Глава IV. Теория относительности

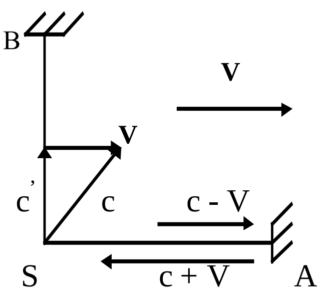
IV.1 Принцип относительности Галилея и опыт Бертоцци.

Специальная теория относительности, созданная Эйнштейном в 1905 году, по своему основному содержанию может быть названа *физическим учением* о пространстве и времени. Физическим потому, что свойства пространства и времени в этой теории рассматриваются в теснейшей связи с законами совершающихся в них физических явлений. Термин «специальная» подчеркивает то обстоятельство, что эта теория рассматривает явления только в инерциальных системах отсчета.

Прежде чем перейти к ее изложению, сформулируем основные принципы ньютоновской механики:

1) Пространство имеет 3 измерения; справедлива евклидова геометрия.
2) Время существует независимо от пространства в том смысле, в котором независимы три пространственных измерения.
3) Промежутки времени и размеры тел не зависят от системы отсчета
4) Признается справедливость закона инерции Ньютона - Галилея (I закон Ньютона)
5) При переходе от одной ИСО к другой справедливы преобразования Галилея для координат, скоростей и времени.
6) Выполняется принцип относительности Галилея: все инерциальные системы отсчета эквивалентны друг другу в отношении механических явлений.
7) Соблюдается принцип дальнодействия: взаимодействия тел распространяются мгновенно, то есть с бесконечной скоростью.

Эти представления ньютоновской механики вполне соответствовали всей совокупности экспериментальных данных, имевшихся в то время. Со временем исследованию подверглись такие явления и процессы, при которых относительные скорости движения тел были велики (сравнимы со скоростью распространения света в вакууме). И тогда оказалось, что в ряде случаев механика Ньютона не работала. Первым подвергся проверке закон сложения скоростей. Принцип относительности Галилея утверждал, что все ИСО эквивалентны по своим механическим свойствам. Но их, наверное, можно отличить по электромагнитным или каким-либо другим свойствам. Например, можно заняться экспериментами по распространению света. В соответствии с существовавшей в то время волновой теории существовала некая абсолютная система отсчета(так называемый «эфир»), в которой скорость света была равна с. Во всех остальных системах скорость света должна была подчиняться закону $\mathbf{c' = c - V}$. Это предположение взялись проверить сначала Майкельсон, а затем и Морли. Целью эксперимента являлось обнаружение « истинного » движения Земли относительно эфира. Было использовано движение Земли по орбите со скоростью 30 км в секунду. Идея эксперимента состояла в следующем. Свет от источника S посылался в двух взаимно перпендикулярных направлениях, отражался от зеркал А и В, находящихся на одинаковом расстоянии L от источника S, и возвращался в точку S. Сравнивалось время прохождения светом путей SAS и SBS. Допустим, что вся



установка в момент эксперимента движется со скоростью V в указанном направлении. Если скорость света подчиняется обычному закону сложения скоростей, то время прохождения пути SAS равно

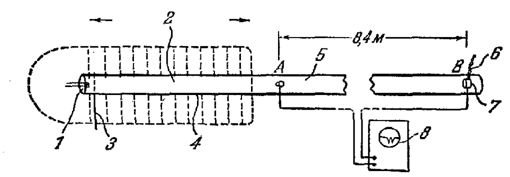
$$t_{II} = \frac{L}{c-V} + \frac{L}{c+V} = \frac{2L}{c}\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

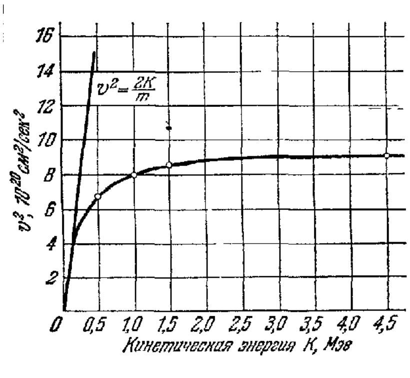
тогда как время прохождения пути SBS равно

$$t_{\perp} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Исходя из этих результатов, ученые ожидали получить разницу во времени. Однако, как ни увеличивали они точность экспериментов, разницы во временах зафиксировать не удалось. Конечно, случайно могло оказаться, что относительная скорость Земли относительно эфира была в этот момент равна нулю, но эксперимент, проведенный через полгода, когда скорость Земли должна была быть 60 км/с, тоже ничего не дал.

Еще более наглядно продемонстрировал ограниченность области применения классической механики эксперимент, проведенный в 1964 году Бертоцци. Ему удалось в одном эксперименте независимо измерить скорость и кинетическую энергию электронов. Электроны ускорялись в ускорителе Ван-де-Граафа, а затем двигались равномерно расстояние АВ, которое можно было измерить достаточно точно. Определив время этого движения, определяли скорость. Далее электроны попадали в мишень и нагревали ее. Температуру мишени измеряли термопарой и по этим результатам находили кинетическую энергию электронов. В результате получали график зависимости квадрата скорость электрона от его кинетической энергии. Согласно классической механике ($v^2 = 2E_K/m$) он должен представлять прямую линию. В ходе же эксперимента получилась зависимость с предельным значением скорости $3\cdot10^8$ м/с. После анализа этих и многих других экспериментов стало ясно, что нужна новая теория для изучения таких явлений.





IV.2 Постулаты Эйнштейна.

Глубокий анализ всего экспериментального и теоретического материала, имеющегося к началу XX в., привел Эйнштейна к пересмотру исходных положений классической физики, прежде всего представлений о свойствах пространства и времени. В результате им была создана специальная теория относительности, явившаяся логическим завершением всей классической физики.

Эта теория принимает без изменения такие положения ньютоновской механики, как евклидовость пространства и закон инерции Галилея—Ньютона. Что же касается утверждения о неизменности размеров твердых тел и промежутков времени в разных системах отсчета, то Эйнштейн обратил внимание на то, что эти представления возникли в результате изучения движений тел с малыми скоростями, поэтому их экстраполяция в область больших скоростей ничем не оправдана, а следовательно незаконна. Только опыт может дать ответ на вопрос, каковы их истинные свойства. Это же относится к преобразованиям Галилея и к принципу дальнодействия.

В качестве исходных позиций специальной теории относительности Эйнштейн принял два постулата, или принципа, в пользу которых говорит весь экспериментальный материал (и в первую очередь опыт Майкельсона**):**

1) принцип относительности,

2)независимость скорости света от скорости источника.

Первый постулат представляет собой обобщение принципа относительности Галилея на любые физические процессы:

все физические явления протекают одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчета; все законы природы и уравнения, их описывающие, инвариантны, т. е. не меняются, при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Другими словами*, все инерциальные системы отсчета эквивалентны* (неразличимы) *по своим, физическим свойствам;* никаким опытом нельзя в принципе выделить ни одну из них как предпочтительную.

Второй постулат утверждает, что *скорость света в вакууме не зависит от движения источника света и одинакова во всех направлениях.*

Это значит, что, скорость *света в вакууме одинакова во всех ИСО***.** Таким образом**,** скорость света занимает особое положение в природе. В отличие от всех других скоростей, меняющихся при переходе от одной системы отсчета к другой, скорость света в пустоте является инвариантной величиной. Как мы увидим, наличие такой скорости существенно изменяет представления о пространстве и времени.

Из постулатов Эйнштейна следует также, что скорость света в вакууме является *предельной:* никакой сигнал, никакое воздействие одного тела на другое не могут распространяться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме. Именно предельный характер этой скорости и объясняет одинаковость скорости света во всех системах отсчета. В самом деле, согласно принципу относительности, законы природы должны быть одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Тот факт, что скорость любого сигнала не может превышать предельное значение, есть также закон природы. Следовательно, значение предельной скорости—скорости света в вакууме—.должно быть одинаково во всех инерциальных системах отсчета: в противном случае эти системы можно было бы отличить друг от друга.

В частности, наличие предельной скорости автоматически предполагает ограничение скорости движения частиц величиной *с.* Иначе эти частицы могли бы осуществлять передачу сигналов (или взаимодействий между телами) со скоростью, превышающей предельную. Таким образом, согласно постулатам Эйнштейна, значение всех возможных в природе скоростей движения тел и распространения взаимодействий ограничено величиной с. Этим самым отвергается принцип дальнодействия ньютоновской механики.

Все содержание специальной теории относительности вытекает из этих двух ее постулатов. В настоящее время оба постулата Эйнштейна, как и все следствия из них, убедительно подтверждаются всей совокупностью накопленного экспериментального материала.

Синхронизация часов. Прежде чем делать какие-либо выводы из этих постулатов, Эйнштейн тщательно проанализировал представления о способах измерения пространства и времени. В первую очередь он обратил внимание на то, что физической реальностью обладает не точка пространства и не момент времени, когда что-либо произошло, а только само событие. Для описания события в данной системе отсчета нужно указать место, в котором оно происходит, и момент времени, когда оно происходит.

Положение точки, в которой происходит событие, может быть определено с помощью жестких масштабов методами евклидовой геометрии и выражено в декартовых координатах.

Соответствующий же момент времени можно определить с помощью часов, помещенных в ту точку системы отсчета, где происходит данное событие. Однако такое определение уже не является удовлетворительным, ког-да нам надо сопоставить друг с другом события, происходящие в *различных* местах, или, что то же самое, сравнить время для событий, происходящих в местах, удаленных от часов.

Действительно, чтобы сравнить время (показания часов в различных точках системы отсчета), прежде всего необходимо установить способ, как определить общее для всех точек системы отсчета время. Другими словами, надо обеспечить *синхронный* ход всех часов данной системы отсчета.

Ясно, что синхронизировать часы, помещенные в различные точки системы отсчета, можно только с помощью каких-нибудь сигналов. Наиболее быстрые сигналы, пригодные для этой цели, - это световые или радиосигналы, распространяющиеся с известной скоростью *с*. Выбор именно этих сигналов обусловлен еще и тем, что их скорость не зависит от направления в пространстве, а также одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Далее можно поступить следующим образом. Наблюдатель, находящийся, например, в начале координат О данной системы отсчета, сообщает по радио: «Передаем сигнал точного времени. Сейчас по моим часам время t_0». В момент, когда этот сигнал достигнет часов находящихся на известном расстоянии г от точки О, их устанавливают так, чтобы они показывали время $t = t_0 + r/c$,т. е. с учетом времени запаздывания сигнала Повторение сигнала через определенные промежутки времени даст возможность каждому наблюдателю установить синхронный ход его часов с часами в точке О. В результате такой операции можно утверждать, что все часы данной системы отсчета показывают в каждый момент одно и то же время.

Существенно отметить, что определенное таким образом время относится лишь к той системе отсчета, относительно которой синхронизированные часы покоятся.

Соотношения между событиями. Обратимся к вопросу о пространственных и временных соотношениях между данными событиями в разных инерциальных системах отсчета.

Уже в ньютоновской механике пространственные соотношения между различными событиями зависят от того, к какой системе отсчета они относятся. Например, две последовательные вспышки лампочки в движущемся поезде происходят в одной и той же точке системы от*счета,* связанной с поездом, но в разных точках системы отсчета, связанной с полотном дороги.

Утверждение, что два разновременных события происходят в одном и том же месте или на таком-то расстоянии друг от друга, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе от счета это утверждение относится.

В противоположность этому временные соотношения между событиями в ньютоновской механике считаются не зависящими от системы отсчета. Это значит, что если какие-нибудь два события происходят одновременно в одной системе отсчета, то они являются одновременными и во всех других системах отсчета. Вообще промежуток времени между двумя данными событиями считается одинаковым во всех системах отсчета.

Легко убедиться, что в действительности это не так - *одновременность* (а следовательно, и течение времени) *является понятием относительным*, приобретающим смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это понятие относится. Покажем с помощью простого рассуждения, что два события, одновременные в одной системе отсчета, в другой системе отсчета оказываются неодновременными.

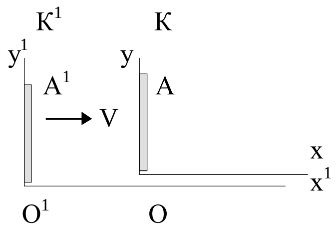
Представим себе стержень АВ, движущийся с постоянной скоростью *V* относительно $К^1$ - системы отсчета. В середине стержня находится лампочка О, по концам (в точках А и В) - фотоэлементы. Пусть в некоторый момент лампочка О дала кратковременную вспышку света. Поскольку скорость распространения света в системе отсчета, связанной со стержнем (как и во всякой инерциальной системе отсчета) равна с в обоих направлениях, то световые импульсы достигнут равноудаленных от О фотоэлементов А и В в один и тот же момент времени (в системе отсчета «стержень») и оба фотоэлемента сработают одновременно.

Иначе обстоит дело в $К^1$ - системе. В этой системе отсчета скорость световых импульсов в обоих направлениях также равна с, однако проходимые ими пути различны. Действительно, пока световые импульсы идут к точкам А и В, последние переместятся вправо и, следовательно, фотоэлемент А сработает раньше, чем фотоэлемент В.

Таким образом, события, одновременные в одной системе отсчета, не являются одновременными в другой системе отсчета, т. е. одновременность в отличие от представлений ньютоновской механики является понятием относительным. А это в свою очередь означает, что время в разных системах отсчета течет неодинаково. Если бы в нашем распоряжении имелись мгновенно распространяющиеся сигналы, то события, одновременные в одной системе отсчета, были бы одновременными и в любой другой системе. Это непосредственно следует из только что рассмотренного примера. В этом случае течение времени не зависело бы от системы отсчета и можно было бы говорить об абсолютном времени, которое фигурирует в преобразованиях Галилея. Таким образом, преобразования Галилея, по существу, исходят из предположения, что синхронизация часов осуществляется с помощью мгновенно распространяющихся сигналов. Однако таких сигналов в действительности нет.

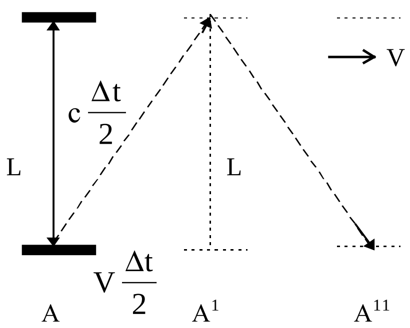
IV.3 Замедление времени

Сначала сравним поперечные по отношению к направлению скорости



движения размеры тел. Пусть в системе K^1 стержень A^1O^1 покоится, расположившись вдоль оси y^1 и длина его L_0 . Система K^1 движется вдоль оси x^1 причем оси x и x^1 при движении остаются параллельными. Тогда в некоторый момент точки O^1 и O совпадут. Совпадут ли длины стержней AO и $A^1O^1 = L_0$? Да, так как в соответствии с первым постулатом все ИСО равноправны, в противном случае по поперечной длине стержня можно было бы отличать системы. Таким образом, $y^1 = y$.

Теперь проведем еще один мысленный эксперимент. В качестве часов



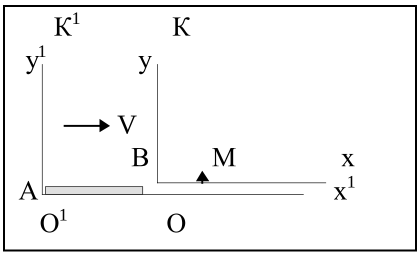
выбираем световой луч и два зеркала. В качестве интервала времени берем $\Delta t_0 = 2L/c$. Это время прохода луча туда и обратно в неподвижных относительно наблюдателя A часах. Такое время называется **собственным** для данных часов Если же часы движутся со скоростью V перпендикулярно оси часов, то относительно наблюдателя A (и связанной с ним ИСО К) промежуток времени будет другой. Поперечные размеры часов неизменны, поэтому путь, проходимый лучом для наблюдателя A, иной (см. рис.). Теорема Пифагора дает

$$\left(c\frac{\Delta t}{2}\right)^2 = \left(V\frac{\Delta t}{2}\right)^2 + L^2\,;\Delta t = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,;\beta = \frac{V}{c}\,.$$

Новый интервал времени - $\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Ясно, что так как $V < c$, то и $\beta < 1$ и $\Delta t > \Delta t_0$. Таким образом, изменяется единица измерения времени - она становится больше. Тем самым по движущимся часам пройдет меньше времени, чем по неподвижным (относительно наблюдателя A). Это явление и называется замедлением времени.

IV.4 Сокращение длины.



Пусть стержень AB неподвижен в системе K^1 и расположен в ней параллельно оси x^1. Система K^1 движется параллельно оси x относительно системы К со скоростью V. Длина стержня, измеренная в системе, где он неподвижен, называется *собственной* длиной стержня. В данном случае она равна L_0. Как определить длину стержня в системе К? В точке М установим часы и зафиксируем моменты времени t_A и t_B совпадения с меткой точек B и A стержня. Тогда $\Delta t_0 = t_B - t_A$ - время пролета стержня мимо неподвижных часов. Тогда длина стержня в системе К $L = V\cdot\Delta t_0$. Для наблюдателя в системе $К^1$ время будет другое и $L_0 = V\cdot\Delta t$, а промежутки времени связаны друг с другом соотношением из предыдущего параграфа. Окончательно получаем

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2}$$

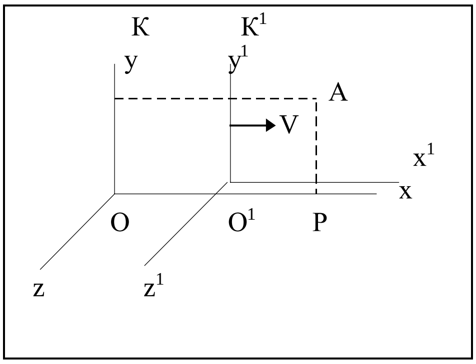
Так как $\beta < 1$, то $L < L_0$ - это и называется лоренцевым сокращением. Это чисто кинематический эффект. В качестве примера рассмотрим при какой скорости длина стержня уменьшится на одну треть:

$L = 2L_0/3 = L_0\sqrt{1-\beta^2}$ и $\beta = 0.73$, а $V = 0.73c$. Это огромная скорость. При реальных для макроскопических объектов скоростях $V = 100$ м/с, величина $\beta \cong 3\cdot10^{-7}$ и разность длин никак не проявляется.

IV.5 Преобразования Лоренца.

Теперь наступило время заменить преобразования Галилея и закон сложения скоростей новыми формулами с учетом постулатов Эйнштейна.

Рассмотрим некоторое событие, произошедшее в точке А, с точки зрения двух наблюдателей К и $К^1$. Наблюдатель системы $К^1$ движется относительно наблюдателя системы К со скоростью V (на рисунке изображено положение осей координат систем и направление их относительного движения - стандартное для СТО).



Пусть в тот момент, когда точки O и O^1 совпадали на часах обоих систем было время $t = t^1 = 0$. Предположим теперь, что в точке А с координатами x, y, z К-системы отсчета в момент времени t по ее часам произошло событие. Найдем соответствующие величины (x^1, y^1, z^1,t^1), определенные в системе $К^1$. Вопрос относительно координат y^1 и z^1 уже был решен ранее: это поперечные по отношению к движению координаты и $y^1 = y$, $z^1 = z$. Координата x^1 точки А в системе $К^1$ равна O^1P и является собственной длиной этого отрезка - $(O^1P)_0$. Длина же этого отрезка в системе К равна $O^1P = x - V\cdot t$ (в этой системе отрезок движется). Связь между длинами этого отрезка определена формулой сокращения длины, тогда

$$O^1P = (O^1P)_0\cdot\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2} \quad \text{и} \quad x^1 = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}.$$

Аналогично можно найти и обратную связь x и x^1 :

$$x = \frac{x^1 + Vt^1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}.$$

Теперь найдем связь между моментами наступления события в точке А t и t^1. Исключая значение x^1 из последней формулы с помощью предыдущей, получаем связь времен:

$$t^1 = \frac{t - x\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$, а обратно $$t = \frac{t^1 + x^1\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}.$$

Итак, преобразования Лоренца при переходе от одной ИСО к другой выглядят так:

$$\begin{cases} x^1 = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y^1 = y \\ z^1 = z \\ t^1 = \dfrac{t - x\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x^1 + Vt^1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y = y^1 \\ z = z^1 \\ t = \dfrac{t^1 + x^1\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^1 = x - Vt \\ y^1 = y \\ z^1 = z \\ t^1 = t \end{cases}$$

В третьем столбце приведены преобразования Галилея. Сразу заметим, что в пределе $\beta << 1$ эти формулы переходят в преобразования Галилея. При этом $t^1 = t$. Кроме того, этими формулами пользоваться нельзя в случае $V = c$. То есть нельзя связать ИСО с фотонами - световыми квантами.

И последнее: в формулу для времени входит координата. Это указывает на неразрывную связь между пространством и временем. Другими словами, речь идет о едином пространстве-времени, в котором протекают все физические явления.

IV.6 Интервал в СТО.

В механике Ньютона промежутки времени и размеры тел не зависят от ИСО, в которой они измерялись. В этом случае говорят, что величины

$$\Delta t и \Delta L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

равные промежутку времени и расстоянию между точками инвариантны по отношению к преобразованию координат в механике Ньютона. В СТО эти величины утратили свойство инвариантности. Однако, оказалось, что существует величина, включающая Δt и ΔL, обладающая свойством инвариантности - ее назвали *интервал*. Приведем формулу для его вычисления:

$$\Delta S = \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2} = \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta L^2}$$

Убедимся в инвариантности интервала: покажем, что интервал ΔS, определенный в системе К, равен интервалу ΔS^1, определенному в системе $К^1$. Для этого воспользуемся преобразованиями Лоренца для интервала времени Δt^1 и проекций отрезка Δx^1,Δy^1 и Δz^1. Подставим их в выражение для интервала

$$\Delta S^1 = \sqrt{c^2\Delta t^{12} - \Delta x^{12} - \Delta y^{12} - \Delta z^{12}} = \sqrt{c^2\frac{\left[\Delta - \left(\frac{V}{c^2}\right)\Delta x\right]^2}{1-\beta^2} - \frac{(\Delta x - V\Delta t)^2}{1-\beta^2} - \Delta y^2 - \Delta z^2} =$$

$$= \Delta S$$

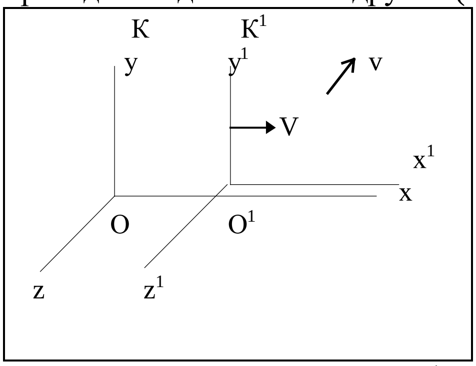
Интервал может быть вещественным (времениподобным), если $c\cdot\Delta t > \Delta L$; мнимым (пространственноподобным), если $c\cdot\Delta t < \Delta L$ и равным нулю, если $c\cdot\Delta t = \Delta L$. Если рассматривать 4-хмерное пространство, то поверхность $L = ct$

разделяет пространство на две части: часть, где события связаны причинно-следственной связью (L < ct) - времениподобный интервал и часть, где события причинно-следственной связью связаны быть не могут. Это происходит потому, что не существует воздействий, способных передаваться со скоростью, большей c.

Итак, в СТО мы знаем уже три инвариантные (по отношению к преобразованиям координат и времени) величины: скорость света c, промежуток собственного времени $\Delta\tau$ и интервал между событиями ΔS.

IV.7 Преобразования скорости в СТО.

Преобразования Галилея давали для скорости следующие формулы при переходе от одной ИСО к другой (при стандартном расположении ИСО):



$$\begin{cases} v_x^1 = v_x - V \\ v_y^1 = v_y \\ v_z^1 = v_z \end{cases}$$

Получим теперь с помощью преобразований Лоренца новые формулы. Для этого рассмотрим частицу, движущуюся со скоростью $\vec{v}$ в системе K. Найдем ее скорость в системе K^1. По определению скорости

$$\begin{cases} v_x^1 = \dfrac{dx^1}{dt^1} = \dfrac{dx^1}{dt}\dfrac{dt}{dt^1} = \dfrac{v_x - V}{\sqrt{1-\beta^2}}\dfrac{dt}{dt^1} \\ v_y^1 = \dfrac{dy^1}{dt^1} = \dfrac{dy^1}{dt}\dfrac{dt}{dt^1} = v_y\dfrac{dt}{dt^1} \\ v_z^1 = \dfrac{dz^1}{dt^1} = \dfrac{dz^1}{dt}\dfrac{dt}{dt^1} = v_z\dfrac{dt}{dt^1} \end{cases}$$

. Для удобства вычислений производная представлена в виде производной от сложной функции. Несложные вычисления дают окончательный результат:

$$\begin{cases} v_x^1 = \dfrac{v_x - V}{1 - \dfrac{v_x V}{c^2}} \\ v_y^1 = v_y\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{v_x V}{c^2}} \\ v_z^1 = v_z\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{v_x V}{c^2}} \end{cases}$$

. Это и есть релятивистский закон сложения скоростей. Ясно, что при v,V << c эти формулы переходят в классические преобразования Галилея, которые приведены в начале параграфа. Покажем теперь, что скорость света будет одинакова во всех ИСО: пусть $v_x = c$, тогда

$v_x^1 = (c - V)/(1 - V/c) = c$; $v_y^1 = 0$; $v_z^1 = 0$.

Модуль скорости в K^1 системе можно найти по стандартной формуле
$v^1 = \sqrt{\left(v_x^1\right)^2 + \left(v_y^1\right)^2 + \left(v_z^1\right)^2}$.

IV.8 Релятивистский импульс.

Законы сохранения, как и другие законы природы, должны соблюдаться во всех ИСО, то есть быть инвариантными по отношению к преобразованиям Лоренца. Покажем, что старое определение импульса $\vec{p} = m\vec{v}$ не дает этого. Рассмотрим абсолютно центральное неупругое соударение двух одинаковых частиц с массой покоя m_0 в двух системах: K^1 (где частицы летят с одинаковыми по модулю скоростями V навстречу друг другу вдоль оси x^1) и K, которая движется со скоростью V в положительном направлении оси x^1. В системе K^1 полный импульс системы из двух частиц равен нулю, как до соударения, так и после него. В системе же K скорости частиц определяются так:

$$v_{1x} = \frac{v_{1x}^1 + V}{1 + \frac{v_{1x}^1 V}{c^2}} = \frac{2V}{1 + \left(\frac{V}{c}\right)^2}, v_{1y} = 0; v_{2x} = \frac{v_{2x}^1 + V}{1 + \frac{v_{2x}^1 V}{c^2}} = 0, v_{2y} = 0$$

. Таким образом, до соударения импульс частиц в системе K равен
$p_x^{ДО} = m_0 \cdot v_{1x} + m \cdot v_{2x} = \dfrac{2m_0 V}{1 + \left(\frac{V}{c}\right)^2}$.

После соударения частицы покоятся в системе K^1, следовательно, в системе K импульс частиц равен $p_x^{ПОСЛЕ} = 2m_0V$. Итак, в системе K закон сохранения *такого* импульса не соблюдается с точностью $(V/c)^2 << 1$. Вывод напрашивается сам собой – импульс нужно определить иначе, так, чтобы выполнялся закон сохранения импульса и новый импульс переходил в старый при малых скоростях движения частиц. Для этого в определение импульса нужно ввести собственное время:

старое определение импульса - $\vec{p} = m\dfrac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v}$

новое определение импульса - $\vec{p} = m_0\dfrac{d\vec{r}}{d\tau} = \dfrac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

В этих формулах m_0 - масса покоя частицы, а τ - ее собственное время.

IV.9. Основное уравнение релятивистской динамики.

Как и следовало ожидать, II закон Ньютона, записанный в виде $m_0\vec{a} = \vec{F}$, не инвариантен к преобразованиям Лоренца (как это было для преобразований Галилея). Однако, этим преобразованиям удовлетворяет уравнение
$\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$,

где $\vec{p} = m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ - новое определение импульса, введенное в СТО. При $\beta \ll 1$ оно переходит во II закон Ньютона. Следует заметить, что в СТО имеются формулы для преобразования всех механических величин, включая силу, при переходе из одной ИСО к другой.

Уравнение динамики в СТО сложнее, чем II закон Ньютона; направление ускорения и сила не всегда совпадают. Но есть два простых случая, когда эти направления совпадают:

1) $\vec{v} \parallel \vec{F}$, тогда в основном уравнении можно убрать вектора и вычислить производную. Тогда получится следующее уравнение:

$$\frac{m_0 a}{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}} = F \quad \text{или} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_0}\left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}} .$$

2) $\vec{v} \perp \vec{F}$. В этом случае проще всего спроектировать основное уравнение на тангенциальное направление (ось τ) - $a_\tau = 0$ и на нормальное направление (ось n) - $m \cdot a_n = F$. Тогда мы получаем уравнение

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_0}\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

IV.10 Кинетическая энергия релятивистской частицы.

Чтобы получить релятивистское выражение для кинетической энергии частицы, будем исходить из того, что работа, совершенная над частицей, равна приращению ее кинетической энергии $dE_k = dA$. Умножим основное уравнение динамики СТО на $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$ - перемещение частицы за время dt под действием силы $\vec{F}$. В результате получаем

$$\vec{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)dt = \vec{F}d\vec{r} = dA .$$

Следовательно, с учетом того, что $\vec{v}d\vec{v} = vdv$

$$dA = dE_k = \frac{m_0 v dv}{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Легко убедиться прямым дифференцированием, что это дифференциал от

$dE_k = d\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$, что после интегрирования дает

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + Const .$$

Кинетическая энергия, по самому своему определению, это энергия движения, поэтому, если v = 0, то и $E_к = 0$. Исходя из этого, находим Const = - $m_0 c^2$. Тогда для кинетической энергии в СТО получаем формулу

$$E_k = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right).$$

Эта формула при $\beta << 1$ переходит в классическую $E_к = mv^2/2$. Для простоты расчетов по проверке можно использовать формулу бинома Ньютона.

IV.11 Связь массы и энергии. Инвариант.

Из формулы $dE_к=dm \cdot c^2$ следует, что приращение кинетической энергии частицы сопровождается пропорциональным приращением ее релятивистской массы. Вместе с тем известно, что при протекании различных процессов в природе одни виды энергии могут преобразовываться в другие. Например, кинетическая энергия сталкивающихся частиц может преобразоваться во внутреннюю энергию образовавшейся частицы. Поэтому естественно ожидать, что масса тела будет возрастать не только при сообщении ему кинетической энергии, но и вообще при *любом* увеличении общего запаса энергии тела независимо от того, за счет какого конкретного вида энергии это увеличение происходит.

Отсюда Эйнштейн пришел к следующему фундаментальному выводу: общая энергия тела (или системы тел), из каких бы видов энергии она ни состояла (кинетической, электрической, химической и т. д.), связана с массой этого тела соотношением

$E = m \cdot c^2$

Эта формула выражает один из наиболее фундаментальных законов природы - закон взаимосвязи (пропорциональности) массы m и полной энергии E тела. Во избежание недоразумений обратим внимание на то, что в полную энергию E не включена потенциальная энергия тела во внешнем поле, если таковое действует на тело.

Соотношение $E = mc^2$ можно записать и в другой форме, если учесть формулу $E_k = (m - m_0)c^2$. Тогда полная энергия тела

$E = m_0c^2 + E_k$

где m_0 - масса покоя тела, E_k - его кинетическая энергия. Отсюда непосредственно следует, что покоящееся тело ($E_k = 0$) также обладает энергией

$E_0 = m_0 \cdot c^2$

Эту энергию называют энергией покоя или собственной энергией.

Мы видим, что масса тела, которая в нерелятивистской механике выступала как мера инертности (во втором; законе Ньютона) или как мера гравитационного действия (в законе всемирного тяготения), теперь выступает в новой функции — как мера *энергосодержания* тела. Даже покоящееся тело, согласно теории относительности обладает запасом энергии — энергией покоя.

Изменение полной энергии тела (системы) сопровождается эквивалентным изменением его массы $\Delta m=\Delta E/c^2$, и наоборот. При обычных макроскопических процессах изменение массы тел оказывается чрезвычайно малым, недоступным для измерений.

Ясно, что как энергия E, так и импульс p частицы имеют различные значения в разных системах отсчета. Оказывается, однако, что существует величина — некоторая комбинация E и p, которая является инвариантной, т е имеет одно и то же значение в разных системах отсчета. Эта величина есть $E^2 - p^2c^2$. Убедимся, что это так. Воспользовавшись формулами $E = mc^2$ и $p = mv$, запишем

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 - m^2v^2c^2 = \frac{m_0c^4}{1-\beta^2}\left[1-\beta^2\right]$$

или после сокращения

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$$

Этот вывод чрезвычайно важен: он позволяет во многих случаях упростить анализ и решение различных вопросов.