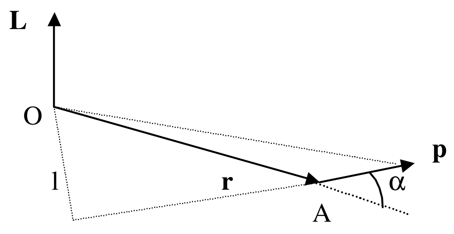
1.19 Момент силы, момент импульса.

Ясно, что закручивать гайку ключом с длинной ручкой легче, чем с короткой. Из этого следует, что кроме модуля силы и ее направления, есть и другая величина - точка приложения силы, характеризующая движение (в данном случае это вращательное движение). Для обозначения этой величины используется момент силы. Момент силы относительно точки О - это вектор $\mathbf{M}$, модуль которого равен $M = F\, l = F\, r\, \mathrm{Sin}\alpha$, а направление его перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектора $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$. Получается, что момент силы можно представить в виде векторного произведения радиус - вектора (проведенного в точку приложения силы из точки О, выбранной в данном случае за начало координат) и силы $\mathbf{M} = [\mathbf{r}\ ,\ \mathbf{F}]$. Зная свойства векторного произведения, можно заметить, что направление момента силы связано с направлениями векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$ правилом правого винта. Приложен момент силы к точке О (изображено на рисунке).

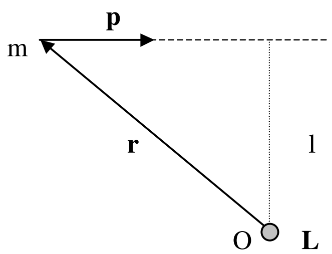


По тем же правилам можно ввести и другую физическую величину, которую называют моментом импульса. Она обозначается буквой $\mathbf{L}$ и равна

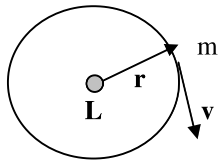
$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\ ,\ \mathbf{p}] = m\, [\mathbf{r}\ ,\ \mathbf{v}]$. Его модуль равен $L = m\, v\, r\, \mathrm{Sin}\alpha$, а направление определяется так же, как и момента силы. Приложен момент импульса так же к точке О. Частица обладает моментом импульса, независимо от формы траектории, по которой она движется. Рассмотрим в качестве примера расчета момента импульса два частных случая:



1). Частица движется равномерно по прямолинейной траектории. Независимо от того, где находится частица модуль и направление момента импульса **L** останется неизменным. Модуль момента импульса в этом случае равен L = m v r Sinα= m v l . Величина l называется плечом импульса.



2). Частица движется по окружности радиуса r. Модуль момента импульса относительно центра окружности L = mvr. Направление вектора **L** при движении частицы остается неизменным - перпендикулярно плоскости рисунка от нас.



1.20 Закон сохранения момента импульса

Выясним, какая механическая величина ответственна за изменение вектора **L** в данной системе отсчета. Для этого продифференцируем выражение для момента импульса по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right]$$

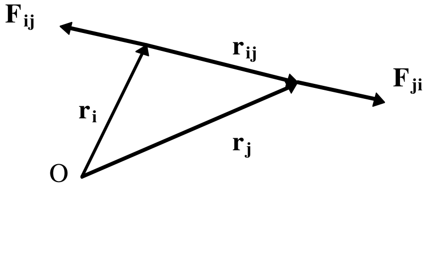
Так как точка O неподвижна (материальная точка движется так, как изображено на рисунке параграфа 1.19), то вектор d**r**/dt равен скорости **v** частицы, то есть совпадает по направлению с вектором **p** , поэтому первая скобка в формуле для изменения вектора момента импульса равна нулю. Далее, согласно второму закону Ньютона, d**p**/dt = **F**, где **F** - равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке. Следовательно, уравнение приобретает вид d**L** / dt = [**r** , **F**]. Величина, стоящая в правой части уравнения, - это момент сил, определенный относительно точки O. Итак, производная по времени от момента импульса **L** частицы относительно некоторой точки O выбранной системы отсчета равна моменту **M** равнодействующей силы **F** относительно той же точки

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Это закон изменения импульса одной частицы. Этот закон представляет собой три независимых уравнения для каждой из проекций момента импульса. Если какая-нибудь из проекций момента силы равна нулю, то говорят, что соответствующая проекция момента импульса сохраняется.

Теперь рассмотрим систему, состоящую из N частиц, которые взаимодействуют между собой и с окружающей средой. Назовем моментом импульса системы частиц сумму моментов импульса отдельных частиц. Вычислим производную по времени от момента импульса системы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N} \vec{M}_{ij}^{\,\text{ВНУТР}} + \vec{M}_i^{\,\text{ВНЕШН}}\right)$$



Так как все взаимодействия внутри системы подчиняются III закону Ньютона, то $\mathbf{F_{ij}} = -\mathbf{F_{ji}}$ и $\mathbf{M_{ij}}^* = \mathbf{M_{ij}} + \mathbf{M_{ji}} = [\mathbf{r_i}, \mathbf{F_{ij}}] + [\mathbf{r_j}, \mathbf{F_{ji}}] = [\mathbf{r_i} - \mathbf{r_j}, \mathbf{F_{ij}}] = -[\mathbf{r_{ij}}, \mathbf{F_{ij}}] = 0$, так как эти вектора направлены по одной прямой. Тогда уравнение для изменения момента импульса приобретает вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\text{ВНЕШН}} = \vec{M}^{\text{ВНЕШН}}$$

Таким образом, момент импульса системы взаимодействующих частиц может изменяться только под действием моментов внешних сил - это утверждение составляет закон изменения момента импульса системы. Если же на систему моменты внешних сил не действуют (система замкнута с точки зрения момента импульса), то момент импульса такой системы сохраняется с течением времени. Это утверждение составляет *закон сохранения момента импульса системы частиц.*

Наряду с законами сохранения импульса и энергии, закон сохранения момента импульса является фундаментальным законом природы и играет определяющую роль при рассмотрении любых природных явлений.

1.21 Основное уравнение динамики вращательного движения

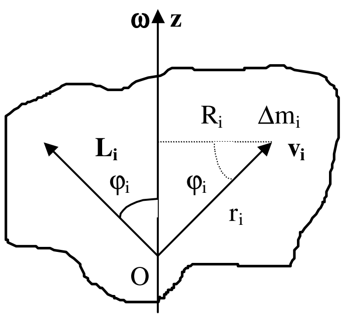
Переходим к изучению движения АТТ - пять следующих параграфов будет посвящено именно этому. В отличие от материальной точки, АТТ имеет размеры и может двигаться на только *поступательно*, но и *вращаться* относительно некоторой оси. Определим понятия поступательного и вращательного движения.

Поступательное движение - это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, перемещается параллельно самой себе. При этом все точки тела движутся с одинаковыми линейными скоростями и ускорениями, а их траектории имеют одинаковый вид. Для поступательного движения справедлив II закон Ньютона для материальной точки, в качестве которой удобно выбрать центр масс. Таким образом, теорема о движении центра масс полностью описывает поступательное движение абсолютно твердого тела.

Вращательное движение - это движение, при котором хотя бы одна точка тела остается неподвижной. Если АТТ вращается вокруг неподвижной оси, то все точки тела имеют одинаковые угловые скорости и угловые ускорения, а их траекториями являются различные окружности. В этом смысле вращательное движение удобно описывать угловыми переменными: φ, ω, β.

Таким образом, движение АТТ всегда можно разделить на поступательное движение центра масс и вращение относительно него и изучать их отдельно. Поэтому нашей задачей теперь является получение уравнения для вращательного движения АТТ вокруг неподвижной оси.

Мысленно разобьем тело, вращающееся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, на элементарные массы Δm_i. На рисунке изображено положение тела



относительно оси вращения. Ось вращения и элементарная масса лежат в плоскости чертежа. Скорость $\mathbf{v_i}$ направлена за чертеж. Момент импульса $\mathbf{L_i}$ перпендикулярен к векторам $\mathbf{v_i}$ и $\mathbf{r_i}$. Расстояние массы Δm_i от оси вращения равно $R_i = r_i \cos\varphi_i$. По определению момента импульса МТ $\mathbf{L_i} = \Delta m_i\, [\mathbf{r_i}, \mathbf{v_i}]$. Здесь $\mathbf{r_i}$ - радиус - вектор, определяющий положение массы Δm_i относительно точки О, $\mathbf{v_i}$ - скорость i - той элементарной массы. Момент импульса тела $\mathbf{L}$ равен сумме моментов импульса элементарных масс: $\mathbf{L} = \sum \mathbf{L_i} = \sum \Delta m_i[\mathbf{r_i}, \mathbf{v_i}]$. Из рисунка следует, что в случае несимметричного тела векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{L}$ неколлинеарные. Поэтому при равномерном вращении момент импульса описывает конус вокруг оси вращения. Для твердого тела, как и для системы материальных точек, справедлив закон изменения момента импульса. Запишем его в проекции на ось вращения, которую обозначим за ось z: $\frac{dL_z}{dt} = M_z$. Найдем момент импульса АТТ относительно оси вращения z, то есть проекцию вектора **L** на ось z. Из рисунка можно сделать вывод, что $L_{zi} = L_i \text{Cos}\varphi_i$. Поскольку угол между векторами r_i и v_i прямой, $L_i = \Delta m_i r_i v_i$. Следовательно, $L_{zi} = \Delta m_i r_i v_i \text{Cos}\varphi_i = \Delta m_i R_i v_i$, где R_i - расстояние массы Δm_i от оси вращения. Зная, что $v_i = \omega R_i$, получим $L_{zi} = \omega R_i^2 \Delta m_i$. Проекция момента импульса тела L_z равна сумме проекций L_{zi}: $L_z = \sum L_{zi} = \sum \omega R_i^2 \Delta m_i = \omega \sum R_i^2 \Delta m_i$. Полученное выражение не зависит от положения на оси вращения точки О, относительно которой определяется момент импульса **L**. Величина же $I_z = \sum R_i^2 \Delta m_i$ равная сумме произведений элементарных масс на квадрат их расстояний от некоторой оси, называется <u>моментом инерции тела</u> относительно этой оси. Всякое тело, независимо от того, вращается оно или покоится, обладает моментом инерции относительно любой оси, подобно тому, как тело обладает массой независимо от того, движется оно или покоится. Теперь проекцию на ось z момента импульса АТТ можно представить в виде $L_z = I_z \omega$. Принимая во внимание то, что для АТТ момент импульса относительно оси есть величина неизменная, получаем основное уравнение вращательного движения АТТ:

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z \qquad \text{или} \qquad I_z \beta_z = M_z.$$

Это уравнение заменяет второй закон Ньютона в случае вращательного движения. Роль массы в нем играет момент инерции, а роль силы - момент силы.

1.22 Тензор инерции

Итак, мы получили новую величину - момент инерции относительно оси. Но если движение происходит относительно нескольких осей, то одного осевого момента инерции для описания недостаточно. Необходимо получить общие уравнения, связывающие момент импульса АТТ и угловую скорость. Для упрощения расчетов воспользуемся представлением о теле как о совокупности материальных точек массы Δm_i. Рассматривая то же движение, что и в предыдущем параграфе, запишем общее выражение для вектора момента импульса $\mathbf{L} = \sum \Delta m_i [\mathbf{r_i}, \mathbf{v_i}]$. Так как $\mathbf{v_i} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r_i}]$, то $\mathbf{L} = \sum \Delta m_i [\mathbf{r_i}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r_i}]] = \sum \Delta m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega} - \sum \Delta m_i \mathbf{r_i} (\boldsymbol{\omega}\mathbf{r_i})$. При получении этого результата использовалась знаменитая формула «бац минус цаб» $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{C}(\mathbf{AB})$. Тогда $\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \sum \Delta m_i r_i^2 - \sum \Delta m_i \mathbf{r_i} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r_i})$. Уже в этой формуле заложена зависимость между **L** и **ω** сложнее, чем **L** = I **ω**. Теперь учтем, что $\boldsymbol{\omega}\mathbf{r} = \omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i$ и $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$. Тогда проекция момента импульса на ось (например, x) будет выглядеть так: $L_x = \omega_x \sum \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_i^2) - \sum \Delta m_i x_i y_i \omega_y - \sum \Delta m_i x_i z_i \omega_z$. В общем случае это можно записать так:

$L_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z$, где $I_{xx} = \sum \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2)$

$L_y = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z$ $\qquad I_{xy} = -\sum \Delta m_i x_i y_i$

$L_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z$ $\qquad$ и так далее.

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Из этих формул ясно, что $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$, поэтому из девяти величин I_{xx}, I_{xy} .... различны лишь шесть. Величины I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} называются <u>осевыми моментами инерции</u>, а $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$, $I_{yz} = I_{zy}$ называются <u>центробежными моментами инерции.</u> Совокупность величин, изображенных ниже, называется **тензором инерции**. Величины I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} являются диагональными элементами тензора, а остальные - недиагональными. В данном случае величины, расположенные симметрично относительно диагонали, равны. Такой тензор называется симметричным. Приведенный тензор осуществляет связь между двумя векторами - это тензор второго ранга. Скаляр в этом ряду является тензором нулевого ранга, а вектор - тензором первого ранга.

Значения компонент любого тензора зависят от выбора системы координат. Для каждого тензора существует такая система координат, в которой недиагональные компоненты обращаются в ноль. Такой тензор называется диагональным, а оси координат - <u>главными осями тензора.</u> Соответственно, величины $I_x = I_{xx}$, $I_y = I_{yy}$, $I_z = I_{zz}$ называются <u>главными моментами инерции.</u> Из всех компонент тензора наиболее важное значение имеет осевой момент инерции $I_{zz} = \sum\Delta m_i\,(r_i^2 - z_i^2) = \sum\Delta m_i\,R_i^2$, который был получен ранее. В большинстве случаев с помощью его удается решить поставленную задачу.

1.23 Вычисление осевых моментов инерции. Теорема Штейнера.

Полученная формула для осевого момента АТТ соответствует приближению набора МТ. Если же переходить к континуальному пределу (сплошному телу), то сумму необходимо заменить интегралом следующего вида

$$I_{zz} = \int\limits_m R^2\,dm = \int\limits_V \rho R^2\,dV$$

где ρ - плотность тела, а R - расстояние от элементарного объема dV до оси вращения. Если тело однородное, то плотность его одинакова во всех точках и

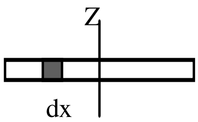
$$I_{zz} = \rho\int\limits_V R^2 dV .$$

Вычисление такого интеграла в общем случае достаточно сложно. Рассмотрим несколько простых случаев.

1). Момент инерции материальной точки (масса m, расстояние от оси - R).

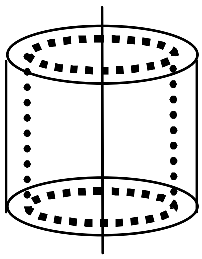
В этом случае интегрирование тривиально и в результате $I_{MT} = m R^2$.

2). Момент инерции однородного стержня (m, длина l, ось проходит через центр масс). Стержень однородный, поэтому $dV = Sdx$, $R = x$, $\rho = m/V = m/(Sl)$, тогда



$$I_{zz} = 2\frac{m}{l}\int\limits_0^{l/2} x^2 dx = 2\frac{m}{l}\frac{1}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{ml^2}{12} .$$

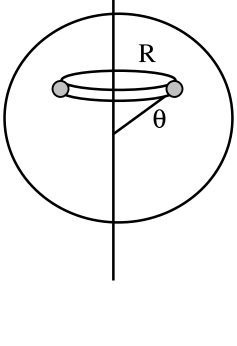
3). Момент инерции цилиндра (m, радиус r, относительно оси симметрии)



Из всего объема цилиндра выделим тонкий цилиндрический слой толщиной dR(отмечен на рисунке пунктиром), площадью 2πRh, где h - высота цилиндра, а R - расстояние от выделенного объема до оси вращения. Тогда масса этой части равна $dm = 2\pi\rho Rh\,dR$ и $dI_z = R^2\,dm = 2\pi\rho hR^3\,dR$. Зная, что $m = \rho\,V = \rho\pi r^2\,h$, получаем для всего цилиндра $I_z^{ЦИЛ} = 2\pi\rho\int\limits_0^r R^3 dR = \frac{mr^2}{2}$.

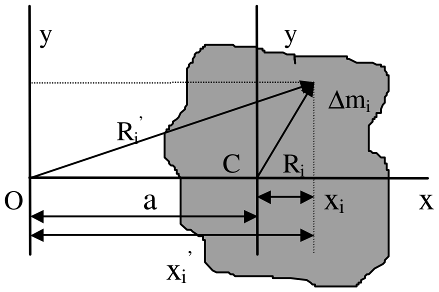
4). Момент инерции шара (m, $R_ш$, ось проходит через центр шара).

Начало отсчета снова выберем на оси и в качестве dV выберем ту часть объема тела, которая находится на расстоянии R от оси вращения и видна под углом ϑ к оси: $dV = 2\pi r^2 Sin\theta drd\theta$. Это объем бублика радиусом rSinθ и сечением rdθ×dr. Теперь подставим этот объем в формулу для осевого момента $dI_z = \rho R^2\,dV = 2\pi\rho r^4\,Sin^3\theta\,dr\,d\theta$. Это момент инерции бублика, а для шара получаем



$$I_z^{ШАР} = 2\pi\rho\int\limits_0^{R_ш} r^4 dr\int\limits_0^{\pi} Sin^3\vartheta d\vartheta = \frac{4\pi R_ш^3}{3}\rho\frac{2R_ш^2}{5} = \frac{2}{5}mR_ш^2 .$$

Все эти моменты инерции определены относительно осей симметрии тел (то есть проходят через центр масс симметричных фигур). Получим формулу, связывающую



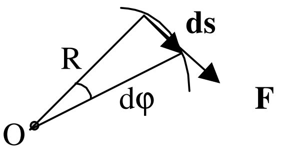
моменты инерции тел при их вращении вокруг оси параллельной оси, проведенной через центр масс, и отстоящей от нее на расстояние a. Итак, рассмотрим две параллельные оси: одна проходит через центр масс, а вторая - на расстоянии от нее a. Момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку O, будет равен $I = \sum R_i'^2\ \Delta m_i = \sum(x_i'^2 + y_i'^2)\Delta m_i = \sum[(x_i + a)^2 + y_i^2]\ \Delta m_i = \sum (x_i^2 + 2x_i a + a^2 + y_i^2)\ \Delta m_i = \sum R_i^2\ \Delta m_i + 2a \sum x_i\ \Delta m_i + a^2 \sum \Delta m_i = I_c + m\ a^2 + 2\ a\ m\ x_c = I_c + m\ a^2$. Так как одна из наших осей проходит через центр масс, то $x_c = 0$, поэтому теорема Штейнера звучит так:

Момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$I = I_c + m\ a^2.$$

1.24 Кинетическая энергия вращающегося и катящегося тела.

Если АТТ вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, то элементарная масса Δm_i, отстоящая от оси вращения на расстояние R_i, обладает скоростью $v_i = \omega R_i$. Следовательно, ее кинетическая энергия равна $\Delta E_{ki} = 1/2\ \Delta m_i\ v_i^2 = 1/2\ \Delta m_i\ \omega^2\ R_i^2$. Сумма всех таких энергий дает полную кинетическую энергию тела при его вращении $E_k^{ВР} = 1/2\ \omega^2 \sum R_i^2\ \Delta m_i = 1/2\ I\ \omega^2$. Это выражение аналогично выражению для кинетической энергии поступательного движения, но роль массы здесь выполняет момент инерции, а роль линейной скорости - угловая. Теперь выясним, что может изменить эту энергию. Найдем



работу, совершаемую внешней силой при вращении АТТ. Рассмотрим частный случай, когда сила направлена по касательной к окружности, по которой движется точка приложения силы. В этом случае **F** ││ d**s**, то есть сила и перемещение параллельны и $dA = F_s\ ds = F_s\ R\ d\varphi = M_z\ d\varphi$. Если же сила направлена произвольно по отношению к движению, то ее можно разложить на три составляющие: параллельно оси вращения $\mathbf{F}_{\|}$(ее момент относительно оси равен нулю), параллельно радиусу вращения $\mathbf{F}_{\perp}$(ее момент тоже равен нулю) и по касательной к окружности $\mathbf{F}_{\boldsymbol{\tau}}$(это и есть рассмотренная выше сила). Таким образом, общая формула такова $dA = M_\omega\ d\varphi$. Для мощности получаем такую формулу $P = M_\omega\ \omega = \mathbf{M}\boldsymbol{\omega}$.

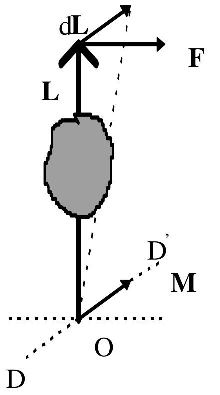
Если же тело и вращается и движется поступательно, то удобно представлять его кинетическую энергию в виде суммы поступательной части и энергии вращения, определенной относительно оси, проходящей через центр масс. Тогда по теореме Кенига получаем:

$$E_k = E_k^{ПОСТ} + E_k^{ВР} = \frac{m\ v_{ЦМ}^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}$$

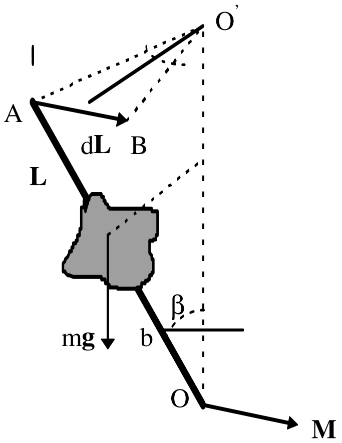
В качестве примера можно определить кинетическую энергию обруча, катящегося без скольжения по горизонтальной поверхности. В этом случае $\omega = v/R$ и $E_k = mv^2/2 + m\ R^2/2\ (v/R)^2 = m\ v^2$.

1.25 Гироскопы. Гироскопический эффект

Гироскопом называется массивное симметричное тело, вращающееся вокруг оси симметрии с большой скоростью. Для симметричного гироскопа направления векторов **L** и **ω** совпадают, тогда **L** = I **ω**. Так как гироскоп массивен, то I очень велик, так же велика и ω.



Изобразим свободный гироскоп, то есть такой, что сумма моментов всех сил, действующих на него равна нулю **M** = 0. Ось гироскопа закреплена в точке O, момент импульса равен **L**. Трения нет. Попытаемся повернуть гироскоп силой **F**, действующей горизонтально в течении времени Δt. Оказывается, что гироскоп будет поворачиваться в направлении DD'. Это явление называется <u>гироскопическим эффектом.</u> Такое поведение гироскопа связано с тем, что изменение момента импульса равно $d\mathbf{L} = \mathbf{M}\,dt$; новое значение момента импульса будет равно $\mathbf{L}(t+dt) = \mathbf{L}(t) + \mathbf{M}\,dt$ и ось гироскопа повернется в направлении, перпендикулярном силе. Отметим тот факт, что $|\mathbf{L}| >> |\mathbf{M}\,dt|$. Таким образом, если на свободный гироскоп подействовать силой **F**, то он будет совершать вращательное движение вокруг исходной оси вращения. Это явление названо <u>прецессией.</u> Рассмотрим прецессию гироскопа под действием силы тяжести. Исследовать будем тот же гироскоп, но пусть в этом случае он будет наклонен к вертикальной оси под углом β. На гироскоп будет действовать момент силы mg, равный $\mathbf{M} = [\mathbf{r}, m\mathbf{g}]$. Модуль этого момента равен $M = mgb\sin\beta$, где b – расстояние от точки O до центра масс гироскопа. Действие момента силы тяжести выразится в изменении момента



импульса гироскопа $d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt$ и ось вращения гироскопа повернется на угол dφ. Модуль этого изменения равен $|d\mathbf{L}| = L\sin\beta\, d\varphi$. Выразим отсюда угол поворота и получим частоту прецессии:

$$d\varphi = \frac{mgb\sin\beta\, dt}{L\sin\beta};\ \omega_{пр} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgb}{L} = \frac{mgb}{I\omega}.$$

В результате за каждые dt гироскоп повернется на малый угол по окружности, при этом повернется и момент силы тяжести. Это и есть прецессия с угловой скоростью $\omega_{пр} << \omega$. Полученные формулы верны, если $mgb << I\,\omega^2$. Первая часть этого соотношения по порядку величины равна потенциальной энергии гироскопа в поле силы тяжести, а вторая - кинетической энергии гироскопа. Итак, полученные формулы верны, если $E_p << E_k$.

1.26 Симметрия пространства - времени и законы сохранения

Законы сохранения импульса, энергии и момента импульса связаны с определенными свойствами симметрии пространства и времени. Все эти законы можно получить из II закона Ньютона, если в добавление к нему использовать свойства симметрии пространства и времени.

Под симметрией пространства - времени понимают однородность времени, однородность и изотропность пространства.

1). <u>Однородность времени</u> означает равноправие всех моментов времени: *если в два любые момента времени все тела замкнутой системы поставить в совершенно одинаковые условия, то начиная с этих моментов времени все явления в ней будут протекать совершенно одинаково.*

2). Однородность пространства означает, что в пространстве нет выделенных положений, все точки пространства равноправны: *если замкнутую систему тел перенести из одного места пространства в другое, поставив при этом все тела в ней в те же условия, в каких они находились в прежнем положении, то это не отразится на ходе всех последующих явлений.*
3). Изотропия пространства означает, что в пространстве нет выделенных направлений, все направления эквивалентны: *если замкнутую систему тел повернуть на произвольный угол вокруг некоторой оси, поставив при этом все тела в ней в те же условия, в каких они находились в прежнем положении, то это не отразится на ходе всех последующих явлений.* Наиболее важным при этом остается условие *замкнутости* системы.

Обратимся к выводу закона сохранения энергии. Из динамики возьмем следствие II закона Ньютона $A_{12} = E_{k2} - E_{k1}$. Далее предположим, что все силы, действующие на объекты, составляющие систему, можно представить в виде потенциальной энергии, которая для одной частицы будет выглядеть так - $E_p(x,y,z,t)$. Таким образом, она может зависеть и от времени. Тогда работа всех сил может быть представлена как убыль потенциальной энергии $A_{12} = -\int\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz\right)$.Запишем полный дифференциал E_p и подставим в выражение для работы $dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz + \frac{\partial E_p}{\partial t}dt$, тогда

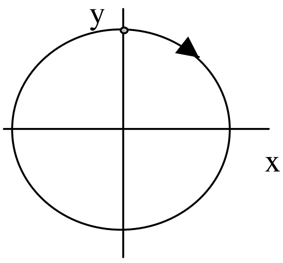
$A_{12} = -\int dE_p + \int \frac{\partial E_p}{\partial t}dt$ и $(E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1}) = \int \frac{\partial E_p}{\partial t}dt$. Если система замкнута, то потенциальная энергия не может явно зависеть от времени в силу однородности пространства. Таким образом, закон сохранения энергии доказан.

Перейдем к доказательству закона сохранения импульса. Пусть механическая система замкнута. Все силы $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \dots$, действующие на материальные точки системы, являются силами внутренними, внешних сил нет. Ввиду однородности пространства энергия системы не изменится, если систему сместить из одного положения в другое. Математически это означает, что независимо от величин $\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \dots$ и $\mathbf{R}$ - вектора смещения системы в другое положение $E_p(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \dots) = E_p(\mathbf{r_1} + \mathbf{R}, \mathbf{r_2} + \mathbf{R}, \dots)$. Выберем $\mathbf{R}$ бесконечно малым, таким, что $\mathbf{R} = dx\,\mathbf{e_x}$ и разложим в ряд: $E_p(\mathbf{r_1} + \mathbf{R}, \dots) = E_p(\mathbf{r_1}, \dots) + \left(\frac{\partial E_p}{\partial x_1} + \frac{\partial E_p}{\partial x_2} + \dots\dots\right)dx$. Выражение в скобках должно равняться нулю, а ведь это - сумма проекций всех сил, действующих внутри системы, на ось x (без знака минус). Ввиду произвольности выбора R можно считать, что в этом случае сумма всех сил, действующих на систему, равна нулю, а это как раз то условие, при котором из II закона Ньютона получается закон сохранения импульса.

Закон сохранения момента импульса требует, чтобы сумма моментов всех сил, действующих на систему, равнялась нулю. Рассмотрим поворот замкнутой механической системы на угол $d\varphi$. Ввиду изотропности пространства на этот поворот работы не затрачивается, поэтому $dA = (\mathbf{M_1} + \mathbf{M_2} + \dots)\, d\boldsymbol{\varphi} = 0$ и геометрическая сумма моментов всех сил, действующих на систему, равна нулю.

1.27 Степени свободы и обобщенные координаты

Положение материальной точки в пространстве может быть задано тремя числами - координатами. Например, это могут быть декартовы координаты - x,y,z, сферические координаты - ρ, θ, φ. В любом случае для точки их три. Про такой объект говорят, что он обладает тремя степенями свободы. Может случиться, что движение точки ограничено, например, пружиной или нитью. Тогда говорят, что на движение наложены связи. В этом случае уравнение $f(x,y,z)=0$ - это уравнение движения, в результате чего независимыми остаются лишь две координаты. Говорят, что точка обладает двумя степенями свободы. Возможно и одномерное движение, например по дуге. В этом случае говорят, что точка обладает одной степенью свободы. Примером такого движения является движение материальной точки по окружности. При этом создается впечатление, что движение описывается двумя координатами (x,y). Но так как уравнение движения ($x^2 + y^2 = R^2$) связывает эти координаты, то независимой величиной остается только одна. В качестве такой координаты можно выбрать длину дуги окружности с началом отсчета в точке, например, с координатами (0,R). В этом примере длина дуги L является обобщенной координатой.



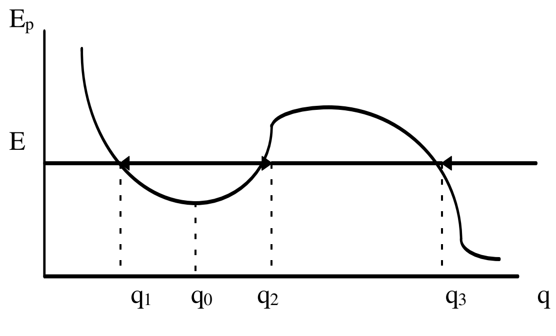
Обобщим понятие степеней свободы на систему из n материальных точек. Если ограничений движению нет, то для определения мгновенного положения всех точек системы надо задать 3n координат. В этом случае система обладает 3n степенями свободы. Пусть на систему наложено какое-либо количество связей. Тогда независимых координат останется f. Для их задания можно использовать любые f чисел q_1, q_2 ,...., q_f , с помощью которых можно задать положение n точек. Это и будут <u>обобщенные координаты</u>. Производные от обобщенных координат будут называться <u>обобщенными импульсами</u>. Число независимых обобщенных координат и называется числом степеней свободы системы.

В качестве примера рассмотрим число степеней свободы АТТ. Число независимых координат определим так: АТТ может участвовать во вращательном (3 координаты) и поступательном (3 координаты) движении. Других возможностей нет - значит всего у АТТ 6 степеней свободы.

Глава 4. Колебания

1.28. Гармонические колебания

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, которую будем характеризовать обобщенной координатой q. Тогда может оказаться, что зависимость потенциальной энергии системы от обобщенной координаты $E_p(q)$ будет иметь вид, изображенный на рисунке. Если E - полная механическая энергия частицы в системе, то частица может находиться только в тех местах оси q, где $E_p(q) \le E$(значение E изображено на рисунке горизонтальной линией). Поэтому движение в области от q_3 до бесконечности будет неограниченно (инфинитно), а в области от q_1 до q_2 будет ограничено (финитно). Точка q_0 оказывается точкой устойчивого равновесия системы. При определенных условиях (отсутствие или пренебрежимо малое трение) в таких точках может возникать особый вид механического движения - <u>механические колебания</u>. Колебаниями в широком смысле называются движения, обладающие той или иной степенью повторяемости по времени (Физ. Энциклопедия). Получим основное уравнение колебаний и его основные свойства. Разложим потенциальную энергию в ряд вблизи q_0 - положения устойчивого равновесия:



$$E_p(q) = E_p(q_0) + \left.\frac{dE_p}{dq}\right|_{q=q_0}(q-q_0) + \left.\frac{d^2E_p}{dq^2}\right|_{q-q_0}(q-q_0)^2 + \ldots\ldots$$

Так как в точке $q = q_0$ у потенциальной энергии наблюдается минимум, то первая производная этой функции при этом равна нулю. Если теперь вторую производную обозначить величиной $k/2$, то потенциальная энергия системы и значение силы, действующей на частицу, вблизи q_0 будут равны

$$E_p(q) = E_p(q_0) + \frac{k}{2}(q - q_0)^2; f(q) = -k(q - q_0)$$

Такая сила называется возвращающей, так как, где бы не находилась частица, сила, действующая на нее, будет направлена к положению равновесия системы. Итак, для возникновения колебаний необходимо наличие двух условий - возвращающая сила и отсутствие (или очень малое) трение. Колебания, как и любое механическое движение, подчиняются II закону Ньютона. Для колеблющейся частицы массы m это уравнение выглядит так $m\mathbf{W} = \mathbf{F}$ или

$m\frac{d^2q}{dt^2} = -k(q - q_0)$. Введем новую переменную $x = q - q_0$, описывающую движение частицы. Это означает, что мы перенесли начало координат системы отсчета в положение устойчивого равновесия системы. Тогда, обозначив $\omega^2 = k / m$, получаем $m x'' = -k x$ или $x'' + \omega^2 x = 0$. Последнее уравнение можно считать определением *гармонических колебаний: колебания, происходящие в соответствии с этим уравнением, называются гармоническими.* Общим решением такого уравнения является сумма гармонических функций $x (t) = A_1 \operatorname{Sin}\omega t + A_2 \operatorname{Cos}\omega t = A \operatorname{Sin}(\omega t + \varphi_0)$. В этой формуле $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{A_2}{A_1}; A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$. Смещение частицы из положения равновесия (уравнение движения) можно записать так:

$$x(t) = A \operatorname{Sin} (\omega t + \varphi_0)$$

В этом уравнении величина A называется амплитудой колебаний, ω - частотой, величина φ_0 - начальной фазой, а $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ - фазой колебаний. Это уравнение получено при условии, что отклонения от положения равновесия малы, поэтому такие колебания называются малыми колебаниями. Энергия системы, совершающей малые колебания, равна

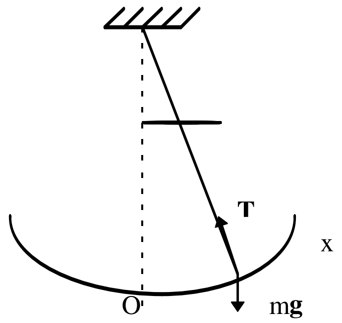
$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2A^2\operatorname{Cos}^2\varphi}{2} + \frac{kA^2\operatorname{Sin}^2\varphi}{2} = \frac{m\omega^2A^2}{2}$$

и не зависит от времени. Такое возможно, если работа сил трения пренебрежимо мала. Далее мы рассмотрим свободные, затухающие и вынужденные колебания.

1.29 Свободные колебания (математический маятник, груз на пружине)

Свободными называются колебания системы под действием только внутренних сил в системе без влияния всяких внешних воздействий. Для всех колебательных систем будем рассматривать малые колебания, то есть такие, для которых $x << 1$.

В качестве первой замкнутой системы рассмотрим математический маятник (МТ на невесомой нити) в поле силы тяжести (трения нет). Запишем общее выражение для II закона Ньютона колеблющегося маятника, а затем спроектируем его на касательную к траектории (дуга окружности на рисунке):



$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$; OX: $ma = -mg\,\text{Sin}\alpha$

Так как $x \ll 1$, то и угол отклонения маятника от вертикали мал и $\text{Sin}\alpha \cong \alpha = x/l$. Тогда $a = -\frac{g}{l}x$. Учитывая, что $a = x''$, получаем уравнение гармонических колебаний $x'' + \frac{g}{l}x = 0$.

Величина $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ называется частотой свободных колебаний математического маятника. С ней связана величина периода колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. И, наконец, общее уравнение движения для этого случая $x(t) = A\,\text{Sin}\,(\omega t + \varphi_0)$. Для полного определения колебаний необходимо задать значения амплитуды и начальной фазы колебаний. Это можно сделать, например, двумя способами: задать кинетическую или потенциальную энергию:

1) в начальный момент МТ отвели на расстояние x_0 от вертикали и свободно отпустили. Тогда

$x|_{t=0} = x_0$ В этом случае уравнение колебаний выглядит так

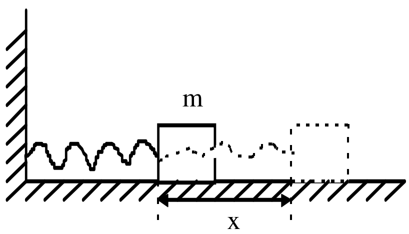
$v|_{t=0} = 0$ $x(t) = x_0\,\text{Cos}\,\omega_0 t$

2) В начальный момент МТ из положения равновесия толчком сообщают скорость v_0. Тогда

$x|_{t=0} = 0$ В этом случае $\varphi_0 = 0$ и

$v|_{t=0} = v_0$ $x(t) = v_0/\omega_0\,\text{Sin}\,\omega_0 t$

Вторым примером будет система «груз на пружине». Рассмотрим сначала случай, изображенный на рисунке. При изменении длины пружины на груз будет действовать сила упругости, которая для малых колебаний подчиняется закону Гука $F_{упр} = -k\,x$ (к - жесткость пружины), то есть является возвращающей. Тогда II закон Ньютона $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{упр} + m\mathbf{g} + \mathbf{N}$ в проекции на ось x будет иметь вид: $ma = -kx$. Снова получаем уравнение гармонических колебаний с частотой собственных колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и периодом



$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Рассмотрение вертикальных колебаний груза на пружине проводится аналогично и дает те же результаты.

В заключение приведем основные формулы для колебательной системы «физический маятник». Физическим маятником называется АТТ, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Частота колебаний такой системы $\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}}$, период $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}$, где m - масса АТТ, a - расстояние от точки A до центра масс АТТ, I - момент инерции АТТ относительно точки A.

1.30 Затухающие механические колебания

В реальной природе всегда действуют силы трения, поэтому свободные колебания при этом будут затухающими. Со временем уменьшается их энергия и амплитуда. Кроме того, так как сила трения действует против возвращающей силы, то и частота затухающих колебаний должна быть меньше, чем у таких же свободных. В качестве сил трения рассмотрим так называемое «жидкое трение», то есть трение, величина которого зависит от скорости относительного движения трущихся объектов $F = -\beta v = -\beta x'$. Запишем II закон Ньютона в этом случае $ma = -kx - \beta v$ или $x'' = -\omega_0^2 x - \beta/m\, x'$. Введем обозначения $\gamma = \beta/2m$; $\omega_0^2 = k/m$, тогда уравнение движения будет иметь вид:

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0$$

Решение этого уравнение по - прежнему будет иметь периодический характер, но ясно, что амплитуда колебаний будет убывать. Ищем решение в виде

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t} \mathrm{Cos}\,\omega t$$

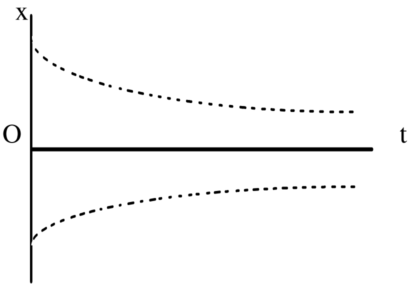
В этой формуле неизвестными величинами являются ω и α. Для их определения вычислим первую и вторую производные по времени от x и подставим полученные выражения в уравнение движения. Полученное выражение имеет вид

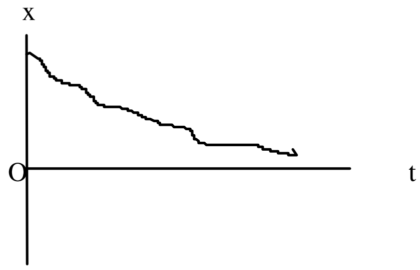
$$(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\alpha\gamma)\, x_0 e^{-\alpha t} \mathrm{Cos}\,\omega t + (2\alpha\omega - 2\omega\gamma)\, x_0 e^{-\alpha t} \mathrm{Sin}\,\omega t = 0$$

Чтобы это выражение было справедливо в любой момент времени необходимо, чтобы обе круглые скобки (при косинусе и синусе) были равны нулю. По этим условиям и определяем α и ω: $\alpha = \gamma$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Таким образом, решение уравнения для затухающих колебаний будет выглядеть так:

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \mathrm{Cos}\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right) t .$$

Величина γ называется декрементом затухания. На рисунках изображены графики зависимости смещения тела из положения равновесия при малых (левый) и больших (правый) величинах декремента затухания.





При очень большом трении в системе колебаний вообще не будет, а будет более или менее плавное приближение колебательной системы к положению устойчивого равновесия

1.31 Вынужденные механические колебания

Вынужденными колебаниями называются колебания, которые совершаются под влиянием внешних сил. В данном случае будут изучаться механические колебания под действием внешней силы, изменяющейся по гармоническому закону. Уравнение II закона Ньютона в этом случае примет вид: $ma = -kx - 2\gamma m x' + F_0 \mathrm{Cos}\omega t$ или

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = (F_0/m)\, \mathrm{Cos}\,\omega t.$$

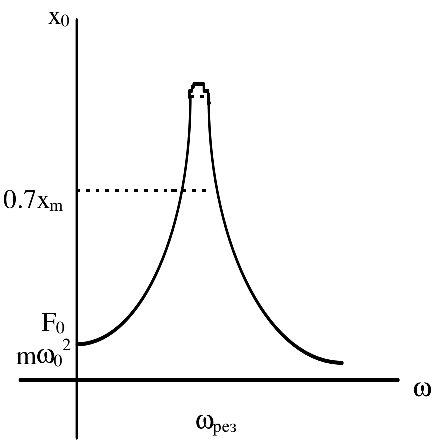
Процесс установления колебаний будет проходить так. Сначала в течение некоторого времени τ будет происходить увеличение амплитуды колебаний (так называемый переходный процесс), а затем начнется установившийся процесс колебаний с постоянной амплитудой, зависящей от величины вынуждающей силы и ее частоты. Рассматривать будем установившийся процесс, поэтому решение будем искать на частоте вынуждающей силы в виде $x(t)= x_0 Cos(\omega t + \varphi)$ и, таким образом, необходимо найти две величины: фазу колебаний φ и амплитуду x_0. Действуя по тем же принципам, что и в случае затухающих колебаний, получаем следующее уравнение для определения неизвестных:

$[(\omega_0^2 - \omega^2)Cos\varphi - 2\gamma\omega Sin\varphi - F_0/(mx_0)]Cos\omega t + [(\omega^2 - \omega_0^2)Sin\varphi - 2\gamma\omega Cos\varphi]Sin\omega t = 0.$

Чтобы это выражение было справедливо в любой момент времени необходимо, чтобы обе квадратные скобки (при косинусе и синусе) были равны нулю. По этим условиям и определяем x_0 и φ:

$$x_0 = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}};\ tg\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Построим график зависимости амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы $x_0 = f(\omega)$.



При частотах, близких к собственной частоте колебаний системы, происходит резкое увеличение амплитуды вынужденных колебаний. Это явление называется резонансом, а соответствующая частота - резонансной. Она равна

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}\ .$$

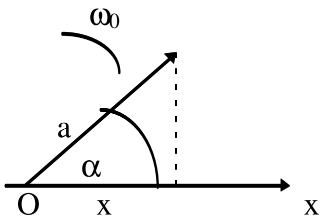
Важной характеристикой колебательной системы является добротность Q. Она характеризует ширину резонансной кривой. Чем больше добротность, тем уже резонансная кривая. Определить добротность можно по формуле $Q = \frac{\omega_{рез}}{\Delta\omega}$. Под $\Delta\omega$ понимается ширина области, где амплитуда колебаний не меньше 0.7 от амплитуды колебаний при резонансе (смотри на рисунке).

1.32 Сложение колебаний. Биения

Решение ряда вопросов, в частности сложение нескольких колебаний одинакового направления (или, что то же самое, сложение нескольких гармонических функций), значительно облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости. Полученная таким образом схема называется векторной диаграммой.

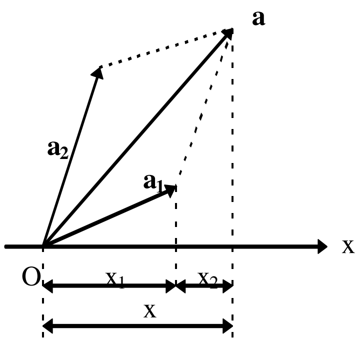
Возьмем ось, которую обозначим за x (изображена на рисунке горизонтально). Из точки O, взятой на оси, отложим вектор длины a, образующий с осью угол α. Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью ω_0, то проекция конца вектора будет перемещаться по оси x в пределах от -a до a, причем координата этой проекции будет изменяться со временем по закону $x = a\,Cos(\omega t + \alpha)$. Значит, гармоническое колебание может быть представлено с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью x угол, равный фазе колебания.

Теперь с помощью векторной диаграммы рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты.



Смещение x колеблющегося тела будет суммой смещений x_1 и x_2, которые запишутся следующим образом: $x_1 = a_1\mathrm{Cos}(\omega_0 t + \alpha_1)$; $x_2 = a_2\mathrm{Cos}(\omega_0 t + \alpha_2)$. Представим оба колебания с помощью векторов $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$, как изображено на рисунке. Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор **a**. Легко видеть, что проекция этого вектора на ось x равна сумме проекций слагаемых векторов:

$x = x_1 + x_2$. Следовательно, вектор **a** представляет собой результирующее колебание. Этот вектор вращается с той же угловой скоростью ω_0, что и вектора $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$, так что результирующее движение будет гармоническим колебанием с частотой ω_0 , амплитудой a и начальной фазой α. Из построения видно, что



$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\mathrm{Cos}(\alpha_2 - \alpha_1)$

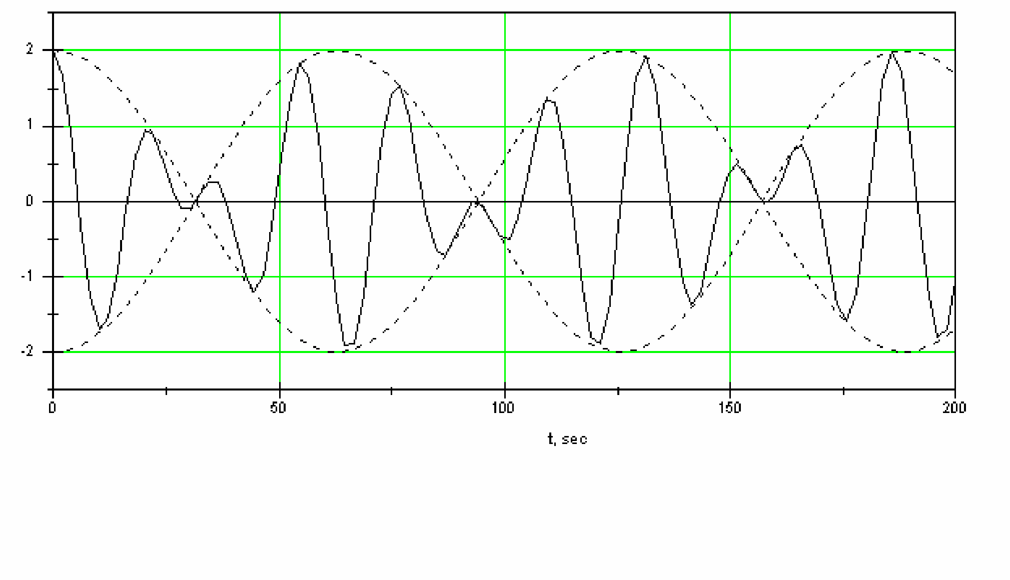
и $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{a_1\mathrm{Sin}\alpha_1 + a_2\mathrm{Sin}\alpha_2}{a_1\mathrm{Cos}\alpha_1 + a_2\mathrm{Cos}\alpha_2}$. Если частоты колебаний x_1 и x_2 неодинаковы, вектора $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ будут вращаться с различной скоростью. В этом случае результирующий вектор **a** пульсирует по величине и вращается с непостоянной скоростью - диаграмма будет нестационарной.

Особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. Результирующее движение при этих условиях можно рассматривать как гармоническое колебание с пульсирующей амплитудой. Такое колебание называется биениями. Обозначим частоту одного из колебаний буквой ω, частоту второго колебания через $\omega + \Delta\omega$. По условию $\Delta\omega << \omega$. Амплитуды обоих колебаний будем полагать одинаковыми и равными a. Для простоты положим, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Тогда уравнения колебаний будут иметь следующий вид:

$x_1 = a\mathrm{Cos}\omega t$, $x_2 = a\mathrm{Cos}(\omega + \Delta\omega)t$. Складывая эти выражения и применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получаем

$$x = x_1 + x_2 = \left(2a\mathrm{Cos}\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\mathrm{Cos}\omega t$$

График этой функции показан на рисунке, изображенном ниже. Заключенный в скобки множитель изменяется гораздо медленнее, чем второй множитель. Это дает основания считать, что рассматриваемое колебание - гармоническое с частотой ω, амплитуда которого изменяется по некоторому периодическому закону. Выражением этого закона не может быть множитель, стоящий в скобках, так как он изменяется в пределах от - 2a до + 2a, в то время как амплитуда по определению - положительная величина. Аналитическое выражение амплитуды имеет вид: амплитуда = $\left|2a\mathrm{Cos}\frac{\Delta\omega}{2}t\right|$. Эта величина - периодическая функция с частотой, в два раза превышающая частоту выражения, стоящего под знаком модуля, то есть с частотой $\Delta\omega$. Таким образом, частота пульсаций амплитуды - ее называют частота биений - равна разности частот складываемых колебаний.



1.33 Напряженность и потенциал гравитационного поля.

Гравитационное взаимодействие осуществляется посредством гравитационного поля. Всякое тело изменяет свойства окружающего его пространства - создает в нем гравитационное поле. Это поле проявляет себя в том, что на помещенное в него другое тело действует сила. Для характеристики гравитационного поля вводится векторная величина **g = F**/$m_{пр}$. Эта величина называется напряженностью гравитационного поля. Она равна отношению силы, действующей на пробную массу (малую по величине и точечную), внесенную в данную точку поля, к массе пробной массы. Получим величину напряженности поля точечной массы (или однородного сферического тела). Используем закон всемирного тяготения, тогда

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r;\ \vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{e}_r$$

В этих формулах M - масса тела, создающего поле, G - универсальная гравитационная постоянная. Потенциальная энергия взаимодействия двух таких масс как M и $m_{пр}$ равна работе, которую можно определить по формуле

$$E_p = -\int \vec{F}d\vec{r} + Const = -G\frac{m_{пр}M}{r} + Const$$

Обычно считают, что тела, находящиеся на больших расстояниях друг от друга, не взаимодействуют, поэтому обычно Const = 0. Если считать, что E_p - потенциальная энергия тела $m_{пр}$ в поле точечной массы (например, Земли), то величина $\varphi = \frac{E_p}{m_{пр}} = -G\frac{M}{r}$ называется потенциалом гравитационного поля сферического тела (точечной массы). Если гравитационное поле создается некоторой распределенной массой, то напряженность и потенциал такого поля можно найти по принципу суперпозиции $\vec{g} = \int\frac{d\vec{F}}{m_{пр}}$ и $\varphi = \int\frac{dE_p}{m_{пр}}$, где d**F** и dE_p - сила и потенциальная энергия тела $m_{пр}$ в поле точечной массы dM, создающей поле. Связь между напряженностью и потенциалом такая же, что и для любого потенциального поля: **F = –** ∇E_p и **g** = – $\nabla\varphi$.

1.34 Движение космических тел в гравитационном поле. Законы Кеплера.

Рассмотрим движение космического тела (например, Земли) в поле другого массивного тела (например, Солнца). Поле такого тела можно считать центральным, то есть полем, в котором сила, действующая на Землю, все время проходит через некоторую точку, которая называется силовым центром. Для центрального поля выполняется закон сохранения момента импульса: момент центральной силы всегда равен нулю. Значит, момент импульса Земли в поле неподвижного Солнца остается неизменным.

Итак, после многолетних наблюдений, Кеплер сформулировал три закона, которые впоследствии стали тремя законами Кеплера:

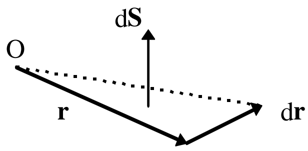
I. Каждая планета движется по замкнутой траектории - эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

II. Радиус - вектор планеты за равные промежутки времени описывает равные площади.

III. Квадраты времен обращений планет относятся как кубы больших полуосей эллиптических орбит, по которым они движутся вокруг Солнца.

Докажем эти законы, используя законы сохранения энергии и момента импульса. Сначала покажем, что любая траектория планеты - плоская. Запишем момент импульса планеты $\mathbf{L} = m\,\mathbf{r} \times \mathbf{v} = m\,\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt$. Так как $\mathbf{L} = \mathbf{Const}$, то вектора скорости и радиус - вектор все время перпендикулярны вектору момента импульса, а значит траектория движения планеты плоская.

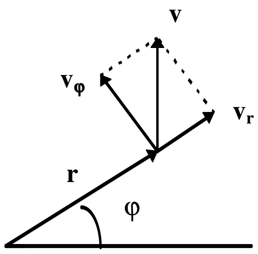
II закон Кеплера. Вычислим модуль момента импульса $|\mathbf{L}| = m|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt| = m\, r\, dr/dt\, \mathrm{Sin}(\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = mrdh/dt = 2mdS/dt$. Тогда если обозначить вектором площадки величину $d\mathbf{S} = dS\,\mathbf{n}$, то окончательно получим II закон Кеплера



$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{\vec{L}}{2m} = \mathrm{Const}\,.$$

Эта величина называется секториальной скоростью и остается постоянной при движении планеты по орбите.

I закон Кеплера. Так как траектория плоская, то движение характеризуется двумя обобщенными координатами. Их можно выбирать произвольно, но наиболее удачный выбор - полярная система координат - r и φ. В этой системе координат скорость планеты можно представить в виде



$\mathbf{v} = \mathbf{v_r} + \mathbf{v_\varphi}$, как изображено на рисунке. Тогда, если $d\mathbf{r} = (dr)_\varphi\, \mathbf{e_\varphi} + (dr)_r\, \mathbf{e_r} = r\, d\varphi\, \mathbf{e_\varphi} + dr\, \mathbf{e_r}$, то

$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = r\,\omega\,\mathbf{e_\varphi} + dr/dt\,\mathbf{e_r}$ и $v^2 = v_\varphi^{\,2} + v_r^{\,2}$. Подставим полученные выражения для скорости в законы сохранения момента импульса и энергии

$\mathbf{L} = m\,\mathbf{r} \times \mathbf{v} = m\,\mathbf{r} \times (\mathbf{e_\varphi}\, v_\varphi + \mathbf{e_r}\, v_r) = m\,\mathbf{r} \times v_\varphi\, \mathbf{e_\varphi} = m\,\omega\, r^2\, \mathbf{e_\perp}$

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r} = \frac{m(v_r^2 + v_\varphi^2)}{2} - G\frac{mM}{r} = \mathrm{Const}\,.$$

Модуль момента импульса $L = m\,\omega\, r^2 = m\, r^2\,\frac{d\varphi}{dt}$ и $\frac{d\varphi}{dt} = L/(mr^2)$. Теперь можно ввести новую переменную $\rho = 1/r$. Тогда

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -r^2\frac{L}{mr^2}\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{L}{m}\frac{d\rho}{d\varphi}\,.$$

Подставим полученный результат в выражение для закона сохранения энергии

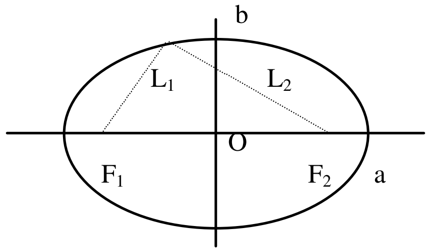
$$\frac{m}{2}\left(v_r^2+v_\varphi^2\right)-G\frac{mM}{r}=\frac{m}{2}\left(\frac{L}{m}\right)^2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2+\frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2-GmM\rho=\frac{L^2}{2m}\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2+\frac{L^2}{2m}\rho^2-GmM\rho=Const$$

Продифференцируем полученное выражение по φ, и, после упрощений, получим

$$2\frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}+2\rho\frac{d\rho}{d\varphi}-\frac{2Gm^2M}{L^2}\frac{d\rho}{d\varphi}=0;\ \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}+\rho=\frac{Gm^2M}{L^2}>0\ .$$

Полученное уравнение с точки зрения математики соответствует уравнению вынужденных колебаний без затухания с частотой вынуждающей силы $\omega = 1$, тогда $\rho = A\mathrm{Sin}\varphi + B\mathrm{Cos}\varphi + C$ $= \sqrt{A^2+B^2}\,\mathrm{Cos}(\varphi-\varphi_0)+C;\ \mathrm{tg}\varphi_0=\frac{B}{A}$. Обозначим $p = \frac{1}{C}=\frac{L^2}{Gm^2M};\ e=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{C}$. Для ρ получается уравнение $\rho p = 1 + e\mathrm{Cos}(\varphi - \varphi_0)$, а для r имеем $r=\frac{p}{1+e\mathrm{Cos}(\varphi-\varphi_0)}$. В аналитической геометрии такую кривую называют *коническим сечением*. Она может быть: $e < 1$ - эллипс; $e = 1$ - парабола; $e > 1$ - гипербола; $e = 0$ - окружность. Минимальному расстоянию $r_{мин}$ планеты до Солнца соответствует угол $\varphi = \varphi_0$. Поэтому начало отсчета угла удобно перенести туда. Эта точка называется *перигелий*, противоположная - *афелий*. Таким образом, траектория космического тела описывается кривой

$$r=\frac{p}{1+e\mathrm{Cos}\varphi}\ .$$



Для замкнутой траектории - это эллипс. Вспомним основные свойства эллипса:

1. Площадь $S = \pi a b$.
2. $L_1 + L_2 = 2a$ (смотри на рисунке).
3. $p = b^2/a$.
4. $r_{мин} = p/(1+e)$; $r_{мах} = p/(1-e)$.

III закон Кеплера. Из II закона Кеплера полная площадь эллипса равна $S=\frac{L}{2m}T$. Эту же площадь можно вычислить независимо (свойство 1) $S = \pi a b$, где a и b - длины полуосей эллипса. Величины a и b можно определить, зная эксцентриситет e и параметр p: $r(0) + r(\pi) = 2a = 2p/(1- e^2)$ и $a = p/(1 - e^2)$, кроме того, зная свойство 2 эллипса, получаем для линии, соединяющей точки F_2, b и O:

$$a^2 = (a - r_{мин})^2 + b^2 \text{ и } b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \text{ следовательно } - p=\frac{b^2}{a}.$$

Тогда $T^2=\left(\frac{2mS}{L}\right)^2=\frac{4m^2(\pi ab)^2}{m^2GMp}=\frac{4\pi^2}{GM}a^3$ или $\frac{T^2}{a^3}=Const$.