

# МАШИНОСТРОЕНИЕ

## ЭНЦИКЛОПЕДИЯ



**МАШИНОСТРОЕНИЕ**  
**ЭНЦИКЛОПЕДИЯ**



# МАШИНОСТРОЕНИЕ

## ЭНЦИКЛОПЕДИЯ В Сорока томах

---

### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**ФРОЛОВ К.В.**

Председатель редакционного совета,  
главный редактор

**КОЛЕСНИКОВ К.С.**

зам. Председателя редакционного совета  
и главного редактора

**ГУСЕНКОВ А.П.**

зам. Председателя редакционного совета  
и главного редактора

### ЧЛЕНЫ СОВЕТА

Авдуевский В.С., Адамов Е.О., Белянин П.Н.,  
Березовский Б.А., Бессонов А.П., Васильев В.В.,  
Глебов И.А., Долбенко Е.Т., Ишлинский А.Ю.,  
Коптев Ю.Н., Кузнецов Н.Д., Михайлов В.Н.,  
Новожилов Г.В., Образцов И.Ф., Панин В.Е.,  
Паничев Н.А., Патон Б.Е., Пугин Н.А., Салтыков Б.Г.,  
Свищев Г.П., Соломенко Н.С., Туполев А.А.,  
Усков М.К., Федосов Е.А., Фокин А.В., Черный Г.Г.,  
Шемякин Е.И.

Раздел I  
ИНЖЕНЕРНЫЕ  
МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ

---

Том I-3. Книга 1  
ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ  
МАШИН  
ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ  
И МАШИН

Редактор-составитель и ответственный редактор  
академик РАН К.С. Колесников

Редакторы тома: В.В. Болотин  
(Устойчивость механических систем),  
В.В. Васильев (Механика композиционных  
материалов и конструкций), В.С. Зарубин  
(Термопрочность), К.С. Колесников  
(Колебания механических систем),  
Н.Н. Малинин, С.А. Шестериков  
(Пластичность и ползучесть),  
Н.А. Махутов (Прочность и разрушение),  
В.А. Постнов (Принципы и основные уравнения  
механики деформируемого твердого тела)



ББК 34. 44  
М 38  
УДК 621. 01/. 03

Авторы: К.С. Колесников, Д.А. Александров, В.К. Асташев, Н.В. Баничук, В.В. Болотин, Ф.Я. Булавс, В.В. Васильев, А.В. Голубков, А.Г. Горшков, М.Р. Гурвич, В.В. Гурецкий, В.Л. Данилов, Б.А. Друянов, Ю.А. Еремин, Ю.Н. Ермаков, Н.И. Жинжер, В.С. Зарубин, П.А. Зиновьев, В.Г. Зубчанинов, М.М. Ильин, А.А. Крулиньш, В.Л. Крупенин, Г.Н. Кувыркин, Л.М. Литвин, А.З. Локшин, Н.Н. Малинин, Н.А. Махутов, Е.М. Морозов, В.Э. Наумов, Н.Г. Паничкин, Г.Я. Пановко, Я.Г. Пановко, Э.Л. Позняк, В.А. Постнов, В.Д. Потапов, В.Д. Протасов, И.Г. Радиньш, К.И. Романов, Ю.П. Самарин, В.Е. Самодаев, В.А. Светлицкий, А.А. Скудра, А.М. Скудра, Ю.М. Темис, Г.М. Хажинский, К.Ш. Ходжаев, А.Г. Цицин, С.А. Шестериков, М.А. Юмашева

Рецензенты: М.С. Галкин, В.Д. Ключников, В.Д. Кубенко, В.Н. Кукуджанов, В.В. Панасюк, А.Ф. Селихов, А.П. Филин

Бюро редакционного совета: К.С. Колесников, Б.И. Антонов, П.Н. Белянин, А.П. Бессонов, В.В. Васильев, А.П. Гусенков, Е.Т. Долбенко, И.Н. Жесткова, М.К. Усков, Н.Н. Боброва

Ученый секретарь тома В.И. Дронг

М 38 **Машиностроение. Энциклопедия / Ред. совет: К.В. Фролов (пред.) и др.-М.: Машиностроение, Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. Т. 1-3. В 2-х кн. Кн. 1 / К.С. Колесников, Д.А. Александров, В.К. Асташев и др.; Под общ. ред. К.С. Колесникова. 1994. - 534 с., ил. ISBN 5-217-01949-2 ISBN 5-217-01952-2 (Т. 1-3)**

Изложены теория деформаций и напряжений, вариационные принципы, критерии и теории пластичности, теория ползучести, методы решения задач пластичности и ползучести; прочность и разрушение, термопрочность; механика композиционных материалов и конструкций (модели, прочность и деформативность); колебания механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами, включая аэрогидромеханические колебания, параметрические и автоколебания, нелинейные колебания, удар, принципы линейной и нелинейной виброизоляции; устойчивость упругих и упругопластических механических систем.

М 2702000000 – 082  
038(01) – 94 **Без объявл.**

ББК 34. 44

ISBN 5-217-01949-2

ISBN 5-217-01952-2 (Т. 1-3)

© Издательство “Машиностроение”, 1994

© Редакционный совет энциклопедии  
“Машиностроение”, 1994

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> . . . . .	15	<b>Глава 1.2. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ</b>	26
<b>ЧАСТЬ I. ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ МАШИН</b> . . . . .	17	1.2.1. Внешние силы. Напряжения (В.А.Постнов) . . . . .	26
<b>Раздел 1. ПРИНЦИПЫ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА</b> . . . . .	17	1.2.2. Уравнения равновесия элементарного тетраэдра, выделенного из деформированного тела (А.З.Локшин) . . . . .	29
<b>Глава 1.1. ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ (В.А.Постнов)</b> . . . . .	18	1.2.3. Преобразование компонентов напряжений при переходе от одних координатных осей к другим (А.З.Локшин) . . . . .	29
1.1.1. Перемещения и компоненты деформаций . . . . .	18	1.2.4. Уравнения равновесия элементарного параллелепипеда, выделенного из деформированного тела (А.З.Локшин) . . . . .	29
1.1.2. Определение положения линейного элемента в деформированном состоянии тела . . . . .	20	1.2.5. Уравнения равновесия элементарных тетраэдра и параллелепипеда в декартовых координатах, определяющих положение точек тела до деформации (В.А.Постнов) . . . . .	30
1.1.3. Преобразование компонентов деформации при переходе от одних координатных осей к другим. Главные деформации. Тензор деформации и его инварианты . . . . .	21	1.2.6. Уравнения равновесия элемента тела при малых удлинениях и сдвигах (В.А.Постнов) . . . . .	31
1.1.4. Упрощения выражений для компонентов деформации, возможные при малых удлинениях, углах сдвига и углах поворота . . . . .	22	1.2.7. Уравнения равновесия элемента тела при малых удлинениях, сдвигах и углах поворота (А.З.Локшин) . . . . .	32
1.1.5. Девиатор деформации. Интенсивность деформации . . . . .	23	1.2.8. Линейные уравнения элемента тела (А.З.Локшин) . . . . .	32
1.1.6. Уравнения совместности деформаций . . . . .	23	1.2.9. Граничные условия (В.А.Постнов) . . . . .	32
1.1.7. Определение перемещений по заданным компонентам деформации . . . . .	24	1.2.10. Главные значения и главные направления тензора напряжения в линейной теории упругости (А.З.Локшин) . . . . .	32
1.1.8. Относительное изменение объема . . . . .	25		
1.1.9. Основные зависимости теории деформаций в криволинейных координатах . . . . .	25		

1.2.11. Девиатор напряжения. Интенсивность напряжений (А.З.Локшин) . . . . .	33	1.4.5. Метод Бубнова-Галеркина	47
1.2.12. Дифференциальные уравнения равновесия объемного элемента в ортогональных криволинейных координатах (А.З.Локшин) .	34	1.4.6. Метод Грэффца . . . . .	49
<b>Глава 1.3. СВЯЗЬ КОМПОНЕНТОВ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ДЛЯ УПРУГОГО ТЕЛА . . . . .</b>	<b>35</b>	1.4.7. Метод взвешенных невязок . . . . .	49
1.3.1. Термодинамика упругих деформаций (В.А.Постнов)	35	1.4.8. Принцип возможных напряжений . . . . .	50
1.3.2. Линейно-упругий материал. Обобщенный закон Гука (А.З.Локшин) . . . . .	36	1.4.9. Смешанные вариационные принципы. Функционалы Васидзу и Рейсснера-Хеллингера . . . . .	51
1.3.3. Частные модели линейно-упругого тела (А.З.Локшин)	36	1.4.10. Вариационные принципы нелинейной теории упругости . . . . .	53
1.3.4. Классификация задач механики твердого деформируемого тела (А.З.Локшин).	38	<b>Глава 1.5. МЕТОДЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МКЭ) И ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МГЭ) (В.А.Постнов)</b>	<b>54</b>
1.3.5. Дифференциальные уравнения линейной теории упругости в перемещениях (А.З.Локшин) . . . . .	38	1.5.1. Основные операции в процедуре метода и его характерные черты . . . . .	55
1.3.6. Дифференциальные уравнения линейной теории упругости в напряжениях для изотропного тела (А.З.Локшин) . . . . .	39	1.5.2. Интерполирующие полиномы . . . . .	58
1.3.7. Основные зависимости геометрически линейной теории упругости (А.З.Локшин) . . . . .	40	1.5.3. Использование вариационных принципов для построения основных зависимостей метода конечных элементов . . . . .	63
<b>Глава 1.4. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ, ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА (В.А.Постнов) .</b>	<b>41</b>	1.5.4. Метод граничных элементов . . . . .	65
1.4.1. Общие теоремы теории упругости и строительной механики . . . . .	41	<b>Глава 1.6. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА (А.З.Локшин) . . . . .</b>	<b>67</b>
1.4.2. Принцип возможных перемещений . . . . .	43	1.6.1. Плоская деформация . . . . .	67
1.4.3. Метод Ритца . . . . .	44	1.6.2. Основные зависимости для плоской деформации в декартовых координатах . . . . .	68
1.4.4. Обобщенный метод Бубнова-Галеркина . . . . .	46	1.6.3. Основные зависимости для плоской деформации в полярных координатах . . . . .	69
		1.6.4. Плоское напряженное состояние (обобщенное плоское напряженное состояние) . . . . .	71
		1.6.5. Функция напряжения в декартовых координатах . . . . .	72
		1.6.6. Функция напряжения в полярных координатах . . . . .	73
		1.6.7. Граничные условия для функции напряжения в декартовых координатах . . . . .	74

1.6.8. Некоторые решения плоской задачи в декартовых координатах . . . . .	75	2.2.6. Определяющие соотношения уплотняемых пластических тел (Б.А.Друянов) . . . . .	93
1.6.9. Редукционные коэффициенты поясков широкополых балок . . . . .	77	Глава 2.3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ . . . . .	95
1.6.10. Решение в полярных координатах . . . . .	77	2.3.1. Вариационные принципы в теории малых упругопластических деформаций (К.И.Романов) . . . . .	95
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .	82	2.3.2. Методы последовательных приближений (К.И.Романов) . . . . .	96
<b>Раздел 2. ПЛАСТИЧНОСТЬ И ПОЛЗУЧЕСТЬ . . . . .</b>	<b>84</b>	2.3.3. Метод конечных элементов (К.И.Романов) . . . . .	99
Глава 2.1. КРИТЕРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ . . . . .	84	2.3.4. Метод граничных элементов (В.Л.Данилов) . . . . .	102
2.1.1. Общий вид критерия пластичности (Н.Н.Малинин) . . . . .	84	Глава 2.4. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ (В.Л.Данилов) . . . . .	105
2.1.2. Критерии пластичности для изотропного тела, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию (Н.Н.Малинин) . . . . .	84	2.4.1. Теория идеальной пластичности . . . . .	105
2.1.3. Критерии пластичности для изотропного тела, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию (Н.Н.Малинин) . . . . .	86	2.4.2. Статическая и кинематическая теоремы . . . . .	105
2.1.4. Критерий пластичности для ортотропного тела (Н.Н.Малинин) . . . . .	86	2.4.3. Приспособляемость . . . . .	106
2.1.5. Критерии пластичности для уплотняемых тел (Б.А.Друянов) . . . . .	87	2.4.4. Теория плоской деформации . . . . .	107
Глава 2.2. ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ . . . . .	88	2.4.5. Теория плоского напряженного состояния . . . . .	108
2.2.1. Пластический потенциал и ассоциированный закон течения (В.Л.Данилов) . . . . .	88	Глава 2.5. ПОЛЗУЧЕСТЬ ПРИ ОДНООСНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ (Н.Н.Малинин) . . . . .	109
2.2.2. Теории пластичности изотропного упрочнения (В.Л.Данилов) . . . . .	89	2.5.1. Ползучесть и релаксация напряжений . . . . .	109
2.2.3. Теории пластичности анизотропного упрочнения (В.Л.Данилов) . . . . .	90	2.5.2. Основные зависимости процесса ползучести при одноосном напряженном состоянии . . . . .	110
2.2.4. Теория упругопластических процессов (В.Л.Данилов) . . . . .	90	Глава 2.6. ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ . . . . .	111
2.2.5. Теория пластичности упрочняющегося ортотропного тела (В.Л.Данилов) . . . . .	92	2.6.1. Простейшие теории (М.А.Юмашева) . . . . .	111
		2.6.2. Уравнение состояния со структурными параметрами. Кинетические уравнения (М.А.Юмашева) . . . . .	114
		2.6.3. Теория ползучести с анизотропным упрочнением (Г.М.Хажинский) . . . . .	116

2.6.4. Общий метод разделения деформации в теории ползучести (Ю.П. Самарин, С.А. Шестериков) . . . . .	117	3.1.2. Влияние конструкторско-технологических и эксплуатационных факторов на параметры диаграмм деформирования . . . . .	131
<b>Глава 2.7. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ НА СЛУЧАЙ НЕОДНООСНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ . . . . .</b>	<b>119</b>	3.1.3. Методы экспериментального определения сопротивления деформированию . . . . .	135
2.7.1. Обобщение теорий с изотропным упрочнением (Ю.П. Самарин, С.А. Шестериков) . . . . .	119	<b>Глава 3.2. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛА РАЗРУШЕНИЮ (Н.А. Махутов) . . . . .</b>	<b>135</b>
2.7.2. Обобщение теории с анизотропным упрочнением (Г.М. Хажинский) . . . . .	120	3.2.1. Силовые, деформационные и энергетические критерии разрушения . . . . .	135
2.7.3. Определение времени разрушения (С.А. Шестериков) . . . . .	121	3.2.2. Сопротивление кратковременному, длительному, динамическому и циклическому нагружениям . . . . .	137
<b>Глава 2.8. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ И УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ . . . . .</b>	<b>122</b>	3.2.3. Методы экспериментального определения характеристик разрушения . . . . .	142
2.8.1. Неустановившаяся и установившаяся ползучесть (С.А. Шестериков) . . . . .	122	<b>Глава 3.3. МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ (Е.М. Морозов) . . . . .</b>	<b>142</b>
2.8.2. Методы решения задач установившейся ползучести (К.И. Романов) . . . . .	123	3.3.1. Напряженно-деформированное состояние у вершины трещины и критерии линейной механики разрушения . . . . .	142
2.8.3. Методы решения задач неустановившейся ползучести (К.И. Романов) . . . . .	124	3.3.2. Критерии разрушения при наличии пластических зон у трещин . . . . .	158
2.8.4. Обобщенные модели в расчетах нестационарно нагруженных конструкций (Ю.А. Еремин) . . . . .	125	3.3.3. Экспериментальное определение характеристик трещиностойкости . . . . .	160
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .</b>	<b>127</b>	<b>Глава 3.4. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ЗАПАСЫ ПРОЧНОСТИ . . . . .</b>	<b>164</b>
<b>Раздел 3. ПРОЧНОСТЬ И РАЗРУШЕНИЕ . . . . .</b>	<b>129</b>	3.4.1. Запасы прочности по номинальным напряжениям (Н.А. Махутов) . . . . .	164
<b>Глава 3.1. СОПРОТИВЛЕНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЮ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ (Н.А. Махутов) . . . . .</b>	<b>129</b>	3.4.2. Расчеты прочности по местным напряжениям и деформациям (Н.А. Махутов) . . . . .	165
3.1.1. Диаграммы деформирования и методы их аппроксимации . . . . .	129	3.4.3. Выбор коэффициента запаса прочности по пределу трещиностойкости (Е.М. Морозов) . . . . .	166
		3.4.4. Расчеты на трещиностойкость (Е.М. Морозов) . . . . .	169

3.4.5. Расчетно - экспериментальное обоснование запоров прочности ( <i>Н.А.Махутов</i> ) . . . . .	172	4.3.1. Типовые расчетные схемы и постановка инженерных задач теплопроводности ( <i>В.С.Зарубин</i> ) . . . . .	195
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> . . . . .	173	4.3.2. Нагрев и охлаждение конструкции с однородной по объему температурой ( <i>В.С.Зарубин</i> ) . . . . .	201
<b>Раздел 4. ТЕРМОПРОЧНОСТЬ</b> . . . . .	174	4.3.3. Аналитические методы решения задач теплопроводности ( <i>В.С.Зарубин</i> ) . . . . .	202
<b>Глава 4.1. ФАКТОРЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ РАБОТОСПОСОБНОСТЬ ТЕПЛОНАПРЯЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ</b> . . . . .	174	4.3.4. Численные методы решения задач теплопроводности ( <i>В.С.Зарубин, А.Г.Цицин</i> ) . . . . .	207
4.1.1. Особенности теплофизических и механических свойств конструкционных материалов ( <i>В.С.Зарубин</i> ) . . . . .	175	<b>Глава 4.4. ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ</b> . . . . .	210
4.1.2. О критериях разрушения материала теплонапряженных конструкций ( <i>Д.А.Александров, В.С.Зарубин</i> ) . . . . .	176	4.4.1. Типовые расчетные схемы и постановка инженерных задач по определению термоупругих напряжений ( <i>В.С.Зарубин</i> ) . . . . .	211
<b>Глава 4.2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕРМОМЕХАНИКИ</b> . . . . .	180	4.4.2. Аналитические методы решения задач несвязанной термоупругости ( <i>Г.Н.Кувыркин</i> ) . . . . .	212
4.2.1. Соотношения термодинамики необратимых процессов неизотермического деформирования материала с внутренними параметрами состояния ( <i>Г.Н.Кувыркин</i> ) . . . . .	180	4.4.3. Численные методы расчета термоупругих напряжений в элементах конструкций ( <i>Г.Н.Кувыркина</i> ) . . . . .	215
4.2.2. Основные уравнения термоупругости, термовязкоупругости и теплопроводности ( <i>Г.Н.Кувыркин</i> ) . . . . .	185	<b>Глава 4.5. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ И ТЕРМОПОЛЗУЧЕСТИ</b> . . . . .	226
4.2.3. Динамические задачи термовязкоупругости ( <i>Г.Н.Кувыркин, В.Э.Наумов</i> ) . . . . .	187	4.5.1. Деформационная теория термопластичности изотропных и анизотропных материалов ( <i>Г.Н.Кувыркин, Ю.М.Темис</i> ) . . . . .	226
4.2.4. Задачи термомеханики тел переменного состава ( <i>В.Э.Наумов</i> ) . . . . .	190	4.5.2. Теория неизотермического пластического течения с изотропным и анизотропным упрочнением ( <i>Ю.М.Темис</i> ) . . . . .	227
4.2.5. Вариационные формулировки задач термовязкоупругости ( <i>Н.Г.Паничкин</i> ) . . . . .	192	4.5.3. Прикладные методы решения задач термопластичности ( <i>Ю.М.Темис</i> ) . . . . .	231
4.2.6. Диссипация энергии при необратимых термомеханических процессах ( <i>Г.Н.Кувыркин, В.Э.Наумов</i> ) . . . . .	194	4.5.4. Структурные модели термопластичности и термоползучести ( <i>В.С.Зарубин</i> ) . . . . .	236
<b>Глава 4.3. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ</b> . . . . .	195	4.5.5. Модели неупругого поведения конструкционного материала в неизотермических условиях ( <i>В.С.Зарубин</i> ) . . . . .	242



4.5.6. Эффект памяти формы ( <i>В.Э.Наумов</i> ) . . . . .	247	5.1.7. Диссипативные свойства монослоя ( <i>П.А.Зиновьев</i> ) . .	304
<b>Глава 4.6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОНАПРЯЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ЭВМ . . . . .</b>	<b>250</b>	<b>Глава 5.2. МЕХАНИКА СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ . . . . .</b>	<b>306</b>
4.6.1. Методика математического моделирования теплонапряженных конструкций ( <i>В.С.Зарубин</i> ) . . . . .	250	5.2.1. Термоупругие свойства слоистых композитов ( <i>В.В.Васильев</i> ) . . . . .	306
4.6.2. Шаговые и итерационные алгоритмы и принципы построения программных комплексов для математического моделирования теплонапряженных конструкций ( <i>Ю.М.Темис</i> ) . . . . .	255	5.2.2. Диссипативные свойства слоистых композитов ( <i>Ю.Н.Ермаков</i> ) . . . . .	310
4.6.3. Моделирование процессов неизотермического упругопластического деформирования в деталях энерго-силовых установок ( <i>Ю.М.Темис</i> ) . . . . .	262	5.2.3. Свойства конструкционных композиционных материалов ( <i>В.Д.Протасов</i> ) . .	311
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .</b>	<b>269</b>	<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .</b>	<b>314</b>
<b>Раздел 5. МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ (Редакторы: <i>В.В.Васильев, А.А.Смердов</i>) . . . . .</b>	<b>273</b>	<b>Раздел 6. КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ . . . . .</b>	<b>316</b>
<b>Глава 5.1. МЕХАНИКА АРМИРОВАННОГО МОНОСЛОЯ . . . . .</b>	<b>274</b>	<b>Глава 6.1. КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ . . . . .</b>	<b>316</b>
5.1.1. Макромеханика монослоя ( <i>А.А.Скудра</i> ) . . . . .	274	6.1.1. Дифференциальные уравнения линейных систем с конечным числом степеней свободы ( <i>В.Е.Самодеев</i> ) . . . . .	316
5.1.2. Микромеханика упругих свойств монослоя ( <i>И.Г.Радиньш</i> ) . . . . .	278	6.1.2. Колебания линейной системы с одной степенью свободы ( <i>В.Е.Самодеев</i> ) . .	319
5.1.3. Микромеханика упругих свойств пластика, армированного тканью ( <i>А.А.Круклиньш</i> ) . . . . .	283	6.1.3. Колебания линейной системы с конечным числом степеней свободы без учета сил сопротивления ( <i>М.М.Ильин</i> ) . . . . .	322
5.1.4. Микромеханика ползучести монослоя ( <i>Ф.Я.Булавс</i> ) . . . . .	288	6.1.4. Колебания линейной диссипативной системы с конечным числом степеней свободы ( <i>М.М.Ильин</i> ) . . . . .	325
5.1.5. Микромеханика кратковременной прочности монослоя ( <i>А.М.Скудра</i> ) . . . . .	291	6.1.5. Динамический гаситель колебаний ( <i>М.М.Ильин</i> ) . .	327
5.1.6. Микромеханика длительной прочности ( <i>М.Р.Гурвич</i> ) . . . . .	301	<b>Глава 6.2. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ (<i>К.С.Колесников</i>) . . . . .</b>	<b>329</b>
		6.2.1. Дифференциальные уравнения линейных колебаний упругих систем с распределенными параметрами . . . . .	329

6.2.2. Определение частот и форм свободных колебаний . . . . .	334	6.5.2. Характеристики нелинейных сил (Я.Г.Пановко) . . .	362
6.2.3. Свойства частот и форм свободных колебаний . . . .	337	6.5.3. Свободные колебания систем с нелинейной восстанавливающей силой (Я.Г.Пановко) . . . . .	365
6.2.4. Вынужденные установившиеся колебания недиссипативных упругих систем .	338	6.5.4. Свободные затухающие колебания систем с нелинейным трением при линейной упругой характеристике (Г.Я.Пановко) . . .	369
6.2.5. Вынужденные колебания диссипативных упругих систем . . . . .	340	6.5.5. Вынужденные колебания (Г.Я.Пановко) . . . . .	370
Глава 6.3. <b>КОЛЕБАНИЯ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ</b> (К.С.Колесников) . . . . .	342	6.5.6. Нелинейные колебания упруго подвешенных твердых тел (Л.М.Литвин) . . . .	371
6.3.1. Постановка задачи . . . . .	342	6.5.7. Вынужденные нелинейные колебания роторов (Э.Л.Позняк) . . . . .	373
6.3.2. Плоские поперечные колебания жесткого бака с жидкостью, имеющей свободную поверхность . . . . .	343	6.5.8. Фрикционные автоколебания (Я.Г.Пановко) . . . . .	377
6.3.3. Вариационный метод решения задач о свободных колебаниях жидкости . . . .	347	6.5.9. Виброударные системы (В.Л.Крупенин, В.К.Асташев) . . . . .	381
6.3.4. Колебания упругого бака с несжимаемой жидкостью .	349	6.5.10. Взаимодействие возбудителя колебаний с колебательной системой (К.Ш.Ходжаев) . . . . .	389
6.3.5. Одномерные колебания сжимаемой жидкости в жесткой прямой трубе . . .	350	Глава 6.6. <b>СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ</b> (В.А.Светлицкий) . . .	393
6.3.6. Колебания сжимаемой жидкости в прямой упругой трубе . . . . .	352	6.6.1. Случайные процессы и их характеристики . . . . .	393
Глава 6.4. <b>АВТОКОЛЕБАНИЯ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ</b> (К.С.Колесников) . . . . .	354	6.6.2. Корреляционные методы исследования случайных колебаний линейных систем . . . . .	398
6.4.1. Особенности автоколебаний . . . . .	354	Глава 6.7. <b>УДАР</b> . . . . .	404
6.4.2. Релаксационные автоколебательные системы . . . .	357	6.7.1. Основные модельные представления теории механического удара (Я.Г.Пановко) . . . . .	404
6.4.3. Поведение автоколебательных систем при внешнем гармоническом воздействии . . . . .	357	6.7.2. Действие удара на абсолютно твердое тело (Я.Г.Пановко) . . . . .	407
6.4.4. Автоколебательные системы с запаздыванием . . . .	358	6.7.3. Решение задач о соударениях твердых тел с помощью коэффициента восстановления (Я.Г.Пановко) . . . . .	408
6.4.5. Параметрическое возбуждение колебаний . . . . .	359	6.7.4. Соударение твердых тел с линейными амортизаторами (Я.Г.Пановко) . . . . .	409
Глава 6.5. <b>НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В МАШИНАХ</b> . . . .	360		
6.5.1. Типы нелинейностей (Я.Г.Пановко) . . . . .	360		

6.7.5. Нелинейная упругая модель Герца (Я.Г.Пановко) . . . . .	409	6.9.2. Нелинейные явления в виброизолированной машине . . . . .	440
6.7.6. Упругопластические модели (Я.Г.Пановко) . . . . .	410	6.9.3. Эффект Зоммерфельда при разбеге виброизолированной машины . . . . .	444
6.7.7. Продольный удар упругих стержней (Я.Г.Пановко) . . . . .	411	Глава 6.10. <b>ВИБРОИЗОЛЯЦИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ МЕХАНИЗМОВ</b> (В.В.Гурецкий) . . . . .	446
6.7.8. Удар стержней о деформируемые основания (А.Г.Горшков) . . . . .	412	6.10.1. Механические характеристики упругих муфт . . . . .	446
6.7.9. Гидравлический удар (А.Г.Горшков) . . . . .	413	6.10.2. Эффективность упругой муфты в машине с идеальным двигателем . . . . .	447
6.7.10. Поперечный удар по упругой балке (А.Г.Горшков) . . . . .	414	6.10.3. Эффективность упругой муфты в двухмассной системе . . . . .	451
6.7.11. Ударозащитные системы с одной степенью свободы (В.В.Гурецкий) . . . . .	414	<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> . . . . .	452
6.7.12. Удар в пространственной системе виброзащиты (В.В.Гурецкий) . . . . .	419	<b>Раздел 7. УСТОЙЧИВОСТЬ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ</b> . . . . .	455
Глава 6.8. <b>ПРИНЦИПЫ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ МАШИН</b> (В.В.Гурецкий) . . . . .	422	Глава 7.1. <b>ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ</b> (В.В.Болотин, Н.И.Жинжер) . . . . .	455
6.8.1. Машина как источник внешней виброактивности . . . . .	422	7.1.1. Устойчивость . . . . .	455
6.8.2. Принципы виброизоляции . . . . .	422	7.1.2. Постановка задачи . . . . .	456
6.8.3. Статический расчет упругого подвеса . . . . .	423	7.1.3. Устойчивость по Ляпунову и родственные понятия . . . . .	457
6.8.4. Колебания машины на виброизоляторах . . . . .	428	7.1.4. Устойчивость по первому приближению . . . . .	459
6.8.5. Методы звукоизоляции машин . . . . .	431	7.1.5. Устойчивость распределенных систем . . . . .	460
6.8.6. Динамические модели виброзащитных систем, содержащих подвижные массы . . . . .	432	Глава 7.2. <b>УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ</b> (В.В.Болотин, Н.И.Жинжер) . . . . .	462
6.8.7. Определение динамических характеристик упругой машины . . . . .	434	7.2.1. Общая теория . . . . .	462
6.8.8. Эффективность виброизоляции . . . . .	436	7.2.2. Линейные системы с постоянными параметрами . . . . .	463
6.8.9. Расчет одномерных систем . . . . .	436	7.2.3. Критерий Рауса-Гурвица и родственные алгебраические критерии . . . . .	464
Глава 6.9. <b>НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ МАШИН</b> (В.В.Гурецкий) . . . . .	439	7.2.4. Критерий Зубова . . . . .	466
6.9.1. Нелинейные характеристики виброизолирующих систем . . . . .	439	7.2.5. Критерий Коши-Михайлова-Найквиста . . . . .	467
		7.2.6. Области устойчивости в пространстве параметров . . . . .	468

7.2.7. Линейные системы с периодическими коэффициентами . . . . .	470	7.5.1. Концепция устойчивости неупругих систем . . . . .	495
Глава 7.3. <b>УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ</b> ( <i>В.В.Болотин, А.В.Голубков, Н.И.Жинжер</i> ) . . . . .	473	7.5.2. Бифуркация форм равновесия упругопластических стержней . . . . .	497
7.3.1. Устойчивость равновесия консервативных систем . . . . .	473	7.5.3. Выпучивание упругопластических стержней . . . . .	499
7.3.2. Точки ветвления форм равновесия . . . . .	475	7.5.4. Выпучивание вязкоупругих стержней . . . . .	500
7.3.3. Влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость . . . . .	477	7.5.5. Выпучивание вязкопластических стержней . . . . .	501
7.3.4. Устойчивость равновесия консервативных распределенных систем . . . . .	477	7.5.6. Учет геометрической нелинейности . . . . .	502
7.3.5. Устойчивость при многопараметрическом нагружении . . . . .	479	Глава 7.6. <b>УСТОЙЧИВОСТЬ РОТОРОВ</b> ( <i>Э.Л.Позняк</i> ) . . . . .	502
7.3.6. Устойчивость равновесия неконсервативных систем . . . . .	480	7.6.1. Постановка задач . . . . .	502
7.3.7. Эффекты дестабилизации равновесия вследствие трения . . . . .	481	7.6.2. Силы, возникающие при взаимодействии ротора со средой . . . . .	503
7.3.8. Параметрическая стабилизация равновесия . . . . .	483	7.6.3. Устойчивость при действии циркуляционных сил . . . . .	504
7.3.9. Устойчивость систем с односторонними связями . . . . .	484	7.6.4. Закритическое поведение ротора . . . . .	506
Глава 7.4. <b>ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ</b> ( <i>В.В.Болотин, А.В.Голубков, Н.И.Жинжер</i> ) . . . . .	486	7.6.5. Устойчивость роторов, обладающих анизотропными свойствами . . . . .	508
7.4.1. Прямое вычисление характеристических показателей . . . . .	486	Глава 7.7. <b>УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ</b> ( <i>А.Г.Горшков</i> ) . . . . .	510
7.4.2. Численная реализация метода Зубова . . . . .	489	7.7.1. Критерии устойчивости при ударных нагрузках . . . . .	510
7.4.3. Методы численного построения областей неустойчивости . . . . .	491	7.7.2. Формы потери устойчивости при ударных нагрузках . . . . .	511
7.4.4. Метод матриц монодромии . . . . .	492	7.7.3. Поведение механических систем с начальными несовершенствами . . . . .	512
7.4.5. Метод обобщенных определителей Хилла . . . . .	493	7.7.4. Влияние волновых эффектов на устойчивость . . . . .	513
7.4.6. Метод вычислительного эксперимента . . . . .	494	7.7.5. Взаимодействие механических систем с акустическими волнами . . . . .	513
Глава 7.5. <b>УСТОЙЧИВОСТЬ НЕУПРУГИХ СИСТЕМ</b> ( <i>В.Г.Зубчанинов, В.Д.Потанов, С.А.Шестериков</i> ) . . . . .	495	7.7.6. Взаимодействие механических систем с ударными волнами . . . . .	515

Глава 7.8. <b>УСТОЙЧИВОСТЬ АЭРО- И ГИДРОУПРУГИХ СИСТЕМ</b> ( <i>Н.В.Баничук</i> ) . . . . .	516	Глава 7.9. <b>УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ</b> ( <i>В.В.Болотин</i> ) . . . . .	525
7.8.1. Задачи устойчивости в теории аэро- и гидроупругости . . . . .	516	7.9.1. Связь между понятиями устойчивости и вероятности . . . . .	525
7.8.2. Вычисление аэро- и гидродинамических сил . . . . .	517	7.9.2. Влияние случайных возмущений на равновесие консервативных систем . . . . .	525
7.8.3. Задача аэро- и гидроупругости для стержней . . . . .	519	7.9.3. Распределение вероятностей для критических параметров . . . . .	527
7.8.4. Устойчивость трубопроводов . . . . .	521	7.9.4. Вероятность опасного состояния . . . . .	528
7.8.5. Устойчивость плохообтекаемых тел в потоке . . . . .	521	7.9.5. Поведение механических систем при случайных воздействиях, зависящих от времени . . . . .	528
7.8.6. Флаттер плоских панелей . . . . .	522	7.9.6. Определения стохастической устойчивости . . . . .	529
7.8.7. Флаттер криволинейных панелей . . . . .	523	7.9.7. Устойчивость при стохастическом параметрическом возбуждении . . . . .	530
7.8.8. Послекритическое поведение аэроупругих систем . . . . .	523	<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> . . . . .	531
7.8.9. Эффекты дестабилизации аэро- и гидроупругих систем . . . . .	524		

## ВВЕДЕНИЕ

Качество, безопасность и надежность машин и конструкций в значительной мере определяются степенью совершенства их расчетов на динамическую прочность. Школа российских ученых по праву занимает ведущее место в мире в этой области.

В данном томе обобщены последние мировые достижения в современной теории и методах расчета деталей и узлов машин. В рамках принятых гипотез и моделей - это точные методы расчета динамических и тепловых нагрузок, напряженно-деформированного состояния, статической и динамической устойчивости. В качестве расчетных классических моделей рассмотрены системы с распределенными параметрами применительно к моделям стержней, пластин, оболочек и др.

Поскольку реальные машины и конструкции наделены разнообразными физическими свойствами и имеют всякого рода несовершенства (зазоры в сочленениях, трение, гистерезисные свойства, сложная геометрическая форма деталей и др.), не всегда поддающиеся точному теоретическому описанию, основным вопросом является выбор расчетной схемы, т.е. расчетной модели с заданным числом параметров, которое не охватывает все множество свойств реального объекта, но заключает в себе его существенное, главное. Разработка расчетной модели в значительной мере определяет совершенство расчетов. Схематизация, выбор модели объекта совершенно необходимы, так как решение задачи с полным учетом всех свойств реального объекта осуществить принципиально невозможно.

Для расчета приходится обосновывать не только модель реальной конструкции: формы деталей, число степеней свободы, характер внешних и внутренних связей и т.д., приходится наделять определенными свойствами и сами твердые тела и рабочие жидкости. Причем, свойства, которыми наделяется модель, зависят от действующих нагрузок и целей расчета. Например, для задач статики, кроме особых случаев, нет смысла учитывать вязкость жидкости и вязкость деформируемого твердого тела. В задачах гидродинамики можно не учитывать сжимаемость жидкости, если скорость ее движения значительно меньше скорости звука ( $M \ll 1$ ). При вынужденных колебаниях системы с малым сопротивлением можно не учитывать силы сопро-

тивления и результат будет почти точным, если частота  $\omega$  изменения внешней силы значительно меньше частоты свободных колебаний  $p$ ; но это решение будет совершенно неверным при резонансе, когда  $p = \omega$ .

При расчетах на прочность схематизируют свойства материала, из которого изготавливаются детали машин и конструкций. Материал рассматривается как однородная сплошная среда, которая наделяется свойствами упругости, пластичности, ползучести; сплошную среду принимают изотропной или анизотропной, в некоторых случаях рассматривают очаги концентрации напряжений, возникновение и развитие трещин. Геометрические формы реальных объектов приводятся, как правило, к схеме бруса, пластины или оболочки.

Для решения задач динамики важным является выбор числа степеней свободы и обобщенных координат, так как, строго говоря, мы всегда имеем дело с системой, обладающей бесконечным числом степеней свободы. Для одной и той же системы может быть предложено несколько моделей в зависимости от начальных условий, требуемой точности, характера действующих сил и задач исследования.

Сложность изучаемой механической системы в частности, при исследовании машинных конструкций, обуславливается очень часто не только числом степеней свободы, но и тем, в какой мере отдельные элементы могут интерпретироваться как стержни, балки, пластины и т.п. стандартные элементы.

Выбор, обоснование модели является важнейшей частью творческой деятельности инженера. Методы расчета можно найти в книгах, выбор моделей объекта всецело основан на опыте, интуиции и здравом смысле. Инженер должен уметь оценивать полученный из расчета результат, его приложимость к реальной конструкции. Это можно сделать сравнением модели с конструкцией: т.е. насколько избранная модель адекватно отражает свойства конструкции. Иногда расчет надо провести по нескольким моделям и дать оценку результатам с разных сторон. Однако исчерпывающий ответ можно получить только из сравнения результатов расчета, эксперимента и опыта.

Уметь рассчитать динамические и тепловые нагрузки, определить напряженно-деформиро-



ванное состояние, статическую и динамическую устойчивость объектов машиностроения, транспортной, горной и строительной техники, экспериментально исследовать механическое состояние машины и отдельных ее деталей и должным образом толковать результаты наблюдений - необходимое качество современного квалифицированного инженера-механика.

Том рассчитан на широкий круг читателей. В основном, однако, он предназначен для инженеров, работающих в области создания новой техники и технологии.

В первом разделе тома даются принципы и основные уравнения механики упругого деформируемого твердого тела: теории деформаций и напряжений, дифференциальные уравнения равновесия, связь между компонентами напряжения и деформации, общие теоремы теории упругости и строительной механики, вариационные принципы и их использование для решения задач механики деформируемого твердого тела, методы конечных и граничных элементов.

Второй раздел посвящен методам механики деформируемого твердого тела, обладающего свойствами пластичности и ползучести: критерии и теории пластичности, теория предельного состояния, теория ползучести при одноосном напряженном состоянии и ее обобщение на одноосное напряженное состояние, методы решения задач теории пластичности.

В отличие от методов сопротивления материалов в третьем разделе рассмотрены новые, более эффективные подходы к оценке прочности и разрушения. Разрушение материала здесь рассматривается как происходящий во времени процесс при кратковременном, длительном, динамическом и циклическом нагружении. Изложены теория напряженно-деформированного состояния и критерии разрушения тел с трещинами, расчеты на прочность по номинальным и местным напряжениям и деформациям, методы расчета на трещиностойкость.

В четвертом разделе изложены вопросы термопрочности материалов, которая особенно важна для современных энергетических машин с высокими параметрами рабочих процессов: основные соотношения термомеханики, методы расчета температурного состояния и термоупругих напряжений элементов конструкций, прикладные задачи термопластичности и термоползучести, методы математического моделирования теплонапряженных конструкций на ЭВМ.

Механике композиционных материалов, которые находят все большее применение в машиностроении, посвящен пятый раздел. В нем изложена макро- и микромеханика армированного монослоя, включая вопросы упругости, ползучести, кратковременной и длительной прочности, термоупругие и диссипативные свойства слоистых композитов, свойства конструктивных композиционных материалов.

В шестом разделе даны теория и методы анализа колебаний механических систем, которые приобретают особое значение в связи с ростом мощностей и скоростей движения машин и их механизмов, уменьшением относительной массы, повышением надежности, обеспечением устойчивости и управляемости. Изложены основы линейной и нелинейной теории колебания механических систем с сосредоточенным и распределенными параметрами, случайные колебания линейных систем, задачи виброизоляции машин и механизмов, особенности расчета на ударные нагрузки.

Устойчивости механических систем посвящен седьмой раздел. Здесь даны критерии устойчивости, устойчивость равновесия, численные методы анализа равновесия, устойчивость неупругих систем, устойчивость роторов и аэродинамических систем, устойчивость при случайных воздействиях.

Восьмой, девятый и десятый разделы тома (кн. 2) посвящены изложению теории и методам расчета напряженно-деформированного состояния классических моделей прикладной механики - стержней и стержневых систем, пластин и оболочек, дисков и толстостенных труб с учетом свойств пластичности и ползучести материала, в линейной и нелинейной постановках. Рассмотрены задачи устойчивости и колебаний, даны методы численного расчета.

В одиннадцатом разделе изложены экспериментальные методы исследования динамики и прочности конструкций, главным образом применительно к условиям работы механизмов и машин в экстремальных условиях. Представлены испытательные стенды и установки, методы и средства измерений при испытаниях на прочность, ползучесть, усталость, удар, определение демпфирующих свойств, трещиностойкость при нормальных и особенно высоких и низких температурах, моделирование и испытание конструктивно подобных моделей.

Последняя часть тома посвящена теории механизмов и машин. Здесь изложены методы кинематического анализа и синтеза механизмов для воспроизведения заданного движения, методы синтеза приводов машин, вопросы точности механизмов, динамики и уравнивания роторов, приведены типовые механизмы, применяемые в современной технике, программы выбора рациональных механизмов с использованием ЭВМ.

Предлагаемый читателю том содержит материал, изложенный в форме, доступной для практических инженерных расчетов. По своему содержанию этот том является уникальным, и можно надеяться, что он окажется настоящей книгой инженера и будет полезен для студентов, аспирантов и преподавателей высших технических учебных заведений.

# ЧАСТЬ I

## ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ МАШИН

### Раздел I

#### ПРИНЦИПЫ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Механика деформируемого твердого тела - наука о равновесии и движении твердых тел с учетом изменения расстояний между отдельными частицами тела, возникающего в результате внешних силовых, температурных и других воздействий.

Построение математических моделей, описывающих поведение деформируемого твердого тела под воздействием внешних факторов, базируется на общих законах механики, результатах экспериментальных исследований свойств материала и ряде дополнительных допущений, которые позволяют сохранить главные особенности исследуемого процесса деформирования тела при одновременном исключении второстепенных. Основными из таких допущений являются допущения о деформируемости и сплошности материала. Под свойством деформируемости понимается способность материала (тела) изменять свои размеры и форму при действии внешних сил. Свойство же сплошности означает способность материала заполнять любой объем как в деформированном, так и недеформированном состояниях, без всяких пустот.

Допущение о сплошности противоречит физическому строению реальных материалов, образованных из отдельных молекул, кристаллов. Поэтому методы механики деформируемого твердого тела не пригодны для исследования поведения тела, имеющего размеры порядка размеров молекул, кристаллов и других видов микронеоднородностей.

Допущение о сплошности позволяет использовать анализ бесконечно малых величин, считать перемещения точек тела при деформации непрерывными и дифференцируемыми функциями координат и выразить компоненты деформаций через производные этих функций.

Результаты экспериментальных исследований механических свойств материалов служат основой построения их моделей. Большинство конструкционных материалов до определенного уровня деформирования обладают свойством упругости, т.е. тела, изготовленные из такого

материала, восстанавливают свои первоначальные размеры и форму после снятия внешних нагрузок. При этом первоначальное состояние тела предполагается ненапряженным; оно обычно называется *естественным состоянием тела*.

Использование допущения об упругости в дополнение к допущению о сплошности привело к образованию большого, самостоятельного раздела механики деформируемого твердого тела - *теории упругости*.

Для многих важных в практическом отношении задач методы теории упругости позволяют получить результат, вполне достоверно оценивающий напряженно-деформированное состояние конструкций. Однако большинство конструкционных материалов, начиная с некоторого значения напряжений, получают остаточные деформации, которые не исчезают после снятия внешней нагрузки. При этом свойство совершенной упругости материала оказывается нарушенным. Исследованием поведения конструкций, в материале которых наряду с упругими могут появляться также и необратимые пластические деформации, занимается *теория пластичности* - раздел механики деформируемого твердого тела.

Модель упругопластического тела, которая используется в теории пластичности, предполагает независимость механических свойств материала во времени. Однако можно назвать ряд современных строительных материалов (титан, стеклопластики и др.), у которых наблюдается заметное изменение их механических свойств в зависимости от времени, хотя внешняя нагрузка при этом не меняется. В материале с течением времени развиваются дополнительные деформации, называемые *деформациями ползучести*. С повышением температуры и уровня напряжений явление ползучести для большинства конструкционных материалов резко усиливается. Исследованием поведения конструкций с учетом свойств ползучести материала занимается *теория ползучести* - еще один раздел механики деформируемого твердого тела.

Различия в модельных представлениях о свойствах тела, которые используются в каждом из перечисленных выше разделов механики деформируемого твердого тела, порождают существенные различия в методах исследования. Каждый из этих разделов механики деформируемого твердого тела имеет свою историю, свой предмет изучения и метод исследования. Именно это и дает основание рассматривать теорию упругости, теорию пластичности и теорию ползучести как самостоятельные науки. Конечно, в этих науках сохранилось и много общего - структура и содержание основных уравнений; отличие связано с формулировкой *физических соотношений*, которыми устанавливается связь между напряжениями и деформациями.

## Глава 1.1

### ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

Излагаемая ниже теория деформаций носит чисто геометрический характер и не связана с какими-либо предположениями о свойствах деформируемой среды. Основное изложение теории ведется в декартовых прямоугольных координатах, случай использования криволинейных координат рассмотрен отдельно.

#### 1.1.1. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И КОМПОНЕНТЫ ДЕФОРМАЦИЙ [14, 20, 32, 45, 48, 51]

**Перемещения.** Действующие на тело силы вызывают изменения его размеров и формы (деформацию). Эти изменения связаны с перемещениями частиц тела (его материальных точек). *Перемещением* точки сплошной среды называется вектор, началом которого служит исходное положение точки, а концом - ее конечное положение.

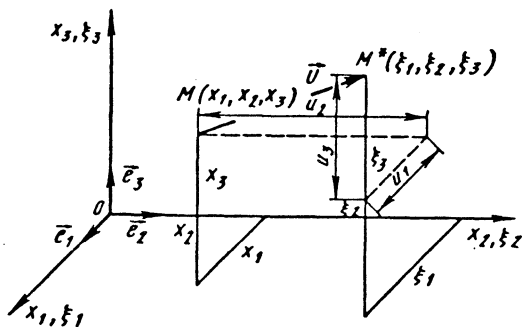


Рис.1.1.1. К определению вектора перемещения материальной точки

Перемещение точки  $M$  будем представлять вектором  $\vec{U} = \vec{MM}^*$ . Его проекции на декартовы координатные оси  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  называются компонентами перемещения и обозначаются соответственно через  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  (рис.1.1.1).

Вследствие предполагаемой сплошности тела компоненты перемещения являются некоторыми непрерывными функциями координат тела:

$$u = u(x, y, z); v = v(x, y, z); \omega = \omega(x, y, z).$$

С целью обеспечения более компактных форм записи отдельных формул и математических выражений в дальнейшем наряду с обозначениями для координат  $x, y, z$  и компонентов перемещения  $u, v, \omega$  будут использоваться соответственно обозначения  $x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) и  $u_i$  ( $i=1, 2, 3$ ).

Между координатами, характеризующими положения произвольной точки тела в ее недеформированном ( $x_1, x_2, x_3$ ) и деформированном ( $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ) состояниях, существуют взаимно однозначные соотношения (триэдры единичных базисных векторов обеих систем полагаем совпадающими)

$$\xi_i = x_i + u_i(x_1, x_2, x_3), \quad i=1, 2, 3. \quad (1.1.1)$$

Соотношения (1.1.1) определяют закон движения материальной точки ( $x_1, x_2, x_3$ ). Функции  $\xi_i(x_1, x_2, x_3)$  считаются непрерывными и дифференцируемыми достаточное число раз по  $x_k$  ( $k=1, 2, 3$ ).

Если якобиан системы (1.1.1) отличен от нуля:

$$\left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система (1.1.1) разрешима относительно  $x_k$  ( $k=1, 2, 3$ ):

$$x_k = x_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad k=1, 2, 3. \quad (1.1.2)$$

В силу однозначной связи между координатами  $x_1, x_2, x_3$  и  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  описание деформированного состояния тела можно осуществлять как в той, так и другой системе координат.

Первый способ описания деформируемой среды называют *лагранжевым*, второй - *эйлеровым*. При этом и сами координаты  $x_1, x_2, x_3$  называются *лагранжевыми*, а координаты  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  - *эйлеровыми*.

Каждый из этих двух способов описания деформируемой среды имеет свою область эффективного использования. В механике деформируемого твердого тела более предпочтительным является лагранжево описание (оно и будет использовано в дальнейшем). В механике жидкости и газа, где исследуются течения сред, сопровождаемые значительными перемещениями ее частиц, используется эйлерово описание.

В отличие от теоретической механики, которая изучает перемещения абсолютно твердых (недеформируемых) тел, в механике деформиру-

емого твердого тела представляют интерес только те перемещения, которые связаны с деформацией тела.

**Относительное изменение длины элемента волокна.** В теории деформации определяются изменения расстояния между двумя бесконечно близкими материальными точками и угла между двумя взаимно перпендикулярными направлениями, проходящими через рассматриваемую точку тела.

Рассмотрим геометрическую картину перемещений и деформаций в окрестности произвольной точки  $M(x_1, x_2, x_3)$  сплошной среды. В результате деформации среды эта точка получит перемещение  $\vec{U}$  и займет положение  $M^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , а бесконечно близкая к ней точка  $N(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$  переместится в положение  $N^*(\xi_1+d\xi_1, \xi_2+d\xi_2, \xi_3+d\xi_3)$  (рис.1.1.2). При этом расстояние между рассматриваемыми точками изменится.

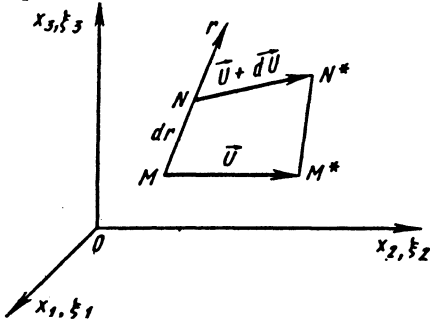


Рис.1.1.2. К определению относительного удлинения в т.  $M$  по направлению  $\vec{r}$

Вектор  $\vec{MN}$ , длина которого

$$dr = |\vec{MN}| = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}, \quad (1.1.3)$$

определяет величину и направление линейного элемента тела до деформации.

Длина вектора  $\vec{M^*N^*}$ , которым полностью определяется как изменение длины, так и направление отрезка  $MN$ ,

$$dr^* = |\vec{M^*N^*}| = \sqrt{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2}, \quad (1.1.4)$$

где (это следует непосредственно из зависимостей (1.1.1))

$$\left. \begin{aligned} d\xi_1 &= \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3; \\ d\xi_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3; \\ d\xi_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) dx_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.5)$$

Относительное изменение длины отрезка  $MN$  как результат деформирования тела

$$E_{MN} = E_r = \frac{dr^* - dr}{dr} \quad (1.1.6)$$

называют *относительным удлинением* в точке  $M(x_1, x_2, x_3)$  по направлению  $r$ .

С учетом зависимостей (1.1.3), (1.1.4) и (1.1.5) из (1.1.6) получаем

$$E_r = \sqrt{1 + 2\varepsilon_r} - 1, \quad (1.1.7)$$

где

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{11} l_{r1}^2 + \varepsilon_{22} l_{r2}^2 + \varepsilon_{33} l_{r3}^2 + 2\varepsilon_{12} l_{r1} l_{r2} + 2\varepsilon_{13} l_{r1} l_{r3} + 2\varepsilon_{23} l_{r2} l_{r3}; \quad (1.1.8)$$

$$l_{ri} = \cos(\widehat{r, x_i}), \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right];$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right]. \quad (1.1.9)$$

Остальные значения  $\varepsilon_{jj}$  получаем путем циклической перестановки индексов  $i$  и  $j$  ( $i, j=1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ ). Формулы (1.1.9) могут быть записаны в виде одного выражения

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.1.10)$$

Здесь предполагается, что члены, содержащие два одинаковых индекса (в данном случае индекс  $k$ ), принимают все значения, соответствующие каждому значению индекса ( $k=1, 2, 3$ ), и суммируются (соглашение о суммировании).

Введя обозначения:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad \omega_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right);$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right); \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right). \quad (1.1.11)$$

формулам (1.1.9) можно придать такой вид:

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2} \left[ e_{11}^2 + (e_{12} + \omega_3)^2 + (e_{13} - \omega_2)^2 \right];$$

$$\varepsilon_{12} = e_{12} + \frac{1}{2} e_{11} (e_{12} - \omega_3) + \frac{1}{2} e_{22} (e_{12} + \omega_3) + \frac{1}{2} (e_{13} - \omega_2) (e_{23} + \omega_1),$$

$$(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1). \quad (1.1.12)$$

Параметр  $\omega_i$  определяет поворот бесконечно малого объемного элемента тела в окрестности рассматриваемой точки вокруг оси  $Ox_i$ .

Если направление  $r$  совпадает с направлением одной из осей координат ( $Ox_i$ ), то относительное удлинение по этому направлению будет

$$E_{xi} = E_i = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii}} - 1, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.1.13)$$

**Углы сдвига.** Рассмотрим в недеформированном теле два взаимно перпендикулярных направления  $r_1$  и  $r_2$ , выходящих из данной точки тела  $M(x_1, x_2, x_3)$  и параллельных соответственно осям  $Ox_1$  и  $Ox_2$ . После деформации угол между этими направлениями изменится на величину

$$\varphi_{12}. \text{ При этом } \sin \varphi_{12} = \frac{2\varepsilon_{12}}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon_{11})(1 + 2\varepsilon_{22})}}$$

и, следовательно,

$$\varphi_{12} = \arcsin \frac{2\varepsilon_{12}}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon_{11})(1 + 2\varepsilon_{22})}}, \quad (1.1.14)$$

$$(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1).$$

Величины изменения первоначально прямых углов между направлениями, параллельными другим координатным осям, могут быть получены из формулы (1.1.14) путем циклической перестановки индексов. Углы  $\varphi_{ij}$  называют *углами сдвига*. Их считают положительными, если происходит уменьшение первоначально прямого угла между направлениями  $r_i$  и  $r_j$ .

Непосредственно из формул (1.1.13) и (1.1.14) можно понять смысл компонентов  $\varepsilon_{ij}$ : компоненты  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_x, \varepsilon_{22} = \varepsilon_y, \varepsilon_{33} = \varepsilon_z$  характеризуют соответствующие относительные удлинения, а компоненты  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{13} = \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{23} = \varepsilon_{yz}$  — углы сдвига. Таким образом, совокупность шес

ти величин  $\varepsilon_{ij}$ , называемых *компонентами деформации*, полностью определяет деформированное состояние окрестности рассматриваемой точки тела.

### 1.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЕМЕНТА В ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ТЕЛА

1.1.2.1. Пусть положение заданного вектора  $\overline{MN}$  (направление  $r$ ) в недеформированном состоянии тела по отношению к координатным осям  $Ox_i$  определяется направляющими косинусами  $l_r = \cos(r, x_i)$  (см. рис.1.1.2).

Тогда положение этого вектора в деформированном состоянии тела (вектор  $\overline{M^*N^*}$ , направление  $r^*$ ) определяется по отношению к координатным осям  $Ox_i$  следующими значениями направляющих косинусов:

$$l_{r^*1} = \frac{1}{1 + E_r} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) l_{r1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} l_{r2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} l_{r3} \right];$$

$$l_{r^*2} = \frac{1}{1 + E_r} \left[ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} l_{r1} + \left( 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) l_{r2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} l_{r3} \right];$$

$$l_{r^*3} = \frac{1}{1 + E_r} \left[ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} l_{r1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} l_{r2} + \left( 1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) l_{r3} \right].$$

1.1.2.2. Орты  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , проходящие в недеформированном состоянии тела через т.М и параллельные соответственно координатным осям  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ , в деформированном состоянии тела займут положение некоторых векторов  $\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*$  (рис.1.1.3). Направляющие косинусы этих векторов по отношению к осям  $Ox_j$  приведены в табл.1.1.1.

1.1.1. Значения направляющих косинусов векторов  $\vec{e}_i^*$  ( $i=1, 2, 3$ )

Векторы	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$\vec{e}_1^*$	$\left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \frac{1}{1 + E_{x_1}}$	$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{1}{1 + E_{x_1}}$	$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{1}{1 + E_{x_1}}$
$\vec{e}_2^*$	$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{1}{1 + E_{x_2}}$	$\left( 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \frac{1}{1 + E_{x_2}}$	$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{1}{1 + E_{x_2}}$
$\vec{e}_3^*$	$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{1}{1 + E_{x_3}}$	$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{1}{1 + E_{x_3}}$	$\left( 1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \frac{1}{1 + E_{x_3}}$

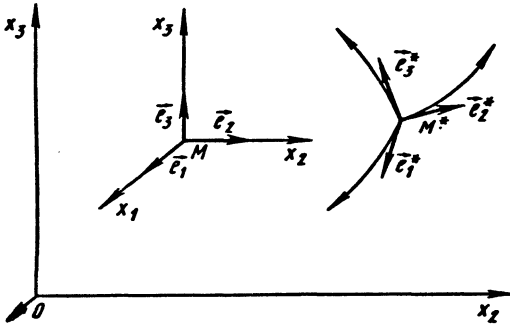


Рис.1.1.3. Положение ортов  $\bar{e}_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) в недеформированном и деформированном состояниях тела

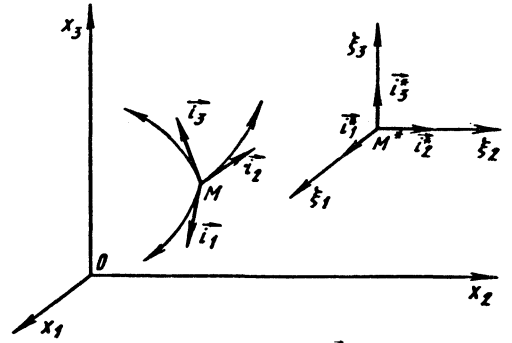


Рис.1.1.4. Положение ортов  $\bar{i}_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) в недеформированном и деформированном состояниях тела

В табл.1.1.2 использованы следующие дополнительные обозначения:

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial D}{\partial \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)}, \quad (i, k = 1, 2, 3);$$

$$E_{\xi_i} = \frac{D}{\sqrt{\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2}} - 1.$$

- относительное удлинение проходящего через т.М волокна, которое после деформации тела становится параллельным оси  $Ox_i$ .

1.1.2.3. В деформированном состоянии тела через т.М\* параллельно осям  $Ox_j$  проведены орты  $\bar{i}_j^*$  ( $j=1, 2, 3$ ) (рис.1.1.4). Направляющие косинусы, определяющие положение этих ортов до деформации (орты  $\bar{i}_j$ ) по отношению к осям  $Ox_i$ , приведены в табл.1.1.2.

1.1.2. Значения направляющих косинусов ортов  $\bar{i}_j$  ( $j=1, 2, 3$ )

Орты	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$\bar{i}_1$	$\frac{1 + E_{\xi_1}}{D} \alpha_{11}$	$\frac{1 + E_{\xi_1}}{D} \alpha_{21}$	$\frac{1 + E_{\xi_1}}{D} \alpha_{31}$
$\bar{i}_2$	$\frac{1 + E_{\xi_2}}{D} \alpha_{12}$	$\frac{1 + E_{\xi_2}}{D} \alpha_{22}$	$\frac{1 + E_{\xi_2}}{D} \alpha_{32}$
$\bar{i}_3$	$\frac{1 + E_{\xi_3}}{D} \alpha_{13}$	$\frac{1 + E_{\xi_3}}{D} \alpha_{23}$	$\frac{1 + E_{\xi_3}}{D} \alpha_{33}$

1.1.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОМПОНЕНТОВ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ОДНИХ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ К ДРУГИМ. ГЛАВНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ. ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИИ И ЕГО ИНВARIANTЫ

Преобразование компонентов деформации. Компоненты деформации при повороте координатных осей ( $x'_1, x'_2, x'_3$  - новые оси) преобразуются по закону:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1'1'} &= \epsilon_{11}l_{11}^2 + \epsilon_{22}l_{22}^2 + \epsilon_{33}l_{33}^2 + 2\epsilon_{12}l_{11}l_{12} + \\ &+ 2\epsilon_{13}l_{11}l_{13} + 2\epsilon_{23}l_{12}l_{13}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{1'2'} &= \epsilon_{11}l_{11}l_{21} + \epsilon_{22}l_{12}l_{22} + \epsilon_{33}l_{13}l_{23} + \\ &+ \epsilon_{12}(l_{11}l_{22} + l_{12}l_{21}) + \epsilon_{23}(l_{12}l_{23} + l_{13}l_{22}) + \\ &+ \epsilon_{13}(l_{11}l_{23} + l_{13}l_{21}), \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1), \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

где  $\epsilon_{ij}$  - компоненты тензора деформаций в новых осях  $x'_1, x'_2, x'_3$ ;  $l_{ik} = \cos(x_i, x_k)$  - направляющие косинусы осей  $x'_i$  в системе осей  $x_k$  (см. табл.1.1.3).



## 1.1.3. Значения направляющих косинусов осей

$$x'_i \quad (i=1, 2, 3)$$

Оси	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x'_1$	$l_{11}$	$l_{12}$	$l_{13}$
$x'_2$	$l_{21}$	$l_{22}$	$l_{23}$
$x'_3$	$l_{31}$	$l_{32}$	$l_{33}$

Используя соглашение о суммировании по индексу, формулы (1.1.15) можно переписать в виде

$$\varepsilon_{ij}' = l_{ip}' l_{jq}' \varepsilon_{pk}. \quad (1.1.16)$$

Формула (1.1.16) показывает, что компоненты деформации  $\varepsilon_{ij}$  являются компонентами симметричного тензора второго ранга - *тензора деформации*:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1.1.17)$$

Условие (1.1.16) позволяет выразить компоненты деформации в старых осях через компоненты в новых осях:  $\varepsilon_{pk} = l_{pi}' l_{kj}' \varepsilon_{ij}'$ .

**Главные деформации. Инварианты тензора деформации.** В каждой точке тела в общем случае имеются три взаимно перпендикулярных направления, по которым относительные удлинения, а следовательно, и линейные деформации имеют экстремальные значения. Указанные направления называют *главными направлениями тензора деформации* (главные оси), а линейные деформации вдоль главных направлений - *главными деформациями*.

Значения главных деформаций, которые в дальнейшем будем обозначать через  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ , равны корням кубического уравнения

$$\varepsilon^3 - I_1(T_\varepsilon)\varepsilon^2 + I_2(T_\varepsilon)\varepsilon - I_3(T_\varepsilon) = 0, \quad (1.1.18)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ I_2(T_\varepsilon) &= \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{13}^2) = \\ &= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3; \\ I_3(T_\varepsilon) &= \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23} - (\varepsilon_{11}\varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{22}\varepsilon_{13}^2 + \\ &+ \varepsilon_{33}\varepsilon_{12}^2) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

Величины  $I_1(T_\varepsilon)$ ,  $I_2(T_\varepsilon)$ ,  $I_3(T_\varepsilon)$  не зависят от направления выбранной системы координат (инвариантны по отношению к координатной системе); их называют соответственно первым, вторым и третьим *инвариантами тензора деформации*.

Косинусы углов, составляемые  $i$ -м главным направлением с координатными осями  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , определяются формулами:

$$l_i^2 = \frac{b_i^2}{s_i^2}; \quad m_i^2 = \frac{c_i^2}{s_i^2}; \quad n_i^2 = \frac{a_i^2}{s_i^2},$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad a_i &= (\varepsilon_{11} - \varepsilon_i)(\varepsilon_{22} - \varepsilon_i) - \varepsilon_{12}^2; \\ b_i^2 &= \varepsilon_{12}\varepsilon_{23} - \varepsilon_{13}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_i); \\ c_i^2 &= \varepsilon_{12}\varepsilon_{13} - \varepsilon_{23}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_i); \\ s_i^2 &= a_i^2 + b_i^2 + c_i^2. \end{aligned}$$

Если одна из главных деформаций равна нулю, деформированное состояние в точке называют *плоским*.

**Максимальные деформации сдвига.** В каждой точке тела имеются взаимно перпендикулярные направления, для которых деформаций сдвига  $\varepsilon_{ij}$  ( $i \neq j$ ) имеют максимальные значения.

Эти направления являются биссектрисами между тремя парами главных направлений деформации.

Максимальные сдвиги между указанными направлениями находят по формулам:

$$\gamma_1 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2}; \quad \gamma_2 = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{2}; \quad \gamma_3 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}. \quad (1.1.20)$$

Здесь, например,  $\gamma_1$  - сдвиг между направлениями, являющимися биссектрисами углов между направлениями деформаций  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ .

## 1.1.4. УПРОЩЕНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ КОМПОНЕНТОВ ДЕФОРМАЦИИ, ВОЗМОЖНЫЕ ПРИ МАЛОХ УДЛИНЕНИЯХ, УГЛАХ СДВИГА И УГЛАХ ПОВОРОТА

**Удлинения и сдвиги малы** ( $E_i \sim \varphi_{ij} \ll 1$ ). Тогда [ см. (1.1.13), (1.1.14) ]

$$E_i \approx \varepsilon_{ii}, \quad \varphi_{ij} \approx 2\varepsilon_{ij}. \quad (1.1.21)$$

Из этих равенств следует, что линейные деформации  $\varepsilon_{ii}$  равны соответствующим относительным удлинениям, а деформации сдвига  $\varepsilon_{ij}$  - половине соответствующих углов сдвига.

**Удлинения, сдвиги и углы поворота малы.** При этом возможны следующие два варианта:

а)  $E_i \sim \varphi_{ij} \sim \omega_i^2 \ll 1$ . Тогда зависимости (1.1.9) упрощаются и примут вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &\approx \varepsilon_{11} + \frac{1}{2}(\omega_2^2 + \omega_3^2); \\ \varepsilon_{33} &\approx \varepsilon_{33} + \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2); \\ \varepsilon_{22} &\approx \varepsilon_{22} + \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_3^2); \\ \varepsilon_{ij} &\approx \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}\omega_i\omega_j, \quad (i \neq j); \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

б)  $E_i \sim \varphi_{ij} \sim \omega_i \ll 1$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ii} &\approx \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3); \\ \varepsilon_{ij} &\approx \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ (i \neq j; \quad i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (1.1.23)$$

Зависимости (1.1.23), именуемые часто формулами Коши, используют в линейной теории упругости;

в) возможны и другие упрощения нелинейных зависимостей (1.1.12). В частности, при изгибе тонких пластин углы поворота  $\omega_i$  имеют разный порядок малости. Если ось  $Ox_3$  направлена перпендикулярно срединной плоскости пластины, то углы поворота элементарных объемов вокруг оси  $Ox_3$  ( $\omega_3$ ) можно считать малыми по сравнению с углами поворота вокруг осей  $Ox_1(\omega_1)$  и  $Ox_2(\omega_2)$ . В этом случае зависимости (1.1.22) преобразуются к виду:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &\approx \varepsilon_{11} + \frac{1}{2} \omega_2^2; & \varepsilon_2 &\approx \varepsilon_{22} + \frac{1}{2} \omega_1^2; \\ \varepsilon_{33} &\approx \varepsilon_{33} + \frac{1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2); \\ \varepsilon_{12} &\approx \varepsilon_{12} - \frac{1}{2} \omega_1 \omega_2; & \varepsilon_{13} &\approx \varepsilon_{13}; & \varepsilon_{23} &\approx \varepsilon_{23}. \end{aligned} \right\} (1.1.24)$$

**1.1.5. ДЕВИАТОР ДЕФОРМАЦИИ. ИНТЕНСИВНОСТЬ ДЕФОРМАЦИИ**

При малых по сравнению с единицей удлинениях и сдвигах тензор деформации целесообразно представить в виде суммы двух тензоров: шарового тензора  $E$  и девиатора деформации  $D_*$ :

$$T_\varepsilon = E_\varepsilon + D_\varepsilon, \quad (1.1.25)$$

где

$$\left. \begin{aligned} E_\varepsilon &= \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}; & \varepsilon &= \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3}; \\ D_\varepsilon &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (1.1.26)$$

В этом случае компоненты шарового тензора вызывают изменение объема элемента тела, а компоненты девиатора деформации

$$\mathcal{D}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}, \quad (1.1.27)$$

изменяют форму этого элемента.

Главные направления девиатора деформации и тензора деформации совпадают.

Инварианты девиатора деформации:

$$I_1(D_\varepsilon) = 0;$$

$$\begin{aligned} I_2(D_\varepsilon) &= \frac{1}{6} [(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + \\ &+ 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)] = \frac{1}{6} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + \\ &+ (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2] \geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3(D_\varepsilon) &= (\varepsilon_{11} - \varepsilon)(\varepsilon_{22} - \varepsilon)(\varepsilon_{33} - \varepsilon) + \\ &+ 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{13} - (\varepsilon_{11} - \varepsilon)\varepsilon_{23}^2 - (\varepsilon_{22} - \varepsilon)\varepsilon_{13}^2 - \\ &- (\varepsilon_{33} - \varepsilon)\varepsilon_{12}^2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon)(\varepsilon_2 - \varepsilon)(\varepsilon_3 - \varepsilon). \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

При построении различных зависимостей теории упругости, теории пластичности используют иные формы записи второго инварианта  $I_2(D_\varepsilon)$ :

а) интенсивность деформации сдвига

$$\gamma_i = 2\sqrt{I_2(D_\varepsilon)}; \quad (1.1.29)$$

б) интенсивность деформации

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{I_2(D_\varepsilon)} \quad (1.1.30)$$

или с учетом выражения (1.1.27) и использованием правила суммирования по повторяющемуся индексу

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3} \mathcal{D}_{ij} \mathcal{D}_{ij}}. \quad (1.1.31)$$

**1.1.6. УРАВНЕНИЯ СОВМЕСТИМОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ**

[ 14, 19, 20, 25, 48, 51, 52]

Шесть компонентов деформации  $\varepsilon_{ij}$  выражаются через производные трех компонентов вектора перемещений (1.1.9). Следовательно, задача определения перемещений  $u_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) не может быть решена, если  $\varepsilon_{ij}$  будут произвольными функциями координат точек тела.

Для того чтобы функции  $\varepsilon_{ij}$  определяли деформацию тела, не нарушающую его сплошность, они должны быть подчинены шести дифференциальным уравнениям - уравнениям сплошности (уравнения совместности деформаций).

Уравнения сплошности можно получить путем исключения из зависимости (1.1.9) для компонентов деформации  $\varepsilon_{ij}$  перемещений  $u_i$ . Ниже даны два частных случая деформаций:

удлинения и сдвиги малы по сравнению с единицей ( $E_{x_i} \approx \varphi_{ij} \ll 1$ ). Тогда

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \left( \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} \right)^2 + \\ &+ \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right)^2 - \left( 2 \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_3} \right) \times \\ &\times \left( 2 \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_2} \left( 2 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} \right) - \\ &- \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_1} \left( 2 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} \right); \\ &\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) = \\ &= \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) + \\ &+ \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_1} \times \\ &\times \left( \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_3} \left( 2 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} \right) - \\ &- \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_2} \left( 2 \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_3} \right), \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1) \end{aligned} \right\} (1.1.32)$$

Остальные четыре уравнения могут быть получены путем круговой замены индексов;

удлинения, сдвиги и углы поворота малы по сравнению с единицей и являются величинами одного и того же порядка малости ( $E_{x_i} \approx \varphi_{ij} \approx \omega_i \ll 1$ ). Тогда компоненты деформации определяются по (1.1.23), а уравнения (1.1.32) примут вид:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}; \quad (1.1.33)$$

(1→2→3→1)

Шесть уравнений (1.1.33) называют *уравнениями сплошности линейной теории упругости*, или *уравнениями Сен-Венана*.

### 1.1.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПО ЗАДАНЫМ КОМПОНЕНТАМ ДЕФОРМАЦИИ [4, 7]

Компоненты деформации по формулам п.1.1.1 и 1.1.2, если известны перемещения, определяют путем дифференцирования этих перемещений. Обратная задача: нахождение компонентов перемещения по заданным компонентам деформации требует интегрирования геометрических соотношений, которые связывают между собой компоненты деформации с компонентами перемещения. При этом интегрирование геометрических соотношений возможно лишь при удовлетворении компонентами деформаций условиям сплошности.

В общем случае нелинейных геометрических соотношений [формулы (1.1.9)] их интегрирование оказывается весьма сложной задачей. Сравнительно просто поставленная задача решается для линейных геометрических соотношений (1.1.23).

В последнем случае для определения компонентов перемещения получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) = & u_1^0 + (x_2 - x_2^0) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)_{x_1=x_1^0} + (x_3 - x_3^0) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)_{x_1=x_1^0} \\ & + \int_{x_1^0}^{x_1} \varepsilon_{11} dx_1 + \int_{x_2^0}^{x_2} \int_{x_1^0}^{x_1} \left( \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} \right)_{x_1=x_1^0} dx_2 dx_1 + \\ & + \int_{x_3^0}^{x_3} \int_{x_1^0}^{x_1} \left( \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_1} \right)_{x_1=x_1^0, x_2=x_2^0} dx_3 dx_1 + \\ & + \frac{1}{2} (x_2 - x_2^0) \int_{x_3^0}^{x_3} \left( \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} \right)_{x_1=x_1^0, x_2=x_2^0} dx_3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \int_{x_2^0}^{x_2} \int_{x_1^0}^{x_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} \right)_{x_1=x_1^0} dx_1 dx_2 + \int_{x_3^0}^{x_3} \int_{x_1^0}^{x_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_3} \right)_{x_1=x_1^0, x_2=x_2^0} dx_1 dx_3 + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x_3^0}^{x_3} \int_{x_2^0}^{x_2} \left( \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} \right)_{x_1=x_1^0} dx_2 dx_3. \quad (1.1.34) \end{aligned}$$

Зависимости для определения  $u_2(x_1, x_2, x_3)$  и  $u_3(x_1, x_2, x_3)$  могут быть получены путем круговой перестановки индексов. Выражения для перемещений (1.1.34) содержат девять постоянных интегрирования - три линейных перемещения  $u_1^0, u_2^0, u_3^0$  начальной точки интегрирования

$M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  и по два угла поворота каждого из трех элементов  $dx_1, dx_2, dx_3$  в этой же точке:

$$\left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^0, \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^0, \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^0, \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^0, \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^0, \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^0.$$

Однако эти шесть углов поворота при заданных деформациях связаны между собой уравнениями Коши (1.1.23):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^0 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^0 &= \gamma_{12}^0; & \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^0 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^0 &= \gamma_{13}^0; \\ \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^0 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^0 &= \gamma_{23}^0, \end{aligned}$$

и поэтому только три из них (по одному из каждой пары) являются независимыми. Следовательно, для однозначного определения перемещений необходимо задать в начальной точке  $M_0$  шесть параметров: три перемещения и три независимых угла поворота. Очевидно, что эти шесть параметров определяют условия прикрепления координатных осей к телу. Прикрепление координатных осей к телу должно устранить его перемещения как твердого тела и вместе с тем не должно препятствовать любой возможной в точке прикрепления деформации. Для многосвязных тел выполнение уравнений сплошности, будучи необходимым, перестает быть достаточным. В этом случае необходимо дополнительно выполнить условия непрерывности компонентов перемещения при обходе по любому замкнутому контуру ( $S_i$ ), охватывающему каждую внутреннюю полость и не пересекающему границы тела (рис.1.1.5).

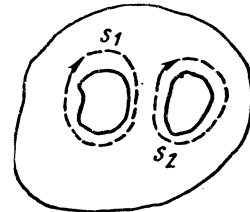


Рис.1.1.5. Трехсвязное тело с двумя внутренними полостями

Условие выражается зависимостями:

$$\oint_s \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3 \right) = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1.35)$$

Для односвязных тел зависимости (1.1.35) выполняются автоматически, если деформации удовлетворяют уравнениям сплошности.

**1.1.8. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ ОБЪЕМА**

Относительное изменение бесконечно малого объема тела в процессе его деформирования определяют по формуле

$$\theta = \frac{dV^* - dV}{dV} = (1 + E_1)(1 + E_2)(1 + E_3) - 1,$$

где  $dV^*$  - рассматриваемый малый объем тела после деформации.

При малых по сравнению с единицей относительных линейных деформациях ( $E_i \ll 1$ )

$$\theta = E_1 + E_2 + E_3.$$

Если далее дополнительно предположить малость по сравнению с единицей сдвигов и углов поворота (допущения линейной теории), то

$$\theta = e_{11} + e_{22} + e_{33} = e_1 + e_2 + e_3.$$

**1.1.9. ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ**  
(11, 19, 20, 25, 45, 52)

Для тел, ограниченных криволинейными поверхностями, целесообразно при описании деформированного состояния применять криволинейные координаты, специально выбранные, исходя из условий конкретной задачи.

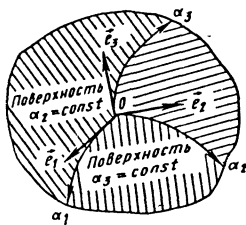


Рис.1.1.6. Криволинейные координаты

Пусть положение точек недеформируемого тела определяется тремя параметрами  $\alpha_i$  ( $i=1,2,3$ ). Изменение одного из этих параметров при постоянстве значений других описывает некоторую кривую линию (рис. 1.1.6). Параметры  $\alpha_i$  называют *криволинейными координатами*, а семейство полученных указанным образом кривых - *координатными линиями*.

Длина элемента координатной линии

$$ds_i = H_i d\alpha_i,$$

где  $H_i$  - коэффициент Ламе.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением и использованием лишь ортогональных криволинейных координат, т.е. таких, у которых координатные линии  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  в каждой точке тела пересекаются под прямыми углами. Ортогональные единичные векторы (орты), совпадающие с касательными к координатным линиям, проходящими через точку тела, обозначим через  $\vec{e}_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  ( $i=1, 2, 3$ ). Направления этих векторов изменяются при переходе от одной точки тела к другой.

**Относительное удлинение и углы сдвига.** Относительное удлинение в некоторой точке тела в направлении  $\vec{r}(l_{1r}, l_{2r}, l_{3r})$  находят по формуле (1.1.6):

$$E_r = \sqrt{1 + 2\epsilon_r} - 1,$$

где согласно (1.1.8)

$$\epsilon_r = \epsilon_{11}l_{1r}^2 + \epsilon_{22}l_{2r}^2 + \epsilon_{33}l_{3r}^2 + 2\epsilon_{12}l_{1r}l_{2r} + 2\epsilon_{13}l_{1r}l_{3r} + 2\epsilon_{23}l_{2r}l_{3r};$$

$$l_{ir} = \cos(\vec{r}, \vec{e}_i), \quad (i = 1, 2, 3).$$

Компоненты деформации  $e_{ij}$  в выражении для  $\epsilon_r$  определяют в зависимости от величин относительных деформаций и углов поворота по формулам (1.1.12), (1.1.22) или (1.1.23), а входящие в эти формулы параметры  $e_{ij}$  и  $\omega_i$  выражают через компоненты вектора перемещения

$$\vec{U} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3$$

по формулам:

$$\left. \begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} + \frac{u_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3}; \\ 2e_{12} &= \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1}{H_1} \right); \\ 2\omega_1 &= \frac{1}{H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_3 u_3) - \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_2 u_2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.36)$$

Выражения для остальных параметров  $e_{ij}$  и  $\omega_i$  получаем круговой перестановкой индексов.

Углы сдвига между волокнами, имеющими до деформации направления  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , определяют по формуле (1.1.14).

Приведенные выше формулы для определения главных деформаций и сдвигов, главных направлений тензора деформаций и его инвариантов могут быть использованы без каких-либо изменений и в случае ортогональных криволинейных координат.

Для цилиндрической и сферической систем координат приведем значения параметров Ламе и параметров  $e_{ij}, \omega_i$ .

**Ц и л и н д р и ч е с к а я с и с т е м а к о о р д и н а т** ( $\alpha_1 = r, \alpha_2 = \varphi, \alpha_3 = z$ , рис.1.1.7):

$$H_1 = H_3 = 1; H_2 = r; \vec{U} = u_r \vec{e}_1 + u_\varphi \vec{e}_2 + u_z \vec{e}_3;$$

$$e_{11} = e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; e_{22} = e_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r};$$

$$e_{33} = e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$2e_{12} = 2e_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r};$$

$$2e_{23} = 2e_{\varphi z} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi};$$

$$2e_{31} = 2e_{zr} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z};$$

$$2\omega_1 = 2\omega_r = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}; 2\omega_2 = 2\omega_\varphi = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r};$$

$$2\omega_3 = 2\omega_z = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}.$$

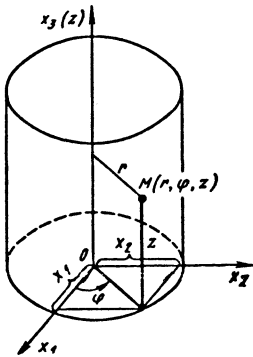


Рис.1.1.7. Цилиндрическая система координат

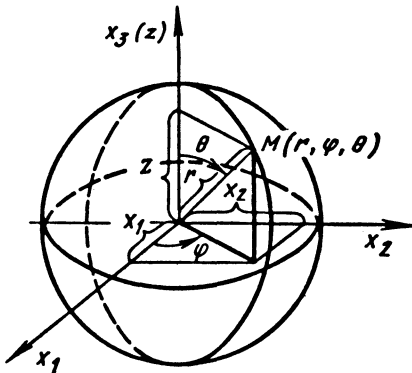


Рис.1.1.8. Сферическая система координат

Сферическая система координат ( $\alpha_1=r$ ,  $\alpha_2=\varphi$ ,  $\alpha_3=\theta$ ;  $H_1=1$ ,  $H_2=r \sin \theta$ ,  $H_3=r$ , рис. 1.1.8):

$$\vec{U} = u_r \vec{e}_1 + u_\varphi \vec{e}_2 + u_\theta \vec{e}_3;$$

$$e_{11} = e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; e_{22} = e_\varphi = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta;$$

$$e_{33} = e_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta};$$

$$2e_{12} = 2e_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi};$$

$$2e_{13} = 2e_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta};$$

$$2e_{23} = 2e_{\varphi\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{u_\varphi}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi};$$

$$2\omega_1 = 2\omega_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{u_\varphi}{r} \operatorname{ctg} \theta;$$

$$2\omega_2 = 2\omega_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} - \frac{\partial u_\theta}{\partial r};$$

$$2\omega_3 = 2\omega_\theta = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} - \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta}.$$

## Глава 1.2

## ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

В главе приведены уравнения равновесия бесконечно малого объемного элемента сплошной среды, находящегося под действием приходящихся на него внешних объемных сил, а также поверхностных усилий взаимодействия со стороны прилегающей к рассматриваемому объемному элементу оставшейся части сплошной среды. Все выводы основаны лишь на законах статики и геометрических построениях. Поэтому содержание настоящей главы справедливо для любых сплошных сред независимо от их механических свойств.

## 1.2.1. ВНЕШНИЕ СИЛЫ. НАПРЯЖЕНИЯ

**Внешние силы.** Деформирование тела вызывается действием на него различных факторов: усилий механического контактного взаимодействия с другими телами, сил тяжести и инерции, теплового, магнитного и других физических полей. Обобщенно действующие на тело внешние факторы именовуют *внешними силами*. Внешние силы делятся на поверхностные и объемные. Поверхностные силы действуют на некоторой части или по всей поверхности тела. Мерой этих сил является их интенсивность (удельная нагрузка).

$$\vec{F}_v = \lim_{\Delta S_v \rightarrow 0} \frac{\Delta F_v}{\Delta S_v}, \quad (1.2.1)$$

где  $\Delta F_v$  - вектор поверхностной силы, приложенной к части поверхности площадью  $\Delta S_v$ ;  $v$  - внешняя нормаль к рассматриваемой части поверхности тела (рис. 1.2.1).

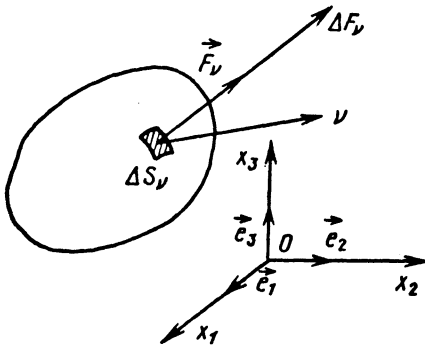


Рис. 1.2.1. К определению интенсивности поверхностной нагрузки  $\vec{F}_v$

Интенсивность поверхностных сил обычно выражают через ее проекции на оси координат

$$\vec{F}_v = F_{v1}\vec{e}_1 + F_{v2}\vec{e}_2 + F_{v3}\vec{e}_3.$$

Объемные силы действуют по всему объему тела или некоторой его части. Их мерой является *интенсивность объемных сил*

$$\vec{X} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta X}{\Delta V}, \quad \Delta V \rightarrow 0$$

где  $\Delta X$  - объемная сила, действующая на элементарный объем  $\Delta V$ .

Выражение объемной силы через ее проекции на оси координат:

$$\vec{X} = X_1\vec{e}_1 + X_2\vec{e}_2 + X_3\vec{e}_3.$$

Внешние силы могут иметь дополнительную классификацию по ряду других признаков:

- 1) по характеру изменения силы в процессе ее приложения - статические и динамические силы;
- 2) по продолжительности их воздействия на конструкцию - постоянные и временные силы;

3) по степени их определенности - детерминированные и случайные силы.

**Напряжения** [11, 14, 15, 19, 20, 25]. В любом мысленно проведенном сечении внутри тела, находящегося в деформированном состоянии, действуют внутренние силы упругости. Интенсивность внутренних сил (рис.1.2.2)

$$\vec{\sigma}_v = \lim_{\Delta S_v \rightarrow 0} \frac{\Delta P_v}{\Delta S_v},$$

где  $\Delta P_v$  - вектор внутренних сил, действующих на сечение площадью  $\Delta S_v$ , называется *полным напряжением* в рассматриваемой точке по данному сечению, положение которого определяется внешней нормалью  $v$ . Вектор  $\vec{\sigma}_v$  зависит от положения рассматриваемой точки и от ориентации сечения, проходящего через эту точку.

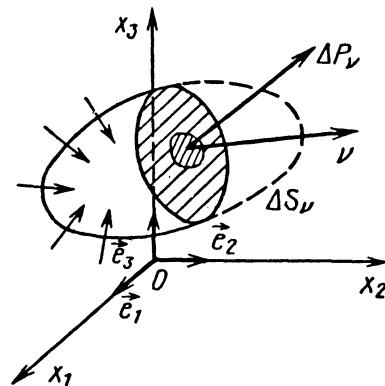
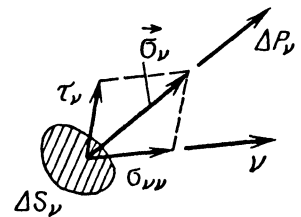


Рис. 1.2.2. К определению полного напряжения  $\vec{\sigma}_v$ , действующего в площадке с нормалью  $v$

Ниже предполагается, что при приведении как объемных, так и поверхностных сил к некоторой точке, принадлежащей элементарному объему (элементу поверхности), моментами этих сил как величинами более высокого порядка



малости можно пренебречь. Учет этих моментов и вызываемых их действием моментных напряжений может потребоваться при резко неравномерном распределении усилий. Эти вопросы рассматриваются в одном из разделов теории упругости - *моментной теории упругости* [24, 30].

Вектор  $\vec{\sigma}_v$ , действующий в площадке с нормалью  $v$ , можно разложить на нормальную составляющую  $\sigma_{vv}$  (нормальное напряжение) и касательную -  $\tau_v$  (полное касательное напряжение), лежащую в площадке:

$$\vec{\sigma}_v = \vec{\sigma}_{vv} + \vec{\tau}_v; \quad \sigma_v^2 = \sigma_{vv}^2 + \tau_v^2, \quad (1.2.2)$$

где  $\sigma_v$ ,  $\sigma_{vv}$  и  $\tau_v$  - модули соответствующих векторных величин.

Выражение напряжения  $\vec{\sigma}_v$  через его проекции на оси координат:

$$\vec{\sigma}_v = \sigma_{v1}\vec{e}_1 + \sigma_{v2}\vec{e}_2 + \sigma_{v3}\vec{e}_3. \quad (1.2.3)$$

Аналогично для площадок, перпендикулярных осям  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$  в деформированном состоянии тела:

$$\vec{\sigma}_{\xi_1} = \sigma_{\xi_1\xi_1}\vec{e}_1 + \sigma_{\xi_1\xi_2}\vec{e}_2 + \sigma_{\xi_1\xi_3}\vec{e}_3;$$

$$\vec{\sigma}_{\xi_2} = \sigma_{\xi_2\xi_1}\vec{e}_1 + \sigma_{\xi_2\xi_2}\vec{e}_2 + \sigma_{\xi_2\xi_3}\vec{e}_3; \quad (1.2.4)$$

$$\vec{\sigma}_{\xi_3} = \sigma_{\xi_3\xi_1}\vec{e}_1 + \sigma_{\xi_3\xi_2}\vec{e}_2 + \sigma_{\xi_3\xi_3}\vec{e}_3.$$

Составляющие  $\sigma_{\xi_i\xi_j}$  ( $i, j=1, 2, 3$ ) полных напряжений в площадках, перпендикулярных к координатным осям, называются *компонентами напряжений* (компонентами напряженного состояния). Их положительные направления указаны на гранях вырезанного из деформированного тела в окрестности некоторой точки  $M^*$  малого элемента в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами, параллельными координатным осям (рис.1.2.3).

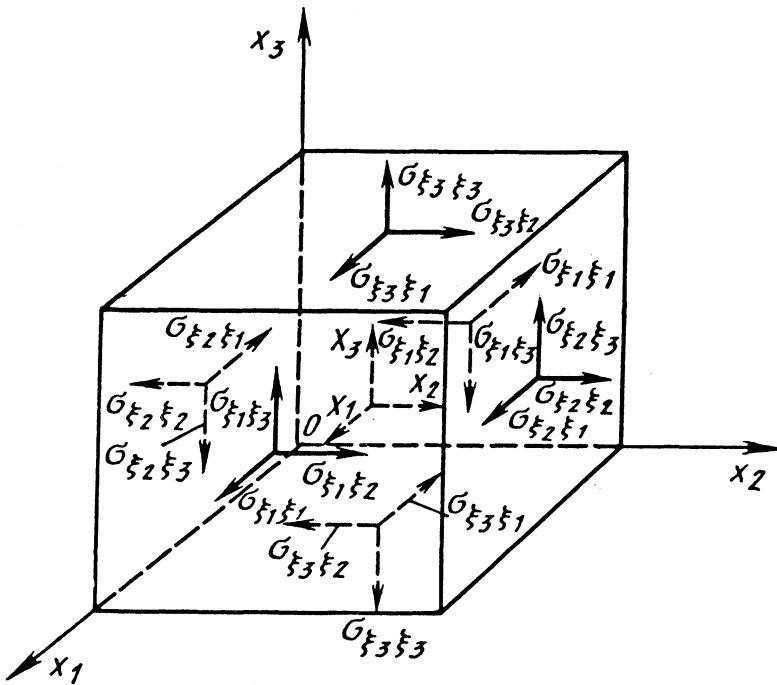


Рис. 1.2.3. Направления действия положительных компонентов напряжения на грани элементарного параллелепипеда

**1.2.2. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ТЕТРАЭДРА, ВЫДЕЛЕННОГО ИЗ ДЕФОРМИРОВАННОГО ТЕЛА**

Бесконечно малый тетраэдр (рис. 1.2.4) вырезан из деформированного тела. Три его грани параллельны координатным плоскостям, а четвертая имеет ориентацию, характеризуемую нормалью  $\nu$ , направляющие косинусы которой в системе координат  $x_1x_2x_3$  суть  $l_{v1}, l_{v2}, l_{v3}$ .

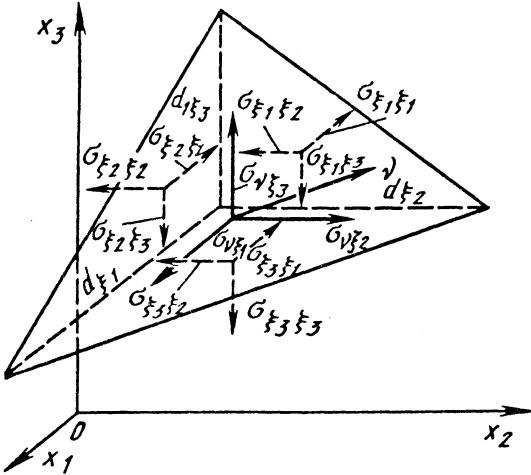


Рис. 1.2.4. К выводу уравнений равновесия элементарного тетраэдра в деформированном состоянии тела

Из равенства нулю суммы проекций всех сил, действующих на грани тетраэдра, соответственно на оси  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  находим [25]

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi_1\xi_1} l_{v1} + \sigma_{\xi_2\xi_2} l_{v2} + \sigma_{\xi_3\xi_3} l_{v3} &= \sigma_{v\xi_1}; \\ \sigma_{\xi_1\xi_2} l_{v1} + \sigma_{\xi_2\xi_2} l_{v2} + \sigma_{\xi_3\xi_2} l_{v3} &= \sigma_{v\xi_2}; \\ \sigma_{\xi_1\xi_3} l_{v1} + \sigma_{\xi_2\xi_3} l_{v2} + \sigma_{\xi_3\xi_3} l_{v3} &= \sigma_{v\xi_3}, \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

где  $\sigma_{v\xi_1}, \sigma_{v\xi_2}, \sigma_{v\xi_3}$  - проекции полного напряжения  $\bar{\sigma}_\nu$  в наклонной площадке тетраэдра на оси соответственно  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ .

Из равенства суммы моментов всех сил относительно каждой из координатных осей получим

$$\sigma_{\xi_1\xi_2} = \sigma_{\xi_2\xi_1}; \sigma_{\xi_1\xi_3} = \sigma_{\xi_3\xi_1}; \sigma_{\xi_2\xi_3} = \sigma_{\xi_3\xi_2}. \quad (1.2.6)$$

Равенства (1.2.6) выражают закон парности касательных напряжений: на двух взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через точку тела, составляющие касательных напряжений, направленные перпендикулярно к общему ребру (образовано пересечением указанных площадок) или от ребра, равны.

На основании этого закона из девяти компонентов напряжения различными по величине в общем случае оказываются шесть компонентов.

Знание этих шести компонентов напряжения в точке тела позволяет определить с помощью зависимостей (1.2.5) составляющие напряжения, действующего на любой площадке, проходящей через эту точку.

**1.2.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОМПОНЕНТОВ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ОДНИХ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ К ДРУГИМ**

В дополнение к координатной системе  $Ox_1x_2x_3$  введена прямоугольная система координат  $Ox'_1x'_2x'_3$ . Взаимное положение этих координатных систем определяется таблицей направляющих косинусов (см. табл. 1.1.3). Компоненты напряжения во вновь введенной системе координат  $\sigma_{\xi'_i\xi'_j}$  определяются через компоненты напряжения  $\sigma_{\xi_i\xi_j}$  с помощью формул [25]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi'_1\xi'_1} &= \sigma_{\xi_1\xi_1} l'^2_{11} + \sigma_{\xi_2\xi_2} l'^2_{12} + \sigma_{\xi_3\xi_3} l'^2_{13} + \\ &+ 2\sigma_{\xi_1\xi_2} l'_{11}l'_{12} + 2\sigma_{\xi_1\xi_3} l'_{11}l'_{13} + 2\sigma_{\xi_2\xi_3} l'_{12}l'_{13}; \\ \sigma_{\xi'_1\xi'_2} &= \sigma_{\xi_1\xi_1} l'_{11}l'_{21} + \sigma_{\xi_2\xi_2} l'_{12}l'_{22} + \\ &+ \sigma_{\xi_3\xi_3} l'_{13}l'_{23} + \sigma_{\xi_1\xi_2} (l'_{11}l'_{22} + l'_{12}l'_{21}) + \\ &+ \sigma_{\xi_1\xi_3} (l'_{11}l'_{23} + l'_{13}l'_{21}) + \sigma_{\xi_2\xi_3} (l'_{12}l'_{23} + l'_{13}l'_{22}). \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Остальные формулы для определения компонентов  $\sigma_{\xi'_2\xi'_2}, \sigma_{\xi'_3\xi'_3}, \sigma_{\xi'_1\xi'_3}, \sigma_{\xi'_2\xi'_3}$  определяются путем круговой перестановки нижних индексов (1→2→3→1).

Если воспользоваться соглашением о суммировании по индексу, то формулы (1.2.7) примут вид

$$\sigma_{\xi'_i\xi'_j} = l_{ip}l_{jk}\sigma_{\xi_p\xi_k}$$

Отсюда следует, что компоненты напряжения являются компонентами симметричного тензора второго ранга - тензора напряжения:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{\xi_1\xi_1} & \sigma_{\xi_1\xi_2} & \sigma_{\xi_1\xi_3} \\ \sigma_{\xi_2\xi_1} & \sigma_{\xi_2\xi_2} & \sigma_{\xi_2\xi_3} \\ \sigma_{\xi_3\xi_1} & \sigma_{\xi_3\xi_2} & \sigma_{\xi_3\xi_3} \end{pmatrix}. \quad (1.2.8)$$

Последнее позволяет сразу воспользоваться свойствами такого тензора, указанными выше, применительно к тензору деформации.

**1.2.4. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИДЕДА, ВЫДЕЛЕННОГО ИЗ ДЕФОРМИРОВАННОГО ТЕЛА**

Возникающие в деформированном теле напряжения, помимо условий равновесия элементарного тетраэдра (объемного элемента тела, вы-

деленного у поверхности тела), должны удовлетворять условиям равновесия элементарного объема, выделенного внутри тела (рис. 1.2.5).

В качестве элементарного объема рассматривается бесконечно малый параллелепипед, вырезанный из деформированного тела. Грани параллелепипеда параллельны координатным плоскостям  $x_1 O x_2$ ;  $x_1 O x_3$ ;  $x_2 O x_3$  (см. рис. 1.2.5).

Из условий равенства нулю главного вектора и главного момента всех сил (поверхностных и объемных), приложенных к элементарному параллелепипеду, получим систему шести уравнений равновесия [19, 25]:

$$\frac{\partial \sigma_{\xi_1 \xi_1}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{\xi_2 \xi_1}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \sigma_{\xi_3 \xi_1}}{\partial \xi_3} + X_{\xi_1} = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{\xi_1 \xi_2}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{\xi_2 \xi_2}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \sigma_{\xi_3 \xi_2}}{\partial \xi_3} + X_{\xi_2} = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{\xi_1 \xi_3}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{\xi_2 \xi_3}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \sigma_{\xi_3 \xi_3}}{\partial \xi_3} + X_{\xi_3} = 0;$$

$$\sigma_{\xi_1 \xi_2} = \sigma_{\xi_2 \xi_1}; \sigma_{\xi_1 \xi_3} = \sigma_{\xi_3 \xi_1}; \sigma_{\xi_2 \xi_3} = \sigma_{\xi_3 \xi_2} \quad (1.2.9)$$

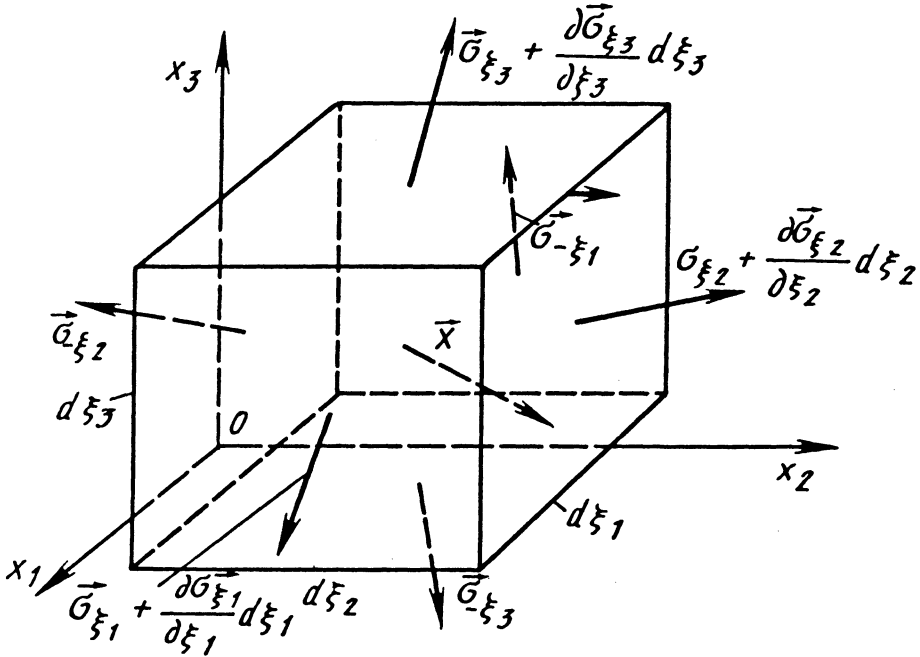


Рис. 1.2.5. К выводу дифференциальных уравнений равновесия элементарного параллелепипеда в деформированном состоянии тела

Последние три уравнения равновесия уже встречались ранее в п. 1.2.2.

В уравнениях (1.2.9) через  $X_{\xi_1}$ ,  $X_{\xi_2}$  и  $X_{\xi_3}$  обозначены компоненты интенсивности объемных сил в деформированном состоянии тела.

#### 1.2.5. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕТРАЭДРА И ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК ТЕЛА ДО ДЕФОРМАЦИИ

Полученные ранее уравнения равновесия элементарного тетраэдра (1.2.5) и элементарного параллелепипеда (1.2.9) записаны в декарто-

вых координатах  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ , которые определяют положение точек тела после его деформации. Отсюда и трудности использования этих уравнений, поскольку в задачах теории упругости обыкновенно известны положения точек тела до деформации ( $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ), а их положения после деформации ( $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ ) относятся к числу искоемых величин.

Используя зависимости (1.1.1), можно получить из уравнений (1.2.5) и (1.2.9) соответствующие уравнения равновесия, выписанные в координатах  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , которыми определяется положение тела до его деформации [25].

Уравнения равновесия элементарного тетраэдра (до деформации три грани тетраэдра параллельны координатным плоскостям  $x_1Ox_2$ ,  $x_1Ox_3$  и  $x_2Ox_3$ ; положение наклонной грани определяется внешней нормалью  $\nu$  ( $l_1, l_2, l_3$ ), где  $l_i = \cos(\nu, \hat{x}_i)$ ):

$$\begin{aligned} & \left[ \sigma_{11}^0(1 + e_{11}) + \sigma_{12}^0(e_{12} - \omega_3) + \sigma_{13}^0(e_{31} + \omega_2) \right] l_{\nu 1} + \\ & + \left[ \sigma_{21}^0(1 + e_{11}) + \sigma_{22}^0(e_{12} - \omega_3) + \sigma_{23}^0(e_{31} + \omega_2) \right] l_{\nu 2} + \\ & + \left[ \sigma_{31}^0(1 + e_{11}) + \sigma_{22}^0(e_{12} - \omega_3) + \sigma_{23}^0(e_{31} + \omega_2) \right] l_{\nu 3} = \\ & = \sigma_{\nu 1}^0. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Два других уравнения равновесия получаем из уравнения (1.2.10) путем круговой перестановки индексов ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ).

В уравнении (1.2.10) использованы следующие дополнительные обозначения:

$$\sigma_{ij}^0 = \frac{\sigma_{ij}}{1 + E_{x_j}} \frac{S_i^*}{S_i}; \quad \sigma_{\nu i}^0 = \sigma_{\nu i} \frac{S}{S^*}, \quad (1.2.11)$$

где  $\sigma_{ij} = \sigma_{x_i x_j}$  - составляющие полного напряжения  $\vec{\sigma}_{x_i}$  по направлениям  $Ox_j$ ;  $\sigma_{\nu i} = \sigma_{\nu x_i}$  - составляющие полного напряжения  $\vec{\sigma}_{\nu}$  по направлениям  $Ox_i$ ;  $S_i$  - площадь грани тетраэдра до деформации, нормаль к которой параллельна оси  $Ox_i$ ;  $S$  - площадь наклонной грани до деформации;  $S_i^*$  ( $i=1, 2, 3$ ),  $S^*$  - площадь соответствующих граней тетраэдра после деформации.

Величины  $\sigma_{ij}^0$  допускают перестановку индексов, т.е.  $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ji}^0$ .

Уравнения равновесия элементарного параллелепипеда (до деформации грани параллелепипеда параллельны координатным плоскостям  $x_1Ox_2$ ,  $x_1Ox_3$ ,  $x_2Ox_3$ ):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \sigma_{11}^0(1 + e_{11}) + \sigma_{12}^0(e_{12} - \omega_3) + \sigma_{13}^0(e_{31} + \omega_2) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \sigma_{21}^0(1 + e_{11}) + \sigma_{22}^0(e_{12} - \omega_3) + \sigma_{23}^0(e_{31} + \omega_2) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \sigma_{31}^0(1 + e_{11}) + \sigma_{32}^0(e_{12} - \omega_3) + \sigma_{33}^0(e_{31} + \omega_2) \right] + \\ & + X_1 \frac{V}{V^*} = 0. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Два других уравнения равновесия получаем из уравнения (1.2.12) путем круговой перестановки индексов ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ).

В (1.2.12) через  $V$  и  $V^*$  обозначены объем параллелепипеда до и после деформации;  $X_1$  - проекция интенсивности объемной силы в недеформированном состоянии тела на направление оси  $Ox_1$ .

### 1.2.6. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕМЕНТА ТЕЛА ПРИ МАЛЫХ УДЛИНЕНИЯХ И СДВИГАХ ( $E_{xi} \sim \Phi_{ij} \ll 1$ )

В этом случае при деформации тела объем и форма элементарных параллелепипеда и тетраэдра, рассмотренных в п. 1.2.4, остаются как бы неизменными, изменяется лишь их положение в пространстве. Сказанное позволяет принять [25]

$$\frac{S_i^*}{S_i} = 1; \quad \frac{S^*}{S} = 1; \quad \frac{V^*}{V} = 1;$$

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}; \quad \sigma_{\nu i}^0 = \sigma_{\nu i}; \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

и тем самым упростить уравнения равновесия (1.2.10) и (1.2.12).

Уравнения равновесия элементарного тетраэдра:

$$\begin{aligned} & \left[ \sigma_{11}(1 + e_{11}) + \sigma_{12}(e_{12} - \omega_3) + \sigma_{13}(e_{31} + \omega_2) \right] l_{\nu 1} + \\ & + \left[ \sigma_{21}(1 + e_{11}) + \sigma_{22}(e_{12} - \omega_3) + \sigma_{23}(e_{31} + \omega_2) \right] l_{\nu 2} + \\ & + \left[ \sigma_{31}(1 + e_{11}) + \sigma_{32}(e_{12} - \omega_3) + \sigma_{33}(e_{31} + \omega_2) \right] l_{\nu 3} = \\ & = \sigma_{\nu 1}. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Остальные два уравнения равновесия получаем круговой перестановкой индексов ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ).

Здесь  $\sigma_{\nu 1}$  - проекция полного напряжения  $\vec{\sigma}_{\nu}$ , приложенного к наклонной грани тетраэдра, на ось  $Ox_1$ .

Величины  $e_{ij}$  и  $\omega_i$  определяют по формулам (1.1.11).

Уравнения равновесия элементарного параллелепипеда:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \sigma_{11}(1 + e_{11}) + \sigma_{12}(e_{12} - \omega_3) + \sigma_{13}(e_{31} + \omega_2) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \sigma_{21}(1 + e_{11}) + \sigma_{22}(e_{12} - \omega_3) + \sigma_{23}(e_{31} + \omega_2) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \sigma_{31}(1 + e_{11}) + \sigma_{32}(e_{12} - \omega_3) + \sigma_{33}(e_{31} + \omega_2) \right] + \\ & + X_1 = 0. \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

Остальные два уравнения равновесия получаем круговой перестановкой индексов ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ).

Здесь  $X_1$  - проекция интенсивности объемной силы на ось  $Ox_1$ .

**1.2.7. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕМЕНТА ТЕЛА ПРИ МАЛЫХ УДЛИНЕНИЯХ, СДВИГАХ И УГЛАХ ПОВОРОТА ( $E_{x_i} \sim \varphi_{ij} \sim \omega_i^2 \ll 1$ )**

Рассматривается случай, когда углы поворота, хотя и малы по сравнению с единицей, но существенно превосходят удлинения и сдвиги. В результате уравнения равновесия (1.2.13) и (1.2.14) упрощаются [25, 39, 51].

Уравнения равновесия элементарного тетраэдра:

$$\begin{aligned} & (\sigma_{11} - \sigma_{12}\omega_3 + \sigma_{13}\omega_2)l_{v1} + \\ & + (\sigma_{21} - \sigma_{22}\omega_3 + \sigma_{23}\omega_2)l_{v2} + \\ & + (\sigma_{31} - \sigma_{32}\omega_3 + \sigma_{33}\omega_2)l_{v3} = \sigma_{v1}. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Остальные два уравнения получаем круговой перестановкой индексов (1→2→3→1).

Уравнения равновесия элементарного параллелепипеда:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} (\sigma_{11} - \sigma_{12}\omega_3 + \sigma_{13}\omega_2) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma_{21} - \sigma_{22}\omega_3 + \sigma_{23}\omega_2) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_3} (\sigma_{31} - \sigma_{32}\omega_3 + \sigma_{33}\omega_2) + X_1 = 0. \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Два других уравнения получаем круговой перестановкой индексов (1→2→3→1).

**1.2.8. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТА ТЕЛА ( $E_{x_i} \sim \varphi_{ij} \sim \omega_i \ll 1$ )**

Дальнейшее упрощение уравнений равновесия п.1.2.7 возможно, если дополнительно предположить, что углы поворота  $\omega_i$  настолько малы, что в уравнениях (1.2.15) и (1.2.16) можно отбросить члены, которые их содержат.

Уравнения равновесия элементарного тетраэдра:

$$\begin{aligned} & \sigma_{11}l_{v1} + \sigma_{21}l_{v2} + \sigma_{31}l_{v3} = \sigma_{v1}; \\ & \sigma_{12}l_{v1} + \sigma_{22}l_{v2} + \sigma_{32}l_{v3} = \sigma_{v2}; \\ & \sigma_{13}l_{v1} + \sigma_{23}l_{v2} + \sigma_{33}l_{v3} = \sigma_{v3}. \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Уравнения равновесия элементарного параллелепипеда:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + X_1 = 0; \\ & \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + X_2 = 0; \\ & \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 = 0. \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

Уравнения (1.2.17) и (1.2.18) в совокупности с равенствами вида  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  формулируют условия равновесия в линейной (классической) теории упругости, которая при составлении уравнений равновесия объемного элемента не делает различия в положении его точек до и после деформации.

**1.2.9. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ**

Граничные условия могут быть двух основных видов:

1) на границе (поверхности тела) заданы компоненты вектора перемещения:

$$u_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \bar{u}_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0), \quad (i = 1, 2, 3),$$

где  $\bar{u}_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  - заданные функции координат точек поверхности тела;

2) на границе (поверхности тела) заданы внешние усилия (напряжения).

В рассматриваемом случае граничные условия должны связать внутренние напряжения в точках поверхности тела с заданными поверхностными напряжениями. Для получения этих соотношений необходимо в соответствующих уравнениях равновесия элементарного тетраэдра (его наклонная грань совпадает с элементом поверхности, ограничивающей тело) вместо компонент  $\sigma_{v1}$ ,  $\sigma_{v2}$  и  $\sigma_{v3}$  внести проекции поверхностной нагрузки заданной интенсивности на направления ортов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .

**1.2.10. ГЛАВНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ГЛАВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ [14, 19, 32]**

**Главные напряжения.** Тензорный характер напряженного состояния в точке деформированного тела позволяет утверждать, что в общем случае можно найти три главных направления, обладающих тем свойством, что в площадках, перпендикулярных к ним (*главные площадки*), действуют только нормальные напряжения  $\sigma_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), имеющие экстремальные значения - *главные напряжения* (главные значения тензора напряжения).

Главные напряжения  $\sigma_i$  являются корнями кубического уравнения

$$\sigma^3 - I_1(T_\sigma)\sigma^2 + I_2(T_\sigma)\sigma - I_3(T_\sigma) = 0 \quad (1.2.19)$$

Коэффициенты этого уравнения:

$$I_1(T_\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

$$I_2(T_\sigma) = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} -$$

$$-\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2\right) = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3;$$

$$I_3(T_\sigma) = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} -$$

$$-\left(\sigma_{11}\sigma_{23}^2 + \sigma_{22}\sigma_{13}^2 + \sigma_{33}\sigma_{12}^2\right) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (1.2.20)$$

не зависят от направлений выбранной системы координат и называются соответственно *первым* (линейным), *вторым* (квадратичным) и *третьим* (кубическим) *инвариантами тензора напряжения*.

Направляющие косинусы  $l_{ij} = \cos(\sigma_i, x_j)$

каждого из главных направлений ( $i=1, 2, 3$ ) определяются по формулам:

$$l_{i1}^2 = \frac{\bar{b}_i^2}{\bar{s}_i^2}; \quad l_{i2}^2 = \frac{\bar{c}_i^2}{\bar{s}_i^2}; \quad l_{i3}^2 = \frac{\bar{a}_i^2}{\bar{s}_i^2}. \quad (1.2.21)$$

где

$$\bar{a}_i = (\sigma_{11} - \sigma_i)(\sigma_{22} - \sigma_i) - \sigma_{12}^2;$$

$$\bar{b}_i = \sigma_{12}\sigma_{23} - \sigma_{13}(\sigma_{22} - \sigma_i);$$

$$\bar{c}_i = \sigma_{12}\sigma_{13} - \sigma_{23}(\sigma_{11} - \sigma_i);$$

$$\bar{s}_i^2 = \bar{a}_i^2 + \bar{b}_i^2 + \bar{c}_i^2.$$

**Экстремальные касательные напряжения.**

Среди бесчисленного множества площадок, которые можно провести через заданную точку, имеются такие площадки, касательные напряжения в которых будут иметь экстремальные значения:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (1.2.22)$$

Упомянутые площадки проходят через одно из главных направлений и делят пополам угол между двумя другими направлениями.

Если  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , то наибольшее касательное напряжение в рассматриваемой точке

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

В площадках, где действуют экстремальные касательные напряжения, нормальные напряжения равны полусумме соответствующих главных

напряжений. Например, в площадке, где действует касательное напряжение  $\tau_1$ , нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}.$$

**1.2.11. ДЕВИАТОР НАПРЯЖЕНИЯ. ИНТЕНССИВНОСТЬ НАПРЯЖЕНИЙ**

Подобно тому, как было сделано в п.1.1.4, тензор напряжения  $T_\sigma$  можно представить в виде суммы шарового тензора и девиатора

$$T_\sigma = E_\sigma + D_\sigma. \quad (1.2.23)$$

где

$$E_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}. \quad (1.2.24)$$

- шаровой тензор напряжения;

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{pmatrix}. \quad (1.2.25)$$

- девиатор напряжения, характеризующий касательные напряжения в точке;

$$\sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$$

- гидростатическое давление.

Такое представление тензора напряжений является целесообразным, поскольку тела по-разному сопротивляются равномерному всестороннему давлению и касательным напряжениям (сдвиговым усилиям).

Главные направления девиатора напряжения и тензора напряжения совпадают.

Инварианты девиатора напряжения:

$$I_1(D_\sigma) = 0;$$

$$I_2(D_\sigma) = \frac{1}{6} \left[ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right] = \frac{1}{6} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right];$$

$$I_3(D_\sigma) = (\sigma_{11} - \sigma)(\sigma_{22} - \sigma)(\sigma_{33} - \sigma) + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - (\sigma_{11} - \sigma)\sigma_{23}^2 - (\sigma_{22} - \sigma)\sigma_{13}^2 - (\sigma_{33} - \sigma)\sigma_{12}^2 = (\sigma_1 - \sigma)(\sigma_2 - \sigma)(\sigma_3 - \sigma). \quad (1.2.26)$$

Наряду с основными инвариантами девиатора напряжения (1.2.26) в теории пластичности и различных теориях прочности используются иные формы записи второго инварианта  $I_2(D_\sigma)$ :

а) интенсивность касательных напряжений

$$\tau_i = \sqrt{\frac{2}{3}} I_2(D_\sigma); \quad (1.2.27)$$

б) интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{3} I_2(D_\sigma); \quad (1.2.28)$$

или, если воспользоваться правилом суммирования по индексу,

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}} S_{ij} S_{ij}, \quad (1.2.29)$$

где  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$  - компоненты девиатора напряжения.

Все основные зависимости, приведенные в п. п. 1.2.10 и 1.2.11, можно использовать для случая деформирования тела, при котором удлинения, сдвиги и углы поворота нельзя считать малыми величинами. При этом возникают лишь некоторые трудности, связанные с определением главных направлений, поскольку в общем случае орты  $\vec{e}_1^*$ ,  $\vec{e}_2^*$  и  $\vec{e}_3^*$  не ортогональны.

### 1.2.12. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ОБЪЕМНОГО ЭЛЕМЕНТА В ОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ [19, 20, 25]

Для тел, ограниченных кривыми поверхностями, при решении задач целесообразно использовать уравнения равновесия элементарного объема в криволинейных координатах  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Выбор этих координат зависит от формы поверхности, ограничивающей рассматриваемое тело.

Уравнения равновесия при малых удлинениях и сдвигах ( $E_{\alpha_i} \sim \varphi_{ij} \ll 1$ ):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 H_1 P_{11}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 H_3 P_{21}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 H_2 P_{31}) + H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} P_{12} + \\ & + H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} P_{13} - H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} P_{22} - H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} P_{33} + \\ & + H_1 H_2 H_3 X_1 = 0. \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

Остальные два уравнения получаем из (1.2.23) путем круговой перестановки индексов (1→2→3→1).

В уравнении (1.2.30)  $H_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) - параметры Ламе;

$$P_{i1} = \sigma_{i1}(1 + e_{11}) + \sigma_{i2}(e_{12} - \omega_3) + \sigma_{i3}(e_{13} + \omega_2);$$

$$P_{i2} = \sigma_{i1}(e_{12} + \omega_3) + \sigma_{i2}(1 + e_{22}) + \sigma_{i3}(e_{23} - \omega_1);$$

$$P_{i3} = \sigma_{i1}(e_{13} - \omega_2) + \sigma_{i2}(e_{23} + \omega_1) + \sigma_{i3}(1 + e_{33}),$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  - напряжения, действующие на гранях деформированного параллелепипеда, которые до деформации совпадают с координатными плоскостями;  $X_i$  - проекции вектора объемной силы на орты  $\vec{e}_i$ , которые определяют направления координатных линий  $\alpha_i$  для недеформированного элемента;  $e_{ij}, \omega_i$  - параметры, определяемые формулами (1.1.36).

Если принять  $H_1 = H_2 = H_3 = 1$ ,  $\alpha_1 = x_1$ ,  $\alpha_2 = x_2$ ,  $\alpha_3 = x_3$ , то из уравнений (1.2.30) получим уравнения равновесия элементарного параллелепипеда (1.2.14).

Линейные уравнения равновесия для различных систем криволинейных координат ( $e_{ij} - \omega_i^2 \ll 1$ ):

*цилиндрические координаты* ( $\alpha_1 = r$ ,  $\alpha_2 = \varphi$ ;  $\alpha_3 = z$ ,  $H_1 = H_3 = 1$ ;  $H_2 = r$ ):

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + X_r = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial z} + X_\varphi = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + X_z = 0, \quad (1.2.31)$$

где  $X_r, X_\varphi, X_z$  - проекции на соответствующие оси интенсивности объемной силы;

*сферические координаты* ( $\alpha_1 = r$ ;  $\alpha_2 = \varphi$ ;  $\alpha_3 = \theta$ ;  $H_1 = 1$ ;  $H_2 = r \sin \theta$ ;  $H_3 = r$ ):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \\ & + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta r} \operatorname{ctg} \theta) + X_r = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} +$$

$$+ \frac{1}{r} (2\sigma_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta + 3\sigma_{r\varphi}) + X_\varphi = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} +$$

$$+ \frac{1}{r} [3\sigma_{r\theta} + \operatorname{ctg} \theta (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})] + X_\theta = 0. \quad (1.2.32)$$

Глава 1.3

**СВЯЗЬ КОМПОНЕНТОВ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ДЛЯ УПРУГОГО ТЕЛА**

**1.3.1. ТЕРМОДИНАМИКА УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ**

Деформирование тела является термодинамическим процессом. Согласно первому закону термодинамики изменение кинетической  $dT$  и внутренней  $dE$  энергий тела при его переходе в смежное деформированное состояние равно сумме работы внешних сил  $dU$ , произведенной на этом переходе, и сообщенному телу количества теплоты  $dQ$  (измеренной в единицах работы) [25, 39]:

$$dT + dE = dU + dQ. \quad (1.3.1)$$

Подставив сюда приращение кинетической энергии, приращение работы внешних сил и воспользовавшись геометрическими соотношениями и уравнениями движения, полученными в предыдущих двух главах, зависимость (1.3.1) для единицы объема тела может быть преобразована к виду

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + d\bar{Q}, \quad (1.3.2)$$

где  $d\bar{Q}$  - приращение удельной тепловой энергии;  $dW$  - приращение внутренней энергии.

Далее, согласно второму закону термодинамики для обратимых термодинамических процессов отношение  $d\bar{Q} / T_0$ , где  $T_0$  - абсолютная температура, есть полный дифференциал некоторой функции состояния системы, называемой *энтропией*  $S$ :

$$dS = d\bar{Q} / T_0.$$

Тогда соотношение (1.3.2) примет вид

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + T_0 dS, \quad (1.3.3)$$

или

$$dF = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - S dT_0, \quad (1.3.4)$$

где  $F = W - ST_0$  - так называемая *свободная энергия Гельмгольца*.

Равенство (1.3.3) или (1.3.4) является основным термодинамическим уравнением для деформируемого твердого тела

Непосредственно из соотношений (1.3.3) и (1.3.4) получаем следующие формулы, устанавливающие связь между компонентами напряжений и компонентами деформации:

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{S=\text{const}}; \quad (1.3.5)$$

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{T_0=\text{const}} \quad (1.3.6)$$

Первая из этих формул применима для адиабатического термодинамического процесса деформирования, при котором  $d\bar{Q} = T_0 dS = 0$  и, следовательно,  $S = \text{const}$ .

Вторая формула применима для изотермического процесса деформирования, при котором температура  $T_0$  остается в течение всего процесса неизменной.

**Упругий потенциал. Формула Грина.** Использование формул (1.3.5) и (1.3.6) приводит к различным соотношениям между компонентами  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$ . Однако для реальных твердых тел это различие оказывается в пределах точности технических расчетов и им, как правило, пренебрегают. Это дает основание в дальнейшем рекомендовать для определения  $\sigma_{ij}$  следующую формулу (формула Грина):

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (1.3.7)$$

(строго говоря, справедливую лишь для адиабатического процесса деформирования).

При этом

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (1.3.8)$$

и, следовательно,

$$W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (1.3.9)$$

- так называемый *упругий потенциал*, представляющий собой потенциальную энергию единицы объема тела.

Для идеально упругого тела значение криволинейного интеграла (1.3.9) не зависит от выбранного пути деформирования.

Формулой (1.3.7) можно чисто формально пользоваться и для установления связи между напряжениями и деформациями при активном пластическом деформировании материала. Естественно, что при этом функция  $W$  уже не будет определять величину накопленной внутренней энергии.

**Дополнительная энергия деформации. Формула Кастильяно.** Дополнительная энергия деформации

$$W'(\sigma_{ij}) = \int_{\sigma_{ij}=0}^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}, \quad (W' = 0 \text{ при } \sigma_{ij} = 0).$$

(1.3.10)

Компоненты деформации определяют по формуле Кастильяно:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial W'}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (1.3.11)$$



Упругий потенциал  $W$  и дополнительная энергия деформации  $W'$  не являются независимыми; они связаны зависимостью

$$W' = \sigma_{ij}\epsilon_{ij} - W. \tag{1.3.12}$$

**Потенциальная энергия деформации.** Потенциальная энергия деформации тела

$$W = \iiint_V w dV, \tag{1.3.13}$$

где  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$  - объем бесконечно малого элемента до деформации.

**1.3.2. ЛИНЕЙНО-УПРУГИЙ МАТЕРИАЛ. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА**

Для линейно-упругого материала связь между компонентами напряжения и компонентами деформации линейна и описывается обобщенным законом Гука [32, 51]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}\epsilon_{11} + c_{12}\epsilon_{22} + c_{13}\epsilon_{33} + c_{14}\gamma_{12} + c_{15}\gamma_{13} + \\ &+ c_{16}\gamma_{23}; \\ \sigma_{22} &= c_{21}\epsilon_{11} + c_{22}\epsilon_{22} + c_{23}\epsilon_{33} + c_{24}\gamma_{12} + c_{25}\gamma_{13} + \\ &+ c_{26}\gamma_{23}; \\ \dots\dots\dots \\ \sigma_{23} &= c_{61}\epsilon_{11} + c_{62}\epsilon_{22} + c_{63}\epsilon_{33} + c_{64}\gamma_{12} + c_{65}\gamma_{13} + \\ &+ c_{66}\gamma_{23}, \end{aligned}$$

$$(c_{ij} = c_{ji}), \tag{1.3.14}$$

Благодаря последнему равенству число упругих постоянных  $c_{ij}$  сокращается до 21. Разрешая систему уравнений (1.3.14) относительно компонентов деформации, получаем

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33} + a_{14}\sigma_{12} + \\ &+ a_{15}\sigma_{13} + a_{16}\sigma_{23}; \\ \epsilon_{22} &= a_{21}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + a_{23}\sigma_{33} + a_{24}\sigma_{12} + \\ &+ a_{25}\sigma_{13} + a_{26}\sigma_{23}; \\ \dots\dots\dots \\ \gamma_{23} &= a_{61}\sigma_{11} + a_{62}\sigma_{22} + a_{63}\sigma_{33} + a_{64}\sigma_{12} + \\ &+ a_{65}\sigma_{13} + a_{66}\sigma_{23}. \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

**Упругий потенциал для линейно-упругого тела.** Его определяют по формуле Клапейрона

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij}\epsilon_{ij}. \tag{1.3.16}$$

Упругий потенциал  $W$ , если исключить в (1.3.16) с помощью зависимостей (1.3.15) компо-

ненты деформации, будет однородной положительно определенной квадратичной формой компонентов напряжения. Если же в (1.3.16) исключить с помощью зависимостей (1.3.14) компоненты деформации, то упругий потенциал будет однородной квадратичной формой компонентов деформации.

**1.3.3. ЧАСТНЫЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ТЕЛА**

Число упругих постоянных в (1.3.15) сокращается, если механические свойства материала "симметричны" относительно одной или нескольких (двух, трех) взаимно ортогональных плоскостей.

**Ортоотропное тело.** Через каждую точку такого тела проходят три ортогональные плоскости упругой симметрии. Число упругих постоянных уменьшается до 9. Имеются три главных направления упругости. Пусть координатные плоскости являются плоскостями упругой симметрии. Тогда обобщенный закон Гука примет такой вид [18]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{E_1} (\sigma_{11} - \nu_{12}\sigma_{22} - \nu_{13}\sigma_{33}); \gamma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G_{12}}; \\ \epsilon_{22} &= \frac{1}{E_2} (\sigma_{22} - \nu_{21}\sigma_{11} - \nu_{23}\sigma_{33}); \gamma_{23} = \frac{\sigma_{23}}{G_{23}}; \\ \epsilon_{33} &= \frac{1}{E_3} (\sigma_{33} - \nu_{31}\sigma_{11} - \nu_{32}\sigma_{22}); \gamma_{13} = \frac{\sigma_{13}}{G_{13}}, \end{aligned} \tag{1.3.17}$$

где  $E_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) - модули продольной упругости (модули Юнга) в направлении осей соответственно  $x_1, x_2, x_3$ ;  $G_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) - модули сдвига для плоскостей, параллельных координатным плоскостям  $x_i O x_j$ ;  $\nu_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) - коэффициенты Пуассона, характеризующие величину сжатия (растяжения) в направлении  $Ox_j$  при растяжении (сжатии) материала в направлении  $Ox_i$ .

Модули продольной упругости и коэффициенты Пуассона связаны равенством

$$E_i \nu_{ji} = E_j \nu_{ij}. \tag{1.3.18}$$

**Трансверсально-изотропное (монотропное) тело.** Для такого материала одна из плоскостей упругой симметрии является плоскостью изотропии (все направления в такой плоскости являются эквивалентными в отношении упругих свойств).

Если плоскость  $x_1 O x_2$  принять за плоскость изотропии, то

$$E_1 = E_2 = E; \nu_{12} = \nu_{21} = \nu; G_{12} = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$G_{32} = G_{31} = G_1; \nu_{31} = \nu_{32} = \nu_1.$$

Обобщенный закон Гука для такого материала будет содержать пять упругих постоянных и записывается в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) - \frac{\nu_1}{E_3}\sigma_{33}; & \gamma_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{G}; \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) - \frac{\nu_1}{E_3}\sigma_{33}; & \gamma_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{G_1}; \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E_3}\sigma_{33} - \frac{\nu_1}{E_3}(\sigma_{11} + \sigma_{22}); & \gamma_{13} &= \frac{\sigma_{13}}{G_1}. \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

**Изотропное тело.** У изотропных материалов все направления являются эквивалентными в отношении упругих свойств (любая плоскость, проходящая через точку, является плоскостью упругой симметрии, и связь между деформациями и напряжениями не зависит от направления координатных осей). При этом число упругих постоянных в обобщенном законе Гука сокращается до двух:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})]; & \gamma_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{G}; \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})]; & \gamma_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{G}; \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})]; & \gamma_{13} &= \frac{\sigma_{13}}{G}. \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

Упругие постоянные: модуль Юнга  $E$ , модуль сдвига  $G$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  связаны зависимостью

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Равенства (1.3.20) можно представить в форме

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left( \sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \delta_{ij} \right), \quad (1.3.21)$$

где  $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$  - среднее давление;

$\delta_{ij}$  - символ Кронекера.

Из равенств (1.3.20) следует, что относительное изменение объема элемента  $\theta$  вблизи рассматриваемой точки деформируемого тела пропорционально среднему давлению  $\sigma$ :

$$\theta = 3k\sigma, \quad (1.3.22)$$

где

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3\varepsilon; \quad (1.3.23)$$

$k = \frac{1-2\nu}{E}$  - коэффициент объемного расширения (сжатия).

Разрешая равенства (1.3.20) относительно компонентов напряжения, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2G\varepsilon_{11} + 3\lambda\varepsilon; & \sigma_{12} &= 2G\varepsilon_{12}; \\ \sigma_{22} &= 2G\varepsilon_{22} + 3\lambda\varepsilon; & \sigma_{23} &= 2G\varepsilon_{23}; \\ \sigma_{33} &= 2G\varepsilon_{33} + 3\lambda\varepsilon; & \sigma_{13} &= 2G\varepsilon_{13} \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

или

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + 3\lambda\varepsilon\delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где  $\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu}$  - упругая постоянная Ламе.

Упругий потенциал  $W$  для изотропного материала может быть определен по одной из приведенных ниже формул:

$$W = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - 2\nu(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) + 2(1+\nu)(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) \right];$$

$$W = G \left[ \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2) \right];$$

$$W = \frac{3}{2} k\sigma^2 + \frac{3}{4G} \tau_i^2. \quad (1.3.25)$$

В последней формуле первое слагаемое есть упругая энергия изменения объема, второе слагаемое - упругая энергия изменения формы.

При неравномерном нагреве в теле возникают дополнительные деформации и напряжения. Если нагрев таков, что упругие свойства материала не изменяются, то связь между напряжениями и деформациями для изотропного материала может быть представлена в виде

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \left( 3\lambda\varepsilon - \frac{\alpha T}{k} \right) \delta_{ij} \quad (1.3.26)$$

или

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[ \sigma_{ij} - \left( \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma - 2G\alpha T \right) \delta_{ij} \right], \quad (1.3.27)$$

где  $\alpha$  - коэффициент линейного теплового расширения;  $T$  - температура нагрева.

**Ортотропный материал с цилиндрической анизотропией** [18]. Для рассмотренных выше анизотропных материалов направления, эквивалентные в смысле упругих свойств, в разных точках были параллельны (прямолинейная анизотропия).

Существуют материалы, у которых эквивалентные направления не параллельны, а подчи-

нены каким-то другим законам (криволинейная анизотропия).

Наиболее часто на практике встречается цилиндрическая анизотропия, которая характеризуется тем, что все направления в материале, совпадающие с любой из цилиндрических координат  $r, \varphi, z$  (см. рис. 1.1.7), эквивалентны в смысле механических свойств.

Для такого материала обобщенный закон Гука может быть записан в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\sigma_{rr}}{E_r} - \frac{\nu_{\varphi r}}{E_{\varphi}} \sigma_{\varphi\varphi} - \frac{\nu_{zr}}{E_z} \sigma_{zz}; & \varepsilon_{\varphi z} &= \frac{\sigma_{\varphi z}}{2G_{\varphi z}}; \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= -\frac{\nu_{r\varphi}}{E_r} \sigma_{rr} + \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{E_{\varphi}} - \frac{\nu_{z\varphi}}{E_z} \sigma_{zz}; & \varepsilon_{rz} &= \frac{\sigma_{rz}}{2G_{rz}}; \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu_{rz}}{E_r} \sigma_{rr} - \frac{\nu_{\varphi z}}{E_{\varphi}} \sigma_{\varphi\varphi} + \frac{\sigma_{zz}}{E_z}; & \varepsilon_{z\varphi} &= \frac{\sigma_{r\varphi}}{2G_{r\varphi}}, \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

где  $E_r, E_{\varphi}, E_z$  - модули Юнга в направлении соответственно  $r, \varphi, z$ ;  $G_{r\varphi}, G_{rz}, G_{\varphi z}$  - модули сдвига;  $\nu_{\varphi z}, \nu_{rz}, \nu_{\varphi r}$  - коэффициенты Пуассона.

Модули продольной упругости и коэффициенты Пуассона связаны равенствами

$$\frac{\nu_{\varphi r}}{E_{\varphi}} = \frac{\nu_{r\varphi}}{E_r}; \quad \frac{\nu_{z\varphi}}{E_z} = \frac{\nu_{\varphi z}}{E_{\varphi}}; \quad \frac{\nu_{zr}}{E_z} = \frac{\nu_{rz}}{E_r}.$$

### 1.3.4. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

Задачи теории упругости относят к крайним задачам, их обычно классифицируют по типу крайних (граничных) условий. Рассмотрим три основные задачи:

1) определение упругого равновесия тела при заданных внешних силах, приложенных к его границам;

2) определение упругого равновесия тела при заданных перемещениях точек его границ;

3) определение упругого равновесия тела, когда на некоторой части границы заданы перемещения, а на остальной - силы.

Решение указанных задач связано в общем случае с интегрированием системы нелинейных дифференциальных уравнений при заданных граничных условиях.

Неизвестными в этой системе могут быть перемещения или напряжения.

В первом случае разрешающая система уравнений получается, если уравнения равновесия элементарного объема с помощью соотношений между компонентами напряжений, ком-

понентами деформации и перемещениями записываются в перемещениях.

Во втором случае к уравнениям равновесия следует присоединить уравнения совместности деформаций, записанные в напряжениях.

В общем случае нелинейность полной системы уравнений обусловлена двумя независимыми причинами:

а) нелинейностью дифференциальных уравнений равновесия и соотношений между компонентами деформации и перемещениями - так называемая *геометрическая нелинейность*;

б) нелинейностью уравнений, связывающих компоненты напряжений с компонентами деформации (обусловлена физическими свойствами материала), - *физическая нелинейность*.

Линеаризация геометрически нелинейных уравнений основана на пренебрежении удлинениями, сдвигами и углами поворота по сравнению с единичной.

Линеаризация физических уравнений может быть осуществлена в том случае, когда в пределах определенных значений относительных удлинений и сдвигов (компонентов деформации) справедлив обобщенный закон Гука.

### 1.3.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Уравнения равновесия в декартовых координатах для ортотропного тела [18]:

$$\begin{aligned} c_{55} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + c_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ -(c_{11} - c_{55}) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (c_{12} + c_{44}) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \right. \\ \left. + (c_{13} + c_{66}) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] + X_1 - \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0; \\ c_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + c_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + c_{55} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ -(c_{12} + c_{44}) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (c_{22} - c_{66}) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \right. \\ \left. + (c_{23} + c_{55}) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] + X_2 - \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_{66} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + c_{55} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \\
& + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ - (c_{13} + c_{66}) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (c_{23} + c_{55}) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \right. \\
& \left. + (c_{33} - c_{44}) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] + X_3 - \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0,
\end{aligned} \tag{1.3.29}$$

где

$$\begin{aligned}
c_{11} &= E_1 \frac{1 - \nu_{32} \nu_{23}}{M}; \quad c_{12} = c_{21} = E_1 \frac{\nu_{31} \nu_{23} + \nu_{21}}{M}; \\
c_{22} &= E_2 \frac{1 - \nu_{13} \nu_{31}}{M}; \quad c_{13} = c_{31} = E_3 \frac{\nu_{12} \nu_{23} + \nu_{13}}{M}; \\
c_{33} &= E_3 \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{M}; \quad c_{23} = c_{32} = E_2 \frac{\nu_{12} \nu_{31} + \nu_{32}}{M}; \\
c_{44} &= G_{12}; \quad c_{55} = G_{23}; \quad c_{66} = G_{31}; \\
M &= 1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} (\nu_{31} \nu_{12} + \nu_{32}) - \\
& - \nu_{13} (\nu_{21} \nu_{32} + \nu_{31}).
\end{aligned} \tag{1.3.30}$$

Уравнения равновесия в декартовых координатах для трансверсально - изотропного тела ( $Ox_1x_2$  - плоскость изотропии). Уравнения равновесия будут иметь вид (1.3.29) при значениях упругих постоянных  $c_{ij}$ , определяемых по формулам:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= c_{22} = E \frac{1 - \nu_1^2}{M}; \quad c_{12} = c_{21} = E \frac{\nu + \frac{E}{E_3} \nu_1^2}{M}; \\
c_{33} &= E \frac{1 - \nu^2}{M}; \quad c_{23} = c_{13} = c_{32} = c_{31} = E \frac{(1 + \nu) \nu_1}{M}; \\
c_{44} &= G; \quad c_{55} = c_{66} = G_1; \\
M &= 1 - \nu^2 - 2 \frac{E}{E_3} \nu_1^2 (1 + \nu).
\end{aligned} \tag{1.3.31}$$

Уравнения равновесия в декартовых координатах для изотропного тела (уравнения Ламе):

$$\begin{aligned}
& G \left( \Delta u_i + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + X_i - \\
& - \frac{E\alpha}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3),
\end{aligned} \tag{1.3.32}$$

где

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3};$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

В уравнениях (1.3.32) дополнительно учитывается влияние температуры  $T$ .

Уравнения равновесия в цилиндрических координатах для изотропного тела:

$$G \left[ \Delta u_r + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \left( \frac{u_r}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] -$$

$$-\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + X_r = 0;$$

$$G \left[ \Delta u_\varphi + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial \theta}{r d\varphi} - \left( \frac{u_\varphi}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] -$$

$$-\rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} + X_\varphi = 0;$$

$$G \left[ \Delta u_z + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + X_z = 0,$$

(1.3.33)

где  $u_r$ ,  $u_\varphi$ ,  $u_z$  - проекции вектора перемещения на оси  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ ;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- оператор Лапласа в цилиндрических координатах.

### 1.3.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Используя зависимости (1.3.2), уравнения совместности деформации (1.1.33) и дифференциальные уравнения равновесия (1.2.18), можно получить шесть дифференциальных уравнений (уравнения Бельтрами - Митчела) [19, 25, 32, 51]:

$$\Delta\sigma_{11} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} =$$

$$= -\frac{1}{1-\nu} \left[ (2-\nu) \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \nu \left( \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \right) \right];$$

$$\Delta\sigma_{22} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} =$$

$$= -\frac{1}{1-\nu} \left[ (2-\nu) \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \nu \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \right) \right];$$

$$\Delta\sigma_{33} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} =$$

$$= -\frac{1}{1-\nu} \left[ (2-\nu) \frac{\partial X_3}{\partial x_3} + \nu \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) \right];$$

$$\Delta\sigma_{12} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_2} = - \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right);$$

$$\Delta\sigma_{13} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_3} = - \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_3} + \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \right);$$

$$\Delta\sigma_{23} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2 \partial x_3} = - \left( \frac{\partial X_2}{\partial x_3} + \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \right);$$

где

$$\sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Система шести дифференциальных уравнений (1.3.34) содержит шесть неизвестных компонентов напряжения  $\sigma_{ij}$  и может быть использована для решения прямой задачи теории упругости.

### 1.3.7. ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Дифференциальные уравнения равновесия по объему тела:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + X_1 = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + X_2 = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 = 0.$$

Силовые граничные условия на части поверхности  $S_1$ :

$$F_{v1} = \bar{F}_{v1}; \quad F_{v2} = \bar{F}_{v2}; \quad F_{v3} = \bar{F}_{v3},$$

где

$$F_{v1} = \sigma_{11}l_{v1} + \sigma_{12}l_{v2} + \sigma_{13}l_{v3};$$

$$F_{v2} = \sigma_{21}l_{v1} + \sigma_{22}l_{v2} + \sigma_{23}l_{v3};$$

$$F_{v3} = \sigma_{31}l_{v1} + \sigma_{32}l_{v2} + \sigma_{33}l_{v3}.$$

Кинематические граничные условия на части поверхности  $S_2$ :

$$u_1 = \bar{u}_1; \quad u_2 = \bar{u}_2; \quad u_3 = \bar{u}_3.$$

Геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3};$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right);$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right);$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right).$$

Физические уравнения:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{11}}; \quad \sigma_{12} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{12}}; \quad \dots; \quad \sigma_{23} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{23}}.$$

Для физически линейной задачи связь между компонентами напряжения и деформации определяется соотношениями закона Гука для изотропного тела (1.3.26).

Компоненты перемещения, деформации и напряжения истинного равновесного состояния геометрически линейной задачи теории упругости должны удовлетворять всей совокупности выписанных выше уравнений и соотношений.

## Глава 1.4

**ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И  
СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ,  
ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И  
ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ  
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ  
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Состояние статического равновесия или движения деформируемых систем наряду с дифференциальными уравнениями можно описывать с помощью вариационных принципов. Так, положение равновесия консервативной системы есть положение, в котором сумма работ всех сил (внутренних и внешних) системы имеет минимальное значение.

Указанное положение позволяет заменить проблему решения систем дифференциальных уравнений равновесия рассматриваемого тела проблемой определения функций, обеспечивающих минимум некоторого функционала, в данном случае суммой работ всех сил, действующих на систему. Для определения этого минимума используют так называемые *прямые вариационные методы*, основы которых были заложены в работах Рэля и Ритца.

В общем случае все основные уравнения механики деформируемого твердого тела или любую их часть можно заменить условием стационарности некоторого функционала.

Использование вариационных принципов позволяет получить приближенное решение крайних задач механики твердого деформируемого тела по существу с любой наперед заданной точностью.

В настоящей главе для сплошных тел, находящихся в равновесии, формулируются два основных вариационных принципа: *принцип возможных перемещений* и *принцип возможных напряжений*. Приведены некоторые обобщения этих принципов.

В общем случае оба основных вариационных принципа носят статико-геометрический характер, т.е. справедливы при любых свойствах материала тела. Каждый вариационный принцип утверждает, что для некоторого класса задач, если заданы условия задачи, из всех мыслимых состояний (процессов), совместимых с этими условиями, в действительности реализуется такое состояние (процесс), которое придает определенному, характерному для этого принципа и класса задач, функционалу стационарное значение.

Иногда, о чем уже упоминалось выше, можно говорить не о стационарном, а об экстремальном значении функционала.

Вариационные принципы позволяют с единых идейных позиций рассмотреть поведение совершенно различных физических процессов. Они нашли широкое использование и при ре-

шении задач механики деформируемых сред. Ниже приведено краткое их содержание, проиллюстрированное примерами.

**1.4.1. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
И СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ**

**Линейно и нелинейно деформируемые упругие системы.** Совершенно упругие тела делятся на два класса: линейно деформируемые и нелинейно деформируемые. У линейно деформируемых систем зависимость между внешними нагрузками и перемещениями (деформациями, напряжениями, внутренними усилиями) линейна. Для линейно деформируемых систем все основные уравнения: равновесия; совместности деформации и физические, составленные для рассматриваемой конструкции, - линейные.

**Обобщенные перемещения и обобщенные силы.** Под *обобщенными перемещениями* понимают такую совокупность некоторых независимых параметров, которая вполне определяет перемещения всех точек рассматриваемого тела. При этом произвольные изменения обобщенных перемещений (координат) не приводят к нарушению кинематических связей, наложенных на систему.

**Пример 1.** Если перемещения свободно опертой балки длиной  $l$  представить в виде

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin \frac{k\pi x}{l},$$

то в соответствии с данным выше определением коэффициенты  $q_k$  можно рассматривать в качестве обобщенных координат.

Обобщенные силы  $Q_k$  не могут задаваться произвольно, а должны соответствовать выбранному обобщенным координатам  $q_k$ . По определению, *обобщенная сила*  $Q_k$  есть коэффициент при приращении обобщенной координаты  $\delta q_k$  в общем выражении для работы всех внешних сил, приложенных к системе, на этом перемещении:

$$\delta U_k = Q_k \delta q_k. \quad (1.4.1)$$

**Пример 2.** На балку, изображенную на рис. 1.4.1, действуют распределенная нагрузка интенсивностью  $q(x)$ , сосредоточенная сила  $P$  в сечении  $x = c_1$  и момент  $M$  в сечении  $x = c_2$ . Упругая линия балки представлена в виде

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \varphi_k(x),$$

где  $\varphi_k(x)$  - известные координатные функции (см. п. 1.4.2).

Требуется найти обобщенные силы  $Q_k$ .

**Решение.** Вариация перемещения балки

$$\delta w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta q_k \varphi_k(x).$$

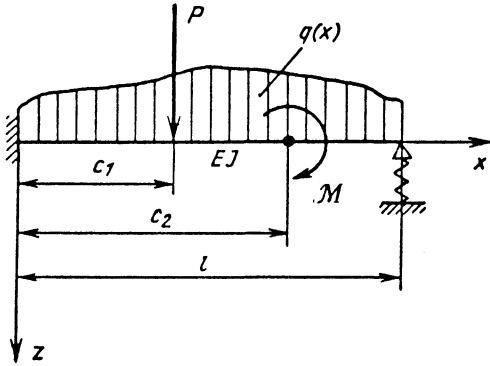


Рис. 1.4.1. К определению обобщенной силы  $Q_k$

На этой вариации перемещения внешние силы совершают работу

$$\delta U = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int_0^l q(x) \varphi_k(x) dx + P \varphi_k(c_1) + M \varphi_k'(c_2) \right] \delta q_k.$$

Отсюда согласно (1.4.1)

$$Q_k = \int_0^l q(x) \varphi_k(x) dx + P \varphi_k(c_1) + m \varphi_k'(c_2).$$

**Пример 3.** Тело нагружено объемными силами  $\bar{X}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и поверхностными силами  $\bar{F}_{vi}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) на части поверхности тела  $S_1$ . Компоненты перемещения заданы в виде

$$u_i(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} q_{ik} \varphi_{ik}(x, y, z), \quad (i = 1, 2, 3),$$

где  $\varphi_{ik}(x, y, z)$  - координатные функции.

Требуется найти обобщенные силы  $Q_{ik}$ .  
Р е ш е н и е. Вариация перемещения

$$\delta u_i(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta q_{ik} \varphi_{ik}(x, y, z).$$

На этой вариации перемещения внешние силы совершают работу

$$\delta U = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \iiint_V \bar{X}_i \varphi_{ik} dV + \iint_{S_1} \bar{F}_{vi} \varphi_{ik} dS \right] \delta q_{ik}.$$

Отсюда

$$Q_{k_i} = \iiint_V \bar{X}_i \varphi_{ik} dV + \iint_{S_1} \bar{F}_{vi} \varphi_{ik} dS.$$

**Теорема Лагранжа.** В положении равновесия тела производная от потенциальной энергии де-

формации по обобщенной координате равна соответствующей обобщенной силе

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = Q_k, \quad (1.4.2)$$

где  $\Pi = \iiint_V W dV$  - потенциальная энергия тела.

**Теорема Кастильяно.** Частная производная от дополнительной потенциальной энергии тела по обобщенной силе равна соответствующему этой силе обобщенному перемещению

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial Q_k} = q_k, \quad (1.4.3)$$

где  $\Pi' = \iiint_V W' dV$  - дополнительная потенциальная энергия тела.

Для линейно деформируемой системы  $\Pi' = \Pi$  и, следовательно, формула (1.4.3) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_k} = q_k. \quad (1.4.4)$$

**Пример 4.** Воспользовавшись теоремой Кастильяно, найти прогиб призматической консольной балки, изображенной на рис. 1.4.2, в сечении  $x = l$ .

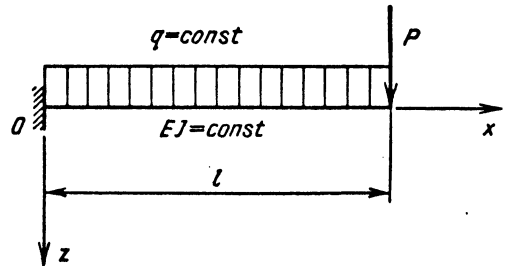


Рис. 1.4.2. К определению прогиба  $w(l)$

Р е ш е н и е. Принимая в качестве обобщенной силы силу  $P$ , для линейно деформируемой системы согласно формуле (1.4.4)

$$w(l) = \frac{\partial \Pi}{\partial P}.$$

Потенциальная энергия балки, если ограничиться лишь учетом энергии изгиба,

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x)}{EJ} dx$$

и, следовательно,

$$w(l) = \int_0^l \frac{M(x)}{EJ} \frac{\partial M(x)}{\partial P} dx.$$

Подставляя сюда выражение для изгибающего момента

$$M(x) = P(l-x) + \frac{q(l-x)^2}{2},$$

получаем

$$w(l) = \frac{1}{EJ} \left( \frac{Pl^3}{3} + \frac{ql^4}{8} \right).$$

Если в состав нагрузки рассматриваемой системы обобщенная сила, соответствующая искомому перемещению, не входит, следует ввести в систему фиктивную силу  $Q_\Phi$ , которую после нахождения общего выражения для обобщенного перемещения положить равной нулю, т.е.

$$q_{Q_\Phi} = \left( \frac{d\Pi'}{\partial Q_\Phi} \right)_{Q_\Phi=0} \quad (1.4.5)$$

**Теорема о наименьшей работе.** Истинные значения лишних неизвестных (реакции статически неопределимой системы, значения которых не могут быть определены из уравнений равновесия) соответствуют условию стационарности дополнительной потенциальной энергии тела:

$$\delta\Pi'(Q, R) = 0. \quad (1.4.6)$$

Здесь дополнительная потенциальная энергия  $\Pi'$  должна быть представлена в виде функции внешней нагрузки  $Q$  и лишних реакций  $R$ .

Для линейно деформируемой системы зависимость (1.4.6) преобразуется к виду

$$\delta\Pi(Q, R) = 0. \quad (1.4.6')$$

**Теорема о взаимности работ для линейно деформируемой системы.** Рассмотрим для такой системы два равновесных состояния. Первое состояние вызывается приложением к системе (телу) обобщенных сил  $Q_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ); второе состояние вызывается приложением к телу обобщенных сил  $R_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ). Теорема о взаимности работ гласит: при действии на линейно деформируемое тело поочередно двух систем нагрузок работа сил первого состояния ( $Q_k$ ) на соответствующих им перемещениях ( $r_k$ ), вызванных действием сил второго состояния, равна работе сил второго состояния ( $R_j$ ) на соответствующих им перемещениях ( $q_j$ ), вызванных действием на тело сил первого состояния:

$$\sum_{k=1}^m Q_k r_k = \sum_{j=1}^n R_j q_j. \quad (1.4.7)$$

Если первое состояние тела вызывается действием объемных ( $X'_i$ ) и поверхностных ( $F'_{vi}$ ) сил (вызываемые их действием перемещения равны  $u'_i$ ), а второе состояние тела вызывается силами  $X''_i$  и  $F''_{vi}$  (вызываемые этими силами перемещения равны  $u''_i$ ), тогда на основании (1.4.7) можем записать

$$\iiint_V X'_i u''_i dV + \iint_S F'_{vi} u''_i dS = \iiint_V X''_i u'_i dV + \iint_S F''_{vi} u'_i dS. \quad (1.4.8)$$

Еще одна формулировка теоремы о взаимности работ может быть получена непосредственно из (1.4.8):

$$\iiint_V \sigma'_{ij} \varepsilon''_{ij} dV = \iiint_V \sigma''_{ij} \varepsilon'_{ij} dV. \quad (1.4.9)$$

#### 1.4.2. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

**Принцип возможных перемещений.** Рассмотрим некоторое тело, нагруженное объемными силами  $\bar{X}_i$  и поверхностными  $\bar{F}_{vi}$  на части поверхности  $S_1$ . Оставшаяся часть поверхности тела  $S_2$  имеет заданные перемещения (кинематические граничные условия)

$$u_i = \bar{u}_i \text{ на } S_2 \quad (1.4.10)$$

Тогда согласно принципу возможных перемещений для тела, находящегося в положении равновесия, сумма работ всех действующих на него внешних ( $\delta U$ ) и внутренних ( $-\delta\Pi$ ) сил на любой системе возможных перемещений равна нулю:

$$\delta\Pi - \delta U = 0, \quad (1.4.11)$$

где

$$\delta\Pi = \iiint_V \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV \quad (1.4.12)$$

- приращение потенциальной деформации тела;

$$\delta U = \iiint_V \bar{X}_i \delta u_i dV + \iint_{S_1} \bar{F}_{vi} \delta u_i dS \quad (1.4.13)$$

- работа внешних объемных и поверхностных сил на возможных перемещениях.

С учетом (1.4.12) и (1.4.13) зависимость (1.4.11) примет вид

$$\iiint_V \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV - \iiint_V \bar{X}_i \delta u_i dV - \iint_{S_1} \bar{F}_{vi} \delta u_i dS = 0. \quad (1.4.14)$$

Вариационный принцип, выраженный формулой (1.4.14), часто именуют *принципом Лагранжа*. В такой формулировке принцип мо-



жет быть использован для решения геометрически и физически нелинейных задач.

Выполнение условия (1.4.14) приводит к тождественному выполнению всех уравнений равновесия по объему тела и естественных (силовых) граничных условий на части поверхности  $S_1$ . Поскольку решение уравнения (1.4.14) строится на классе геометрически возможных перемещений и, следовательно, условия сплошности тождественно выполняются, то компоненты перемещения  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), удовлетворяющие уравнению (1.4.14), будут истинными.

**Функция работы внешних сил.** Для сил, изменением величины и направления действия которых при возможных перемещениях можно пренебречь, при использовании принципа возможных перемещений удобно ввести в рассмотрение *функцию работы внешних сил*

$$U = \iiint_V \bar{X}_i u_i dV + \iint_{S_1} \bar{F}_{vi} u_i dS. \quad (1.4.15)$$

С учетом выражения (1.4.15) зависимость (1.4.14) переписывается в виде

$$\delta \mathcal{E}_1 = \delta(\Pi - U) = 0, \quad (1.4.16)$$

где

$$\mathcal{E}_1 = \Pi - U = \Pi - \iiint_V \bar{X}_i u_i dV - \iint_{S_1} \bar{F}_{vi} u_i dS. \quad (1.4.17)$$

- полная энергия деформируемого тела.

Таким образом, в состоянии равновесия полная энергия  $\mathcal{E}_1$  рассматриваемой системы принимает стационарное значение. При этом возможны следующие формы равновесия:

устойчивое  $\mathcal{E}_1 = \min, \delta \mathcal{E}_1 = 0, \delta^2 \mathcal{E}_1 > 0$ ;

неустойчивое  $\mathcal{E}_1 = \max, \delta \mathcal{E}_1 = 0, \delta^2 \mathcal{E}_1 < 0$ ;

безразличное  $\mathcal{E}_1 = \text{const}, \delta \mathcal{E}_1 = 0, \delta^2 \mathcal{E}_1 = 0$ .

$$(1.4.18)$$

Приведенные условия составляют сущность принципа Дирихле, представляющего собой достаточный критерий для оценки состояния равновесия рассматриваемого тела.

В следующих нескольких параграфах излагаются приближенные методы, основанные на использовании принципа возможных перемещений.

#### 1.4.3. МЕТОД РИТЦА [24, 27, 35, 37, 42, 51]

**Основные положения метода.** Пусть имеется тело, нагруженное объемными  $\bar{X}_i$  и поверхностными  $\bar{F}_{vi}$  силами на части поверхности  $S_1$ . На оставшейся части поверхности  $S_2$  наложены определенные геометрические связи

$$u_i = \bar{u}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.4.19)$$

Неизвестные компоненты перемещений  $u_i(x_1, x_2, x_3)$  находят в виде

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_{i0}(x_1, x_2, x_3) + \sum_{k=1}^{N_i} a_{ik} f_{ik}(x_1, x_2, x_3), \quad (1.4.20)$$

где  $f_{ik}(x_1, x_2, x_3)$ , ( $k=1, 2, \dots, N_i$ ) - система так называемых *координатных функций*, удовлетворяющих условиям линейной независимости и полноты [3, 23];  $a_{ik}$  - параметры, подлежащие определению.

Выражение (1.4.20) должно удовлетворять при произвольных значениях параметров  $a_{ik}$  условиям (1.4.19). Это, в частности, будет выполнено, если функции  $u_{i0}$  и  $f_{ik}$  удовлетворяют следующим дополнительным условиям:

$$u_{i0} = \bar{u}_{i0}, \quad f_{ik} = 0 \in S_2.$$

При соблюдении этих условий вариации перемещений  $\delta u_i$  будут удовлетворять граничным условиям

$$\delta u_i = 0 \in S_2 \quad (1.4.21)$$

и, следовательно, могут приниматься в качестве возможных перемещений.

В отдельных случаях при применении вариационных методов, в частности метода Ритца, можно получить вполне удовлетворительную точность при использовании в выражениях (1.4.20) систем функций, не удовлетворяющих условиям полноты.

Для отыскания постоянных  $a_{ik}$  следует предварительно получить выражения для потенциальной энергии  $\Pi$  и работы внешних сил  $U$  в функции от компонентов перемещения.

Подстановка выражений (1.4.20) для компонентов перемещения в основное уравнение принципа Лагранжа (1.4.16), если учесть произвольность вариаций  $\delta a_{ik}$ , позволяет получить систему основных уравнений метода Ритца:

$$\frac{\partial(\Pi - U)}{\partial a_{ik}} = 0, \quad (1.4.22)$$

или

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_{ik}} - \iiint_V \bar{X}_i f_{ik} dV - \iint_{S_1} \bar{F}_{vi} f_{ik} dS = 0, \quad (1.4.23)$$

$$(i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, N_i)$$

для определения неизвестных параметров  $a_{ik}$ .

Расчетный алгоритм метода Ритца очень прост и включает выполнение следующих основных операций:

1) выбор координатных функций  $f_{ik}$  и запись на их основе выражений (1.4.20) для компонентов перемещений  $u_i$ ;

2) подстановку выбранных выражений для перемещений в уравнение метода Ритца (1.4.22) или (1.4.23). После выполнения всех необходимых вычислительных операций получаем систему линейных (для линейных задач) или нели-

нейных алгебраических уравнений относительно параметров  $a_{ik}$ ;

3) определение параметров  $a_{ik}$  из совместного решения системы алгебраических уравнений, полученных в п. 2;

4) определение компонентов перемещений по формулам (1.4.20);

5) определение интересующих компонентов деформации и напряжения по найденным в п. 4 компонентам перемещения с помощью соответствующих зависимостей теории упругости.

**Выбор координатных функций.** Степень успешности применения метода Ритца для решения практических задач во многом зависит от того, насколько удачно выбрана система координатных функций. Разумно выбранная система координатных функций позволяет ограничиться в решении малым числом членов ряда и существенно сократить объем вычислений.

В качестве координатных функций при решении одномерных краевых задач используют степенные, показательные, тригонометрические и специальные функции. Однако не всегда можно в чистом виде какую-либо из упомянутых выше систему функций принять в качестве координатных. Систему координатных функций часто приходится строить непосредственно при решении задачи. При решении двух- и трехмерных задач координатные функции, как правило, задают в виде произведения одномерных функций.

**Пример 1.** Построить систему координатных функций для аппроксимации прогиба балки, один конец которой жестко заделан, а второй - свободно оперт на жесткую опору (см. рис. 1.4.3).

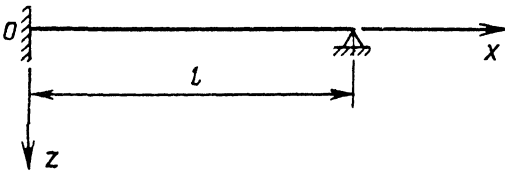


Рис. 1.4.3. К определению координатной функции

**Решение.** Граничные условия такой балки: при  $x=0$   $w=w'=0$ ; при  $x=l$   $w=w' \neq 0$ .

Подчеркнутые граничные условия являются кинематическими. Их выполнение при выборе координатных функций в методе Ритца является обязательным.

Зададим упругую линию балки в форме степенного ряда

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Кинематические условия при  $x=0$  удовлетворяются, если положить  $a_0=a_1=0$ .

Подчиняя далее полученное выражение для  $w(x)$  условию  $w(l)=0$ , получаем

$$a_2 l^2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_k l^k = 0; \quad a_2 = - \sum_{k=3}^{\infty} a_k l^{k-2}.$$

В результате упругая линия балки примет вид

$$w(x) = \sum_{k=3}^{\infty} a_k x^2 \left( x^{k-2} - l^{k-2} \right).$$

Отсюда искомое выражение для координатных функций

$$f_k(x) = x^2 \left( x^{k-2} - l^{k-2} \right), \quad (k = 3, 4, \dots).$$

Каждая из функций  $f_k(x)$  удовлетворяет всем кинематическим условиям задачи:

$$f_k(0) = 0; \quad f'_k(0) = 0; \quad f_k(l) = 0, \quad (k = 3, 4, \dots).$$

**Пример 2.** Определить упругую линию непрямоугольной балки жесткостью на изгиб  $EJ(x)$ , лежащей на сплошном упругом основании переменной жесткости  $k(x)$ . Внешняя нагрузка и условия закрепления балки показаны на рис. 1.4.4. Здесь через  $A$  обозначен коэффициент податливости упругой заделки, а через  $A$  - коэффициент податливости упругой опоры.

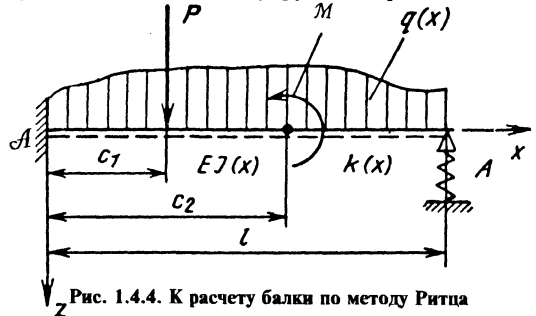


Рис. 1.4.4. К расчету балки по методу Ритца

**Решение.** Из граничных условий балки лишь условие  $w(0)=0$  является кинематическим. Оно удовлетворяется, если выражение для упругой линии балки задается в виде суммы

$$w(x) = \sum_{k=1}^N a_k f_k(x), \quad (1.4.24)$$

где  $f_k(x) = x^k$ ,  $(k = 1, 2, \dots, N)$ .

Определим предварительно значение функционала  $\mathcal{P}_1 = \Pi - U$ .

Потенциальная энергия деформации  $\Pi$  складывается из потенциальных энергий изгиба балки, упругого основания, упругой заделки и упругой опоры:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^l EJ(x) [w''(x)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l k(x) w^2(x) dx + \\ & + \frac{1}{2M} [w'(0)]^2 + \frac{1}{2A} [w(l)]^2. \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

Силовая функция внешних сил  $U$  содержит члены, учитывающие работу поперечной нагрузки  $q(x)$ , сосредоточенной силы  $P$  и момента  $M$ :

$$U = \int_0^l q(x)w(x)dx + Pw(c_1) - Mw'(c_2). \quad (1.4.26)$$

При определении знака для каждого слагаемого в (1.4.26) учтено, что работа положительна, если направление действия нагрузки совпадает с положительным направлением перемещения, на котором эта нагрузка совершает работу.

Подставляя (1.4.24) в выражения (1.4.25) и (1.4.26), получаем

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N A_{ki} a_k a_i; \quad U = \sum_{k=1}^N B_k a_k,$$

где

$$\begin{aligned} A_{ki} &= \int_0^l EJ(\dot{x})f_k'(x)f_i'(x)dx + \\ &+ \int_0^l k(x)f_k(x)f_i(x)dx + \\ &+ \frac{1}{A} f_k'(0)f_i'(0) + \frac{1}{A} f_k(l)f_i(l); \\ B_k &= \int_0^l q(x)f_k(x)dx + Pf_k(c_1) - Mf_k'(c_2). \end{aligned}$$

Воспользовавшись далее уравнениями метода Ритца (1.4.22), получаем систему уравнений для определения параметров  $a_k$ :

$$\sum_{i=1}^N A_{ki} a_i = B_k, \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Зная параметры  $a_k$ , с помощью выражения (1.4.24) находим упругую линию, а затем, при необходимости, и все остальные элементы изгиба балки.

#### 1.4.4. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД БУБНОВА - ГАЛЕРКИНА [37, 46]

**Основные положения метода.** Обобщенный метод Бубнова - Галеркина является, по существу, несколько иной формой записи основных уравнений метода Ритца (1.4.22).

Пусть имеется тело, нагруженное объемными  $\bar{X}_i$  и поверхностными  $\bar{F}_{vi}$  силами на части поверхности  $S_1$ . На оставшейся части поверхности  $S_2$  наложены геометрические связи (1.4.21).

В качестве неизвестных компонентов перемещений принимаются, как и в методе Ритца, выражения (1.4.20).

Система основных уравнений метода может быть получена непосредственно из (1.4.22). Для

задачи линейной теории упругости она имеет вид

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{X}_i \right) \delta u_i dV - \iint_{S_1} (\sigma_{ij} l_{vj} - \bar{F}_{vi}) \delta u_i dS = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.4.27)$$

Уравнение (1.4.27) можно трактовать как условие равенства нулю суммы работ всех внешних и внутренних сил упругой системы на соответствующих возможных перемещениях.

В уравнениях (1.4.27) в круглых скобках под знаком интеграла стоят соответственно основные уравнения равновесия объемной задачи теории упругости и силовые (естественные) граничные условия.

Для задач нелинейной теории упругости входящие в (1.4.27) линейные уравнения равновесия и граничные условия следует заменить на соответствующие нелинейные зависимости.

Внося сюда выражения для вариаций перемещений (1.4.20)

$$\delta u_i = \sum_{k=1}^{N_i} \delta a_{ik} f_{ik}(x_1, x_2, x_3), \quad (i = 1, 2, 3)$$

и учитывая произвольность и линейную независимость между собой  $\delta a_{ik}$ , получаем систему уравнений обобщенного метода Бубнова - Галеркина

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{X}_i \right) f_{ik}(x_1, x_2, x_3) dV - \iint_{S_1} (\sigma_{ij} l_{vj} - \bar{F}_{vi}) \times f_{ik}(x_1, x_2, x_3) dS = 0, \quad (1.4.28)$$

$$(i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, N_i).$$

Последовательно используя физические уравнения и геометрические соотношения, уравнения равновесия и силовые граничные условия можно переписать в перемещениях:

$$A_i(u_1, u_2, u_3) + \bar{X}_i = 0 \in V; \quad (1.4.29)$$

$$B_i(u_1, u_2, u_3) - \bar{F}_{vi} = 0 \in S_1, \quad (i=1, 2, 3), \quad (1.4.30)$$

где  $A_i$  и  $B_i$  - некоторые дифференциальные операторы.

Тогда уравнения метода Бубнова - Галеркина (1.4.28) примут вид

$$\begin{aligned} &\iiint_V [A_i(u_1, u_2, u_3) + \bar{X}_i] f_{ik}(x_1, x_2, x_3) dV - \\ &- \iint_{S_1} [B_i(u_1, u_2, u_3) - \bar{F}_{vi}] f_{ik}(x_1, x_2, x_3) dS = 0, \end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, \dots, N_i). \quad (1.4.31)$$

Подставляя в уравнения (1.4.31) выражение (1.4.20) для  $u_i$ , после выполнения операций интегрирования получаем систему алгебраических уравнений для определения неизвестных параметров  $a_{ik}$ .

**Пример.** Для консольной призматической балки (рис. 1.4.5), загруженной на конце силой  $P$ , требуется с помощью обобщенного метода Бубнова - Галеркина определить приближенное выражение упругой линии

$$w(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x), \quad (1.4.32)$$

где  $\varphi_1(x) = x^2$ ;  $\varphi_2(x) = x^3$ .

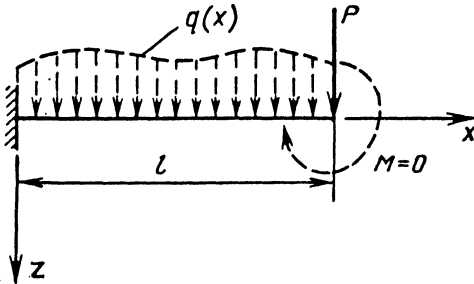


Рис. 1.4.5. К расчету балки обобщенным методом Бубнова - Галеркина

**Решение.** Выпишем уравнение изгиба и граничные условия балки.

Уравнение изгиба балки

$$EJw^{IV}(x) - q(x) = 0. \quad (1.4.33)$$

Нагрузка  $q(x)$  включена для удобства дальнейших рассуждений.

Граничные условия с учетом правила знаков для изгибающих моментов и перерезывающих сил запишутся так:

при  $x = 0$   $w = 0, w' = 0$ ;

при  $x = l$   $M - EJw'' = 0, P + EJw''' = 0$ .

Для рассматриваемой балки  $M=0$ .

Выражение (1.4.32) для балки удовлетворяет двум кинематическим граничным условиям при  $x=0$ ; оба же силовых граничных условия при  $x=l$  оказываются невыполненными.

Уравнение обобщенного метода Бубнова - Галеркина (1.4.31) применительно к рассматриваемой задаче запишется в виде

$$\int_0^l (EJw^{IV} - q)\delta w dx - \left[ (EJw'' - M)\delta w' \right]_{x=l} + \left[ (EJw''' + P)\delta w \right]_{x=l} = 0. \quad (1.4.34)$$

Для избежания ошибки в выборе знака (+ или -) перед каждым членом уравнения метода Бубнова - Галеркина рекомендуется ориентироваться на знак работы, совершаемой внешними

силами. В рассматриваемом случае поперечная нагрузка  $q(x)$ , сила  $P$  и момент  $M$  производят положительную работу.

Поскольку для рассматриваемой задачи  $q(x)=0, M=0$ , уравнение (1.4.34) запишется так:

$$\int_0^l EJw^{IV}(x)\delta w(x) dx + \left[ EJw''\delta w' \right]_{x=l} - \left[ (EJw''' + P)\delta w \right]_{x=l} = 0.$$

Из этого равенства, если учесть выражение (1.4.32), получаем для определения неизвестных  $a_1$  и  $a_2$  следующие два уравнения:

$$\int_0^l EJw^{IV}(x)\varphi_1(x) dx + \left[ EJw''\varphi_1' \right]_{x=l} - \left[ (EJw''' + P)\varphi_1 \right]_{x=l} = 0;$$

$$\int_0^l EJw^{IV}(x)\varphi_2(x) dx + \left[ EJw''\varphi_2' \right]_{x=l} - \left[ (EJw''' + P)\varphi_2 \right]_{x=l} = 0.$$

Подставляя сюда  $w(x)$  и выполняя все необходимые операции, получаем

$$4a_1 + 6la_2 = \frac{Pl}{EJ}; \quad 6a_1 + 12la_2 = \frac{Pl}{EJ},$$

откуда

$$a_1 = \frac{Pl}{2EJ}; \quad a_2 = -\frac{Pl}{6EJ}$$

и, следовательно,

$$w(x) = \frac{Pl^3}{6EJ} \left( 3\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right).$$

Полученное выражение является точным решением рассматриваемой задачи.

#### 1.4.5. МЕТОД БУБНОВА - ГАЛЕРКИНА

[21, 24, 37, 42, 51]

Если выбранные выражения (1.4.20) для перемещений  $u_i$  наряду с кинематическими (главными) граничными условиями удовлетворяют также и силовым (естественным) условиям, то в уравнениях обобщенного метода Бубнова - Галеркина (1.4.31) поверхностные интегралы исчезают, и уравнения принимают вид

$$\iiint_V [A_i(u_1, u_2, u_3) + \bar{X}_i] f_{ik}(x_1, x_2, x_3) dV = 0 \quad (i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots). \quad (1.4.35)$$

Уравнения (1.4.35) являются *уравнениями метода Бубнова - Галеркина*. Внося (1.4.20) в (1.4.35), получаем систему алгебраических уравнений для определения неизвестных параметров  $a_{ik}$ , которые входят в выражения (1.4.20) для перемещений  $u_i(x_1, x_2, x_3)$ .

Метод Бубнова - Галеркина применим и для приближенного решения дифференциальных уравнений, необязательно связанных с какой-либо вариационной проблемой.

**Пример 1.** Найти прогиб призматической свободно опертой балки жесткостью на изгиб  $EJ$ , загруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$ .

**Решение.** Изгиб рассматриваемой балки описывается дифференциальным уравнением

$$EJw^{IV}(x) - q = 0$$

при граничных условиях  $x = 0, x = l: w = w'' = 0$ .

Прогиб ищем в виде

$$w(x) = \sum_{k=1,2,\dots}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.4.36)$$

Выражение (1.4.36) удовлетворяет всем граничным условиям. Это позволяет для определения параметров  $a_k$  воспользоваться методом Бубнова - Галеркина:

$$\int_0^l [EJw^{IV}(x) - q] \sin \frac{i\pi x}{l} dx = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, \infty).$$

Подставив сюда выражение для прогиба из (1.4.36) и выполнив необходимые вычислительные операции, найдем значения параметров  $a_k$ , а затем выражение для прогиба балки

$$w(x) = \frac{4ql^4}{\pi^5 EJ} \sum_{k=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Ряд, стоящий в правой части, суммируется в замкнутом виде, и поэтому

$$w(x) = \frac{ql^4}{24EJ} \frac{x}{l} \left( 1 - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right),$$

что является точным выражением для прогиба рассматриваемой балки.

**Пример 2.** Найти прогиб призматической балки, левый конец которой свободно оперт, а правый - жестко заделан. Поперечная нагрузка изменяется по закону  $q(x) = qx/l$  (рис. 1.4.6).

**Решение.** Изгиб балки описывается дифференциальным уравнением

$$EJw^{IV}(x) - q \frac{x}{l} = 0 \quad (1.4.37)$$

при граничных условиях

$$x = 0: w = w'' = 0; \quad x = l: w = w' = 0. \quad (1.4.38)$$

Может оказаться затруднительным представить функцию  $w(x)$  в форме ряда (1.4.20), удов-

летворяющего всем граничным условиям. В этом случае целесообразно воспользоваться следующим приемом.

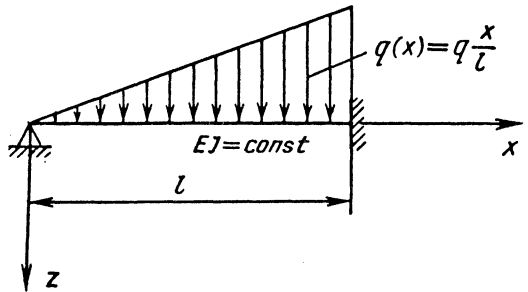


Рис. 1.4.6. К расчету балки методом Бубнова - Галеркина

Решение уравнения (1.4.37) ищется в виде

$$w(x) = w_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad (1.4.39)$$

где  $\varphi_k(x)$  - функции, образующие полную систему и обладающие, по возможности, свойством ортогональности;  $w_0(x)$  - некоторая функция, выбираемая так, чтобы при уже выбранной системе функций  $\varphi_k(x)$  выражение (1.4.39) удовлетворяло всем граничным условиям (1.4.38).

Для рассматриваемой задачи функцию  $w_0(x)$  можно задать полиномом третьей степени, а  $\varphi_k(x)$  выбрать в виде синусов кратных аргументов. Тогда

$$w(x) = c_1 + c_2 \frac{x}{l} + c_3 \frac{x^2}{l^2} + c_4 \frac{x^3}{l^3} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.4.40)$$

Подчинив (1.4.40) граничным условиям (1.4.38), получим

$$w(x) = \left( -\frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3} \right) \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k a_k + w_1(x), \quad (1.4.41)$$

где

$$w_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Внося (1.4.41) в уравнение (1.4.37), получаем

$$EJw_1^{IV}(x) - q \frac{x}{l} = 0.$$

Интегрируя полученное уравнение по методу Бубнова - Галеркина, получаем систему уравнений для определения неизвестных параметров:

$$\int_0^l \left[ EJ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 \sin \frac{k\pi x}{l} - q \frac{x}{l} \right] \sin \frac{i\pi x}{l} dx = 0$$

(i = 1, 2, ..., ∞).

Отсюда

$$a_k = \frac{2ql^4}{\pi^5 EJ} \frac{(-1)^{k+1}}{k^5}$$

и далее

$$w(x) = \frac{ql^4}{90EJ} \frac{x}{l} \left( \frac{x^2}{l^2} - 1 \right) + \frac{2ql^4}{\pi^5 EJ} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^5} \times \sin \frac{k\pi x}{l},$$

или, если учесть, что ряд в правой части суммируется в замкнутом виде,

$$w(x) = \frac{ql^4}{120EJ} \frac{x}{l} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right)^2.$$

Полученное выражение для прогиба является точным решением рассматриваемой задачи.

#### 1.4.6. МЕТОД ТРЕФФЦА [32, 37, 46, 50, 51]

Если выражения (1.4.20) для компонентов перемещений выбраны так, что они удовлетворяют кинематическим граничным условиям (1.4.19) и являются частными решениями уравнений равновесия по объему тела, то в уравнениях (1.4.28) обобщенного метода Бубнова - Галеркина объемные интегралы обращаются в нуль и уравнения принимают вид

$$\iint_{S_1} (\sigma_j l_{vj} - \bar{F}_{vi}) f_{ik} dS = 0, \quad (i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, N_i)$$

(1.4.42)

или, если переписать силовые условия в перемещениях [см.(1.4.30)],

$$\iint_{S_1} [B_i(u_1, u_2, u_3) - \bar{F}_{vi}(x_1, x_2, x_3)] f_{ik} dS = 0,$$

$$(i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, N_i).$$

(1.4.43)

Уравнения (1.4.42) или (1.4.43) являются уравнениями метода Треффца.

Внося выражения (1.4.20) для перемещений  $u_i$  в (1.4.43), получаем необходимую систему алгебраических уравнений для определения параметров  $a_{ik}$ , входящих в выражения для перемещений  $u_i(x_1, x_2, x_3)$ .

#### 1.4.7. МЕТОД ВЗВЕШЕННЫХ НЕВЯЗОК

Этот метод получил в последние годы исключительно широкое использование для приближенного решения краевых задач механики сплошных сред. Из него как частный случай следуют многие другие известные приближенные методы: метод Бубнова - Галеркина, обобщенный метод Бубнова - Галеркина, метод коллокаций. Он служит основой для построения многих современных формулировок методов конечных и граничных элементов. Хотя метод и не относится к числу вариационных, но и он для рассматриваемого в механике твердого деформируемого тела класса задач формально допускает энергетическую трактовку сути производимых при его использовании операций.

Пусть рассматриваемая краевая задача механики твердого деформируемого тела описывается системой дифференциальных уравнений (1.4.29) при силовых граничных условиях (1.4.30) на части поверхности тела  $S_1$  и кинематических граничных условиях  $u_i = \bar{u}_i$  на оставшейся части поверхности  $S_2$ .

Если предположить, что искомые функции  $u_i(x_1, x_2, x_3)$  удовлетворяют всем краевым условиям и уравнениям равновесия (1.4.29), то последние уравнения будут ортогональны к любой системе функций  $\psi_{ik}(x_1, x_2, x_3)$ :

$$\iiint_V [A_i(u_1, u_2, u_3) + \bar{X}_i] \psi_{ik}(x_1, x_2, x_3) dV = 0,$$

$$(i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots).$$

(1.4.44)

Уравнения (1.4.44) и есть уравнения метода взвешенных невязок. Внося в эти уравнения выражение (1.4.20) для  $u_i(x_1, x_2, x_3)$ , получаем систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $a_{ik}$ .

Выбор системы линейно-независимых базисных функций  $\psi_{ik}$  (иногда их называют весовыми, пробными) достаточно произволен.

1. Если в качестве базисных функций  $\psi_{ik}$  выбрать координатные функции, т. е.

$$\psi_{ik}(x_1, x_2, x_3) = f_{ik}(x_1, x_2, x_3),$$

то уравнения (1.4.44) переходят в уравнения метода Бубнова - Галеркина (1.4.35).

2. В качестве базисных функций примем систему дельта-функций Дирака:

$$\psi_{ik} = \delta(\underline{x}_i - \underline{x}_{k_i}), \quad (k_i = 1, 2, \dots),$$

(1.4.45)

где  $\underline{x}_i = (x_1, x_2, x_3)$  - координаты некоторой точки тела;  $\underline{x}_{k_i}$  - координаты совокупности произвольно выбранных точек ( $k_i=1, 2, \dots$ ) по объему тела. Индекс  $i$  подчеркивает, что расположение этой совокупности точек для каждого значения  $i=1, 2, 3$  может отличаться.

По определению дельта-функция Дирака обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \delta(x - x_k) &= 0, \quad x \neq x_k; \\ \delta(x - x_k) &= \infty, \quad x = x_k; \end{aligned} \quad (1.4.46)$$

$$\int_{x < x_k}^{x > x_k} L(x) \delta(x - x_k) dx = L(x_k).$$

Подстановка базисных функций (1.4.45) при учете их свойств (1.4.46) приводит к требованию, чтобы уравнения (1.4.29) выполнялись в ряде заданных точек  $x_{k_i}$  области  $V(x)$ :

$$\begin{aligned} A_i \left[ u_1(x_{k_i}), u_2(x_{k_i}), u_3(x_{k_i}) \right] - \bar{X}_i(x_{k_i}) &= 0, \\ (i = 1, 2, 3; \quad k_i = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (1.4.47)$$

Видим, что полученные уравнения есть уравнения метода коллокаций.

Внося выражения (1.4.20) для перемещений  $u_i$  в (1.4.47), получаем систему алгебраических уравнений для определения неизвестных параметров  $a_{ik}$ .

3. Если выражения (1.4.20) для искомым функций  $u_i$  удовлетворяют лишь кинематическим граничным условиям, то уравнения метода взвешенных невязок принимают вид

$$\begin{aligned} \iiint_V \left[ A_i(u_1, u_2, u_3) + \bar{X}_i \right] \Psi_{ik}(x_1, x_2, x_3) dV - \\ - \iint_{S_1} \left[ B_i(u_1, u_2, u_3) - \bar{F}_{vi} \right] \Psi_{ik}(x_1, x_2, x_3) dS = 0, \\ (i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Внося сюда выражения (1.4.20) для  $u_i$ , получаем систему алгебраических уравнений для определения параметров  $a_{ik}$ .

#### 1.4.8. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

[32, 37, 42, 50, 51]

Принцип возможных напряжений в какой-то степени является антиподом принципа возможных перемещений. Он может быть сформулирован как для линейных, так и нелинейных задач теории упругости и строительной механики.

**Вариационная формула Кастильяно.** По аналогии с понятием возможных перемещений вводится понятие статически возможных напряжений  $\delta\sigma_{ij}$ , при которых не происходит нарушения уравнений равновесия.

В частности, для геометрически линейных задач статически возможные напряжения должны удовлетворять следующим однородным уравнениям равновесия по объему:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \delta\sigma_{ij} = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \in V \quad (1.4.48)$$

и на его поверхности  $S$ , где заданы поверхностные силы,

$$\delta\sigma_{ij} l_{vj} = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \in S_1. \quad (1.4.49)$$

Принцип возможных напряжений формулируется так: *если деформация системы согласуется со всеми внутренними и внешними связями, то сумма работ, производимых возможными изменениями всех внешних и внутренних сил на действительных перемещениях тела, равна нулю.* Его математическая формулировка имеет вид

$$\iiint_V \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} dV - \iint_{S_2} \bar{u}_i \delta F_{vi} dS = 0 \quad (1.4.50)$$

или

$$\delta \mathcal{E}_{II} = \delta(\Pi' - U') = 0, \quad (1.4.51)$$

где  $\Pi' = \iiint_V W' dV$  - дополнительная потенциальная энергия;  $U' = \iint_{S_2} \bar{u}_i F_{vi} dS$ .

Зависимость (1.4.50) часто называют *вариационным уравнением Кастильяно*.

Напряженное состояние, вариации которого удовлетворяют уравнению (1.4.50), отличается от всех других статически возможных напряженных состояний тем, что удовлетворяет не только уравнениям равновесия внутри и на поверхности тела, но и всем условиям сплошности по объему тела и кинематическим условиям на части поверхности  $S_2$ . А если это так, то такое состояние и будет действительным напряженным состоянием, возникающим в теле под действием заданной совокупности внешних сил.

Таким образом, если принцип возможных перемещений заменяет собой все уравнения равновесия, то принцип возможных напряжений заменяет собой все условия сплошности (дифференциальные уравнения Сен-Венана и кинематические краевые уравнения на  $S_2$ ).

**Начало наименьшей работы.** В частном случае жесткого закрепления точек тела на поверхности  $S_2$

$$\bar{u}_i = 0 \in S_2$$

вариационная формула (1.4.50) упрощается и принимает вид

$$\delta \Pi' = 0. \quad (1.4.52)$$

Зависимостью (1.4.52) выражается известное начало наименьшей работы: *из всех статически возможных напряжений истинными будут те, при которых дополнительная потенциальная энергия  $\Pi'$  принимает стационарное значение.*

**Применение принципа возможных изменений напряжений к решению задач теории упругости.**

Пусть некоторое тело нагружено внешними

объемными силами  $\bar{X}_i$ , поверхностными силами  $\bar{F}_{vi}$  на  $S_1$  и кинематически закреплено ( $u_i = \bar{u}_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ )) на части поверхности  $S_2$ .

Компоненты искомого напряженного состояния задаем в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sum_{k=1}^{N_{ij}} a_k^{(ij)-} f_k^{(ij)}(x_1, x_2, x_3), \quad (1.4.53)$$

где  $\sigma_{ij}^0$  - частное решение уравнений равновесия внутри и на поверхности;  $a_k^{(ij)}$  - неизвестные параметры, подлежащие определению;  $f_k^{(ij)}$  - система линейно-независимых функций, удовлетворяющая при каждом значении  $k=1, 2, \dots$  всем однородным уравнениям равновесия по объему тела и на поверхности  $S_1$ .

При таком выборе функций  $\sigma_{ij}^0$  и  $f_k^{(ij)}$  вариации  $\delta\sigma_{ij}$  будут удовлетворять условиям (1.4.48) и (1.4.49) и, следовательно, могут рассматриваться в качестве возможных напряжений.

Представляя связь между компонентами напряжения и деформации зависимостью вида

$$\epsilon_{ij} = N_{ij}(\sigma_{ij}), \quad (1.4.54)$$

где  $N_{ij}$  - в общем случае нелинейный алгебраический оператор, и учитывая, что на основании (1.4.53)

$$\delta\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{ij}} \delta a_k^{(ij)-} f_k^{(ij)}(x_1, x_2, x_3), \quad (1.4.55)$$

из вариационного уравнения Кастильяно (1.4.50) получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров  $a_k^{(ij)}$ :

$$\iiint_V N_{ij}(\sigma_{ij}) f_k^{(ij)} dV - \iint_{S_2} \bar{u}_i f_k^{(ij)} l_{ij} dS = 0, \quad (i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, N_{ij}) \quad (1.4.56)$$

Обратим внимание на то, что в полученных уравнениях отсутствует суммирование по повторяющимся индексам  $i$  и  $j$ .

Внося в формулы (1.4.53) параметры  $a_k^{(ij)}$ , найденные из решения системы (1.4.56), получаем искомые значения действительных компонентов напряжений. Компоненты деформаций определяются по формулам (1.4.54). Для определения перемещений требуется проинтегрировать уравнения, связывающие деформации с компонентами перемещения.

#### 1.4.9. СМЕШАННЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ. ФУНКЦИОНАЛЫ ВАСИДЗУ И РЕЙССНЕГА-ХЕЛЛИНГЕРА [1, 5, 8, 37, 41, 42, 46, 51]

В расчетной практике возможны случаи, когда при использовании принципа возможных перемещений затруднительно подобрать выражения для компонентов перемещений, удовлетворяющие всем кинематическим краевым условиям, или выражения для компонентов напряжений, удовлетворяющие всем уравнениям равновесия при использовании принципа возможных напряжений.

Более того использование принципа возможных перемещений при решении задач с учетом физической и геометрической нелинейности может оказаться практически непригодным вследствие сложности представления потенциальной энергии тела как функции компонентов перемещения. Поэтому в отдельных случаях целесообразно расширить число варьируемых величин и дополнительно к компонентам перемещения  $u_i$  подсоединить в качестве неизвестных компоненты деформации  $\epsilon_{ij}$  и компоненты напряжения  $\sigma_{ij}$ .

**Функционал Васидзу.** Данный функционал обеспечивает независимое варьирование компонентов перемещения, деформации и напряжения.

Пусть имеем некоторое тело, находящееся под действием внешних объемных  $\bar{X}_i$  и поверхностных сил  $\bar{F}_{vi}$  на части поверхности тела  $S_1$ . На оставшейся части поверхности  $S_2$  заданы компоненты перемещения  $\bar{u}_i$ .

Ограничимся рассмотрением геометрической линейной задачи. Зависимости п.1.3.7, определяющие истинное равновесное состояние такой задачи, будут выполнены, если будет обеспечена стационарность функционала:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{III} = & \iiint_V W(\epsilon_{ij}) dV - \iiint_V \bar{X}_i u_i dV - \iint_{S_1} \bar{F}_{vi} u_i dS - \\ & - \iiint_V \sigma_{ij} \left[ \epsilon_{ij} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dV - \\ & - \iint_{S_2} (u_i - \bar{u}_i) F_{vi} dS. \end{aligned} \quad (1.4.57)$$

Функционал (1.4.57) содержит 15 варьируемых величин: 6 компонент деформации  $\epsilon_{ij}$ , 6 - напряжения  $\sigma_{ij}$  и 3 - перемещения  $u_i$ . Их значения определяются из условия стационарности функционала  $\mathcal{E}_{III}$ :



$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{E}_{III} = & \iiint_V \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \delta \varepsilon_{ij} dV - \\
& - \iiint_V \left[ \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \delta \sigma_{ij} dV - \\
& - \iiint_V \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{X}_i \right) \delta u_i dV + \\
& + \iint_{S_1} (\sigma_{ij} l_{vj} - \bar{F}_{vi}) \delta u_i dS - \\
& - \iint_{S_2} (u_i - \bar{u}_i) l_{vj} \delta \sigma_{ij} dS = 0. \quad (1.4.58)
\end{aligned}$$

Неизвестные величины, входящие в (1.4.58), ищут в виде

$$\begin{aligned}
u_i &= \sum a_k^{(i)} f_k^{(i)}(x, y, z); \\
\varepsilon_{ij} &= \sum_{k=1}^{M_{ij}} b_k^{(ij)} \varphi_k^{(ij)}(x, y, z); \\
\sigma_{ij} &= \sum_{k=1}^{P_{ij}} c_k^{(ij)} \psi_k^{(ij)}(x, y, z). \quad (1.4.59)
\end{aligned}$$

Каждая система функций  $f_k^{(i)}$ ,  $\varphi_k^{(ij)}$ ,  $\psi_k^{(ij)}$  (при фиксированных значениях индексов  $i$  и  $j$ ) должна удовлетворять свойствам полноты и линейной независимости.

Внеся выражения (1.4.59) в условие стационарности (1.4.58), получим следующую систему алгебраических уравнений для определения неизвестных параметров  $a_k^{(i)}$ ,  $b_k^{(ij)}$  и  $c_k^{(ij)}$ :

$$\begin{aligned}
\iiint_V \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{X}_i \right) f_k^{(i)} dV + \iint_{S_1} (\bar{F}_{vi} - \sigma_{ij} l_{vj}) f_k^{(i)} dS = 0, \\
(i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, N_i);
\end{aligned}$$

$$\iiint_V \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \varphi_k^{(ij)} dV = 0,$$

$$(i, j = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, M_{ij});$$

$$\begin{aligned}
\iiint_V \left[ \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \psi_k^{(ij)} dV + \\
+ \iint_{S_2} (u_i - \bar{u}_i) l_{vj} \psi_k^{(ij)} dS = 0, \\
(i, j = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, P_{ij}).
\end{aligned}$$

**Функционал Рейсснера-Хеллингера.** Обеспечивает варьирование компонентов перемещения и напряжения. Если компоненты деформации  $\varepsilon_{ij}$  связаны однозначными соотношениями с компонентами напряжения

$$\varepsilon_{ij} = N_{ij}(\sigma_{kl}),$$

то, используя эту зависимость, можно исключить компоненты  $\varepsilon_{ij}$  в (1.4.57). Получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{IV} = & - \iiint_V W'(\sigma_{ij}) dV - \iiint_V \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{X}_i \right) u_i dV + \\
& + \iint_{S_1} (\sigma_{ij} l_{vj} - \bar{F}_{vi}) u_i dS + \iint_{S_2} \sigma_{ij} l_{vi} \bar{u}_i dS. \quad (1.4.60)
\end{aligned}$$

Функционал (1.4.60) содержит девять варьируемых величин: шесть компонентов напряжения  $\sigma_{ij}$  и три компонента перемещения  $u_i$ .

Условие стационарности функционала (1.4.60):

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{E}_{IV} = & - \iiint_V \left( \bar{X}_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) \delta u_i dV + \\
& + \iint_{S_1} (\sigma_{ij} l_{vj} - \bar{F}_{vi}) \delta u_i dS - \iint_{S_2} (u_i - \bar{u}_i) l_{vj} \delta \sigma_{ij} dS - \\
& - \iiint_V N_{ij}(\sigma_{kl}) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \delta \sigma_{ij} dV = 0 \quad (1.4.61)
\end{aligned}$$

эквивалентно выполнению всех уравнений равновесия и уравнений сплошности по объему и на поверхности тела. После подстановки в него выражений для  $u_i$  и  $\sigma_{ij}$  из (1.4.59) для определения неизвестных параметров  $a_k^{(i)}$  и  $c_k^{(ij)}$  получим следующую систему уравнений:

$$\iiint_V \left( \bar{X}_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) f_k^{(i)} dV + \iint_{S_1} (\bar{F}_{vi} - \sigma_{ij} l_{vj}) f_k^{(i)} dS = 0,$$

$$(i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, N_i);$$

$$\iiint_V \left[ N_{ij}(\sigma_{kl}) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \psi_k^{(j)} dV$$

$$+ \iint_{S_2} (u_i - \bar{u}_i) l_{vj} \psi_k^{(j)} dS = 0,$$

$$(i, j = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, P_{ij}).$$

Методы, основанные на использовании условий стационарности так называемых *смешанных функционалов* ЭП и ЭIV, называют, в свою очередь, *смешанными вариационными методами*.

Из условия стационарности (1.4.61) как частный случай могут быть получены математические формулировки принципов возможных изменений перемещений и напряжений, которые были изложены в п. 1.4.6 и 1.4.7.

**Модифицированный принцип возможных перемещений.** Изложенный в п. 1.4.2 принцип возможных перемещений требует, чтобы выбранные перемещения удовлетворяли условию  $\delta u_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) на  $S_2$ .

Это ограничение можно устранить, если воспользоваться условием стационарности функционала Рейсснера-Хеллингера и дополнительно учесть, что при решении задачи в перемещениях условия сплошности по объему тела выполняются автоматически. При этом условие (1.4.61) примет вид

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_V = & - \iiint_V \left( \bar{X}_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) \delta u_i dV + \iint_{S_1} (\sigma_{ij} l_{vj} - \bar{F}_{vi}) \times \\ & \times \delta u_i dS - \iint_{S_2} (u_i - \bar{u}_i) l_{vj} \delta \sigma_{ij} dS = 0 \end{aligned} \quad (1.4.62)$$

или

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_V = & \iiint_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV - \iiint_V \bar{X}_i \delta u_i dV - \iint_{S_1} \bar{F}_{vi} \delta u_i dS - \\ & - \iint_{S_2} F_{vi} \delta u_i dS - \iint_{S_2} (u_i - \bar{u}_i) \delta F_{vi} dS = 0. \end{aligned}$$

Условие стационарности (1.4.62) выражает собой так называемый *модифицированный принцип возможных перемещений*.

Неизвестные компоненты перемещения входят в виде

$$u_i = \sum_{k=1}^{N_i} a_k^{(i)} f_k^{(i)}(x_1, x_2, x_3), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.4.63)$$

где от системы функций  $f_k^{(i)}(x_1, x_2, x_3)$  требуется выполнение лишь их линейной независимости и условия полноты.

Используя далее кинематические соотношения между компонентами перемещений  $u_i$  и компонентами деформации  $\epsilon_{ij}$ , физические зависимости между компонентами напряжения  $\sigma_{ij}$  и компонентами деформации  $\epsilon_{ij}$ , сможем выразить через перемещения сначала деформации  $\epsilon_{ij}$ , а затем и напряжения  $\sigma_{ij}$ :

$$\sigma_{ij} = \sum_{s=1}^{s=3} \sum_{k=1}^{N_s} a_k^{(s)} \sigma_{k,ij}^{(s)}(x_1, x_2, x_3). \quad (1.4.64)$$

Внося выражения  $u_i$  и  $\sigma_{ij}$  соответственно из (1.4.63) и (1.4.64) в условие стационарности (1.4.62) и учитывая зависимости (1.4.29) и (1.4.30), получим систему алгебраических уравнений для определения неизвестных параметров  $a_k^{(i)}$ :

$$\begin{aligned} & \iiint_V [A_i(u_1, u_2, u_3) + \bar{X}_i] f_k^{(i)} dV - \iint_{S_1} [B_i(u_1, u_2, u_3) - \\ & - \bar{F}_{vi}] f_k^{(i)} dS + \iint_{S_2} (u_i - \bar{u}_i) l_{vj} \sigma_{k,ij}^{(i)} dS = 0, \\ & (k = 1, 2, \dots, N_i; i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

#### 1.4.10. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ [37]

Изложенные выше вариационные принципы могут быть применены для решения геометрически нелинейных задач теории упругости. Для этого необходимо внести некоторые изменения в их математические формулировки. Суть этих изменений состоит в следующем:

а) вместо выражений для линейных компонентов  $\epsilon_{ij}$  следует внести нелинейные компоненты деформации  $\epsilon_{ij}$ , определяемые по зависимостям (1.1.10);

б) уравнения равновесия по объему заменить на соответствующие уравнения нелинейной теории упругости (1.2.14), а уравнения равновесия на поверхности  $S_1$  - уравнениями (1.2.13);

в) поверхностные усилия  $F_{vi}$  на части поверхности  $S_2$  определить с помощью зависимостей (1.2.13).

Ниже приведены математические формулировки вариационных принципов нелинейной теории упругости Васидзу и Рейсснера-Хеллингера. Формулировки остальных вариационных принципов могут быть получены из приведенных как частный случай.

В а р и а ц и о н н ы й п р и н ц и п  
В а с и д з у:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_{III}^* = & \iiint_V \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \delta \varepsilon_{ij} dV - \iiint_V \left[ \varepsilon_{ij} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right] \delta \sigma_{ij} dV - \\ & - \iiint_V \left\{ \bar{X}_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \sigma_{kl} \right] \right\} \delta u_i dV + \\ & + \iint_{S_1} \left[ \sigma_{kj} l_{vk} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \bar{F}_{vi} \right] \delta u_i dS - \\ & - \iint_{S_2} (u_i - \bar{u}_i) \delta F_{vi} dS = 0. \end{aligned} \quad (1.4.65)$$

В а р и а ц и о н н ы й п р и н ц и п  
Р е й с с н е р а - Х е л л и н г е р а:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_{IV}^* = & - \iiint_V \left\{ \bar{X}_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \sigma_{kj} \right] \right\} \delta u_i dV + \\ & + \iint_{S_1} \left[ \sigma_{kj} l_{vk} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \bar{F}_{vi} \right] \delta u_i dS - \\ & - \iint_{S_2} (u_i - \bar{u}_i) \delta F_{vi} dS - \iiint_V \left[ \frac{\partial W'}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right] \delta \sigma_{ij} dV = 0, \end{aligned} \quad (1.4.66)$$

где

$$W'(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij} N(\sigma_{kl}) - W(\sigma_{ij}).$$

## Глава 1.5

### МЕТОДЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МКЭ) И ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МГЭ)

МКЭ является одним из наиболее эффективных и общих численных методов решения краевых задач механики сплошных сред, в частности механики деформируемого твердого тела [2, 10, 12, 15, 22, 26, 28, 29, 36, 40, 43, 44, 46, 47].

В гл. 1.4 был изложен ряд вариационных методов решения задач механики деформируемого твердого тела. При их использовании аппроксимацию основных неизвестных осуществляли через координатные функции, которые определялись одним выражением для всей рассматриваемой области  $V$ ; интегралы вычисляли также сразу по всей области.

В методе конечных элементов область разбивают на ряд непересекающихся подобластей  $V_e (e = \overline{1, M})$ , называемых конечными элементами. Для каждой подобласти кусочным образом строят аппроксимации искоемых функций с применением различных базисных (координатных) функций в зависимости от геометрии элемента.

Основные преимущества МКЭ проистекают из его сеточного (разбивка на конечные элементы) и вариационного (использование вариационных принципов) характера. Вариационный подход расширяет класс допустимых функций и, в частности, позволяет конструировать решение при помощи не очень гладких, но, что важно, локализованных функций. Вариационный подход позволяет также исключить из специального рассмотрения естественные граничные условия. Наконец, сеточный характер МКЭ облегчает известные трудности, связанные с выбором базисных функций в вариационных методах. В классических вариационных методах, изложенных в гл. 1.4, этот выбор сильно усложняется их зависимостью от конфигурации рассматриваемой области. В МКЭ такой зависимости нет. Влияние сеточных методов на МКЭ приводит к тому, что разрешающие системы алгебраических уравнений оказываются хорошо обусловленными, с редко заполненными матрицами, и, что очень важно, формирование таких матриц оказывается сравнительно простым.

Из вышеизложенного следует, что МКЭ можно трактовать как специфический вариационный метод. Специфика состоит в выборе базисных функций, которые отличны от нуля в ограниченном числе смежных конечных элементов и, следовательно, носят локальный характер. Именно это и обеспечивает решающее преимущество МКЭ перед классическими вариационными методами. Каждый из методов гл. 1.4 можно рассматривать как частный случай МКЭ, при котором вся область рассматривается как один конечный элемент.

1.5.1. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ В ПРОЦЕДУРЕ МЕТОДА И ЕГО ХАРАКТЕРНЫЕ ЧЕРТЫ

**Краевая задача и ее вариационная формулировка.** Пусть для рассматриваемой краевой задачи поведение искомой функции  $w(x, y, z)$  внутри заданной ограниченной области  $V$  описывается некоторым дифференциальным уравнением 2  $m$ -го порядка:

$$L^{(2m)}(w, K, x, y, z) = q(x, y, z) \in V, \quad (1.5.1)$$

где  $L^{(2m)}$  - самосопряженный, положительно определенный дифференциальный оператор 2  $m$ -го порядка;  $K$  - параметр, характеризующий свойства сплошной среды в объеме  $V$ ;  $q(x, y, z)$  - внешнее воздействие.

Уравнение (1.5.1) дополняется совокупностью  $m$  краевых условий:

а) *главных*, в которые входят производные от искомой функции по координатам порядка  $\alpha + \beta + \gamma \leq m - 1$ ,

$$\Gamma_i \left( w, \dots, \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} w}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}, x, y, z \right) = f_i(x, y, z), \quad (1.5.2)$$

$$(1 \leq \alpha + \beta + \gamma \leq m - 1; i = 1, 2, \dots, r);$$

б) *естественных*, уравнения которых содержат хотя бы один член с производной, порядка  $\alpha + \beta + \gamma \geq m$ ,

$$E_t \left( w, \dots, \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} w}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}, x, y, z \right) = f_t(x, y, z), \quad (1.5.3)$$

$$(m \leq (\alpha + \beta + \gamma)_{\max} \leq 2m - 1; t = r + 1, \dots, m).$$

В задачах механики твердого деформируемого тела для определения функции  $w(x, y, z)$  вместо совместного рассмотрения уравнений (1.5.1), (1.5.2) и (1.5.3) можно воспользоваться условием стационарности некоторого функционала (см. п. 1.4)

$$\delta \mathcal{A}(w) = 0. \quad (1.5.4)$$

Функционал  $\mathcal{A}(w)$  содержит производные от  $w(x, y, z)$  до  $m$ -го порядка вместо производных до  $2m$ -го порядка в дифференциальном уравнении (1.5.1). Это облегчает подбор аппроксимирующих функций для  $w(x, y, z)$ , поскольку для получения однозначного функционала  $\mathcal{A}(w)$  требуется обеспечить непрерывность функции  $w(x, y, z)$  и ее производных лишь до  $m-1$ -го порядка включительно.

Соблюдение этих требований при выборе аппроксимирующей функции для  $w(x, y, z)$  обеспечивает сходимость решения по МКЭ с точным решением при уменьшении размеров конечных элементов, на которые разбивается рассматриваемая область  $V$ .

**Основные операции в процедуре метода конечных элементов.** Дискретизация области. Разбиение области  $V$  на подобласти

(конечные элементы)  $V_e$  ( $e=1, 2, \dots, M$ ) является первым шагом на пути к решению задачи. Этот шаг не имеет теоретического обоснования и зависит от имеющихся инженерных навыков. Недостатки этого этапа работы будут приводить к значительным погрешностям расчета, если даже все остальные этапы метода выполнены с достаточной точностью.

Использование слишком мелких элементов, хотя, как правило, и повышает точность, увеличивает общую трудоемкость расчета. В районах области, где ожидается резкое изменение результатов, следует использовать мелкую разбивку на элементы. Там же, где ожидаемый результат изменяется по области сравнительно слабо, можно использовать при дискретизации более крупные элементы.

Выбор типа, формы элемента и числа его узловых точек зависит от характера рассматриваемой задачи и от той точности решения, которую требуется обеспечить. Например, при решении одномерных задач распространения тепла и в задачах строительной механики при расчете стержневых конструкций область разбивают на одномерные конечные элементы, взаимосвязанные между собой по концам. При решении плоских задач (плоское напряженное состояние, задача теплопроводности в пластине и т. д.) области аппроксимируются треугольными или четырехугольными плоскими конечными элементами (рис. 1.5.1). Если рассматривается трехмерная область, то обычно она идеализируется с помощью элементарных тетраэдров, прямоугольных параллелепипедов либо неправильных шестигранников (рис. 1.5.2).

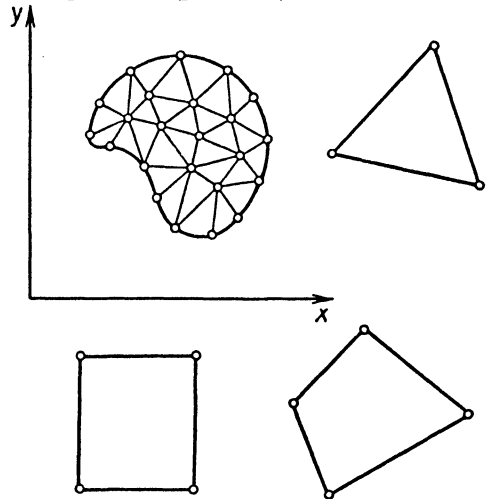


Рис. 1.5.1. Типы двумерных конечных элементов

При замене исходной конструкции совокупностью дискретных элементов стараются обеспечить как можно большую идентичность в поведении конструкции и ее дискретной модели.

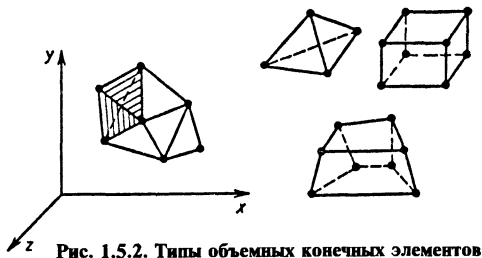


Рис. 1.5.2. Типы объемных конечных элементов

Выбор основных неизвестных  $x$  [32]. В качестве основных неизвестных в МКЭ принимают узловые значения искомой функции и ее частных производных до  $m$ -го порядка. При этом для обеспечения условий сходимости метода часто оказывается достаточным включить в число узловых неизвестных лишь определенную часть из общего числа производных  $m$ -го порядка. Более того иногда производные  $m$ -го порядка полностью исключают из числа узловых неизвестных.

Общее число неизвестных определяет число степеней свободы, от которого зависит точность определения искомой функции в объеме каждого конечного элемента, а следовательно, и во всей области  $V$ . Увеличить точность решения можно либо путем увеличения числа конечных элементов, на которые разбивается область, либо путем увеличения числа узловых точек, т.е. числа степеней свободы для каждого конечного элемента. Примеры таких высокоточных элементов приведены на рис.1.5.3.

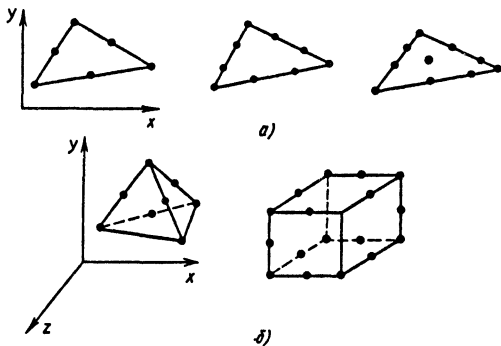


Рис.1.5.3. Высокоточные конечные элементы: а - плоские; б - пространственные

Построение интерполирующего полинома и условия сходимости МКЭ [13]. После выбора узловых неизвестных строят интерполирующий полином, которым выражается закон изменения искомой функции  $w(x, y, z)$  по объему конечного элемента через значения его узловых неизвестных.

Основная трудность построения состоит в том, что полученные интерполирующие полиномы для каждого конечного элемента должны

обеспечить непрерывность функции  $w(x, y, z)$  и ее производных до  $m - 1$ -го порядка включительно во всей области  $V$ . Что же касается производных  $m$ -го порядка, то в каждом из интерполирующих полиномов должны содержаться члены, обеспечивающие их переход к постоянным значениям при уменьшении размеров конечного элемента. При этом производные  $m$ -го порядка могут иметь разрывы первого рода по граням стыковки смежных конечных элементов. Выполнение этих условий обеспечивает сходимость МКЭ и возможность в дальнейшем при определении значения функционала для всей области  $V$  воспользоваться зависимостью

$$\mathcal{A}(w) = \sum_{e=1}^M \mathcal{A}_e(w^{(e)}), \quad (1.5.5)$$

где  $\mathcal{A}_e(w^{(e)})$  - значение функционала  $\mathcal{A}(w)$  в замкнутом объеме  $e$ -го конечного элемента.

При этом с увеличением числа конечных элементов сумма в правой части равенства (1.5.5) равномерно стремится к точному значению функционала  $\mathcal{A}(w)$  для всей области  $V$ .

Если функционал  $\mathcal{A}$  зависит от нескольких подлежащих определению функций, например,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(u(x, y, z), w(x, y, z))$ , то интерполирующий полином для каждой из этих функций должен обладать  $C^{\gamma-1}$  гладкостью, где  $\gamma$  - порядок высшей производной данной функции, которая входит в общее выражение функционала  $\mathcal{A}$ .

Вопросы построения интерполирующих полиномов для конечных элементов определенной геометрии рассмотрены ниже. Пока же предположим, что интерполирующий полином для  $e$ -го конечного элемента определен и может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} w^{(e)}(x, y, z) &= \sum_{k=1}^r N_k^{(e)}(x, y, z) q_k^{(e)} = \\ &= \left( \mathbf{N}^{(e)}(x, y, z) \right)^T \mathbf{q}^{(e)}, \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

где  $\mathbf{N}(x, y, z)$  - матрица-строка, элементами которой являются известные функции координат точек. Вид функций  $N_k^{(e)}(x, y, z)$  определяется геометрией элемента, классом задачи и содержанием вектора  $\mathbf{q}^{(e)}$ ;  $\mathbf{q}^{(e)}$  - вектор узловых неизвестных  $e$ -го конечного элемента, состоящий из  $r$  узловых неизвестных. Каждый элемент матрицы  $\mathbf{q}^{(e)}$  имеет два индекса, один из которых фиксирует его принадлежность к конкретному конечному элементу, а второй индекс определяет его положение среди  $r$  узловых неизвестных элемента. Тогда аппроксимация закона изменения искомой функции  $w(x, y, z)$  по всей области  $V$  определяется суммой

$$w(x, y, z) = \sum_{e=1}^M w^{(e)}(x, y, z) = \sum_{e=1}^M \left( \mathbf{N}^{(e)} \right)^T \mathbf{q}^{(e)}, \quad (1.5.7)$$

или

$$w(x, y, z) = \mathbf{N}^T(x, y, z) \mathbf{q}, \quad (1.5.8)$$

где

$$\mathbf{N}^T(x, y, z) = \left\{ N^{(1)} N^{(2)} \dots N^{(M)} \right\}^T;$$

$$\mathbf{q}^T = \left\{ q^{(1)} q^{(2)} \dots q^{(M)} \right\}^T$$

- вектор узловых неизвестных для всей совокупности конечных элементов области.

Получение основной системы разрешающих уравнений. Минимизируя функционал  $\mathcal{A}(w)$  по всем элементам вектора  $\mathbf{q}$  всей области, получаем

$$\frac{\partial \mathcal{A}(w)}{\partial \mathbf{q}} = \sum_{e=1}^M \frac{\partial \mathcal{A}(w^{(e)})}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} = 0. \quad (1.5.9)$$

Каждый  $e$ -й член выражения (1.5.9) может быть представлен в виде

$$\frac{\partial \mathcal{A}(w^{(e)})}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)} - \mathbf{P}^{(e)}, \quad (1.5.10)$$

где  $\mathbf{K}^{(e)}$  - квадратная матрица  $r$ -го порядка в местной системе координат  $e$ -го элемента. Коэффициенты этой матрицы зависят от свойств среды, геометрии конечного элемента и выбора узловых неизвестных. Для нелинейных задач матрица  $\mathbf{K}^{(e)}$  является функцией вектора  $\mathbf{q}^{(e)}$ ;  $\mathbf{P}^{(e)}$  - вектор размером  $r$ . Он определяет внешнее воздействие на узлы  $e$ -го элемента в местной системе координат.

Направления узловых перемещений конечного элемента обычно ориентируют по направлениям осей местной, связанной с элементом системы координат. Однако получение основной системы уравнений МКЭ упрощается, если вместо вектора  $\mathbf{q}^{(e)}$  ввести в рассмотрение вектор узловых неизвестных  $e$ -го элемента в общей для конструкции системе координат  $\bar{\mathbf{q}}^{(e)}$ :

$$\mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)} \bar{\mathbf{q}}^{(e)}, \quad (1.5.11)$$

где  $\mathbf{T}^{(e)}$  - матрица перехода к узловым неизвестным в общей системе координат  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ . При этом по аналогии с (1.5.9) и (1.5.10) можно написать

$$\frac{\partial \mathcal{A}(w)}{\partial \bar{\mathbf{q}}} = \sum_{e=1}^M \frac{\partial \mathcal{A}(w^{(e)})}{\partial \bar{\mathbf{q}}^{(e)}} = 0; \quad (1.5.12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{A}(w^{(e)})}{\partial \bar{\mathbf{q}}^{(e)}} = \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \bar{\mathbf{q}}^{(e)} - \bar{\mathbf{P}}^{(e)}, \quad (1.5.13)$$

где

$$\bar{\mathbf{K}}^{(e)} = \left( \mathbf{T}^{(e)} \right)^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)};$$

$$\bar{\mathbf{P}}^{(e)} = \left( \mathbf{T}^{(e)} \right)^T \mathbf{P}^{(e)}$$

- соответственно матрица жесткости и вектор узловых усилий  $e$ -го элемента в общей для конструкции системе координат.

С учетом (1.5.13) уравнение (1.5.12) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} = \bar{\mathbf{K}}_d \bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{P}} = 0, \quad (1.5.14)$$

где

$$\bar{\mathbf{K}}_d = \left| \bar{\mathbf{K}}^{(1)} \bar{\mathbf{K}}^{(2)} \dots \bar{\mathbf{K}}^{(M)} \right| \quad (1.5.15)$$

- квазидиагональная матрица порядка  $rM$  в общей системе координат;

$$\bar{\mathbf{P}} = \left\{ \bar{\mathbf{P}}^{(1)} \bar{\mathbf{P}}^{(2)} \dots \bar{\mathbf{P}}^{(M)} \right\} \quad (1.5.16)$$

- вектор узловых внешних усилий всей совокупности конечных элементов в общей системе координат размером  $rM$ .

Уравнение (1.5.14) не учитывает того обстоятельства, что вследствие условий неразрывности узловые неизвестные не зависят от "принадлежности" узловой точки к тому или иному из примыкающих к ней элементов.

Введем в рассмотрение вектор основных неизвестных в общей системе координат

$$\mathbf{Q} = \{ Q_1 Q_2 \dots Q_N \},$$

где  $N$  - общее число узловых неизвестных для всей области.

Между элементами векторов  $\bar{\mathbf{q}}$  и  $\mathbf{Q}$  существует определенная связь

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{H} \mathbf{Q}, \quad (1.5.17)$$

где  $\mathbf{H}$  - матрица размером  $rM \times N$ . Ее структура определяется геометрией элемента, классом краевой задачи и принятым порядком нумерации для элементов векторов  $\bar{\mathbf{q}}$  и  $\mathbf{Q}$ .

Если теперь принять в векторе  $\bar{\mathbf{P}}^{(e)}$  тот же порядок нумерации компонентов, который использован в векторе  $\bar{\mathbf{q}}^{(e)}$ , то, умножая уравнение (1.5.14) слева на матрицы  $\mathbf{H}^T$  и учитывая зависимость (1.5.17), получаем

$$\mathbf{K}^* \mathbf{Q} - \mathbf{F} = 0, \quad (1.5.18)$$

где

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{K}}_d \mathbf{H} \quad (1.5.19)$$

- общая матрица жесткости (матрица коэффициентов при основных неизвестных) в общей системе координат для всей области.

Порядок квадратной матрицы  $K^*$  равен  $N$ ;  

$$F = H^* \bar{P} \quad (1.5.20)$$

- вектор узловых внешних нагрузок для всей области в общей системе координат размером  $N$ .

Полученное матричное уравнение (1.5.18) и есть искомая система алгебраических уравнений метода конечных элементов для определения основных узловых неизвестных.

Совместное решение систем алгебраических уравнений (1.5.18). Определение "выходных" параметров краевой задачи. Для линейных краевых задач система уравнений (1.5.18) линейна. Для ее решения обычно используют методы Гаусса, Халедцкого, сопряженных градиентов и иногда, при очень высоком порядке системы, итерационные методы.

Для нелинейных краевых задач система уравнений (1.5.18) нелинейна, поскольку матрица  $K^*$  является функцией определяемых неизвестных параметров  $Q_j$ . При решении нелинейной системы алгебраических уравнений используют итерационные методы.

Пусть вектор  $Q$  найден. Тогда с помощью зависимости (1.5.17) можно определить вектор  $\bar{Q}$ , а затем, воспользовавшись выражениями (1.5.11) и (1.5.7), - вектор  $q^{(e)}$  и функцию  $w(x, y, z)$  для всей области  $V$ . Значения производных от функции  $w(x, y, z)$ , которые нас также могут интересовать при решении краевых задач, определяются либо дифференцированием полученного выражения для  $w(x, y, z)$ , либо непосредственно через узловые значения искомого производных, если последние входят в состав вектора  $Q$ .

### 1.5.2. ИНТЕРПОЛИРУЮЩИЕ ПОЛИНОМЫ

Одной из наиболее ответственных операций метода конечных элементов является построение интерполирующих функций для приближенного отображения закона изменения искомой функции  $w(x, y, z)$  по объему конечного элемента через значения узловых неизвестных. Операция часто оказывается весьма трудоемкой. Ее основная трудность состоит в том, что построенные интерполирующие функции для каждого конечного элемента должны обеспечить непрерывность функции  $w(x, y, z)$  и ее производных до  $m - 1$ -го порядка во всей области ( $m$  - порядок высшей производной функции  $w$ , входящей в общее выражение функционала  $\mathcal{E}$ , из условия стационарности которого и определяется функция  $w$ ). Производные  $m$ -го порядка могут иметь разрывы первого рода по границам стыковки смежных конечных элементов (см. п.1.5.1).

Выполнение указанных требований в отношении каждой из неизвестных функций, которые входят в функционал  $\mathcal{E}$ , обеспечивает схо-

димость решения по МКЭ с точным при уменьшении размеров конечных элементов. Естественно, что при выбранной геометрии конечного элемента для обеспечения условий сходимости необходимо располагать в интерполирующей функции определенным минимумом произвольных параметров. Дальнейшее увеличение числа произвольных параметров в интерполирующей функции связано с появлением дополнительных узловых неизвестных. В результате получаем так называемые *высокоточные конечные элементы*.

Ниже при изложении вопроса построения интерполирующих функций последовательно рассматриваются одномерные, двумерные и трехмерные задачи.

**Одномерная область.** Пусть замкнутый интервал  $[0, l]$  изменения  $x$  разбит внутренними точками

$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{e-1} < x_e < \dots < x_m = l$   
 на  $M$  замкнутых участков-элементов

$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{e-1}, x_e], [x_{m-1}, x_m]$ .

Изменение искомой функции  $w(x)$  для  $e$ -го элемента аппроксимируем полиномом  $p^{(e)}(x)$   $n$ -й степени

$$p^{(e)}(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i; \quad (1.5.21)$$

$$x \in [x_{e-1}, x_e], \quad (e = 1, 2, \dots, M).$$

Непрерывность функции  $w(x)$  и ее производных до  $m - 1$ -го порядка в интервале  $[0, l]$  будет обеспечена, если степень каждого из полиномов  $p^{(e)}(x)$  удовлетворяет зависимости

$$n+1 \geq 2m \quad (1.5.22)$$

и для определения неизвестных параметров  $\alpha_i$  среди  $n+1$ -го условия для каждого  $e$ -го участка будут содержаться следующие  $2m$  условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i p^{(e)}}{\partial x^i}(x_{e-1}) &= \frac{\partial^i w}{\partial x^i}(x_{e-1}); \\ \frac{\partial^i p^{(e)}}{\partial x^i}(x_e) &= \frac{\partial^i w}{\partial x^i}(x_e), \end{aligned} \quad (1.5.23)$$

$$(i = 0, 1, \dots, m - 1).$$

При  $n+1 > 2m$  недостающие для определения параметров условия составляют по аналогии с условиями (1.5.23), но для некоторых промежуточных узловых точек рассматриваемого интервала.

Ниже приведены два примера построения интерполирующих полиномов для простейших одномерных конечных элементов с расположением узловых точек по его концам. При этом степень полинома

$$n = 2m - 1. \quad (1.5.24)$$

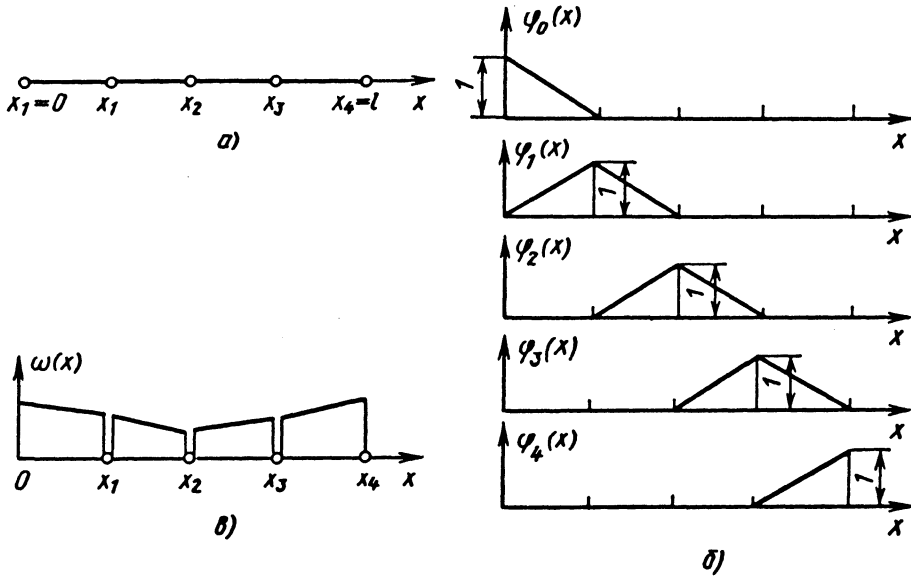


Рис.1.5.4. К вопросу построения интерполирующего полинома для одномерной области: а - одномерная область, разбитая на четыре конечных элемента; б - интерполирующий полином для всей области; в - локальные координатные функции, вызванные смещением лишь одной узловой точки

**Пример 1.** Для функции  $w(x)$  одномерной краевой задачи, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка ( $2m=2$ ), построить интерполирующий полином для  $e$ -го конечного элемента (уравнением такого типа описываются некоторые задачи растяжения и кручения стержней).

**Решение.** Согласно равенству (1.5.24) степень полинома  $n=2m - 1=1$  и, следовательно, интерполирующий полином (1.5.21) будет иметь вид

$$p^{(e)}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x.$$

Неизвестные параметры  $\alpha_i$  определяем из условий (1.5.23), которые для  $2m=2$  дают следующие два условия:

$$p(x_{e-1}) = w(x_{e-1}); \quad p(x_e) = w(x_e).$$

Отсюда

$$\alpha_0 = \frac{w(x_{e-1})x_e - w(x_e)x_{e-1}}{x_e - x_{e-1}};$$

$$\alpha_1 = \frac{w(x_e) - w(x_{e-1})}{x_e - x_{e-1}};$$

$$p^{(e)}(x) = w(x_{e-1}) \frac{x_e - x}{x_e - x_{e-1}} + w(x_e) \frac{x - x_{e-1}}{x_e - x_{e-1}}.$$

Пусть для определенности интервал изменения  $x$  (рис. 1.5.4, а) был разбит на четыре конечных элемента. Тогда “склеивая” интерполирующие полиномы по отдельным элементам, получаем аппроксимирующую функцию  $w(x)$  для всей области (рис. 1.5.4, б). Полученную функцию  $w(x)$  можно представить в виде суммы

$$w(x) = \sum_{e=1}^4 p^{(e)}(x) = \sum_{e=1}^4 w(x_e) \varphi_e(x).$$

Отсюда видна отмеченная ранее “локальность” координатных функций  $\varphi_e(x)$ , каждая из которых оказывается отличной от нуля лишь в области конечных элементов, непосредственно примыкающих к данному узлу (рис. 1.5.4, в). Такое свойство координатных функций в МКЭ позволяет как бы набирать искомое решение из отдельных “универсальных кирпичиков”. Именно в этом причина большинства положительных черт метода конечных элементов.

**Пример 2.** Для функции  $w(x)$  одномерной краевой задачи, описываемой дифференциальным уравнением четвертого порядка ( $2m=4$ ), построить интерполирующий полином для конечного элемента. К этому классу задач относится задача изгиба балок.

**Решение.** Согласно равенству (1.5.24) в данном случае  $n=2m - 1=3$ , и интерполирующий полином будет иметь вид



$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3. \quad (1.5.25)$$

Неизвестные параметры  $\alpha_i$  определяем согласно равенству (1.5.23) из следующих четырех условий (рис. 1.5.5):

$$\left. \begin{aligned} p(0) = w(0); \quad p(a) = w(a); \\ \frac{\partial p}{\partial x}(0) = \frac{\partial w}{\partial x}(0); \quad \frac{\partial p}{\partial x}(a) = \frac{\partial w}{\partial x}(a). \end{aligned} \right\} \quad (1.5.26)$$

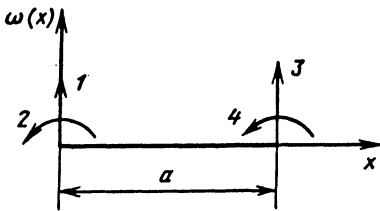


Рис.1.5.5. К построению интерполирующего полинома для конечного элемента балки

Введем для узловых значений функции  $w(x)$  обозначения

$$\begin{aligned} w(0) = q_1; \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0) = q_2; \\ w(a) = q_3; \quad \frac{\partial w}{\partial x}(a) = q_4. \end{aligned} \quad (1.5.27)$$

Положительные направления этих величин приведены на рис. 1.5.5. Внося выражение (1.5.25) в формулы (1.5.26) с учетом обозначений (1.5.27), находим

$$\alpha_1 = q_1; \quad \alpha_3 = \frac{1}{a^2}(-3q_1 - 2q_2 a + 3q_3 - q_4 a);$$

$$\alpha_2 = q_2; \quad \alpha_4 = \frac{1}{a}(2q_1 + q_2 a - 2q_3 + q_4 a).$$

Подставляя найденные значения параметров  $\alpha_i$  в выражение (1.5.25), получаем для интерполирующего полинома элемента выражение вида

$$p(x) = \sum_{i=1}^4 q_i N_i(x),$$

где

$$N_1(x) = 1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}; \quad N_2(x) = x - 2\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2};$$

$$N_3(x) = 3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}; \quad N_4(x) = -\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}$$

- так называемые одномерные функции Эрмита.

**Двухмерная область.** Ограничимся построением интерполирующих полиномов для прямоу-

гольного и треугольного конечных элементов. Именно эти два простейших конечных элемента наиболее часто используются при дискретизации двумерных областей.

**Прямоугольный элемент.** Пусть некоторая двумерная область разбита на совокупность конечных прямоугольных элементов. Стороны каждого элемента  $V_e$  ( $e=1, 2, \dots, M$ ) параллельны осям  $Ox$  и  $Oy$  области  $V_e$ .

Изменение искомой функции  $w(x,y)$  в объеме  $e$ -го элемента представим в виде полинома

$$p^{(e)}(x,y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} x^i y^j, \quad (1.5.28)$$

который является простым произведением двух одномерных полиномов вида (1.5.21).

Общее число неизвестных коэффициентов  $\alpha_{ij}$  равно  $(n+1)^2$ . Среди  $(n+1)^2$  условий для определения коэффициентов  $\alpha_{ij}$  полинома (1.5.28) должны присутствовать  $4m^2$  условий

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} p^{(e)}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(x_i, y_i) = \frac{\partial^{\alpha+\beta} w^{(e)}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(x_i, y_i), \quad (1.5.29)$$

$$(\alpha + \beta = 0, 1, 2, \dots, m-1; \quad i = 1, 2, 3, 4).$$

При выполнении условий (1.5.29) получаемые аппроксимирующие функции  $p^{(e)}(x, y)$  обеспечат непрерывность функции

$$w(x,y) = \sum_{e=1}^M p^{(e)}(x,y)$$

и ее производных до  $m-1$ -го порядка во всей области  $V$ . Минимальное число членов полинома (1.5.28)

$$N = (n+1)^2 = 4m^2. \quad (1.5.30)$$

Если же  $N = (n+1)^2 > 4m^2$ , то  $4m^2$  условий (1.5.29) необходимо дополнить аналогичными условиями, но написанными для некоторых других узловых точек, расположенных, например, посередине каждой стороны прямоугольного элемента (рис. 1.5.6) - точки  $Q_1, Q_2, Q_3$  и  $Q_4$ .

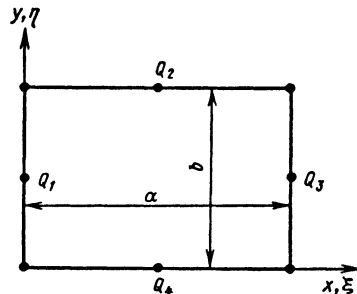


Рис.1.5.6. К построению интерполирующего полинома для прямоугольного элемента

**Пример 3.** Для функции  $w(\xi, \eta)$  двумерной задачи, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка ( $2m=2$ ), построить интерполирующий полином для прямоугольника, изображенного на рис. 1.5.6.

**Решение.** Согласно формуле (1.5.30) число узловых неизвестных  $N=r=4m^2=4$ , показатель степени полинома  $n=2m-1=1$ . Следовательно, интерполирующий полином будет иметь вид

$$p(\xi, \eta) = \alpha_0 + \alpha_{10}\xi + \alpha_{01}\eta + \alpha_{11}\xi\eta = \\ = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\xi\eta,$$

где  $\xi=x/a, \eta=y/b$ .

Неизвестные коэффициенты  $\alpha_i$  определяем из условий (1.5.29), которые в данном случае примут вид:

$$p(-1, -1) = w(-1, -1) = q_1;$$

$$p(1, -1) = w(1, -1) = q_2;$$

$$p(1, 1) = w(1, 1) = q_3;$$

$$p(-1, 1) = w(-1, 1) = q_4.$$

После определения коэффициентов  $\alpha_i$  получаем для полинома  $w(\xi, \eta)$  конечного элемента выражение вида

$$p(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 q_i N_i(\xi, \eta),$$

где

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}; \quad N_2(\xi, \eta) = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4};$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}; \quad N_4(\xi, \eta) = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}.$$

**Треугольный элемент.** Пусть некоторая двумерная область  $V$  разбита на совокупность треугольных конечных элементов  $V_e (e=1, 2, \dots, M)$ . Изменение искомой функции  $w(x, y)$  в объеме  $e$ -го элемента ищется в виде полинома

$$p^{(e)}(x, y) = \sum_{s=0}^n \sum_{i+j=s} \alpha_{ij}^{(s)} x^i y^j. \quad (1.5.31)$$

Здесь для каждого  $s$ , пробегающего последовательно значения  $0, 1, \dots, n$ , суммируются все члены, для которых сумма показателей степеней  $i$  и  $j$  равна  $s$ , т. е.  $i+j=s$ .

Число коэффициентов  $\alpha_{ij}^{(s)}$  в полиноме (1.5.31) определяется зависимостью

$$N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Использование степенных полиномов (1.5.31) может обеспечить получение аппроксимирующей функции  $w(x, y)$ , непрерывно диффе-

ренцируемой до  $m-1$ -го порядка во всей области  $V$ , если степень полинома  $n$  удовлетворяет условию

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} \geq 8m^2 - 6m + 1. \quad (1.5.32)$$

Для определения коэффициентов  $\alpha_{ij}^{(s)}$  составляют необходимое число условий, обеспечивающих в заранее выбранных узловых точках равенство значений полинома, значений искомой функции  $w(x, y)$  и некоторых их производных.

Обычно в качестве узловых точек для треугольного элемента (рис. 1.5.7) выбирают три его вершины (точки  $P_1, P_2, P_3$ ), центр тяжести ( $P_0$ ) и по несколько (в зависимости от потребности) точек, расположенных по сторонам треугольника (точки  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ ).

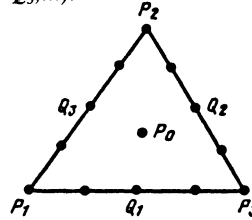


Рис. 1.5.7. К построению интерполирующего полинома для треугольного конечного элемента

Тогда в соответствии с формулой (1.5.32) при  $m=1$  полином (1.5.31) может содержать лишь три коэффициента  $\alpha_{ij}^{(s)}$ , для определения которых достаточно в каждой из вершин потребовать выполнения

$$p(P_j) = w(P_j), \quad (j = 1, 2, 3).$$

Значения  $w(P_j)$  принимают за основные неизвестные.

При  $m=2$  полином (1.5.31) содержит уже 21 коэффициент  $\alpha_{ij}^{(s)}$ . Набрать необходимое 21 условие для определения  $\alpha_{ij}^{(s)}$  можно различными путями, каждый из которых приводит к определенной совокупности узловых неизвестных конечного элемента. Вот некоторые из возможных вариантов задания узловых неизвестных:

$$a) \quad w(P_i); \quad \frac{\partial w}{\partial x}(P_i); \quad \frac{\partial w}{\partial y}(P_i); \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(P_i);$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(P_i); \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(P_i)$$

для каждой вершины треугольного элемента. В результате получают 18 неизвестных. В качестве оставшихся трех неизвестных можно принять

либо значения производной по нормали  $\frac{\partial w}{\partial \nu}$  в точках  $Q_1, Q_2, Q_3$ , либо значения  $w, \frac{\partial w}{\partial x}$  и  $\frac{\partial w}{\partial y}$  в

точке  $P_0$ ;

б)  $w, \frac{\partial w}{\partial x}$  и  $\frac{\partial w}{\partial y}$  в точках  $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2,$

$Q_3$  и  $P_0$ .

**Пространственная область.** Ограничимся построением интерполирующих полиномов для прямоугольного параллелепипеда и элементарного тетраэдра, поскольку именно эти два простейших элемента наиболее часто используют при идеализации пространственных областей.

**Прямоугольный параллелепипед.** Пусть некоторая пространственная область  $V$  с помощью течений, параллельных координатным плоскостям, разбита на совокупность параллелепипедов  $V_e$  ( $e=1, 2, 3, \dots, M$ ).

Изменение искомой функции  $w(x, y, z)$  в объеме  $e$ -го элемента можно представить в виде полинома

$$p^{(e)}(x, y, z) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{s=0}^n \alpha_{ijs} x^i y^j z^s, \quad (1.5.33)$$

получаемого простым перемножением одномерных степенных полиномов (1.5.21) соответственно по направлениям  $x, y, z$ .

Минимальное число членов полинома (1.5.33), при котором оказываются выполненными условиями сходимости метода,

$$N_{\min} = (n+1)^3 = 8m^3. \quad (1.5.34)$$

При этом значения коэффициентов  $\alpha_{ijs}$  определяют из следующих  $8m^3$  условий (рис. 1.5.8):

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} p^{(e)}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}(x_i, y_i, z_i) = \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} w^{(e)}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}(x_i, y_i, z_i),$$

$$(\alpha + \beta + \gamma = 0, 1, 2, \dots, m-1; i = 1, 2, \dots, 8). \quad (1.5.35)$$

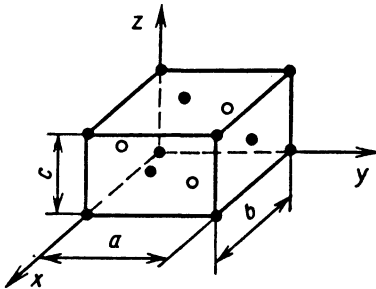


Рис. 1.5.8. К построению интерполирующего полинома для прямоугольного параллелепипеда

Если же  $N \geq 8m^3$ , то для определения значений коэффициентов  $\alpha_{ijs}$  условие (1.5.35) следует

дополнить аналогичными условиями для других узловых точек, расположенных, например, в центре каждой грани прямоугольного параллелепипеда (рис. 1.5.8).

**Пример 4.** Для функции  $w(\xi, \eta, \zeta)$  трехмерной краевой задачи, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка ( $2m=2$ ), построить интерполирующий полином для прямоугольного параллелепипеда (см. рис. 1.5.8).

**Решение.** Согласно выражению (1.5.34) число узловых неизвестных  $N_{\min} = 8m^3 = 8$ , показатель степени полинома  $n=2m-1=1$ . Следовательно,

$$p(\xi, \eta, \zeta) = \alpha_{000} + \alpha_{100}\xi + \alpha_{010}\eta + \alpha_{001}\zeta + \alpha_{110}\xi\eta + \alpha_{101}\xi\zeta + \alpha_{011}\eta\zeta + \alpha_{111}\xi\zeta,$$

$$\text{где } \xi = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{b}; \quad \zeta = \frac{z}{c}.$$

Неизвестные коэффициенты  $\alpha_{ijs}$  определяют из условий (1.5.35), которые в рассматриваемом случае примут вид:

$$p(-1, -1, 1) = w(-1, -1, 1) = q_1;$$

$$p(-1, -1, -1) = w(-1, -1, -1) = q_5;$$

$$p(-1, 1, 1) = w(-1, 1, 1) = q_2;$$

$$p(-1, 1, -1) = w(-1, 1, -1) = q_6;$$

$$p(1, 1, 1) = w(1, 1, 1) = q_3;$$

$$p(1, 1, -1) = w(1, 1, -1) = q_7;$$

$$p(1, -1, 1) = w(1, -1, 1) = q_4;$$

$$p(1, -1, -1) = w(1, -1, -1) = q_8.$$

Окончательное выражение для искомого интерполирующего полинома

$$p(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 q_i N_i(\xi, \eta, \zeta),$$

где

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)}{8};$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta);$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta);$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta);$$

$$N_5 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta);$$

$$N_6 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta);$$

$$N_7 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta);$$

$$N_8 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta).$$

**Тетраэдр.** На сегодня не существует общей теории интерполирующих полиномов для конечного элемента в форме тетраэдра. Поэтому ограничимся лишь записью некоторых степенных полиномов, которые могут быть использованы при решении ряда практических задач.

Введем обозначения:  $P_1, P_2, P_3, P_4$  - вершины тетраэдра;  $Q_1, Q_2, \dots, Q_6$  - середины ребер тетраэдра;  $R_1, R_2, R_3, R_4$  - центры тяжести граней тетраэдра (рис. 1.5.9).

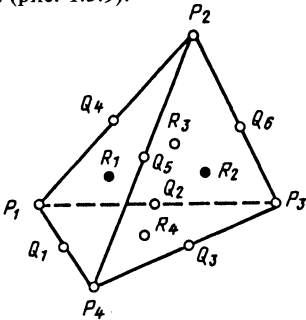


Рис.1.5.9. К построению интерполирующего полинома для тетраэдра

Линейный полином

$$p_1(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z$$

определяется в тетраэдре через значения  $p_1(P_i)$ , ( $i=1, 2, 3, 4$ ).

Полином второй степени

$$p_2(x, y, z) = p_1(x, y, z) + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 z^2 + \alpha_8 xy + \alpha_9 xz + \alpha_{10} yz$$

определяется через значения  $p_2(P_i)$ , ( $i=1, 2, 3, 4$ );  $p_2(Q_j)$ , ( $j=1, 2, \dots, 6$ ).

Кубический полином

$$p_3(x, y, z) = p_2(x, y, z) + \alpha_{11} x^3 + \alpha_{12} y^3 + \alpha_{13} z^3 + \alpha_{14} x^2 y + \alpha_{15} x y^2 + \alpha_{16} x z^2 + \alpha_{18} y^2 z + \alpha_{19} y z^2 + \alpha_{20} x y z$$

определяется через значения

$$p_3(P_i); \frac{\partial p_3}{\partial x}(P_i); \frac{\partial p_3}{\partial y}(P_i);$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial z}(P_i); P_3(R_j), (i, j = \overline{1,4}).$$

С использованием приведенных выше полиномов можно построить интерполирующие функции, которые обеспечат условия сходимости решения по методу конечных элементов для краевых задач, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка. В отдельных случаях полином третьей степени может обеспечить сходимостью решения и для краевых задач, описываемых дифференциальными уравнениями четвертого порядка.

**1.5.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ОСНОВНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Любой из приведенных в гл.1.4 функционалов может быть использован для построения конечно-элементных соотношений, т.е. для решения задач механики деформируемого тела с помощью метода конечных элементов. Используя принцип возможных перемещений (1.4.14), придем к построению МКЭ в варианте метода перемещений. Принцип возможных напряжений (1.4.50) приведет к МКЭ в варианте метода сил. При использовании смешанных вариационных принципов (1.4.58), (1.4.61) получим смешанные формулировки МКЭ. Модифицированный принцип возможных перемещений (1.4.62), допускающий независимую аппроксимацию компонент перемещений на границе и по объему каждого из конечных элементов, приводит к так называемым гибридным формулировкам МКЭ.

Ниже на примере решения объемной задачи теории упругости продемонстрировано использование принципа возможных перемещений для построения конечно-элементных соотношений.

Рассматриваемое тело загружено объемными  $\bar{F}_V = \{\bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3\}$  и поверхностными  $\bar{F}_V = \{\bar{F}_{v1} \bar{F}_{v2} \bar{F}_{v3}\}$  силами на части поверхности тела  $S_1$ . На оставшейся части поверхности  $S_2$  заданы компоненты перемещения  $u_i = \bar{u}_i (i = 1, 2, 3)$ .

Начальные операции метода конечных элементов, а именно: разбиение тела на конечные элементы и построение интерполирующих полиномов для основных неизвестных, входящих в используемый функционал, подробно рассмотрены в п.п. 1.5.1 и 1.5.2. В связи с этим полагаем, что для компонентов перемещения  $e$ -го конечного элемента  $u_1^{(e)}, u_2^{(e)}$  и  $u_3^{(e)}$  (основные неизвестные величины при использовании принципа возможных перемещений) построены соответствующие интерполирующие полиномы

$$\mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)},$$

где  $\mathbf{U} = \{u_1 u_2 u_3\}$ ;  $\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_3]$  – прямоугольная матрица размером  $3 \times r$ ,  $\left(\mathbf{q}^{(e)}\right)^T = \{q_1^{(e)} q_2^{(e)} \dots q_r^{(e)}\}^T$  – вектор узловых неизвестных  $e$ -го конечного элемента в местной системе координат.

Используя далее геометрические соотношения и физический закон для материала, получаем выражения для компонентов вектора деформации  $\underline{\varepsilon}$  и напряжений  $\underline{\sigma}$   $e$ -го элемента:

$$\underline{\varepsilon}^{(e)} = \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)}; \quad (1.5.36)$$

$$\underline{\sigma}^{(e)} = \mathbf{E}_\sigma^{(e)} \mathbf{q}^{(e)}, \quad (1.5.37)$$

где  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}_\sigma$  – некоторые прямоугольные матрицы, элементы которых в общем случае зависят от координат положения рассматриваемой точки и значений компонентов вектора  $\mathbf{q}$ . Элементы матрицы  $[\mathbf{E}_\sigma]$  дополнительно зависят от параметров, которыми характеризуются упругие свойства материала тела в пределах объема рассматриваемого конечного элемента.

Перепиывая математическую формулировку принципа возможных перемещений (1.4.14) в матричной форме, получаем

$$\delta \mathcal{J}_1 = \iiint_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV - \iiint_V \delta \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{F}}_V dV - \iint_{S_1} \delta \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{F}}_V dS,$$

где  $\underline{\sigma}$ ,  $\underline{\varepsilon}$  – векторы компонентов соответственно напряжений и деформаций, или, если учесть зависимость (1.5.5),

$$\delta \mathcal{J}_1 = \sum_{e=1}^M \delta \mathcal{J}_1^{(e)} = \sum_{e=1}^M \frac{\partial \mathcal{J}_1^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} \delta \mathbf{q}^{(e)} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{J}_1^{(e)} = & \iiint_{V_e} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV - \iiint_{V_e} \delta \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{F}}_V dV - \\ & - \iint_{S_{1e}} \delta \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{F}}_V dS; \end{aligned} \quad (1.5.38)$$

здесь  $S_{1e}$  – часть внешней поверхности  $e$ -го элемента, на которую действуют заданные внешние нагрузки.

С учетом зависимостей (1.5.36) и (1.5.37) выражение (1.5.38) преобразуется к виду

$$\delta \mathcal{J}_1^{(e)} = \delta \mathbf{q}^{(e)} \left[ \iiint_{V_e} \mathbf{D}^{*T} \mathbf{E}_\sigma dV \right] \mathbf{q}^{(e)} - \left[ \iiint_{V_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{F}}_V dV - \iint_{S_{1e}} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{F}}_V dS \right]$$

или

$$\delta \mathcal{J}_1^{(e)} = \delta \mathbf{q}^{(e)} (\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)} - \mathbf{P}^{(e)}), \quad (1.5.39)$$

где

$\mathbf{K}^{(e)} = \iiint_{V_e} \mathbf{D}^{*T} \mathbf{E}_\sigma dV$  – матрица жесткости  $e$ -го конечного элемента в местной системе координат;

$\mathbf{P}^{(e)} = \iiint_{V_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{F}}_V dV + \iint_{S_{1e}} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{F}}_V dS$  – вектор узловых внешних нагрузок  $e$ -го элемента в местной системе координат, эквивалентных действию на элемент объемных и поверхностных заданных сил;

матрица  $\mathbf{D}^*$  связывает для  $e$ -го конечного элемента вариацию вектора деформаций  $\delta \underline{\varepsilon}$  с вектором напряжений  $\underline{\sigma}$ :  $\delta \underline{\varepsilon}^{(e)} = \mathbf{D}^{*(e)} \mathbf{q}^{(e)}$

Элементы матрицы  $\mathbf{D}^*$  определяют из зависимости

$$d_{ij}^* = d_{ij} + \sum_{k=1}^r \frac{\partial d_{ik}}{\partial q_j} q_k,$$

где  $d_{ij}$  – элементы матрицы  $\mathbf{D}$ . Для геометрически линейных задач  $\mathbf{D}^* = \mathbf{D}$ .

Из (1.5.39)

$$\frac{\partial \mathcal{J}_1^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)} - \mathbf{P}^{(e)}.$$

Дальнейшие операции, связанные с переходом от вектора  $\mathbf{q}^{(e)}$  к вектору  $\bar{\mathbf{q}}^{(e)}$  узловых перемещений  $e$ -го элемента в общей системе координат, введением для всего тела (конструкции) вектора узловых неизвестных в общей глобальной системе координат  $\mathbf{Q}$  и составлением системы алгебраических уравнений для определения элементов вектора  $\mathbf{Q}$ , описаны выше совокупностью зависимостей (1.5.11) – (1.5.20).

Придерживаясь описанной выше последовательности выполнения отдельных операций, легко могут быть получены конечно-элементные соотношения при использовании любого другого вариационного принципа, изложенного в гл.1.4.

Для краевых задач некоторых типов не существует функционала, из условия стационарности которого определяется решение. В этом случае конечно-элементные соотношения могут быть получены в результате приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, рассматриваемой краевой задачи с помощью метода Бубнова - Галеркина, метода наименьших квадратов, метода невязок (первые два метода являются частным случаем последнего).

**1.5.4. МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**  
[4, 7, 9, 16, 33, 49]

В последние годы при решении краевых задач механики сплошных сред и, в частности, механики деформируемого твердого тела широкое использование получил метод граничных интегральных уравнений, часто именуемый методом граничных элементов. При использовании этого метода требуется разбиение на конечные элементы лишь границы изучаемой области, что ведет к значительному уменьшению числа конечных элементов, а следовательно, и узловых неизвестных по сравнению с сеточными методами, требующими дискретизации всего объема рассматриваемой области (метод конечных разностей, метод конечных элементов). Отсюда следует, что для получения решения методом граничных элементов (МГЭ) требуется меньший объем исходных данных и меньший объем оперативной памяти ЭВМ, что в итоге может значительно снизить общую трудоемкость решения задачи.

Однако наряду с отмеченными преимуществами при использовании МГЭ встречаются и свои специфические трудности: сложность получения для некоторых сплошных сред решения от действия точечного источника и необходимость выполнения весьма трудоемкой и сложной операции, связанной с вычислением интегралов, содержащих сингулярности.

Преимущества МГЭ по сравнению с другими численными методами особенно ощутимы при решении краевых задач для бесконечных областей с однородными свойствами среды.

**Фундаментальное интегральное соотношение.** Рассмотрим тело, занимающее область  $V$  с границей  $S$  (рис.1.5.10) и находящееся в состоянии равновесия при действии заданных объемных  $X_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) и поверхностных  $F_{vi}$  ( $i=1, 2, 3$ ) нагрузок. Состояние тела характеризуется компонентами напряжений  $\sigma_{ij}$ , деформаций  $\epsilon_{ij}$  и перемещений  $u_i$ .

Рассмотрим далее область  $V^*$  с границей  $S^*$ , которая содержит в себе область  $V$  с границей  $S$ . Новая область под действием заданных внешних объемных  $X_i^*$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и поверхностных  $F_{vi}^*$  ( $i = 1, 2, 3$ ) нагрузок также находится в равновесном состоянии, которое определяется

величинами  $\sigma_{ij}^*, \epsilon_{ij}^*, u_i^*$ . Если упругие свойства обеих областей одинаковы, то на основании теоремы взаимности работ (1.4.8)

$$\iiint_V X_i u_i^* dV + \iint_S F_{vi} u_i^* dS = \iiint_V X_i^* u_i dV + \iint_S F_{vi}^* u_i dV, \tag{1.5.40}$$

где  $F_{vi}^* = \sigma_{ij}^* l_{vj}$ .

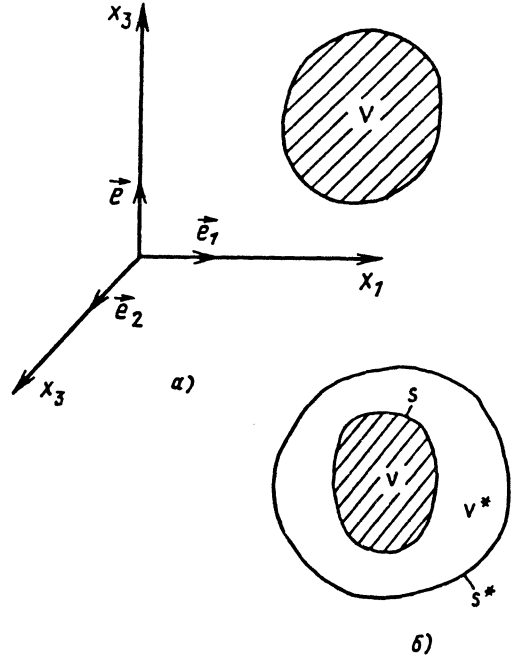


Рис.1.5.10. К выводу тождества Сомильяны

Полагаем далее, что компонент объемной силы  $X_i^*$  соответствует единичной положительной сосредоточенной силе, приложенной к точке  $\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in V^*$  в направлении орта  $i_1$ , т.е.

$$\bar{X}_i^* = \delta(x, \xi) \bar{e}_i, \tag{1.5.41}$$

где  $\delta(x, \xi)$  - дельта-функция Дирака;  $\xi$  - координата особой точки;  $x \in V$ . Напомним, что функция Дирака обладает следующими свойствами:

$$\delta(x, \xi) = \begin{cases} \rightarrow 0 & \text{при } x \neq \xi; \\ \rightarrow \infty & \text{при } x = \xi; \end{cases}$$

$$\iint_{V^*} \varphi(x) \delta(x, \xi) dV(x) = \varphi(\xi). \tag{1.5.42}$$

С учетом свойств (1.5.42) уравнение (1.5.40) можно записать в виде

$$u_i(\xi) = \iiint_V X_j(x) u_{ji}^*(x, \xi) dV(x) + \iint_S F_{vj}(x) u_{ji}^*(x, \xi) dS(x) - \iint_S F_{vji}^*(x, \xi) u_j(x) dS(x), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.5.43)$$

где  $u_{ji}^*(x, \xi)$  и  $F_{vji}^*(x, \xi)$  есть перемещения  $u_j^*$  и усилия  $F_{vj}^*$ , возникающие в точке  $x(x_1, x_2, x_3)$  при действии единичной сосредоточенной силы (1.5.41), действующей в  $i$ -м направлении и приложенной в точке  $\xi$ .

Уравнение (1.5.43) известно как *тождество Соммильяны* для перемещений. Это уравнение служит основой для построения так называемого *прямого варианта* МГЭ.

**Фундаментальное решение.** Под фундаментальным решением понимают решение краевой задачи для области  $V^*$  при заданных граничных условиях на границе  $S^*$  при действии на рассматриваемую область единичной силы (1.5.41).

Для бесконечной изотропной линейно упругой среды  $V^*$  фундаментальное решение для трехмерного случая имеет вид

$$u_{ji}^*(x, \xi) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \left[ (3-4\nu)\delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right], \quad (1.5.44)$$

где

$$r = r(x, \xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$$

- расстояние между точкой  $\xi$ , к которой прикладывается единичная сила в  $i$ -м направлении, и некоторой точкой наблюдения  $x$  пространства.

Располагая выражением (1.5.44), находим соответствующие этому состоянию деформации  $\varepsilon_{jki}^*(x, \xi)$  и напряжения  $\sigma_{jki}^*(x, \xi)$ :

$$\varepsilon_{jki}^*(x, \xi) = -\frac{1}{16\pi(1-\nu)r^2} \left[ (1-2\nu) \left( \frac{\partial r}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_j} \delta_{ik} \right) - \frac{\partial r}{\partial x_i} \delta_{jk} + 3 \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_i} \right];$$

$$\sigma_{jki}^*(x, \xi) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[ (1-2\nu) \left( \frac{\partial r}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_j} \delta_{ik} - \frac{\partial r}{\partial x_i} \delta_{jk} \right) + 3 \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_i} \right];$$

$$F_{vji}^* = \sigma_{jki}^* l_{vk}.$$

Получены фундаментальные решения также для полупространства, для плоского напряженного состояния, плоской деформации и т. п.

**Граничное интегральное уравнение.** Тождеством Соммильяны можно воспользоваться для определения перемещений в произвольной точке тела, но при этом необходимо располагать значениями перемещений  $u_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) и усилий  $F_{vi}$  ( $i=1, 2, 3$ ) в каждой точке поверхности  $S$ . При решении краевых задач теории упругости в каждой точке  $x \in S$  могут быть заданы лишь три из упомянутых шести граничных величин. Для определения остальных трех неизвестных величин в точках поверхности  $S$  используем граничные интегральные уравнения, которые получаем, выписывая тождество Соммильяны для точек  $\xi \in S$ . Получаемые при этом интегральные уравнения сингулярны в том смысле, что каждое из подынтегральных выражений становится неограниченным при  $x=\xi$ . При этом первые два интеграла в правой части уравнения (1.5.43) имеют слабую особенность и могут быть вычислены в обычном смысле. Последний интеграл, имеющий при  $x=\xi$  сильную особенность, следует понимать в смысле главного значения по Коши с дополнительным "свободным членом", обусловленным наличием особенности. В результате граничные интегральные уравнения принимают вид

$$c_{ij}(\xi) u_j(\xi) = \iiint_V X_j(x) u_{ji}^*(x, \xi) dV(x) + \iint_S F_{vj}(x) u_{ji}^*(x, \xi) dS(x) - \iint_{S-S_\varepsilon} F_{vji}^*(x, \xi) u_j(x) dS(x), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.5.45)$$

где  $S_\varepsilon$  - часть границы  $S$ , для точек которой справедливо неравенство  $|x - \xi| \leq \varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Для гладких поверхностей  $c_{ij} = \delta_{ij}/2$ .

**Основные операции метода граничных элементов.** Эти операции идентичны основным операциям метода конечных элементов.

1. Поверхность  $S$  разбивают на ряд непересекающихся подобластей - граничных элементов  $S_e$ .

2. Для каждого элемента кусочным образом строят аппроксимации искоемых функций  $u_i^{(e)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и  $F_{vi}^{(e)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), т.е. представления их в форме интерполирующих полиномов через узловые значения.

3. Уравнение (1.5.45) записывают в дискретной форме для каждой узловой точки  $\xi$  поверхности  $S$ . Интегралы по каждому из граничных элементов в общем случае вычисляют по схемам численного интегрирования. В результате получают систему  $3N$  ( $N$  - число узловых точек) линейных алгебраических уравнений относительно  $6N$  узловых значений перемещений и узловых значений усилий.

4. В каждой узловой точке поверхности  $S$  налагают заданные граничные условия, т.е. задаются три из шести узловых величин. Для определения оставшихся  $3N$  неизвестных узловых величин решают систему  $3N$  уравнений.

После определения граничных значений перемещений  $u_i$  и усилий  $F_{vi}$  по формуле (1.5.43) можно найти перемещения  $u_i$  в произвольной точке  $\xi$  области  $V$ . Воспользовавшись выражением (1.5.43), можем найти компоненты деформаций, а затем с помощью закона Гука - напряжения.

## Глава 1.6

### ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА

При решении многих инженерных задач представляется возможным рассматривать явление деформации тела, происходящей как бы в одной плоскости. В этом случае компоненты тензоров напряжения и деформации будут являться функциями координат, определяющих положение точки в этой плоскости. Задачи этой категории относятся к плоской задаче теории упругости.

Далее рассмотрена геометрически и физически линейная плоская задача теории упругости.

При рассмотрении плоской задачи обычно различают два следующих ее вида: задача о плоской деформации и задача о плоском напряженном состоянии (обобщенное плоское напряженное состояние). Решение этих задач связано с интегрированием дифференциальных уравнений одного и того же вида.

#### 1.6.1. ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

При плоской деформации перемещение точек в направлении одной из осей равно нулю, а два других перемещения зависят лишь от координат, соответствующих двум другим осям.

Пусть  $u_3 = 0$ ,  $u_1 = f_1(x_1, x_2)$ ,  $u_2 = f_2(x_1, x_2)$  и, следовательно,

$$\epsilon_{33} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0.$$

На основании обобщенного закона Гука

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

Остальные компоненты напряжений и деформации будут функциями координат  $x_1$  и  $x_2$ .

Рассматриваемая плоская деформация реализуется в призматическом теле (рис. 1.6.1), образующая боковой поверхности которого параллельна оси  $Ox_3$  и ограничена с двух сторон основаниями, перпендикулярными к этой оси, при условии, что  $u_3 = 0$ . При этом объемные силы и нагрузка, приложенная к боковой поверхности, параллельны плоскости  $x_1Ox_2$  и не зависят от координаты  $x_3$ .

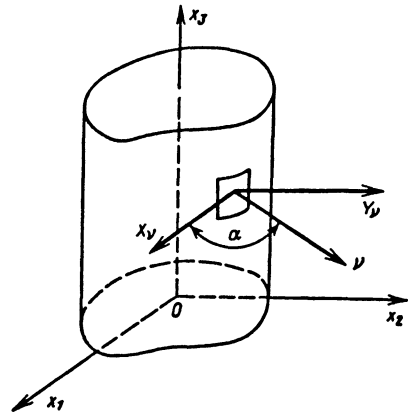


Рис.1.6.1. Схема плоской деформации

При плоской деформации указанные основания оказываются нагруженными нормальными напряжениями  $\sigma_{33}$ . Если оси  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$  совпадают с главными направлениями упругости, то эти напряжения равны:

для ортотропного материала

$$\sigma_{33} = \nu_{31}\sigma_{11} + \nu_{32}\sigma_{22},$$

где  $\nu_{31}$ ,  $\nu_{32}$  - коэффициенты Пуассона;

для трансверсально-изотропного материала

$$\sigma_{33} = \nu_{31}(\sigma_{11} + \sigma_{22});$$

для изотропного материала

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

Если условие  $u_3 = 0$  для концов призматического тела не выполняется (например, концы совершенно свободны), то для устранения напряжений  $\sigma_{33}$  в случае длинного тела (длина велика по сравнению с поперечными размерами) на полученное решение следует наложить решение задачи о равновесии рассматриваемого призматического тела, нагруженного лишь напряжениями, равными  $-\sigma_{33}$ . Эти напряжения можно заменить статически эквивалентной одной си-



лой, приложенной в центре тяжести сечения, и моментом. По принципу Сен-Венана суммарное решение будет справедливо в некотором удалении от оснований.

### 1.6.2. ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + X_1 = 0; \quad (1.6.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 = 0.$$

Зависимости Коши ( $i, j=1, 2$ )

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.6.2)$$

Уравнение совместности деформации

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \quad (1.6.3)$$

Граничные условия на боковой поверхности: в случае первой основной задачи (рис. 1.6.2)

$$\sigma_{11} \cos \alpha + \sigma_{21} \sin \alpha = X_\nu, \quad (1.6.4)$$

$$\sigma_{12} \cos \alpha + \sigma_{22} \sin \alpha = Y_\nu;$$

в случае второй основной задачи

$$u_1 = g_1(x_1, x_2); \quad u_2 = g_2(x_1, x_2),$$

где  $g_1(x_1, x_2)$ ,  $g_2(x_1, x_2)$  - заданные перемещения точек на боковой поверхности.

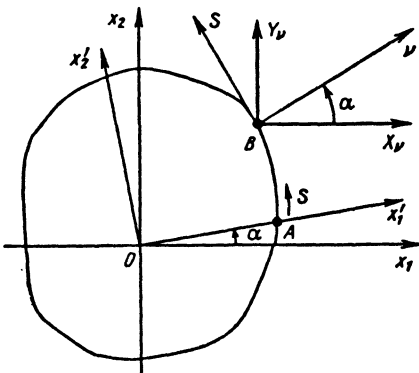


Рис.1.6.2. Граничные силы на боковой поверхности

Формулы преобразования компонентов напряжений и деформаций при повороте координатных осей (см. рис.1.6.2):

$$\sigma'_{11} = \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha + \sigma_{12} \sin 2\alpha;$$

$$\sigma'_{22} = \sigma_{11} \sin^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha - \sigma_{12} \sin 2\alpha;$$

$$\sigma'_{12} = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} \sin 2\alpha + \sigma_{12} \cos 2\alpha;$$

$$\varepsilon'_{11} = \varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha + \varepsilon_{12} \sin 2\alpha;$$

$$\varepsilon'_{22} = \varepsilon_{11} \sin^2 \alpha + \varepsilon_{22} \cos^2 \alpha - \varepsilon_{12} \sin 2\alpha;$$

$$\varepsilon'_{12} = \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}}{2} \sin 2\alpha + \varepsilon_{12} \cos 2\alpha.$$

Главные напряжения

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}.$$

Главные напряжения действуют в площадках, направление нормалей к которым определяется

$$\text{углами } \alpha = \varphi_1 \text{ и } \varphi_1 \pm \frac{\pi}{2},$$

где

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}.$$

Наибольшие касательные напряжения действуют в площадках, наклоненных под углом  $45^\circ$  к направлению главных площадок, и равны полусумме главных напряжений.

В этих площадках действуют также и нормальные напряжения, равные полусумме главных напряжений.

Главные деформации

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} \pm \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + 4\varepsilon_{12}^2}.$$

Обобщенный закон Гука для ортотропного материала:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1} \left[ \sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{1 - \nu_{13}\nu_{31}} \left( 1 + \frac{\nu_{23}\nu_{31}}{\nu_{21}} \right) \sigma_{22} \right];$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2} \left[ \sigma_{22} - \frac{\nu_{21}}{1 - \nu_{23}\nu_{32}} \left( 1 + \frac{\nu_{32}\nu_{13}}{\nu_{12}} \right) \sigma_{11} \right];$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G_{12}}; \quad (1.6.5)$$

$$\sigma_{11} = c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22};$$

$$\sigma_{22} = c_{21}\varepsilon_{11} + c_{22}\varepsilon_{22};$$

$$\sigma_{12} = c_{44} 2\varepsilon_{13},$$

где

$$c_{11} = E_1 \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{M}; \quad c_{22} = E_2 \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{M};$$

$$c_{44} = G_{12}; \quad c_{12} = c_{21} = E_1 \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{M} \frac{\nu_{21}}{\nu_{12}};$$

$$M = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}(\nu_{31}\nu_{12} + \nu_{32}) - \nu_{13}(\nu_{21}\nu_{32} + \nu_{31}); \quad (1.6.6)$$

для трансверсально-изотропного материала:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11}(1 - \nu_{31}\nu_{13}) - \sigma_{22}(\nu + \nu_{31}\nu_{13})];$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22}(1 - \nu_{31}\nu_{13}) - \sigma_{11}(\nu + \nu_{31}\nu_{13})];$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G_{12}};$$

$$\sigma_{11} = c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22};$$

$$\sigma_{22} = c_{21}\varepsilon_{11} + c_{22}\varepsilon_{22}; \quad \sigma_{12} = c_{44} 2\varepsilon_{12}, \quad (1.6.7)$$

где

$$c_{11} = c_{22} = E \frac{1 - \nu_{31} \frac{E}{E_3}}{M}; \quad c_{12} = c_{21} = E \frac{\nu + \nu_{31} \frac{E}{E_3}}{M};$$

$$c_{44} = G_{12}; \quad M = (1 + \nu) \left( 1 - \nu - 2\nu_{31} \frac{E}{E_3} \right);$$

для изотропного материала:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1 - \nu^2}{E} \left( \sigma_{11} - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{22} \right);$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1 - \nu^2}{E} \left( \sigma_{22} - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{11} \right);$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G_{12}};$$

$$\sigma_{11} = 2G \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \left( \varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1 - \nu} \varepsilon_{22} \right);$$

$$\sigma_{22} = 2G \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \left( \varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1 - \nu} \varepsilon_{11} \right);$$

$$\sigma_{12} = 2G_{12}\varepsilon_{12}. \quad (1.6.8)$$

Уравнения равновесия в перемещениях:

$$\beta_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \beta_4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\beta_4 + \beta_3) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + X_1 = 0;$$

$$\beta_4 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (\beta_4 + \beta_3) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + X_2 = 0. \quad (1.6.9)$$

Здесь коэффициенты  $\beta_i$  принимают следующие значения: для ортотропного и трансверсально-изотропного материала

$$\beta_1 = c_{11}; \quad \beta_2 = c_{22}; \quad \beta_3 = c_{12}; \quad \beta_{21} = c_{44},$$

где коэффициенты  $c_{ij}$  определяются формулами (1.6.6) для ортотропного материала и формулами (1.6.7) для трансверсально-изотропного материала;

для изотропного материала

$$\beta_1 = \beta_2 = 2G \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu}; \quad \beta_3 = 2G \frac{\nu}{1 - 2\nu}; \quad \beta_4 = G.$$

Уравнения (1.6.9) для изотропного материала могут быть представлены в виде

$$G \left[ \Delta u_i + \frac{3}{1 - 2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + X_i = 0, \quad (1.6.10)$$

где

$$\Delta(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_2^2}; \quad \varepsilon = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right).$$

### 1.6.3. ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + X_r = 0;$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} + X_\varphi = 0$$

или

$$\frac{\partial(\sigma_{rr} r)}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \sigma_{\varphi\varphi} + X_r r = 0;$$

$$\frac{\partial(\sigma_{r\varphi} r^2)}{\partial r} + r \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + X_\varphi r^2 = 0, \quad (1.6.11)$$

где  $X_r, X_\varphi$  - проекции объемной силы, приходящейся на единицу объема на оси соответственно  $r$  и  $r\partial\varphi$ .

Формулы Коши:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}; \quad (1.6.12)$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right).$$

Уравнение сплошности (совместности компонентов деформации)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial^2 (\varepsilon_{r\varphi} r)}{\partial r \partial \varphi} + r \frac{\partial (\varepsilon_{\varphi\varphi} r)}{\partial r^2} - r \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} = 0. \quad (1.6.13)$$

Обобщенный закон Гука. Для материалов ортотропных с цилиндрической анизотропией ( $Ox_3$  - ось анизотропии), трансверсально-изотропных ( $Ox_3$  - ось, перпендикулярная к изотропной плоскости) и изотропных обобщенный закон Гука определяется соответственно зависимостями (1.6.5), (1.6.7) и (1.6.8) при замене компонентов напряжения и деформации соответствующими компонентами в полярной системе координат.

Уравнения равновесия в перемещениях. Для ортотропных материалов с цилиндрической анизотропией и трансверсально-изотропных материалов

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{c_{11} r^2} \left( c_{44} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - c_{22} \right) \right] u_r + \\ & + \frac{1}{c_{11}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ (c_{12} + c_{44}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - (c_{22} + c_{44}) \frac{1}{r^2} \right] u_\varphi + \\ & + X_r \frac{1}{c_{11}} = 0; \\ & \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \left( 1 + \frac{c_{22}}{c_{44}} \right) \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{c_{12}}{c_{44}} \right) \frac{\partial}{\partial r} \right] u_r + \\ & + \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{c_{22}}{c_{44}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u_\varphi + \\ & + X_\varphi \frac{1}{c_{44}} = 0, \end{aligned}$$

где  $c_{ij}$  - коэффициенты, определяемые формулами (1.6.6), (1.6.7), при значениях технических постоянных, соответствующих материалам с ци-

линдрической анизотропией и трансверсально-изотропными.

Для изотропных материалов:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u_r + \\ & + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{1}{2(1-\nu)r^2} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)r^2} \right] u_\varphi + \\ & + \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} X_r = 0; \\ & \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{r^2} \right] + \\ & + \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u_\varphi + \\ & + \frac{X_\varphi}{G} = 0. \quad (1.6.14) \end{aligned}$$

(1.6.14)

Произведя в этих уравнениях замену переменных по формуле

$$r = e^t, \quad (t = \ln r),$$

можно привести их к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 1 + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u_r + \\ & + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} \right] u_\varphi + \\ & + \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} e^{2t} X_r = 0; \\ & \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \right) u_r + \\ & + \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 1 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u_\varphi + \\ & + \frac{e^{2t}}{G} X_\varphi = 0. \quad (1.6.15) \end{aligned}$$

(1.6.15)

**1.6.4. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ (ОБЩЕНОЕ ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ)**

Плоское напряженное состояние реализуется в тонкой пластине, нагруженной по краям усилиями, действующими параллельно плоскости пластины и распределенными симметрично относительно срединной плоскости (рис.1.6.3). Этим же условиям должны удовлетворять и объемные силы.

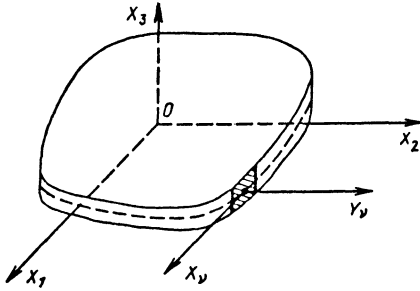


Рис.1.6.3. Срединная поверхность пластины

Если толщина пластины  $h$  и координатная плоскость  $Ox_1x_2$  есть срединная плоскость, то на свободных поверхностях пластины  $x_3 = \pm \frac{h}{2}$

$$\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0.$$

Вследствие малой толщины пластины (по сравнению с другими размерами) напряжения  $\sigma_{33}$  принимаются равными нулю по всей толщине.

Если ввести в рассмотрение усредненные по толщине значения напряжений, поверхностных и объемных сил (например,

$$\sigma_{11cp} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_3), \text{ то уравнения равновесия}$$

для усредненных напряжений для плоского напряженного состояния совпадают с уравнениями для плоской деформации (1.6.1) и (1.6.11).

Уравнения сплошности для усредненных компонентов деформации имеют вид (1.6.3) и (1.6.13), а зависимость между усредненными перемещениями и компонентами деформации определяется (1.6.2) и (1.6.12).

Зависимости между усредненными значениями компонентов напряжения и деформации (знаки усреднения опущены) имеют вид:

для ортотропного материала:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1} (\sigma_{11} - \nu_{12} \sigma_{22});$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E_2} (\sigma_{22} - \nu_{21} \sigma_{11});$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{1}{E_3} (\nu_{31} \sigma_{11} + \nu_{32} \sigma_{22});$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G_{12}};$$

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_{11} + \nu_{21}\varepsilon_{22});$$

$$\sigma_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_{22} + \nu_{12}\varepsilon_{11});$$

$$\sigma_{12} = 2G_{12}\varepsilon_{12};$$

для трансверсально-изотропного материала:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}); \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11});$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} (\sigma_{11} + \sigma_{22}); \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0;$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G_{12}};$$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22});$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}); \quad \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12},$$

где  $E, G, \nu$  - упругие постоянные в плоскости  $Ox_1x_2$ , в которой все направления являются эквивалентными;  $E_3$  - модуль Юнга для направления  $Ox_3$ ;  $\nu_{31}$  - коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении оси  $Ox_1$ , при растяжении в направлении оси  $Ox_3$  ( $\nu_{32} = \nu_{31}$ );

для изотропного материала:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}); \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11});$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G}; \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22});$$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}); \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11});$$

$$\sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12}.$$

Граничные условия, выражения, определяющие главные напряжения и формулы преобразования при повороте координатных осей для усредненных значений напряжений, совпадают с

соответствующими формулами для плоской деформации.

При плоском напряженном состоянии уравнения теории упругости имеют тот же вид, что и при плоской деформации, лишь в уравнения обобщенного закона Гука входят другие коэффициенты. Вследствие этого уравнения равновесия в перемещениях (в декартовой системе координат) будут иметь вид (1.6.9) при следующих значениях коэффициентов:

для ортотропного материала

$$\beta_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad \beta_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}};$$

$$\beta_3 = \frac{E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad \beta_4 = G_{12};$$

для трансверсально-изотропного и изотропного материала

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{E}{1 - \nu^2}; \quad \beta_3 = \frac{E\nu}{1 - \nu^2}; \quad \beta_4 = G$$

и уравнения равновесия в перемещениях записываются в виде

$$G \left[ \Delta u_i + \frac{3(1+\nu)}{1-\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + X_i = 0,$$

где

$$\Delta(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_2^2}; \quad \varepsilon = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right).$$

В полярной системе координат уравнения равновесия в перемещениях для ортотропных материалов будут иметь вид (1.6.14) при следующих значениях коэффициентов:

$$c_{11} = \frac{E_r}{1 - \nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}}; \quad c_{22} = \frac{E_\varphi}{1 - \nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}};$$

$$c_{12} = \frac{E_r\nu_{\varphi r}}{1 - \nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}} = \frac{E_\varphi\nu_{r\varphi}}{1 - \nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}};$$

$$c_{44} = 2G_{r\varphi}\varepsilon_{r\varphi},$$

где  $E_r$ ,  $E_\varphi$  - модули Юнга в направлении осей  $r$  и  $r\varphi$ ;  $G_{r\varphi}$  - модуль сдвига между этими направлениями;  $\nu_{r\varphi}$ ,  $\nu_{\varphi r}$  - коэффициенты Пуассона.

Для изотропных и трансверсально-изотропных материалов уравнения равновесия примут вид:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u_r +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{r^2} \right] u_\varphi + \frac{1-\nu^2}{E} X_r = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ (1+\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{3-\nu}{r^2} \right] u_r +$$

$$+ \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u_\varphi + \frac{2(1-\nu^2)}{E} X_\varphi = 0.$$

### 1.6.5. ФУНКЦИЯ НАПРЯЖЕНИЯ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Решение плоской задачи в напряжениях (интегрирование уравнений равновесия, условий сплошности, удовлетворение граничным условиям) в значительной степени упрощается, если ввести в рассмотрение некоторую четырехжды дифференцируемую функцию координат точек тела, называемую функцией напряжения, или функцией Эри.

Пусть объемные силы, действующие на тело, имеют потенциал и, следовательно, их проекции на оси координат определяются формулами  $X_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}$ ;  $X_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2}$  ( $U(x_1, x_2)$  - потенциальная функция).

Дифференциальные уравнения равновесия (1.6.1) будут всегда удовлетворены, если компоненты напряжения выразить через неизвестную функцию напряжения  $F(x_1, x_2)$  и потенциальную функцию  $U(x_1, x_2)$  с помощью формул

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + U; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + U; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

(1.6.16)

Если с помощью зависимостей закона Гука в уравнении сплошности (1.6.3) компоненты деформации выразим через напряжения, а затем воспользуемся формулами (1.6.16), получим уравнение для определения функции напряжения

$$\delta_1 \frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4} + 2\delta_3 \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \delta_2 \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} =$$

$$= -\delta_4 \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} - \delta_5 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}.$$

(1.6.17)

Входящие в это уравнение коэффициенты  $\delta_i$  принимают следующие значения.

Плоская деформация:  
ортоотропный материал:

$$\delta_1 = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1}; \quad \delta_2 = \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2};$$

$$\delta_3 = \frac{1}{2G_{12}} - (\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}) \frac{1}{E_1};$$

$$\delta_4 = \frac{1}{E_1} \left[ 1 - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{12} \left( 1 + \frac{\nu_{23}\nu_{31}}{\nu_{21}} \right) \right];$$

$$\delta_5 = \frac{1}{E_2} \left[ 1 - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{21} \left( 1 + \frac{\nu_{32}\nu_{13}}{\nu_{12}} \right) \right];$$

трансверсально-изотропный материал:

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{E}; \quad \delta_3 = \frac{1}{2G_{12}} - \frac{\nu + \nu_{31}\nu_{13}}{E};$$

$$\delta_4 = \delta_5 = \frac{1}{E} (1 - \nu - 2\nu_{13}\nu_{31});$$

изотропный материал:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \frac{1 - \nu^2}{E}; \quad \delta_4 = \delta_5 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E}.$$

Плоское напряженное состояние:

ортоотропный материал:

$$\delta_1 = \frac{1}{E_1}; \quad \delta_2 = \frac{1}{E_2}; \quad \delta_3 = \left( \frac{1}{2G_{12}} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \right);$$

$$\delta_4 = \frac{1 - \nu_{12}}{E_1}; \quad \delta_5 = \frac{1 - \nu_{21}}{E_2};$$

трансверсально-изотропный и изотропный материалы:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \frac{1}{E}; \quad \delta_4 = \delta_5 = \frac{1 - \nu}{E}.$$

Из уравнения (1.6.17) следует, что при отсутствии объемных сил или при постоянной их величине функция напряжения для изотропного материала как при плоской деформации, так и при плоском напряженном состоянии должна удовлетворять бигармоническому уравнению

$$\Delta\Delta F(x_1, x_2) = \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4} = 0. \quad (1.6.18)$$

Этому же уравнению должна удовлетворять функция напряжения для трансверсально-

изотропного материала при плоском напряженном состоянии.

### 1.6.6. ФУНКЦИЯ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Пусть объемные силы, действующие на тело, имеют потенциал

$$X_r = -\frac{\partial U}{\partial r}; \quad X_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \quad (1.6.19)$$

( $U(r, \varphi)$  - потенциальная функция).

Дифференциальные уравнения равновесия (1.6.11) будут удовлетворены, если принять:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + U; \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + U;$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right),$$

где  $F(r, \varphi)$  - функция напряжения в полярных координатах.

Уравнение, определяющее функцию напряжения, может быть получено, если воспользоваться уравнением сплошности (1.6.13) и обобщенным законом Гука в полярных координатах:

$$\begin{aligned} & \delta_2 \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + 2\delta_3 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \varphi^2} + \delta_1 \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} + \\ & + 2 \left[ \delta_2 \frac{1}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \delta_3 \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \varphi^2} + (\delta_1 + \delta_3) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right] - \\ & - \delta_1 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} \right) = \left[ \delta_4 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \delta_5 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \right. \\ & \left. + \delta_6 \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right], \quad (1.6.20) \end{aligned}$$

где коэффициенты  $\delta_i$  принимают значения:

плоская деформация:  
ортоотропный материал:

$$\delta_1 = \frac{1 - \nu_{zr}\nu_{rz}}{E_r}; \quad \delta_2 = \frac{1 - \nu_{z\varphi}\nu_{\varphi z}}{E_\varphi};$$

$$\delta_3 = \frac{1}{2G_{r\varphi}} - \frac{\nu_{r\varphi} + \nu_{r z}\nu_{z\varphi}}{E_r};$$

$$\delta_4 = \frac{1}{E_r} \left[ 1 - \nu_{rz} \nu_{zr} - \nu_{r\varphi} \left( 1 + \frac{\nu_{\varphi z} \nu_{zr}}{\nu_{\varphi r}} \right) \right];$$

$$\delta_5 = \frac{1}{E_\varphi} \left[ 1 - \nu_{\varphi z} \nu_{z\varphi} - \nu_{\varphi r} \left( 1 + \frac{\nu_{z\varphi} \nu_{rz}}{\nu_{\varphi r}} \right) \right];$$

$$\delta_6 = \frac{2}{E_\varphi} \left( 1 - \nu_{z\varphi} \nu_{\varphi z} - \frac{\nu_{zr} \nu_{\varphi z}}{2} \right) -$$

$$-\frac{1}{E_2} (1 - \nu_{rz} \nu_{zr} + \nu_{z\varphi});$$

изотропный материал:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \frac{1 - \nu^2}{E};$$

$$\delta_4 = \delta_5 = \delta_6 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} = \frac{1 - 2\nu}{2G};$$

плоское напряженное состояние я ние:

ортогруппный материал:

$$\delta_1 = \frac{1}{E_r}; \quad \delta_2 = \frac{1}{E_\varphi}; \quad \delta_3 = \frac{1}{2G_{r\varphi}} - \frac{\nu_{r\varphi}}{E_r};$$

$$\delta_4 = \frac{1 - \nu_{r\varphi}}{E_r}; \quad \delta_5 = \frac{1 - \nu_{\varphi r}}{E_\varphi};$$

$$\delta_6 = \frac{2}{E_\varphi} - \frac{1 + \nu_{r\varphi}}{E_r};$$

изотропный материал:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \frac{1}{E}; \quad \delta_4 = \delta_5 = \delta_6 = \frac{1 - \nu}{E}.$$

В случае отсутствия объемных сил или при постоянной их величине функция напряжения для изотропного материала как для плоской деформации, так и для плоского напряженного состояния должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \times$$

$$\times \left( \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right) = 0. \quad (1.6.21)$$

### 1.6.7. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЯ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

В случае первой основной задачи граничные условия, которым должна удовлетворять функция напряжения, могут быть установлены с помощью зависимостей (1.6.4).

Подставляя в эти зависимости выражения для напряжений (1.6.16) (при отсутствии объемных сил) и учитывая (см. рис. 1.6.2), что

$$\cos \alpha = \frac{\partial x_2}{\partial s} = \frac{\partial x_1}{\partial \nu}; \quad \sin \alpha = -\frac{\partial x_1}{\partial s} = \frac{\partial x_2}{\partial \nu}$$

( $\nu$ ,  $s$  - направление нормали и касательной в точке контура), получаем:

$$X_\nu = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \frac{\partial x_2}{\partial s} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_1}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right);$$

$$Y_\nu = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right). \quad (1.6.22)$$

Интегрирование этих равенств вдоль границы тела (вдоль контура) приводит к формулам:

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \int_0^s X_\nu ds + c_1; \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = -\int_0^s Y_\nu ds + c_2, \quad (1.6.23)$$

где  $s$  - длина дуги контура, отсчитываемая от некоторой точки  $A$  против часовой стрелки (см. рис. 1.6.2);  $c_1$ ,  $c_2$  - постоянные интегрирования.

Из формул (1.6.23) следует, что приращение  $\frac{\partial F}{\partial x_2}$  и  $\frac{\partial F}{\partial x_1}$  при переходе от начальной точки

$A$  в произвольную точку  $B$  контура равны проекциям на оси соответственно  $Ox_1$  и  $Ox_2$  главного вектора усилий, приложенных к указанному участку контура. В том случае, когда главный вектор усилий, приложенных к каждому контуру (для многосвязной области), равен нулю, эти величины будут однозначными функциями. Это условие всегда выполняется для односвязного тела, при этом постоянные  $c_1$ ,  $c_2$  могут быть приняты равными нулю.

Формулы (1.6.23) позволяют определить функцию напряжения и ее производную по нормали к контуру в произвольной точке контура:

$$F(x_1, x_2) = c_3 + c_1(x_2 - x_2^0) + c_2(x_1 - x_1^0) +$$

$$+ \int_0^s \left( \int_0^s X_\nu ds \right) dx_2 - \int_0^s \left( \int_0^s Y_\nu ds \right) dx_1;$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \cos(v, x_1) + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cos(v, x_2), \quad (1.6.24)$$

где  $x_1^0, x_2^0, x_1, x_2$  - декартовы координаты соответственно начальной точке  $A$  и произвольной точки  $B$  контура;  $c_3$  - постоянная интегрирования.

Формула (1.6.24) показывает, что с точностью до неопределенного слагаемого вида  $c_3 + c_1 x_2 + c_2 x_1$  функция напряжения в произвольной точке  $B$  контура равна моменту внешних сил, приложенных на участке контура  $AB$ , вычисленному относительно т.  $B$ .

Функция напряжения однозначна, если главный момент усилий, приложенных к контуру, равен нулю. Указанное условие выполняется всегда для односвязной области, при этом можно принять  $c_3 = 0$ .

Постоянные интегрирования  $c_i$  для многосвязных областей не могут назначаться произвольно: если на одном из контуров принять их равными нулю, то на остальных контурах их необходимо определить из условия однозначности перемещений. Таким образом, за граничные условия для функции напряжения могут быть приняты значения самой функции и ее производной по нормали на контуре.

Из уравнений, определяющих функцию напряжения, и ее граничных условий следует, что для односвязных тел из изотропных материалов при заданных усилиях на контуре функция напряжения не зависит от упругих постоянных, и, следовательно, в одинаково нагруженных телах одной и той же формы, но изготовленных из материалов, имеющих различные упругие постоянные, напряжения будут равны (теорема М.Леви). Для многосвязных изотропных тел функция напряжения не будет зависеть от упругих постоянных в том случае, когда главный вектор усилий, приложенных к каждому контуру, равен нулю.

**1.6.8. НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ**

Задача удовлетворения граничным условиям на контуре пластины существенно упрощается, если выбранная система координатных осей может быть совмещена с контуром пластины.

Ниже приведены решения отдельных задач в прямоугольной и полярной системах координат.

**Решение для прямоугольной пластины в полиномах.** Если нормальные  $p(x_1)$  и касательные  $q(x_1)$  напряжения, действующие на длинные кромки выгнутой прямоугольной пластины (рис.1.6.4), можно представить с помощью полиномов:

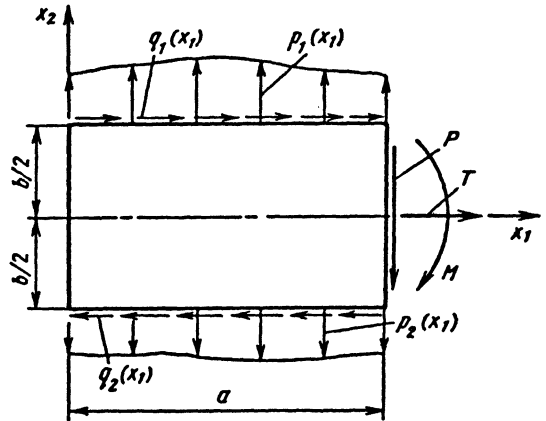


Рис.1.6.4. К решению для прямоугольной пластины в полиномах

$$\begin{aligned} p_1(x_1) &= \sum_{k=0}^{n_1} p_{1k} x_1^k; & q_1(x_1) &= \sum_{k=0}^{m_1} q_{1k} x_1^k; \\ p_2(x_1) &= \sum_{k=0}^{n_2} p_{2k} x_1^k; & q_2(x_1) &= \sum_{k=0}^{m_2} q_{2k} x_2^k, \end{aligned} \quad (1.6.25)$$

то решение дифференциального уравнения (1.6.17) при  $U=0$  можно искать в виде

$$F(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^N f_k(x_2) x_1^k, \quad (1.6.26)$$

где  $N$  равно наибольшему из чисел  $n_1+2, n_2+2, m_1+1, m_2+1$ .

Входящие в (1.6.26) неизвестные функции  $f_k(x_2)$  определяются системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} f_k^{IV}(x_2) &= -2 \frac{\delta_3}{\delta_1} (k+2)(k+1) f_{k+2}''(x_2) - \\ &- \frac{\delta_2}{\delta_1} (k+4)(k+3)(k+2)(k+1) f_{k+4}(x_2) \end{aligned}$$

(для значений  $0 \leq k \leq N-4$ );

$$\begin{aligned} f_{N-3}^{IV}(x_2) &= -2 \frac{\delta_3}{\delta_1} (N-1)(N-2) f_{N-1}''(x_2); \\ f_{N-2}^{IV}(x_2) &= -2 \frac{\delta_3}{\delta_1} N(N-1) f_N''(x_2); \\ f_{N-1}^{IV}(x_2) &= 0; & f_N^{IV}(x_2) &= 0, \end{aligned} \quad (1.6.27)$$

откуда после интегрирования



$$f_0(x_2) = a_0 x_2^3 + b_0 x_2^2 + \psi_0(x_2);$$

$$f_1(x_2) = a_1 x_2^3 + b_1 x_2^2 + c_1 x_2 + \psi_1(x_2);$$

$$f_k(x_2) = a_k x_2^3 + b_k x_2^2 + c_k x_2 + d_k + \psi_k(x_2), \quad (1.6.28)$$

где  $a_k, b_k, c_k, d_k$  - постоянные интегрирования;  $\psi_k(x_2)$  - функции, получаемые при последовательном интегрировании системы (1.6.27).

Для определения постоянных интегрирования следует воспользоваться граничными условиями при  $x_2 = \pm \frac{b}{2}$ :

$$\left. \begin{aligned} k(k-1)f_k\left(\frac{b}{2}\right) &= p_{1,k-2} \\ k(k-1)f_k\left(-\frac{b}{2}\right) &= p_{2,k-2} \end{aligned} \right\} k \geq 2; \quad (1.6.29)$$

$$\left. \begin{aligned} k f_k'\left(\frac{b}{2}\right) &= -q_{1,k-1} \\ k f_k'\left(-\frac{b}{2}\right) &= -q_{2,k-1} \end{aligned} \right\} k \geq 1 \quad (1.6.30)$$

и условиями на кромке  $x_1 = a$ .

Последние могут быть удовлетворены лишь в интегральном смысле и имеют вид

$$\int_{-b/2}^{b/2} \sigma_{12} dx_2 = -P; \quad \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_{11} dx_2 = T;$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} \sigma_{11} x_2 dx_2 = M.$$

**Решение для прямоугольной пластины в тригонометрических рядах.** В том случае, когда напряжения, приложенные к кромкам  $x_2 = \pm \frac{b}{2}$ , удовлетворяют условиям разложения в тригонометрические ряды, решение уравнения (1.6.17) можно искать в тригонометрических рядах.

Преобразуя уравнение (1.6.17) к безразмерному виду

$$\frac{\partial^4 F}{\partial \eta^4} + 2 \frac{\Omega}{\Gamma} \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{1}{\Gamma^2} \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4} = 0,$$

где

$$\xi = \frac{x_1}{a}; \quad \eta = \frac{x_2}{b}; \quad \Omega = \frac{\delta_3}{\sqrt{\delta_1 \delta_2}}; \quad \Gamma = \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}} \frac{a^2}{b^2},$$

функцию напряжения  $F(\xi, \eta)$  можно принять в форме (решение Рибьера)

$$F(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\eta) \cos n\pi\xi \quad (1.6.31)$$

или в форме (решение Файлона - Белзецкого)

$$F(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\eta) \sin n\pi\xi. \quad (1.6.32)$$

Выбор той или иной формы решения зависит от граничных условий на краях пластины  $\xi=0; \xi=1$ .

При использовании решения (1.6.31) должны выполняться следующие условия при  $\xi=0; \xi=1$ :

$$\sigma_{12} = 0; \quad \sigma_{11} \neq 0;$$

$$u_1 = 0; \quad u_2 \neq 0$$

и средняя величина напряжений  $p_i(x_1)$  на продольных краях пластины должна быть равна нулю, т. е.

$$\int_0^a p_i(x_1) dx_1 = 0, \quad (i = 1, 2).$$

При использовании же решения (1.6.32) должны соблюдаться следующие условия при  $\xi=0; \xi=1$ :

$$\sigma_{11} = 0; \quad \sigma_{12} \neq 0;$$

$$u_2 = 0; \quad u_1 \neq 0$$

и средняя величина напряжений  $q_i(x_1)$  на продольных краях пластины должна быть равна

$$\text{нулю, т. е. } \int_0^a q_i(x_1) dx_1 = 0, \quad (i = 1, 2).$$

Решение плоской задачи в тригонометрических рядах при произвольных граничных условиях на краях пластины рассмотрено П.Ф. Папковичем [32].

Входящие в решения (1.6.31) и (1.6.32) функции  $f_n(\eta)$  равны:

$$\begin{aligned} \text{если } \frac{1}{\Omega^2} < 1, \text{ то} \\ f_n(\eta) &= a_n \operatorname{ch} n\pi s_1 \eta + b_n \operatorname{sh} n\pi s_1 \eta + c_n \operatorname{ch} n\pi s_2 \eta + \\ &+ d_n \operatorname{sh} n\pi s_2 \eta, \end{aligned}$$

где

$$s_{1,2} = \sqrt{\frac{\Omega}{\Gamma}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}};$$

если  $\Omega=1$  (изотропная пластина), то

$$\begin{aligned} f_n(\eta) &= a_n \operatorname{ch} \alpha_n \eta + b_n \alpha_n \eta \operatorname{ch} \alpha_n \eta + c_n \operatorname{sh} \alpha_n \eta + \\ &+ d_n \alpha_n \eta \operatorname{sh} \alpha_n \eta, \end{aligned}$$

где  $\alpha_n = n\pi b/a$ .

Постоянные интегрирования  $a_n, b_n, c_n, d_n$  определяются из граничных условий на краях  $\eta = \pm 0,5$ .

Пусть

$$\text{при } \eta = 0,5 \quad \sigma_{22} = p_1(\xi); \quad \sigma_{12} = q_1(\xi);$$

$$\gg \eta = -0,5 \quad \sigma_{22} = p_2(\xi); \quad \sigma_{12} = q_2(\xi).$$

Тогда функции  $f_n(\eta)$  должны удовлетворять условиям:

$$f_n(\pm 0,5) = -2 \left( \frac{a}{\pi} \right)^2 \int_0^1 p_i(\xi) \frac{\cos \pi \xi}{(\sin \pi \xi)} d\xi;$$

$$f_n'(\pm 0,5) = 2 \frac{ab}{\pi} \int_0^1 q_i(\xi) \frac{\sin \pi \xi}{(-\cos \pi \xi)} d\xi,$$

$$(i = 1, 2)$$

В этих формулах тригонометрические функции, записанные сверху, относятся к решению Рибьера, а снизу - к решению Файлона - Белзецкого.

Перемещения и напряжения в пластине определяются формулами:

$$u_1 = \frac{1}{E_1 b} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\alpha_n} f_n''(\eta) + \nu_{12} \alpha_n f_n'(\eta) \right] \frac{\sin \pi \xi}{(-\cos \pi \xi)};$$

$$u_2 = \frac{1}{E_1 b} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\alpha_n} f_n''(\eta) + \left( \nu_{12} - \frac{E_1}{G_{12}} \right) f_n'(\eta) \right] \frac{\cos \pi \xi}{(\sin \pi \xi)};$$

$$\sigma_{11} = \frac{1}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(\eta) \frac{\cos \pi \xi}{(\sin \pi \xi)};$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\eta) (\pi \alpha_n)^2 \frac{\cos \pi \xi}{(\sin \pi \xi)};$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(\eta) \pi \alpha_n \frac{\sin \pi \xi}{(-\cos \pi \xi)}.$$

### 1.6.9. РЕДУКЦИОННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОЯСКОВ ШИРОКОПОЛЫХ БАЛОК

При изгибе балки, состоящей из стенки (стенок) и поясков, последние привлекаются к изгибу касательными напряжениями, действующими по линии соединения стенки и пояска. Вследствие этого возникающие в пояске нормальные напряжения изменяются по его ширине неравномерно - они уменьшаются по мере удаления от места соединения пояска со стенкой. Эта неравномерность будет тем больше, чем больше отношение ширины пояска к его длине.

По этой причине применение гипотезы плоских сечений, дающей равномерное распределение нормальных напряжений по ширине пояска, для балок с широкими поясками может привести при оценке величины нормальных напряжений к ошибке в опасную сторону.

При применении технической теории к изгибу широкополых балок принято заменять действительный поясок балки некоторым приведенным пояском, ширина которого  $s$  определяется формулой

$$s = \psi b,$$

где  $b$  - действительная ширина пояска;  $\psi$  - редуциционный коэффициент; он показывает, какую долю действительной ширины пояска составляет его приведенная ширина.

Если обозначить линейную деформацию пояска в месте соединения со стенкой  $\varepsilon_{11m}$ , а действительные нормальные напряжения в пояске  $\sigma_{11}$ , то редуциционный коэффициент

$$\psi = \frac{\sigma_{11}^0}{E \varepsilon_{11m}},$$

где  $\sigma_{11}^0 = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_{11} dx_2$  - среднее напряжение в

пояске (ось  $Ox_1$  проходит посередине ширины пояска).

В общем случае редуциционный коэффициент является функцией координаты  $x_1$  и зависит от граничных условий при  $x_1=0$  и  $x_1=a$  ( $a$  - длина балки).

Подробное исследование редуциционных коэффициентов широкополых балок содержится в работе [32].

### 1.6.10. РЕШЕНИЕ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ [18, 32]

Функцию напряжения для ортотропной пластины с цилиндрической анизотропией, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (1.6.20) при  $U = \text{const}$  (однородное уравнение), можно искать в виде суммы частных решений

$$\begin{aligned} F(r, \varphi) = & A_0 + B_0 r^2 + C_0 r^{\alpha_1} + D_0 r^{\alpha_2} + \\ & + e^{\pm i \varphi} \left( A_{\pm 1} r + B_{\pm 1} r \ln r + C_{\pm 1} r^{\beta_1} + D_{\pm 1} r^{\beta_2} \right) + \\ & + \sum_{n \geq 2} e^{\pm n i \varphi} \left[ A_{\pm n} r^{\nu_1} + B_{\pm n} r^{\nu_2} + C_{\pm n} r^{\nu_3} + D_{\pm n} r^{\nu_4} \right] + \\ & + A r \varphi \sin \varphi + B r \varphi \cos \varphi, \end{aligned} \quad (1.6.33)$$

где

$$\alpha_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}}; \quad \beta_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 2 \frac{\delta_3}{\delta_2} + \frac{\delta_1}{\delta_2}};$$

$$\nu_{1,2,3,4} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(1 + 2 \frac{\delta_3}{\delta_2} n^2 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\right) \pm \dots}$$

$$\dots \pm \sqrt{\left(1 + 2 \frac{\delta_3}{\delta_2} n^2 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2 - 4 \frac{\delta_1}{\delta_2} (n^2 - 1)^2};$$

(1.6.34)

$A_j, B_j, C_j, D_j$  - постоянные интегрирования.

Для изотропной пластины выражение (1.6.33) примет вид

$$\begin{aligned} F(r, \varphi) = & A_0 r^2 \ln r + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 + \\ & + e^{\pm i\varphi} \left( A_{\pm 1} r^3 + B_{\pm 1} r \ln r + C_{\pm 1} r + D_{\pm 1} r^{-1} \right) + \\ & + \sum_{n \geq 2} e^{\pm i n \varphi} \left( A_{\pm n} r^n + B_{\pm n} r^{-n} + C_{\pm n} r^{n+2} + \right. \\ & \left. + D_{\pm n} r^{2-n} \right) + A r \varphi \sin \varphi + B r \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.6.35)$$

В случае осесимметричной задачи (напряжения не зависят от угла  $\varphi$ ) в выражениях (1.6.33), (1.6.35) все постоянные, за исключением  $A_0, B_0, C_0, D_0$ , равны нулю.

Использование приведенных выражений для функции напряжения позволяет получить, в частности, решение следующих задач.

**Круговое кольцо (или труба) при действии равномерно распределенного наружного и внутреннего давлений** (рис. 1.6.5) (осесимметричное напряженное состояние). Напряжения и перемещения для ортотропного материала с цилиндрической анизотропией:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & \frac{p_a c^{k+1} - p_b}{1 - c^{2k}} \left(\frac{b}{r}\right)^{1-k} - \\ & - \frac{p_a c^{k+1} - p_b c^{2k}}{1 - c^{2k}} \left(\frac{b}{r}\right)^{k+1}; \\ \sigma_{\varphi\varphi} = & \frac{p_a c^{k+1} - p_b}{1 - c^{2k}} k \left(\frac{b}{r}\right)^{1-k} + \\ & + \frac{p_a c^{k+1} - p_b c^{2k}}{1 - c^{2k}} k \left(\frac{b}{r}\right)^{k+1}; \end{aligned} \quad (1.6.36)$$

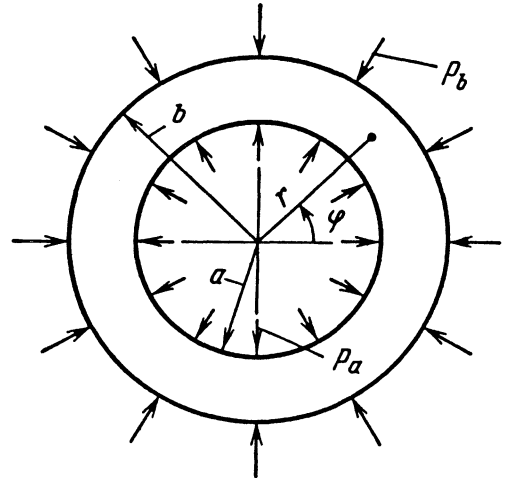


Рис.1.6.5. Кольцо (труба), нагруженное равномерно распределенным наружным и внутренним давлением

$$\sigma_{r\varphi} = 0;$$

$$\begin{aligned} u_r = & \frac{b}{E_\varphi (1 - c^{2k})} \left[ \left( p_a c^{k+1} - p_b \right) \left( k - \nu_{\varphi r} \right) \left( \frac{r}{b} \right)^k + \right. \\ & \left. + \left( p_a - p_b c^{k-1} \right) c^{k+1} \left( k + \nu_{\varphi r} \right) \left( \frac{b}{r} \right)^k \right]; \\ u_\varphi = & 0, \end{aligned} \quad (1.6.37)$$

$$\text{где } c = \frac{a}{b}.$$

При плоском напряженном состоянии (кольцо) входящий в формулы (1.6.36) и (1.6.37) коэффициент

$$k = \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}} = \sqrt{\frac{E_\varphi}{E_r}}.$$

При плоской деформации (труба) напряжения также могут быть вычислены по формулам (1.6.36) при

$$k = \sqrt{\frac{1 - \nu_{rz} \nu_{zr}}{1 - \nu_{\varphi z} \nu_{z\varphi}} \frac{E_\varphi}{E_r}}.$$

Для изотропного материала (задача Ляме)

$$\sigma_{rr} = \frac{p_a c^2 - p_b}{1 - c^2} - \frac{p_a - p_b}{1 - c^2} c^2 \left(\frac{b}{r}\right)^2;$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{P_a c^2 - P_b}{1 - c^2} + \frac{P_a - P_b}{1 - c^2} c^2 \left(\frac{b}{r}\right)^2;$$

$$\sigma_{r\varphi} = 0;$$

$$u_r = \frac{P_a - P_b}{E(1 - c^2)} \frac{(1 + \nu)a^2}{r} + \frac{(P_a c^2 - P_b)(1 - \nu)}{E(1 - c^2)} r;$$

$$u_\varphi = 0. \tag{1.6.38}$$

При плоской деформации в формуле (1.6.38) модуль  $E$  следует заменить на  $E \frac{1}{1 - \nu^2}$ , а коэффициент Пуассона  $\nu$  на  $\frac{\nu}{1 - \nu}$ .

**Сосредоточенная сила в неограниченной изотропной плоскости** (рис.1.6.6). Функция напряжения

$$F(r, \varphi) = \frac{Pr}{\pi} \left\{ \frac{1 - \nu}{4} \ln r \cos \varphi - \varphi \sin \varphi \right\}$$

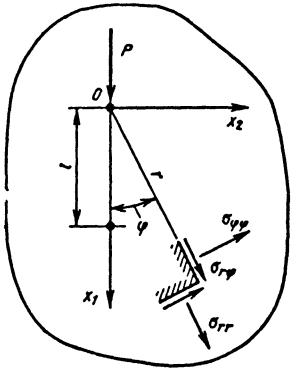


Рис.1.6.6. Сосредоточенная сила, действующая в неограниченной изотропной пластине

Компоненты напряжений и перемещения:

$$\sigma_{rr} = -\frac{P}{4\pi} \frac{3 + \nu}{r} \cos \varphi;$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{P}{4\pi} \frac{1 - \nu}{r} \cos \varphi; \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{P}{4\pi} \frac{1 - \nu}{r} \sin \varphi;$$

$$u_r = \frac{P}{4\pi E} (3 - \nu)(1 + \nu) \ln \frac{l}{r} \cos \varphi;$$

$$u_\varphi = \frac{P(1 + \nu)}{4\pi E} \left[ 1 + \nu - (3 - \nu) \ln \frac{l}{r} \right] \sin \varphi.$$

При этом предполагается, что точка, нахо-

дящаяся на оси  $Ox_1$  на расстоянии  $l$  от начала координат, неподвижна.

**Сосредоточенная сила, действующая на кромку изотропной полуплоскости.** Сила направлена перпендикулярно к кромке (рис.1.6.7). Функция напряжения

$$F(r, \varphi) = -\frac{P}{\pi} r \varphi \sin \varphi. \tag{1.6.39}$$

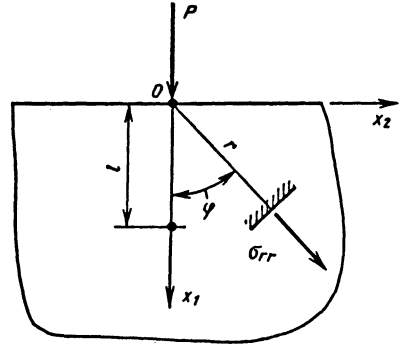


Рис.1.6.7. Полуплоскость, нагруженная сосредоточенной силой, действующей перпендикулярно к кромке пластины

Компоненты напряжений и перемещения:

$$\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \varphi}{r}; \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{r\varphi} = 0;$$

$$u_r = -\frac{2P}{\pi E} \left[ \ln r \cos \varphi + \frac{1 - \nu}{2} \varphi \sin \varphi \right] + H \sin \varphi + K \cos \varphi;$$

$$u_\varphi = \frac{2P}{\pi E} \left[ \left( \frac{1 + \nu}{2} + \ln r \right) \sin \varphi - \frac{1 - \nu}{2} \varphi \cos \varphi \right] + H \cos \varphi - K \sin \varphi + Cr, \tag{1.6.40}$$

где  $C, H, K$  - постоянные, определяемые из условий закрепления полуплоскости.

Если, например, точка, расположенная на оси  $Ox_1$  на расстоянии  $l$  от начала координат, неподвижна, то

$$H = C = 0; \quad K = -\frac{2P}{\pi E} \ln l;$$

$$u_r = -\frac{2P}{\pi E} \left[ \ln \frac{r}{l} \cos \varphi + \frac{1 - \nu}{2} \varphi \sin \varphi \right];$$

$$u_\varphi = \frac{2P}{\pi E} \left[ \left( \ln \frac{r}{l} + \frac{1 + \nu}{2} \right) \sin \varphi - \frac{1 - \nu}{2} \varphi \cos \varphi \right].$$

Напряжения и перемещения в декартовых координатах:

$$\sigma_{11} = -\frac{2P x_1^3}{\pi r^4}; \quad \sigma_{22} = -\frac{2P x_1 x_2^2}{\pi r^4};$$

$$\sigma_{12} = -\frac{2P x_1^2 x_2}{\pi r^4};$$

$$u_1 = -\frac{P}{\pi E} \left[ \frac{(1+\nu)x_2^2}{r^2} + \ln r^2 \right] + \omega x_2 + u_0;$$

$$u_2 = \frac{P}{\pi E} \left[ \frac{(1+\nu)x_1 x_2}{r^2} + (1-\nu) \left( \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} - \frac{\pi}{2} \right) \right] - \omega x_1 + v_0,$$

(1.6.41)

где  $\omega$ ,  $u_0$ ,  $v_0$  - постоянные, определяемые из условий закрепления полуплоскости;  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ .

Сила направлена по оси  $Ox_2$  (рис.1.6.8). Напряжения и перемещения в полярных координатах определяются формулами (1.6.40), но угол  $\varphi$  должен отсчитываться от направления действия силы  $P$ .

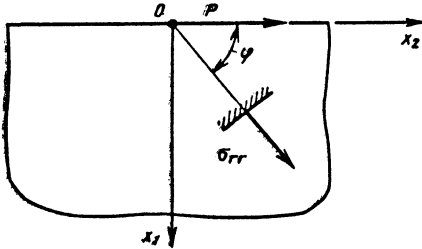


Рис.1.6.8. Полуплоскость, нагруженная на свободной кромке касательной сосредоточенной силой

Напряжения и перемещения в декартовых координатах:

$$\sigma_{11} = -\frac{2P x_1^2 x_2}{\pi r^4}; \quad \sigma_{22} = -\frac{2P x_2^2}{\pi r^4};$$

$$\sigma_{12} = -\frac{2P x_1 x_2^2}{\pi r^4};$$

$$u_1 = \frac{P}{\pi E} \left[ \frac{(1+\nu)x_1 x_2}{r^2} - (1-\nu) \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} \right] + \omega x_2 + u_0;$$

$$u_2 = -\frac{P}{\pi E} \left[ 2 \ln r + (1+\nu) \frac{x_1^2}{r^2} \right] - \omega x_1 + v_0.$$

Вышеприведенные решения, определяющие напряжения и перемещения при действии одной сосредоточенной силы, могут быть использованы на основании принципа суперпозиции для получения решения при действии других видов нагрузки (распределенной нагрузки, моментов и т. д.).

**Пример 1.** Определить перемещения точек полуплоскости при действии на кромку нормальной распределенной нагрузки  $q(x_2)$  (рис.1.6.9) при следующих условиях закрепления:

$$x_1 = l; \quad x_2 = 0; \quad u_1 = u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0. \quad (1.6.42)$$

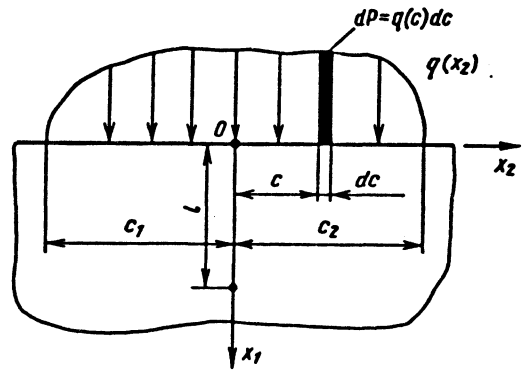


Рис.1.6.9. Полуплоскость, нагруженная вдоль свободной кромки нормальной распределенной нагрузкой

**Решение.** Определим вначале перемещения точек полуплоскости при действии сосредоточенной силы  $P$ , приложенной на расстоянии  $c$  от начала координат.

На основании формул (1.6.41) запишем

$$u_1 = -\frac{P}{\pi E} \left[ \frac{(1+\nu)(x_2 - c)^2}{R^2} + 2 \ln R \right] + \omega x_2 + u_0;$$

$$u_2 = \frac{P}{E} \left[ \frac{(1+\nu)(x_2 - c)x_1}{R^2} + (1-\nu) \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2 - c} \right] - \omega x_1 + v_0,$$

где  $R^2 = x_1^2 + (x_2 - c)^2$ .

Из условий (1.6.42) находим:

$$u_0 = \frac{P}{\pi E} \left[ \frac{(1+\nu)c^2}{l^2 + c^2} + \ln(l^2 + c^2) \right];$$

$$v_0 = \frac{P}{\pi E} \frac{cl}{(l^2 + c^2)^2} \left[ l^2 - c^2 + \sqrt{3l^2 + c^2} \right];$$

$$\omega = \frac{2c(\nu l^2 - c^2)}{(l^2 + c^2)^2} \frac{P}{\pi E}.$$

Суммируя действие элементарных сил  $dP = q(c)dc$  с помощью операции интегрирования, получаем:

$$u_1 = \frac{1}{\pi E} \int_{-c_1}^{c_2} \left[ \frac{(1+\nu)c^2}{l^2 + c^2} - \frac{(1+\nu)(x_2 - c)^2}{x_1^2 + (x_2 - c)^2} + \ln \frac{l^2 + c^2}{x_1^2 + (x_2 - c)^2} - \frac{2c^2(\nu l^2 - c^2)}{(l^2 + c^2)^2} \right] q(c)dc;$$

$$u_2 = \frac{1}{\pi E} \int_{-c_1}^{c_2} \left\{ \frac{(1+\nu)x_1(x_2 - c)}{x_1^2 + (x_2 - c)^2} + \frac{cl}{(l^2 - c^2)^2} \times \right. \\ \left. \times \left[ l^2 - c^2 + \sqrt{3l^2 + c^2} \right] - \frac{2c(\nu l^2 - c^2)}{(l^2 + c^2)^2} + \right.$$

$$\left. + (1-\nu) \arctg \frac{l(x_2 - c) + x_1 c}{c(x_2 - c) - bx_1} \right\} q(c)dc.$$

**Пример 2.** Определить напряжения в полуплоскости, нагруженной на кромке сосредоточенным моментом  $M$  (рис. 1.6.10).

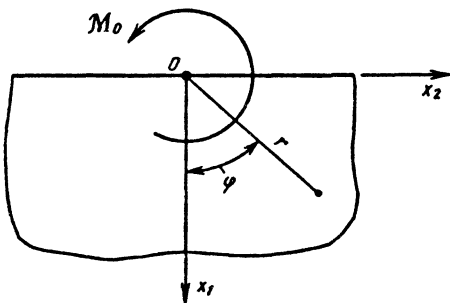


Рис.1.6.10. Полуплоскость, свободная кромка которой нагружена сосредоточенным моментом

**Решение.** Представим функцию напряжения (1.6.39) при действии сосредоточенной силы в виде

$$F(r, \varphi) = -PF_0(r, \varphi),$$

где

$$F_0(r, \varphi) = \frac{r\varphi \sin \varphi}{\pi}.$$

При действии двух противоположно направленных сил (рис.1.6.11), приложенных на расстоянии  $\Delta c$  друг от друга, эта функция будет, очевидно,

$$F_1(r, \varphi) = P[F_0(x_1, x_2 + \Delta c) - F_0(x_1, x_2)], \quad (1.6.43)$$

где  $x_1 = r \cos \varphi$ ;  $x_2 = r \sin \varphi$ .

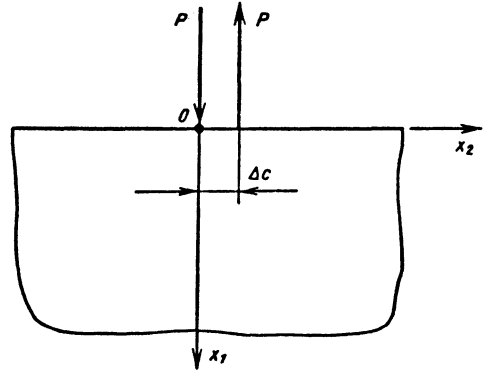


Рис.1.6.11. Полуплоскость, свободная кромка которой нагружена парой сил

Подставляя в равенство (1.6.43)

$$P = \frac{M_0}{\Delta c}$$

и устремляя  $\Delta c$  к нулю, находим

$$F_1(r, \varphi) = M_0 \frac{\partial F_0}{\partial x_2}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial F_0}{\partial x_2} = \frac{\partial F_0}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial F_0}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} = \frac{1}{\pi} \left( \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right),$$

получаем

$$F_1(r, \varphi) = \frac{M_0}{\pi} \left( \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right).$$

Отсюда

$$\sigma_{rr} = -\frac{2M_0}{\pi r^2} \sin 2\varphi;$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 0;$$

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{2M_0}{r^2} \cos^2 \varphi.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абовский Н. П., Андреев Н. П.** Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. Красноярск: Изд-во Красноярского пед. ин-та, 1973. 190 с.
2. **Арگیرис Дж.** Современные достижения в методах расчета конструкций. М.: Стройиздат, 1968. 241 с.
3. **Бахвалов Н. С.** Численные методы. М.: Наука, 1975. 631 с.
4. **Бенерджи П., Баттерфилд Р.** Метод граничных элементов в прикладных науках: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 494 с.
5. **Бердичевский В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
6. **Биргер И. А.** Некоторые математические методы решения инженерных задач. М.: Оборонгиз, 1956. 149 с.
7. **Бребия К., Теллес Ж., Вроубел Л.** Методы граничных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 524 с.
8. **Василду К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 542 с.
9. **Верюжский Ю. В.** Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики. Киев: Вища школа, 1978. 182 с.
10. **Галлахер Р.** Метод конечных элементов: Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
11. **Демидов С. П.** Теория упругости. М.: Высшая школа, 1979. 432 с.
12. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.
13. **Зенкевич О., Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
14. **Ильюшин А. А.** Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978. 287 с.
15. **Колтунов М. А., Кравчук А. С., Майборода В. П.** Прикладная механика деформируемого твердого тела. М.: Высшая школа, 1983. 349 с.
16. **Купрадзе В. Д.** Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
17. **Лейбензон Л. С.** Теория упругости: Собр. трудов. Т.1. М.: Изд-во АН СССР, 1951. 476 с.
18. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. М.: ГИТТЛ, 1950. 287 с.
19. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
20. **Ляв А.** Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.
21. **Марчук Г. И.** Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
22. **Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха.** Киев: Вища школа, 1982. 479 с.
23. **Миндлин Р. Д.** Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений // Механика. 1964. N 4 (88). С. 115 - 128.
24. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1981. 512 с.
25. **Новожилов В. В.** Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
26. **Норри Д., де Фриз Ж.** Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981. 304 с.
27. **Образцов И. Ф.** Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных конструкций. М.: Машиностроение, 1966. 392 с.
28. **Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х. С.** Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1985. 392 с.
29. **Оден Дж.** Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред: Пер. с англ. М.: Мир, 1976.
30. **Пальмов В. А.** Основные уравнения нессимметричной теории упругости // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. N 3. С. 401-407.
31. **Пановко Я. Г.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1985. 287 с.
32. **Папкович П. Ф.** Теория упругости. М.: Оборонгиз, 1939. 640 с.
33. **Партон В. З., Перлин П. И.** Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.
34. **Пиккуль В. В.** Прикладная механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1989. 218 с.
35. **Победра Б. Е.** Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 434 с.
36. **Постнов В. А., Хархурим И. Я.** Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 342 с.
37. **Постнов В. А.** Численные методы расчета судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1977. 280 с.
38. **Прочность, устойчивость, колебания: Справочник / Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. Т.1 - 3. М.: Машиностроение, 1968.**
39. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
40. **Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник / Под общ. ред. В. И. Мяченкова. М.: Машиностроение, 1989. 520 с.**
41. **Рейсснер Э.** О некоторых вариационных теоремах теории упругости // Проблемы механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР, 1961.Л.1. (К 70-летию акад. Н. И. Мухомелишвили).
42. **Розин Л. А.** Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 233 с.
43. **Розин Л. А.** Метод конечных элементов в применении к упругим системам. М.: Стройиздат, 1977. 128 с.

44. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
45. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 1. 536 с.; Т. 2. 584 с.
46. Справочник по строительной механике корабля / Г. В. Бойцов, О. М. Палий, В. А. Постнов, В. С. Чувиковский. Л.: Судостроение, 1982. Т.1. 376 с.; Т.2. 460 с.; Т.3. 320 с.
47. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 350 с.
48. Тимошенко С. П., Гудьер Д. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
49. Угодчиков А. Г., Хуторянский Н. М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1986. 294 с.
50. Филин А. П. Приближенные методы математического анализа, используемые в механике твердых деформируемых тел. Л.: Стройиздат, 1971. 160 с.
51. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. М.: Наука, 1975, т. I, 832 с.; 1978, т. II, 616 с.; 1981, т. III, 480 с.
52. Черных К. Ф., Литвиненкова З. Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 254 с.



# Раздел 2

## ПЛАСТИЧНОСТЬ И ПОЛЗУЧЕСТЬ

### Глава 2.1

#### КРИТЕРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

##### 2.1.1. ОБЩИЙ ВИД КРИТЕРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Под пластичностью понимают свойство твердого тела, при котором в случае снятия внешних воздействий, деформирующих тело, его конфигурация оказывается несовпадающей с первоначальной.

При одноосном напряженном состоянии пластические (остаточные) деформации возникают, когда абсолютная величина главного напряжения превышает некоторое предельное значение, которое называют пределом текучести материала. В этом случае законы нагружения и разгрузки не совпадают, т.е. отсутствует взаимно однозначное соответствие между напряжениями и деформациями (рис. 2.1.1).

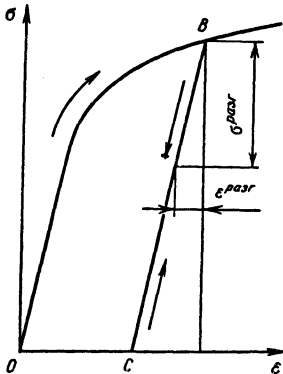


Рис. 2.1.1. Диаграмма растяжения

Для неодносного напряженного состояния общий вид условия возникновения пластических деформаций (критерия пластичности)

$$f_T(\sigma_{ij}) = 0, \quad (2.1.1)$$

где  $\sigma_{ij}$  - предельные значения компонентов тензора напряжений, при которых возникают пластические деформации.

В шестимерном пространстве компонентов напряжений  $\sigma_{ij}$  ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ) уравнение (2.1.1) является уравнением гиперповерхности начала пластичности (рис. 2.1.2). Если точка,

изображающая напряженное состояние в координатах  $\sigma_{ij}$ , лежит внутри этой гиперповерхности (точка A на рис. 2.1.2), пластические деформации не возникают. Если же точка лежит на этой поверхности (точка B на рис. 2.1.2), начинают образовываться пластические (остаточные) деформации.

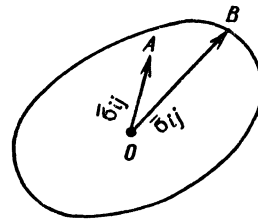


Рис. 2.1.2. Поверхность пластичности

##### 2.1.2. КРИТЕРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА, ОДИНАКОВО СОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ РАСТЯЖЕНИЮ И СЖАТИЮ

Общий вид критерия пластичности

$$f_T [I_1(T_\sigma), I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma), \sigma_T] = 0, \quad (2.1.2)$$

где  $I_1(T_\sigma)$ ,  $I_2(T_\sigma)$ ,  $I_3(T_\sigma)$  - первый, второй и третий инварианты тензора напряжений;  $\sigma_T$  - предел текучести материала при растяжении и сжатии.

Для материалов, у которых при всестороннем равном растяжении и сжатии пластические деформации не возникают, условие (2.1.2) принимает вид

$$f_T [I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma), \sigma_T] = 0, \quad (2.1.3)$$

где  $I_2(D_\sigma)$  и  $I_3(D_\sigma)$  - второй и третий инварианты девиатора напряжений.

В пространстве главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  уравнение (2.1.3) описывает цилиндр, образующие которого равнонаклонены к осям главных напряжений (направляющие косинусы их  $1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$ ). Следом этого цилиндра на плоскости, перпендикулярной образующей (девиаторной плоскости), является выпуклая кривая, состоящая из 12 одинаковых дужек (рис. 2.1.3). На осях  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , являющихся проекциями осей  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$  на деви-

торную плоскость, эта кривая отсекает отрезки  $\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_T$  (рис. 2.1.3).

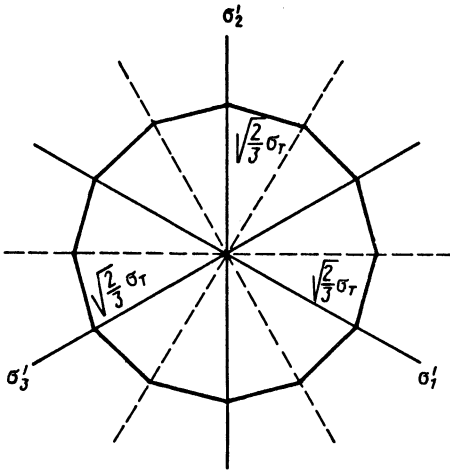


Рис. 2.1.3. Проекция поверхности пластичности в координатах  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  на девятую плоскость

Кривая может быть аппроксимирована окружностью радиуса  $\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_T$  (рис.2.1.4). Тогда по-

верхностью пластичности является круговой цилиндр и критерий пластичности имеет вид  $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2$ , (2.1.4)

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - предельные значения главных напряжений.

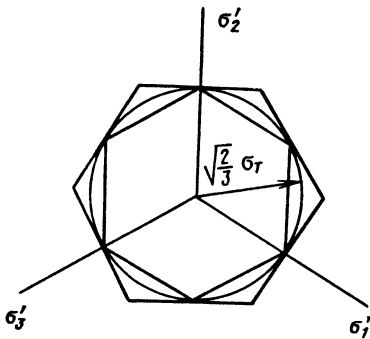


Рис. 2.1.4. Примеры критериев пластичности

Этот критерий называют критерием Максвелла-Хубера. Ему может быть дана энергетическая интерпретация: пластические деформации

в общем случае неодносного напряженного состояния возникают тогда, когда потенциальная энергия изменения формы достигает соответствующей величины при одноосном напряженном состоянии.

Если выпуклую кривую на рис.2.1.3 заменить вписанным в окружность на рис.2.1.4 правильным шестиугольником, то поверхностью пластичности является шестигранная призма и критерий пластичности при условии, что  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , принимает вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (2.1.5)$$

Этот критерий называют критерием Треска-Сен-Венана (или критерием максимального касательного напряжения).

Если выпуклую кривую на рис. 2.1.3 заменить описанным вокруг окружности на рис. 2.1.4 правильным шестиугольником, то поверхностью пластичности является также шестигранная призма и соответствующий критерий называют критерием Ишлинского-Хилла (или критерием наибольшего приведенного напряжения).

Для плоского напряженного состояния ( $\sigma_3=0, \sigma_2 \geq 0, \sigma_1 \geq 0$ ) следом рассмотренных выше поверхностей пластичности на плоскости  $\sigma_2, \sigma_1$  является эллипс и два шестиугольника (рис. 2.1.5).

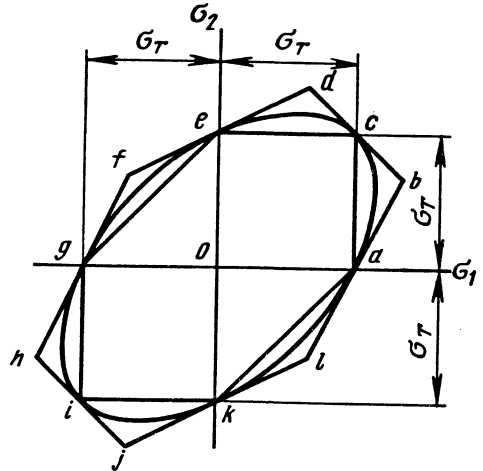


Рис. 2.1.5. Критерии пластичности для плоского напряженного состояния

Интенсивность напряженного состояния при оценке возникновения пластических деформаций определяется значением эквивалентного напряжения  $\sigma_e$ . Эквивалентным напряжением называют наибольшее главное напряжение в одноосном растяжении, равнопрочном данному напряженному состоянию. Пластические деформации возникают, когда эквивалентное напряжение достигает значения предела текучести:  $\sigma_e = \sigma_T$ .

По критерию Максвелла-Хубера

$$\sigma_e = \sqrt{\left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]} / 2 \quad (2.1.6)$$

или через главные напряжения

$$\sigma_e = \sqrt{\left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} / 2. \quad (2.1.6a)$$

По критерию Треска-Сен-Венана при условии, что  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ,

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (2.1.7)$$

Эквивалентные напряжения, подсчитанные на основе критериев Максвелла-Хубера и Треска-Сен-Венана, различаются незначительно. Наибольшее отличие составляет 15,6 %. Экспериментальные исследования лучше согласуются с критерием Максвелла-Хубера.

### 2.1.3. КРИТЕРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА, РАЗЛИЧНО СОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ РАСТЯЖЕНИЮ И СЖАТИЮ

Если наибольшее  $\sigma_1$  и наименьшее  $\sigma_3$  ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ) главные напряжения разных знаков или одно из них равно нулю, то тогда критерий пластичности имеет вид

$$\sigma_1 - \nu \sigma_3 = \sigma_{TP}, \quad (2.1.8)$$

где  $\nu = \sigma_{TP} / \sigma_{TC}$  или  $\nu = \sigma_{TP} / \tau_T - 1$ ;  $\sigma_{TP}$ ,  $\sigma_{TC}$ ,  $\tau_T$  - пределы текучести при растяжении, сжатии и чистом сдвиге. Этот критерий называют критерием Мора.

Эквивалентное напряжение по этому критерию

$$\sigma_e = \sigma_1 - \nu \sigma_3. \quad (2.1.9)$$

По критерию Г.С.Писаренко - А.А.Лебедева

$$\chi \sqrt{\left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} / 2 + (1 - \chi) \sigma_1 = \sigma_{TP}, \quad (2.1.10)$$

где  $\chi = \sigma_{TP} / \sigma_{TC}$  или  $\chi = (\sigma_{TP} - \tau_T) / (\sqrt{3} - 1) \tau_T$ .

Эквивалентное напряжение по этому критерию

$$\sigma_e = \chi \sqrt{\frac{\left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]}{2}} + (1 - \chi) \sigma_1. \quad (2.1.11)$$

В критерии Писаренко-Лебедева в отличие от критерия Мора учитывается влияние среднего главного напряжения на возникновение пластических деформаций и не предполагается, что наибольшее  $\sigma_1$  и наименьшее  $\sigma_3$  главные на-

пряжения имеют разные знаки или одно из них равно нулю. Экспериментальная проверка хорошо его подтверждает.

### 2.1.4. КРИТЕРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА

Ортотропным телом называют такое тело, у которого имеются три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии по отношению к механическим свойствам. Если при всестороннем равном растяжении или сжатии пластические деформации в таком теле не возникают, то критерий пластичности в предположении, что оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  являются пересечениями плоскостей симметрии (главные оси анизотропии), имеет вид

$$H_0 (\sigma_x - \sigma_y)^2 + F_0 (\sigma_y - \sigma_z)^2 + G_0 (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 2N_0 \tau_{xy}^2 + 2L_0 \tau_{yz}^2 + 2M_0 \tau_{zx}^2 = 1, \quad (2.1.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= \left( 1 / \sigma_{Tx}^2 + 1 / \sigma_{Ty}^2 - 1 / \sigma_{Tz}^2 \right) / 2; \\ F_0 &= \left( 1 / \sigma_{Ty}^2 + 1 / \sigma_{Tz}^2 - 1 / \sigma_{Tx}^2 \right) / 2; \\ G_0 &= \left( 1 / \sigma_{Tz}^2 + 1 / \sigma_{Tx}^2 - 1 / \sigma_{Ty}^2 \right) / 2; \\ N_0 &= 1 / \left( 2 \tau_{Txy}^2 \right); \quad L_0 = 1 / \left( 2 \tau_{Tyz}^2 \right); \\ M_0 &= 1 / \left( 2 \tau_{Tzx}^2 \right); \end{aligned} \right\} \quad (2.1.13)$$

Как следует из (2.1.13), для определения параметров анизотропии  $H_0$ ,  $F_0$ ,  $G_0$ ,  $N_0$ ,  $L_0$  и  $M_0$  необходимо провести шесть испытаний: три одноосных растяжения или сжатия и три чистых сдвига в направлениях главных осей анизотропии  $x$ ,  $y$  и  $z$  и вычислить на их основе пределы текучести  $\sigma_{Tx}$ ,  $\sigma_{Ty}$ ,  $\sigma_{Tz}$ ,  $\tau_{Txy}$ ,  $\tau_{Tyz}$  и  $\tau_{Tzx}$ .

Эквивалентное напряжение

$$\sigma_e = \left\{ 3 \left[ R_x R_y (\sigma_x - \sigma_y)^2 + R_x (\sigma_y - \sigma_z)^2 + R_y (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 2 R_y (R_{xy} \tau_{xy}^2 + R_{yz} \tau_{yz}^2 + R_{zx} \tau_{zx}^2) \right] / \left[ 2 (R_x + R_x R_y + R_y) \right] \right\}^{1/2}, \quad (2.1.14)$$

где

$$\begin{aligned} R_x &= H_0 / G_0; \quad R_y = H_0 / F_0; \quad R_{xy} = N_0 / G_0; \\ R_{yz} &= L_0 / G_0; \quad R_{zx} = M_0 / G_0. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

2.1.5. КРИТЕРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ  
ДЛЯ УПЛОТНЯЕМЫХ ТЕЛ

К уплотняемым телам относят пористые и порошковые тела, а также порошки. Пористые тела содержат только трехмерные дефекты - поры. В порошковых телах, помимо того, имеются и двумерные дефекты - трещины. Такие тела могут быть получены, например, из порошков путем неполного спекания. Пористые и порошковые тела являются связными. В отличие от них порошки представляют собой несвязные тела. Подобно газам они принимают форму сосуда, в который они помещены.

На макроскопическом уровне уплотняемые тела рассматриваются как сплошные. Их механическое поведение будет пластическим, если твердая фаза обладает пластическими свойствами. Однако в отличие от твердой фазы, обычно несжимаемой, макротело может приобретать необратимые деформации объема, что объясняется затеканием или расширением пор.

Порошковые тела в отличие от пористых могут сопротивляться лишь незначительным растягивающим напряжениям, а порошки им вообще не сопротивляются. Однако на макроуровне при сжимающих нормальных напряжениях все три вида уплотняемых тел ведут себя примерно одинаково. Ниже рассмотрены критерии пластичности пористых металлов. Они могут быть пригодны также и для описания пластических свойств порошковых тел и порошков, но только при сжимающих нормальных напряжениях.

Критерии пластичности пористых металлов в отличие от критериев пластичности несжимаемых тел зависят от среднего нормального напряжения и поверхности пластичности замкнуты. Протяженность поверхности пластичности вдоль линии, равнонаклоненной к осям главных напряжений, определяется пределами текучести при всестороннем равномерном растяжении  $q_T$  и сжатии  $p_T$ . Под  $p_T$  понимают минимальное по модулю среднее нормальное сжимающее напряжение, вызывающее пластическое течение. Аналогично под  $q_T$  понимают минимальное среднее растягивающее напряжение, вызывающее текучесть.

Из критериев пластичности, не зависящих от вида напряженного состояния, т.е. от третьего инварианта тензора напряжений, наиболее широко применяют условие, которому в пространстве главных напряжений соответствует эллипсоид вращения с осью симметрии, совпадающей с гидростатической осью (рис. 2.1.6). Оно выражается равенством

$$\frac{(\sigma_0 + c)^2}{a^2} + \frac{\sigma_e^2}{3b^2} = 1, \quad (2.1.16)$$

где  $a, b, c$  - параметры материала;  $\sigma_0$  - среднее нормальное напряжение;  $\sigma_e$  - эквивалентное на-

пряжение по критерию Максвелла-Хубера (2.1.6).

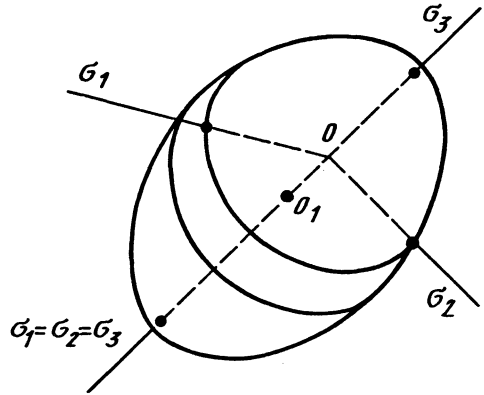


Рис. 2.1.6. Регулярная поверхность пластичности для уплотняемого тела

Величина  $c$  определяет сдвиг эллипсоида по его гидростатической оси;  $a, \sqrt{3}b$  - его полуоси. Эти величины могут быть выражены через пределы текучести:  $a = 0,5(q_T + p_T)$ ,  $b = \tau_T$ ,  $c = 0,5(p_T - q_T)$ , где  $\tau_T$  - максимальный предел текучести при сдвиге. (Эту величину надо отличать от пределов текучести при сдвиге в случае  $\sigma_0 \neq -c$ , которые в уплотняемых телах зависят от среднего нормального напряжения и потому не являются параметрами материала.)

При  $c > 0$  эллипсоид сдвинут по гидростатической оси в сторону отрицательных  $\sigma_0$ . В этом случае при  $\sigma_0 > -c$  согласно ассоциированному закону течения имеет место разрыхление. При  $\sigma_0 = -c$  на экваторе эллипсоида скорость объемной деформации равна нулю. Следовательно, случай  $c > 0$  реализуется в телах, разрыхляющихся при чисто сдвиговых напряжениях. В уплотняемых телах, имеющих одинаковые пределы текучести при всестороннем равномерном растяжении и сжатии,  $c = 0$ . Поскольку величина  $c$  равна тому минимальному среднему давлению, при котором начинается уплотнение, то ее называют *пределом уплотнения*.

Пределы текучести при одноосном растяжении и сжатии

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{ТР} \\ \sigma_{Тс} \end{matrix} \right\} = 3b \frac{a(3a^2 + b^2 - 3c^2)^{1/2} \mp bc}{3a^2 + b^2}. \quad (2.1.17)$$

Если  $c = 0$ , то  $\sigma_{ТР} = \sigma_{Тс} = 3ab / (3a^2 + b^2)^{1/2}$ .

Экспериментальное определение величин  $q_T$  и  $c$  затруднительно. Однако они могут быть выражены через экспериментально определяемые пределы текучести на всестороннее равномерное сжатие, чистый сдвиг, одноосное растяжение и сжатие при помощи (2.1.16).

Критерий пластичности (2.1.16) является непосредственным обобщением критерия текучести Максвелла-Хубера на случай пористых металлов.

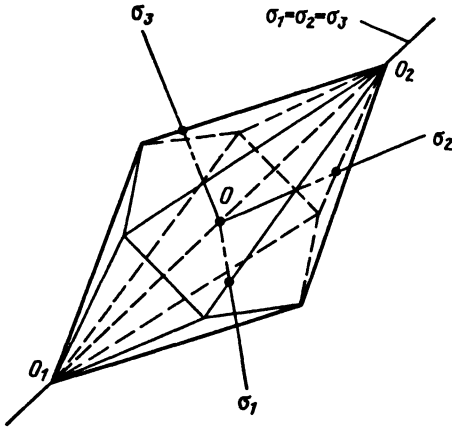


Рис. 2.1.7. Сингулярная поверхность пластичности для уплотняемого тела

Критерий пластичности, которому в пространстве главных напряжений соответствуют две правильные пирамиды (рис. 2.1.7) с общим основанием, лежащим в девиаторной плоскости, и с осью, совпадающей с гидростатической осью, можно рассматривать как обобщение условия Треска-Сен-Венана. Вершины пирамид лежат по разные стороны от девиаторной плоскости и имеют координаты  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p_T$  (вершина  $O_1$ ) и  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = q_T$  (вершина  $O_2$ ). Общее основание пирамид представляет собой правильный шестиугольник, совпадающий с шестиугольником Треска-Сен-Венана. Все ребра лежат в бисекторных плоскостях.

Рассматриваемый критерий пластичности может быть выражен равенством

$$\frac{|\sigma_i - \sigma_j|}{2\tau_T} - \frac{|\sigma_0|}{p_T} = 1, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.1.18)$$

Более общее условие текучести можно получить, если пирамиды сдвинуть по гидростатической оси на расстояние  $c$ .

## Глава 2.2

### ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

#### 2.2.1. ПЛАСТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ И АССОЦИИРОВАННЫЙ ЗАКОН ТЕЧЕНИЯ

Теории пластичности устанавливают связь между пластическими деформациями и напряжениями. Так же, как и в теории упругости, эта связь не зависит от времени, т.е. при неизменном напряженном состоянии деформированное состояние не меняется и наоборот. Однако в отличие от упругости конечное упруго-пластическое деформированное состояние тела зависит от предшествующей истории изменения напряженного состояния (истории нагружения). Задача построения общей теории пластичности не решена вследствие сложности процесса пластического деформирования реального материала. Предложен ряд различных теорий, основанных на физических, структурных и модельных представлениях [8, 18, 22, 28, 37].

Наибольшее практическое применение в инженерных расчетах имеют теории, базирующиеся на концепции предельных поверхностей (поверхность пластичности или нагружения) и принципе максимума рассеяния механической энергии при пластическом деформировании [22, 28]. В этом случае деформация складывается из упругой (обратимой)  $\epsilon_{ij}^e$  и пластической (необратимой)  $\epsilon_{ij}^p$  частей:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p. \quad (2.2.1)$$

Различают деформационные теории пластичности, связывающие текущие значения деформаций с напряжениями, и теории пластического течения, связывающие приращения или скорости деформаций с напряжениями. Приращения пластической деформации определяются ассоциированным законом течения

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2.2.2)$$

где  $f$  - пластический потенциал или функция пластичности;

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, q_n) = 0; \quad (2.2.3)$$

$q_n$  - параметры упрочнения, зависящие от истории изменения  $\epsilon_{ij}^p$ , постоянные при фиксированных  $\epsilon_{ij}^p$ ;  $d\lambda$  - скалярный множитель, определяемый из условия непрерывного изменения функции пластичности при нагружении  $df=0$ ;

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{\left( \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p} + \frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial \epsilon_{ij}^p} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}. \quad (2.2.4)$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам проводят суммирование.

Соотношения (2.2.2), (2.2.3) и (2.2.4) применимы в случае активного процесса нагружения, когда

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0. \quad (2.2.5)$$

В случае пассивного процесса, сопровождающегося упругой разгрузкой,

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \quad f = 0. \quad (2.2.6)$$

Если поверхность пластичности имеет угловые точки или ребра, образованные пересечением нескольких гладких поверхностей, то для этих особенностей пластическое деформирование определяется соотношениями:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^n d\lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}}; \quad f_k = 0; \quad \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \geq 0. \quad (2.2.7)$$

Здесь отличны от нуля те  $d\lambda_k$ , для которых выполняются условия активного процесса нагружения. Если условие нагружения (2.2.5) выполняется для всех поверхностей, образующих особенность, то нагружение называют полным.

### 2.2.2. ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ИЗОТРОПНОГО УПРОЧНЕНИЯ

Рассматривается первоначально изотропное тело, которое в результате пластического деформирования упрочняется, оставаясь изотропным. Используя функцию пластичности Максвелла-Хубера с одним параметром упрочнения,

$$f = \frac{3}{2} (\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}) (\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}) - \sigma_T^2 \Phi^2(q) = 0, \quad (2.2.8)$$

где в качестве параметра упрочнения  $q$  принимают либо накопленную пластическую деформацию (параметр Одвишта)

$$q = \int \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} = \int d\varepsilon_e^p = \bar{\varepsilon}_e^p, \quad (2.2.9)$$

либо затраченную на пластическое деформирование работу

$$q = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \int \sigma_e d\varepsilon_e^p = A^p, \quad (2.2.10)$$

соотношения (2.2.2), (2.2.4) с учетом приращений упругих деформаций приводят к виду

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[ (1 + 2\mu) d\sigma_{ij} - 3\mu d\sigma_0 \delta_{ij} \right] + \frac{3d\sigma_e}{2E_k^p \sigma_e} (\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}). \quad (2.2.11)$$

Здесь  $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$  - среднее нормальное напряжение;  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$  - единичный тензор или

символ Кронекера;  $E_k^p(\sigma_e)$  - касательный модуль, равный тангенсу угла наклона касательной к диаграмме пластического деформирования материала;

$$\sigma_e = \sigma_T \Phi(\bar{\varepsilon}_e^p),$$

где

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} (\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}) (\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij})} \quad (2.2.12)$$

- эквивалентное напряжение или интенсивность напряжений.

Зависимость  $\sigma_e = \sigma_T \Phi(\bar{\varepsilon}_e^p)$  устанавливают экспериментально, например, перестроением диаграммы растяжения в соответствии с (2.2.9), (2.2.12) с учетом неизменности объема при пластическом деформировании:

$$\varepsilon_{ii}^p = 0; \quad \varepsilon_{ii} = 3\varepsilon_0 = 3 \frac{1 - 2\mu}{E} \sigma_0. \quad (2.2.13)$$

Уравнения (2.2.11) являются основными уравнениями теории пластического течения Прандтля-Рейсса.

В случае, когда компоненты девиатора напряжений  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$  изменяются пропорционально одному и тому же параметру (простое нагружение), уравнения (2.2.11) могут быть проинтегрированы и представлены в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 - 2\mu}{E} \sigma_0 \delta_{ij} + \frac{3}{2E_c} (\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}), \quad (2.2.14)$$

где  $E_c(\sigma_e)$  - секущий модуль, равный отношению  $\sigma_e$  к  $\varepsilon_e$  на диаграмме деформирования материала;

$$\sigma_e = \sigma_T F(\varepsilon_e),$$

где

$$\varepsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}) (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij})} \quad (2.2.15)$$

- эквивалентная деформация или интенсивность деформаций. Зависимость  $\sigma_e = \sigma_T F(\varepsilon_e)$  принимают единой для любых напряженных состояний (гипотеза единой кривой) и определяют экспериментально путем простейших испытаний, в частности по диаграмме растяжения.

Уравнения (2.2.14) - основные уравнения теории малых упругопластических деформаций Генки-Ильюшина. Они справедливы при условии активного нагружения, которое в данной теории выражается неравенством  $d\sigma_e > 0$ . При нейтральном нагружении и при разгрузке  $d\sigma_e \leq 0$  возникают только упругие деформации.

Уравнения теории малых упругопластических деформаций могут быть использованы и при нагружениях, отличных от простого, если напряженное состояние отвечает конической точке поверхности пластичности, а угол отклонения вектора напряжения от траектории простого нагружения не превосходит величины

$$\beta = \arccos \sqrt{\frac{E_k^p}{E_k^p + E_c^p}}, \quad (2.2.16)$$

где  $E_c^p(\sigma_e)$  - секущий модуль, определяемый из диаграммы  $\sigma_e = \sigma_T \Phi(\bar{\epsilon}_e^p)$ .

### 2.2.3. ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ АНИЗОТРОПНОГО УПРОЧНЕНИЯ

Экспериментально установлено, что первоначально изотропный материал после пластического деформирования приобретает анизотропию пластических свойств. Проявление анизотропии заключается в том, что деформированный материал имеет различные значения предела текучести в различных направлениях, а также при прямом и обратном нагружениях (эффект Баушингера).

Для описания упрочнения и связанной с ним деформационной пластической анизотропии вводят наряду с действительными напряжениями  $\sigma_{ij}$  добавочные напряжения  $\rho_{ij}$ , которые зависят от истории изменения пластических деформаций  $\epsilon_{ij}^p$  и постоянны при фиксированных  $\bar{\epsilon}_{ij}^p$ . В этом случае функция пластичности Максвелла-Хубера (2.2.8) принимает вид

$$f = \frac{3}{2} (\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} - \rho_{ij}) (\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} - \rho_{ij}) - \sigma_T^2 F^2(\bar{\epsilon}_e^p) = 0. \quad (2.2.17)$$

Добавочные напряжения могут быть представлены различным образом [37]. В простейшем случае

$$\rho_{ij} = g(\bar{\epsilon}_e^p) \epsilon_{ij}^p. \quad (2.2.18)$$

Функции  $F$  и  $g$  характеризуют пластические свойства материала и определяются экспериментально в опытах по выявлению деформационной пластической анизотропии, в частности эффекта Баушингера. В случае определения эффекта Баушингера при одноосном напряженном состоянии

$$F(\bar{\epsilon}^p) = \frac{\sigma_p - \sigma_c}{2\sigma_T}; \quad g(\bar{\epsilon}^p) = \frac{\sigma_p + \sigma_c}{3\bar{\epsilon}^p}. \quad (2.2.19)$$

Здесь  $\bar{\epsilon}^p$  - пластическая деформация предварительного растяжения;  $\sigma_p, |\sigma_c|$  - новые значения

пределов текучести при повторном после разгрузки растяжении и сжатии.

Согласно ассоциированному закону течения приращения пластических деформаций с учетом (2.2.17) выражаются следующим образом:

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{d\sigma_e^A}{E_K \sigma_e^A} (\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} - \rho_{ij}), \quad (2.2.20)$$

где

$$\sigma_e^A = \sqrt{\frac{3}{2} (\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} - \rho_{ij}) (\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} - \rho_{ij})} \quad (2.2.21)$$

- интенсивность активных напряжений;  $E_K^A$  - касательный модуль диаграммы деформирования:  $\sigma_e^A = \sigma_T F(\bar{\epsilon}_e^p)$ . В случае идеального эффекта Баушингера, когда  $\sigma_p - \sigma_c = 2\sigma_T$  и диаграмма растяжения материала имеет линейное упрочнение с постоянным модулем  $E_T$ ,

$$F(\bar{\epsilon}^p) = 1; \quad g(\bar{\epsilon}^p) = \frac{2}{3} \frac{E E_T}{E - E_T} = c. \quad (2.2.22)$$

Тогда уравнения (2.2.20) с учетом (2.2.4) могут быть представлены в следующей девиаторной форме:

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{3}{2\sigma\sigma_T} (s_{ij} - c\bar{\epsilon}_{ij}^p) \left( s_{kl} - c\bar{\epsilon}_{kl}^p \right) ds_{kl}. \quad (2.2.23)$$

Вариант теории, отвечающий (2.2.22), (2.2.23), называют *теорией трансляционного упрочнения*, так как поверхность пластичности (2.2.17) при этом испытывает в пространстве напряжений перемещение, не меняя своих размеров. Согласно (2.2.19), (2.2.20) поверхность пластичности смещается и одновременно расширяется. Такой вид упрочнения называют *трансляционно-изотропным*.

Изложенные выше теории анизотропного упрочнения более точно описывают реальное поведение материала, чем теории изотропного упрочнения.

### 2.2.4. ТЕОРИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Изменения напряженно-деформированного состояния в некоторой точке тела при его деформировании допускают геометрическую интерпретацию. При этом можно сформулировать теорию пластичности, не используя концепцию предельных поверхностей и разделения процессов на активные и пассивные.

Поскольку связь между шаровыми частями тензоров деформаций  $\epsilon_0 \delta_{ij}$  и напряжений  $\sigma_0 \delta_{ij}$  считают известной и подчиняющейся закону Гука, то отыскивают связь между девиаторами  $e_{ij} = \epsilon_{ij} - \epsilon_0 \delta_{ij}$  и  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$ . При этом принимают, что материал первоначально изотропный и влияние третьего инварианта девиаторов несуще-

ственно. Так как компоненты девиаторов линейно зависимы  $e_{ii}=0, s_{ii}=0$ , вместо шести компонент каждого девиатора вводят по пять линейно независимых между собой компонент:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}}e_{11}; \quad \vartheta_2 = \sqrt{2}\left(e_{22} + \frac{1}{2}e_{11}\right); \\ \vartheta_3 &= \sqrt{2}e_{12}; \quad \vartheta_4 = \sqrt{2}e_{23}; \quad \vartheta_5 = \sqrt{2}e_{31}; \end{aligned} \right\} (2.2.24)$$

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}}s_{11}; \quad s_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(s_{22} - s_{33}); \\ s_3 &= \sqrt{2}s_{12}; \quad s_4 = \sqrt{2}s_{23}; \quad s_5 = \sqrt{2}s_{31}. \end{aligned} \right\} (2.2.25)$$

Компоненты  $\vartheta_k$  ( $k=1, \dots, 5$ ) можно рассматривать как проекции вектора деформации  $\vec{\varepsilon}$  на ортогональные оси пятимерного евклидова пространства деформаций. Аналогично компоненты  $s_k$  ( $k=1, \dots, 5$ ) - проекции вектора напряжения  $\vec{s}$  на ортогональные оси пятимерного евклидова пространства напряжений. Оба пространства эквивалентны, и рассмотрение векторов  $\vec{\varepsilon}$  и  $\vec{s}$  удобно вести в одном пространстве, за которое принимают пространство деформаций.

Процессу изменения деформированного состояния в точке тела соответствует в пространстве деформаций некоторая траектория, которую описывает конец вектора  $\vec{\varepsilon}$ . В качестве независимого параметра прослеживания процесса принимают длину дуги траектории деформации  $l$ :

$$|d\vec{\varepsilon}| = \sqrt{d\vartheta_k d\vartheta_k} = dl; \quad \vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}(l). \quad (2.2.26)$$

Траекторию деформации с построенными в каждой ее точке векторами напряжения  $\vec{s}$  и заданными значениями  $\sigma_0$  называют *образом процесса нагружения*. А. А. Ильюшиным сформулирован подтвержденный экспериментально постулат изотропии [25]: образ процесса нагружения в пятимерном пространстве деформаций полностью определяется только внутренней геометрией траектории деформаций.

Внутренняя геометрия траектории деформаций описывается движением по ней пятигранника Френе, представляющего собой естественную систему координат. Пять взаимно ортогональных единичных векторов  $\vec{p}_k$  этой системы координат выражаются через пять производных вектора по длине дуги  $d^k \vec{\varepsilon} / dl^k$  и четыре параметра кривизны и кручения  $\alpha_k$  траектории ( $\alpha_5=0$ ).

В соответствии с постулатом изотропии вектор напряжений в каждой точке траектории деформации можно представить в виде

$$\vec{s} = A_k \vec{p}_k = |\vec{s}| \cos \beta_k \vec{p}_k, \quad k = 1, 2, \dots, 5, \quad (2.2.27)$$

где  $|\vec{s}| = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_e(l)$  - модуль вектора напряжения;

$\beta_k(l)$  - углы между вектором  $\vec{s}$  и осями естественной системы координат. Функционал  $|\vec{s}|$  описывает скалярные, а пять функционалов  $\beta_k$  (из которых только четыре являются независимыми) - векторные свойства материалов. Построение этих функционалов и их аппроксимация на основе экспериментов в случае произвольных траекторий деформации представляют собой весьма трудную и еще не завершенную проблему.

В случае траекторий малого кручения (когда ее можно считать плоской) и произвольной кривизны соотношение (2.2.27) приводится к виду

$$d\vec{s} = N d\vec{\varepsilon} + (P - N) \frac{\vec{s} d\vec{\varepsilon}}{|\vec{s}|^2} \vec{s}, \quad (2.2.28)$$

где

$$N = -\frac{|\vec{s}|}{\sin \beta_1} \left( \frac{d\beta_1}{dl} + \alpha_1 \right); \quad P = \frac{d|\vec{s}|}{dl} \frac{1}{\cos \beta_1}. \quad (2.2.29)$$

Определяющее уравнение (2.2.28) в тензорной форме имеет вид

$$ds_{ij} = N de_{ij} + (P - N) \frac{3}{2} \frac{s_{kl} de_{kl}}{\sigma_e^2} s_{ij}. \quad (2.2.30)$$

При траекториях средней кривизны, когда

$$\alpha_1 = (0, 1 \div 0, 3) \frac{\sigma_T}{E}, \quad \text{установлено, что практически}$$

для всех конструкционных металлов и сплавов

$$N = 1,36G; \quad P = \frac{dF(\varepsilon_e)}{d\varepsilon_e}, \quad (2.2.31)$$

где  $G$  - модуль сдвига;  $F(\varepsilon_e)$  - уравнение единой кривой деформирования материала.

Для траекторий малой кривизны когда

$$\alpha_1 < (0, 1 \div 0, 3) \frac{\sigma_T}{E}, \quad N=2G, \quad P = \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_e} = E_k \quad \text{и}$$

уравнение (2.2.28) переходит в уравнение (2.2.11) теории течения с изотропным упрочнением. При прямолинейной траектории деформирования (простое нагружение) уравнения (2.2.28) совпадают с уравнением (2.2.14) теории малых упруго-пластических деформаций.



### 2.2.5. ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА

Ряд материалов имеет ярко выраженную анизотропию пластических свойств в исходном состоянии. Как показывают эксперименты [10, 50], при деформировании характер анизотропии практически сохраняется, а пределы текучести в различных направлениях вследствие упрочнения материала увеличиваются в равной степени.

Для ортотропного несжимаемого тела, когда в каждой точке существуют три взаимно ортогональные плоскости симметрии механических свойств, функция пластичности, записанная в осях координат, совпадающих с главными осями анизотропии материала  $x, y, z$ , имеет вид

$$2f = H_0(\sigma_x - \sigma_y)^2 + F_0(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G_0(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 2N_0\tau_{xy}^2 + 2L_0\tau_{yz}^2 + 2M_0\tau_{zx}^2 - \Phi^2(q) = 0, \quad (2.2.32)$$

где  $H_0, F_0, G_0, N_0, L_0, M_0$  - параметры анизотропии материала, которые выражаются через значения пределов текучести в исходном состоянии при растяжении вдоль главных осей анизотропии  $\sigma_{Tx}, \sigma_{Ty}, \sigma_{Tz}$  и при сдвиге между этими осями  $\tau_{Txy}, \tau_{Tyz}, \tau_{Tzx}$  по формулам (2.1.13).

В отличие от изотропного тела использование в качестве параметра упрочнения  $q$  работы пластической деформации  $A^P$  или параметра Одкависта  $\int d\tilde{\epsilon}^P$  приводит для ортотропного тела к разным формулировкам теории и к разным результатам расчетов. Лучшее соответствие экспериментам дает теория энергетического упрочнения, предложенная Р. Хиллом, в которой  $q = A^P = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P$ . В этом случае множитель  $d\lambda$ , входящий в ассоциированный закон течения, равен приращению работы пластической деформации

$$d\lambda = dA^P = \sigma_{\text{ЭКВ}} d\epsilon_{\text{ЭКВ}}^P, \quad (2.2.33)$$

где  $\sigma_{\text{ЭКВ}}$  и  $d\epsilon_{\text{ЭКВ}}^P$  - эквивалентное напряжение и эквивалентное приращение пластической деформации, выражаемые формулами:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\frac{3}{2(H_0 + F_0 + G_0)} \left[ H_0(\sigma_x - \sigma_y)^2 + F_0(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G_0(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 2N_0\tau_{xy}^2 + 2M_0\tau_{zx}^2 + 2L_0\tau_{yz}^2 \right]}, \quad (2.2.34)$$

$$d\epsilon_{\text{ЭКВ}}^P = \frac{1}{H_0 F_0 + G_0 H_0 + F_0 G_0} \times \left\{ \frac{2}{3} (H_0 + F_0 + G_0) \left[ H_0 (F_0 d\epsilon_x^P - G_0 d\epsilon_y^P)^2 + F_0 (G_0 d\epsilon_y^P - H_0 d\epsilon_z^P)^2 + G_0 (H_0 d\epsilon_z^P - F_0 d\epsilon_x^P)^2 \right] + \frac{1}{2} (H_0 F_0 + G_0 H_0 + F_0 G_0)^2 \times \left( \frac{d\gamma_{xy}^P}{N_0} + \frac{d\gamma_{yz}^P}{L_0} + \frac{d\gamma_{zx}^P}{M_0} \right)^2 \right\}^{1/2}. \quad (2.2.35)$$

Для изотропного тела

$$\left( H_0 = F_0 = G_0 = \frac{N_0}{3} = \frac{L_0}{3} = \frac{M_0}{3} \right) \quad \text{эквива-}$$

лентное напряжение  $\sigma_{\text{ЭКВ}}$  совпадает с интенсивностью напряжений  $\sigma_e$ , а эквивалентное приращение пластической деформации  $d\epsilon_{\text{ЭКВ}}^P$  - с интенсивностью приращений пластической деформации  $d\tilde{\epsilon}_e^P$ .

Функцию пластичности (2.2.32) можно представить в виде

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\frac{3}{2(H_0 + F_0 + G_0)}} \Phi \left( \int \sigma_{\text{ЭКВ}} d\epsilon_{\text{ЭКВ}}^P \right), \quad (2.2.36)$$

что равносильно функциональной зависимости

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \tilde{\Phi} \left( \int d\epsilon_{\text{ЭКВ}}^P \right). \quad (2.2.37)$$

Функция  $\tilde{\Phi}$  определяется экспериментально, в частности по диаграмме растяжения в одном из направлений симметрии и трем пределам текучести в этих направлениях. График этой функции называют диаграммой деформирования материала.

При одноосном растяжении в направлении оси  $x$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \alpha \sigma_x; \quad d\epsilon_{\text{ЭКВ}}^P = \frac{1}{\alpha} d\epsilon_x^P, \quad (2.2.38)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{3(R_x + 1)R_y}{2(R_x + R_x R_y + R_y)}}; \quad R_x = \frac{H_0}{G_0}; \quad R_y = \frac{H_0}{F_0}.$$

Аналогичные результаты будут при растяжении в направлении оси  $y$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \beta \sigma_y; \quad d\epsilon_{\text{ЭКВ}}^P = \frac{1}{\beta} d\epsilon_y^P, \quad (2.2.39)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{3R_x(R_x + 1)}{2(R_x + R_x R_y + R_y)}},$$

и в направлении оси z

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \gamma \sigma_z; \quad d\varepsilon_{\text{ЭКВ}}^p = \frac{1}{\gamma} d\varepsilon_z^p, \quad (2.2.40)$$

где

$$\gamma = \sqrt{\frac{3(R_x + R_y)}{2(R_x + R_x R_y + R_y)}},$$

причем  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3$ .

Зависимости приращений пластических деформаций от напряжений в соответствии с ассоциированным законом течения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_x^p &= \frac{3}{2(H_0 + F_0 + G_0)} \frac{d\sigma_{\text{ЭКВ}}}{E_k^3 \sigma_{\text{ЭКВ}}} \times \\ &\times [H_0(\sigma_x - \sigma_y) + G_0(\sigma_x - \sigma_z)]; \\ d\varepsilon_y^p &= \frac{3}{2(H_0 + F_0 + G_0)} \frac{d\sigma_{\text{ЭКВ}}}{E_k^3 \sigma_{\text{ЭКВ}}} \times \\ &\times [F_0(\sigma_y - \sigma_z) + H_0(\sigma_y - \sigma_x)]; \\ d\varepsilon_z^p &= \frac{3}{2(H_0 + F_0 + G_0)} \frac{d\sigma_{\text{ЭКВ}}}{E_k^3 \sigma_{\text{ЭКВ}}} \times \\ &\times [G_0(\sigma_z - \sigma_x) + F_0(\sigma_z - \sigma_y)]; \\ d\gamma_{xy}^p &= \frac{3N_0}{H_0 + F_0 + G_0} \frac{d\sigma_{\text{ЭКВ}}}{E_k^3 \sigma_{\text{ЭКВ}}} \tau_{xy}; \\ d\gamma_{yz}^p &= \frac{3L_0}{H_0 + F_0 + G_0} \frac{d\sigma_{\text{ЭКВ}}}{E_k^3 \sigma_{\text{ЭКВ}}} \tau_{yz}; \\ d\gamma_{zx}^p &= \frac{3M_0}{H_0 + F_0 + G_0} \frac{d\sigma_{\text{ЭКВ}}}{E_k^3 \sigma_{\text{ЭКВ}}} \tau_{zx}, \end{aligned} \right\} (2.2.41)$$

где  $E_k^3(\sigma_{\text{ЭКВ}})$  - касательный модуль диаграммы деформирования (2.2.37). Эти уравнения являются основными при расчетах пластического деформирования ортотропных тел.

Если тело имеет форму тонкого листа, то для определения предела текучести по толщине (ось z) удобно использовать результаты измере-

ний деформаций при растяжении вдоль осей x и y:

$$\frac{1}{\sigma_{tz}^2} = \frac{1}{\sigma_{ty}^2} + \frac{1}{\sigma_{tx}^2} \left( 1 - 2 \left| \frac{d\varepsilon_y^p}{d\varepsilon_x^p} \right| \right). \quad (2.2.42)$$

### 2.2.6. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ УПЛОТНЯЕМЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Уплотняемые тела (пористые, порошковые, порошки) относят к структурно-неоднородным. В пористых и порошковых телах элементом структуры является пора, в порошковых - частица порошка. При применении методов механики сплошной среды к таким телам принимают, что рассматриваемое тело можно разбить на элементарные микрообъемы, характерные размеры которых, с одной стороны, много меньше характерных размеров тела, а с другой, - много больше характерных размеров структурных элементов. Тогда структурно-неоднородное тело приближенно можно рассматривать как сплошное, т.е. считать, что материальные объекты, из которых оно состоит, непрерывно распределены в занимаемом ими объеме.

В теории пластичности предполагается, что рассматриваемое уплотняемое тело можно считать сплошным. При разгрузке частица тела сохраняет все деформации, которые она имела в момент начала разгрузки.

Свойства уплотняемых материалов определяются некоторым набором параметров, важнейшим из которых является плотность  $\rho$ . Здесь и в дальнейшем под плотностью понимают относительную плотность - отношение размерной макроплотности к плотности твердой фазы, следовательно,  $\rho \leq 1$ . Относительная плотность выражается через пористость  $\theta$ , равную отношению объема пор в микроэлементе к объему этого элемента:  $\rho = 1 - \theta$ .

Упрочнение твердой фазы учитывается параметром упрочнения  $\chi$ , за который в уплотняемых телах принимают работу, совершенную над единицей массы. Соответствующее кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}. \quad (2.2.43)$$

Можно ввести другие параметры, отражающие влияние формы и положения пор на механические свойства материала.

Пластическое течение в некоторой точке тела возможно, если напряжение в этой точке удовлетворяет условию пластичности  $\Phi(\sigma_{ij}, \rho, \chi) = 1$ . Условие пластичности Грина имеет вид

$$\Phi = \frac{(\sigma_0 + c)^2}{a^2} + \frac{\sigma_e^2}{3b^2} = 1, \quad (2.2.44)$$

где  $\sigma_0 = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3$  - среднее нормальное напряжение;  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера:  $\delta_{ij} = 1$  при  $i=j$ ;  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ;  $\sigma_e = (1,5 S_{ij} s_{ij})^{1/2}$  - эквивалентное напряжение, или интенсивность напряжений;  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$  - компоненты девиатора напряжений.

Величины  $a$ ,  $b$ ,  $c$  являются параметрами материала. Если  $c=0$ , тогда величины  $a$ ,  $b$  выражаются через предел текучести при чистом сдвиге  $\tau_T$  и предел текучести при всестороннем равномерном сжатии  $p_T$ :  $a=p_T$ ;  $b=\tau_T$ .

Для металлических порошков зависимость этих величин от плотности можно представить в виде [52]

$$p_T = \frac{2}{\sqrt{3}} \tau_{T0} \rho^2 (1-\rho)^{-1/2}; \quad \tau_T = \tau_{T0} \rho^{3/2}. \quad (2.2.45)$$

Здесь  $\tau_{T0}$  - предел текучести при чистом сдвиге материала твердой фазы. Зависимость этой величины от параметра упрочнения и температуры определяется так же, как и для неуплотняемых материалов.

Соотношения (2.2.44), (2.2.45) не учитывают приобретенную анизотропию, вызванную изменением формы и ориентацией пор при деформации.

Обзор других зависимостей пределов текучести от плотности можно найти в [53].

Закон течения, ассоциированный с условием пластичности (2.2.2), выражается соотношением

$$\xi_{ij} = \lambda \left( \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{a^2} \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{b^2} \right), \quad (2.2.46)$$

где  $\lambda > 0$  при  $\Phi=1$ ;  $\dot{\Phi} = 0$  и  $\lambda = 0$  при  $\Phi < 1$ , а также при  $\Phi=1$  и  $\dot{\Phi} < 0$ , где  $\dot{\Phi} = d\Phi / dt$ ;  $\xi_{ij}$  - компоненты скоростей деформаций.

Условие  $\lambda=0$  при  $\Phi < 1$  указывает на отсутствие деформации в случае, когда напряжения не достигли уровня, определяемого условием пластичности. Деформация отсутствует также в момент начала разгрузки:  $\xi_{ij} = 0$  при  $\Phi=1$  и  $\Phi = 0$ , где точка наверху означает полную производную по времени:

$$\dot{\Phi} = \frac{2\sigma_0 \dot{\sigma}_0}{a^2} + \frac{2\sigma_e \dot{\sigma}_e}{3b^2}.$$

Кроме того,  $\lambda=0$  при нейтральном нагружении.

Величина  $\lambda$  равна половине удельной скорости диссипации энергии (пластической мощности):

$$\lambda = 0,5 \left( a^2 \xi_0^2 + 3b^2 \xi_e^2 \right)^{1/2},$$

где  $\xi_0 = \delta_{ij} \xi_{ij}$  - скорость объемной деформации;  $\xi_e = \sqrt{2\eta_{ij} \eta_{ij} / 3}$  - эквивалентная скорость деформации или интенсивность скоростей деформаций;  $\eta_{ij} = \xi_{ij} - \delta_{ij} \xi_0$  - компоненты девиатора скоростей деформаций;  $\delta_{ij} = 1$  при  $j = i$  и  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ .

В случае нейтрального нагружения

$$a^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} = \rho^2 \sigma_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}.$$

Этому равенству на поверхности текучести соответствует некоторая кривая, при нагружении вдоль которой материал ведет себя как идеально пластический. При этом  $\lambda > 0$ , т.е. при нейтральном нагружении вдоль этой кривой  $\xi_{ij} = 0$ .

Если условие текучести зависит только от плотности, предельная кривая представляет собой окружность, лежащую в девиаторной плоскости, т.е. является экватором поверхности текучести. При нагружении вдоль нее материал испытывает чистый сдвиг.

Из уравнения закона течения (2.2.2) вытекают соотношения для шаровой и девиаторной частей:

$$\xi_0 = \frac{2\lambda \sigma_0}{a^2}; \quad \eta_{ij} = \frac{\lambda s_{ij}}{b^2}; \quad \xi_e = \frac{2\lambda \sigma_e}{3b^2}.$$

Эти соотношения показывают, что чисто объемная деформация возможна только в точках пересечения эллипсоида текучести с гидростатической осью. Напротив, чисто сдвиговая деформация имеет место только на экваторе эллипсоида.

В других точках эллипсоида текучести мгновенные характеристики сдвиговой и объемной деформации связаны соотношением, которое называют дилатансационным:

$$\frac{\xi_0}{\xi_e} = \frac{3b^2 \sigma_0}{a^2 \sigma_e}.$$

Поэтому уравнение закона течения при нагружении можно записать в виде

$$\frac{\xi_{ij}}{\left( a^2 \xi_0^2 + 3b^2 \xi_e^2 \right)^{1/2}} = \frac{\sigma_0 \delta_{ij}}{3a^2} + \frac{s_{ij}}{2b^2}. \quad (2.2.47)$$

Условие текучести (2.2.44) является следствием этих уравнений.

Величина  $\lambda$  может быть выражена также через  $\chi$ ,  $\lambda = 0,5\rho\chi$ .

Пластическое течение может происходить только при нагружении. Геометрически это означает, что вектор приращений напряжений должен быть направлен за поверхность текучести. Для условия пластичности (2.2.44) условие нагружения может быть выражено неравенством

$$a^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} < \rho^2 \sigma_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}. \quad (2.2.48)$$

Это неравенство выражает также условие устойчивости материала, подчиняющегося эллиптическому условию текучести. Материал считают устойчивым, если при нагружении его сопротивление возрастает.

В процессе деформации пористые материалы могут как упрочняться, так и разупрочняться. Упрочнение всегда имеет место при уплотнении. Напротив, при разуплотнении с ростом пор может происходить разупрочнение. Если твердая фаза - неупрочняющаяся, то при разуплотнении всегда происходит разупрочнение. Если же материалы твердой фазы упрочняются вследствие деформации, то разупрочнение при разуплотнении может отсутствовать.

## Глава 2.3

### МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

#### 2.3.1. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ В ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Интегрирование системы дифференциальных уравнений теории пластичности связано со значительными математическими трудностями. Поэтому большое значение имеют вариационные принципы, открывающие путь построения эффективных прямых приближенных методов, минуя интегрирование дифференциальных уравнений.

Пусть тело, находящееся в равновесии, занимает объем, ограниченный поверхностью  $S$ , на одной части поверхности заданы поверхностные силы  $X_{vi}$ , а на другой части поверхности - перемещения  $u_i$ .

Согласно принципу возможных перемещений для деформируемого тела необходимым и достаточным условием равновесия является равенство работ внешних и внутренних сил на возможных перемещениях

$$\int_V X_i \delta u_i dV + \int_S X_{vi} \delta u_i dS = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV, \quad (2.3.1)$$

где  $\delta u_i$  и  $\delta \varepsilon_{ij}$  - возможные перемещения и деформации, связанные между собой зависимостями Коши;  $X_i$  - внешние массовые силы;  $\sigma_{ij}$  - напряжения.

Уравнение (2.3.1) является основой для разработки различных вариационных методов, в том числе метода конечных элементов, применительно к решению упруго-пластических задач по теории малых упруго-пластических деформаций. Если расчет ведется по теории течения, то в этом случае следует  $X_i, X_{vi}, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i$  заменить на их

приращения и расчет вести шагами по нагрузке, используя в пределах каждого шага методы последовательных приближений, изложенные ниже.

Второй интеграл в левой части (2.3.1) берется только по той части поверхности, на которой заданы поверхностные силы.

Компоненты тензора напряжений определяются формулой [31]

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (2.3.2)$$

где

$$\Pi = \frac{9}{2} K \varepsilon_0^2 + \int_0^{\varepsilon_e} \sigma_e d\varepsilon_e - \quad (2.3.3)$$

потенциал деформаций; здесь  $K$  - объемный модуль упругости;  $\varepsilon_0$  - средняя линейная деформация;  $\sigma_e$  и  $\varepsilon_e$  - эквивалентные соответственно напряжение и деформация.

Первое слагаемое в правой части (2.3.3) представляет собой удельную потенциальную энергию изменения объема, а второе - удельную работу изменения формы. Второе слагаемое можно интерпретировать площадью, ограниченной диаграммой деформирования материала. На рис. 2.3.1 эта площадь заштрихована вертикальными линиями.

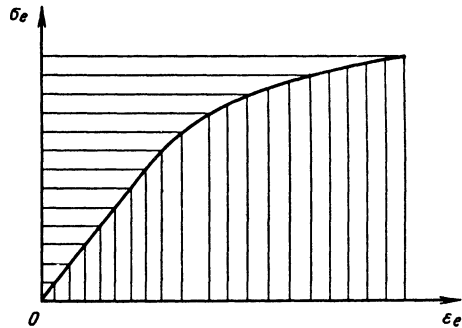


Рис. 2.3.1. Диаграмма деформирования материала

Если обозначить работу внешних сил на возможных перемещениях через  $\delta W$ , то уравнение (2.3.1) принимает вид

$$\delta \mathcal{E} = 0, \quad (2.3.4)$$

где  $\mathcal{E} = \tilde{\Pi} - W$  - полная энергия системы;  $\tilde{\Pi} = \int_V \Pi dV$  - потенциал деформации всего тела.

Для функционала  $\mathcal{E}$  [26]  $\delta^2 \mathcal{E} > 0$ , т.е. действительная форма равновесия тела отличается от всех возможных форм тем, что для нее полная энергия принимает минимальное значение. Эта формулировка определяет принцип минимума полной энергии.

Пусть действительные напряженные состояния в различных точках тела характеризуются компонентами  $\sigma_{ij}$ , а близкие напряженные состояния характеризуются компонентами  $\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}$ , удовлетворяющими дифференциальным уравнениям равновесия и граничным условиям на поверхности. Поскольку  $\sigma_{ij}$  и внешние силы  $X_i$  и  $X_{vi}$  также удовлетворяют указанным условиям, то вариации напряжений  $\delta\sigma_{ij}$  и вариации внешних сил  $\delta X_i$  и  $\delta X_{vi}$  образуют уравновешенную систему. Принимая за возможные перемещения действительные, имеем в соответствии с принципом возможных перемещений равенство

$$\int_V \delta X_i u_i dV + \int_S \delta X_{vi} u_i dS = \int_V \delta \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV. \quad (2.3.5)$$

Компоненты тензора деформаций определяются формулой [31]

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial R}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2.3.6)$$

где

$$R = \frac{\sigma_0^2}{2K} + \int_0^{\epsilon} \epsilon_e d\sigma_e - \quad (2.3.7)$$

дополнительная работа;  $\sigma_0$  - среднее нормальное напряжение.

Формула (2.3.6) аналогична широко используемой в теории упругости формуле Кастилиано.

Первое слагаемое в правой части (2.3.7) представляет собой удельную потенциальную энергию изменения объема, а второе - определяется площадью, заштрихованной горизонтальными линиями на рис. 2.3.1.

Интеграл

$$\tilde{R} = \int_V R dV \quad (2.3.8)$$

называют дополнительной работой для всего тела.

Уравнение (2.3.5) с учетом (2.3.6) и (2.3.8) преобразуется к виду

$$\int_V \delta X_i u_i dV + \int_S \delta X_{vi} u_i dS = \delta \tilde{R}. \quad (2.3.9)$$

Уравнение (2.3.9) является математической формулировкой принципа возможных изменений напряженного состояния тела, согласно которому сумма работ приращений всех внешних сил на перемещениях точек приложения этих сил равна приращению дополнительной работы всего тела.

В частном случае, когда  $X_i=0$ , на части поверхности заданы поверхностные силы и, следовательно,  $\delta X_{vi} = 0$ , а на другой части поверхности  $u_i = 0$ , из (2.3.9) следует:

$$\delta \tilde{R} = 0, \quad (2.3.10)$$

причем  $\delta^2 R > 0$ , поэтому из всех статически возможных напряженных состояний только для истинного напряженного состояния дополнительная работа для всего тела принимает минимальное значение. В этом состоит принцип минимума дополнительной работы.

Принцип минимума полной энергии (2.3.4) является основой для разработки метода перемещений, в котором варьируются перемещения, а принцип минимума дополнительной работы (2.3.10) является основой метода сил, в котором варьируются усилия. Решение задачи этими методами дает возможность установить верхнюю и нижнюю границы решения, т.е. получить дополнительную информацию о свойствах получаемых решений.

### 2.3.2. МЕТОДЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Существует несколько вариантов метода последовательных приближений решения упругопластических задач.

В основе метода переменных параметров упругости [31] лежит представление зависимостей деформаций от напряжений по теории малых упругопластических деформаций в форме обобщенного закона Гука, в котором параметры упругости зависят от напряженного состояния и поэтому различны для различных точек тела.

Зависимость вектора-столбца напряжений  $\{\sigma\}$  от вектора-столбца деформаций  $\{\epsilon\}$  имеет вид

$$\{\sigma\} = [D(\epsilon)](\{\epsilon\} - \{\epsilon_n\}) + \{\sigma_n\}, \quad (2.3.11)$$

где  $\{\sigma_n\}$  - вектор-столбец начальных напряжений (например, остаточных или монтажных);  $\{\epsilon_n\}$  - вектор-столбец начальных деформаций (например, обусловленных предварительным деформированием, воздействием температурных, электрических и других полей, усадкой, кристаллизацией и т.д.);  $[D(\epsilon)]$  - матрица податливости;

$$[D(\epsilon)] = \frac{E^*(1-\nu^*)}{(1+\nu^*)(1-2\nu^*)} \times$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\nu^*} & & & & & \\ & 1 & & & & \\ \frac{1-\nu^*}{\nu^*} & & \nu^* & & & \\ & & \frac{1-\nu^*}{1-\nu^*} & & & \\ & & & & & \\ \times & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu^*}{2(1-\nu^*)} & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu^*}{2(1-\nu^*)} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu^*}{2(1-\nu^*)} \end{bmatrix} \text{SYM}$$

где  $E^*$  и  $\nu^*$  - так называемые переменные параметры упругости [31];

$$E^* = (\sigma_e / \epsilon_e) / [1 + (1 - 2\nu)\sigma_e / (3E\epsilon_e)];$$

$$\nu^* = \frac{1/2 - (1 - 2\nu)\sigma_e / (3E\epsilon_e)}{1 + (1 - 2\nu)\sigma_e / (3E\epsilon_e)}, \quad (2.3.12)$$

а  $E$  и  $\nu$  - соответственно модуль упругости и коэффициент поперечной деформации.

Для несжимаемого материала, у которого  $\nu = 0,5$ , имеем  $E^* = \sigma_e / \epsilon_e$  и  $\nu^* = 0,5$ , т.е. переменный модуль упругости совпадает с секущим модулем диаграммы деформирования, а переменный коэффициент поперечной деформации равен половине.

С целью решения упругопластической задачи по методу переменных параметров упругости используют процесс последовательных приближений, заключающийся в следующем.

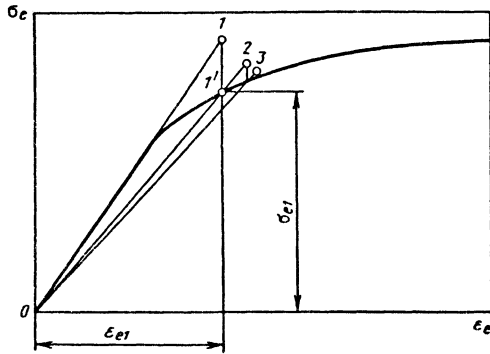


Рис. 2.3.2. Схема расчета по методу переменных параметров упругости

Считают, что до приложения нагрузок известна матрица  $[D(\epsilon)]$ , совпадающая с матрицей упругости, т.е. принимают  $E^* = E$  и  $\nu^* = \nu$ . Тогда начальное приближение итерационного процесса получают путем решения упругой задачи. Этому решению в каждой точке деформируемого тела соответствует точка 1 (рис. 2.3.2), не принадлежащая диаграмме деформирования материала и расположенная на продолжении начального линейного участка. Для получения следующего приближения коэффициенты  $E^*$  и  $\nu^*$  корректируют по формулам (2.3.12), в которых эквивалентную деформацию считают равной  $\epsilon_{e1}$  (абсцисса точки 1 на рис. 2.3.2), а эквивалентное напряжение - равным  $\sigma_{e1}$  в точке диаграм-

мы деформирования, соответствующей полученной величине  $\epsilon_{e1}$  (ордината точки 1' на рис. 2.3.2). Последующие приближения (точки 2 и 3 на рис. 2.3.2) определяют аналогично. Расчеты продолжают до тех пор, пока результаты вычислений в некотором приближении не будут близки к соответствующим результатам в предыдущем. Обычно это имеет место уже для второго приближения, т.е. процесс сходится достаточно быстро. При этом точка, соответствующая расчетным величинам  $\sigma_e$  и  $\epsilon_e$ , приближается к диаграмме деформирования.

Недостатком метода переменных параметров упругости является необходимость изменять матрицу  $[D(\epsilon)]$  в тех точках, для которых эквивалентное напряжение больше предела текучести материала при каждом приближении, что увеличивает объем вычислений. К методам, свободным от указанного недостатка, относят методы начальных напряжений (упругих решений [24]) и начальных деформаций [4].

Согласно методу начальных напряжений на каждой итерации определяют разность между напряжениями в упруго-пластическом теле и напряжениями, найденными из упругого решения при соответствующих деформациях. Эту разность учитывают в (2.3.11) в виде слагаемого  $\{\sigma_n\}$ , что позволяет постепенно в процессе последовательных приближений привести упругие решения в соответствие с искомым упругопластическим решением.

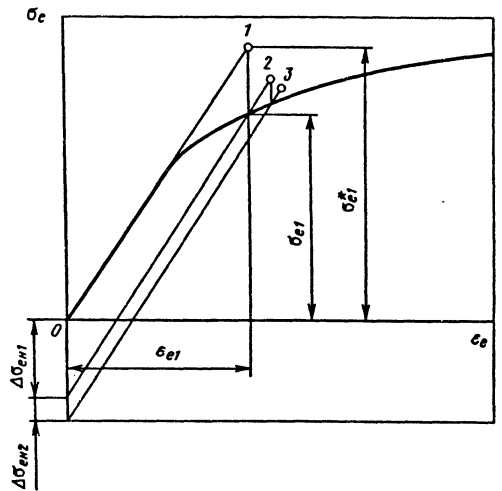


Рис. 2.3.3. Схема расчета по методу начальных напряжений

Итерационный процесс строят следующим образом. В начальном приближении принимают  $\{\sigma_n\} = 0$ . Тогда, считая, что  $E^* = E$  и  $\nu^* = \nu$ ,



дим к методу начальных напряжений. Очевидно, что для диаграмм деформирования, близких к линейным, различие двух методов невелико. Однако в случае существенной физической нелинейности выбирать метод следует в зависимости от вида кривой  $\sigma_e = \sigma_e(\epsilon_e)$ . Метод начальных деформаций в изложенной постановке наиболее эффективен при исследовании материалов типа резины (штриховая линия на рис. 2.3.5). Для металлов, однако, характерна зависимость, представленная сплошной линией. В этом случае эффективнее использовать метод начальных напряжений. К тому же изложенный метод начальных деформаций совершенно не применим при рассмотрении металлов, диаграмма деформирования которых имеет горизонтальный участок, так как в этом случае начальные деформации нельзя определить однозначно.

По отмеченным причинам целесообразно использовать метод начальных деформаций в другой постановке. Согласно этому методу приращение эквивалентной начальной деформации на первом расчете считают равной не  $\Delta\epsilon_{en1}$ , а равной  $\Delta\epsilon_{en1}$  (см. рис. 2.3.4). Решения, полученные аналогично изложенному выше методу начальных деформаций, изображены на рис. 2.3.4 цифрами со штрихами.

### 2.3.3. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Метод конечных элементов (МКЭ) основан на представлении деформируемого тела в виде системы конечных элементов. Например, в общем случае трехмерной задачи таким элементом может быть тетраэдр. Перемещение любой точки внутри конечного элемента определяется тремя компонентами  $u_x, u_y, u_z$  в направлениях осей координат соответственно  $x, y$  и  $z$ . Так, для перемещения в направлении оси  $x$  имеем

$$u_x = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z, \quad (2.3.15)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  - постоянные коэффициенты, определяемые четырьмя условиями в узлах;

$$u_{xi} = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i, \quad (2.3.16)$$

где  $u_{xi}$  - перемещения в направлении оси  $x$  узловых точек;  $x_i, y_i$  и  $z_i$  - соответствующие узловые координаты.

С помощью коэффициентов  $\alpha_1 \dots \alpha_4$  можно получить зависимость  $u_x$  от координат точки внутри каждого конечного элемента [19]. Аналогично получают и зависимости перемещений  $u_y$  и  $u_z$  от этих координат. Деформации определяют с помощью соотношений Коши:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.3.17)$$

Следовательно, вектор деформаций

$$\{\epsilon\} = [B]\{\tilde{q}\}, \quad (2.3.18)$$

где  $[B]$  - матрица, определяемая аппроксимацией перемещений по объему выбранного конечного элемента [19];  $\{\tilde{q}\}$  - вектор-столбец узловых перемещений, имеющий вид

$$\{\tilde{q}\} = \left\{ u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, u_{x2}, u_{y2}, u_{z2}, u_{x3}, u_{y3}, u_{z3}, \right. \\ \left. u_{x4}, u_{y4}, u_{z4} \right\}^T,$$

где  $t$  - значок транспонирования.

Если принять, что соотношения (2.3.18) выполняются на всем пути деформирования тела, т.е. задача является геометрически линейной, то соотношения (2.3.11) и (2.3.18) позволяют установить матрицу жесткости конечного элемента. С этой целью принцип возможных перемещений (2.3.1) применяют к конечному элементу, находящемуся в равновесии, т.е.

$$\int_{V_e} \delta\{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \delta\{\tilde{q}\}^T \{\tilde{R}\}, \quad (2.3.19)$$

где  $\delta\{\epsilon\}$  - вектор-столбец возможных деформаций;  $\delta\{\tilde{q}\}$  - вектор-столбец возможных узловых перемещений;  $\{\tilde{R}\}$  - вектор-столбец узловых усилий конечного элемента, откуда следует:

$$[k(\epsilon)]\{\tilde{q}\} = \{\tilde{R}\} + \{\tilde{R}\}_{\epsilon_n} + \{\tilde{R}\}_{\sigma_n}, \quad (2.3.20)$$

где

$$[k(\epsilon)] = \int_{V_e} [B]^T [D(\epsilon)] [B] dV - \quad (2.3.21)$$

матрица жесткости конечного элемента;

$$\{\tilde{R}\}_{\epsilon_n} = \int_{V_e} [B]^T [D(\epsilon)] \{\epsilon_n\} dV - \quad (2.3.22)$$

узловые усилия, обусловленные начальными деформациями;

$$\{\tilde{R}\}_{\sigma_n} = - \int_{V_e} B^T \{\sigma_n\} dV - \quad (2.3.23)$$

узловые усилия, обусловленные начальными напряжениями.

В результате применения принципа возможных перемещений (2.3.1) к системе конечных элементов получается уравнение, аналогичное (2.3.20), но для всего тела

$$[K(q)]\{q\} = \{R\} + \{R\}_{\epsilon_n} + \{R\}_{\sigma_n}, \quad (2.3.24)$$

где  $\{q\}$  - вектор-столбец узловых перемещений сетки конечных элементов;  $\{R\}, \{R\}_{\epsilon_n}, \{R\}_{\sigma_n}$  - векторы-столбцы соответственно внешних узловых усилий сетки конечных элементов, усилий, обусловленных начальными деформациями, и



усилий, обусловленных начальными напряжениями;  $K(q)$  - матрица жесткости всего тела, зависящая от деформаций конечных элементов (что следует из (2.3.21) для отдельных конечных элементов) и потому от узловых перемещений сетки конечных элементов.

После решения (2.3.24) по найденным узловым перемещениям  $\{q\}$  формируются векторы  $\{\tilde{q}\}$  для каждого конечного элемента. Соотношения (2.3.18) и (2.3.11) дают возможность определить деформации и напряжения во множестве конечных элементов.

Решение матричного уравнения (2.3.24) сводится, по существу, к решению системы нелинейных алгебраических уравнений со многими неизвестными. Для этого используют рассмотренные в п. 2.3.2 итерационные методы решения задач теории пластичности в виде последовательности линейных упругих решений.

Рассмотрим особенности этих методов в сочетании с МКЭ. Принимают, что до приложения нагрузок  $\{R\}$  известны компоненты вектора  $\{q\} = \{q_0\}$ , в общем случае не равные нулю.

Тогда  $[K(q_0)]$  - матрица жесткости, определенная в начале процесса нагружения. Если в исходный момент нагружения начальные деформации и напряжения отсутствуют, то начальное приближение итерационного процесса  $\{q_1\}$  можно получить решением системы линеаризованных уравнений (2.3.24):

$$\{q_1\} = [K(q_0)]^{-1} \{R\}.$$

Полученному решению соответствует точка 1 (см. рис. 2.3.2), расположенная на продолжении начального линейного участка диаграммы деформирования.

В соответствии с методом переменных параметров упругости для получения следующего приближения принимают, что решение задачи теории пластичности сводится к решению соответствующей задачи теории упругости с такими значениями матрицы  $[K(q)]$ , которые соответствуют достигнутому в предыдущем решении уровню узловых перемещений сетки конечных элементов. Поэтому второе приближение, соответствующее точке 2 (см. рис. 2.3.2), получают следующим образом:

$$\{q_2\} = [K(q_1)]^{-1} \{R\}.$$

Последующие приближения (точка 3 на рис. 2.3.2 и т.д.) определяют до тех пор, пока узловые перемещения практически не перестанут изменяться.

Недостатком метода переменных параметров упругости (см. п. 2.3.2) является необходимость изменять матрицу  $[D(\epsilon)]$  после каждого

линейного решения. Это ведет к изменению матрицы жесткости всего тела на каждой итерации и, следовательно, к увеличению затрат машинного времени. В методах начальных напряжений и деформаций этот недостаток отсутствует.

Согласно методу начальных напряжений для каждого линейного решения определяют начальные напряжения, необходимые для приведения упругого решения в соответствие с искомым, т.е. деформации в упругопластическом теле будут одинаковыми с деформациями в упругом теле, если на последнее действуют дополнительные нагрузки, определяемые по (2.3.2). Итерационный процесс заключается в следующем. В начальном приближении все дополнительные нагрузки считают равными нулю. Решая (2.3.24), определяют узловые перемещения  $\{q_1\}$  начального приближения, а по ним - напряжения и деформации (точка 1 на рис. 2.3.3). Затем по (2.3.13) в каждом конечном элементе вычисляют начальные напряжения. Для полученных напряжений  $\{\sigma_n\}$  вычисляют с помощью (2.3.23) соответствующие им дополнительные узловые усилия.

В следующем приближении считают, что к каждому конечному элементу наряду с заданными (внешними) приложены дополнительные усилия  $\{\tilde{R}\}_{\sigma_n}$ . Полагая матрицу жесткости всего тела неизменной, решают вновь упругую задачу. На рис. 2.3.3 точка 2 соответствует второму упругому решению. Эту процедуру вычислений повторяют до получения достаточно точного решения.

Согласно принципу суперпозиции полное решение линейно-упругой задачи можно найти, просуммировав решения отдельно от внешних и от дополнительных нагрузок. Поэтому целесообразно определять напряженно-деформированное состояние конечных элементов лишь от действия дополнительных нагрузок. При этом полные узловые перемещения, деформации и напряжения находят суммированием полученных величин с узловыми перемещениями, деформациями и напряжениями предыдущего решения. Например, на втором шаге вычисляют поправки к решению  $\{q_1\}$  по формуле

$$\{\Delta q_1\} = [K(q_0)]^{-1} \{\tilde{R}\}_{\sigma_n}.$$

Указанный итерационный процесс продолжают до тех пор, пока поправка  $\{\Delta q_n\}$  не станет достаточно малой величиной.

Согласно методу начальных деформаций напряжения в упругопластическом теле будут одинаковыми с напряжениями в упругом теле, если на последнее действуют дополнительные



ния задач в геометрически нелинейной постановке суммирование напряжений выполняют с учетом поворотов конечных элементов. Для уточнения решения в конце каждого шага нагружения координаты узлов сетки конечных элементов корректируют с учетом полученных приращений узловых перемещений, и расчет продолжают далее для нового положения конечных элементов. При этом необходимо следить за тем, чтобы полные напряжения удовлетворяли уравнениям равновесия в каждый момент нагружения во всех конечных элементах.

Изложенное является основой для создания программы вычислений, пригодной для решения широкого класса задач. К преимуществам рассмотренного алгоритма относят единообразие вычислений матриц жесткости всех элементов как упругих, так и упругопластических. Это позволяет после незначительных изменений применить программы вычислений, составленные для упругих задач, к решению задач теории пластичности.

#### 2.3.4. МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Определяющие уравнения теории малых упругопластических деформаций [28] могут быть представлены в виде

$\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} = 2G_c(\varepsilon_e)(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij})$ ,  $\sigma_0 = 3K\varepsilon_0$ , где секущий модуль  $G_c$  выражен через функцию  $\omega(\varepsilon_e)$ , характеризующую отклонение диаграммы деформирования материала от линейно-упругой:

$$G_c(\varepsilon_e) = G[1 - \omega(\varepsilon_e)]. \quad (2.3.28)$$

В этом случае в силу соотношений Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.3.29)$$

компоненты напряжений  $\sigma_{ij}$  выражают через компоненты перемещений  $u_i$  следующим образом:

$$\sigma_{ij} = G(1 - \omega)(u_{i,j} + u_{j,i}) + \delta_{ij}\left(\lambda + \frac{2}{3}G\omega\right)u_{i,i}, \quad (2.3.30)$$

где  $\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$  - постоянная Ляме. Здесь использована сокращенная запись в соответствии с соглашением о суммировании по повторяющимся индексам и обозначением производной по переменной  $x_i$  ( $i=1,2,3$ ) индексом  $i$  после запятой.

С учетом (2.3.30) уравнения равновесия и статические граничные условия на части поверхности  $S_p$

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0; \quad \sigma_{ij}n_j = P_i$$

приводятся к виду

$$Gu_{i,jj} + (\lambda + G)u_{i,ij} + (F_i - F_i^*) = 0; \quad (2.3.31)$$

$$\sigma_{ij}n_j = P_i + P_i^*, \quad (2.3.32)$$

где

$$F_i^* = G \left[ \omega u_{i,jj} + \frac{1}{3} \omega u_{j,ji} + \omega_{,j}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{2}{3} \omega_{,i} u_{j,j} \right]; \quad (2.3.33)$$

$$P_i^* = G\omega \left[ u_{i,j} + u_{j,i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} u_{j,j} \right] n_j. \quad (2.3.34)$$

При известных значениях  $F_i^*$  и  $P_i^*$  уравнение (2.3.31) представляет собой неоднородное уравнение Навье-Ляме теории упругости, которому соответствует следующее интегральное уравнение (тождество Кельвина-Соммильяны [38]):

$$u_i(a) = \int_S U_{ij}(a, B) [p_j(B) + p_j^*(B)] dS(B) - \int_S P_{ij}(a, B) u_j(B) dS(B) + \int_V U_{ij}(a, b) [F_i(b) - F_i^*(b)] dV(b), \quad (2.3.35)$$

где  $S$  - поверхность, ограничивающая тело;  $a, b$  - точки внутри объема  $V$  тела;  $B$  - точка границы тела;  $n_j$  - компоненты нормали к границе  $S$ ;  $p_j(B)$  - компоненты поверхностной нагрузки;  $u_j(B)$  - компоненты перемещений на границе  $S$ . Ядра интегрального уравнения (2.3.35) имеют вид

$$U_{ij}(a, b) = c_1 \left( c_2 \delta_{ij} \ln r - y_i y_j / r^2 \right); \quad (2.3.36)$$

$$P_{ij}(a, b) = c_3 \left[ (c_4 \delta_{ij} + 2y_i y_j) y_j n_j - c_4 (y_i n_j - y_j n_i) \right] / r^2, \quad (2.3.37)$$

где

$$c_1 = -\frac{1}{8\pi G(1 - \nu)}; \quad c_2 = 3 - 4\nu; \quad c_3 = -\frac{1}{4\pi(1 - \nu)};$$

$$c_4 = 1 - 2\nu; \quad y_i(a, b) = X_i(b) - X_i(a); \quad r \equiv r(a, b) -$$

расстояние между двумя точками тела  $a$  и  $b$ :

$$r^2(a, b) = y_i y_i = [x_1(b) - x_1(a)]^2 + [x_2(b) - x_2(a)]^2 + [x_3(b) - x_3(a)]^2. \quad (2.3.38)$$

Интегральное уравнение (2.3.35) позволяет определить перемещение в произвольной внутренней точке  $a$  области  $V$ , если известны дополнительные нагрузки  $F_i^*$  и  $p_i^*$ , а также если известны на всей граничной поверхности  $S$  компоненты поверхностной нагрузки  $p_i$  и перемещений  $u_i$ . Для корректно поставленной краевой задачи на определенной части границы  $S$  заранее задается только одна из функций  $p_i$  или  $u_i$ :

$$p_i(B) = \sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i; B \in S_p; u_i(B) = \bar{u}_i; B \in S_u. \quad (2.3.39)$$

Для нахождения недостающих функций на границе в интегральном уравнении (2.3.35) осуществляется предельный переход: внутренняя точка  $a$  области  $V$  устремляется к точке  $A$  границы  $S$ . Результатом будет граничное интегральное уравнение, выражающее перемещение каждой точки границы:

$$c_{ij}(A)u_j(A) = \int_S U_{ij}(A, B) [p_j(B) + p_j^*(B)] dS(B) - \int_S P_{ij}(A, B) u_j(B) dS(B) + \int_V U_{ij}(A, b) [F_i(b) - F_i^*(b)] dV(b). \quad (2.3.40)$$

Постоянные  $c_{ij}(A)$  зависят от гладкости границы  $S$  в точке  $A$ . Для гладкого участка границы  $c_{ij}(A) = \frac{1}{2} \delta_{ij}$ .

Решение граничного интегрального уравнения (2.3.40) при известных дополнительных нагрузках позволяет получить недостающую информацию о граничных значениях  $p_i$  или  $u_i$ , по которым искомое решение в любой внутренней точке определяют из уравнения (2.3.35).

Для нахождения дополнительных нагрузок  $p_i^*$  и  $F_i^*$  используют итерационную процедуру уточнения значения функции  $\omega(\epsilon_e)$  и ее производных, входящих в (2.3.33), (2.3.34) (метод упругих решений Ильюшина [24]). В нулевом приближении  $\omega = 0$ ,  $p_i^* = 0$ ,  $F_i^* = 0$  и на основе уравнений (2.3.40), (2.3.35) решают линейную задачу. По найденным перемещениям вычисляют деформации  $\epsilon_{ij}$  по (2.3.3) и их интенсивность  $\epsilon_e$ , а затем по диаграмме деформирования в соответствии с (2.3.28) определяют в каждой

точке тела  $\omega$  и по соотношениям (2.3.33), (2.3.34) - нагрузки  $p_i^*$ ,  $F_i^*$  для следующего приближения. Затем повторяют решение линейной задачи (2.3.35), (2.3.39), (2.3.40) с новыми массовыми и поверхностными нагрузками и осуществляется переход к следующему приближению. Последовательность приближений продолжают до тех пор, пока разница между двумя последними приближениями не окажется в пределах заданной точности.

Интегральные уравнения (2.3.35), (2.3.40) решают численно. Для этого границу  $S$  аппроксимируют при помощи  $N$  прямолинейных отрезков - для двумерных задач и при помощи треугольников или четырехугольников - для трехмерных задач. Внутреннюю область  $V$  разбивают на соответствующее число  $M$  треугольных или четырехугольных ячеек - для двумерных задач (рис. 2.3.7) и тетраэдров или параллелепипедов - для трехмерных задач:

$$S = \bigcup_{n=1}^N S_n; V = \bigcup_{m=1}^M V_m. \quad (2.3.41)$$

Хотя такая дискретизация похожа на применяемую в методе конечных элементов, здесь ячейки используют лишь для вычисления различных объемных интегралов посредством конечных сумм.

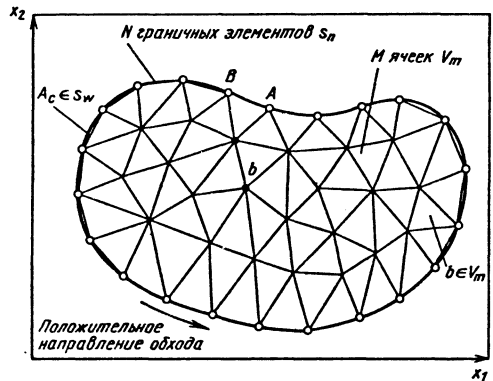


Рис. 2.3.6. Расчетная область метода граничных элементов

Входящие под интегралы в (2.3.35), (2.3.40) функции  $u_i(B)$  и  $p_i(B)$  в простейшем случае принимаются кусочно-постоянными и задаются на элементах границы  $S_n$  при помощи констант

$$u_i(B_n) = u_i^n; p_i(B_n) = p_i^n. \quad (2.3.42)$$

В соответствии с (2.3.41), (2.3.42) уравнение (2.3.35) приближенно можно записать в виде

$$\begin{aligned}
u_i(a) \approx & \sum_{n=1}^N \left[ p_j^n \int_{S_n} U_{ij}(a, B_n) dS_n \right] - \\
& - \sum_{n=1}^N \left[ u_j^n \int_{S_n} p_{ij}(a, B_n) dS_n \right] + \\
& + \sum_{m=1}^M \int_{V_m} U_{ij}(a, b_m) [F_j(b_m) - F_j^*(b_m)] dV_m + \\
& + \sum_{n=1}^N \int_{S_n} U_{ij}(a, B_n) p_j^*(B_n) dS_n. \quad (2.3.43)
\end{aligned}$$

Соответственно дискретный аналог граничного интегрального уравнения (2.3.40) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
c_{ij}(A) u_j(A) \approx & \sum_{n=1}^N \left[ p_j^n \int_{S_n} U_{ij}(A, B_n) dS_n \right] - \\
& - \sum_{n=1}^N \left[ u_j^n \int_{S_n} P_{ij}(A, B_n) dS_n \right] + \\
& + \sum_{m=1}^M \int_{V_m} U_{ij}(A, b_m) [F_j(b_m) - F_j^*(b_m)] dV_m + \\
& + \sum_{n=1}^N \int_{S_n} U_{ij}(A, B_n) p_j^*(B_n) dS_n. \quad (2.3.44)
\end{aligned}$$

Поместив точку  $A$  в центр граничного элемента  $A_c$ , уравнение (2.3.44) удобно записать в векторно-матричной форме. Например, для двумерного случая оно примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^c \\ u_2^c \end{Bmatrix} = & \sum_{n=1}^N \left\langle \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}^{cn} \begin{Bmatrix} p_1^n \\ p_2^n \end{Bmatrix} \right\rangle - \\
- \sum_{n=1}^N \left\langle \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}^{cn} \begin{Bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{Bmatrix} \right\rangle + & \begin{Bmatrix} t_1^c \\ t_2^c \end{Bmatrix}; \quad c, n = 1, 2, \dots, N, \quad (2.3.45)
\end{aligned}$$

где

$$U_{ij}^{cn} = \int_{S_n} U_{ij}(A_c, B_c) dS_n; \quad P_{ij}^{cn} = \int_{S_n} P_{ij}(A_c, B_n) dS_n; \quad (2.3.46)$$

$$\begin{aligned}
t_i^c = & \sum_{m=1}^M \int_{V_m} U_{ij}(A_c, b_m) [F_j(b_m) - F_j^*(b_m)] dV_m + \\
& + \sum_{n=1}^N \int_{S_n} U_{ij}(A_c, B_n) p_j^*(B_n) dS_n; \\
& i, j = 1, 2.
\end{aligned}$$

Соотношение (2.3.45) представляет собой систему  $2N$  линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $u_1^n, u_2^n, p_1^n, p_2^n$ . В граничных условиях задачи для двумерного случая задаются две функции из четырех, следовательно, общее число неизвестных тоже  $2N$ .

В общем случае, граничное интегральное уравнение (2.3.40), замененное дискретным аналогом (2.3.44), сводится к системе  $3N$  линейных алгебраических уравнений с  $3N$  неизвестными, которая имеет следующую матричную форму записи:

$$\frac{1}{2} [E] \{u\} = [U] \{p\} - [P] \{u\} + \{t\}, \quad (2.3.47)$$

где  $[E]$  -  $3N \times 3N$  - единичная матрица;  $[U]$  и  $[P]$  -  $3N \times 3N$  - матрицы коэффициентов;  $\{u\}$  -  $3N \times 1$  - вектор-столбец граничных перемещений;  $\{p\}$  -  $3N \times 1$  - вектор-столбец граничных усилий;  $\{t\}$  -  $3N \times 1$  - вектор-столбец свободных членов.

Используя граничные условия (2.3.39), уравнение (2.3.47) переписывают в более общем виде

$$[A] \{x\} = \{b\}, \quad (2.3.48)$$

где  $[A]$  -  $3N \times 3N$  - матрица, образованная перестановкой столбцов из матриц  $[U]$  и  $[P]$  в соответствии с заданными граничными условиями;  $\{x\}$  -  $3N \times 1$  - вектор искоемых неизвестных поверхностных усилий и перемещений;  $\{b\}$  -  $3N \times 1$  - вектор свободных членов, который представляет собой сумму вектора  $\{t\}$  и произведений известных граничных функций на соответствующие столбцы матриц  $[P]$  и  $[U]$ . Например, если на всей границе  $S$  заданы только смещения (задача 1 [38]), то

$$\begin{aligned}
[A] = & -[U]; \quad \{x\} = \{p\} - \text{неизвестные усилия}; \\
\{b\} = & \{t\} - \langle 1/2 [E] - [P] \rangle \{u\};
\end{aligned}$$

если же задаются напряжения на всей границе (задача 2 [38]), то

$$[A] = \frac{1}{2} [E] + [P];$$

$$\begin{cases} \{x\} = \{u\} - \text{неизвестные перемещения;} \\ \{b\} = [U]\{p\}, \end{cases}$$

для смешанной задачи, когда на определенной части границы известны перемещения, на остальной - напряжения, имеет место общая форма (2.3.48). Матрица  $[A]$  во всех случаях получается полнозаполненной и несимметричной и, как правило, хорошо обусловленной.

Наряду с рассмотренным выше вариантом метода упругих решений могут быть использованы и другие, например, метод дополнительных деформаций и т.п. [1, 4]. Также возможно и более сложное по сравнению с кусочно-постоянным представлением функций  $u_i$  и  $p_i$  в пределах граничных элементов [1, 4, 29].

При решении упруго-пластической задачи на основе определяющих уравнений теории течения разрешающие интегральные уравнения формулируются аналогично рассмотренным выше, но для приращений перемещений, приращений напряжений и приращений внешних нагрузок. Решение при этом осуществляется шагами по параметру, характеризующему изменение нагрузки или конкретного перемещения [1, 4].

Кроме изложенного выше прямого метода граничных элементов, весьма эффективными являются также не прямые методы [1, 4, 29].

## Глава 2.4

### ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ

#### 2.4.1. ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Ряд особенностей поведения реальных упруго-пластических тел и элементов конструкций могут быть эффективно исследованы на основе модели идеально пластической среды. Эту среду можно рассматривать как обладающую предельными свойствами упрочняющегося материала при стремлении параметров, характеризующих прочность, к нулю. Для такой среды поверхность пластичности фиксирована

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_T. \quad (2.4.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $d\lambda$  в ассоциированном законе течения (2.2.2) становится неопределенным, а сам закон задает только направление процесса приращения пластической деформации и его целесообразно записать для скоростей деформаций  $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \xi_{ij}$ :

$$\xi_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (2.4.2)$$

Пластическое деформирование возможно только при условии нейтрального нагружения

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0. \quad (2.4.3)$$

Неопределенность в коэффициенте  $\dot{\lambda}$  раскрывается при решении конкретной краевой задачи для элемента тела путем учета стесняющего действия соседних элементов, а для однородного напряженного состояния - независимым от напряжений заданием кинематики.

Поскольку напряжения в теле ограничены по величине условием пластичности (2.4.1), при возрастании внешних нагрузок может возникнуть исчерпание способности тела сохранять равновесие. Такое состояние, при котором исчерпывается несущая способность тела, называют *предельным*. Соответствующие нагрузки являются предельными для данного тела или элемента конструкции.

Если ставится задача определения только предельного состояния, можно пренебречь упругими деформациями по сравнению с пластическими и принять схему жестко-идеально-пластического тела. Жесткому состоянию материала, при котором деформации невозможны, отвечает условие  $f(\sigma_{ij}) < \sigma_T$ . В рамках этой модели возможны разрывы как напряжений, так и скоростей деформаций и перемещений [21, 28].

#### 2.4.2. СТАТИЧЕСКАЯ И КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМЫ

При анализе предельного равновесия жестко-идеально-пластического тела в качестве внутренних параметров состояния принимают напряжения  $\sigma_{ij}$ , скорости деформаций  $\xi_{ij}$  и перемещений  $v_i$ , а в качестве внешних - силы поверхностные  $P_i$ , объемные  $F_i$  и скорости перемещения точек границы тела  $V_i$ . Отдельно для статических и кинематических внутренних параметров могут быть сформулированы экстремальные теоремы, которые позволяют развить эффективные методы приближенного решения задач.

Для статически возможного поля напряжений  $\sigma_{ij}^c$ , которое удовлетворяет в объеме тела  $\Omega$  уравнениям равновесия и граничным условиям на поверхности  $S_p$  и при этом не нарушает условие пластичности  $f(\sigma_{ij}^c) \leq \sigma_T$ , имеет место следующее неравенство [16, 21, 28]:

$$\int_{S_p} P_i v_i dS + \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega \geq \int_{S_p} P_i^c v_i dS + \int_{\Omega} F_i^c v_i d\Omega, \quad (2.4.4)$$

где  $P_i^c, F_i^c$  - внешние силы, отвечающие  $\sigma_{ij}^c$ . Неравенство (2.4.4) выражает собой статическую теорему о нижней границе несущей способности тела: мощность внешних сил, соответствующих статически возможному полю напряжений, максимальна для действительного значения сил.

Для кинематически возможного поля скоростей перемещений  $v_i^k$  и связанного с ним поля скоростей деформаций  $\xi_{ij}^k$ , удовлетворяющего условию несжимаемости  $\xi_{ij} = 0$  и кинематическим граничным условиям на поверхности тела, можно подобрать такое значение внешних сил  $P_i^k$  и  $F_i^k$ , при которых выполняется равенство мощности внешних сил на кинематически возможных скоростях перемещений мощности рассеяния внутренней энергии тела:

$$\int_{S_p} P_i^k v_i^k dS + \int_{\Omega} F_i^k v_i^k d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^k \xi_{ij}^k d\Omega + \sum_r \int_{S_r} \sigma_{ij}^k n_j \left[ v_i^k \right] dS, \quad (2.4.5)$$

где  $\sigma_{ij}^k$  - поле напряжений, связанное с  $\xi_{ij}^k$  ассоциированным законом течения;  $S_r$  - поверхность разрыва скорости перемещения;  $\left[ v_i^k \right]$  - величина разрыва;  $n_j$  - компоненты единичной нормали к поверхности разрыва.

При этом имеет место следующее неравенство [16, 28]:

$$\int_{S_p} P_i^k v_i^k dS + \int_{\Omega} F_i^k v_i^k d\Omega \geq \int_{S_p} P_i v_i^k dS + \int_{\Omega} F_i v_i^k d\Omega \quad (2.4.6)$$

Неравенство (2.4.6) выражает собой кинематическую теорему о верхней границе несущей способности тела: мощность внешних сил, соответствующих кинематически возможному полю скоростей перемещений, минимальна для действительного значения сил.

В рамках жестко-идеально-пластической модели способ нагружения тела до предельного состояния несущественен, поэтому можно считать, что внешние силы растут пропорционально общему параметру

$$P_i = m P_i^0; \quad F_i = m F_i^0, \quad (2.4.7)$$

где  $P_i^0, F_i^0$  - некоторые фиксированные безопасные нагрузки;  $m$  - параметр нагружения. Неравенства (2.4.4), (2.4.6) дают двустороннюю оценку этого параметра

$$m^k \geq m \geq m^c. \quad (2.4.8)$$

Если на тело действует единственная нагрузка, то из (2.4.7) и (2.4.8) следует оценка предельного значения этой нагрузки

$$P^k \geq P \geq P^c. \quad (2.4.9)$$

Статический параметр предельной нагрузки определяют из граничных условий на поверхности тела

$$\sigma_{ij}^c \cdot v_j \Big|_{S_p} = m^c P_i^0. \quad (2.4.10)$$

Кинематический параметр определяют из (2.4.5):

$$m^k = \frac{\int_{\Omega} \sigma_{ij}^k \xi_{ij}^k d\Omega + \sum_r \int_{S_r} \sigma_{ij}^k n_j \left[ v_i^k \right] dS}{\int_{S_p} P_i^0 v_i^k dS + \int_{\Omega} F_i^0 v_i^k d\Omega}. \quad (2.4.11)$$

При анализе предельного равновесия элементов конструкций в качестве внутренних параметров состояния принимают обобщенные внутренние силовые факторы и скорости обобщенных перемещений. Условие пластичности и ассоциированный закон течения также формулируют в обобщенных факторах. Примеры использования статической и кинематической теорем приведены в работах [10, 26, 43].

### 2.4.3. ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТЬ

При повторных нагружениях упругоидеально-пластического тела нагрузками, меньшими предельных, возможно возникновение иных предельных состояний, вызванных появлением знакопеременных пластических деформаций или одностороннего накопления деформаций, приводящих к разрушению или недопустимому формоизменению. В то же время существуют такие циклы изменения нагрузок, при которых пластические деформации возникают лишь в начале деформирования, а затем в дальнейшем тело деформируется упруго. В таком случае тело, получив пластические деформации, приспособилось к повторному нагружению без возникновения новых пластических деформаций.

Теория приспособляемости является обобщением теории предельного равновесия. Статические методы анализа условий безопасного деформирования тела при повторных нагружениях опираются на статическую теорему приспособляемости (теорема Мелана). Эта теорема содержит следующие утверждения [9, 26]:

приспособляемость наступит, когда можно найти такое  $n$  зависящее от времени поле оста-

точных напряжений  $\sigma_{ij}^0$ , что при любых изменениях нагрузки в заданных пределах сумма этого поля и поля напряжений  $\sigma_{ij}^e$  в идеально упругом теле в каждой точке тела не нарушает условия пластичности

$$f(\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^e) \leq \tau_T; \quad (2.4.12)$$

приспособляемость невозможна, если не существует никакого не зависящего от времени поля остаточных напряжений  $\sigma_{ij}^0$ , для которого выполняется неравенство (2.4.12).

Кинематические методы анализа условий безопасного деформирования тела при повторных нагружениях опираются на кинематическую теорему приспособляемости (теорема Коитера), которая содержит следующие утверждения [9, 26]:

приспособляемость отсутствует, если при напряжениях  $\sigma_{ij}^e$ , определенных в предположении идеальной упругости по внешним нагрузкам, которые изменяются в установленных пределах, можно предложить какой-либо допустимый цикл скоростей пластической деформации  $\xi_{ij0}^p$ , при котором за время  $t$  будет справедливо неравенство

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}^e) \xi_{ij0}^p d\Omega \leq 0, \quad (2.4.13)$$

где  $\sigma_{ij}$  - напряжения, соответствующие кинематически возможным скоростям деформаций  $\xi_{ij0}^p$  по закону течения;

приспособляемость наступит, если для напряжений  $\sigma_{ij}^e$  при любых допустимых циклах  $\xi_{ij0}^p$  неравенство (2.4.13) не выполняется.

Статическая и кинематическая теоремы приспособляемости позволяют соответственно определить нижние и верхние границы допустимых изменений циклических нагрузок. Примеры применения статической и кинематической теорем приспособляемости приведены в работах [7, 9, 26, 49].

#### 2.4.4. ТЕОРИЯ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Плоская деформация возникает в длинных призматических телах при нагрузках, не зависящих от продольной координаты  $z$ .

Напряженно-деформированное состояние при плоской деформации характеризуется следующими отличными от нуля компонентами:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}; \quad \xi_x, \xi_y, \xi_{xy}. \quad (2.4.14)$$

Причем

$$\sigma_z = \sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (2.4.15)$$

Главные напряжения:

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \tau_T; \quad \sigma_2 = \sigma_0; \quad \sigma_3 = \sigma_0 - \tau_T, \quad (2.4.16)$$

где  $\tau_T$  - предел текучести при чистом сдвиге.

Линии, касающиеся в каждой своей точке площадки максимального касательного напряжения  $\tau_T$ , называются линиями скольжения. Имеют место два ортогональных семейства линий скольжения  $\alpha$  и  $\beta$ . Направление  $\alpha$  определяется поворотом вектора  $\sigma_1$  на угол  $\pi/4$  по часовой стрелке, направление  $\beta$  - поворотом на угол  $\pi/4$  против часовой стрелки. Угол наклона линии скольжения семейства  $\alpha$  к оси  $x$

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} - \frac{\pi}{4}. \quad (2.4.17)$$

Элемент тела, выделенный линиями скольжения  $\alpha, \beta$ , испытывает деформацию чистого сдвига.

Компоненты (2.4.14) удовлетворяют следующим соотношениям:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad (2.4.18)$$

условию пластичности Максвелла-Хубера

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4\tau_T^2; \quad (2.4.19)$$

соотношениям ассоциированного закона течения

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}}{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}}; \quad (2.4.20)$$

условию несжимаемости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (2.4.21)$$

Соотношения (2.4.18) - (2.4.21) образуют систему пяти уравнений для пяти неизвестных функций  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, v_x, v_y$ . Эту систему относят к гиперболическому типу. Она имеет два двойных ортогональных семейства характеристик, совпадающих с линиями скольжения  $\alpha, \beta$ . Ее решение удобно искать в переменных  $\sigma_0, \varphi, v_\alpha, v_\beta$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 - \tau_T \sin 2\varphi; \quad \sigma_y = \sigma_0 + \tau_T \sin 2\varphi; \\ \tau_{xy} &= \tau_T \cos 2\varphi; \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

$$v_x = v_\alpha \cos \varphi - v_\beta \sin \varphi; \quad v_y = v_\alpha \sin \varphi + v_\beta \cos \varphi. \quad (2.4.23)$$

При этом вдоль линий скольжения выполняются следующие зависимости:



семейство  $\alpha$                       семейство  $\beta$

$$dy \cos \varphi - dx \sin \varphi = 0; \quad dy \sin \varphi + dx \cos \varphi = 0; \quad (2.4.24)$$

$$\sigma_0 - 2\tau_T \varphi = \text{const}; \quad \sigma_0 + 2\tau_T \varphi = \text{const}; \quad (2.4.25)$$

$$dv_{\alpha} - v_{\beta} d\varphi = 0; \quad dv_{\beta} + v_{\alpha} d\varphi = 0. \quad (2.4.26)$$

Равенства (2.4.24) представляют собой дифференциальные уравнения линий скольжения. Соотношения (2.4.25) называют интегралами Генки, равенства (2.4.26) - уравнениями Гейрингера.

Сетка линий скольжения  $\alpha$ ,  $\beta$  обладает рядом простых свойств, существенно облегчающих решение конкретных задач. В частности, угол, который составляют две линии скольжения одного и того же семейства, в точках, где они пересекаются с линиями скольжения другого семейства, не меняется при движении вдоль этих линий (первая теорема Генки), а также: уменьшение радиусов кривизны линий скольжения одного семейства при перемещении по линии скольжения другого семейства равно пройденному пути (вторая теорема Генки).

Если в некоторой области одно семейство линий скольжения образовано прямыми линиями (простое поле), то вдоль каждой прямой линии напряжения и соответствующая проекция скорости постоянны.

Если в некоторой области оба семейства линий скольжения прямолинейны (равномерное поле), то во всей этой области постоянны напряжения и скорости перемещения.

Уравнения плоской деформации распадаются на две группы, одна из которых (2.4.24), (2.4.25) содержит статические неизвестные  $\sigma_0$ ,  $\varphi$ , а другая (2.4.26) - кинематические  $v_{\alpha}$ ,  $v_{\beta}$ . Поэтому при наличии достаточного количества краевых условий возможны случаи, когда статические переменные определяются независимо от кинематических. Различают статически и кинематически определяемые задачи.

В статически определяемых задачах краевые условия позволяют найти распределение напряжений и сетку линий скольжения в физической плоскости  $x$ ,  $y$  независимо от кинематики деформирования, после чего при помощи уравнений Гейрингера (2.4.26) и соответствующих краевых условий можно найти распределение скоростей.

В кинематически определяемых задачах краевые условия дают возможность найти распределение скоростей  $v_{\alpha}$ ,  $v_{\beta}$  в плоскости координат  $\alpha$ ,  $\beta$  и недостающие краевые условия для напряжений в физической плоскости [13].

Условием согласованности полей напряжений и скоростей перемещения является положительность мощности пластического деформирования

$$D = \sigma_{ij} \xi_{ij} = \sigma_T \xi_e > 0. \quad (2.4.27)$$

Важное значение имеют решения с разрывными полями напряжения и скоростей

(обобщенные решения). Линия разрыва напряжений представляет собой вырожденную жесткую зону и рассматривается как гибкая нерастяжимая нить. Вдоль нее возможен разрыв только нормального напряжения, действующего в площадке, перпендикулярной линии разрыва -  $\sigma_j$ . По условию пластичности (2.4.19) величина скачка  $\sigma_j$  при переходе через линию разрыва

$$[\sigma_j] = \sigma_j^+ - \sigma_j^- = 4\sqrt{\tau_T^2 - \tau_n^2}, \quad (2.4.28)$$

где  $\tau_n$  - касательное напряжение вдоль линии разрыва. На линиях скольжения разрывы напряжений невозможны.

Разрыв скорости перемещения возможен только на линиях скольжения или их огибающих, иметь скачок может только касательная к линии разрыва составляющая скорости, нормальная составляющая - непрерывна. Скачок скорости не меняется вдоль линии скольжения.

Анализ плоской деформации сводится к формулировке и решению ряда краевых задач (задача Коши, задача Римана, смешанная задача и др.). Для их решения разработаны эффективные аналитические, графические, численные, матрично-операторные и другие методы [10, 11, 13, 21, 26, 28, 46, 48].

Решение называют полным, если оно удовлетворяет уравнениям (2.4.18) - (2.4.21), краевым условиям, условию (2.4.27) в деформированной области и допускает равновесное продолжение поля напряжений в жесткие области, не нарушающее условие пластичности  $(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \leq 4\tau_T^2$ . Соответствующая ему предельная нагрузка будет искомой.

#### 2.4.5. ТЕОРИЯ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Плоское напряженное состояние приближенно реализуется в тонких пластинах при действии на них сил, лежащих в срединной плоскости пластины  $x$ ,  $y$ . Принимают, что напряженно-деформированное состояние не зависит от координаты  $z$  и характеризуется следующими отличными от нуля компонентами:

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}; \quad \xi_x, \xi_y, \xi_z, \xi_{xy}. \quad (2.4.29)$$

Условие пластичности Максвелла-Хубера в этом случае имеет вид

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = 3\tau_T^2. \quad (2.4.30)$$

Напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия (2.4.18) и связаны со скоростями деформаций соотношениями ассоциированного закона течения

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}. \quad (2.4.31)$$

$$2\sigma_x - \sigma_y \quad 2\sigma_y - \sigma_x \quad 6\tau_{xy}$$

Скорость перемещения  $v_z$  определяют из условия несжимаемости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (2.4.32)$$

Соотношения (2.4.18), (2.4.30) - (2.4.32) образуют систему шести уравнений для шести неизвестных функций  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, v_x, v_y, v_z$ . Эта система распадается на две подсистемы: статическую - уравнения (2.4.18), (2.4.30) и кинематическую - уравнения (2.4.31), (2.4.32). Система уравнений для напряжений может быть гиперболической, параболической и эллиптической в зависимости от величины  $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y)$ .

При  $|\sigma_0| < \tau_T$  систему относят к гиперболическому типу. Она имеет два различных семейства характеристик [21, 26, 46]. Характеристики не ортогональны и образуют между собой угол, меняющийся от точки к точке:

$$\psi = \pi - \arccos \frac{\sigma_0}{\sqrt{4\tau_T^2 - 3\sigma_0^2}}. \quad (2.4.33)$$

Кинематические уравнения (2.4.31) в этом случае также гиперболического типа и имеют те же характеристики, что и статические уравнения. Главное напряжение  $\sigma_1$  направлено по биссектрисе между характеристиками (как и в плоской деформации).

Вдоль характеристик выполняется соотношение  $\sigma_n = 2\sigma_t$ , где  $\sigma_n$  - нормальное напряжение, действующее на площадке, нормальной к характеристике, а  $\sigma_t$  - нормальное напряжение на площадке, касательной к характеристике. Скорости линейной деформации в характеристических направлениях равны нулю (как и в плоской деформации).

Характеристики уравнений плоского напряженного состояния обладают рядом свойств, аналогичных свойствам линий скольжения уравнений плоской деформации [26, 46].

При  $|\sigma_0| = \tau_T$  систему относят к параболическому типу. Оба семейства характеристик сливаются ( $\psi=0$ ) в одно семейство прямых параллельных линий. Имеет место равномерное поле напряжений  $|\sigma_1| = 2\tau_T, |\sigma_2| = \tau_T$ .

В случаях гиперболическости и параболическости уравнения плоского напряженного состояния допускают разрывные решения. Разрывы в напряжениях и касательной составляющей скорости аналогичны разрывам, рассматриваемым в плоской деформации. Существенное значение имеет новый тип разрыва - разрыв нормальной составляющей скорости, приводящий к скачкообразному изменению толщины пластины - утолщению (валик) или утонению (шейка). Ли-

ния разрыва скорости совпадает с характеристикой. Вектор скачка скорости  $[v]$  составляет с линией разрыва угол  $\theta = \psi - \pi/2$ . Напряжения непрерывны на линии разрыва скорости, причем главные напряжения

$$\sigma_1 = \tau_T \frac{1 + 3 \sin \theta}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta}}; \sigma_2 = -\tau_T \frac{1 - 3 \sin \theta}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta}}. \quad (2.4.34)$$

В параболических точках разрыв имеет только нормальная составляющая скорости. При  $\sigma_0 = \tau_T$  имеет место утонение, при  $\sigma_0 = -\tau_T$  - утолщение.

В эллиптическом случае  $|\sigma_0| > \tau_T$  решение уравнений связано с большими трудностями. Метод интегрирования уравнений в рядах указан в работе [11]. Трудности интегрирования уменьшаются при использовании условия пластичности Треска-Сен-Венана (2.1.7) [7, 8].

Необходимо различать два случая: главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  имеют разные знаки ( $\sigma_1\sigma_2 < 0$ ) или  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  имеют одинаковые знаки ( $\sigma_1\sigma_2 > 0$ ).

В первом случае условие пластичности, основные уравнения и методы решения будут такими же, как в задаче о плоской деформации.

Во втором случае условие пластичности Треска-Сен-Венана имеет вид  $|\sigma_1| = \sigma_T$  или  $|\sigma_2| = \sigma_T$ ; соответствующая система уравнений параболическая и имеет простое решение.

Теория плоского напряженного состояния для пластин переменной толщины развита в [48].

Общая плоская задача, пространственное, осесимметричное, сферическое состояния и другие задачи рассмотрены в работах [21, 46, 48].

## Глава 2.5

### ПОЛЗУЧЕСТЬ ПРИ ОДНООСНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

#### 2.5.1. ПОЛЗУЧЕСТЬ И РЕЛАКСАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Под ползучестью понимают процесс неупругого деформирования твердых тел, когда существенным является время действия внешних нагрузок. Наиболее характерными являются следующие частные случаи:

1. Изменение деформаций при постоянных нагрузках, этот процесс иногда называют простой ползучестью.

2. Изменение напряжений при заданных постоянных перемещениях точек тела называют простой релаксацией.

Простая ползучесть может быть упругой и пластической. При упругой ползучести (линейная вязкоупругость) деформации, воз-

накишие во времени, после разгрузки уменьшаются и с течением времени совсем исчезают (рис. 2.5.1,а); при пластической они в основном необратимы и после разгрузки уменьшаются во времени медленно и в незначительной степени (рис. 2.5.1,б). Уменьшение во времени деформаций после разгрузки называют обратной ползучестью.

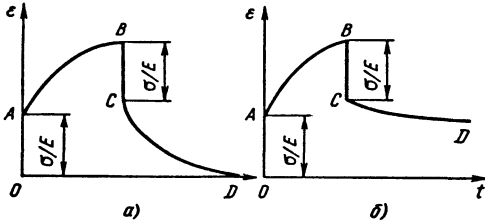


Рис. 2.5.1. Кривые с упругим (а) и пластическим (б) последствием

В случае релаксации, когда полная деформация образца во времени постоянна и напряжение в начальный момент времени  $\sigma(0)$  меньше предела пропорциональности материала при температуре испытания или эксплуатации, напряжение будет изменяться согласно уравнению

$$\sigma(0)/E = \sigma/E + \epsilon^c, \quad (2.5.1)$$

где  $\sigma$  и  $\epsilon^c$  - напряжение и деформация ползучести в некоторый момент времени  $t$ ;  $E$  - модуль упругости материала. Это уравнение при сформулированных выше условиях является основным уравнением релаксации напряжений. Иной (дифференциальный) вид этого уравнения:

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} = -\xi^c, \quad (2.5.2)$$

где  $\xi^c = \frac{d\epsilon^c}{dt}$  - скорость деформации ползучести.

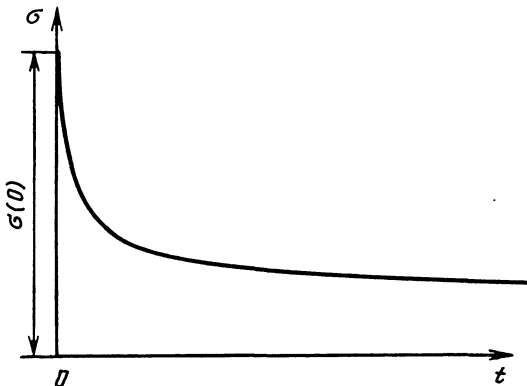


Рис. 2.5.2. Кривая релаксации

График зависимости напряжения от времени при постоянной деформации называют кривой релаксации (рис. 2.5.2).

### 2.5.2. ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ПРОЦЕССА ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ ОДНООСНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

График зависимости деформации ползучести от времени при постоянной растягивающей силе (рис. 2.5.3) называют кривой ползучести. В первой стадии ползучести скорость деформации ползучести  $\xi^c$  уменьшается, во второй стадии она остается постоянной  $\xi^c = \xi_{\min}^c$  и в третьей вследствие развивающихся в образце трещин (хрупкое разрушение) или образования шейки (вязкое разрушение) она увеличивается до разрушения образца. Иногда на кривой ползучести отсутствует первая или вторая стадия. С увеличением напряжения и температуры скорость деформации ползучести увеличивается, а время до разрушения уменьшается. На рис. 2.5.4,а представлены кривые ползучести при одинаковой температуре и различных напряжениях:  $\sigma_{III} > \sigma_{II} > \sigma_I$ , а на рис. 2.5.4,б при одинаковых напряжениях и различных температурах:  $T_{III} > T_{II} > T_I$ .

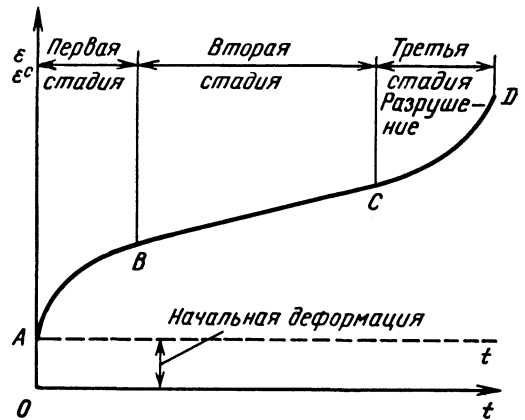


Рис. 2.5.3. Кривая ползучести с тремя стадиями

Минимальная скорость деформации ползучести является функцией напряжения и температуры  $\xi_{\min}^c = \Phi(\sigma, T)$  и обычно имеет вид

$$\xi_{\min}^c = Q(\sigma)\theta(T), \quad (2.5.3)$$

где  $Q(\sigma)$  - функция напряжения, параметры в которой могут зависеть от температуры;  $\theta(T)$  - функция температуры.

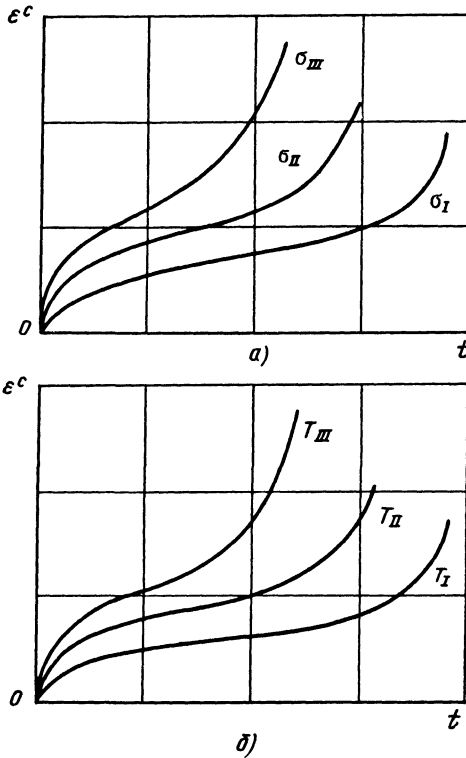


Рис. 2.5.4. Кривые ползучести при различных напряжениях и температурах

Для функции  $Q(\sigma)$  используют одну из следующих зависимостей:

$$Q(\sigma) = k(\sigma/\sigma_*)^n; \quad (2.5.4)$$

$$Q(\sigma) = a \operatorname{sh}(\sigma/b); \quad (2.5.5)$$

$$Q(\sigma) = d[\operatorname{sh}(\sigma/c)]^n; \quad (2.5.6)$$

$$Q(\sigma) = A[(\sigma - \sigma_0)/(g - \sigma)]^n. \quad (2.5.7)$$

Функция температуры имеет вид

$$\theta(T) = \exp(-l/T) \quad (2.5.8)$$

или

$$\theta(T) = \exp[m(T - T_0)]. \quad (2.5.9)$$

В этих формулах  $k$ ,  $n$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $A$ ,  $\sigma_0$ ,  $g$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $T_0$  - постоянные материала. Некоторые из них, как, например,  $n$ ,  $\sigma_0$ ,  $g$ , зависят от температуры. Из зависимостей (2.5.4) - (2.5.9) лучше других согласуется с результатами опытов зависимость (2.5.7) [51]. В расчетах на ползучесть обычно используют зависимость (2.5.4).

Существующие зависимости деформации ползучести от напряжения, времени и температуры (уравнения кривых ползучести)

$$\varepsilon^c = \Phi(\sigma, t, T) \quad (2.5.10)$$

имеют вид

$$\varepsilon^c = Q \Omega \theta \quad (2.5.11)$$

или

$$\varepsilon^c = (Q_1 \Psi + Q_2 t) \theta, \quad (2.5.12)$$

где  $Q$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$  - функции напряжения;  $\Omega$  - функция времени;  $\Psi$  - монотонно и быстро убывающая функция времени;  $\theta$  - функция температуры. Все эти функции определяют экспериментально. В качестве функции  $Q$  часто используют степенную функцию (2.5.4).

Для сопоставления сопротивления ползучести различных материалов введена условная характеристика - предел ползучести.

Пределом ползучести  $\sigma_{II}$  называют напряжение, при котором деформация ползучести за заданный промежуток времени достигает значения, установленного техническими условиями.

Существует иное определение: пределом ползучести называют напряжение, при котором скорость деформации ползучести равна определенной величине, установленной техническими условиями. Оно следует из аппроксимации кривой ползучести прямой линией:  $\varepsilon^c = \xi_{\min}^c t$ . Тогда по принятой деформации за определенный промежуток можно установить минимальную скорость деформации.

В расчетах на ползучесть обычно предполагают, что механические свойства материалов при растяжении и сжатии одинаковы.

## Глава 2.6

### ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

#### 2.6.1. ПРОСТЕЙШИЕ ТЕОРИИ

Под теориями ползучести понимают такие соотношения, которые при переменных режимах достаточно хорошо описывают деформирование во времени реальных материалов, а при простой ползучести совпадают с аппроксимационными зависимостями, указанными выше.

В простейшем варианте для деформации ползучести и напряжения в случае одноосного напряженного состояния постулируется связь вида

$$\varepsilon^c = \Phi(\sigma, t, T), \quad (2.6.1)$$

где  $t$  - время;  $T$  - температура. Из соотношения (2.6.1) следует, что деформация ползучести в любой момент времени определяется текущими значениями напряжения, времени и температуры. Естественно, что соотношение (2.6.1) удовлетворяет исходному требованию о правильности описания кривых простой ползучести, если время  $t$  отсчитывается с момента нагружения и оно

совпадает с выражением (2.5.10). Отличие (2.6.1) от аппроксимационного соотношения (2.5.10) состоит в том, что оно распространяется и на переменные  $\sigma$  и  $T$ . Принятие последнего условия означает, что имеет место теория ползучести, которую называют теорией старения (иногда деформационной теорией старения).

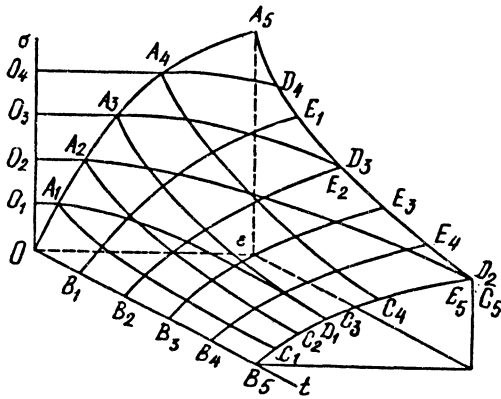


Рис. 2.6.1. Поверхность ползучести по теории старения

На рис. 2.6.1 представлена поверхность, определяемая соотношением (2.6.1), с учетом мгновенной деформации. Сечения этой поверхности плоскостями, параллельными координатным, позволяют получить основные кривые. Так, если проведем плоскости, параллельные плоскости  $tO\epsilon$  (соответствующие постоянному напряжению  $\sigma$ ), получим кривые ползучести  $A_i D_i$  ( $O_i A_i$  - мгновенные деформации). Сечения  $t = \text{const}$  дадут изохронные кривые  $B_i E_i$ . Наконец, сечения  $\epsilon = \text{const}$  дадут кривые релаксации  $A_i C_i$ .

Когда кривые ползучести подобны, а упругими деформациями можно пренебречь, тогда для полных деформаций может быть использовано представление

$$\epsilon = \epsilon^c = Q(\sigma)\Omega(t). \quad (2.6.2)$$

Это соотношение очень удобно при определении напряжений и деформаций, когда известно решение нелинейной упругой задачи. В этом случае  $\Omega(t)$  играет роль коэффициента пропорциональности и  $t$  входит параметрически в известные решения.

Очевидно, что область применимости теории старения достаточно ограничена. Наилучшие результаты использования теории старения в

расчетах получают, когда априори известно, что напряжения в рассматриваемом элементе конструкции меняются незначительно (например, диск, вращающийся с постоянной угловой скоростью, труба под давлением при малых изменениях амплитуды давления). Преимуществом использования соотношения (2.6.1) является то обстоятельство, что в ряде случаев при расчетах могут быть использованы прямые экспериментальные кривые без их аппроксимации приближенными аналитическими зависимостями.

Часто встречается следующий конкретный вид записи теории старения:

$$\epsilon^c = Q_1(\sigma, T)t^\beta + Q_2(\sigma, T)t, \quad (2.6.3)$$

где первое слагаемое существенно при малых  $t$  и функция  $Q_1(\sigma, T)$  определяется свойствами первой стадии ползучести (см. рис. 2.5.4), а функция  $Q_2(\sigma, T)$  - свойствами второй стадии ползучести.

Согласно теории старения существенные отклонения от реального поведения материалов наблюдаются, когда происходит резкое изменение напряженного состояния. Например, когда в опыте на простую ползучесть образец в какой-то момент времени разгружается, в реальных условиях деформация ползучести остается (за вычетом деформации обратного последствия). В то же время соотношения типа (2.6.3) приводят к условию  $\epsilon^c = 0$ .

Свободно от указанного недостатка соотношение вида

$$\xi^c = f(\sigma, t, T), \quad (2.6.4)$$

в котором постулируется, что скорость деформации ползучести является функцией напряжений, времени и температуры. Соотношение (2.6.4) носит название теории течения. Очевидно, что если обрабатываются одни и те же кривые ползучести, то выполняется соотношение

$$f(\sigma, t, T) \equiv \partial \Phi(\sigma, t, T) / \partial t. \quad (2.6.5)$$

Для упругоползущего тела имеет место соотношение

$$\xi = \frac{\dot{\sigma}}{E} + f(\sigma, t, T) \quad (2.6.6)$$

или в обычно принимаемом варианте

$$\xi \doteq \frac{\dot{\sigma}}{E} + f_1(\sigma, T)B(t). \quad (2.6.7)$$

Функцию  $f_1(\sigma, T)$  записывают в одном из видов (2.5.4) - (2.5.9). Для соотношения (2.6.7) характерен тот недостаток, что весь процесс зависит от момента отсчета времени  $t$ . В теории течения может быть введено приведенное время  $\tau$ :

$$d\tau = B(t)dt. \quad (2.6.8)$$

Тогда (2.6.7) принимает вид

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{d\tau} + f_1(\sigma, T). \quad (2.6.9)$$

Соотношение (2.6.9) формально совпадает с выражением, используемым в теории упругого нелинейно-вязкого тела, для которого зависимость скорости деформации от напряжения имеет вид

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + f_2(\sigma, T). \quad (2.6.10)$$

Выражение (2.6.10) является физически непротиворечивым, однако оно описывает только вторые участки кривых ползучести (см. рис. 2.5.4). Если конструкция эксплуатируется в условиях, когда можно пренебречь эффектами, связанными с упрочнением на первом участке, и в то же время нет существенных признаков накопления поврежденности в материале (не достигнут третий участок), то соотношение (2.6.10) наилучшим образом описывает процесс ползучести структурно устойчивых материалов.

В случае, когда необходим учет первой стадии кривых ползучести для существенно переменных режимов нагружения, используют теорию упрочнения. В соотношениях теории упрочнения изменение скорости деформации ползучести в процессе деформирования при постоянном напряжении учитывают введением вместо явного времени  $t$  накопленной деформации ползучести. Это соотношение можно записать в виде

$$\xi^c = \varphi(\sigma, \varepsilon^c, T). \quad (2.6.11)$$

Наиболее употребимые формы имеют вид

$$\xi^c = \varphi_1(\sigma, T) (\varepsilon^c)^{-\alpha}; \quad (2.6.12)$$

$$\xi^c = \varphi_1(\sigma, T) (\varepsilon^c)^{-\alpha} + \varphi_2(\sigma, T), \quad (2.6.13)$$

где  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  - функции вида (2.5.4) - (2.5.9). Выражение (2.6.13) отличается от (2.6.12) тем, что позволяет учесть первый и второй участки кривой ползучести, однако они существенно сложнее при проведении расчетов конкретных элементов конструкций. Если описываются одни и те же кривые ползучести по теории старения (2.6.2) и по теории упрочнения (2.6.12), то должны выполняться условия

$$\Omega(t) \equiv t^{1/(1+\alpha)}; \quad [\Omega(\sigma)]^{1+\alpha} \equiv (1+\alpha)\varphi_1(\sigma). \quad (2.6.14)$$

Анализ кривых ползучести показывает, что для функций, входящих в выражения (2.6.12), (2.6.13), должно выполняться условие

$$\varphi_1''(\sigma) - \frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{[\varphi_1'(\sigma)]^2}{\varphi_1(\sigma)} > 0. \quad (2.6.15)$$

Справедливость каждой из приведенных простейших теорий ползучести проверяют опытами на релаксацию и ступенчатое нагружение. В этих случаях нет необходимости конкретизировать вводимые функции  $f$  и  $\varphi$  для сравнения

результатов экспериментов с теоретическими кривыми.

Отметим одну особенность уравнения (2.6.11) в случае, когда используются линейные функциональные связи между напряжениями и деформациями (линейная вязкоупругость). В простейшей форме они имеют вид

$$E\dot{\varepsilon} + n\varepsilon H = \dot{\sigma} + n\sigma. \quad (2.6.16)$$

Выражение (2.6.16) является частным случаем общего соотношения (2.6.11). В зависимости от параметра  $H$  выражение (2.6.16) может представлять поведение принципиально различных материалов. Так, при  $H=0$  оно описывает неограниченную во времени ползучесть, а при  $H \neq 0$  - ограниченную ползучесть. При этом в условиях постоянного напряжения  $\sigma_0$  деформации меняются от мгновенных упругих, равных  $\sigma_0/E$ , до длительных, которые тоже можно называть упругими, только с модулем  $H$ . Отсюда следует, что должно выполняться соотношение  $H < E$ .

Очевидно, что, используя представления, аналогичные (2.6.12) для линейного случая связи напряжений и деформаций, можно и для общего типа зависимости получить вариант ограниченной ползучести. Например, уравнение

$$\xi^c = \left[ f_1(\sigma, T) - a\varepsilon^c \right] (\varepsilon^c)^{-\alpha} \quad (2.6.17)$$

в широком смысле обобщает как (2.6.16), так и (2.6.12).

В рамках соотношения (2.6.11) может также быть описан и третий участок кривой ползучести. Так, выражение

$$\xi^c = f_1(\sigma, T) (\varepsilon^c)^{-\alpha} \exp\{b\varepsilon^c\} \quad (2.6.18)$$

дает возможность учесть и участок разупрочнения.

Во все соотношения (2.6.1) - (2.6.13), объединяемые наименованием "простейшие теории", входят только легко определяемые в стандартных испытаниях величины деформации, напряжения, время и температура (деформация ползучести представляет собой разность между полной деформацией и напряжением, деленным на модуль упругости).

В связи с тем что соотношение (2.6.13) очень сложно для использования в расчетах, иногда его заменяют уравнением вида

$$\xi = \varphi_1(\sigma, T)\dot{\sigma} + \varphi_2(\sigma, T), \quad (2.6.19)$$

в котором первое слагаемое представляет собой мгновенную деформацию, эквивалентную деформации упрочнения.

Из всех введенных соотношений инвариантами по отношению ко времени  $t$  являются только (2.6.10) и (2.6.11). Причем первое можно рассматривать как частный случай (2.6.11). Поэтому о (2.6.11) можно говорить как о некотором простейшем законе реономного деформирования материалов, и его называют механичес-

ким уравнением состояния. Большинство физических теорий ползучести, в которых рассматриваются структурные механизмы этого явления, сводятся к определению вида функции  $f_2$  в соотношении (2.6.10) и к попыткам физического истолкования вводимых в это соотношение параметров типа чувствительности к скорости деформации, энергии активации процесса и др.

В качестве примера применимости теорий ползучести рассмотрим задачу о релаксации напряжений, когда практически мгновенно в образце создается деформация  $\varepsilon_0$ , которая в дальнейшем поддерживается неизменной. В результате накопления деформаций ползучести на соответствующую величину уменьшается упругая компонента полной деформации и в образце падает напряжение.

Найдем зависимость изменения напряжений во времени по трем основным теориям ползучести.

Согласно теории старения на основе соотношения (2.6.1) напряжение как функция времени определится из конечного уравнения

$$\sigma_0 = \sigma + E\Phi(\sigma, t), \quad (\sigma_0 = E\varepsilon_0). \quad (2.6.20)$$

По теории течения (2.6.4) для нахождения  $\sigma = \sigma(t)$  получим уравнение

$$-\dot{\sigma} = Ef(\sigma, t), \quad (2.6.21)$$

которое интегрируется с учетом начального условия

$$\sigma(0) = \sigma_0. \quad (2.6.22)$$

По теории упрочнения согласно (2.6.11) уравнение для определения  $\sigma$  имеет вид

$$-\dot{\sigma} = E\varphi(\sigma, \varepsilon_0 - \sigma/E). \quad (2.6.23)$$

В качестве примера расчета рассмотрим единую исходную систему кривых ползучести, которую можно аппроксимировать зависимостью вида

$$\Phi(\sigma, t) = A\sigma^n t^\beta. \quad (2.6.24)$$

Тогда согласно (2.6.5) для (2.6.24) имеем

$$f(\sigma, t) = \beta A \sigma^n t^{\beta-1}. \quad (2.6.25)$$

И для теории упрочнения (2.6.12) согласно (2.6.14)

$$\alpha = (1 - \beta) / \beta \quad \text{и} \quad \varphi_1(\sigma) \equiv \beta A^{1/\beta} \sigma^{n/\beta}. \quad (2.6.26)$$

Окончательно кривая релаксации по теории старения

$$\sigma_0 = \sigma + AEt^\beta \sigma^n. \quad (2.6.27)$$

Для теории течения, интегрируя (2.6.21) с условием (2.6.22), имеем

$$\sigma_0^{-n+1} = \sigma^{-n+1} + AE(n-1)t^\beta. \quad (2.6.28)$$

Для теории упрочнения уравнение (2.6.23) с учетом (2.6.26), даже в таком простейшем случае, сводится только к квадратурам

$$\int_{\sigma}^{\sigma_0} \sigma^{-n/\beta} (\sigma_0 - \sigma)^{(1-\beta)/\beta} d\sigma = \beta E^{1/\beta} A^{1/\beta} t. \quad (2.6.29)$$

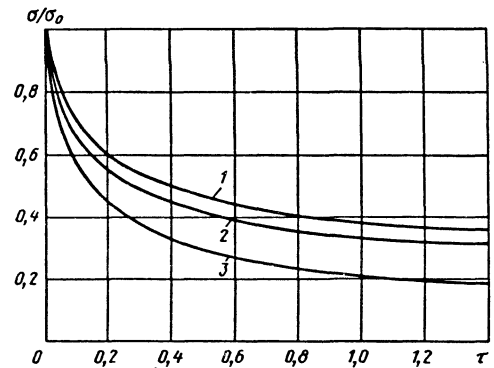


Рис. 2.6.2. Кривые релаксации по различным простейшим теориям

На рис. 2.6.2 представлены кривые релаксации, рассчитанные по (2.6.27) - (2.6.29), для  $n=3$  и  $\beta=1/3$ . По горизонтальной оси отложено приведенное время  $\tau = AEt^\beta \sigma_0^{n-1}$ , по вертикальной оси -  $\sigma/\sigma_0$ . Верхняя кривая соответствует теории старения, средняя - теории упрочнения, нижняя - теории течения. Кривая релаксации по теории упрочнения всегда располагается между кривыми по теории старения и по теории течения. Расчеты показывают, что при  $\beta \rightarrow 0$  (резкое упрочнение) кривая по теории упрочнения приближается к кривой по теории старения, а при  $\beta \rightarrow 1$  (кривые ползучести стремятся к прямым) кривая по теории упрочнения совпадает с кривой по теории течения.

## 2.6.2. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ СО СТРУКТУРНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Соотношения (2.6.1), (2.6.4) и (2.6.11), являясь простейшими определяющими зависимостями, выражающими функциональную связь между напряжениями и деформациями для одноосного напряженного состояния, не могут достаточно точно количественно описать ряд наблюдаемых в эксперименте эффектов. Так, ни одно из указанных соотношений не описывает точно деформирование материала при испытаниях на ступенчатую догрузку или разгрузку (полную или неполную). Эксперименты демонстрируют резкое увеличение скорости ползучести образца после ступенчатой догрузки.

Кривые ползучести  $S_1$  при напряжении  $\sigma_1$  и  $S_2$  при напряжении  $\sigma_2$  представлены на рис. 2.6.3.

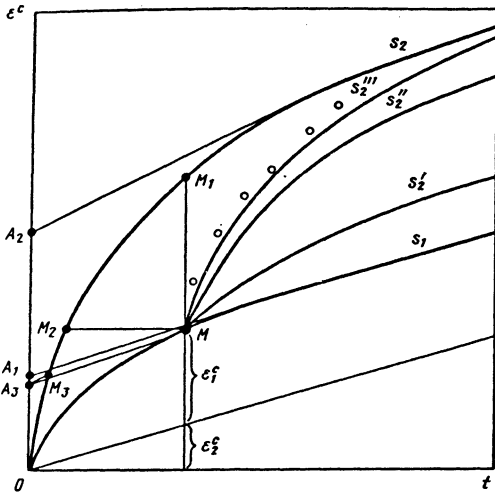


Рис. 2.6.3. Теоретические и экспериментальная (точки) кривые ползучести

В процессе испытания при ступенчатом режиме сначала выдерживалось напряжение  $\sigma_1$ , и когда деформация ползучести достигала значения, соответствующего точке  $M$ , напряжение скачком изменилось до  $\sigma_2$ . В этом случае по рассмотренным ранее теориям ползучести можно построить соответствующие кривые деформирования. На рисунке представлена кривая  $S_2$ , соответствующая теории течения (2.6.4) (получена параллельным переносом  $S_2$  вдоль оси  $\epsilon^c$ ). Кривая  $S_2''$  соответствует (2.6.11) - теории упрочнения (получена путем переноса кривой  $S_2$  вдоль оси  $t$ ). Сопоставление кривых показывает, что теория упрочнения приводит к лучшим по сравнению с теорией течения результатам, но и по теории упрочнения различия в скоростях существенно больше разброса данных.

Для снятия этого и некоторых других противоречий между экспериментом и результатами теории в механическое уравнение состояния вводят структурные параметры.

В общем случае механическое уравнение состояния может быть представлено в виде [41]

$$\xi^c = f(\sigma, T, q_i), \quad (i = 1, \dots, k). \quad (2.6.30)$$

Структурные параметры  $q_i$  определяются системой кинетических уравнений типа

$$dq_i = a_i d\epsilon^c + b_i d\sigma + c_i dt + f_i dT, \quad (2.6.31) \\ (i = 1, \dots, k).$$

Полная система (2.6.30) - (2.6.31) представляет наиболее общую связь между характеристиками деформирования (напряжениями и дефор-

мациями) в предположении, что дальнейшее поведение материала может быть полностью определено при заданном мгновенном структурно деформированном состоянии. Функции  $a_i, b_i, c_i, f_i$  могут зависеть как от  $\epsilon^c, \sigma, t, T$ , так и самих параметров  $q_i$ .

Структурные параметры и их количественная характеристика  $q_i$  могут трактоваться и как реальные физические объекты (например, соотношения фаз, плотность дислокаций, число и размеры микродефектов), и как некоторые обобщенные механические понятия (энергия пластического деформирования, компоненты деформации ползучести).

Приведем ряд используемых в исследованиях характерных структурных параметров.

1. Элементарная рассеянная работа на деформациях ползучести может быть представлена в виде

$$dq = \sigma d\epsilon^c. \quad (2.6.32)$$

Этот параметр носит четкий физический смысл и позволяет достаточно эффективно описывать разупрочнение на третьем участке кривой ползучести. Кроме того, он может быть использован и для некоторого улучшения интерпретаций кривых деформирования при ступенчатой догрузке. В данном случае полная система определяющих уравнений имеет вид

$$\xi^c = f(\sigma, T, q); \quad \frac{dq}{dt} = \sigma \frac{d\epsilon^c}{dt}. \quad (2.6.33)$$

Для широкого класса функций  $f$  система (2.6.33) для изотермических условий приводится к виду

$$\dot{\xi}^c = \psi_1(\sigma, \xi^c, T) + \psi_2(\sigma, \xi^c, T)\dot{\sigma}. \quad (2.6.34)$$

Введение одного кинетического параметра эквивалентно повышению порядка в механическом уравнении состояния.

2. Возможно разделение полной деформации ползучести на две компоненты  $\epsilon_1^c$  и  $\epsilon_2^c$  [51]. Первая компонента характеризует только начальное упрочнение и является ограниченной во времени величиной, вторая определяется как минимальная скорость ползучести

$$\epsilon^c = \epsilon_1^c + \epsilon_2^c; \quad \dot{\xi}_1^c = \varphi_1(\sigma, T) - \epsilon_1^c \varphi_2(\sigma, T);$$

$$\dot{\xi}_2^c = f(\sigma, T). \quad (2.6.35)$$

Очевидно, что третье выражение аналогично (2.6.10), а второе - упрощенный вариант (2.6.17), когда  $\alpha = 0$ .

На рис. 2.6.3 представлена интерпретация (2.6.35) в случае ступенчатого нагружения. Кривая  $S_2''$  соответствует диаграмме деформирования при ступенчатой догрузке. Она получается методом параллельного переноса кривой  $S_2$  из



точки  $M_3$  в точку  $M$  ( $A_3M$  параллельна второму участку кривой ползучести для  $S_1$ ,  $A_3M_3$  параллельна тому же участку для  $S_2$ ). Из рис. 2.6.3 следует, что результаты теоретического анализа кривых ползучести при догрузке по соотношениям (2.6.35) лучше подтверждаются экспериментом.

Система (2.6.35) позволяет учитывать эффекты догрузки, частичной и полной разгрузки, в том числе явление обратной ползучести. Как и в предыдущем случае, система приводится к уравнению второго порядка, допускающему понижение порядка.

3. Для описания участка разупрочнения и эффекта длительной прочности (квазихрупкого разрушения в конце испытания на ползучесть, которое может происходить при малых деформациях за конечный промежуток времени) возможно введение параметра поврежденности  $\omega$ . Этот параметр интерпретируется как некоторая суммарная характеристика степени дефектности материала в данной точке в рассматриваемый момент времени. Для  $\omega$  согласно (2.6.31) обычно принимают

$$dq = d\omega = \psi(\sigma, \omega, T) dT. \quad (2.6.36)$$

Наиболее употребим частный вид соотношения (2.6.36)

$$\dot{\omega} = B \left( \frac{\sigma}{1-\omega} \right)^m, \quad (2.6.37)$$

где показатель  $m$  определяют на основе обработки результатов испытаний на длительную прочность при постоянных напряжениях. Введение отношения  $\sigma/(1-\omega)$  в кинетическое уравнение связано с интерпретацией параметра поврежденности как обобщенной плотности дефектов. Тогда сам параметр меняется от 0 - идеальное сплошное тело без дефектов - до 1 - полностью разрушенный материал. Отношение  $\sigma/(1-\omega)$  характеризует приведенное или эффективное напряжение в материале. Соответственно комбинация (2.6.30) и (2.6.36) дает систему

$$\xi^c = f(\varepsilon^c, \sigma, \omega, T); \quad \dot{\omega} = \psi(\sigma, \omega, T). \quad (2.6.38)$$

В наиболее часто используемых случаях система (2.6.38) имеет вид

$$\xi^c = A \left( \frac{\sigma}{1-\omega} \right)^n; \quad \dot{\omega} = B \left( \frac{\sigma}{1-\omega} \right)^m. \quad (2.6.39)$$

В простейшем случае, когда  $n=m$ , из системы (2.6.39) следует условие  $\varepsilon^c = (A/B)\omega$ , и поврежденность оказывается пропорциональной деформации ползучести в момент разрушения.

Соотношение (2.6.39) качественно правильно описывает характер кривых ползучести вплоть до момента разрушения (за исключением участка упрочнения), однако количественно кривые ползучести могут быть описаны только

путем модификации второго из уравнений (2.6.39), например, в виде

$$\dot{\omega} = B \left( \frac{\sigma}{1-\omega^r} \right)^m. \quad (2.6.40)$$

Введение скалярного параметра  $r$  позволяет регулировать соотношение длин второй и третьей стадий ползучести и разупрочнения.

4. Как показано в п. 1, структурный параметр  $dA = \sigma d\varepsilon^c$  может быть использован и для описания процесса накопления поврежденности. В достаточно общем виде уравнение состояния может быть записано в виде [47]

$$\xi^c = \frac{C \sigma^k A^{-\alpha}}{(A_* - A)^m}, \quad (2.6.41)$$

где  $C, k, \alpha, m$  - постоянные для материала при определенной температуре;  $A_*$  - удельная энергия рассеяния в момент разрушения. Соотношение (2.6.41) во многих случаях позволяет достаточно эффективно описывать процессы деформирования при ползучести, в том числе и этап разрушения.

5. При обработке экспериментальных данных по ползучести и длительной прочности часто оказывается необходимым вводить не один, а несколько однотипных параметров, отражающих различные частные структурные механизмы. Например, введение двух параметров поврежденности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  позволяет получить единую систему, описывающую перелом на кривой длительной прочности, разделяющий вязкое и квазихрупкое разрушение.

### 2.6.3. ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ С АНИЗОТРОПНЫМ УПРОЧНЕНИЕМ

В процессе ползучести происходит анизотропное упрочнение материала, которое вызывает ряд явлений, аналогичных эффекту Баушингера при знакопеременных пластических деформациях. Примером может служить обратная ползучесть, когда после снятия нагрузки наблюдаются деформации противоположного знака. В теории пластичности для описания анизотропного упрочнения вводится тензор добавочного напряжения, определяющий смещение центра гиперболы пластичности. В случае одноосной ползучести добавочное напряжение можно трактовать как имеющий размерность напряжения структурный параметр  $\rho$ . В уравнении механического состояния (2.6.30) положим, что скорость ползучести является функцией разности действующего напряжения и параметра  $\rho$ :

$$\xi^c = \Phi(|\sigma - \rho|, T) \text{sign}(\sigma - \rho). \quad (2.6.42)$$

Функцию  $\Phi(|\sigma - \rho|, T)$  можно представить в следующем виде:

$$\Phi(\sigma - \rho, T) = B(T)|\sigma - \rho|^n. \quad (2.6.43)$$

Согласно (2.6.42) и (2.6.43) следует, что уменьшение  $\xi^c$  при испытаниях с постоянным напряжением связано с ростом  $\rho$ . Увеличение  $\rho$  от нуля до некоторого максимального (для данного напряжения  $\sigma$ ) значения  $\rho_{\max}$  происходит на первой стадии ползучести. На второй стадии, где скорость ползучести постоянна, величина  $\rho$  остается неизменной.

Таким образом, по форме кривой ползучести можно определить закон изменения  $\rho$ . При ползучести, в отличие от мгновенной пластичности, величина структурного параметра определяется не только траекторией деформирования, а зависит также от времени. Значение  $\rho$  определяется взаимодействием двух конкурирующих процессов: атермического пластического упрочнения и термического разупрочнения. Подобное взаимодействие можно представить как частный случай уравнения (2.6.31):

$$d\rho = A(|\sigma|, T) d\varepsilon^c - F(|\sigma|, |\rho|, T) \text{sign} \rho dt. \quad (2.6.44)$$

Функция  $A(|\sigma|, T)$  убывает с увеличением напряжения и температуры. Однако при напряжениях, меньших предела пропорциональности можно, в первом приближении, принять  $A(|\sigma|, T) = A(T)$ . Функция  $F(|\sigma|, |\rho|, T)$  соответствует различным процессам разупрочнения: термическому и динамическому возврату, рекристаллизации и т.д. Разнообразие и сложность этих процессов исключают возможность использования простой и универсальной аппроксимации. В частности, можно принять

$$F(|\sigma|, |\rho|, T) = D(T)|\sigma|^n. \quad (2.6.45)$$

На второй стадии кривой ползучести при  $d\rho = 0$

$$\rho_{\max} = (1 - k)\sigma, \quad (2.6.46)$$

$$\text{где } k = \left[ \frac{D(T)}{A(T)B(T)} \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Деформация обратной ползучести в данном случае будет также пропорциональна предварительному напряжению, что согласуется с опытными данными. Скорость деформаций ползучести во второй стадии

$$\dot{\xi}_{\min}^c = B(T)k^n \sigma^n. \quad (2.6.47)$$

Показатель степени  $n$  определяют по экспериментальной зависимости  $\xi_{\min}^c$  от  $\sigma$ . В формулах (2.6.46) и (2.6.47) величина  $k \leq 1$ . При  $k=1$  первая стадия на кривой ползучести отсутствует. Закон изменения  $\rho$  при  $\sigma = \text{const}$

$$\rho = A(T) \left( \varepsilon^c - \xi_{\min}^c t \right). \quad (2.6.48)$$

Показанная на рис. 2.6.3 деформация в точках  $A_1$  и  $A_2$ , соответствующая асимптоте кривой ползучести, согласно (2.6.46) и (2.6.48) может быть определена по формуле

$$\varepsilon_0^c = \frac{(1 - k)\sigma}{A(T)}. \quad (2.6.49)$$

Остальные параметры уравнений ползучести могут быть найдены по экспериментальным графикам  $\xi^c = f(\sigma, T, t)$ .

Таким образом, все необходимые постоянные материала для изложенного варианта теории можно определить по сетке экспериментальных кривых ползучести. Для принятого условия (2.6.48) и  $A(|\sigma|, T) = A(T)$  согласно теории ползучести с анизотропным упрочнением при ступенчатом нагружении получают те же результаты, которые показаны на рис. 2.6.3 и получены из уравнения (2.6.35). Если в уравнении (2.6.44) функцию  $F$  выразить в виде

$$F(|\sigma|, |\rho|, T) = D_1(T)|\rho|^n, \quad (2.6.50)$$

а также учесть уменьшение величины  $A(|\sigma|, T)$  с ростом напряжения, то результаты будут иными. Опираясь единственным структурным параметром  $\rho$ , теория ползучести с анизотропным упрочнением обеспечивает достаточно широкие возможности для описания опытных данных при переменных нагрузках. Подробное сопоставление с экспериментом дано в работе [32].

#### 2.6.4. ОБЩИЙ МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИИ В ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Одним из эффективных методов построения определяющих уравнений в теории ползучести является представление полной деформации ползучести  $\varepsilon^c$  в виде суммы отдельных компонент  $\varepsilon_i^c$ , каждую из которых можно описать достаточно простым уравнением. В простейшем случае (2.6.35) деформация  $\varepsilon^c$  разделена на два слагаемых. Однако, если необходим учет большого числа экспериментально наблюдаемых свойств, двух слагаемых может быть недостаточно.

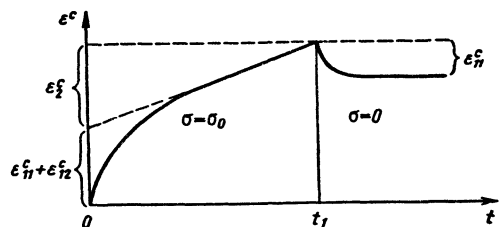


Рис. 2.6.4. Кривая прямой и обратной ползучести

На рис. 2.6.4 показано изменение деформации ползучести, наблюдаемое в ряде экспериментов, когда к образцу вначале приложено постоянное напряжение  $\sigma_0$ , а затем в момент времени  $t_1$  оно снимается. При этом для многих материалов обратимая часть деформации ползучести  $\epsilon_{11}^c$  оказывается меньше величины  $\epsilon_1^c$ , соответствующей неустановившейся ползучести (первая стадия). В этом случае деформацию  $\epsilon^c$  целесообразно разделить на три части:

$$\epsilon^c = \epsilon_{11}^c + \epsilon_{12}^c + \epsilon_2^c, \quad (2.6.51)$$

где  $\epsilon_{11}^c$  - вязкоупругая (полностью обратимая) деформация;  $\epsilon_{12}^c$  - необратимая компонента деформации упрочнения;  $\epsilon_2^c$  - деформация чисто вязкого течения.

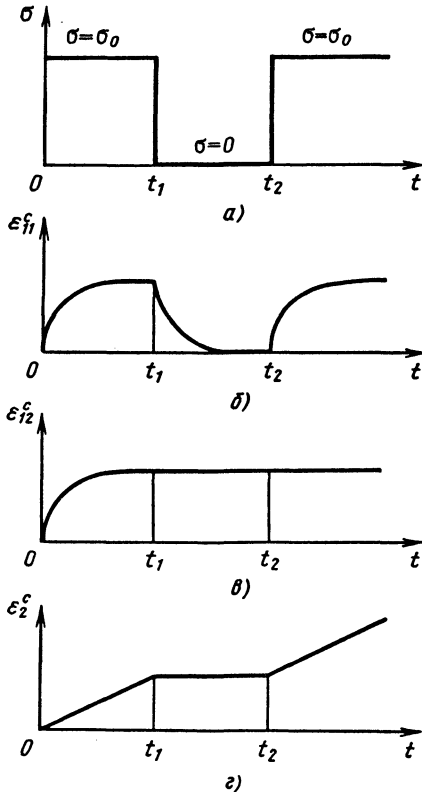


Рис. 2.6.5. Кривые ползучести при нестационарном нагружении

На рис. 2.6.5 показано, как при действии переменного напряжения (рис. 2.6.5,а) изменяются деформации (рис. 2.6.5,б-д).

Деформация  $\epsilon_{11}^c$  при действии напряжения  $\sigma_0$  возрастает, а после разгрузки стремится к нулю (рис. 2.6.5,б). Такой характер деформирования соответствует поведению величины  $\epsilon_1^c$  в (2.6.35). Поэтому для  $\epsilon_{11}^c$  можно использовать уравнение вида

$$\xi_{11}^c = \lambda \left[ \psi(\sigma) - \epsilon_{11}^c \right], \quad (2.6.52)$$

которое при постоянном  $\sigma$  приводит к выражению

$$\epsilon_{11}^c = \psi(\sigma) \left( 1 - e^{-\lambda t} \right). \quad (2.6.53)$$

Однако с помощью одного экспоненциального слагаемого первая стадия ползучести описывается плохо и по сравнению с (2.6.53) лучшие результаты дает сумма

$$\epsilon_{11}^c = \psi(\sigma) \sum_i a_i \left( 1 - e^{-\lambda_i t} \right). \quad (2.6.54)$$

В этом случае  $\epsilon_{11}^c$  есть сумма компонент, для каждой из которых записано уравнение, подобное (2.6.53).

Необратимая компонента деформации упрочнения  $\epsilon_{12}^c$  при постоянном напряжении ведет себя аналогично обратимой деформации, однако после разгрузки она не стремится к нулю, а сохраняет достигнутое значение (рис. 2.6.5,б). Поэтому для ее описания можно использовать видоизмененное уравнение (2.6.52):

$$\xi_{12}^c = \begin{cases} \lambda \left[ b\psi(\sigma) - \epsilon_{12}^c \right], & b\psi(\sigma) > \epsilon_{12}^c; \\ 0, & b\psi(\sigma) \leq \epsilon_{12}^c. \end{cases} \quad (2.6.55)$$

Аналогично предыдущему возможно разбиение  $\epsilon_{12}^c$  на несколько слагаемых.

Изменение деформации чистого вязкого течения  $\epsilon_2^c$  при переменном напряжении показано на рис. 2.6.5,г. Оно соответствует уравнению для величины  $\epsilon_2^c$  в (2.6.35) и поэтому полагаем

$$\xi_2^c = f(\sigma). \quad (2.6.56)$$

Набор введенных уравнений оказывается достаточным для описания процесса ползучести многих материалов. Тем не менее известны эффекты, которые не укладываются в рамки этих уравнений.

Например, существуют так называемые аномальные материалы, которые после снятия нагрузки постепенно "забывают" об истории деформирования. В такой ситуации уравнения вязкопластической деформации должны быть видоизменены.

Другая нередко встречающаяся особенность материалов - их нестабильность. В этом случае целесообразно ввести необратимую нестабильную деформацию согласно соотношению

$$\dot{q} = \varphi(\sigma, q, t). \quad (2.6.57)$$

Уравнение (2.6.57) является вариантом теории упрочнения (2.6.11), распространенной на случай стареющих материалов (правая часть явно зависит от времени). На рис. 2.6.6 схематически показан случай, когда введение деформации  $q$  является необходимым: в зависимости от того, когда приложено напряжение  $\sigma_0$  (при  $t=0$  или при  $t=t_0$ ), получаются неодинаковые кривые ползучести (линии 1 и 2).

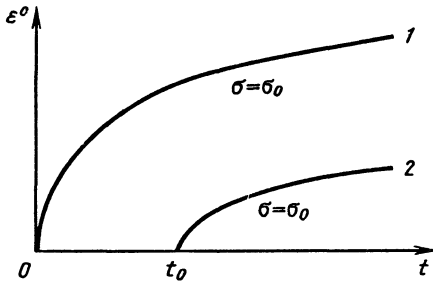


Рис. 2.6.6. Неинвариантные кривые ползучести

Приведенные уравнения являются некоторыми элементами, из которых можно собирать уравнения деформирования очень многих материалов. Методика расчета по результатам испытаний констант и функций, входящих в записанные уравнения, изложена в работе [42].

Рассмотренные уравнения описывают только первую и вторую стадии ползучести. Однако они могут быть распространены на третью стадию, если принять принцип накопления повреждений.

## Глава 2.7

### ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ НА СЛУЧАЙ НЕОДНООСНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

#### 2.7.1. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИЙ С ИЗОТРОПНЫМ УПРОЧНЕНИЕМ

Напряженное состояние элементов конструкций, как правило, является неоднородным (плоским или пространственным). Число экспериментальных исследований ползучести в условиях сложного напряженного состояния сравнительно невелико, и эти исследования относятся почти целиком к плоскому напряженному состоянию (испытания тонкостенных трубчатых

образцов, нагруженных продольной силой, крутящим моментом и внутренним давлением).

В то же время способы обобщения теорий ползучести на случай неоднородного напряженного состояния отличаются многообразием возможностей, а принимаемые при этом гипотезы нуждаются в надежном экспериментальном обосновании. Поэтому ограничимся рассмотрением лишь наиболее простых обобщений, базирующихся на использовании ряда гипотез, проверенных экспериментально на конкретных классах материалов. К ним относят:

1. В условиях ползучести материал считают несжимаемым, т.е.

$$\varepsilon_x^c + \varepsilon_y^c + \varepsilon_z^c = 0; \quad \xi_x^c + \xi_y^c + \xi_z^c = 0. \quad (2.7.1)$$

Эта гипотеза с высокой точностью выполняется, например, для непористых металлических материалов. Соотношение (2.7.1) означает, что тензор деформаций ползучести и тензор скоростей являются девиаторами. Поэтому в соотношениях между деформациями ползучести и напряжениями для таких материалов не учитывают первый инвариант тензора напряжений.

2. Третьи инварианты тензоров напряжений и деформаций ползучести не оказывают существенного влияния на процесс деформирования. Таким образом, из всех инвариантов тензоров в простейших вариантах считают существенными только вторые инварианты тензоров напряжений и приращений деформаций ползучести, которые пропорциональны квадратам эквивалентного напряжения (интенсивности напряжений) (2.2.12) и эквивалентному приращению деформации (интенсивность приращений деформаций) ползучести (2.2.15).

3. Для теорий ползучести деформационного типа (когда фиксируется связь между напряжениями и деформациями ползучести) тензор деформаций ползучести считают подобным девиатору напряжений.

Для теорий ползучести типа течения (когда устанавливают связь между напряжениями и скоростями деформаций ползучести) тензор скоростей деформаций ползучести считают подобным девиатору напряжений.

Таким образом, теории деформационного типа вследствие подобия и ранее введенных гипотез сводятся к соотношениям вида

$$\varepsilon_{ij}^c = g_1(\sigma_e, \varepsilon_e^c, t, T) s_{ij}, \quad (2.7.2)$$

а теории, базирующиеся на подобии  $\xi_{ij}^c \sim s_{ij}$ , описываются выражениями вида

$$\xi_{ij}^c = g_2(\sigma_e, q, t, T) s_{ij}, \quad (2.7.3)$$

где  $q$  - параметр Удквиста (2.2.9).

В равенствах (2.7.2), (2.7.3)  $g_1$  и  $g_2$  - скалярные функции четырех переменных.

Принятие гипотезы 3 означает отказ от учета анизотропии материала, накапливающейся

в процессе ползучести вследствие направленного деформирования. Такого рода анизотропия может быть существенной лишь в тех случаях, когда главные оси тензора напряжений претерпевают значительные повороты во времени. В большинстве же практических задач главные оси тензора напряжений остаются неподвижными или изменяют свои направления незначительно, так что использование гипотезы 3 оказывается оправданным.

С помощью определяющих соотношений вида (2.7.2) теория старения (2.6.1) обобщается на случай не одноосного напряженного состояния следующим образом:

$$\varepsilon_{ij}^c = g_3(\sigma_e, t, T) s_{ij}. \quad (2.7.4)$$

Функция  $g_3(\sigma_e, t, T)$  в (2.7.4) может быть выражена через функцию  $\Phi(\sigma, t, T)$ , входящую в (2.6.1):

$$g_3(\sigma_e, t, T) = \frac{3\Phi(\sigma_e, t, T)}{2\sigma_e}. \quad (2.7.5)$$

Таким образом, для записи теории старения в виде (2.7.4) в условиях не одноосного напряженного состояния не требуется дополнительной информации по сравнению с одноосным напряженным состоянием.

Теория течения (2.6.4) распространяется на не одноосное напряженное состояние с помощью соотношения (2.7.3):

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = g_4(\sigma_e, t, T) s_{ij}. \quad (2.7.6)$$

Функция  $g_4(\sigma_e, t, T)$  связана с  $f$  из (2.6.4) соотношением, аналогичным (2.7.5).

Наиболее простое обобщение теории упрочнения (2.6.11) для не одноосного напряженного состояния можно записать в виде

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = g_5(\sigma_e, q, T) s_{ij}, \quad (2.7.7)$$

где аналогично (2.7.5) имеем

$$g_5(\sigma_e, q, T) = \frac{3\varphi(\sigma_e, q, T)}{2\sigma_e}. \quad (2.7.8)$$

Используя для функции  $\varphi$  различные частные представления вида (2.6.12), (2.6.13) или (2.6.18), можно получить соответствующие варианты теории упрочнения.

Рассмотрим кинетические уравнения ползучести, в которых учитывается параметр, характеризующий поврежденность  $\omega$  (см. п. 2.6.2). Если считать, что и в общем случае  $\omega$  представляет собой скалярную величину, то, например, вместо (2.6.38) будем иметь систему

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = g_6(q, \sigma_e, \omega, T) s_{ij}; \quad \dot{\omega} = \psi(\sigma_e, \omega, T), \quad (2.7.9)$$

где

$$g_6(q, \sigma_e, \omega, T) = \frac{3f(q, \sigma_e, \omega, T)}{2\sigma_e}.$$

Отсюда для частного случая (2.6.39) получаем

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{3}{2} A \frac{(\sigma_e)^{n-1}}{(1-\omega)^n} s_{ij}; \quad \dot{\omega} = B \left( \frac{\sigma_e}{1-\omega} \right)^m. \quad (2.7.10)$$

Рассмотренные варианты теорий ползучести для не одноосного напряженного состояния не используют дополнительную информацию по сравнению с одноосным напряженным состоянием. С одной стороны, этот факт является положительным, так как не нужно проводить дополнительные испытания. С другой стороны, существуют эффекты, связанные с объемностью напряженного состояния, не укладывающиеся в рамки принятых гипотез.

Рассмотрим некоторые из этих эффектов.

Известны материалы, для которых среднее нормальное напряжение оказывает влияние на процесс развития деформаций ползучести (см., например, [35]). То же имеет место для пористых материалов. В таком случае инвариант  $\sigma_0$  нужно включить в число аргументов функций  $g_i$ . Вид этих функций необходимо устанавливать с помощью специально проведенных экспериментов в условиях не одноосного напряженного состояния.

Аналогичная ситуация может возникнуть относительно третьего инварианта тензора напряжений (см., например, [36]). Если его влияние существенно, то он тоже должен стать аргументом функций  $g_i$ . В случае введения соответствующих инвариантов в число аргументов функций  $g_i$  их вид определяется на основе экспериментов при не одноосном напряженном состоянии.

В случае, когда рассматриваются процессы, связанные с разрушением при сложном напряженном состоянии, в качестве  $\sigma_e$  во второе соотношение (2.7.9) и (2.7.10) могут входить не только интенсивность напряжений, но и другие инварианты.

Распространение обобщенного метода разделения деформации ползучести (см. п. 2.6.4) на случай не одноосного напряженного состояния связано с учетом анизотропии материала, появляющейся в процессе ползучести.

### 2.7.2. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ С АНИЗОТРОПНЫМ УПРОЧНЕНИЕМ

Соотношения, введенные в (2.6.3) для одноосного напряженного состояния, могут быть обобщены на случай сложного напряженного состояния, когда необходим учет приобретаемой в ходе деформирования анизотропии характеристик ползучести.

В простейшем случае это обобщение может быть осуществлено введением потенциала ползучести, в который входит внутренний параметр состояния, характеризующийся тензором  $\rho_{ij}$  с компонентами, имеющими размерность напряжений. Рассмотрим случай, когда первый инвариант тензора  $\rho_{ij}$  равен нулю. Тогда соотношение теории ползучести можно представить в виде

$$\xi_{ij}^c = \frac{3}{2} \frac{\xi_e^c}{\varphi^{1/2}} (s_{ij} - \rho_{ij}), \quad (2.7.11)$$

где

$$\varphi = \frac{3}{2} (s_{ij} - \rho_{ij})(s_{ij} - \rho_{ij}) \equiv \left[ \xi_e^c / B(T) \right]^2.$$

Для определения величин  $\rho_{ij}$  аналогично (2.6.44) для случая сложного напряженного состояния имеем систему кинетических уравнений

$$d\rho_{ij} = \frac{2}{3} A(\sigma_e, T) d\xi_{ij}^c - F(\sigma_e, \chi_e, T) \frac{\rho_{ij}}{\chi_e} dt, \quad (2.7.12)$$

где  $\chi_e = \sqrt{\frac{3}{2} \rho_{ij} \rho_{ij}}$ .

Функция  $F(\sigma_e, \chi_e, T)$  может быть с учетом (2.6.45) и (2.6.50) представлена в одном из приведенных ниже вариантов:

$$F(\sigma_e, \chi_e, T) = D(T) \sigma_e^n, \quad (2.7.13)$$

или

$$F(\sigma_e, \chi_e, T) = D_1(T) \chi_e^n. \quad (2.7.14)$$

Наряду с использованной выше степенной функцией возможны другие аппроксимации. Определенные указания по данному вопросу, а также сопоставление теории с экспериментом для сложного напряженного состояния даны в работах [34, 32].

### 2.7.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ РАЗРУШЕНИЯ

Из простейшей нелинейной системы определяющих уравнений (2.6.39) в случае, когда задана зависимость напряжения от времени, следует

$$1 - (1 - \omega)^{m+1} = (m+1) B \int_0^t \sigma^m dt. \quad (2.7.15)$$

Из соотношения (2.7.15) для постоянного  $\sigma_0$  получим время разрушения  $t_p$  образца, используя условие  $\omega=1$  (при  $\omega=1$  скорость деформации становится неограниченной и образец теряет несущую способность):

$$t_p = (1+m)^{-1} B^{-1} \sigma_0^{-m}. \quad (2.7.16)$$

Зависимость  $t_p$  от  $\sigma_0$ , построенная графически, представляет собой кривую длительной прочнос-

ти. В двойных логарифмических координатах выражение (2.7.16) дает прямую линию, что часто совпадает с экспериментальными данными.

Используя (2.7.15), можно из первого уравнения (2.6.39) найти деформацию в момент разрушения

$$\epsilon_p^c = \frac{A \sigma_0^{n-m}}{B} \int_0^1 \frac{d\omega}{(1-\omega)^{n-m}}. \quad (2.7.17)$$

Очевидно, что при  $n-m \geq 1$  деформация  $\epsilon^c \rightarrow \infty$  в момент разрушения и имеет место чисто вязкое разрушение. При  $n-m < 1$ ,  $\epsilon_p^c < \infty$  и имеем квазихрупкое разрушение.

При ступенчато меняющемся напряжении, когда  $\sigma = \sigma_i$  для произвольного промежутка  $i$  на основе (2.6.39), имеем

$$(1 - \omega_{i-1})^{m+1} - (1 - \omega_i)^{m+1} = (m+1) B \sigma_i^m \tau_i. \quad (2.7.18)$$

Если учесть, что  $(m+1) B \sigma_i^m = \tau_{ip}^{-1}$ , где  $\tau_{ip}$  - время разрушения при одном напряжении  $\sigma_i$ , то из (2.7.18), суммируя по всем ступеням нагружения, имеем

$$\sum_{i=1}^n \tau_i / \tau_{ip} = 1. \quad (2.7.19)$$

Полученное соотношение называют правилом суммирования парциальных времен. Соотношение (2.7.19) получено в простейшем случае, когда зависимость (2.6.38) представляют собой произведения функций от независимых переменных (как это и имеет место в (2.6.39)). В общем случае будет отклонение от линейного правила (2.7.19). Кроме того, существуют методы введения двух параметров поврежденности, тогда также будет отклонение от правила линейного суммирования повреждений.

В случае сложного напряженного состояния обобщения в виде (2.7.10) приводят к соотношениям, аналогичным (2.7.16) и (2.7.19), только вместо напряжения  $\sigma_0$  входит эквивалентное напряжение. Если значение эквивалентного напряжения не меняется в процессе деформирования, то время разрушения не зависит от возможных изменений вида напряженного состояния. Так, если пластинка растягивается в одном направлении, затем направление растяжения меняется (при сохранении его интенсивности), то общее время разрушения не будет зависеть от парциальных времен нагружения.

В то же время эксперименты показывают, что общее время разрушения в таких опытах существенно зависит от времени выдержки в первоначальном направлении. Для учета этого и других подобных эффектов в теории длительной прочности при сложном напряженном состоянии вводят вместо скалярной векторную или тензорную характеристику поврежденности [34].

## Глава 2.8

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ И  
УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ2.8.1. НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ И УСТАНОВИВШАЯСЯ  
ПОЛЗУЧЕСТЬ

Если рассматривать общий случай деформирования твердых тел из материала, подчиняющегося соотношениям, в которых масштаб времени входит существенным образом, то их напряженное состояние также является переменным во времени. Исключением являются статически определимые задачи, когда внешние нагрузки во времени не меняются, а деформации ползучести настолько малы, что изменением геометрии тел в процессе деформирования можно пренебречь. Однако даже в случае статически неопределимых задач, когда внешние нагрузки остаются постоянными, в рассматриваемой конструкции могут возникнуть напряжения, которые практически можно считать независимыми от времени. Такое состояние называют установившейся ползучестью. В условиях установившейся ползучести производные по времени от напряжений равны нулю.

Неустановившуюся ползучесть необходимо учитывать, когда изменением во времени напряженного состояния пренебречь нельзя. К таким задачам могут быть отнесены и случаи, когда внешние нагрузки остаются постоянными. Так, например, к ним относят проблемы, связанные с учетом геометрической нелинейности. Наиболее характерным примером является задача о прощелкивании фермы Мизеса (рис. 2.8.1). Для постоянной во времени силы  $F$  имеем соотношения

$$\xi = l/l_0; F = 2A\sigma \sin \alpha; l \cos \alpha = a, \quad (2.8.1)$$

где  $l_0$  - начальная длина стержней;  $A$  - начальная площадь их поперечного сечения.

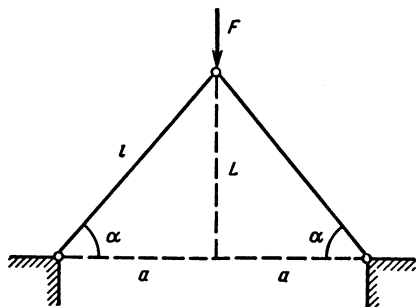


Рис. 2.8.1. Ферма Мизеса

Для связи напряжений и деформаций используем соотношение (2.6.10), полагая

$f_2(\sigma, T) = B\sigma^n$  и пренебрегая скоростью упругой деформации. Тогда для угла  $\alpha$  получим дифференциальное уравнение

$$\sin^{n+1} \alpha \cos^{n-1} \alpha \dot{\alpha} = -B \left( \frac{Fa}{2Al_0} \right)^n. \quad (2.8.2)$$

Решение уравнения (2.8.2) очень просто записывается, когда  $\alpha$  и  $\alpha_0$  малы. Тогда имеем

$$-\alpha^{n+2} + \alpha_0^{n+2} = (n+2)B \left( \frac{F}{2A} \right)^n t. \quad (2.8.3)$$

Очевидно, что никакого установившегося состояния до момента, когда ферма пройдет горизонтальное положение ( $\alpha=0$ ), не наступает.

Рассмотренный пример показывает, что установившейся ползучести может не быть даже в простейших задачах при постоянных внешних силах, если задачи геометрически нелинейны.

В то же время для широкого класса задач при постоянных внешних силах ползучесть можно считать установившейся. В этом случае деформации ползучести должны быть существенно больше мгновенных деформаций. Исключением являются задачи, в которых используются для мгновенных и зависящих от времени деформаций одинаковые функции по напряжениям. Тогда во многих задачах при постоянных во времени внешних нагрузках поля напряжений, возникшие при мгновенном нагружении, остаются неизменными во времени (хотя деформации ползучести накапливаются во времени). Это относится как к теории линейной вязкоупругости (наследственности), так и к соотношениям типа (2.6.19), если в них выполняется условие  $\varphi_1 = \partial \varphi_2 / \partial \sigma$ .

Решения задач установившейся ползучести, кроме самостоятельного значения, могут быть очень полезны и при анализе неустановившейся ползучести, когда используют приближенные методы расчета типа вариационных [27].

При решении задач установившейся ползучести, когда не учитывают мгновенные деформации, уравнения совместности должны удовлетворять деформации ползучести.

В качестве примера решения задачи установившейся ползучести рассмотрим чистый изгиб стержня. При чистом изгибе стержня сечения его остаются плоскими. Тогда деформации по сечению являются линейной функцией расстояния  $u$  от нейтральной оси. Поскольку в случае установившейся ползучести упругими деформациями можно пренебречь, то

$$\varepsilon^c = u \varkappa, \quad (2.8.4)$$

где  $\varkappa$  - кривизна оси стержня, образовавшаяся вследствие деформирования. Если кривая ползучести удовлетворительно описывается степенной функцией (2.5.11), (2.5.4), то для установившейся

ся ползучести, когда напряжения не зависят от времени, имеем

$$\varepsilon^c = (\sigma/\sigma_*)^n \Omega \quad (2.8.5)$$

Из (2.8.4) и (2.8.5) получаем

$$\sigma = \sigma_* \left( \frac{\varepsilon}{\Omega} \right)^{\frac{1}{n}} |y|^{\frac{1}{n}-1} y. \quad (2.8.6)$$

Подставляя это выражение в формулу для изгибающего момента  $M = \int \sigma y dA$ , устанавливаем

$$M = [M/\sigma_* J_{nx}]^n \Omega, \quad (2.8.7)$$

где

$$J_{nx} = \int_A |y|^{\frac{1}{n}+1} dA - \quad (2.8.8)$$

обобщенный момент инерции поперечного сечения.

Подставляя (2.8.7) в (2.8.6), выводим формулу для нормального напряжения

$$\sigma = M |y|^{\frac{1}{n}-1} y / J_{nx}. \quad (2.8.9)$$

Для стержня прямоугольного поперечного сечения

$$J_n = \frac{n}{2n+1} b h^{\frac{2n+1}{n}}. \quad (2.8.10)$$

Аналогично решение может быть найдено и для других зависимостей деформаций ползучести от напряжения.

### 2.8.2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Система основных уравнений, необходимых для построения численных и аналитических решений задач ползучести, кроме уравнений состояния (см. п. 2.7.1), включает также уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0, \quad (2.8.11)$$

где  $\sigma_{ij}$  - компоненты тензора напряжений;  $X_i$  - внешние объемные силы ( $j$  - индекс суммирования), и уравнения Стокса

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.8.12)$$

где  $\xi_{ij}$  - скорости деформаций;  $v_i$  - скорости перемещений точек тела.

Определяющие уравнения (2.7.7) и (2.7.8) запишем в виде

$$\xi_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\xi_e}{\sigma_e} s_{ij}. \quad (2.8.13)$$

Согласно определениям, приведенным в п.2.8.1, деформации ползучести для задач уста-

новившейся ползучести совпадают с полными деформациями.

Связь между инвариантами  $\sigma_e$  и  $\xi_e$  наиболее распространена в виде

$$\xi_e = k \sigma_e^n, \quad (2.8.14)$$

где  $k$  и  $n$  - постоянные материала при определенной температуре.

При неравномерном нагреве необходимо учитывать зависимость  $k$  и  $n$  от температуры.

Совместно с граничными условиями

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} v_j &= X_{vi} \text{ на } S_1; \\ v_i &= v_i^* \text{ на } S_2, \end{aligned} \quad (2.8.15)$$

где  $v_j$  - направляющие косинусы нормали к элементу поверхности;  $X_{vi}$  - поверхностные силы;  $v_i^*$  - заданные скорости;  $S_1$  и  $S_2$  - части поверхности тела  $S$ ; указанная система уравнений (2.8.11) - (2.8.14) является замкнутой.

В большинстве случаев решение задач установившейся ползучести можно получить только численными методами. Основой для разработки эффективных приближенных методов, позволяющих получить решение, минуя интегрирование дифференциальных уравнений, является вариационный подход.

Для нелинейно-вязкого тела связь между скоростями деформаций и напряжениями можно представить, введя потенциальную функцию  $\Lambda$  [27]:

$$\xi_{ij} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.8.16)$$

или

$$S_{ij} = \frac{\partial L}{\partial \xi_{ij}}, \quad (2.8.17)$$

где  $\Lambda = \int_0^{\xi_e} \xi_e d\sigma_e$  - дополнительное рассеяние, а

$$L = \int_0^{\xi_e} \sigma_e d\xi_e - \text{рассеяние.}$$

Для нелинейно-вязкого тела функции  $\Lambda$  и  $L$  не зависят от истории нагружения и поэтому определяются напряжениями и скоростями деформаций в рассматриваемый момент времени.

Для консервативных внешних сил имеем следующее условие минимума полной мощности [27]:

$$\delta \Pi = 0, \quad (2.8.18)$$

$$\text{где } \Pi = \int_V L dV - \int_V X_i v_i dV - \int_{S_1} X_{vi} v_i dS;$$

$V$  - объем тела.



При использовании в расчетах условия (2.8.18) приходим к методу перемещений, в котором варьируются скорости точек тела.

Метод сил, в котором варьируются напряжения, следует из принципа минимума дополнительного рассеяния [27]:

$$\delta \tilde{\Lambda} = 0, \quad (2.8.19)$$

$$\text{где } \tilde{\Lambda} = \int_V \Lambda dV.$$

Условие стационарности (2.8.19) позволяет изучить некоторые особенности поведения системы. Например, на его основе получается выражение для интеграла Мора в условиях ползучести, широко используемого для определения скоростей перемещений отдельных точек стержней, в частности, скоростей прогибов.

В условиях ползучести могут быть сформулированы смешанные вариационные принципы аналогично тому, как это сделано в теории упругости. Смешанные вариационные принципы, в которых независимо варьируются скорости перемещений и напряжения, составляют основу для разработки различных вариантов МКЭ [33].

Используем приближенный метод решения в напряжениях задач установившейся ползучести [27]. В соответствии с этим методом решение вариационного уравнения (2.8.19) отыскивается в форме

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \beta (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0), \quad (2.8.20)$$

где  $\sigma_{ij}$  - искомые статически возможные напряжения;  $\sigma_{ij}^0$  - напряжения в предельном случае, когда  $n \rightarrow \infty$ ;  $\beta = \beta(n)$  - параметр, зависящий от коэффициента  $n$  в уравнении состояния (2.8.14);  $\sigma_{ij}$  - напряжения для случая  $n=1$ .

Значение множителя  $\beta$  определяется из условия

$$\frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial \beta} = 0. \quad (2.8.21)$$

При  $\beta=1$  распределение напряжений совпадает с задачей для линейно упругой среды, а при  $\beta=0$  - с задачей предельного состояния.

### 2.8.3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Полная система уравнений для решения задач неустановившейся ползучести включает: уравнения равновесия (2.8.11), уравнения Стокса (2.8.12), а также определяющие уравнения, устанавливающие связь между напряжениями, их производными по времени и скоростями деформаций, например, в виде [32]

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2G} (\dot{\sigma}_{ij} - \delta_{ij} \dot{\sigma}_0) + \frac{3}{2} \frac{\xi_e^c}{\sigma_e} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0), \quad (2.8.22)$$

где  $G$  - модуль упругости второго рода при определенной температуре;  $\xi_e^c$  - эквивалентная скорость деформаций ползучести; точка означает производную по времени.

Здесь предполагается, что полные скорости деформаций состоят из упругих и вязких составляющих.

Зависимость эквивалентной скорости деформаций ползучести от эквивалентного напряжения, температуры, параметра Улквишта и других структурных параметров определяется уравнением состояния и соответствующими кинетическими уравнениями.

Указанная система уравнений решается совместно с граничными условиями, например: на всей поверхности тела заданы внешние силы (основная задача); на всей поверхности тела заданы постоянные смещения (релаксационная задача); на части поверхности тела заданы силы, а на другой ее части - постоянные во времени смещения (смешанная задача).

В большинстве случаев для решения задач неустановившейся ползучести необходимо применять приближенные методы.

Для упругонелинейно-вязкого тела принцип минимума дополнительной мощности имеет вид

$$\delta \int_V \left( \Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) dV = 0, \quad (2.8.23)$$

где  $\Lambda = \int_0^{\sigma_e} \xi_e^c d\sigma_e$  - дополнительное рассеяние - функционал, допускающий графическую интерпретацию (п. 2.8.2);  $\Pi = \sigma_0^2 / (2K) + \sigma_e^2 / (6G)$  - упругий потенциал;  $K$  - объемный модуль упругости [32].

Приближенное решение основной и смешанной задач ищется в виде

$$\sigma_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \tau(t) (\sigma_{ij}'' - \dot{\sigma}_{ij}'), \quad (2.8.24)$$

где  $\dot{\sigma}_{ij}$  - напряжения в начальный момент времени в пределах упругости;  $\sigma_{ij}''$  - напряжения, отвечающие состоянию установившейся ползучести;  $\tau(t)$  - функция времени, определяемая условием (2.8.23).

При постоянных нагрузках картина неустановившейся ползучести сводится к монотонному изменению напряжений от упругого состояния ( $t=0$ ), когда  $\tau=0$ , к установившемуся ( $t \rightarrow \infty$ ), когда  $\tau=1$ .

Для приближенного решения релаксационных задач предлагается [6] поле напряжений задавать в виде

$$\sigma_{ij} = v(t)\sigma_{ij}, \quad (2.8.25)$$

где  $v(t)$  - функция времени, определяемая условием (2.8.23), причем  $v(0)=1$  и  $v(\infty)=0$ .

Существуют другие приближенные методы решения задач неустановившейся ползучести [32], однако наиболее общим является метод конечных элементов (МКЭ) [3, 19], позволяющий численно поэтапно проследить историю изменения во времени напряжений и деформаций во множестве конечных элементов. Преимуществом МКЭ является возможность исследования тел сложной формы с учетом реальных граничных условий на основе уравнения состояния, включающего в себя необходимые структурные параметры.

Особенности МКЭ в физически нелинейных задачах рассмотрены в гл. 2.3. Поскольку в неустановившейся ползучести изменение деформаций состоит из приращений упругих деформаций и приращений деформаций ползучести, то наиболее оправданным является использование в каждый момент времени метода начальных деформаций, определяемых напряжениями в каждом конечном элементе. В результате решения задачи теории упругости с начальными деформациями определяют напряженно-деформированное состояние в конце рассматриваемого интервала времени, после чего осуществляется следующий шаг по времени.

При значительных перемещениях мгновенными (упругими и пластическими) деформациями по сравнению с деформациями ползучести в уравнениях (2.8.22) можно пренебречь. В этом случае состояние неустановившейся ползучести реализуется вследствие значительных геометрических изменений деформируемого тела, что в свою очередь приводит к зависимости скоростей перемещений, скоростей деформаций и напряжений от времени.

Таким образом, при больших перемещениях необходимо учитывать изменение координат точек тела, а граничные условия удовлетворять на текущей поверхности тела. В отношении простых частных случаях решение может быть получено в аналитическом виде. Для решения геометрически нелинейных задач необходимо использовать численные методы, например, МКЭ [33].

Для сложных уравнений состояния развиты вариационные методы, позволяющие учитывать параметры упрочнения, разупрочнения и смешанные вариационные методы [41].

#### 2.8.4. ОБОБЩЕННЫЕ МОДЕЛИ В РАСЧЕТАХ НЕСТАЦИОНАРНО НАГРУЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Для многих ответственных элементов машин (диафрагмы паровых турбин, детали газо-

турбинных двигателей, оболочки, резьбовые соединения и др.) одним из критериев работоспособности являются характерные перемещения или деформации в опасной области (точке), вызванные ползучестью. При нестационарных внешних воздействиях краевая задача решается с учетом истории нагружения одним из методов, изложенных выше. Такой путь очень трудоемок и не всегда реально осуществим. Расчет существенно упрощается, если иметь непосредственные связи между внешними воздействиями и контролируемыми перемещениями (деформациями).

Определяющие уравнения, связывающие внешние нагрузки (обобщенные силы) и температуру с характерными (обобщенными) перемещениями или деформациями в элементе конструкций, называют обобщенными моделями.

Рассмотрим случай, когда свойства материала и упругие характеристики конструкции как целого не изменяются в процессе деформирования, элементы конструкции не теряют устойчивости и деформируются в пределах первой и второй стадий ползучести, а внешние нагрузки  $Q(x, y, z, t)$  и температурное поле  $T(x, y, z, t)$  являются однопараметрическими, т. е. описываются соотношениями вида

$$Q(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z)Q(t); \\ T(x, y, z, t) = \xi(x, y, z)T(t).$$

Здесь  $\varphi(x, y, z)$ ,  $\xi(x, y, z)$  - фиксированные для данного объекта функции пространственных координат, а функции времени  $Q(t)$  и  $T(t)$  являются единственными нестационарными факторами во внешнем воздействии, их называют соответственно обобщенными нагрузкой и температурой.

Обобщенные модели конструкций [45] можно строить аналогично тому, как это сделано в п. 2.6.4 при формулировании определяющих соотношений для материала. При этом элемент конструкции или всю конструкцию рассматривают как единое целое и устанавливают связь, например, между кривизной балки  $\alpha$  и изгибающим моментом  $M_n$ , углом закручивания вала  $\varphi$  и крутящим моментом  $M_{кр}$ , перемещением конца лопатки  $\delta$  и торцов резьбового соединения  $\Delta l$  соответственно с угловой скоростью  $\omega$  турбинного диска и с растягивающей нагрузкой  $Q$  и т.д. (рис. 2.8.2).

Обобщенные модели для рассмотренных конструкций описывают соотношениями, по структуре аналогичными уравнениям (2.6.1) - (2.6.11), поскольку в наблюдаемых обобщенных перемещениях  $u(t)$  при испытании конструкции могут быть выделены соответствующие компоненты  $u_{j1}(t)$ ,  $u_{j2}$  (далее время  $t$  для краткости записи опущено):

$$u_{i1} = \lambda_i [a\psi(Q, T) - u_{i1}];$$

$$u_{i2} = \begin{cases} \lambda [b\psi(Q, T) - u_{i2}], & b\psi(Q, T) > u_{i2}; \\ 0, & b\psi(Q, T) \leq u_{i2}; \end{cases}$$

$$\dot{u}_2 = f(Q, T),$$
(2.8.26)

где  $u_{i1}$  - возвращающаяся (вязкоупругая) часть общего перемещения  $u$ , наблюдаемая при разгрузке конструкции по  $Q$  или  $T$ ;  $u_{i2}$  - невозвращающаяся (пластическая) часть  $u$ ;  $u_2$  - часть, соответствующая установившемуся течению;  $\lambda$ ,  $\lambda_i$  - постоянные.

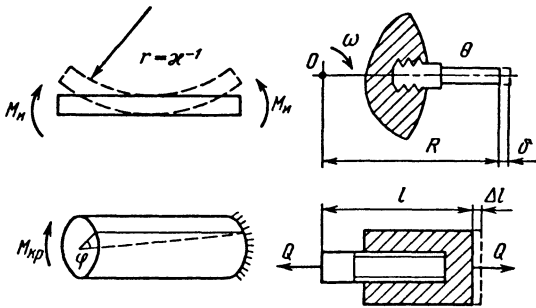


Рис. 2.8.2. Примеры введения обобщенных характеристик

Для конкретизации в (2.8.26) функций  $\psi(Q, T)$  и  $f(Q, T)$  необходимо испытать конструкцию в режиме нагрузка - разгрузка по  $Q$  для серии постоянных значений  $Q$  и  $T$  (рис. 2.8.3). С целью сокращения экспериментальных затрат естественно воспользоваться методом планирования полного факторного эксперимента, схема которого показана на рис. 2.8.3, а. Для режимов, соответствующих точкам 1-4, имеет место одна реализация, а точке 0 - четыре, используемые в дальнейшем для вычисления дисперсии воспроизводимости. Методика расчета по результатам испытаний констант и функций, входящих в уравнения (2.8.26), изложена в работе [44].

Область изменения  $Q$  и  $T$ , а также стратегия эксперимента зависят от решаемой задачи. Если необходимо обследовать объект в широком интервале изменения  $Q$  и  $T$ , то возможно появление экстремумов в функциях  $\psi(Q, T)$  и  $f(Q, T)$ . Для определения экстремальных точек можно использовать метод круглого восхождения Бокса-Уилсона с последующим построением интерполяционной модели для исследуемых функций. Тогда интервал варьирования  $Q$  и  $T$  на основных уровнях факторов будет соответствующей долей от области изменения  $Q$  и  $T$ .

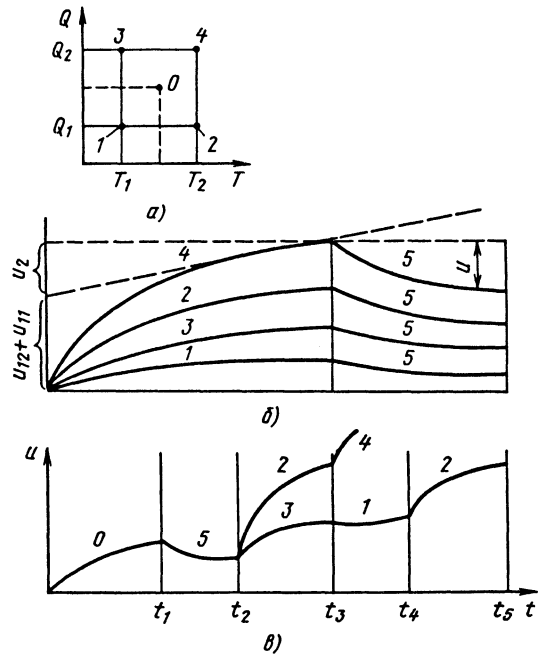


Рис. 2.8.3. Расчетная схема обобщенной характеристики

В большинстве практических задач элемент конструкции необходимо исследовать в рабочем (ограниченном) интервале нагрузок и температур. Этот интервал достаточно узок, поэтому можно полагать, что функции  $\psi(Q, T)$  и  $f(Q, T)$  гладкие, непрерывные и не имеют экстремумов. Тогда решается задача интерполяции, и интервал варьирования факторов назначается охватывающим всю область применения  $Q$  и  $T$ .

Адекватность полученных в виде (2.8.26) определяющих соотношений должна быть проверена при ступенчатом изменении  $Q$  и  $T$  (рис. 2.8.3, б), где кривая 5 соответствует обратной ползучести.

Исходные кривые ползучести могут быть получены не только экспериментально, но и расчетным путем с помощью решения соответствующей краевой задачи.

Расчетный вариант построения обобщенных моделей конструкций можно трактовать как метод вычисления обобщенных перемещений нестационарно нагруженных конструкций, согласно которому решение краевой задачи при произвольно меняющихся обобщенных нагрузках и температуре заменяется решением той же задачи при простейших режимах нагружения (см. рис. 2.8.3, в). Естественно, что такой подход существенно снижает трудоемкость расчетов.

Поскольку изложенные методы построения обобщенных моделей справедливы для конструкций любого уровня сложности, становится возможным использование соотношений (2.8.26) в качестве физической гипотезы, на основе ко-

торой можно применить многоуровневую схематизацию при расчете на ползучесть сложных конструкций. Поясним это на примере (рис. 2.8.4) расчета статически неопределимой балки [15].

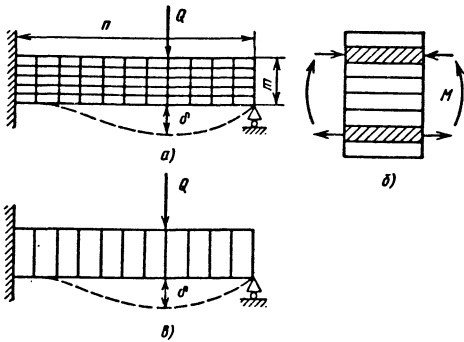


Рис. 2.8.4. К анализу изгиба балки

Если ставить задачу вычисления прогиба  $\delta$  в зависимости от внешней нагрузки  $Q$ , то при традиционном подходе балку разбивают на  $n$  продольных и  $m$  поперечных элементов (рис. 2.8.4, а) и решают задачу размерности  $n \times m$ . При использовании многоуровневой схематизации эту задачу решают в два этапа.

На первом этапе исследуют чистый изгиб балки на основе агрегирования ее из системы последовательно расположенных элементов (рис. 2.8.4, б).

В результате формируется связь вида

$$\varepsilon = A(M_{\text{и}}), \quad (2.8.27)$$

где  $\varepsilon$  - кривизна балки;  $A$  - временной оператор вида (2.8.26);  $M_{\text{и}}$  - изгибающий момент.

Далее, используя соотношение (2.8.27), балка агрегируется из элементов, расположенных вдоль продольной координаты (рис. 2.8.4, в).

В результате получаем  $\delta = B(Q)$ , где  $B$  - временной оператор вида (2.8.26).

И, наконец, статически неопределимая балка как целое может быть элементом, например, рамы. Другими словами, по предлагаемой методике расчет на каждом уровне декомпозиции, где обобщенные нагрузки и температуры однопараметрические, завершается формированием соотношений вида (2.8.26) с соответствующими  $u$  и  $Q$ ,  $T$ , которые, в свою очередь, являются исходными для расчета на следующем, более низком уровне декомпозиции конструкции. В результате численное решение задачи большой размерности заменяется серией последовательных численных решений задач значительно меньших размерностей.

Поскольку соотношения вида (2.8.26) могут быть построены по результатам как численного,

так и натурального эксперимента, исследователь вправе на любом уровне декомпозиции ввести необсчитываемый элемент. Это может значительно расширить круг решаемых задач, поскольку в ряде случаев проще сделать эксперимент (например, для ограниченного числа типовых размеров резьбовых соединений [14]), чем разрабатывать программное обеспечение для численного счета. Кроме того, и надежность экспериментальных результатов будет выше, чем расчетных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
2. Биргер И. А. Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 51-73.
3. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. М.: Мир, 1986. 360 с.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
5. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 478 с.
6. Гольденблат И. И., Копнов В. А. Критерии прочности и пластичности конструктивных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 191 с.
7. Гохфельд Д. А. Несущая способность конструкций в условиях теплосмен. М.: Машиностроение, 1970. 259 с.
8. Гохфельд Д. А., Садаков О. С. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях. М.: Машиностроение, 1984. 256 с.
9. Гохфельд Д. А., Чернявский О. Ф. Несущая способность конструкций при повторных нагружениях. М.: Машиностроение, 1979. 263 с.
10. Джонсон У., Меллор П. Теория пластичности для инженеров. М.: Машиностроение, 1979. 567 с.
11. Джонсон У., Соусрби Р., Венгер Р. Д. Метод линий скольжения // Теория пластических деформаций металлов. М.: Машиностроение, 1983. С. 121-211.
12. Друянов Б. А. Прикладная теория пластичности пористых тел. М.: Машиностроение, 1989. 165 с.
13. Друянов Б. А., Непершин Р. Н. Теория технологической пластичности. М.: Машиностроение, 1990. 272 с.
14. Еремин Ю. А. Ползучесть растягиваемых образцов и резьбовых соединений из стали 45 при ступенчатом изменении нагрузки и температуры // Машиноведение. 1986. N1. С. 71-77.
15. Еремин Ю. А., Кайдалова Л. В., Радченко В. П. Исследование ползучести балок на

- основе аналогии структуры уравнения состояния материалов и элементов конструкций // *Машиноведение*. 1983. N 2. С. 67-74.
16. **Ерхов М. И.** Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978. 352 с.
17. **Закономерности** ползучести и длительной прочности металлов: Справочник // Под ред. С. А. Шестерикова. М.: Машиностроение, 1983. 100 с.
18. **Зарубин В. С.** Прикладные задачи термомпрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
19. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
20. **Зубчанинов В. Г.** Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1990. 368 с.
21. **Ивлев Д. Д.** Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
22. **Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.** Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.
23. **Ильюшин А. А.** Механика сплошной среды. М.: Изд. МГУ, 1971. 247 с.
24. **Ильюшин А. А.** Пластичность. М.: ГИТТЛ, 1948. 376 с.
25. **Ильюшин А. А.** Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд. АН СССР, 1963. 271 с.
26. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
27. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 454 с.
28. **Клюшников В. Д.** Математическая теория пластичности. М.: Изд. МГУ, 1979. 207 с.
29. **Крауч С., Старфилд А.** Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. 328 с.
30. **Локощенко А. М., Мякотин Е. А., Шестериков С. А.** Ползучесть и длительная прочность стали X18N10T в условиях сложного напряженного состояния // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1979. N 4. С. 87-94.
31. **Малинин Н. Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 399 с.
32. **Малинин Н. Н.** Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1981. 220 с.
33. **Малинин Н. Н., Романов К. И.** Расчет процессов вязкого деформирования на основе смешанного вариационного принципа // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*, 1982. N 5. С. 84-90.
34. **Малинин Н. Н., Хажинский Г. М.** К построению теории ползучести с анизотропным упрочнением // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1969. N 3. С. 148-152.
35. **Малинин Н. Н., Хажинский Г. М.** Влияние шарового тензора напряжений на ползучесть металлов // *Механика деформируемых тел и конструкций*. М.: Машиностроение, 1975. С. 280-285.
36. **Можаровская Т. Н.** Влияние третьего инварианта девиатора напряжений на длительную прочность материала в условиях плоского напряженного состояния // *Проблемы прочности*. 1982. N 6. С. 53-55.
37. **Новожилов В. В., Калашевич Ю. И.** Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1990. 223 с.
38. **Партон В. З., Перлин П. И.** Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
39. **Петросян Г. Л.** Пластическое деформирование порошковых материалов. М.: Металлургия, 1988. 225 с.
40. **Писаренко Г. С., Лебедев А. А.** Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев: Наукова думка, 1976. 415 с.
41. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
42. **Радченко В. П., Самарин Ю. П., Хренов С. М.** Определяющие уравнения для материалов при наличии трех стадий ползучести // *Доклады АН СССР*. 1986. N 3. С. 571-574.
43. **Ржаницын А. Р.** Предельное равновесие пластинок и оболочек. М.: Наука, 1983. 288 с.
44. **Самарин Ю. П.** Построение экспоненциальных аппроксимаций для кривых ползучести методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых // *Проблемы прочности*. 1974. N 9. С. 24-29.
45. **Самарин Ю. П., Еремин Ю. А.** Метод исследования ползучести конструкций // *Проблемы прочности*. 1985. N 4. С. 40-45.
46. **Соколовский В. В.** Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
47. **Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф.** Энергетический вариант теории ползучести. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР. 1986. 96 с.
48. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956. 407 с.
49. **Чирас А. А.** Методы линейного программирования при расчете упругопластических систем. М.: Стройиздаг, 1969. 230 с.
50. **Шевелев В. В., Яковлев С. П.** Анизотропия листовых материалов и ее влияние на вытяжку. М.: Машиностроение, 1972. 120 с.
51. **Шестериков С. А., Юмашева М. А.** Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1984. N 1. С. 66-91.
52. **Штерн М. Б.** К теории пластичности пористых тел и уплотняемых порошков // *Реологические модели и процессы деформирования пористых, порошковых и композиционных материалов*. Киев.: Наукова думка, 1985. С. 6-23.
53. **Штерн М. Б., Сердюк Г. Г., Максименко Л. А.** Феноменологические теории прессования порошков. Киев.: Наукова думка, 1982. 140 с.

## Раздел 3

# ПРОЧНОСТЬ И РАЗРУШЕНИЕ

### Глава 3.1

## СОПРОТИВЛЕНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЮ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

### 3.1.1. ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И МЕТОДЫ ИХ АППРОКСИМАЦИИ

Современные расчеты на прочность и анализ процессов разрушения деталей машин и элементов конструкций базируются [3, 10, 11, 14]:

на исходной информации и закономерностях деформирования применяемых конструкционных материалов;

на решениях краевых задач о напряженно-деформированных состояниях в наиболее нагруженных зонах;

на критериях накопления повреждений, образования и развития трещин до частичной или полной потери несущей способности.

Фундаментальным вопросом механики деформирования и разрушения является вопрос об уравнениях состояния, характеризующих связь между текущими значениями напряжений  $\sigma$  и деформаций  $e$ . Эта связь в общем случае оказывается достаточно сложной и зависящей от типа конструкционного материала, условий нагружения (температура, скорость деформирования, время выдержки, физико-механические воздействия окружающей среды), характера напряженного состояния, возможных структурных изменений в материале в процессе деформирования и степени развития микро- и макроповреждений. В случае одноосного растяжения гладкого образца с непрерывной регистрацией диаграммы деформирования  $f(\sigma, e)$  до момента разрушения сам факт разрушения фиксируется как конечная точка на диаграмме, хотя процессы микро- и макроурушения могут начинаться существенно раньше.

Реальные диаграммы деформирования  $f(\sigma, e)$  основных групп современных конструкционных материалов (металлы и их сплавы, неметаллические материалы различных классов, композиционные материалы с разными матрицами и наполнителями) получают при стандартных или унифицированных испытаниях лабораторных образцов. Эти диаграммы можно представить в виде:

графического изображения связи между  $\sigma$  и  $e$ , получаемого с помощью двухкоординатных самописцев;

табличных значений  $\sigma$  и  $e$ , получаемых с помощью ЭВМ, ведущих управление испытаниями и обработку экспериментальной информации;

аппроксимированных диаграмм с соответствующими уравнениями и их параметрами.

Диаграммы первых двух видов являются базовыми для характеристики механических свойств. Их обычно приводят в справочниках по материалам (см. т. 5), они входят в банки данных, формируемых на базе ЭВМ.

Диаграммы третьего вида с их аналитическим описанием отвечают как задачам справочных пособий и банков данных по конструкционным материалам, так инженерным расчетам прочности и долговечности несущих элементов машин и конструкций.

Для аппроксимации диаграммы деформирования используют следующие основные модели деформируемых твердых тел (рис. 3.1.1):

идеально упругое тело (рис. 3.1.1,а);

идеально упругопластическое тело (рис. 3.1.1,б);

упругопластическое тело с упрочнением (рис. 3.1.1,в).

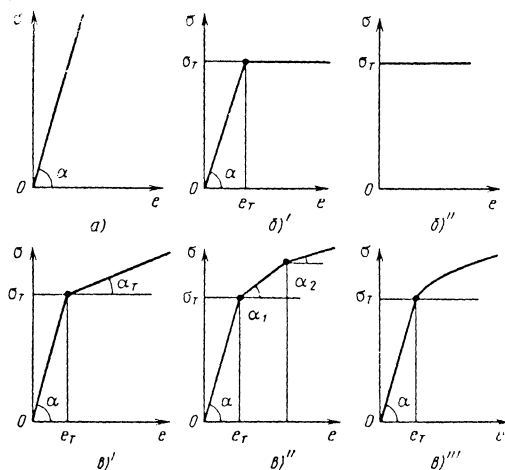


Рис. 3.1.1. Схемы аппроксимации диаграмм деформирования

Для идеально упругого тела (рис. 3.1.1,*a*) связь между напряжениями и деформациями  $\sigma=f(\epsilon)$  описывают законом Гука:

$$\sigma = E\epsilon \text{ при } \epsilon > 0, \quad (3.1.1)$$

где  $E$  - модуль упругости ( $E = \text{tg } \alpha$ ).

Закон (3.1.1) справедлив для начальной стадии деформирования большинства конструкционных материалов и для предельного состояния хрупких материалов (в том числе композитов, керамик).

Для идеально упругопластического тела упругое деформирование сменяется пластическим деформированием при невозрастающих напряжениях:

$$\sigma = E\epsilon \text{ при } \sigma \leq \sigma_T \text{ и } \sigma = \sigma_T \text{ при } \epsilon \geq \epsilon_T. \quad (3.1.2)$$

Константами материала в этом случае в соответствии с рис.3.1.1,*b* являются модуль упругости  $E$  и предел текучести  $\sigma_T$  (при этом  $\epsilon_T = \sigma_T/E$ ).

Уравнение (3.1.2) справедливо для низкоуглеродистых и низколегированных сталей повышенной и высокой прочности. Если при анализе деформирования значением упругих деформаций можно пренебречь, то вводится понятие жесткопластического тела (рис. 3.1.1,*b''*):

$$\sigma = \sigma_T \text{ при } \epsilon \geq 0. \quad (3.1.3)$$

В этом случае (рис. 3.1.1,*b'*)  $E = \infty$  и  $\epsilon_T = 0$ .

Для упругопластических тел с упрочнением при описании деформирования за пределом текучести применяют различные аппроксимирующие уравнения. Наиболее простым оказывается уравнение с линейным упрочнением (рис. 3.1.1,*b'*):

$$\sigma = E\epsilon \text{ при } \sigma \leq \sigma_T \text{ и } \sigma = \sigma_T + E_T(\epsilon - \epsilon_T) \text{ при } \epsilon \geq \epsilon_T, \quad (3.1.4)$$

где  $E_T$  - модуль линейного упрочнения в упругопластической области ( $E_T = \text{tg } \alpha_T$ ;  $0 \leq E_T \leq E$ ).

Для материалов с линейным упрочнением используют три константы -  $E$ ,  $\sigma_T$  и  $E_T$ . Аппроксимация (3.1.4) справедлива для большой группы конструкционных материалов в начальной стадии неупругого деформирования ( $\epsilon_T \leq \epsilon \leq 5\epsilon_T$ ).

С увеличением диапазона неупругих деформаций возрастают погрешности в описании реальных диаграмм деформирования. Для уточнения диаграммы применяют полигональную аппроксимацию (рис. 3.1.1,*b''*):

$$\sigma = E\epsilon \text{ при } \sigma \leq \sigma_T \text{ и}$$

$$\sigma = \sigma_n + \frac{\sigma_{n+1} - \sigma_n}{\epsilon_{n+1} - \epsilon_n} (\epsilon - \epsilon_n) = a_n + b_n \epsilon \text{ при } \epsilon \geq \epsilon_T, \quad (3.1.5)$$

где  $a_n, b_n$  - параметры диаграммы деформирования при равномерном интервале деформаций  $\epsilon_{n+1} - \epsilon_n (n \geq 1)$ .

При малых интервалах деформаций уравнение (3.1.5) можно использовать для описания всей диаграммы деформирования - до момента

разрушения; однако с его применением усложняется аналитическое решение крайних задач.

Достаточной простотой и широкой приемлемостью для инженерных расчетов характеризуется степенная аппроксимация диаграмм деформирования (рис. 1,  $\sigma''$ ):

$$\sigma = E\epsilon \text{ при } \sigma \leq \sigma_T \text{ и } \sigma = \sigma_T (\epsilon/\epsilon_T)^m, \quad (3.1.6)$$

где  $m$  - показатель упрочнения материалов в упругопластической области ( $0 \leq m \leq 1$ ). Для материалов со степенным упрочнением используют три константы -  $E$ ,  $\sigma_T$ ,  $m$ . Степенной закон деформирования в неупругой области вытекает из теории дислокаций в металлах и хорошо подтверждается для многих групп конструкционных материалов в широком интервале деформаций - от упругих до предельных.

Из анализа уравнений (3.1.1)-(3.1.6) следует, что для описания закономерностей деформирования в общем случае достаточно трех констант материала:  $E$ ,  $\sigma_T$  и  $m$  (или  $E_T$ ). Модуль упругости  $E$  определяется основой металлического материала и мало изменяется (на 5-10 %) при варьировании легирования. Характеристика  $\sigma_T$  существенно зависит от химического состава, режимов термической, термомеханической, химико-термической, электрофизической и других видов обработки и изменяется для данного типа материала в 1,2-3,5 раза. Показатель упрочнения  $m$  для данного класса материала, как правило, уменьшается по мере увеличения  $\sigma_T$ .

Для обобщения инженерных расчетов в машиностроении важное значение имеет [1, 4] переход (см. т. 4) от уравнений (3.1.1)-(3.1.6) в абсолютных значениях величин  $\sigma$  и  $\epsilon$  к уравнениям состояния в относительных величинах напряжений и деформаций (рис. 3.1.2):  $\bar{\sigma} = \sigma / \sigma_T$ ;  $\bar{\epsilon} = \epsilon / \epsilon_T$ ;  $\bar{\sigma}_T = \bar{\epsilon}_T = 1$ . (3.1.7)

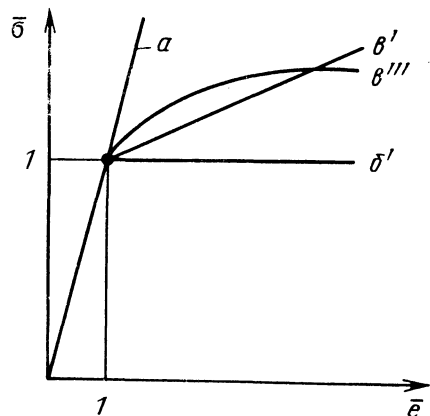


Рис. 3.1.2. Диаграммы деформирования в относительных координатах

Уравнения (3.1.1)-(3.1.6) принимают вид:

$$\bar{\sigma} = \bar{e} \text{ при } \sigma \leq 1 \text{ и } \bar{\sigma} = 1 + \bar{E}_T(\bar{e} - 1); \quad \bar{\sigma} = \bar{e}^m \text{ при } \bar{e} \geq 1, \quad (3.1.8)$$

где  $\bar{E}_T$  - относительный модуль линейного упрочнения ( $\bar{E}_T = E_T; 0 \leq \bar{E}_T \leq 1$ ).

Для материалов согласно рис. 3.1.1 имеем: идеально упругий материал (рис. 3.1.2, линия  $a$ ) -  $m = \bar{E}_T = 1$ ;

идеально упругопластический материал (рис. 3.1.2, линия  $\theta$ ) -  $m = \bar{E}_T = 0$ ;

материал с линейным (рис. 3.1.2, линия  $\epsilon'$ ) и степенным (рис. 3.1.2, линия  $\epsilon''$ ) упрочнением -  $0 \leq m, \bar{E}_T \leq 1$ .

Для относительно небольших деформаций ( $1 \leq \bar{e} \leq 5$ ) можно принять  $\bar{E}_T \approx 0,35 m$ . Уравнение (3.1.8) используют в решениях краевых задач о предельных состояниях безотносительно к типу материалов, а окончательный результат для данного материала получают переходом от относительных величин к абсолютным ( $\sigma = \bar{\sigma} \sigma_T$ ;  $e = \bar{e} e_T$ ;  $E_T = \bar{E}_T E$ ).

Для конструкционных сталей при увеличении пределов текучести  $\sigma_T$  от 200 до 1200 МПа значение  $m$  уменьшается от 0,25 до 0,05; для сплавов на основе цветных металлов (алюминий, медь, титан) с ростом  $\sigma_T$  от 150 до 650 МПа значение  $m$  уменьшается от 0,3 до 0,1. Для композитов (типа стеклопластиков, углепластиков) величина  $m$  составляет 0,5-0,85, для конструкционных керамик - 0,6-0,9.

В дополнение к упомянутым выше базовым константам физико-механических свойств конструкционных материалов  $E$ ,  $\sigma_T$  и  $m$  (или  $E_T$ ) в расчеты напряженно-деформированных состояний входят коэффициент Пуассона  $\mu$  и коэффициент температурного расширения  $\alpha$ . Характеристику  $\mu$  в пределах упругих деформаций для материала данного типа принимают постоянной (в пределах 0,25-0,3 для металлических материалов), с переходом в неупругую область значение  $\mu$  возрастает (до 0,5 для металлических материалов).

Если в процессе деформирования в материалах развиваются микро- и макроповреждения, то в уравнение состояния (3.1.8) вводят параметры повреждения, зависящие от деформации  $e$  или напряжения  $\sigma$ .

Значения констант материалов  $E$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  приводятся в справочниках; параметры уравнений состояния  $\sigma_T$  определяют при испытаниях стандартных образцов:  $\sigma_T$  принимают равным пределу пропорциональности материала  $\sigma_{пц} = R_p$ . При отсутствии величины  $\sigma_{пц}$  значение  $\sigma_T$  мож-

но получить расчетом по комплексу стандартных механических свойств [3, 4]. Показатель упрочнения  $m$  получают как тангенс угла наклона реальной диаграммы упругопластического деформирования, построенной в двойных логарифмических координатах. При отсутствии такой диаграммы величину  $m$  определяют через стандартные характеристики механических свойств.

### 3.1.2. ВЛИЯНИЕ КОНСТРУКТОРСКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ И ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ФАКТОРОВ НА ПАРАМЕТРЫ ДИАГРАММ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

К числу наиболее важных факторов, влияющих на механическое поведение материалов в конструкции, относят: температуру, скорость деформирования, время выдержки, цикличность, вид напряженного состояния, абсолютные размеры сечений, рабочие среды и другие физические воздействия. Эти факторы влияют [11, 13, 14] на форму кривых деформирования и на основные параметры уравнений состояния -  $E$ ,  $\sigma_T$  и  $m$  (или  $E_T$ ). При известных значениях этих параметров для заданной комбинации перечисленных выше факторов по уравнениям (3.1.1)-(3.1.8) строят диаграммы деформирования  $\sigma = f(e)$  или  $\bar{\sigma} = f(\bar{e})$ , которые в дальнейшем используют при решении краевых задач и расчетах прочности.

Влияние основных технологических факторов (структура и тип материалов, технологические обработки) на параметры  $E$ ,  $\sigma_T$ ,  $m(E_T)$  рассмотрено в п. 3.1.1.

Как известно, повышение температур  $t$  выше комнатной  $t_0$  приводит для большинства конструкционных материалов к снижению сопротивления упругим и упругопластическим деформациям - уменьшаются величины  $\sigma_T$  и  $E$ , а показатель упрочнения  $m$  несколько повышается (рис. 3.1.3). С переходом в область отрицательных (в том числе криогенных) температур для конструкционных металлических сплавов изменение модуля упругости не велико, а предел текучести может превысить значение, соответствующее комнатной температуре  $t_0$ , в 1,5-2,5 раза. Такому росту  $\sigma_T$  обычно отвечает уменьшение  $m = f(t)$ . Из большого числа уравнений, описывающих влияние температур на предел текучести  $\sigma_T$ , в расчетах на прочность можно использовать экспоненциальные уравнения типа

$$\sigma_T^t = \sigma_T \exp \left[ \beta_T \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right], \quad (3.1.9)$$

где  $\sigma_T^t$ ,  $\sigma_T$  - пределы текучести соответственно при температурах  $T$  и  $T_0$  (температура в градусах



К);  $\beta_T$  - характеристика материала, зависящая от типа материала и предела текучести  $\sigma_T$ .

У конструкционных сталей повышение исходного предела текучести  $\sigma_T$  при  $t=t_0$  соответствует снижению чувствительности к температурному фактору и уменьшению параметра  $\beta_T$ .

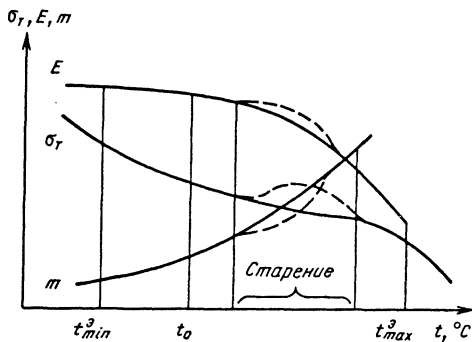


Рис. 3.1.3. График изменения параметров диаграмм деформирования от температуры

Аномальное изменение характеристик  $E$ ,  $\sigma_T$ ,  $m$  (штриховые линии на рис. 3.1.3) наблюдается в областях температур структурных изменений (старение, рекристаллизация и др.). Максимальные температуры эксплуатации  $t_{max}^э$  назначают из условий уменьшения  $\sigma_T$  не более чем на 40-50 % по сравнению со значением при комнатной температуре или из условия резкого снижения пластичности вследствие структурных превращений. Как правило, эти температуры не превышают 0,4-0,6 от температур плавления.

Минимальные температуры эксплуатации  $t_{min}^э$  назначают из условия сохранения заданного уровня пластичности. Существенной особенностью композиционных материалов типа "углерод-углерод" является повышение характеристик механических свойств при повышении  $t$  до 1500-1700 °С.

При изменении скоростей деформирования и нагружения механическое поведение конструкционных материалов существенно изменяется [1, 14, 15]. Для получения исходной расчетной информации о параметрах уравнений состояния осуществляют два передельных режима испытаний:

- с заданной скоростью деформирования  $e = de/dt = \text{const}$ ;
- с заданной скоростью нагружения  $\sigma = d\sigma/dt = \text{const}$  ( $\tau$  - время).

Для материалов с повышенными значениями показателя упрочнения  $m(m \rightarrow 1)$  реализация этих режимов не вызывает методических ослож-

нений; однако при малых значениях  $m$  режим  $\dot{\sigma} = \text{const}$  с переходом от упругих деформаций к упругопластическим трудноосуществим (даже в случае применения электрогидравлических и электромагнитных испытательных машин, управляемых от ЭВМ). Поэтому основные данные получают при испытаниях с режимом  $\dot{e} = \text{const}$ . В условиях стандартных испытаний реализуются скорости  $\dot{e}_0 = (1 \div 5) \cdot 10^{-2}$  1/с.

При увеличении  $\dot{e}$  от  $10^{-6}$  1/с до  $10^4$  1/с для конструкционных металлических материалов сопротивление упругим деформациям практически не изменяется, а сопротивление пластическим деформациям возрастает (рис. 3.1.4). Для конструкционных сталей изменение предела текучести  $\sigma_T$  по  $\dot{e}$  описывается экспоненциальными или степенными уравнениями типа

$$\sigma_T^{\dot{e}} = \sigma_T(\dot{e} / \dot{e}_0)^{\alpha_{\dot{e}T}}, \quad (3.1.10)$$

где  $\alpha_{\dot{e}T}$  - характеристика материала и температуры.

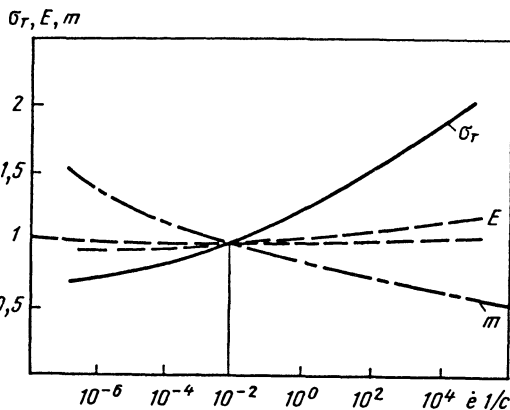


Рис. 3.1.4. График относительного изменения параметров диаграммы деформирования конструкционных сталей при варьировании скоростей деформирования

Для конструкционных сталей  $\alpha_{\dot{e}T}$  уменьшается от 0,09 до 0,01 с ростом  $\sigma_T$  от 250 МПа до 1000 МПа. Увеличение  $\sigma_T^{\dot{e}}$  сопровождается снижением  $\bar{m}_{\dot{e}} = f(\dot{e})$ . С повышением температуры испытаний в соответствии с (3.1.9)  $\sigma_T$  снижается и влияние  $\dot{e}$  по (3.1.10) растет. У неметаллических конструкционных материалов влияние скоростей деформирования проявляется и в области малых (упругих) деформаций.

Временной эффект (влияние выдержек) проявляется в возникновении дополнительных деформаций ползучести. При изучении этого эффекта реализуют два режима нагружения во времени  $\tau$ :

с заданным уровнем напряжений  $\sigma = \text{const}$  (ползучесть);

с заданным уровнем деформаций  $e = \text{const}$  (релаксация).

Механические закономерности деформирования и соответствующие теории ползучести рассмотрены в разд.2. Для расчетов деталей машин и элементов конструкций с неоднородными полями напряжений можно использовать простейшие теории ползучести. По теории старения с использованием кривых ползучести и релаксации строят изохронные кривые деформирования (рис. 3.1.5). Для конструкционных металлических материалов их можно аппроксимировать степенным уравнением (3.1.8) с показателем упрочнения  $m=f(\tau)$ , снижающимся с увеличением  $\tau$ . При этом значения  $\sigma_T$  и  $E_T$  также уменьшаются по степенному закону [4].

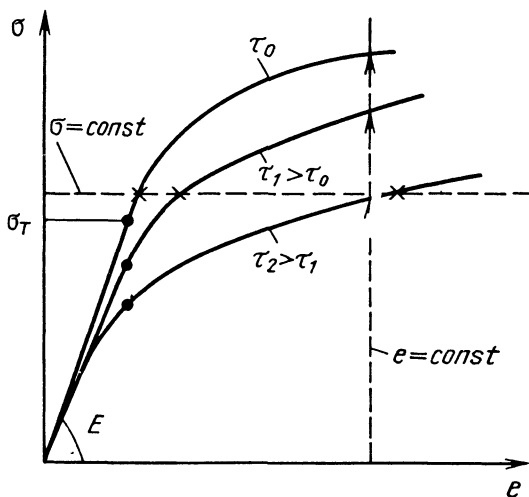


Рис. 3.1.5. Изохронные кривые деформирования ( $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2$ )

Цикличность нагружения является одним из наиболее важных факторов, влияющих на сопротивление упругим и упругопластическим деформациям [1, 13-15]. При циклическом нагружении реализуют два предельных режима:

с заданной амплитудой напряжений  $\sigma_a = \text{const}$  (мягкое нагружение);

с заданной амплитудой деформаций  $e_a = \text{const}$  (жесткое нагружение).

Параметры уравнений состояния получают, как правило, при мягком режиме нагружения (рис. 3.1.6). В исходном (нулевом полуцикле) при достижении напряжениями величины

$\sigma^{(0)} = \sigma_a$  осуществляется реверс нагрузки. Разгрузка в первом полуцикле ( $k=1$ ) осуществляется практически по линейному закону с модулем  $E^{(1)}$ . Смена знака нагружения в этом полуцикле приводит к началу пластического деформирования при напряжениях  $\sigma_T^{(1)}$ . При достижении напряжениями величины  $\sigma_a$  вновь осуществляется реверс и начинается второй полуцикл ( $k=2$ ). Для металлических конструкционных материалов проявляется эффект Баушингера ( $\sigma_T^{(1)} \leq \sigma_T$  и  $E^{(1)} \leq E$ ) - при смене знака нагружения в упругопластической области уменьшается сопротивление упругим и упругопластическим деформациям. Для инженерных расчетов можно считать справедливым принцип Мазинга ( $\sigma_a + \sigma_T^{(1)} = 2\sigma_T$ ) - переход к пластическому деформированию после смены знака нагружения происходит при размахе напряжений, равном удвоенному пределу текучести в исходном полуцикле [3].

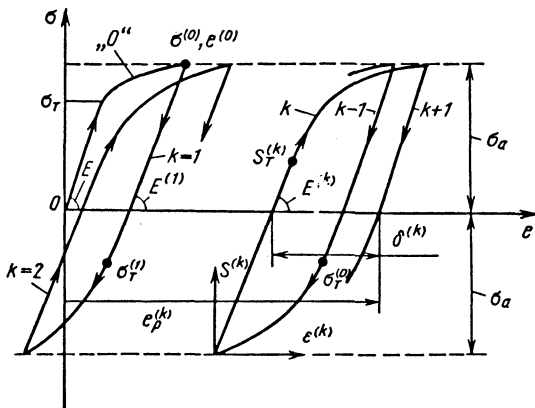


Рис. 3.1.6. Кривые циклического упругопластического деформирования при мягком нагружении ( $\sigma_a = \text{const}$ )

С ростом числа полуциклов нагружения  $k$  ( $k-1, k, k+1$ ) петля упругопластического циклического деформирования смещается, изменяя свою форму ( $E \geq E^{(1)} \geq E^{(k)}$ ). Основными параметрами петли являются:  $\delta^{(k)}$  - ширина петли,  $e_p^{(k)}$  - смещение петли или односторонне накопленная пластическая деформация. Эти параметры петли упругопластического гистерезиса в общем случае зависят от материала, числа полуциклов  $k$  и уровня напряжений  $\sigma^{(0)}$  и деформаций  $e^{(0)}$  исходного полуцикла.

Если ввести новые координаты “ $S^{(k)}-\varepsilon^{(k)}$ ” с их началом в точке разгрузки данного полуцикла  $k$ , то переход к пластическому деформированию будет происходить на пределе текучести  $S_T^{(k)}$ . В соответствии с принципом Мазинга для расчетов можно принять  $S_T^{(k)} \approx 2\sigma_T$ . Диаграммы циклического деформирования по рис. 3.1.6 можно построить в относительных координатах “ $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$ ” и “ $\bar{S}^{(k)} - \bar{\varepsilon}^{(k)}$ ” ( $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_T$ ,  $\bar{\varepsilon} = e/e_T$ ,  $\bar{S}^{(k)} = S^{(k)} / S_T^{(k)}$ ,  $\bar{\varepsilon}^{(k)} = \varepsilon^{(k)} / \varepsilon_T^{(k)}$ ). В соответствии с экспериментальными данными существует подобие диаграмм деформирования в исходном (нулевом) и  $k$ -м полуцикле [1, 15]:

$$\bar{\sigma}^{(0)} = \bar{\varepsilon}^{(0)m}, \quad \bar{S}^{(k)} = \bar{\varepsilon}^{(k)m(k)}, \quad (3.1.11)$$

где  $m(k)$  - показатель упрочнения в упругопластической области для  $k$ -го полуцикла.

Для ширины петли  $\bar{\delta}^{(k)}$  справедливы соотношения

$$\bar{\delta}^{(k)} = A(\bar{\varepsilon}^{(0)} - 1)F(k), \quad (3.1.12)$$

где  $A$  - параметр диаграммы циклического деформирования, зависящий для металлов в основном от отношения  $\sigma_{0,2}/\sigma_B$ .

Безразмерная функция  $F(k)$  числа полуциклов отражает циклические свойства материалов:

$F(k) = 1$  - циклически стабильный материал (постоянство ширины петли);

$F(k) = \exp C(\bar{\varepsilon}^{(0)} - 1)$  - циклически разупрочняющийся материал (увеличение ширины петли с накоплением числа полуциклов);

$F(k) = 1/k^{\beta(\sigma^{(0)} - 1)}$  - циклически упрочняющийся материал (уменьшение ширины петли с накоплением числа полуциклов).

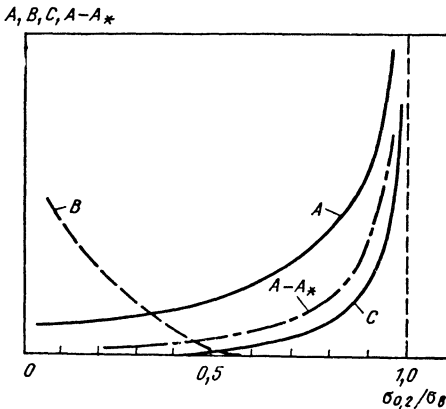


Рис. 3.1.7. Зависимость между параметрами статических и циклических свойств для конструкционных сталей

Параметры диаграмм циклического деформирования  $C$  и  $B$  также зависят от отношения  $\sigma_{0,2}/\sigma_B$  (рис. 3.1.7). Для конструкционных сталей при повышении  $\sigma_{0,2}/\sigma_B$  от 0,3 до 0,5 параметр  $B$  снижается и циклическое упрочнение сменяется циклическим разупрочнением (параметр  $C$  растет от 0 до  $1,2 \cdot 10^2$  при  $0,5 < \sigma_{0,2}/\sigma_B < 0,85$ ); для циклически стабильных материалов  $\sigma_{0,2}/\sigma_B \approx 0,5$  и  $B=C=0$ . Параметр  $A$  растет от 0,4 до 1,8 при увеличении  $\sigma_{0,2}/\sigma_B$  от 0,3 до 0,9.

Одностороннее накопление пластических деформаций обусловлено циклической анизотропией (разницей ширины петли в соседних полуциклах растяжения и сжатия).

$$\bar{\varepsilon}_p^{(k)} = (A - A_*) (\bar{\varepsilon}_0 - 1) \int_0^k F(k) dk, \quad (3.1.13)$$

где  $(A - A_*)$  - параметр циклической анизотропии, увеличивающийся от 0 до 0,1 с ростом  $A$  от 0,4 до 1,2.

С использованием (3.1.11) и (3.1.12) показатель упрочнения

$$m(k) = \frac{\lg \bar{\varepsilon}^{(0)m}}{\lg \left[ \bar{\varepsilon}^{(0)m} + \frac{A}{2} (\bar{\varepsilon}^{(0)} - 1) F(k) \right]}. \quad (3.1.14)$$

Для циклически стабильных материалов значение  $m(k)$  по числу полуциклов  $k$  не изменяется, для циклически разупрочняющихся материалов  $m(k)$  уменьшается, при циклическом упрочнении - увеличивается.

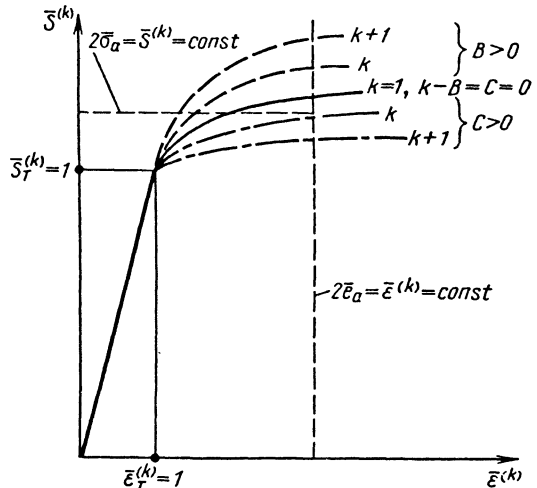


Рис. 3.1.8. Диаграммы циклического деформирования при мягком и жестком нагружении

Тогда диаграммы циклического деформирования (рис. 3.1.8) в полциклах  $k=1, k$  и  $k+1$  имеют следующие особенности:

при мягком нагружении  $2\bar{\sigma}_a = \bar{S}^{(k)} = \text{const}$  деформации  $\bar{\epsilon}^{(k)}$  уменьшаются у циклически упрочняющегося материала ( $B>0$ ), не изменяются у циклически стабильного ( $B=C=0$ ) и увеличиваются у циклически упрочняющегося ( $C>0$ );

при жестком нагружении  $2\bar{\epsilon}_a = \bar{\epsilon}^{(k)} = \text{const}$  для циклического упрочнения характерен рост  $\bar{S}^{(k)}$ , а для циклического разупрочнения - падение  $\bar{S}^{(k)}$ .

При циклическом нагружении в упругой области ( $\bar{\sigma}_a < 1$ ) повторные пластические деформации не возникают и  $m(k)=1$ .

Изменение температур  $t$ , скоростей деформирования  $\dot{\epsilon}$ , времени  $\tau$  будет изменять величины  $m, A, B, C$  и, следовательно, показатель упрочнения  $m(k)$ .

Таким образом, в расчетах прочности уравнения состояния (3.1.1)-(3.1.14) позволяют сводить краевую задачу определения напряженно-деформированного состояния при различных температурах, скоростях деформирования, временах и циклах к краевой задаче при однократном кратковременном нагружении.

### 3.1.3. МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЮ

Для определения указанных в пп. 3.1.1 и 3.1.2 базовых параметров диаграмм деформирования - предела текучести  $\sigma_T$ , модуля упругости  $E$  и характеристик упрочнения (показатель  $m$  или модуль  $E_T$ ) используют стандартные или унифицированные методы и средства испытаний.

При кратковременных статических испытаниях в условиях комнатной, повышенной и пониженной температуры базовые параметры  $\sigma_T, E$  и  $m$  можно получить при растяжении (или сжатии) стандартных гладких цилиндрических или плоских образцов с регистрацией диаграммы деформирования; при этом необходимо обеспечение погрешностей измерения напряжений на уровне  $\pm 1\%$ , а деформаций на уровне  $\pm 2\%$ . Вместе с тем действующие стандарты не предусматривают определение параметра  $m$  (или  $E_T$ ), в связи с этим ниже приведены зависимости между этими параметрами и стандартными характеристиками механических свойств. При отсутствии прямых экспериментальных данных о величинах  $\sigma_T$  используют аналогичные связи.

Для оценки влияния скоростей деформирования  $\dot{\epsilon}$  на параметры  $\sigma_T, E$  и  $m$  проводят

нестандартные испытания гладких образцов при медленном активном ( $10^{-6} \leq \dot{\epsilon} \leq 10^{-2}$  1/с) или динамическом ( $10^0 \leq \dot{\epsilon} \leq 10^4$  1/с) нагружении с регистрацией диаграмм деформирования. Наиболее сложными оказываются режимы динамического нагружения ( $\dot{\sigma} = \text{const}$ ) или деформирования ( $\dot{\epsilon} = \text{const}$ ), когда необходимы использование электрогидравлических машин с управляющими ЭВМ и анализ волновых процессов в нагружающей системе. Высокие скорости деформирования ( $\dot{\epsilon} \geq 10^3 \div 10^4$  1/с) получают при ударных режимах с применением электромагнитных, пороховых или пневматических пушек; при этом указанные выше предельные режимы ( $\dot{\sigma} = \text{const}$  или  $\dot{\epsilon} = \text{const}$ ) обычно не соблюдаются; по реально зарегистрированному процессу деформирования определяют фактические значения  $\dot{\sigma}$  и  $\dot{\epsilon}$ . Основное значение при этом имеют параметры  $\sigma_T$  и  $m_{\dot{\epsilon}}$ .

При высокотемпературном длительном нагружении при режимах  $\sigma = \text{const}$  (ползучесть) и  $\epsilon = \text{const}$  (релаксация) параметры диаграмм  $\sigma_T, E, m$  для времени  $\tau$  от  $10^{-2}$  до  $10^5$  ч и более получают не непосредственно, а путем построения изохронных кривых деформирования по результатам стандартных испытаний гладких образцов преимущественно при растяжении. Основное значение имеют при этом параметры  $\sigma_T$  и  $m$ .

При циклическом упругопластическом деформировании параметры  $\sigma_T, E, m$ , а также  $S_T^{(k)}, E^{(k)}$  и  $m(k)$  получают путем обработки данных стандартных и унифицированных испытаний гладких, плоских или цилиндрических образцов с измерением ширины петли преимущественно при мягком нагружении ( $\sigma_a = \text{const}$ ). Для этих целей используют электромеханические и электрогидравлические машины с диаграммными аппаратами или с ЭВМ. Основное значение при этом имеет параметр  $m(k)$ .

Для указанных выше режимов нагружения получение параметров  $m$  и  $\sigma_T$  возможно через стандартные характеристики механических свойств.

## Глава 3.2

### СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛА РАЗРУШЕНИЮ

#### 3.2.1. СИЛОВЫЕ, ДЕФОРМАЦИОННЫЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ

В процессе деформирования в наиболее нагруженных зонах деталей машин и элементов конструкций происходит накопление микроповреждений (дислокации, поры, микросдвиги,

микротрещины), следствием которых является более интенсивное увеличение макродеформаций. Взаимосвязанные процессы деформирования и повреждения определяют достижение предельного состояния - возникновение микротрещин и полное разрушение. При этом полное разрушение на диаграмме деформирования (см. гл. 3.1) отражается как ее конечная точка.

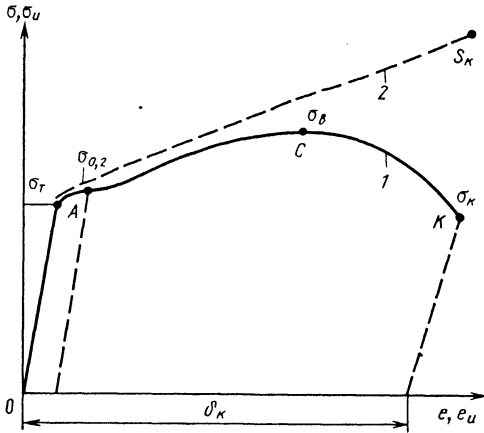


Рис. 3.2.1. Диаграммы деформирования низкоуглеродистой конструкционной стали при статическом растяжении в напряжениях и деформациях: 1 - условных; 2 - истинных

Если деформированию при статическом растяжении силой  $F$  подвергают стандартные цилиндрические или плоские образцы с исходным сечением  $A_0$  и длиной рабочей части  $l_0$ , то получают (рис. 3.2.1) полную диаграмму разрушения в координатах “ $F$ - $\Delta l$ ” ( $\Delta l = l - l_0$ ,  $l$  - длина рабочей части при нагрузке  $F$ ). Эту диаграмму в соответствии со стандартной методикой перестраивают в диаграмму деформирования в условных напряжениях  $\sigma = F/A_0$  и условных деформациях  $e = \Delta l/l_0$ . По результатам измерений текущих значений усилий  $F$ , площади поперечного сечения  $A$  и длины рабочей части  $l$  можно определить истинные напряжения  $\sigma_{и} = F/A$  и деформации  $e_{и} = \int_{l_0}^l dl/l$ , а по ним построить диаграмму деформирования в координатах “ $\sigma_{и}$ - $e_{и}$ ”.

По виду диаграммы деформирования определяют [5, 8, 13] разрушения трех типов: хрупкие, квазихрупкие и вязкие. Если разрушения возникают на участке  $OA$  упругого деформирования, то их рассматривают как хрупкие. При этом макропластические деформации отсутству-

ют, а микропластические возникают непосредственно у поверхности разрушения. Если разрушения возникают на участке  $AC$ , то их рассматривают как квазихрупкие. В этом случае микро- и макропластические деформации возникают по всей рабочей длине образца. Когда разрушения возникают на участке  $CK$ , то их рассматривают как вязкие с образованием развитых пластических деформаций по всей рабочей длине; разрушению при этом предшествует образование шейки в рабочей части после потери устойчивости пластического деформирования.

Наибольшее отличие диаграмм деформирования в условных и истинных напряжениях и деформациях наблюдается после образования шейки. Уменьшение условных напряжений за точкой  $C$  обусловлено интенсивным уменьшением сечения  $F$ , что и объясняет повышение истинных напряжений. Хрупкие разрушения или близкие к ним на участке  $OA$  характерны для таких конструкционных материалов, как керамики, монокристаллы, сверхтвердые материалы. Квазихрупкие разрушения наблюдаются у высокопрочных металлических материалов, композитов, конструкционных пластмасс. Вязкие разрушения имеют место при доведении до предельного состояния широко применяемых чистых металлов и их сплавов (на железной, никелевой, алюминиевой, титановой, медной основе).

По данным стандартных и унифицированных статических испытаний на растяжение устанавливаются три группы критериев разрушения:

силовые (предел текучести  $\sigma_T$  или предел пропорциональности  $\sigma_{пц}$ , условный предел текучести  $\sigma_{0,2}$ , временное сопротивление  $\sigma_B$ , разрушающее напряжение  $\sigma_K$  и истинное сопротивление разрыву в шейке  $S_K$ );

деформационные (относительное предельное удлинение  $\delta_K = (l_K - l_0)/l_0$ , относительное предельное сужение  $\psi_K = (A_0 - A_K)/A_0$ );

энергетические (удельная энергия разрушения  $a_K = \eta \sigma_B \delta_K$ , где  $\eta$  - коэффициент полноты диаграммы);

Если принять справедливость степенного закона деформирования (3.1.8) для истинных напряжений  $\bar{\sigma}_{и} = \bar{\sigma} = \sigma_{и} / \sigma_T$  и деформаций  $\bar{e}_{и} = \bar{e} = e_{и} / e_T$  до момента полного разрушения, то для указанных трех групп критериев достаточными будут:

$$\text{силовой } \bar{S}_K = S_K / \sigma_T;$$

$$\text{деформационный } \bar{e}_K = \frac{1}{e_T} \ln \frac{1}{1 - \psi_K};$$

$$\text{энергетический } \bar{a}_K = \int_0^{\bar{e}_K} \bar{\sigma} de.$$

С учетом (3.1.8) между этими критериями существуют связи:

$$\bar{S}_k = \bar{e}_k^m; \quad \bar{e}_k = \frac{1}{e_T} \ln \frac{1}{1 - \psi_k};$$

$$\bar{a}_k \equiv \frac{1}{m+1} \bar{e}_k^{m+1}, \quad (3.2.1)$$

где  $m$  - показатель упрочнения.

При разрушениях хрупких, когда  $m=1$ ,  $\bar{S}_k = e_k, \bar{a}_k = \frac{1}{2} e_k^2$ , силовые, деформационные и энергетические критерии эквивалентны и их можно свести к силовому, принятому в обычных инженерных расчетах.

При вязких разрушениях пластичных материалов ( $\bar{e}_k \gg 1, m \rightarrow 0$ ) на основе (3.2.1)  $\bar{S}_k \rightarrow 1$  и  $\bar{a}_k \rightarrow \bar{e}_k$ ; в этом случае основное значение имеет деформационный критерий  $\bar{e}_k$ . Для реальных конструкционных материалов ( $0 \leq m \leq 1$ ) силовой и энергетический критерии пересчитывают в деформационный и современные расчеты прочности можно выполнять на основе деформационного критерия. Преимущества применения деформационного критерия связаны (см. гл.3.1) также с тем, что при возникновении упругопластических деформаций в деталях машин и элементах конструкций экспериментально определяют, как правило, локальные деформации, а локальные напряжения и энергии получают расчетом через измеренные деформации.

### 3.2.2. СОПРОТИВЛЕНИЕ КРАТКОВРЕМЕННОМУ, ДЛИТЕЛЬНОМУ, ДИНАМИЧЕСКОМУ И ЦИКЛИЧЕСКОМУ НАГРУЖЕНИЯМ

Для определения критериальных характеристик  $\bar{e}_k, \bar{S}_k, \bar{a}_k$  по уравнению (3.2.1) при кратковременном нагружении проводят стандартные испытания образцов на растяжение. При этих испытаниях в первую очередь устанавливают характеристики  $\sigma_{0,2}, \sigma_B, \delta_k, \psi_k$ , входящие в технические условия на конструкционные материалы. Базовую деформационную характеристику  $\bar{e}_k$  определяют по (3.2.1) с использованием  $\psi_k$ . Тогда для установления других характеристик  $\bar{S}_k$  и  $\bar{a}_k$  необходимо располагать информацией о показателе упрочнения  $m$ .

Значение  $m$  можно установить экспериментально на базе аппроксимации диаграммы деформирования уравнением (3.1.8). Однако, если диаграмма деформирования отсутствует, то величину  $m$  определяют [4] через упомянутые выше стандартные характеристики механических свойств. Для пластичных металлических матери-

алов (низкоуглеродистые и низколегированные стали)

$$m = 0,75 \frac{\lg(S_k / \sigma_{0,2})}{\lg \frac{1}{\sigma_{0,2} / E + 0,2 \cdot 10^{-2}} \ln \frac{1}{1 - \psi_k}} =$$

$$= 0,75 \frac{\lg(S_k / \sigma_T)}{\lg \left( \frac{1}{e_T} \ln \frac{1}{1 - \psi_k} \right)} =$$

$$= 0,75 \frac{\lg[\sigma_B / \sigma_{0,2} (1 + 1,4\psi_k)]}{\lg \left[ 10^5 \ln \frac{1}{1 - \psi_k} / (200 + 0,5\sigma_{0,2}) \right]} \quad (3.2.2)$$

Для уточненных расчетов крупногабаритных деталей машин и элементов конструкций учитывают уменьшение стандартных характеристик механических свойств при увеличении площади поперечного сечения (от  $A_0$  для стандартного образца до  $A$  для детали):

$$\{\sigma_{0,2}, \sigma_B, \psi_k, \delta_k\} =$$

$$= \{(\sigma_{0,2})_0, (\sigma_B)_0, (\psi_k)_0, (\delta_k)_0\} \left( \frac{A}{A_0} \right)^{m_i}, \quad (3.2.3)$$

где  $m_i$  - константа материала, зависящая от определяемой характеристики.

Для сталей при определении  $\sigma_{0,2}$  и  $\sigma_B$  величина  $m_i \approx 0,013$ , а при определении  $S_k$  величина  $m_i \approx 0,04$ ; при определении  $\psi_k$  величина  $m_i$  уменьшается от 0,040 до 0,024 при повышении степени легирования. Для композитов типа стеклопластиков при определении  $\psi_k$  величину  $m_i$  принимают в пределах 0,06-0,1.

При изменении температур кратковременных испытаний изменяются стандартные характеристики механических свойств. Для конструкционных сталей используют экспоненциальную  $\sigma_T^t$  аппроксимацию зависимости предела текучести и временного сопротивления  $\sigma_B^t$  от температур [5, 8]:

$$\left\{ \sigma_T^t, \sigma_B^t \right\} = \left\{ \sigma_T, \sigma_B \right\} \exp \left[ \left\{ \beta_T, \beta_B \right\} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t_0} \right) \right], \quad (3.2.4)$$

где  $\sigma_T, \sigma_B$  - предел текучести и временное сопротивление при температуре  $t_0 = 20$  °С;  $\beta_T, \beta_B$  - параметры материала, зависящие от предела текучести  $\sigma_T$ .

Для низкоуглеродистых и низколегированных конструкционных сталей значение  $\beta_T$  уменьшается от 140 до 45 при увеличении  $\sigma_T$  от 250 до 1000 МПа. Величину  $\beta_B$  устанавливают через  $\beta_T$

по соотношению  $\beta_B = \beta_T \lg(S_K/\sigma_B) / \lg(S_K/\sigma_T)$ . Отклонения в изменении характеристик  $\sigma_T$ ,  $\sigma_B$  в соответствии с уравнением (3.2.4) наблюдаются, как указано выше, при тех температурах  $t$ , при которых в материалах наблюдаются структурные изменения.

По мере снижения температур (с переходом в область криогенных температур) у конструкционных сталей предел текучести  $\sigma_T^t$  увеличивается более интенсивно, чем временное сопротивление  $\sigma_B^t$ . Из условия  $\sigma_T^t = \sigma_B^t$  по уравнению (3.2.4) получают критическую температуру  $t=t^*$  (по схеме А. Ф. Иоффе). При этой температуре  $S_K^t \equiv \sigma_T^t$  и происходит хрупкое разрушение без макропластических деформаций ( $\psi_K^t = 0$ ); при  $t > t^*$  разрушению предшествуют макропластические деформации и разрушение оказывается вязким. Критические температуры  $t^*$  для низкоуглеродистых конструкционных сталей находятся в пределах  $-150 \pm 200$  °С, для аустенитных ниже  $-250$  °С (рис. 3.2.2).

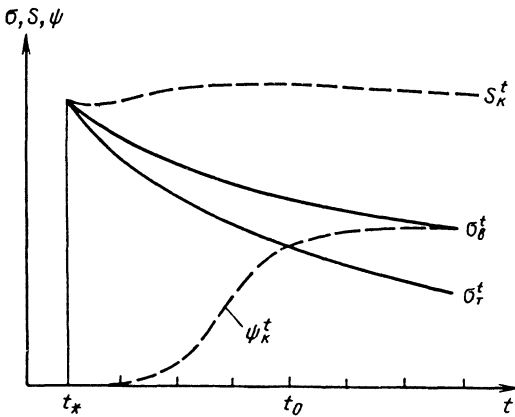


Рис. 3.2.2. Зависимость механических свойств конструкционных сталей от температуры испытаний

Конструкционные сплавы на основе цветных металлов обычно менее склонны к переходу в хрупкое состояние при снижении температуры.

У композитов с полимерной матрицей наиболее интенсивное снижение характеристик прочности происходит при температурах выше  $250-300$  °С; у композитов системы углерод-углерод прочность сохраняется до весьма высоких температур ( $t > 1500$  °С).

Повышенные температуры и длительное действие механических нагрузок вызывают возникновение дополнительно к пластическим деформации ползучести. При длительном статическом нагружении по мере увеличения времени

$\tau$  наблюдается уменьшение прочности (рис. 3.2.3). По кривой длительной прочности  $\sigma_{ВТ}$  устанавливают предел длительной прочности  $\sigma_{ДП}$  для базового времени  $\tau_2$ . Перегибы на кривой длительной прочности у конструкционных сталей, как правило, связаны с изменением механизмов разрушения, в интервале времен  $\tau_0-\tau_1$  наблюдаются внутризеренные разрушения, в интервале  $\tau_1-\tau_2$  — межзеренные, при больших временах  $\tau_2$  межзеренное разрушение сочетается с развитием пор и других микродефектов по телу зерна.

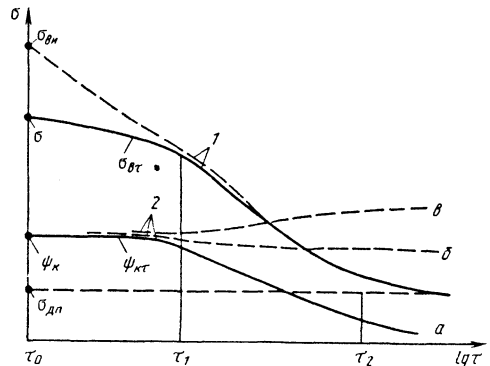


Рис. 3.2.3. Схема кривых длительной прочности и пластичности для сталей

С учетом этого для инженерных расчетов прочности используют степенные уравнения для кривой длительной прочности на участках  $\tau_0-\tau_1$  и  $\tau_1-\tau_2$  по рис. 3.2.3 соответственно:

$$\sigma_{ВТ} = \sigma_B \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{m_{\sigma_0}} ; \sigma_{ВТ} = \sigma_{ВТ1} \left( \frac{\tau_1}{\tau} \right)^{m_{\sigma_1}} , \quad (3.2.5)$$

где  $\sigma_{ВТ1}$  — предел длительной прочности для времени  $\tau_1$ ;  $m_{\sigma_0}$ ,  $m_{\sigma_1}$  — характеристики материала, зависящие от температуры.

Уравнения (3.2.5) справедливы для разрушающих напряжений  $\sigma_B \geq \sigma_{ВТ} \geq \sigma_{ДП}$  и времени  $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_2$ .

Для упрощения расчетов длительной прочности можно воспользоваться единым степенным уравнением типа (3.2.5) для  $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_2$ , если перейти к истинным напряжениям (штриховая линия 1 на рис. 3.2.3). Тогда кривая длительной прочности пройдет через точку с координатами

$$\tau_0 - \sigma_{ВИ}, \quad \text{где } \sigma_{ВИ} = \sigma_B \frac{1}{1 - \psi_B}, \quad \text{а } \psi_B - \text{ равномерное}$$

сужение при кратковременном нагружении со временем  $\tau_0$ . Тогда расчетное уравнение кривой длительной прочности принимает вид

$$\sigma_{вт} = \sigma_B \frac{1}{1 - \psi_B} \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{m_{\sigma\tau}} \quad (3.2.6)$$

При этом показатель степени  $m_{\sigma\tau}$  для металлов мало отличается от показателя  $m_{\sigma 1}$ .

При известных характеристиках кратковременной и длительной прочности  $\sigma_B$ ,  $\psi_B$ ,  $\sigma_{дл}$  и  $\tau_2$  показатель  $m_{\sigma\tau}$  вычисляются по уравнению (3.2.6) при  $\tau = \tau_2$ .

В уточненных расчетах длительной прочности вместо истинного напряжения  $\sigma_{вн}$  можно использовать сопротивление разрыву в шейке  $S_K$  при кратковременном нагружении.

При расчетах длительной прочности по деформационным критериям важное значение приобретают кривые длительной пластичности (линии 2 на рис. 3.2.3). Эти кривые описывают степенными уравнениями. По аналогии с уравнением (3.2.6)

$$\psi_{K\tau} = \psi_K \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{m_{\psi\tau}}, \quad (3.2.7)$$

где  $\psi_K$  - относительное сужение площади поперечного сечения при кратковременном статическом растяжении со временем  $\tau_0$ ;  $m_{\psi\tau}$  - характеристика материала, зависящая от температуры испытаний.

Для низкоуглеродистых конструкционных сталей при предельных температурах до 500 °С (кривые 1 и 2б на рис. 3.2.3) показатели степени  $m_{\sigma\tau}$  и  $m_{\psi\tau}$  находятся в пределах соответственно 0,05-0,07 и 0,03-0,05. Для теплоустойчивых низколегированных сталей (хромоникельмолибденового класса) при температурах до 550 °С пластичность практически не снижается (кривая 2в на рис. 3.2.3) и  $m_{\psi\tau} \geq 0$ . В расчетах можно принимать  $m_{\sigma\tau} = 0,06 + 0,08$  и  $m_{\psi\tau} = 0$ . Для аустенитных коррозионно-стойких сталей при температурах до 650 °С пластичность существенно снижается и  $m_{\psi\tau}$  увеличивается до 0,10-0,12 (кривая 2а на рис. 3.2.3); при этом значение  $m_{\sigma\tau}$  находится в интервале 0,07-0,10. У жаропрочных никельмолибденовых сплавов при температурах до 950 °С значения  $m_{\psi\tau}$  возрастают до 0,15-0,25 и  $m_{\sigma\tau}$  - до 0,10-0,15.

Вследствие малой исходной разрушающей деформации у современных композитов при расчетах прочности можно принимать  $m_{\sigma\tau} \approx m_{\psi\tau}$ . Для стеклопластиков при температурах до 80 °С  $m_{\sigma\tau} \approx 0,05$ , у углепластиков при температурах до 120 °С  $m_{\sigma\tau} \approx 0,04$ .

Характеристики разрушения конструкционных материалов изменяются и в области малых времен нагружения ( $\tau < \tau_0$ ), тогда речь идет о динамическом нагружении. Такое нагружение реализуют, как отмечалось выше, при двух пре-

дельных режимах: с заданной скоростью деформирования ( $\dot{\epsilon} = d\epsilon / dt = \text{const}$ ) и с заданной скоростью нагружения или с заданной скоростью изменения напряжений ( $\dot{\sigma} = d\sigma / dt = \text{const}$ ).

При упругом деформировании, когда напряжение  $\sigma$  пропорционально деформации  $\epsilon$ , эти режимы эквивалентны. Однако при переходе от стадии упругих деформаций к стадии пластического деформирования реализация режима  $d\sigma/dt = \text{const}$  затрудняется и для материалов с весьма малыми значениями показателей упрочнения ( $m \rightarrow 0$ ) становится невозможной. В связи с этим для большинства конструкционных материалов рекомендуются испытания до разрушения с варьированием скоростей деформирования  $d\epsilon/dt$ .

Обычные стандартные испытания при кратковременном статическом нагружении осуществляют при скорости деформирования

$e_0 = 10^{-2} \div 10^{-1} / \text{с}$ ; допускаются испытания при заданной скорости перемещения активного захвата на электромеханических и гидравлических испытательных машинах. Такие режимы испытаний являются промежуточными между указанными выше двумя предельными. В упругопластической области скорости деформирования изменяются незначительно, находясь в пределах  $10^{-2} + 5 \cdot 10^{-2} / \text{с}$  для величины  $\dot{\epsilon}_0$ .

$\sigma, m, E$

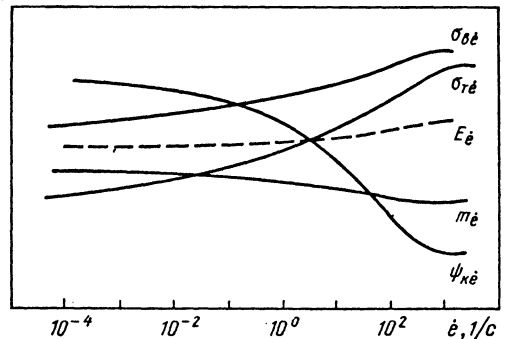


Рис. 3.2.4. Зависимость механических свойств конструкционных сталей от скорости деформирования

При переходе от статических испытаний к динамическим (при  $\dot{\epsilon} > \dot{\epsilon}_0$ ) сопротивление упругопластическим деформациям и разрушению возрастает - наиболее интенсивно растет предел текучести  $\sigma_{\tau \dot{\epsilon}}$  при одновременном повышении предела прочности  $\sigma_{\theta \dot{\epsilon}}$  (рис. 3.2.4). Увеличение этих характеристик с приемлемой для расчетов точностью описывают [4] степенными уравнениями



$$\{\sigma_{T\dot{\epsilon}}, \sigma_{V\dot{\epsilon}}\} = \{\sigma_T, \sigma_V\} \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{\alpha_{\dot{\epsilon}T}, \alpha_{\dot{\epsilon}V}}, \quad (3.2.8)$$

где  $\sigma_T, \sigma_V$  - предел текучести и прочности при стандартных испытаниях со скоростями  $\dot{\epsilon}$ ;  $\alpha_{\dot{\epsilon}T}, \alpha_{\dot{\epsilon}V}$  - характеристики материала, зависящие в основном от величины  $\sigma_T$ .

В расчетах прочности деталей из конструкционных сталей можно принять  $\alpha_{\dot{\epsilon}T} \cong 1,5 \alpha_{\dot{\epsilon}V}$ . При увеличении предела текучести  $\sigma_T$  конструкционных низкоуглеродистых и низколегированных сталей от 250 до 1000 МПа значение  $\alpha_{\dot{\epsilon}T}$  монотонно снижается от 0,09 до 0,01.

Соппротивление упругим деформациям, характеризуемому модулем продольной упругости  $E_{\dot{\epsilon}}$ , при повышении скоростей деформирования  $\dot{\epsilon}$  практически не изменяется, а показатель упрочнения  $m_{\dot{\epsilon}}$  снижается, что находится в соответствии с ростом значения  $\sigma_{T\dot{\epsilon}}$ . Предельные пластические деформации  $\psi_{k\dot{\epsilon}}$  с увеличением  $\dot{\epsilon}$  монотонно снижаются примерно в такой же степени, как и при снижении температуры испытаний. Это снижение в основном определяется приращением пределов текучести при заданной температуре  $t$  (т.е. величиной  $\sigma_T^t - \sigma_T$ ) или при заданной скорости деформации  $\dot{\epsilon}$  (т.е. величиной  $\sigma_{T\dot{\epsilon}} - \sigma_T$ ). Этим объясняют повышение склонности к хрупкому разрушению - при увеличении скоростей деформирования и снижении температур эксплуатации характеристики пластичности возрастают. Для  $\dot{\epsilon} > 10^{-3} 1/c$  повышение пластичности при динамическом нагружении и снижение сопротивления деформациям широко используют в технологических операциях пластического формообразования, особенно хрупких материалов. При повышении скоростей деформирования до  $10^4 - 10^5 1/c$  эффекты локального тепловыделения становятся достаточными для высокотемпературных процессов взрывной сварки, в том числе и хрупких металлических материалов. Если скорости деформирования превышают  $10^6 1/c$ , то развитие макро- и микропластических деформаций затрудняется. Это объясняется тем, что скорости распространения упругих деформаций больше, чем скорости распространения пластических деформаций, и микроразрушения при сверхскоростном нагружении начинаются в условиях упругих деформаций. Указанные факторы способствуют образованию хрупких, в том числе откольных, разрушений при импульсных лазерных и электромагнитных нагружениях.

Эффекты скоростного деформирования конструкционных материалов на неметаллической основе в диапазоне скоростей от  $10^{-3}$  до

$10^2 1/c$  проявляются в том же направлении, что и для металлов (см. рис. 3.2.4). При этом относительное изменение значений  $\sigma_{V\dot{\epsilon}}$  и  $E_{\dot{\epsilon}}$  у неметаллических материалов оказывается больше, чем у металлических.

При определении характеристик циклического разрушения, как и при получении диаграмм циклического деформирования, используют два основных режима нагружения - с заданной амплитудой напряжений ( $\sigma_a = \text{const}$ ) и с заданной амплитудой деформаций ( $e_a = \text{const}$ ). С инженерной точки зрения важным оказывается достаточно широкий диапазон числа циклов до разрушения - от  $10^0$  до  $10^{12}$ . В этом диапазоне для конструкционных металлов выделяют характерные интервалы чисел циклов:  $10^0 - 5 \cdot 10^4$  - малоцикловая усталость, когда разрушение вызывается преимущественно циклическими упругопластическими деформациями;  $10^5 - 10^7$  - пластическая многоцикловая усталость, когда разрушение происходит при упругих деформациях в макрообъемах в сочетании с микропластическими деформациями в объемах микроструктурных элементов;  $10^8 - 10^{12}$  - усталость на сверхбольших базах при напряжениях ниже предела упругости, обусловленная дислокационными механизмами в субзеренных элементах. По экспериментальным данным, при жестком нагружении циклически стабильных металлов разрушающее число циклов  $N$  связано степенной зависимостью с амплитудой пластической  $e_{ap}$  и упругой  $e_{ae}$  деформаций (закон Мэнсона - Коффина - Лангера):

$$\{e_{ap}, e_{ae}\} N^{\{m_p, m_e\}} = \{C_p, C_e\}, \quad (3.2.9)$$

где  $m_p, m_e, C_p, C_e$  - характеристики материала.

В расчетах прочности для конструкционных сталей с временным сопротивлением  $\sigma_V$  в пределах 500-700 МПа можно принять  $m_p \approx 0,5$ , а  $m_e \approx 0,1$ ; с увеличением временного сопротивления до 1200 МПа увеличиваются  $m_p$  до 0,6 и  $m_e$  до 0,12 [1, 4, 5, 7, 8]. Если однократное статическое разрушение считать циклическим при  $N=1/4$ ,  $2e_{ap} = e_k$  и  $2e_{ae} = S_k/E$ , то

$$C_p = \frac{e_k}{2(4)^{m_p}} = \frac{1 - \psi_k}{2(4N)^{m_p}}; \quad C_e = \frac{S_k}{2E(4)^{m_e}}. \quad (3.2.10)$$

Так как амплитуда упругопластической деформации  $e_a = e_{pa} + e_{ae}$ , то на основе (3.2.9) и (3.2.10) обобщенное уравнение кривой усталости

$$e_a = \frac{1 - \psi_k}{2(4N)^{m_p}} + \frac{S_k}{2E(4N)^{m_e}}. \quad (3.2.11)$$

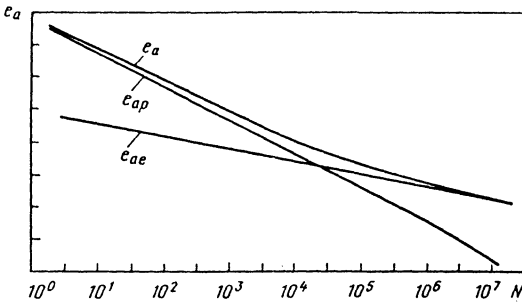


Рис. 3.2.5. Кривые усталости при жестком нагружении

Кривые усталости (по моменту образования макротрещины) в соответствии с уравнениями (3.2.9) и (3.2.10) в двойных логарифмических координатах показаны на рис. 3.2.5. В области малоциклового усталости для пластичных конструкционных сталей  $e_{ap} \gg e_{ae}$  и  $e_a \approx e_{ap}$ , т.е. малоцикловая долговечность определяется исходной статической пластичностью  $\psi_k$ . В области многоциклового усталости  $e_{ae} \gg e_{ap}$  и  $e_a \approx e_{ae}$  и долговечность зависит от исходной прочности  $S_k$ .

У высокопрочных и малопластичных металлов, у композитов и керамик первое слагаемое в уравнении (3.2.11) существенно меньше второго и сопротивление усталости определяется статической прочностью.

При повышении температуры  $t$  и увеличении времени нагружения  $\tau$  в соответствии с уравнениями (3.2.6) и (3.2.7) уменьшаются статическая прочность и пластичность и вследствие этого снижается долговечность согласно уравнению (3.2.11).

Таким образом, по уравнению (3.2.11) при известных эксплуатационных условиях нагружения ( $e_a$ ,  $N$ ,  $t$ ,  $\tau$ ) проводится [4, 5, 7, 15, 16] расчетное обоснование выбора материала (назначение характеристик  $\psi_k$ ,  $S_k$ ).

При мягком нагружении в общем случае вследствие циклической нестабильности материалов амплитуды пластических деформаций  $e_{ap}$  изменяются (см. рис. 3.1.6) по числу полуциклов ( $k=2N$ ) и  $e_{ap}^{(k)} = \delta^k / 2$ . Кроме того, одновременно с этим происходит одностороннее накопление пластических деформаций  $e_p^{(k)}$ . Для отражения повреждающего действия деформаций  $e_{ap}^{(k)}$  и  $e_p^{(k)}$  в области малоциклового разрушения вводят [1, 2, 4-8] повреждения:

$$d_f = \int_1^N dN / N_k - \text{усталостные, обусловленные}$$

амплитудой деформаций  $e_{pa}^{(k)}$ ;

$$d_S = \int_1^N de_p^{(k)} / e_x - \text{квазистатические, обуслов-$$

ленные истощением пластичности вследствие одностороннего накопления деформаций. Число циклов  $N^{(k)}$  как разрушающее определяют по уравнению (3.2.9) для  $e_{ap}^{(k)}$ .

Если принять условие линейного суммирования повреждений  $d_f$  и  $d_S$ , то долговечность  $N$  при малоцикловом разрушении в условиях мягкого нагружения определяется как верхний предел интегралов для  $d_S$  и  $d_f$  из уравнения деформационно-кинетического критерия разрушения

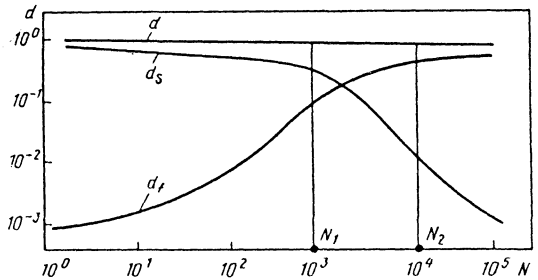
$$d = d_S + d_f = 1. \quad (3.2.12)$$


Рис. 3.2.6. Кривые накопленных циклических повреждений при мягком нагружении

Предельные значения накопленных повреждений  $d_S$ ,  $d_f$  и  $d$  в двойных логарифмических координатах показаны на рис. 3.2.6. В области малого числа циклов ( $N < N_1$ ) преимущественное значение для циклически разупрочняющихся анизотропных металлов имеют квазистатические повреждения  $d_S \gg d_f$ , когда предельная накопленная деформация  $e_p^{(k)}$  достигает значений разрушающей деформации  $e_k$  при однократном нагружении. В этом случае циклическому разрушению предшествует образование ярко выраженной шейки без возникновения усталостных трещин. В области повышенного числа циклов ( $N > N_2$ ) основное значение имеют усталостные повреждения  $d_f \gg d_S$ . Циклическое разрушение происходит с образованием и развитием трещины усталости без возникновения шейки. При числах циклов  $N_1 \leq N \leq N_2$  имеют

место смешанных разрушения, когда в зоне разрушения образуются в различной степени и шейка, и трещины.

С повышением температур  $t$  и увеличением времени  $\tau$  снижаются  $N^{(k)}$  и  $e_k$ , увеличиваются  $e_{ар}^{(k)}$  и  $e_p^{(k)}$  и уменьшается долговечность по уравнению (3.2.12).

Для циклически упрочняющихся, циклически стабильных изотропных и малопластичных материалов разрушения при мягком и жестком нагружении носят усталостный характер ( $d_f \gg d_s$ ) и для расчетов деталей можно использовать уравнение (3.2.11).

### 3.2.3. МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК РАЗРУШЕНИЯ

Рассмотренные в пп. 3.1.3 и 3.1.2 силовые, деформационные и энергетические характеристики разрушения (входящие в современные расчеты прочности) определяют экспериментально на лабораторных образцах при соответствующих режимах нагружения. Методы определения этих характеристик стандартизованы и унифицированы и в большинстве случаев оказываются теми же, что и при определении характеристик сопротивления деформированию (см. п. 3.1.3).

Стандартные характеристики механических свойств при однократном статическом нагружении - силовые  $\sigma_T$ ,  $\sigma_{0,2}$ ,  $\sigma_B$ ,  $S_k$ , деформационные  $\delta_k$ ,  $\psi_k$  и энергетические  $a_k$  - определяют преимущественно при одноосном растяжении (сжатии) гладких цилиндрических или плоских образцов. Для ряда случаев предусмотрены стандартные испытания на кручение (трубчатые или сплошные образцы) и на изгиб [2].

В дополнение к испытаниям стандартных малых образцов с размерами поперечного сечения  $A_0$  требуются испытания укрупненных образцов с размерами сечения  $A$  в тех случаях, когда проводятся уточненные расчеты ответственных крупногабаритных конструкций с использованием параметра  $m_i$  в уравнении (3.2.3).

Если рассчитываемые элементы эксплуатируются в заданном диапазоне температур  $t$ , то указанные выше испытания проводят при изотермическом статическом нагружении, и в качестве расчетных определяют характеристики чувствительности материалов к температуре  $\beta_T$  и  $\beta_B$  для уравнения (3.2.4).

Для повышенных температур и больших времен  $\tau$  эксплуатационного нагружения (от  $10^0$  до  $10^5$  ч и более) проводят длительные статические испытания и определяют характеристики длительной статической прочности  $\sigma_{вт}$  и пластичности  $\psi_{кт}$ . При этих испытаниях определяют расчетные характеристики  $m_{\sigma}$  и  $m_{\psi}$ , входящие в уравнения (3.2.6) и (3.2.7).

При кратковременных (динамических, ударных) испытаниях определяют, в первую очередь, зависимость предела текучести и временного сопротивления (предела прочности)  $\sigma_{Te}$  и  $\sigma_{в\dot{e}}$  от скорости деформирования  $\dot{e}$  с учетом особенностей испытаний, изложенных в п. 3.1.3. Параметры  $\alpha_{\dot{T}}$  и  $\alpha_{\dot{B}}$  в уравнении (3.2.8) являются основными для расчетов прочности при заданной скорости деформирования  $\dot{e}$ . Характеристики пластичности имеют в целом не монотонную зависимость от скорости  $\dot{e}$  в широком диапазоне ( $10^{-1}$ - $10^4$ 1/с), что связано с неизотермичностью локального деформирования.

Для анализа прочности циклически нагружаемых конструкций проводят стандартные испытания гладких цилиндрических (или плоских) образцов при мягком ( $\sigma_a = \text{const}$ ) и жестком ( $\epsilon_a = \text{const}$ ) режимах нагружения с построением кривых усталости в диапазоне числа циклов  $10^0$ - $10^9$  и более. В качестве базовых для расчетов используют степенные уравнения кривых типа (3.2.9) - (3.2.11) с основными параметрами  $m_p$  и  $m_e$ . При этом для малоциклового области (до  $5 \cdot 10^4$  циклов) в процессе испытаний необходима регистрация диаграмм деформирования и управление испытаниями по параметрам этих диаграмм. В области пластической многоциклового усталости ( $N > 10^5$ ) основным оказывается мягкий режим нагружения с контролем нагрузок. Для случая мягкого режима нагружения в малоциклового области вследствие циклической нестабильности современных конструкционных материалов важное значение приобретают характеристики одностороннего накопления пластических деформаций, входящие в расчет квазистатических повреждений по уравнению (3.2.12).

Для ответственных конструкций, испытывающих действие сложных термомеханических нагрузок в условиях различных окружающих сред (с факторами коррозионного, эрозионного, радиационного, электромагнитного повреждения), предусматриваются специальные аттестационные испытания материалов.

## Глава 3.3

### МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ

#### 3.3.1. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ И КРИТЕРИИ ЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

Традиционные расчеты прочности элементов конструкций и сооружений ведут в предположении, что они лишены трещин или подобных им дефектов. При этом свойства материала в конструкции тождественны свойствам материала, определенным на образцах стандартными методами. В то же время нередки случаи, осо-

бенно для крупногабаритных конструкций сложного очертания, когда в процессе изготовления конструкции возникают трещины на том или ином технологическом этапе. Кроме того, трещины могут возникнуть в процессе эксплуатации, особенно в зонах повышенных напряжений и деформаций, из-за периодической во времени переменности нагрузки, агрессивного характера окружающей среды и других не заложенных в расчет факторов, повышающих склонность конструкции к хрупкому состоянию.

Во всех этих случаях возникает необходимость провести расчет на прочность с учетом трещины с целью ответа на вопросы, на которые традиционный расчет не в состоянии дать ответы. Такими вопросами могут быть: каковы критические (т.е. разрушающие) размеры трещины (при данной нагрузке) и какие размеры можно допустить, на какой срок, каковы при этом окажутся коэффициенты запасов по прочности и долговечности.

Такие вопросы, безусловно, возникают при фактическом обнаружении трещин, но их можно поставить и авансом, гипотетически вводя в опасном месте конструкции трещину (особенно в недоступном для визуального или иного контроля), и заранее, с помощью расчета, установить механические свойства трещиностойкости материала и условия, не приводящие к распространению этой гипотетической трещины.

Расчеты на прочность с учетом трещин ведут на основе критериев механики разрушения [2, 4, 9, 10, 13].

**Линейная механика разрушения.** Трещина представляет собой самый острый концентратор напряжений. С уменьшением радиуса кривизны в вершине надреза концентрация напряжений возрастает. Одновременно предполагаем, что материал пока не проявляет свои пластические свойства. Поскольку радиус кривизны вершины трещины неопределен и весьма мал, то и напряжения в малой области в непосредственной близости к вершине трещины могут быть большими и неопределенными количественно.

Вместе с тем, если рассматривать напряженную зону вне малой окрестности вершины трещины (диаметром более 10 диаметров зерна), то на основании решений задач теории упругости оказывается, что компоненты напряжений  $\sigma_{ij}$  представлены так называемыми асимптотическими формулами в виде

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta). \quad (3.3.1)$$

В этих формулах  $r, \theta$  - полярные координаты точки с полюсом в вершине трещины;  $f_{ij}(\theta)$  - известные функции, принимающие значение единицы или нуля при  $\theta=0$ ;  $K$  - коэффициент интенсивности напряжений, не зависящий от координат  $r$  и  $\theta$ , его размерность сила/длина<sup>3/2</sup>.

Из формулы (3.3.1) следует, что при  $r \rightarrow 0$  напряжения  $\sigma_{ij} \rightarrow \infty$ , т.е. напряжения в вершине трещины имеют особенность вида  $1/\sqrt{r}$ . Коэффициент при этой особенности - коэффициент интенсивности напряжений  $K$  - характеризует величину напряжений в целом во всей области, в которой справедливы формулы (3.3.1). Характер же распределения напряжений в этой области в зависимости от  $r$  и  $\theta$  один и тот же для тел любой формы и любой схемы нагружения. Поэтому для характеристики напряженно-деформированного состояния в области справедливости асимптотических формул (3.3.1) вполне достаточно знания коэффициента  $K$ ; этот коэффициент прямо пропорционален параметру приложенных к телу нагрузок и зависит от размеров тела, в частности, от размеров трещины. Рост нагрузки приводит к пропорциональному росту  $K$ , что в свою очередь означает рост напряжений (рис. 3.3.1). Основываясь на этом, Ирвин в 1957 г. предложил силовой критерий разрушения в виде

$$K \leq K_c. \quad (3.3.2)$$

Неравенство означает безопасное состояние - отсутствие роста трещины; равенство означает наступление предельного (критического) состояния равновесия, при котором трещина получает возможность распространения.

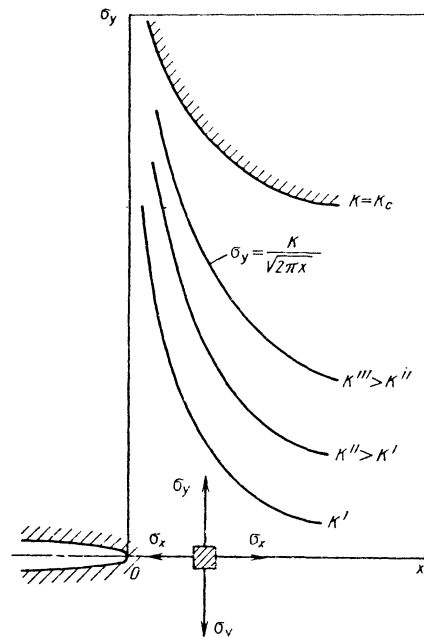


Рис. 3.3.1. Эпюры напряжений  $\sigma_y$  перед вершиной трещины типа I для разных значений  $K$

Слева в выражении (3.3.2) стоит коэффициент интенсивности напряжений  $K$ , который следует задать в виде функции нагрузки, размеров детали и трещины, а справа он же, но определенный из опыта и играющий роль механической характеристики материала, оценивающей его трещиностойкость, т.е. сопротивление материала росту в нем трещины<sup>1</sup>. Величина  $K_c$  - критический коэффициент интенсивности напряжений для плоского образца данной толщины  $t$  (более кратко - "вязкость разрушения", или просто трещиностойкость) - определяется из эксперимента. (Подробнее о методах экспериментального получения статических характеристик трещиностойкости см. п. 3.3.3.)

**Пример.** Имеется деталь в виде полосы шириной  $b=200$  мм и толщиной  $t=2$  мм. В средней части полосы обнаружена сквозная трещина длиной  $2l=20$  мм. Известно, что полоса работает на растяжение; материал полосы - алюминиевый сплав Д16 (условный предел текучести  $\sigma_{0,2}=220$  МПа, характеристика трещиностойкости  $K_c=30$  МПа·м<sup>1/2</sup>). Найдем критическое напряжение  $\sigma_c$ , при котором трещина начнет распространяться, приводя к полному разрушению полосы.

Из справочника [5] находим формулу для коэффициента  $K$ , а именно

$$K = \sigma \sqrt{\pi l Y(l/b)}. \quad (3.3.3)$$

Здесь  $\sigma$  - приложенное напряжение;  $l$  - полудлина трещины. Поскольку ширина полосы в десять раз превышает длину трещины, то поправочный коэффициент  $Y(l/b) \approx 1$ . При этом формула (3.3.3) переходит в формулу для растянутой плоскости, которая имеет вид

$$K = \sigma \sqrt{\pi l}. \quad (3.3.4)$$

Подставляя это выражение в критериальное условие (3.3.2), получаем уравнение

$$\sigma_c \sqrt{\pi l} = K_c \text{ или } \sigma_c \sqrt{\pi 10 \cdot 10^{-3}} = 30 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}.$$

Отсюда искомое критическое напряжение оказывается равным  $\sigma_c=169$  МПа.

Видим, что разрушающее напряжение полосы с такой трещиной меньше предела текучести. Итак, на поставленный вопрос получен ответ.

Поинтересуемся теперь критической длиной трещины в случае, когда полоса растянута расчетным напряжением  $\sigma=0,5\sigma_{0,2}=110$  МПа (т.е.  $\sigma=\sigma_{0,2}/n_{0,2}$  при коэффициенте запаса по пределу текучести  $n_{0,2}=2$ ). Условие разрушения (3.3.2) позволяет записать

$$0,5\sigma_{0,2} \sqrt{\pi l_c} = K_c \text{ или } 110 \sqrt{\pi l_c} = 30 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}.$$

Отсюда критическая длина трещины, приводящая к полному разрушению полосы, равна  $2l_c=56$  мм. Она оказалась больше, чем в первой части примера, поскольку действующее напряжение 110 МПа меньше, чем 169 МПа.

Таким образом, если теперь предположить, что полоса растянута расчетным напряжением 110 МПа и в этой полосе есть трещина длиной 20 мм, то коэффициент запаса по разрушающему напряжению оказывается равным  $n_c=\sigma_c/\sigma=169/110=1,5$  вместо двух по пределу текучести.

Приведем теперь необходимые сведения справочного характера.

**Типы смещений берегов трещины и принцип суперпозиции.** В общем случае действия произвольной нагрузки на тело с трещиной поверхности этой трещины смещаются относительно друг друга. На основании принципа суперпозиции линейной теории упругости это смещение можно представить в виде суммы трех типов смещений (рис. 3.3.2):

тип I - трещина отрыва или нормального разрыва смещений. Точки поверхности трещины смещаются в направлении, перпендикулярном к поверхности трещины;

тип II - трещина поперечного сдвига. Точки поверхности трещины смещаются поперек передней кромки трещины;

тип III - трещина продольного сдвига. Точки поверхности трещины смещаются вдоль передней кромки трещины.

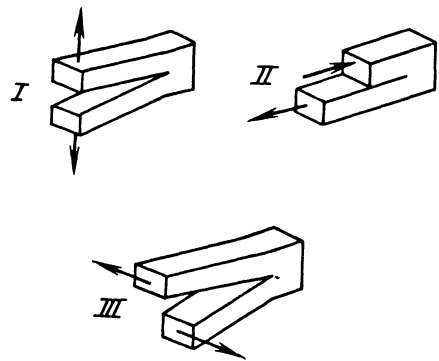


Рис. 3.3.2. Три типа смещений берегов трещины

Классификация трещин на эти три типа полезна не только по соображениям удобства аналитического (или численного) решения, но

<sup>1</sup> Понятие трещиностойкости стоит в одном ряду с такими понятиями механики материалов, как пластичность, прочность, ползучесть и т.п. Эти понятия отражают явления, происходящие с материалом, и реакцию материала на внешнее воздействие. Мера количественной оценки этой реакции может быть измерена разными величинами. Например, для тела с трещиной характеристики трещиностойкости можно оценивать критическим коэффициентом интенсивности напряжений, критическим раскрытием вершины трещины, удельной работой разрушения, критическим значением "джей"-интеграла, процентом волокна в изломе, критической температурой хрупкости, ударной вязкостью образца с трещиной и др.

также и потому, что материал по-разному сопротивляется развитию трещин этих трех типов. Поэтому тип трещин обычно указан нижним индексом у коэффициентов интенсивности напряжений, а именно:  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ . И их предельные (критические) значения, найденные экспериментально на соответствующих образцах, обозначены:  $K_{Ic}$ ,  $K_{IIc}$  и  $K_{IIIc}$ .

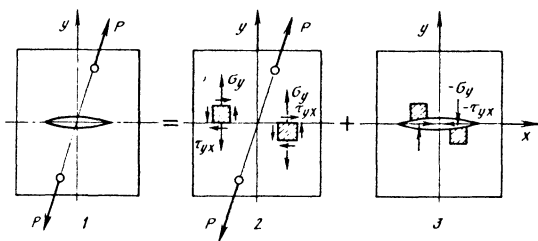


Рис. 3.3.3. Представление решения задачи для тела с трещиной в виде суммы решений для тела без трещины и тела с нагрузкой на поверхности трещины:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^2 + \sigma_{ij}^3; \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^2 + \varepsilon_{ij}^3; \quad u_i = u_i^2 + u_i^3$$

Во многих случаях для решения задач о трещинах удобно воспользоваться принципом суперпозиции линейной теории упругости, позволяющим сложную систему нагрузок представить в виде суммы более простых. Задачи о трещинах целесообразно приводить к задачам, в которых нагрузка действует только на поверхность трещины. На рис. 3.3.3 показан пример такого приведения. Элементы упругого решения исходной задачи 1 равны сумме элементов решения задач 2 и 3. Задача 2 не имеет особенностей решения в точках, соответствующих концам разреза. Поэтому на закономерности поведения трещины будут оказывать влияние только элементы упругого решения, соответствующие задаче 3, в которой нагрузка приложена к поверхности разреза. При этом нагрузка статически сбалансирована.

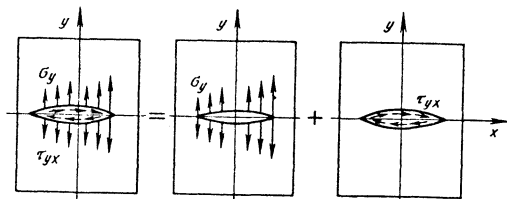


Рис. 3.3.4. Представление нагрузки на поверхности трещины согласно задаче 3 рис. 3.3.3 в виде суммы нагрузок

Если теперь нагрузку, действующую на поверхность трещины, разбить на сумму симметричных (тип I) и обратно симметричных (тип II), то будем иметь для них элементарные виды деформации края трещины по одному из указанных выше типов (рис. 3.3.4).

**Напряженное состояние в окрестности конца разреза.** В упругонапряженном теле с трещиной напряженно-деформированное состояние определяют обычным для теории упругости образом (аналитически или численно). При этом вершина трещины (или ее кромка-фронт в пространственной постановке) оказывается особой точкой - напряжения при приближении к вершине неограниченно растут. На малых, сравнительно с длиной трещины, расстояниях в окрестности вершины трещины напряженно-деформированное состояние описывается асимптотическими формулами, которые здесь приведены без вывода для всех трех типов трещин порознь. Область справедливости этих формул при  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ;  $10\rho < r < 0,1l$  ( $\rho$  - радиус кривизны закругленной из-за деформации вершины трещины;  $l$  - полудлина трещины) (рис. 3.3.5). Пластическое деформирование во внимание не принято.

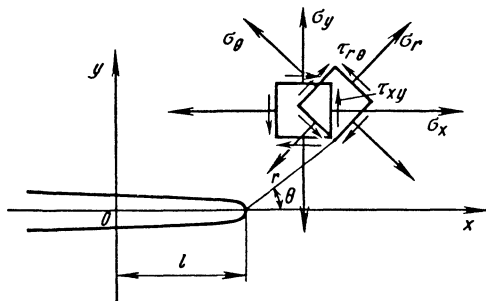


Рис. 3.3.5. Компоненты напряжений и система координат в вершине трещины

Выпишем асимптотические формулы для компонент напряженного состояния около вершины трещины типа I.

В декартовых координатах

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_y \end{aligned} \right\} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 \mp \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right); \tag{3.3.5}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta.$$

В полярных координатах

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3}{2}\theta\right); \\ \sigma_\theta &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3}{2}\theta\right); \\ \tau_{r\theta} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3}{2}\theta\right).\end{aligned}\quad (3.3.6)$$

Для определения перемещений воспользуемся законом Гука:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)].\end{aligned}$$

Если рассматривать плоскую деформацию, то  $\varepsilon_z=0$  и  $\sigma_z=\nu(\sigma_x+\sigma_y)$ . Подставив в  $\partial u/\partial x$  напряжения и проинтегрировав, найдем

$$\begin{aligned}u &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right); \\ v &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}\quad (3.3.7)$$

( $G$  - модуль упругости при сдвиге).

В случае плоского напряженного состояния в законе Гука следует положить  $\sigma_z=0$  и в формулах для перемещений величины  $(1-2\nu)$  и  $(1-\nu)$  следует заменить соответственно на  $\frac{1-\nu}{1+\nu}$  и  $\frac{1}{1+\nu}$ .

В формулах (3.3.5)-(3.3.7) появляется коэффициент  $K_I$ , зависящий от формы и размеров тела, схемы нагружения и не зависящий от координат  $r$  и  $\theta$ . Этот коэффициент оценивает значения компонент напряжений и линейно связан с внешней нагрузкой. По определению, коэффициент интенсивности напряжений около вершины трещины вычисляются по формуле

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y(r, \theta) \quad \text{при} \quad \theta = 0, \quad (3.3.8)$$

Асимптотические формулы в окрестности конца трещины типа II: в декартовых координатах

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta\right); \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta; \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta\right).\end{aligned}\quad (3.3.9)$$

В полярных координатах

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(-5 \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3}{2}\theta\right); \\ \sigma_\theta &= -\frac{3}{4} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3}{2}\theta\right); \\ \tau_{r\theta} &= \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3}{2}\theta\right).\end{aligned}\quad (3.3.10)$$

Асимптотические выражения перемещений

$$\begin{aligned}u &= \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2}\right); \\ v &= \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(-1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right).\end{aligned}\quad (3.3.11)$$

По приведенным формулам можно вычислить главные напряжения, их траектории, максимальные касательные напряжения и другие величины, обычно вычисляемые в связи с оценкой прочности материала. Некоторые из перечисленных характеристик показаны на рис. 3.3.6-3.3.14. Наибольшее главное напряжение  $\sigma_1$  (см. рис. 3.3.6) возникает в точках  $\theta=\pm\pi/3$ ; наибольшее касательное напряжение - в точках  $\theta=\pm\pi/2$ , причем  $\sigma_1(\pi/2)-\sigma_2(\pi/2)=\sigma_1(0)=\sigma_2(0)$ . Функции  $\sigma_1(\theta)$  и  $\sigma_2(\theta)$  четные.

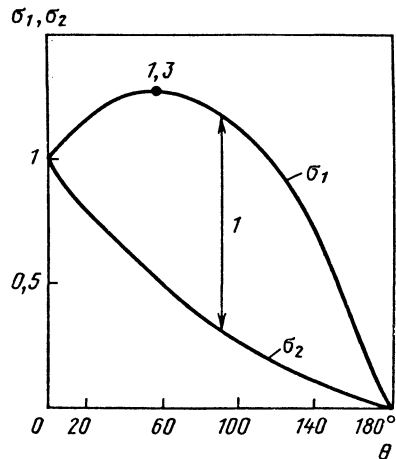


Рис. 3.3.6. Зависимость главных напряжений вблизи вершины трещины типа I от полярного угла  $\theta$

На рис. 3.3.12 показано, что максимум энергии оказывается при  $\theta=\pm\arccos(1/3)=70,5^\circ$  и выше значения энергии при  $\theta=0^\circ$  на одну треть.

Асимптотические формулы для напряжений и перемещений трещины типа III имеют вид

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}; \tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2};$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0;$$

$$w = \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2}, u = v = 0.$$

(3.3.12)

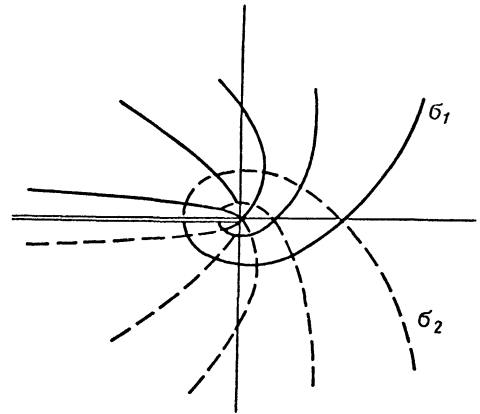


Рис. 3.3.9. Траектории главных напряжений в малой окрестности вершины трещины типа I

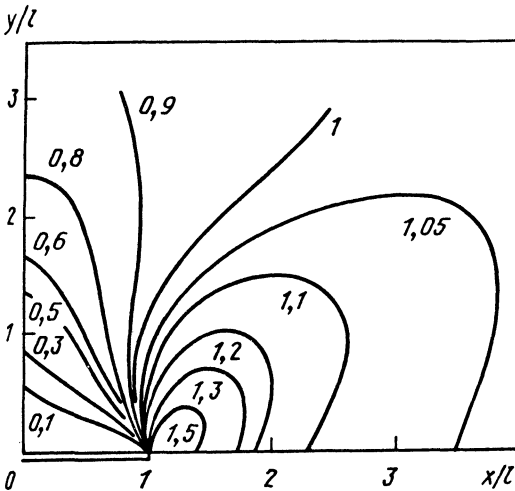


Рис. 3.3.7. Линии равных главных напряжений  $\sigma_1$  для трещины типа I

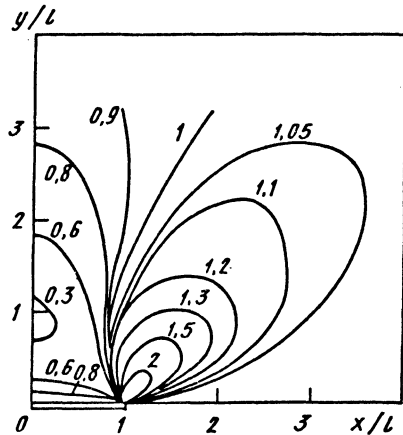


Рис. 3.3.10. Линии равных  $\sigma_{экр} = \sigma_1 - \sigma_2$  по третьей теории прочности для трещины типа I

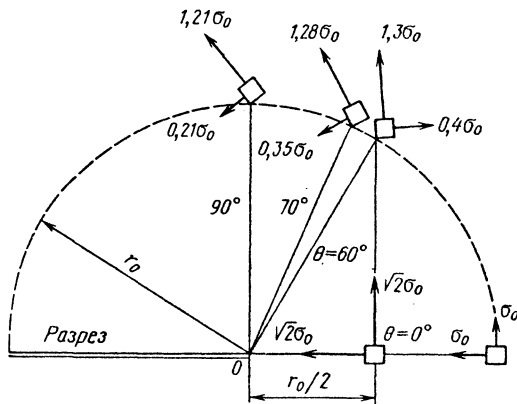


Рис. 3.3.8. Главные напряжения при фиксированных значениях угла  $\theta$  вблизи вершины трещины типа I.

Напряжение для масштаба  $\sigma_0 = K/\sqrt{2\pi r_0}$  ( $r_0 \ll l$ )

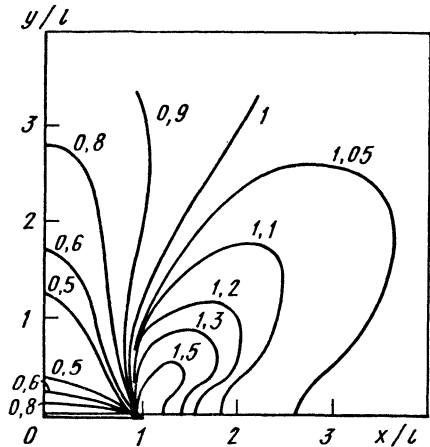


Рис. 3.3.11. Линии равных  $\sigma_{экр}$  по энергетической теории прочности для трещины типа I



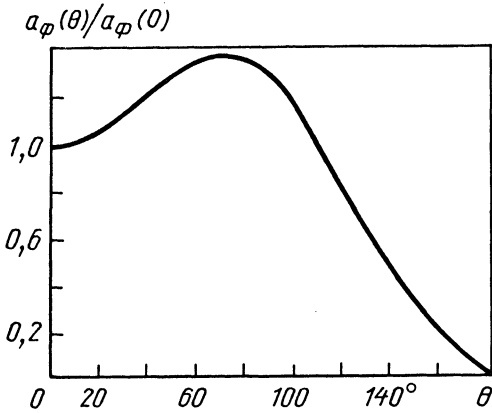


Рис. 3.3.12. Зависимость удельной энергии формоизменения  $a_\phi$  от угла  $\theta$  на фиксированном расстоянии от вершины трещины  $r_0$  (тип I)

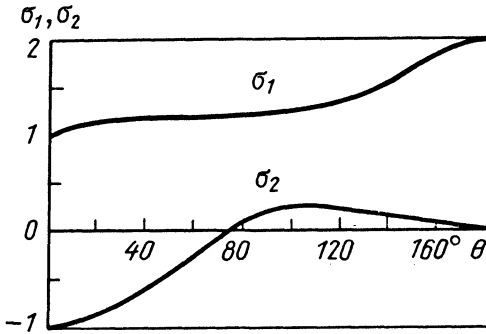


Рис. 3.3.13. Зависимость главных напряжений вблизи трещины типа II от угла  $\theta$ . Функции  $\sigma_1(\theta)$  и  $\sigma_2(\theta)$  нечетные

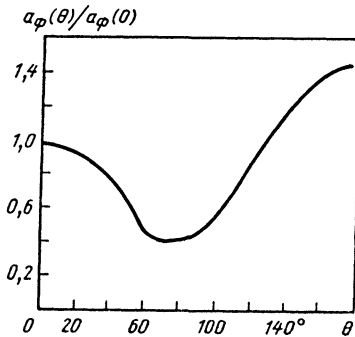


Рис. 3.3.14. Зависимость удельной энергии формоизменения  $a_\phi$  от углового аргумента для трещины типа II

На продолжении трещины впереди ее конца (при  $y=\theta=0$ ) напряжения  $\sigma_y$  и  $\sigma_x$  равны между собой и являются главными. Это позволяет полагать, что при плоском напряженном состоянии пластическое скольжение будет происходить под углом  $45^\circ$  к плоскости трещины и лицевой поверхности пластинки (так как  $\tau_{\max}=\sigma_y/2$  будет именно в этой площадке). При плоской деформации  $\sigma_z=\nu(\sigma_x+\sigma_y)=2\nu\sigma_y$  и возникающее объемное растяжение имеет меньшее по величине  $\tau_{\max}$ , чем при плоском напряженном состоянии. Поэтому пластическое скольжение затруднено, а размер пластической зоны (при прочих равных условиях) меньше, чем при плоском напряженном состоянии. При этом иногда говорят, что стеснение поперечной деформации препятствует развитию пластического течения.

Для трещин типа I максимальное напряжение  $\sigma_\theta$  при  $\theta=0$ , т.е. на продолжении трещины, максимальное  $\sigma_y$  будет при  $\theta=60^\circ$  и на 30 % превышает значение  $\sigma_\theta$  при  $\theta=0$ . Однако трещина, начиная распространяться, движется в направлении  $\theta=0$ . Это можно объяснить тем, что хотя направление (максимального) напряжения  $\sigma_y$  и перпендикулярно к плоскости трещины, точки с таким  $\sigma_y$  лежат не на продолжении трещины, а смещены в стороны. Если от  $\sigma_{\max}$  и возникают надрывы материала, то они располагаются так, как указано на рис. 3.3.15.

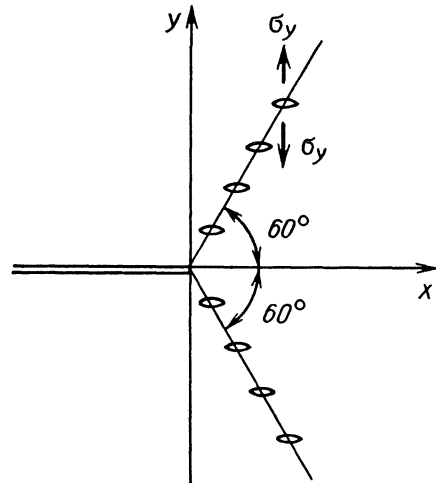


Рис. 3.3.15. Схема образования вторичных трещин от максимальных напряжений  $\sigma_y$

Из приведенных асимптотических формул следует, что при уменьшении расстояния от конца трещины напряжения неограниченно растут и при  $r=0$  напряжения равны “бесконечности”. Однако ясно, что задолго до “бесконечности” перестает быть справедливым

закон Гука и вступают в силу нелинейные зависимости между напряжениями и деформациями, развивается интенсивная пластическая деформация, а сами напряжения в конечном итоге оказываются ограниченными. Но не только в этом причина ограниченности напряжений. Даже в идеально упругом теле, когда линейный закон Гука справедлив для малых объемов непосредственно у поверхности разреза, при точном решении задачи теории упругости напряжения также будут ограниченными по величине.

В математическом решении, из которого затем получены асимптотические формулы для напряжений, граничные условия относились не к деформированной поверхности разреза, а сносились на ось  $x$ . Кроме того, у конца трещины в результате деформации возникают значительные изменения углов наклона свободных поверхностей, т.е. деформации соизмеримы с единицей. Для точной постановки задачи теории упругости требуется учет больших деформаций и соблюдение граничных условий на текущей поверхности разреза, т.е. на той, которая получается при деформации тела внешними нагрузками. При этом задача становится нелинейной и довольно сложной. Образующийся в конце разреза малый, но конечный, радиус кривизны возрастает с ростом величины внешних нагрузок и обеспечивает ограниченные (хотя и большие) напряжения.

При наличии в конце разреза малого радиуса кривизны  $\rho$  напряжения имеют следующий вид:

для трещин типа I

$$\sigma_{x,y} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 \mp \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) \mp \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3}{2} \theta \right];$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta - \frac{\rho}{2r} \sin \frac{3}{2} \theta \right];$$

(3.3.13)

для трещин типа II

$$\sigma_x = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ -\sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta \right) + \frac{\rho}{2r} \sin \frac{3}{2} \theta \right];$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta - \frac{\rho}{2r} \sin \frac{3}{2} \theta \right];$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) - \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3}{2} \theta \right];$$

для трещин типа III

$$\tau_{xy} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}; \quad \tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}.$$

Для трещин типа III начальный радиус кривизны в вершине трещины не отражается на напряженном состоянии.

В приведенных формулах начало полярных координат расположено так, что  $r \geq \rho/2$  ( $\rho > 0$ ). Для трещин типа I на самом конце разреза при  $\theta=0$  и  $r=\rho/2$  будет одноосное растяжение конечным напряжением  $\sigma_y$ :

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0; \quad \sigma_y = 2K_I / \sqrt{\pi \rho}. \quad (3.3.14)$$

Для больших  $r$  ( $r \gg \rho$ ) из приведенных формул следуют формулы (3.3.5) и (3.3.9).

Таким образом, в рассматриваемом идеально упругом теле с трещиной можно выделить три области (рис. 3.3.16).

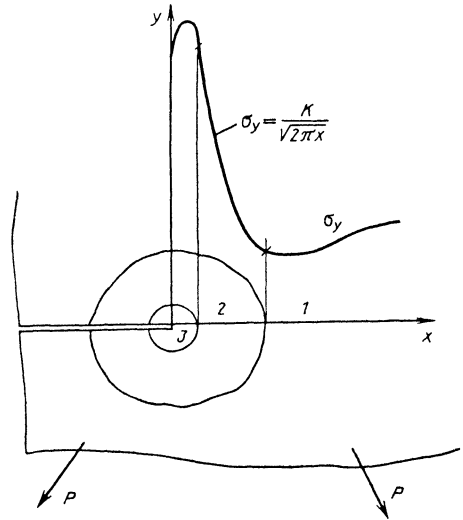


Рис. 3.3.16. Три области идеально упругого тела с трещиной: 1 - обычное решение теории упругости; 2 - асимптотическое решение; 3 - точное (детальное) решение

В области 1 напряженное состояние определяется из решения обычной задачи теории упругости в целом для тела с трещиной.

В области 2 напряженное состояние можно получить из напряженного состояния области 1 при малых (для области 1) расстояниях от конца разреза. Поскольку при этом область изменения независимых переменных (в данном случае  $r$  - радиус от конца разреза) сосредоточена в небольшом интервале, появляется возможность выделить преобладающие члены из общего выражения для напряженного состояния. По этой причине полученное решение называют асимптотическим.

В области 3 напряженное состояние нельзя получить из асимптотического решения, но, как уже указывалось, задачу следует решать в точной математической постановке. Из полученного решения находят напряженное состояние в области 2 в качестве асимптотического на больших

(для области 3) расстояниях. Таким образом, напряженное состояние в области 2 является асимптотическим как со стороны области 1, так и со стороны области 3.

В действительности, в конце разреза возникает пластическая зона разных форм и размеров в зависимости от свойств материала и условий нагружения. Если эта зона мала, то сохраняется деление тела на три области, причем третьей, самой маленькой областью, будет пластическая. С ростом нагрузки (если трещина не распространяется или распространяется, но медленно) пластическая зона растет, и ее размеры могут стать настолько большими, что вторая область (с асимптотическим решением, характеризующим коэффициентом интенсивности напряжений  $K$ ) исчезнет. В таком случае закономерности поведения тела с трещиной зависят от степени развития пластических деформаций у конца трещины, внутри пластической зоны.

Из предыдущего ясно большая роль коэффициента интенсивности напряжений в механике развития трещин. Из асимптотических формул (3.3.5)-(3.3.12) следует, что напряжения, перемещения и деформации зависят от геометрии и размеров тела, длины трещины и схемы приложения внешних нагрузок и их величины только через коэффициент интенсивности напряжений. Значения (интенсивность) напряжений у вершины трещины прямо пропорциональны коэффициенту  $K$  в асимптотических формулах, и вместо расчета самих напряжений часто бывает достаточно оперировать только этим коэффициентом. Можно предвидеть, что критерии разрушения могут включать в свою формулировку коэффициенты интенсивности напряжений, и поэтому методы отыскания этого коэффициента занимают видное место в механике развития магистральных трещин.

Основное определение коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$  представлено формулой (3.3.8) для трещины типа I. Для трещин остальных типов подобные формулы для  $K_{II}$  и  $K_{III}$  имеют аналогичный вид.

Далее изложим несколько приближенных методов расчета коэффициента  $K$ .

**Расчет коэффициента интенсивности напряжений по коэффициенту концентрации напряжений.** Между указанными в названии раздела коэффициентами существует принципиальная разница (вспомним, например, их размерности). Однако возможен предельный переход, устанавливающий связь между этими коэффициентами. Действительно, если имеется надрез с конечным радиусом кривизны  $\rho$ , то  $\sigma_{\max} = \alpha_\sigma \sigma_{\text{ном}}$ , и с уменьшением радиуса  $\sigma_{\max}$  растет. При стремлении  $\rho$  к нулю надрез переходит в трещиноподобный дефект, и  $\sigma_{\max}$  стремится к асимптотическому значению напряжения для трещин. Тогда для трещины типа I из формулы (3.3.14) можно записать

$$K_I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} \sigma_{y \max} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} \alpha_\sigma \sigma_{\text{ном}}. \quad (3.3.15)$$

Например, при растяжении плоскости с эллиптическим вырезом по Нейберу имеем  $\alpha_\sigma = 1 + 2\sqrt{l/\rho}$ , где  $l$  - большая полуось эллипса.

Подставляя  $\alpha_\sigma$  в формулу (3.3.15), получаем точное значение  $K$  для растянутой плоскости с одиночной трещиной:

$$K_I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} (1 + 2\sqrt{l/\rho}) \sigma = \sigma \sqrt{\pi l}. \quad (3.3.16)$$

Располагая из справочной литературы графиками зависимости  $\alpha_\sigma$  от параметров задачи, можно получить экстраполяцией коэффициенты интенсивности напряжений.

**Расчет коэффициента интенсивности напряжений методами теории упругости.** Для определения коэффициентов интенсивности напряжений можно использовать любые методы решения задачи теории упругости.

Приведем без вывода результаты аналитического расчета коэффициентов  $K_I$  и  $K_{II}$  для плоскости с одиночной трещиной, нагруженной, как показано на рис. 3.3.17. В этом случае имеем [9]

$$K_I = \frac{P_y}{2\sqrt{\pi l}} \sqrt{\frac{l+b}{l-b}} + \frac{P_x}{2\sqrt{\pi l}} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}; \quad (3.3.17)$$

$$K_{II} = -\frac{P_y}{2\sqrt{\pi l}} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} + \frac{P_x}{2\sqrt{\pi l}} \sqrt{\frac{l+b}{l-b}}.$$

Этот результат позволяет получить решение для любой схемы нагружения плоскости с одной трещиной, используя принцип суперпозиции.

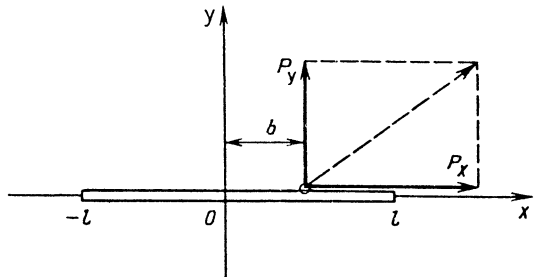


Рис. 3.3.17. Плоскость с сосредоточенной силой, приложенной к одному из берегов трещины

Из рис. 3.3.4 и 3.3.17 следует:  $P_y = \sigma_y dx$ ,  $P_x = \tau_{xy} dx$ ,  $b=x$ . Причем эти элементарные силы приложены на оба берега трещины (поэтому множитель 2 в формулах (3.3.17) сокращается). Используя формулы (3.3.17) отдельно для сил  $P_y$  и сил  $P_x$  (согласно рис. 3.3.4), запишем ( $|x| \leq l$ ,  $y=0$ ):

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \sigma_y(x) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} dx; \tag{3.3.18}$$

$$K_{II} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \tau_{xy}(x) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} dx.$$

Отсюда можно сделать вывод, что для нагрузки, самоуравновешенной на поверхности трещины, коэффициент интенсивности напряжений не зависит от упругих постоянных материала.

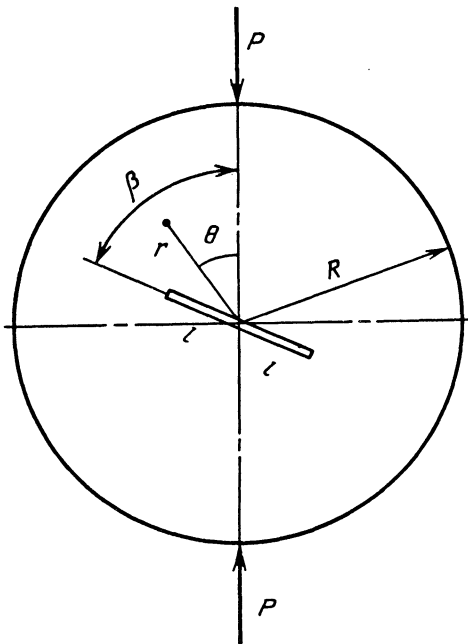


Рис. 3.3.18. Сжатый диск с наклонной трещиной

Рассмотрим сжатие диска радиусом  $R$  и толщиной  $t$  сосредоточенными силами  $P$  вдоль диаметра (рис. 3.3.18). Трещина длиной  $2l$  наклонена под углом  $\beta$  к линии нагружения. Полярная система координат  $r, \theta$  имеет полюс в центре диска, и угол  $\theta$  отсчитывается от линии нагружения. Решение задачи теории упругости для сжатого диска без трещины таково:

$$\sigma_\theta = \frac{P}{\pi R t} - \frac{2P}{\pi t} \left[ (R - r \cos \theta) \left( \frac{R \sin \theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta} \right)^2 + (R + r \cos \theta) \left( \frac{R \sin \theta}{R^2 + r^2 + 2Rr \cos \theta} \right)^2 \right];$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2P}{\pi t} R \sin \theta \left[ \frac{(R - r \cos \theta)(R \cos \theta - r)}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta)^2} + \frac{(R + r \cos \theta)(R \cos \theta + r)}{(R^2 + r^2 + 2Rr \cos \theta)^2} \right].$$

Подставив эти напряжения при  $\theta = \beta$  в формулы (3.3.18), получим коэффициенты интенсивности напряжений I и II типов:

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \sigma_\theta \sqrt{\frac{l+r}{l-r}} dr = \frac{P}{Rt} \sqrt{\frac{l}{\pi}} Y_I(\beta);$$

$$K_{II} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \tau_{r\theta} \sqrt{\frac{l+r}{l-r}} dr = \frac{P}{Rt} \sqrt{\frac{l}{\pi}} Y_{II}(\beta).$$

Поправочные функции  $Y_I(\beta)$  и  $Y_{II}(\beta)$  показаны на рис. 3.3.19 для трех значений  $l/R$ . Область положительных  $K_I$ , раскрывающих трещину, расположена при  $0 < \beta < 30^\circ$ , а максимум коэффициента  $K_{II}$  - диапазоне  $\beta = 40 + 45^\circ$ .

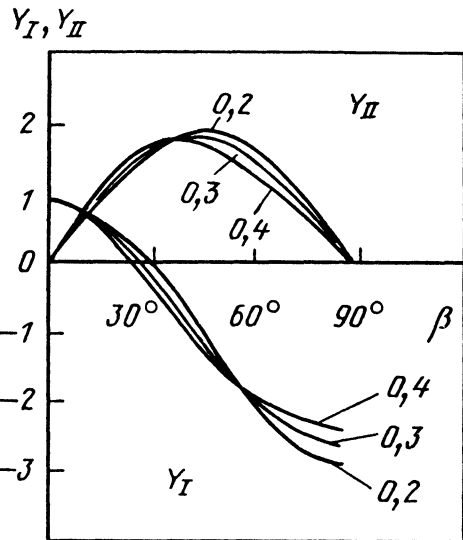


Рис. 3.3.19. Графики корректирующих функций в формулах для  $K_I$  и  $K_{II}$  сжатого диска с трещиной

Применение аналитических методов решения в деталях сложной формы становится затруднительным, и на первый план выступают различные варианты приближенного и численного решений задач теории упругости для расчета коэффициента  $K$  (см., например [5, 6, 11]).

В расчетах часто записывают формулу для  $K$  в виде

$$K = \sigma \sqrt{\pi l} Y(l),$$

в которой сомножитель  $\sigma \sqrt{\pi l}$  представляет собой коэффициент интенсивности напряжений

растянутой плоскости с одиночной трещиной длиной  $2l$ , а  $Y(l)$  - так называемая  $K$ -тарировка или поправочный множитель, учитывающий конкретный вид плоского тела с трещиной. Так, например, при растяжении напряжением  $\sigma$  полосы шириной  $2b$  с центральной трещиной длиной  $2l$  поправочный множитель (Ирвин, 1958 г.)

$$Y(l) = \sqrt{\frac{2b}{\pi l} \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2b}},$$

или (Федерсен, 1966 г.)

$$Y(l) = \sqrt{\sec \frac{\pi l}{2b}}.$$

$K$ -тарировку Ирвина (формулу тангенса) можно использовать и для полосы с двумя симметричными краевыми трещинами (каждая длиной  $l$ ) и для полосы шириной  $b$  с одной краевой трещиной (длиной  $l$ ). В последнем случае при  $l/b \rightarrow 0$  множитель  $Y(l) \rightarrow 1,12$ .

В наиболее глубокой точке поверхностной полуэллиптической трещины коэффициент интенсивности напряжений можно вычислять по формуле [11]

$$K = \eta(\sigma_p M_p + \sigma_q M_q) \sqrt{\pi l / Q},$$

где  $\eta$  - коэффициент, учитывающий концентрацию напряжений;  $\sigma_p, \sigma_q$  - составляющие напряжений растяжения и изгиба;  $l$  - глубина трещины; корректирующие сомножители

$$M_p = 1 + 0,12 \left(1 - \frac{l}{c}\right);$$

$$M_q = 1 - 0,64 \frac{l}{h}; Q = 1 + 1,46(l / 2c)^{1,65};$$

здесь  $c$  - полудлина трещины на поверхности стенки;  $h$  - длина зоны, в пределах которой составляющая изгибных напряжений положительна.

Формула справедлива при  $l \leq 0,25t$  и  $l/c \leq 2/3$  ( $t$  - толщина стенки изделия).

При расчете зон, где отсутствует концентрация напряжений,  $\eta=1$ .

Для зон перехода жесткостей (соединения фланцев с цилиндрической частью корпуса, переходные поверхности и др.) коэффициент  $\eta$  определяют по формулам:

при  $0 < t/R_2 \leq 5$

$$\eta = 1 + (\alpha_\sigma - 1)^{0,71} 1,8 / (t/R_2);$$

при  $t/R_2 > 5$

$$\eta = 1 + (\alpha_\sigma - 1)^{0,79} / (t/R_2)^2.$$

При  $\eta > \alpha_\sigma$  принимают  $\eta = \alpha_\sigma$ .

при  $t/R_1 \leq 0,8$

$$\eta = [1 + 5(\alpha_\sigma - 1) \exp(-0,86t / R_1)]^{1/2};$$

Для зон отверстий (присоединения патрубков, штуцеров, труб) коэффициент  $\eta$  определяют по формулам:

при  $t/R_1 > 0,8$

$$\eta = [1 + 2(\alpha_\sigma - 1) / (t / R_1)]^{1/2}.$$

Здесь  $R_1$  - радиус отверстия;  $R_2$  - радиус кривизны концентратора в рассчитываемом сечении;  $\alpha_\sigma$  - теоретический коэффициент концентрации (допускается равным  $\alpha_\sigma$  при растяжении).

Составляющие напряжений растяжения и изгиба

$$\sigma_p = \frac{1}{t} \int \sigma dx; \quad \sigma_q = \sigma_{\max} - \sigma_p,$$

где  $\sigma$  - распределение напряжений (кольцевых или осевых) в расчетном сечении стенки;  $\sigma_{\max} = \sigma$  на растянутой поверхности стенки.

**Метод сечения для приближенного определения коэффициента интенсивности напряжений.** Рассмотрим плоское тело, содержащее трещину и нагруженное в своей плоскости. Выделим воображаемым сечением (которое может быть ломаным) часть тела таким образом, чтобы это сечение проходило через конец трещины. Далее записываем условия равновесия внешних и внутренних сил, действующих на оставшуюся часть тела. Дополнительное усилие, возникающее у конца трещины в результате концентрации

напряжений, равно  $\int_0^a \sigma_\theta dr$ , где величину  $a$

можно определить из условия, что напряжение  $\sigma_\theta$  при  $r=a$  равно номинальному напряжению. Условие равновесия сводится к тому, что усилие, не передающееся через линию трещины, компенсируется усилием от концентрации напряжений у вершины трещины.

**Пример 1.** Задача Гриффитса - бесконечная пластина с трещиной растягивается равномерно распределенным напряжением  $\sigma$  в направлении, перпендикулярном к линии трещины.

Усилие, не передающееся через линию трещины, равно  $2\sigma l$  ( $2l$  - длина трещины), а возросшее напряжение у концов трещины созда-

ет дополнительное усилие, равное  $2 \int_0^a \sigma_\theta dr$ . Раз-

мер  $a$  находим из условия  $\sigma_\theta(r=a) = \sigma$ , т.е.

$$K / \sqrt{2\pi a} = \sigma, \text{ откуда } a = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K}{\sigma} \right)^2.$$

Условие равновесия имеет вид

$$2\sigma l - 2 \int_0^a \sigma_\theta dr = 0.$$

Подставив сюда  $\sigma_\theta = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}$  и проинтегрировав, находим коэффициент интенсивности напряжений

$$K = \sigma\sqrt{\pi l}$$

Этот результат совпадает с точным (3.3.16).

**Пример 2.** Трещина в растянутой пластинке расположена под углом  $90^\circ - \alpha$  к направлению растяжения (рис. 3.3.20). В этом случае для описания напряженного состояния около конца трещины необходимы два коэффициента:  $K_I$  и  $K_{II}$ . Проводим сечение в направлении трещины. В этом сечении номинальные напряжения  $\sigma_n = \sigma \cos^2 \alpha$ ,  $\tau_{nt} = \sigma \cos \alpha \sin \alpha$ . Сумма проекций усилий на нормаль к сечению дает уравнение

$$2\sigma_n l - 2 \int_0^a \sigma_\theta dr = 0; \quad \sigma_\theta = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}},$$

где по-прежнему  $a = K_I^2 / (2\pi\sigma_n^2)$ . Сумма проекций усилий на направление сечения дает уравнение

$$2\tau_{nt} l - 2 \int_0^{a'} \tau_{r\theta} dr = 0; \quad \tau_{r\theta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}},$$

где  $a' = K_{II}^2 / (2\pi\tau_{nt}^2)$ .

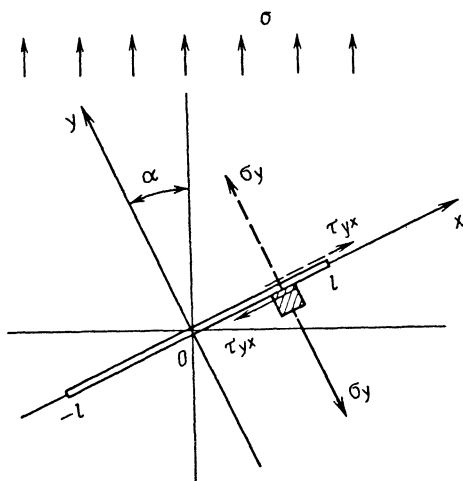


Рис. 3.3.20. Растянутая плоскость с наклонной трещиной (штриховой линией показаны напряжения, возникающие на верхней грани выделенного элемента в сплошном теле; сплошными линиями - на нижнем берегу трещины)

Из первого уравнения равновесия получаем  $K_I = \sigma \cos^2 \alpha \sqrt{\pi l}$ , из второго -  $K_{II} = \sigma \cos \alpha \sin \alpha \sqrt{\pi l}$ . Этот результат совпадает с ранее полученным для диска при  $l/R \rightarrow 0$ ,  $90^\circ - \alpha = \beta$  и  $\sigma = P/(Rt)$ .

Недостаток метода в том, что он не позволяет оценить погрешности решения (при отсутствии точного решения для сравнения).

Учитывая возрастающую потребность современной техники в оценке прочности тел с трещинами, следует признать, что сложные методы математической теории трещин должны быть дополнены пусть менее точными, но зато более простыми приемами вычислений, в которых пониженная точность расчета компенсируется очень малой трудоемкостью.

**Устойчивые и неустойчивые состояния тела с трещиной.** Тело с трещиной находится в состоянии механического равновесия, когда в любом элементе объема тела (как и для всего тела в целом) соблюдаются условия равновесия. Это означает, что нагрузка постоянна, нет движения элементов объема, следовательно, нет распространения трещины (трещина неподвижна). Для того, чтобы трещина стала распространяться, необходимо либо увеличить внешнюю нагрузку, либо (при постоянной нагрузке) снизить работу разрушения материала. С медленным ростом нагрузки трещина медленно растет. Малому приращению нагрузки отвечает малое приращение длины трещины, и, следовательно, рост нагрузки сопровождается соответствующим ростом длины трещины. Такое состояние тела с трещиной называют устойчивым (иногда квазистатическим или докритическим) ростом трещины (или трещину называют устойчивой). Для устойчивости трещины соблюдается условие  $dP/dl > 0$ , т.е. в предельном состоянии равновесия (при соблюдении критериев разрушения) нагрузка является возрастающей функцией длины трещины. Разумеется, что устойчивая трещина может находиться и в движущемся теле, для которого в целом условия равновесия не соблюдаются.

Неустойчивой называют трещину, когда в некотором объеме, окружающем трещину, нарушаются условия механического равновесия. При этом трещина распространяется и это распространение может происходить при постоянной нагрузке. Для тела в целом условия равновесия при наличии неустойчивой трещины могут сохраняться. В предельном состоянии равновесия для неустойчивой трещины соблюдается условие  $dP/dl < 0$ , т.е. для остановки трещины надо успеть снизить нагрузку. Однако скорость трещины в закритическом состоянии настолько велика, что при испытании образцов на испытательных машинах успеть снять нагрузку до полного разрушения образца практически не удается (поскольку машина обладает некоторой податливостью). Кроме того, даже при полностью удаленной внешней нагрузке трещина может расти от наличия упругой энергии в самом образце, так как для того, чтобы разгрузить образец полностью во всех его точках, требуется известное время.

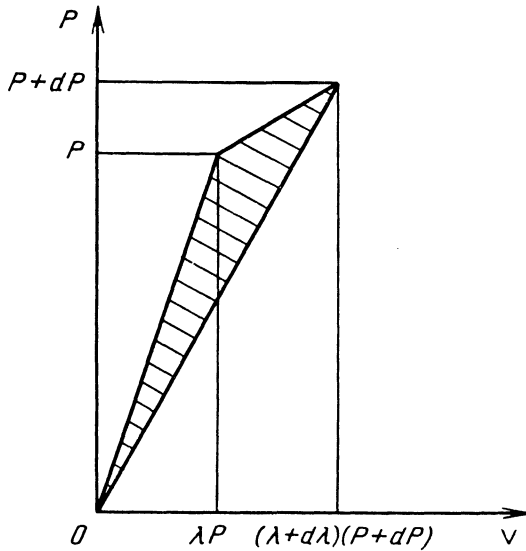


Рис. 3.3.21. Диаграмма деформирования упругого образца с трещиной

**Формула податливости Ирвина.** Пусть при упругом нагружении плоского тела толщиной  $t$  трещина подросла на длину  $dl$ . На диаграмме деформирования «сила  $P$  - смещение  $v$ » начало продвижения трещины соответствует точке с координатами  $(P, v)$ , а конец  $(P+dP, v+dv)$  (рис. 3.3.21). При разгрузке из этих двух точек прямые линии идут в начало координат, а площадь треугольника между ними представляет собой выделенную упругую энергию, равную работе, затраченной на продвижение трещины. Если обозначить выделенную упругую энергию на единицу площади трещины через  $G$ , то

$$Gtdl = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & P & \lambda P \\ 1 & P+dP & (\lambda+dl)(P+dP) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} P^2 dl.$$

Здесь принято, что  $v = \lambda P$ , где  $\lambda$  - коэффициент податливости. При этом  $v+dv = (\lambda+dl)(P+dP)$ . Учитывая, что  $d\lambda = \frac{d\lambda}{dl} dl$ ,

получаем формулу податливости

$$G = \frac{P^2}{2t} \frac{d\lambda}{dl}. \quad (3.3.19)$$

Эту формулу применяют, например, для определения соответствующего коэффициента интенсивности напряжений по известному соотношению:

для плоского напряженного состояния

$$EG = K^2, \quad (3.3.20)$$

для плоской деформации

$$EG = (1 - \nu^2) K^2.$$

Помимо этого ясно, что, поскольку рост трещины обусловлен балансом энергий - выделяющейся и затраченной на этот рост, то можно сформулировать энергетический критерий разрушения, восходящий к Гриффитсу, в таком виде:

$$G \leq G_c. \quad (3.3.21)$$

Здесь  $G$  - приток энергии в вершину трещины;  $G_c$  - удельная (на единицу площади) работа разрушения, иначе, вязкость разрушения.

При  $G < G_c$  трещина не растет, при  $G = G_c$  трещина получает возможность распространяться.

Принимая во внимание равенства (3.3.20), можно сказать, что силовой (3.3.2) и энергетический (3.3.21) критерии разрушения эквивалентны.

Затраты энергии на образование новой поверхности тела в большой мере связаны с размерами и формой пластической зоны перед вершиной трещины. Поскольку с изменением толщины плоской детали размеры пластической зоны также изменяются, то и величина  $G_c$  оказывается зависящей от толщины образца. Поэтому при экспериментальном определении  $G_c$  (или  $K_{Ic}$ ) желательно указывать и толщину образца. При достаточно большой толщине размеры пластической зоны стабилизируются,  $G_c$  и  $K_{Ic}$  становятся постоянными и их в этом случае обозначают  $G_{Ic}$  и  $K_{Ic}$  и считают постоянными материала. При этом напряженное состояние вокруг фронта трещины близко к всестороннему растяжению при плоской деформации.

**Распределение напряжений в упругопластической зоне у вершины трещины.** Приближенную оценку пластической зоны перед вершиной трещины можно получить из критерия пластичности, подставив в него решения упругой задачи для рассматриваемого тела.

Асимптотические формулы, например, для трещины типа I (3.3.5) позволяют получить выражения для главных напряжений:

$$\sigma_{1,2} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 \pm \sin \frac{\theta}{2} \right); \quad (3.3.22)$$

$$\sigma_3 = \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = 2\nu \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (\text{плоская де-}$$

формация);

$\sigma_3 = 0$  (плоское напряженное состояние).

Подставив эти главные напряжения в критерий пластичности Мизеса (энергетическая теория формоизменения):

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{0,2}^2, \quad (3.3.23)$$

найдем уравнение границы пластической зоны (рис. 3.3.22, а). Аналогичные вычисления для трещин типа II и III приводят к уравнениям границ пластических зон, форма которых показана на рис. 3.3.22, б, в (единица длины равна  $\rho_{r,y} / (K/\sigma_{0,2})^2$ ).

можно считать, что  $\lambda = \text{const}$ , причем  $0,8 < \lambda < 1$  в зависимости от вида диаграммы деформирования  $\sigma_f = \sigma_f(\epsilon_i)$ .

Реальная форма пластической зоны зависит от многих (неучитываемых в рассматриваемой модели) факторов и поэтому только в общих чертах повторяет аналитические или численные решения. Например, на рис. 3.3.23 показан результат уточненного решения для границы пластических зон трещины типа I в растягиваемой плоскости.

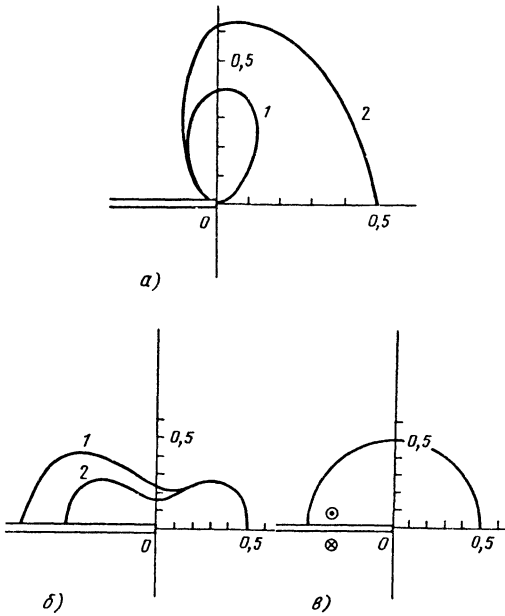


Рис. 3.3.22. Форма пластических зон по критерию Мизеса для трещины типа I (а), типа II (б) и типа III (в): 1 - плоская деформация; 2 - плоское напряженное состояние

В результате пластического течения вокруг вершины трещины возникает рост деформаций с одновременным падением напряжений. При этом, исходя из условий равновесия, размеры пластической области будут больше определенных подстановкой упругого решения в известные условия пластичности. Это можно учесть соответствующим уменьшением предела текучести в виде  $\sigma_{\text{эф}} = \lambda \sigma_{0,2}$  при  $\lambda < 1$ . Следовательно, можно полагать, что форма пластической зоны определяется соотношением (на базе критерия пластичности Мизеса)

$$\sigma_i = \lambda \sigma_{0,2}, \quad (3.3.24)$$

где  $\sigma_i$  - интенсивность напряжений в окрестности вершины трещины, а  $\lambda$  есть функция координат точек. Однако для приближенных оценок

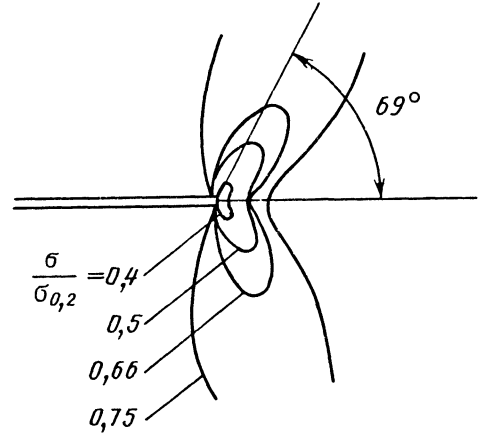


Рис. 3.3.23. Форма пластической зоны для трещины типа I (показатель упрочнения  $n=0,05$ )

Радиальное и угловое распределение напряжений и деформаций, в отличие от упругого, внутри пластической зоны разное. Хорошая аппроксимация напряженного состояния  $\sigma_{ij}^{(1)}$  (в первом приближении) в пластической зоне может быть получена из выражения

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \sqrt{\frac{E_s}{E}} \sigma_{ij}, \quad (3.3.25)$$

в котором  $\sigma_{ij}$  - компоненты напряженного состояния упругого приближения;  $E_s$  - секущий модуль диаграммы деформирования  $\sigma_f(\epsilon_i)$ .

Основываясь на соотношении Нейбера для коэффициентов концентрации напряжений и деформаций в пластической области, можно, зная напряжения, найти и деформации, поскольку их покомпонентное произведение можно считать постоянным.

$$\text{Например, } \bar{\sigma}_y^{(p)} \bar{\epsilon}_y^{(p)} = \bar{\sigma}_y^2 \text{ и т.д.,}$$

где

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_y / \sigma_{0,2}; \quad \bar{\epsilon}_y = \epsilon_y / \epsilon_{0,2}; \quad \epsilon_{0,2} = \sigma_{0,2} / E;$$

верхний индекс (p) означает принадлежность соответствующей величины к пластической области.



Поле напряжений и деформаций в пластической области можно выразить также посредством коэффициентов интенсивности напряжений  $M_\sigma$  и деформаций  $M_\epsilon$  в пластической области [3, 4]. Перед вершиной трещины на ее продолжении (но не далее чем на 20% от  $l$ ) можно построить эпюры интенсивности напряжений  $\sigma_i$  и интенсивности деформаций  $\epsilon_i$  по формулам:

$$\sigma_i = \frac{M_\sigma}{(\sqrt{2\pi r})^{mp}} \sigma_{0,2}; \quad \epsilon_i = \frac{M_\epsilon}{(\sqrt{2\pi r})^p} \frac{\sigma_{0,2}}{E} \quad (3.3.26)$$

Определения величин  $M_\sigma$ ,  $M_\epsilon$ ,  $p$  см. с.159.

Представим диаграмму деформирования материала через интенсивность пластической деформации  $\epsilon_{ip}$  в виде

$$\sigma_i = A \epsilon_{ip}^n, \quad (3.3.27)$$

где  $A$  и  $n$  - постоянные материала. Тогда компоненты напряжения и деформации в пластической зоне перед вершиной трещины имеют вид

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = A \left( \frac{J}{AI_n} \right)^{\frac{n}{1+n}} \frac{1}{r^{n/(1+n)}} f_{ij}(\theta); \quad (3.3.28)$$

$$\epsilon_{ij}(r, \theta) = \left( \frac{J}{AI_n} \right)^{\frac{1}{1+n}} \frac{1}{r^{1/(1+n)}} \varphi_{ij}(\theta),$$

где  $J$  - инвариантный энергетический интеграл (см.с.159);  $I_n$  - функция показателя упрочнения  $n$  (рис. 3.3.24).

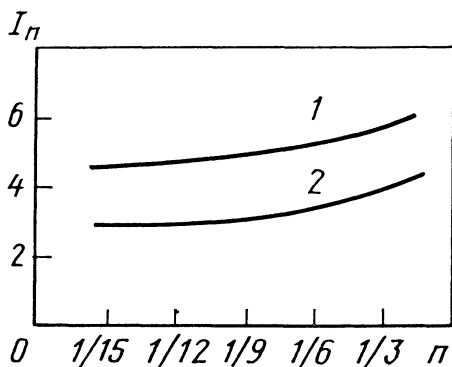


Рис. 3.3.24. Зависимость параметра  $I_n$  от показателя упрочнения  $n$ : 1 - плоская деформация; 2 - плоское напряженное состояние

Величина  $J$ -интеграла отражает некоторую среднюю характеристику поля напряжений и деформаций внутри пластической зоны у вершины трещины.

Функции  $f_{ij}(\theta)$  и  $\varphi_{ij}(\theta)$  угловой координаты  $\theta$  приведены на рис. 3.3.25 и 3.3.26.

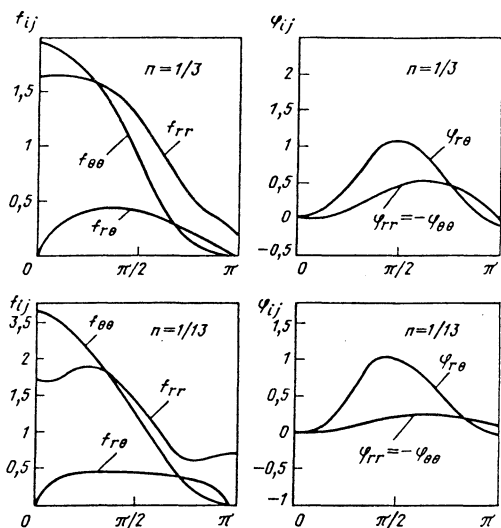


Рис. 3.3.25. Эпюры безразмерных напряжений и деформаций в пластической зоне у вершины трещины при растяжении при плоской деформации

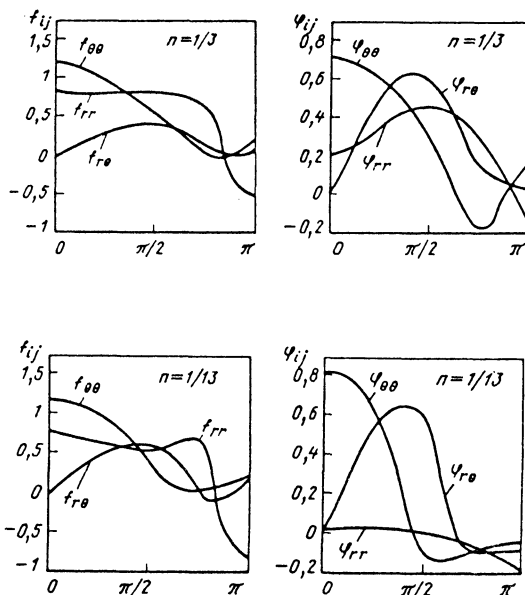


Рис. 3.3.26. Эпюры безразмерных напряжений и деформаций при плоском напряженном состоянии

**Пластическая поправка Ирвина.** В металлических материалах перед вершиной трещины неизбежно возникает пластическая зона. При действии напряжений, малых сравнительно с пределом текучести, наличием пластической зоны можно пренебречь и строить все соотношения на основе упругости материала. При этом справедливы все соотношения раздела 3.3.1, приведенные выше. Если действующие номинальные напряжения приближаются к пределу текучести, то наличие пластической зоны следует учитывать. Для этого можно по-прежнему использовать все соотношения, вытекающие из теории упругости, но длину трещины эффективным образом увеличивают для сглаживания эффектов, возникающих от наличия пластической зоны, что позволяет по-прежнему не принимать во внимание наличие пластической зоны.

Приближенно радиус круговой пластической зоны  $r_y$  находят из условия равенства асимптотического напряжения  $\sigma_y$  пределу текучести материала  $\sigma_{0,2}$ . Отсюда

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K}{\sigma_{0,2}} \right)^2 \quad (3.3.29)$$

Соответственно, диаметр пластической зоны равен  $2r_y$ .

Эта пластическая зона как бы сдвигает область асимптотического распределения напряжений на расстояние  $r_y$ . Поэтому, если длину трещины фиктивно увеличить на  $r_y$ , появляется возможность использовать все ранее полученные выражения и критерии линейной механики разрушения.

Итак, пластическая поправка Ирвина состоит в замене реальной длины трещины  $l$  на эффективную длину

$$l_{\text{эфф}} = l + r_y = \varphi l, \quad (3.3.30)$$

где  $\varphi$  - поправочный коэффициент.

С учетом формул (3.3.29), (3.3.30) и (3.3.4) находим

$$\varphi = 1 + \frac{r_y}{l} = 1 + \frac{1}{2\pi l} \frac{K^2}{\sigma_{0,2}^2} = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^2.$$

При плоской деформации вследствие малости пластической зоны поправку можно не вводить.

Возможны также и другие формулы для коэффициента  $\varphi$ , исходящие из других расчетов длины пластической зоны. Например, исходя из модели тонкой пластической зоны при плоском напряженном состоянии [9], найдем

$$\varphi = \frac{1}{2} (1 + \sec(\pi\sigma / 2\sigma_{0,2})).$$

Эту поправку используют и при обработке данных эксперимента для определения характе-

ристики трещиностойкости  $K_c$  и при расчете элементов конструкций.

**Пример.** Определить остаточную прочность цилиндрического сосуда, работающего на внутреннее давление. В стенке сосуда обнаружена сквозная трещина длиной 18 мм. Сосуд имеет средний диаметр  $D=0,92$  м, толщина стенки  $t=9$  мм. Предварительно с целью определения характеристики трещиностойкости из материала сосуда с пределом текучести  $\sigma_{0,2}=340$  МПа проведены испытания на растяжение плоского образца шириной  $b=100$  мм с центральной сквозной трещиной длиной  $2l=30$  мм. Разрушающее напряжение получено  $\sigma_c=160$  МПа.

Сначала по данным испытания образца находим вязкость разрушения  $K_c$  по формуле

$$K_c = \frac{P_c}{t\sqrt{b}} Y_1 = \frac{\sigma_c t b}{t\sqrt{b}} Y_1 = \sigma_c \sqrt{b} Y_1. \quad (3.3.31)$$

Здесь  $Y_1=Y_1(2l/b)$  - корректирующий множитель.

Пока в качестве первого приближения находим  $Y_1^{(1)}$  и соответственно  $K_c^{(1)}$  без пластической поправки. Отношение  $2l/b=30/100=0,33$ . По ГОСТ 25.506 - 85 (с.20, табл.1) имеем  $Y_1(0,33)=0,77$ . Следовательно, вязкость разрушения

$$K_c^{(1)} = \sigma_c \sqrt{b} Y_1 = 160\sqrt{100} \cdot 0,77 = 1232 \text{ Н/мм}^{3/2}.$$

Находим диаметр пластической зоны

$$2r_y = \frac{K_c^2}{\pi\sigma_{0,2}^2} = \frac{1232^2}{\pi 340^2} = 4,18 \text{ мм}.$$

Теперь находим отношение  $2l/b$  с учетом пластической поправки

$$\frac{2l_{\text{эфф}}}{b} = \frac{2(15 + 2,09)}{100} = 0,34.$$

По этому отношению находим уточненный поправочный множитель

$$Y_1(0,34)=0,785,$$

и более правильное значение вязкости разрушения станет

$$K_c = \sigma_c \sqrt{b} \cdot Y_1 = 160\sqrt{100} \cdot 0,785 = 1256 \text{ Н/мм}^{3/2}.$$

Теперь перейдем к расчету сосуда с помощью силового критерия (3.3.2). Поскольку отношение диаметра сосуда к толщине стенки велико (около ста), то можно пренебречь кривизной стенки и использовать формулу (3.3.4) для коэффициента  $K$ . Тогда из условия  $K=K_c$  найдем остаточную прочность  $\sigma_c$ , учитывая в выражении  $K$  пластическую поправку.

Итак, уточненный диаметр пластической зоны

$$2r_y = \frac{K_c^2}{\pi\sigma_{0,2}^2} = \frac{1256^2}{340^2} = 4,34 \text{ мм.}$$

Критериальное условие

$$\sigma\sqrt{\pi(l+r_y)} = K_c$$

или

$$\sigma_c\sqrt{\pi(9+2,17)} = 1256,$$

откуда разрушающее окружное напряжение

$$\sigma_c = \frac{1256}{\sqrt{\pi 11,17}} = 212 \text{ МПа.}$$

Остаточная прочность в виде разрушающего внутреннего давления

$$p_c = \frac{\sigma_c 2t}{D} = 4,15 \text{ МПа,}$$

что составляет 0,625 (=212/340) от предельной прочности по пределу текучести.

Представим еще один критерий разрушения.

Критерий плотности энергии деформации основан на коэффициенте плотности энергии деформации [см., например, 3]

$$S = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2, \quad (3.3.32)$$

где

$$a_{11} = (1 + \cos \theta)(\alpha - \cos \theta)(16\pi\mu)^{-1};$$

$$a_{12} = [2 \cos \theta - (\alpha - 1) \sin \theta](16\pi\mu)^{-1};$$

$$a_{22} = [(\alpha + 1)(1 - \cos \theta) +$$

$$+ (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)](16\pi\mu)^{-1};$$

$\theta$  - угловая координата точки у вершины трещины;  $\alpha=3-4\nu$  для плоской деформации;  $\alpha=(3-\nu)/(1+\nu)$  - для плоского напряженного состояния;  $\nu$  - коэффициент Пуассона;  $\mu$  - модуль упругости при сдвиге.

Коэффициент  $S$  зависит от упругих свойств материала, от угла  $\theta$  через коэффициенты  $a_{ij}$  и представляет собой объемную плотность энергии деформации, определенную в точках окружности единичного радиуса вокруг вершины трещины.

Критерий разрушения изотропного материала состоит из двух условий.

1. Трещина растет в том направлении (вдоль радиуса из вершины), в котором величина  $S$  принимает стационарное значение, т.е.

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_0. \quad (3.3.33)$$

2. Трещина начинает распространяться в направлении, определяемом п.1, когда величина  $S$  достигает критического значения, т.е.

$$S \leq S_c. \quad (3.3.34)$$

В частности, при разрушении плоского образца с трещиной путем отрыва имеем  $\theta_0=0$ ,  $K_{II}=0$ ,  $K_I=K_{Ic}$  и величина  $S_c$  оказывается связанной с вязкостью разрушения  $K_{Ic}$  соотношением

$$S_c = \frac{(\alpha - 1)}{8\pi} K_{Ic}^2.$$

Критерий начала распространения трещины в форме (3.3.2) записан для трещины типа I. Аналогичная запись будет и для трещин типов II и III. В случае, когда имеет место сложное нагружение, при котором одновременно  $K_I \neq 0$ ,  $K_{II} \neq 0$  и  $K_{III} \neq 0$ , можно постулировать, что критерий разрушения имеет форму

$$\Phi(K_I, K_{II}, K_{III}) = 0. \quad (3.3.35)$$

Это есть уравнение предельной поверхности, ограничивающей в пространстве коэффициентов  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  область, возможно замкнутую, внутри которой изображающая точка соответствует нераспространяющейся трещине. На координатных осях поверхность  $\Phi=0$  отсекает постоянные материала  $K_{Ic}$ ,  $K_{IIc}$ ,  $K_{IIIc}$ . Точка на поверхности (3.3.35) означает наступление предельного состояния равновесия, и трещина получает возможность расти. Для практического применения конкретный вид уравнения (3.3.35) должен быть получен специально. В качестве некоторого приближения можно воспользоваться условием, что область допустимых состояний имеет прямоугольную форму и ограничена плоскостями

$$K_I = K_{Ic}; K_{II} = K_{IIc} \text{ и } K_{III} = K_{IIIc}. \quad (3.3.36)$$

### 3.3.2. КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН У ТРЕЩИН

При относительно высоких уровнях приложенных нагрузок и достаточной пластичности материалов в сечении с трещиной возникают большие пластические зоны, соизмеримые с остаточным (нетто) сечением детали. В этих случаях модели линейной механики разрушения неприменимы из-за отсутствия области с асимптотическим распределением напряжений по формулам (3.3.9)-(3.3.12).

Необходимые для расчета параметры задачи и критериальные условия нелинейной механики разрушения основаны на наличии пластической зоны и учитывают пластические свойства материала.

В линейной механике разрушения по сути только один критерий разрушения (3.3.2); в не-

линейной механике разрушения подобных критериев несколько; выбор между ними в значительной мере субъективен и опирается главным образом на имеющиеся расчетные и экспериментальные возможности.

Перечислим несколько основных критериев разрушения.

Исторически первым появился критерий разрушения в виде пластического раскрытия  $\delta$  вершины трещины [9]

$$\delta \leq \delta_c \quad (3.3.37)$$

Здесь раскрытие  $\delta$  должно быть представлено для данной формы тела и схемы нагружения через нагрузки, размеры детали и трещины. Справа в условии (3.3.37) стоит критическое раскрытие трещины, находимое экспериментально.

На основании модели трещины с тонкой пластической зоной для растянутой напряжением  $\sigma$  плоскости получено

$$\delta = \frac{8\sigma_{0,2}l}{\pi E} \ln \sec \frac{\pi\sigma}{2\sigma_{0,2}}, \quad (3.3.38)$$

где  $\sigma$  - окружное напряжение от внутреннего давления  $p$ , причем  $\sigma = pD/(2t)$ .

Формулу (3.3.38) можно использовать и для тонкостенных труб со сквозными продольными трещинами, умножив правую часть на корректирующий множитель  $M$ , равный

$$M = 1 + 1,61 \frac{l^2}{Rt}, \quad (3.3.39)$$

где  $l$  - полудлина трещины;  $R$  - средний радиус трубы;  $t$  - толщина стенки.

К деформационным критериям разрушения относят также критерий в виде [4]

$$M_\epsilon \leq M_{\epsilon c} \quad (3.3.40)$$

Здесь  $M_\epsilon$  - коэффициент интенсивности деформаций в пластической зоне у вершины трещины, а  $M_{\epsilon c}$  - его экспериментально определяемое критическое значение.

Коэффициент  $M_\epsilon$  вычисляют в зависимости от величины интенсивности номинального напряжения  $\sigma_{\text{н}}$ , а именно:

$$\text{при } \sigma_{\text{н}} < \sigma_T \quad M_\epsilon = (K/\sigma_T)^p;$$

$$\text{при } \sigma_{\text{н}} \geq \sigma_T \quad M_\epsilon = \left( \frac{K}{\sigma_T} \right)^p \left( \frac{\sigma_{\text{н}}}{\sigma_T} \right)^{m(1+m)}, \quad (3.3.41)$$

где  $K$  - коэффициент интенсивности напряжений;  $m$  - показатель упрочнения в степенной аппроксимации диаграммы деформирования материала;

$$\sigma_i / \sigma_T = (\epsilon_i / \epsilon_T)^m \quad \text{при } \sigma_i \geq \sigma_T, \quad (3.3.42)$$

причем в формулах (3.3.41) и (3.3.42) расчетный предел текучести

$$\sigma_T = \sigma_{0,2} \left[ 1 + 2 \cdot 10^{-3} (E / \sigma_{0,2}) \right]^{1-m}. \quad (3.3.43)$$

Показатель степени

$$p = (2 + \alpha) / (1 + m); \quad \alpha = -0,5(1 - m) \left[ 1 - (\sigma_{\text{н}} / \sigma_T) \right].$$

Приведем выражения коэффициента интенсивности напряжений в пластической зоне:

$$\text{при } \sigma_{\text{н}} < \sigma_T \quad M_\sigma = (K / \sigma_T)^{mp};$$

$$\text{при } \sigma_{\text{н}} \geq \sigma_T \quad M_\sigma = (K / \sigma_T)^{mp} (\sigma_{\text{н}} / \sigma_T)^{1+m}.$$

По коэффициентам  $M_\sigma$  и  $M_\epsilon$  можно рассчитать распределение напряжений и деформаций в пластической зоне перед трещиной (рис. 3.3.27).

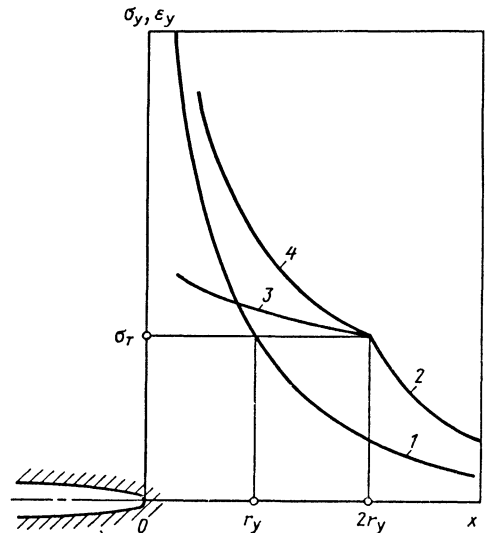


Рис. 3.3.27. Эпюры напряжений и деформаций перед вершиной трещины:

- 1 - упругое асимптотическое решение;
- 2 - упругое решение вне пластической зоны;
- 3 - напряжения в пластической зоне;
- 4 - деформации в пластической зоне

Наибольшее распространение получил энергетический критерий в виде

$$J \leq J_{Ic}, \quad (3.3.44)$$

в котором инвариантный энергетический интеграл  $J$  (или просто  $J$ -интеграл) может быть вычислен по одной из двух общих формул:

$$J = \int_{\Gamma} \left( W dy - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) ds + \int_A \alpha \sigma_{ij} \delta_{ij} \frac{\partial T}{\partial x} dx dy, \quad (3.3.45)$$

или

$$J = - \frac{1}{t} \frac{\partial \Pi}{\partial l}. \quad (3.3.46)$$

Здесь  $\Gamma$  - контур интегрирования, окружающий вершину трещины;  $A$  - область внутри контура  $\Gamma$ ;  $W = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$  - плотность энергии деформации, связь между напряжением  $\sigma_{ij}$  и деформацией  $\epsilon_{ij}$  может быть нелинейной;  $n_i$  - нормаль к контуру  $\Gamma$ ;  $u_j$  - перемещение точек на  $\Gamma$ ;  $\alpha$  - коэффициент линейного температурного расширения;  $\delta_{ij} = 1$  при  $i=j$  и  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$  - символ Кронекера;  $T = T(x, y)$  - температура;  $\Pi$  - потенциальная энергия системы (которая может быть представлена через площади на диаграмме деформирования);  $t$  - толщина плоского образца;  $l$  - длина трещины; ось  $x$  направлена вдоль трещины.

Справа в условии (3.3.44) стоит  $J_{Ic}$ , экспериментально определяемая предельная величина  $J$ -интеграла, называемая упругопластической вязкостью разрушения.

В линейно-упругом состоянии существует зависимость

$$(1 - \nu^2) K_{Ic}^2 = E J_{Ic}. \quad (3.3.47)$$

Кроме того,  $J$  - интеграл связан с раскрытием в вершине трещины

$$J_{Ic} = m \cdot \sigma_{0,2} \delta_c, \quad (3.3.48)$$

где эмпирический коэффициент  $m$  зависит от степени упрочнения материала и схемы нагружения образца и располагается в диапазоне  $1 \leq m \leq 3$ .

Иногда расчеты по критерию (3.3.44) заменяют расчетами по критерию (3.3.2), в котором вязкость разрушения  $K_{Ic}$  вычисляют по формуле (3.3.47).

Этот прием условен, но позволяет воспользоваться экспериментально определяемой величиной  $J_c$  и большим набором справочных данных о коэффициентах интенсивности напряжений  $K$ .

Различие в обозначениях  $J_{Ic}$  и  $J_c$  ориентировочно соответствует  $K_{Ic}$  и  $K_c$ .

**Пример.** Дана растягиваемая деталь из стали 12Х18Н9Т в форме полосы шириной  $b = 100$  мм и толщиной  $t = 1,5$  мм. Разрушающее напряжение оказалось равным  $\sigma_c = 375$  МПа, что на 10 % выше предела текучести, но ниже временного сопротивления  $\sigma = 620$  МПа. Другие механические свойства  $\sigma_{0,2} = 340$  МПа,  $J_c = 480$  МПа·мм (найден экспериментально, методом сеток), уравнение диаграммы деформирования при одноосном растяжении за пределом текучести  $\sigma = 770 \epsilon^{0,2}$ , т.е.  $\sigma_* = 770$  МПа,  $m = 0,2$ . Найдем критическую длину краевой трещины  $l_c$ , в результате которой произошло снижение разрушающего напряжения.

Воспользуемся критерием в форме (3.3.44). Для расчета  $J$ -интеграла воспользуемся формулой

$$J = \frac{2K^2}{(1+m)\sigma_*} \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{1-m} \quad (3.3.49)$$

Предположив, что ширина полосы много больше длины трещины, возьмем коэффициент интенсивности напряжений для краевой трещины в полуплоскости

$$K = 1,12 \sigma \sqrt{\pi l}. \quad (3.3.50)$$

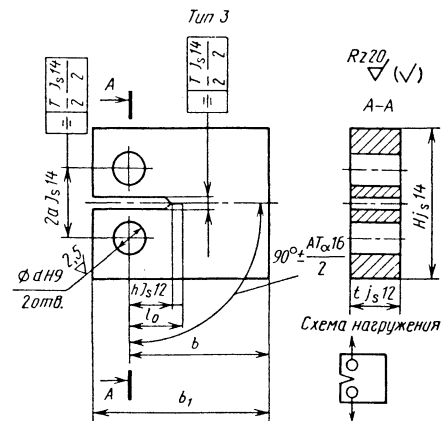
Подставив в условие (3.3.44) известные величины [с учетом (3.3.49) и (3.3.50)], получаем уравнение относительно критической длины трещины

$$\frac{2 \cdot 1,12^2 \cdot 375^2 \pi l_c}{(1+0,2)770} \left( \frac{375}{770} \right)^4 = 480.$$

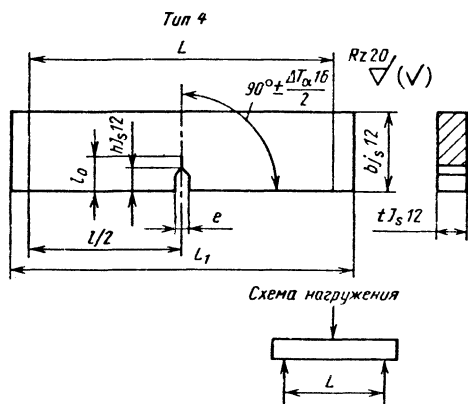
Отсюда находим  $l_c = 7,3$  мм. Таким образом, разрушение произошло квазихрупким образом, при разрушающем напряжении выше предела текучести, но ниже временного сопротивления из-за трещины длиной около 7 мм.

### 3.3.3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ

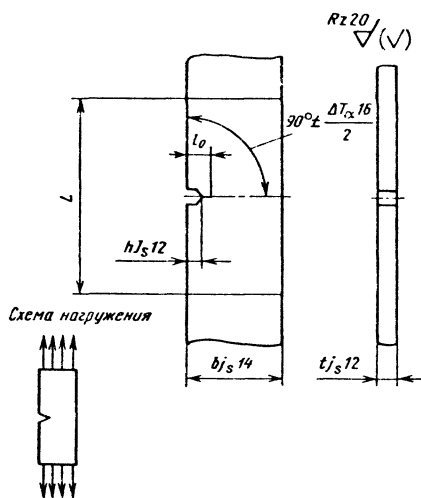
Характеристики трещиностойкости оценивают сопротивление материала распространению в нем трещины [5]. Они определяются на образцах, содержащих заранее созданные трещины усталости согласно ГОСТ 25.506-85. Наиболее распространенные типы образцов показаны на рис. 3.3.28-3.3.30.



**Рис. 3.3.28.** Плоский образец на внецентричное растяжение (компактный образец):  $b = 2r$ ,  $b_1 = 1,25b$ ;  $H = 1,2b$ ;  $2a = 0,55b$ ;  $d = 0,25b$ ;  $h_0 = (0,45 \div 0,55)b$ ;  $k_0 = 0,06b$ ;  $h = 0,35 \cdot 0,5b$ ; толщина  $t \geq 20$  мм



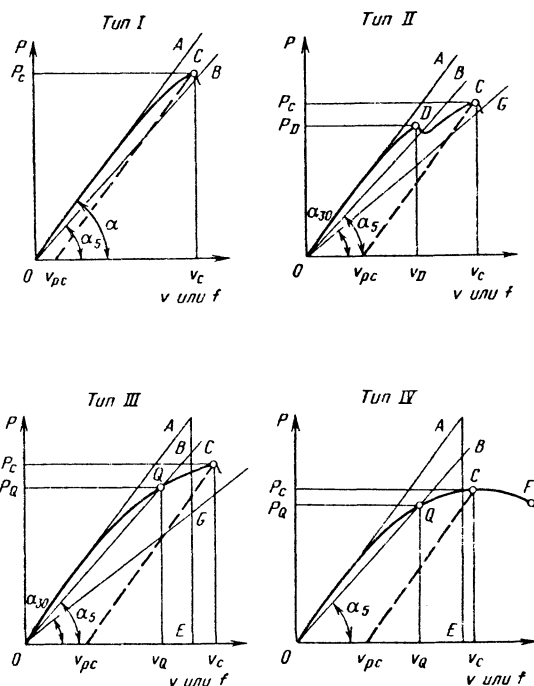
**Рис. 3.3.29. Образец с краевой трещиной на трехточечный изгиб:**  $L$  - расстояние между опорами;  $b=2t$ ;  $l_0=(0,45 \div 0,55)b$ ;  $l \leq 0,06b$ ;  $L=4b$ ;  $L_1=4b+0,5b$ ;  $h=(0,35 \div 0,5)b$ ; толщина  $\geq 10$  мм



**Рис. 3.3.30. Плоский образец с краевой трещиной на растяжение. Тип 5:**  $L$  - расстояние между частями образца, служащими для крепления в захватах;  $b \geq 6t$ ;  $L \geq 2b$ ;  $h \geq 0,1b$

При выращивании усталостных трещин следует ограничивать эффекты наклепа и повреждения металла вокруг вершины трещины. С этой целью максимальное напряжение цикла не должно превышать  $0,5\sigma_{0,2}$ , а рекомендуемое число циклов нагружения при выращивании усталостной трещины не меньше  $5 \cdot 10^4$ .

Во время испытаний на надрез устанавливают двухконсольные датчики смещений тензорезисторного типа по ГОСТ 25.506-85.



**Рис. 3.3.31. Диаграмма деформирования:**  $\text{tg}\alpha_5=0,95\text{tg}\alpha$  ( $AB=0,05 AE$ );  $\text{tg}\alpha_{30}=0,7\text{tg}\alpha$  ( $AC=0,3 AE$ )

Нагружение до полного разрушения этих образцов ведут на любой машине для механических испытаний. При этом записывается диаграмма "сила  $P$  - смещение  $v$ ". Характерные виды этих диаграмм приведены на рис. 3.3.31. Разрушение образца происходит в точке  $C$  диаграмм типов I-III и в точке  $F$  диаграммы типа IV. На этих диаграммах точка  $C$  отвечает максимальной усилию  $P_C$ ; точка  $D$  отражает возможный скачок трещины, что приводит к локальному максимуму на диаграмме в точке  $D$ ; точка  $Q$  получается пересечением диаграммы с "пятипроцентной секущей" - линией  $OB$  из начала координат под углом  $\alpha_5$ , тангенс которого на 5 % меньше тангенса линии начального упругого нагружения  $OA$ . После разрушения на изломе определяют длину усталостной трещины по результатам трех измерений в виде средней арифметической - одно измерение в центре и два остальных на равных расстояниях от центра и боковых поверхностей (рис. 3.3.32).

По диаграмме “ $P - v$ ” определяют нагрузки  $P_Q$ ,  $P_D$  и  $P_c$ . Далее для расчета вспомогательного коэффициента  $K_Q$  определяют силу  $P_Q$ . Для диаграммы типа I принимают  $P_Q = P_c$ , типа II  $P_Q = P_D$ , типов III и IV силу  $P_Q$  определяют в точке пересечения диаграммы с прямой  $OB$ . Зная силу  $P_Q$ , находят  $K_Q$  по формуле

$$K = \frac{P}{t\sqrt{b}} Y(\lambda), \quad (3.3.51)$$

где для образца типа 3 при  $0,45b \leq l_2 \leq 0,55b$   $Y=Y_3=13,74(1-3,38\lambda+5,572\lambda^2)$ ;  $\lambda=l/b$ .

Для образца типа 4

$$K = \frac{Pl}{t\sqrt{b^3}} Y_4'(\lambda),$$

где при  $0,45b \leq l \leq 0,55b$   $Y_4=3,494(1-3,396\lambda+5,839\lambda^2)$ .

В случаях, когда требуется рассчитать коэффициент для большего диапазона длин трещин ( $0 < \lambda \leq 0,6$ ), используют уточненные формулы: для образца типа 4

$$K = \frac{6P\sqrt{l}}{tb} Y_4'(\lambda);$$

$$Y_4' = 1,93 - 3,07\lambda + 14,53\lambda^2 - 25,11\lambda^3 + 25,8\lambda^4;$$

для образца типа 5

$$K = \frac{P\sqrt{l}}{tb} Y_5'(\lambda);$$

$$Y_5' = 1,99 - 0,41\lambda + 18,7\lambda^2 - 38,48\lambda^3 + 53,85\lambda^4.$$

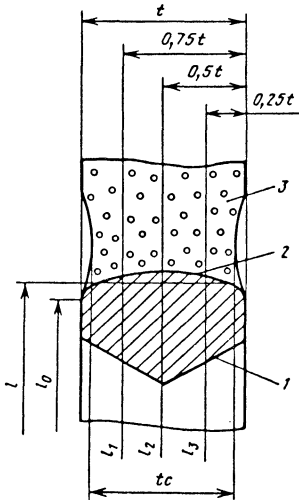


Рис. 3.3.32. Схема измерения длины исходной

усталостной трещины:  $l = \frac{1}{3}(l_1 + l_2 + l_3)$ ;

1 - граница надреза; 2 - контур усталостной трещины; 3 - статический долом

На диаграмме “ $P-v$ ” так же, как и на обычной диаграмме деформации “ $\sigma-\epsilon$ ”, можно отметить характерные точки. Таких точек две -  $Q$  и  $C$  (см.рис. 3.3.31), они характеризуются соответствующими силами  $P_Q$  и  $P_c$ . Для точки  $Q$  вычисляют вспомогательный коэффициент  $K_Q$  по формулам (3.3.31) для коэффициента  $K$  соответствующего образца подстановкой в эти формулы силы  $P_Q$  (и других размеров, в частности, длины трещины, измеренной по излому после полного разрушения).

Величину  $K_Q$  считают равной вязкости разрушения  $K_{Ic}$ , если выполняются условия малости пластической зоны у вершины трещины (условия достоверности определения  $K_{Ic}$ ). Эти условия таковы:

либо одновременно

$$P_c \leq 1,1P_Q; \quad t \geq 2,5(K_Q / \sigma_{0,2})^2; \quad (3.3.52)$$

$$\phi_c = \frac{t - t_c}{t} 100\% \leq 1,5\%,$$

либо

$$P_c \leq 1,1P_Q \text{ и } v_c \leq 1,2v_Q.$$

Достоверность определения  $K_{Ic}$  растет с ростом толщины образца. Если условия достоверности не удается удовлетворить, то в качестве результата испытания фиксируется величина  $K_Q$ .

Для этой же точки  $Q$  определяют коэффициент  $K_{Qt}$  (аналог условного предела текучести  $\sigma_{0,2}$ ), но только для разрушающих напряжений в нетто-сечении меньших  $0,8\sigma_{0,2}$ . Коэффициент  $K_{Qt}$  вычисляют по формулам для  $K$  с подстановкой силы  $P_Q$  и эффективной длины трещины  $l_{эфф} = l + r$ , по формуле (3.3.29).

В точке  $C$  по силе  $P_c$  вычисляют условный (аналог временного сопротивления  $\sigma_B$ ) предельный коэффициент интенсивности напряжений  $K_c^*$  (его же называют пределом трещиностойкости, причем в данном случае для фиксированной длины трещины). Если же разрушающее нетто-напряжение оказалось ниже  $0,8\sigma_{0,2}$ , то определяют критический коэффициент интенсивности напряжений  $K_c$  (который также есть одно из значений предела трещиностойкости  $I_c$ ).

Предельное пластическое раскрытие  $\delta_c$  в вершине трещины определяют для точки  $C$  диаграммы по полученному значению пластического раскрытия  $v_{pc}$  в месте установки датчика смещения. Для образцов типов 3, 4 и 5

$$\delta_c = \frac{\eta(b-l)}{l + \eta(b-l)} v_{pc} + \frac{1-v^2}{2E\sigma_{0,2}} (K_c^*)^2, \quad (3.3.53)$$

где  $\eta$  - коэффициент вращения одной половины образца относительно другой. Обычно  $\eta=0,5$ .

Для точки *C* вычисляют также упругопластическую вязкость разрушения  $J_c$  (или  $J_{Ic}$ ) по размеру площади  $A_{pc}$  пластической части диаграммы разрушения (ограничена линией диаграммы до точки *C* и линией упругой разгрузки из точки *C*) по формуле

$$J_c = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_c^*)^2 + \frac{A_{pc}}{t(b-l)} k \quad (3.3.54)$$

для первых трех типов разрушения (см. рис. 3.3.31). Здесь корректирующие коэффициенты  $\alpha$  и  $k$  разные для разных типов образцов. Для образца типа 3

$$\alpha = 2 + 0,522 \frac{b-l}{b}; \quad k = 1 + \frac{0,25b + z}{l + 0,1(b-l)}$$

типа 4  $\alpha=2$ ;  $k=1$ .

При диаграмме разрушения типа IV (см. рис. 3.3.31) обычно наблюдается докритический рост трещины. Этот подрост на изломе фиксируется либо тепловым окрашиванием, либо циклическим нагружением.

Испытывают серию образцов, на которых определяют по формуле (3.3.53) промежуточные значения  $J_i$  (с соответствующими приращениями длины трещины  $\Delta l_i$ ) и строят график “ $J-\Delta l$ ” (рис. 3.3.33). Точка пересечения этого графика с линией пластического затупления (определяемой уравнением  $J=(\sigma_{0,2} + \sigma_B)\Delta l$ ) дает искомую величину упругопластической вязкости разрушения  $J_c$ . Если на изломе образцов (при значительных  $\Delta l$ ) наблюдается тоннелирование (рост трещины внутри образца), то тогда вычисляют длину фронта трещины  $S$  и площадь приращения трещины  $\Delta F$  по формулам

$$S = 4\sqrt{(\Delta l_3 - \Delta l)^2 + (t/4)^2}; \quad \Delta F = t\Delta l,$$

где  $\Delta l_3$  - приращение длины трещины в середине образца;  $\Delta l$  - среднее из пяти измерений на равных промежутках по толщине образца.

Упругопластическая вязкость разрушения при этом будет

$$J_i = \frac{1 - \nu^2}{E} (K^*)^2 + \frac{A_{pi}}{S(b-l) + \alpha\Delta F} k \quad (3.3.55)$$

При достаточно малой пластической зоне  $J_c$  принимают равным  $J_{Ic}$ . Это устанавливают по условию достоверности определения величины  $J_{Ic}$ , состоящем в том, чтобы толщина образца  $t$  превышала значение  $\beta \frac{J_c}{\sigma_{0,2} + \sigma_B}$ . Причем

$\beta=200$  для материалов с  $\sigma_{0,2}/\sigma_B < 0,6$  и  $\beta = -375(\sigma_{0,2}/\sigma_B) + 425$  для  $\sigma_{0,2}/\sigma_B \geq 0,6$ . Ясно, что для получения  $J_{Ic}$  следует испытать образцы большей толщины. Характеристика трещинос-

тойкости  $J_{Ic}$  с большим основанием, чем  $J_c$ , может использоваться в формулах типа (3.3.47).

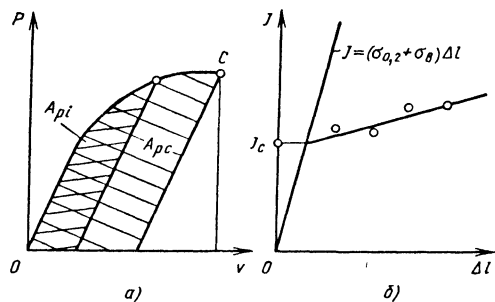


Рис. 3.3.33. Схема выделения работы пластической деформации (а) и зависимость текущей упругопластической вязкости разрушения от приращения длины трещины (б)

Помимо рассмотренных характеристик трещиностойкости материала определяют предел трещиностойкости  $I_c$ . Для этого испытывают серию образцов (выбранного типа; обычно это типы 1, 4 или 5) с разными длинами трещин. Например,  $l/b=0,1; 0,2; 0,3$  и так до 0,6. Испытывают до разрушения также образец и без трещины. Во всех испытаниях фиксируют максимальную (разрушающую) силу  $P_c$  и, по излому, исходную длину усталостной трещины. Затем по этим данным и по соответствующей формуле для коэффициента  $K$  находят  $K_c^*$ . Поскольку по стандартизированной методике  $K_c^*$  находится только при одном значении длины трещины ( $l/b=0,5$ ) и, кроме того, при коротких трещинах вероятность вязкого разрушения и полностью пластического течения в объеме образца возрастает, то для полученных таким образом предельных коэффициентов интенсивности напряжений введено название предела трещиностойкости. Результаты эксперимента представляют в виде вывода:

$l/b \dots$	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5
$\sigma_c$ , МПа, ...	0	550	490	400	290	150
$I_c$ , МПа $\sqrt{m}$ ...	0	70	88	99	96	80

Здесь приведены конкретные результаты для низколегированной низкоуглеродистой конструкционной стали 09Г2 при изгибе образцов типа 4.

Желательна форма представления результатов испытания в виде диаграммы трещиностойкости в координатах  $I_c-\sigma_c$  (или  $I_c-l$ ).

Такая диаграмма (рис. 3.3.34) построена по вышеприведенным экспериментальным данным. Все особенности сопротивления материала развитию трещины (вместе с сопутствующим сопротивлением пластическому деформированию) при любых длинах трещин отражены на этой диаг-



рамме. Через экспериментальные точки можно провести линию (штриховая на рис. 3.3.34) и выразить ее в виде уравнения, что удобно для расчета. Эта линия (пределных состояний) отделяет область допустимых состояний (внутри) от недопустимых.

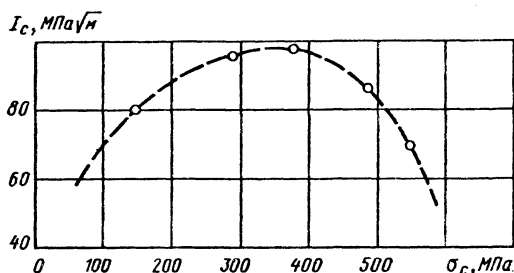


Рис. 3.3.34. Диаграмма трещиностойкости

Состояние образца внутри полученной области определяется двумя величинами - коэффициентом интенсивности напряжений  $K$  и параметром нагрузки (или напряжением)  $\sigma$  (координатами точки на диаграмме трещиностойкости). Эта точка по условию неразрушения не должна доходить до границы области (до предела трещиностойкости).

## Глава 3.4

### ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ЗАПАСЫ ПРОЧНОСТИ

#### 3.4.1. ЗАПАСЫ ПРОЧНОСТИ ПО НОМИНАЛЬНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

Рассмотренные в гл. 3.1-3.3 основные механические закономерности деформирования и разрушения конструкционных материалов являются основой для расчетов прочности, ресурса и трещиностойкости несущих элементов машин и конструкций [1-16]. При этом, как отмечалось ранее, современные расчеты в машиностроении предусматривают два основных этапа:

обоснование выбора размеров наиболее опасных сечений проектируемых несущих элементов по номинальным напряжениям с использованием расчетных формул сопротивления материалов, теории пластин и оболочек;

проверку допустимости принятых конструктивных форм, технологий, материалов, эксплуатационных режимов по местным (локальным) напряжениям и деформациям с использованием методов механики разрушения, теории упругости, пластичности, ползучести, усталости.

На первом этапе, как правило, используют традиционные условия прочности при однократном статическом нагружении

$$\sigma_n^3 = \left[ \frac{F^3}{A}, \frac{M_n^3}{W_{oc}}, \frac{M_{кр}^3}{W_p}, \frac{p^3 D}{\delta} \right] \leq [\sigma_n], \quad (3.4.1)$$

где  $\sigma_n^3$  - экстремальные значения номинальных напряжений в элементе конструкции от действия наибольших продольных усилий  $F^3$ , изгибающих  $M_n^3$  и крутящих  $M_{кр}^3$  моментов для стержневых элементов, от внутреннего давления  $p^3$  в оболочках;  $A$ ,  $W_{oc}$ ,  $W_p$ ,  $\delta$ ,  $D$  - размеры рассчитываемых сечений (соответственно площадь, осевые и полярные моменты сопротивления, толщина и диаметр);  $[\sigma_n]$  - допускаемые номинальные напряжения.

Уравнение (3.4.1) используют также:

при определении допускаемых эксплуатационных нагрузок ( $F^3$ ,  $M_n^3$ ,  $M_{кр}^3$ ,  $p^3$ ) при заданных размерах сечений ( $A$ ,  $W_{oc}$ ,  $W_p$ ,  $D$ ,  $\delta$ ) и выбранных материалах ( $[\sigma_n]$ );

при подборе или уточнении выбора конструкционных материалов ( $[\sigma_n]$ ), если заданы эксплуатационные усилия ( $F^3$ ,  $M_n^3$ ,  $M_{кр}^3$ ,  $p^3$ ) и размеры поперечных сечений ( $A$ ,  $W_{oc}$ ,  $W_p$ ,  $D$ ,  $\delta$ ).

Допускаемые номинальные напряжения при сложных режимах работы машин и конструкций получают как минимальные величины по базовым характеристикам механических свойств и соответствующим запасам прочности

$$[\sigma_n] = \left\{ \frac{\sigma_{0,2}}{n_T}, \frac{\sigma_B}{n_B}, \frac{\sigma_{B\tau}}{n_{B\tau}}, \frac{\sigma_{п\tau}}{n_{п\tau}} \right\}_{\min}, \quad (3.4.2)$$

где  $\sigma_{0,2}$  - условный предел текучести;  $\sigma_B$  - временное сопротивление (предел прочности);  $\sigma_{B\tau}$  - предел прочности для базового времени  $\tau$ ;  $\sigma_{п\tau}$  - предел ползучести для базового времени  $\tau$ .

Характеристики механических свойств в уравнении (3.4.2) определяют по данным стандартных испытаний лабораторных образцов (см. гл. 3.1 и 3.2).

Уравнения (3.4.1) и (3.4.2) позволяют исключить при эксплуатации машин и конструкций достижение следующих основных предельных состояний:

образование недопустимых пластических деформаций по всему опасному сечению (запас  $n_T$ ) при кратковременном повышении нагрузок;

возникновение вязкого разрушения (запас  $n_B$ ) при кратковременном повышении нагрузок;

возникновение разрушения (запас  $n_{B\tau}$ ) при длительном статическом нагружении;

возникновение недопустимых изменений геометрических форм вследствие деформаций ползучести (запас  $n_{п\tau}$ ).

Запасы прочности по номинальным напряжениям в уравнении (3.4.2) назначают с учетом ответственности проектируемых машин и конструкций, опыта их создания и эксплуата-

ции, особенностей механического поведения конструкционных материалов, степени освоения технологии изготовления и контроля.

Для широкого круга изделий современного машиностроения величины коэффициентов запаса  $n_r$  и  $n_{пт}$  принимают в пределах 1,2-2,0, а коэффициентов запаса  $n_B$  и  $n_{Bт}$  - в пределах 1,7-3,0. При использовании традиционных металлических конструкционных материалов с отношением  $\sigma_{0,2}/\sigma_B$  не выше 0,55-0,65 минимальные уровни допускаемых напряжений получают по запасам  $n_r$  и  $n_{пт}$ . Для высокопрочных металлических материалов с отношением  $\sigma_{0,2}/\sigma_B \geq 0,7$  основными в расчетах прочности становятся запасы  $n_B$  и  $n_{Bт}$ .

При использовании современных композитных и керамических конструкционных материалов с ограниченной деформационной способностью расчеты прочности ведут по запасам  $n_B$  и  $n_{Bт}$ .

По мере накопления опыта проектирования и безопасной эксплуатации запасы прочности, как правило, снижают при одновременном повышении характеристик механических свойств. Это определяет снижение материалоемкости, связанной с выбираемыми по уравнению (3.4.1) основными размерами конструкций для заданных уровней эксплуатационных нагрузок.

**3.4.2. РАСЧЕТЫ ПРОЧНОСТИ ПО МЕСТНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ И ДЕФОРМАЦИЯМ**

Многочисленные наблюдения за повреждениями и разрушениями машин и конструкций показали, что достижение предельных состояний, указанных в п.3.4.1 и определяемых уровнем номинальных напряжений  $\sigma_H^3$ , в эксплуатации происходит при неконтролируемом существенном повышении нагрузок или при достаточно грубых ошибках в подборе сечений или конструкционных материалов. Однако более 90% всех повреждений и разрушений связано с нарушением условий локальной (местной) прочности. С учетом этого обстоятельства в последние десятилетия наряду с расчетами по номинальным напряжениям все большее значение приобретают расчеты прочности, ресурса и живучести (трещиностойкости) локальных зон, в которых возникают экстремальные напряженно-деформированные состояния.

При расчетах прочности по местным напряжениям и деформациям на стадии образования трещин в зонах максимальной локальной нагруженности используют рассмотренные в п.3.1 и 3.2 критерии разрушения. Зоны максимальной локальной нагруженности, в первую очередь, определяются наличием концентрации напряжений - конструктивной (отверстия, выточки, буртики, резьба, канавки и др.), технологической (сварные швы, поры, включения и др.),

эксплуатационной (коррозионные и эрозионные язвы, вмятины, задиры и др.). Концентрация напряжений при упругих деформациях характеризуется теоретическим коэффициентом концентрации  $\alpha_\sigma$ , показывающим превышение максимальных локальных напряжений над номинальными ( $\alpha_\sigma = \sigma_{max} / \sigma_H$ ).

Для отражения роли объемности напряженного состояния в зонах и вне зон концентрации в расчетах прочности используют эквивалентные напряжения (по классическим I-IV теориям прочности).

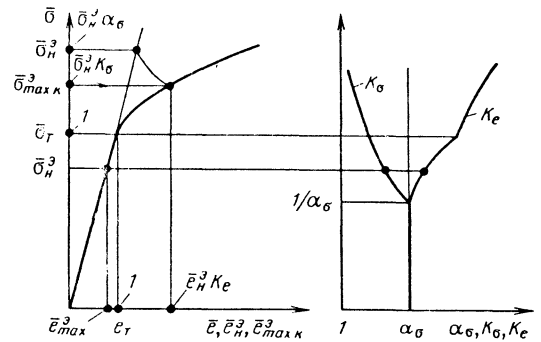
Наибольшее применение при этом имеют эквивалентные напряжения по теориям:

наибольших нормальных напряжений (I - для малопластичных материалов типа керамик, композитов, сверхпрочных металлических материалов);

наибольших касательных напряжений (III - для большинства конструкционных, в том числе пластичных металлических материалов);

энергетической (IV - для большинства конструкционных, в том числе пластичных металлических материалов).

Теоретические коэффициенты концентрации определяют методами теории упругости, численными решениями и экспериментально. В современной справочной литературе накоплен значительный объем информации о величинах  $\alpha_\sigma$  для типовых деталей машин и элементов конструкций.



**Рис. 3.4.1. Схема анализа местных напряжений и деформации для определения запасов прочности**

Схема определения прочности по локальным напряжениям и деформациям показана на рис. 3.4.1. Расчет при этом целесообразно осуществлять в относительных напряжениях ( $\bar{\sigma} = \sigma / \sigma_T$ ) и деформациях ( $\bar{\epsilon} = \epsilon / \epsilon_T$ ). При известных по уравнению (3.4.1) номинальных эксплуатационных напряжениях  $\bar{\sigma}_H^3$  и деформациях  $\bar{\epsilon}_H^3$  с использованием данных о величинах  $\alpha_\sigma$  можно установить в первом приближении (на

основе предположения об упругом деформировании) локальные напряжения  $\bar{\sigma}_{\max \kappa}^{\partial} = \sigma_n^{\partial} \alpha_{\sigma}$  и деформации  $\bar{e}_{\max \kappa}^{\partial} = \bar{e}_n^{\partial} \alpha_{\sigma}$ . Если эти напряжения и деформации превосходят значения  $\bar{\sigma}_T = 1$  и  $\bar{e}_T = 1$ , то в зоне концентрации возникают неупругие деформации ( $\alpha_{\sigma} \bar{e}_n = \alpha_{\sigma} \bar{\sigma}_n \geq 1$ ). При решении нелинейной краевой задачи для зоны концентрации используют аналитические, численные и экспериментальные методы. Эти методы являются весьма трудоемкими и поэтому в инженерных расчетах наиболее эффективны приближенные аналитические решения, связывающие теоретические коэффициенты концентрации  $\alpha_{\sigma}$  и коэффициенты концентрации напряжений  $K_{\sigma}$  и деформаций  $K_e$  в неупругой области

$$\frac{K_{\sigma} K_e}{\alpha_{\sigma}^2} = F(\bar{\sigma}_n^{\partial}, m, \alpha_{\sigma}), \quad (3.4.3)$$

где  $F(\bar{\sigma}_n^{\partial}, m, \alpha_{\sigma})$  - безразмерная функция, зависящая от номинальных напряжений  $\bar{\sigma}_n^{\partial}$ , показателя упрочнения материала  $m$  и теоретического коэффициента концентрации  $\alpha_{\sigma}$ .

По уравнению (3.4.3) с использованием степенного уравнения диаграммы деформирования устанавливают  $K_{\sigma}$  и  $K_e$ .

Степень отличия  $\alpha_{\sigma}$  от  $K_{\sigma}$  и  $K_e$  определяет перераспределение напряжений и деформаций за пределами упругости; при этом  $1 \leq K_{\sigma} \leq \alpha_{\sigma}$  и  $\alpha_{\sigma}^2 \geq K_e \geq \alpha_{\sigma}$ . Тогда локальные напряжения и деформации в зоне концентрации при действии эксплуатационных нагрузок будут

$$\bar{\sigma}_{\max \kappa}^{\partial} = K_{\sigma} \bar{\sigma}_n^{\partial}; \quad \bar{e}_{\max \kappa}^{\partial} = K_e \bar{e}_n^{\partial}. \quad (3.4.4)$$

По полученным значениям локальных напряжений и деформаций определяют коэффициенты запаса

$$n_{\sigma} = \frac{S_{\kappa}}{\bar{\sigma}_{\max \kappa}^{\partial}}; \quad n_e = \frac{\bar{e}_{\kappa}}{\bar{e}_{\max \kappa}^{\partial}}, \quad (3.4.5)$$

где  $\bar{S}_{\kappa}$ ,  $\bar{e}_{\kappa}$  - относительные величины сопротивления разрыву и предельной пластической деформации в шейке лабораторного образца при кратковременном статическом растяжении.

В силу малости показателей упрочнения  $m$  для современных конструкционных металлических материалов при переходе в пластическую область величина  $\bar{\sigma}_{\max \kappa}^{\partial}$  увеличивается несущественно и запас  $n_{\sigma}$  по местным напряжениям не отражает опасность приближения предельного состояния. Так как  $\bar{e}_{\kappa} > \bar{S}_{\kappa}$ , то  $\bar{e}_{\max \kappa}^{\partial}$  увеличи-

вается значительно быстрее, чем  $\bar{\sigma}_{\max \kappa}^{\partial}$  при переходе в пластическую область. Это делает запас  $n_e$  весьма чувствительным при приближении к опасному состоянию.

Запасы  $n_{\sigma}$  обычно назначают не выше  $n_T$ , а запасы  $n_e$  не выше  $n_T^2$ .

Характеристики материала  $\sigma_T$ ,  $m$ ,  $\bar{e}_{\kappa}$ ,  $\bar{S}_{\kappa}$ ,  $\tau$  и, следовательно, величины  $\bar{\sigma}_{\max \kappa}^{\partial}$  и  $\bar{e}_{\max \kappa}^{\partial}$  зависят от условий эксплуатационного нагружения - времени  $\tau$ , скорости деформирования  $\dot{e}$ , температур  $T$  и числа циклов  $N$  (см. гл. 3.1 и 3.2). Вводя в уравнения (3.4.4) и (3.4.5) соответствующие зависимости характеристик механических свойств от указанных выше эксплуатационных факторов, получают запасы  $n_{\sigma}$  и  $n_e$  для заданных режимов эксплуатации.

В поверочных расчетах прочности наиболее ответственных изделий современного машиностроения дополнительно к запасам по уравнениям (3.4.2), (3.4.5) устанавливают запасы по ресурсу - по времени  $\tau$  и числу циклов  $N$ :

$$n_{\tau} = \frac{\tau_c}{\tau^{\partial}}; \quad n_N = \frac{N_c}{N^{\partial}}, \quad (3.4.6)$$

где  $\tau_c$ ,  $N_c$  - время и число циклов по кривым длительной прочности и кривым усталости для стадии образования трещины при максимальных эксплуатационных напряжениях и деформациях по уравнению (3.4.4);  $\tau^{\partial}$ ,  $N^{\partial}$  - время и число циклов эксплуатационного нагружения.

Запасы  $n_{\tau}$  и  $n_N$  обычно выбирают в диапазоне 3-10. Прочность и ресурс машин и конструкций считают обеспеченным, если все указанные выше запасы по номинальным напряжениям, местным напряжениям и деформациям, по времени и числу циклов оказываются не ниже назначенных.

### 3.4.3. ВЫБОР КОЭФФИЦИЕНТА ЗАПАСА ПРОЧНОСТИ ПО ПРЕДЕЛУ ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ

Запасы прочности призваны дать количественную меру безопасности конструкции. В общем виде (см. п. 3.4.1) коэффициенты запасов прочности (или долговечности) представляют собой числа, которые показывают, во сколько раз следует увеличить нагрузку (длину трещины, число циклов), чтобы наступило предельное (недопустимое) состояние. При этом все прочие параметры задачи сохраняются неизменными.

Обычно коэффициенты запаса назначают согласно накопленному опыту в данной отрасли техники. Поскольку методы расчета элементов конструкций на трещиностойкость сформировались сравнительно недавно, то накопленного опыта по численным значениям коэффициентов запаса недостаточно. В связи с этим здесь более

подробно рассмотрен метод расчетного установления коэффициентов запаса на трещиностойкость.

Предельное состояние может определяться разными критериями. В нашем случае предельное состояние определим пределом трещиностойкости  $I_c$ . Обычно расчет ведут по напряжениям.

При помощи традиционного метода расчета по напряжениям устанавливают опасные сечения и опасную точку с расчетным напряжением  $\sigma_p$ . Далее определяют коэффициент запаса прочности  $n$  по  $\sigma_B$  (или  $\sigma_{0,2}$ ). Для этого используют ту или иную теорию прочности в зависимости от состояния детали (хрупкое или пластичное). Предположим, что в опасной точке возникла трещина. Если при данном  $\sigma_p$  она достигнет критической длины  $l_c$ , то произойдет разрушение, т.е. такую трещину допускать нельзя. Однако в конструкции могут появляться трещины некоторой длины. При наличии трещины длиной  $l_0$  номинальное разрушающее напряжение будет меньше  $\sigma_B$  (или даже  $\sigma_{0,2}$ ) и равно  $\sigma_c$  (рис. 3.4.2). Запас прочности  $n_0$  при этом станет меньше запаса  $n$ , и если задать степень падения запаса  $n$  (~ 20 %), то это может быть условием для определения допустимой длины трещины  $l_0$ , а следовательно, и запаса по пределу трещиностойкости  $m$  с помощью расчетного уравнения

$$K = I_c / m. \quad (3.4.7)$$

Из этого уравнения при данном  $n$  получим критическую длину трещины  $l_c$ , полагая  $m=1$ , и допустимую длину трещины  $l_0$  при  $m>1$ .

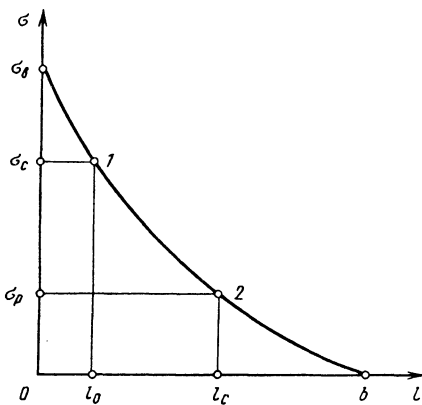


Рис. 3.4.2. Зависимость разрушающих напряжений от длины трещины: 1- $\sigma_c = \sigma_B / \alpha$ ; 2- $\sigma_p = \sigma_B / n = \sigma_c / n_0$

На рис. 3.4.3 приведены зависимости коэффициента интенсивности напряжений  $K$  функции длины трещины ( $n_1=1 < n_2 < n_3$ ) и предела

трещиностойкости ( $m_1=1 < m_2 < m_3$ ). Используя эти зависимости, можно найти критическую  $l_c$  (при  $n=n_2, m=1$ ) и допустимую  $l_0$  (при  $n=n_2, m=m_3$ ) длину трещины.

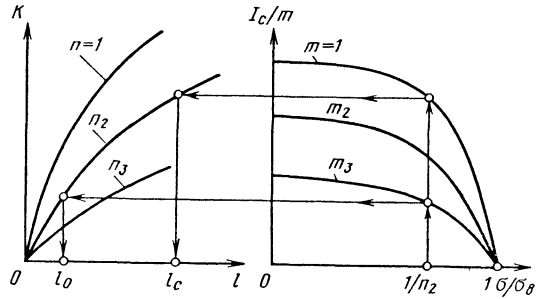


Рис. 3.4.3. Схема графоаналитического расчета на прочность с учетом трещин

Горизонтальные линии на рис. 3.4.3 отражают равенство (3.4.7).

Для определения величины  $n_0$  введем коэффициент снижения прочности  $\alpha = \sigma_c / \sigma_B$ , где  $\sigma_c$  - критическое напряжение при наличии трещины допускаемой длины  $l_0$  (см. рис. 3.4.2). При разрушающем напряжении, равном  $\sigma_c$ , допустимая длина трещины становится критической, поэтому запасы прочности будут  $n = \alpha, m = 1$ . Коэффициент интенсивности напряжений  $K$  обратно пропорционален числу  $n$  ( $n = \sigma_B / \sigma$ ), поэтому линия  $OA$  (рис. 3.4.4) есть зависимость  $K$  от  $1/n$  при неизменной длине трещины, в частности, при  $l = l_0 = \text{const}$ . Отсюда следует показанный на рис. 3.4.4 графический прием для установления коэффициента  $\alpha$ . Очевидно, что  $\sigma_B / \alpha = \sigma_c = \sigma_B n_0 / n$ . Отсюда получаем искомый запас прочности по критическому напряжению

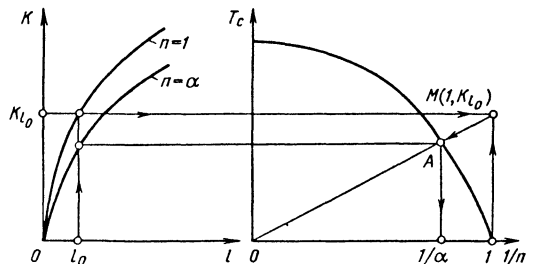
$$n_0 = n / \alpha, \quad (n_0 \leq n). \quad (3.4.8)$$


Рис. 3.4.4. Схема определения коэффициента снижения прочности  $\alpha$

По значениям  $n$  и  $n_0$  можно определить относительное снижение запаса прочности  $\beta$  (в %) при появлении в детали трещины допустимой длины  $l_0$ :

$$\beta = \frac{n - n_0}{n} 100.$$

Для выбора  $m$  можно рекомендовать следующее. Разрушающее напряжение должно быть не ниже предела текучести, чтобы допустимая длина трещины находилась в диапазоне квазихрупкого разрушения, следовательно, граничное число  $m$ , удовлетворяющее условию  $\sigma_p = \sigma_T$  при  $l = l_0$ , можно найти из уравнения, определяющего допустимую длину трещины:

$$K(\sigma_p, l_0) = I_c(\sigma_B / \sigma_p) / m.$$

Критическое условие на границе хрупкого и квазихрупкого состояний следующее:

$$K(\sigma_T, l_0) = I_c(\sigma_B / \sigma_T).$$

Разделив первое равенство на второе и учитывая, что  $K$  прямо пропорционально напряжению, получим

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_T} = \frac{I_c(\sigma_B / \sigma_p)}{m I_c(\sigma_B / \sigma_T)}.$$

Умножив обе части этого равенства на  $\sigma_B$ , запишем

$$m_0 = n \frac{\sigma_T}{\sigma_B} \frac{I_c(n)}{I_c(\sigma_B / \sigma_T)}. \quad (3.4.9)$$

Полученное значение  $m = m_0$  служит ориентиром при назначении запаса по пределу трещиностойкости. Если  $m > m_0$ , то допустимая длина трещины настолько мала, что разрушение будет квазихрупким. Если  $m < m_0$ , то разрушение при наличии трещины допустимой длины будет хрупким (при данной температуре нагружения и определенных механических свойствах).

Определим область значений фактического запаса прочности  $n_0$  и запаса на трещину  $m$  при фиксированных значениях обычного запаса прочности  $n$  и предела трещиностойкости, выраженного функцией

$$I_c = K_c \sqrt{1 - (\sigma / \sigma_B)^q}. \quad (3.4.10)$$

В рассматриваемом случае при заданном числе  $n$  критическая длина трещины согласно равенству (3.4.1) определяется так:

$$\frac{\sigma_B}{n} \sqrt{\pi l_c} \cdot Y(l_c) = K_c \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^q}.$$

Допустимую длину трещины в соответствии с условием (3.4.2) находим из уравнения

$$\frac{\sigma_B}{n} \sqrt{\pi l_0} \cdot Y(l_0) = \frac{K_c}{m} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^q}.$$

С другой стороны, эта допустимая длина трещины  $l_0$  является критической, если  $n = \alpha$ , и, следовательно, удовлетворяет также уравнению

$$\frac{\sigma_B}{\alpha} \sqrt{\pi l_0} \cdot Y(l_0) = K_c \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^q}.$$

Из последних двух соотношений находим искомую связь между величинами  $n$ ,  $m$  и  $n_0 = n/\alpha$ :

$$\frac{m^2}{n_0^2} = \frac{n^q - 1}{n^q - n_0^q}. \quad (3.4.11)$$

Кривые, построенные по этой зависимости при  $q=2$ , приведены на рис. 3.4.5. Малое уменьшение запаса прочности достигается вследствие больших запасов на трещину.

Иногда целесообразно уменьшение запаса прочности  $n$ . Так, для  $n=2$  условие  $n_0=0,9n$  будет реализовано при  $m=5,2$ , а условие  $n_0=0,8n$  достигается при  $m=2,3$ . Можно также, не задаваясь величиной  $m$ , определять допустимую длину трещины, исходя из докритического роста трещины  $l_c - l_0$  (при этом коэффициент  $m$  определяется величиной  $l_c - l_0$ ). Запас на докритический рост необходим при длительном статическом нагружении, в агрессивных средах, при эффектах ползучести и замедленного разрушения, коррозии под напряжением, циклическом нагружении. В этих случаях расчет на однократное нагружение должен дополняться расчетом на долговечность.

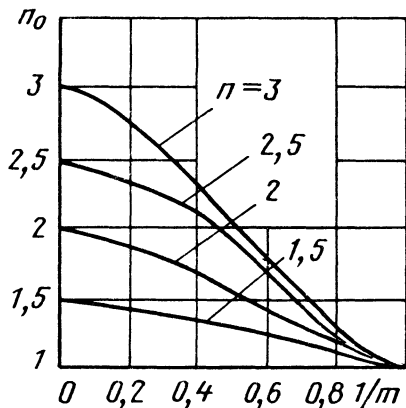


Рис. 3.4.5. Зависимость коэффициента запаса по критическому напряжению  $n_0$  (при наличии трещины) от коэффициента запаса по пределу трещиностойкости  $m$

Значительный интерес представляет определение таких значений  $m$ , при которых деталь с трещиной оказывается в области нечувствительности к трещине (при этом  $n=n_0$ ,  $\alpha=1$ , разрушение пластическое). На примере испытания низкоуглеродистой стали при комнатной температуре можно показать возможность появления области нечувствительности материала к трещине и определить пороговые значения  $m$ . При  $m < n$  прочность тела с трещиной снижается, а при  $m \geq n$  прочность тела не зависит от длины трещины (при условии, что она меньше или равна допускаемой согласно расчету). Таким образом, получен ответ на вопрос о допускаемой длине трещины при пластическом разрушении без потери несущей способности. Следует, однако, не забывать о возможности изменения условий нагружения, приводящих к охрупчиванию. В этом случае желательно проводить расчет по Ирвину с введением вязкости разрушения  $K_{Ic}$ . Допустимая длина трещины, полученная из пластического расчета, должна быть меньше критической, следующей из условия  $K=K_{Ic}$ .

#### 3.4.4. РАСЧЕТЫ НА ТРЕЩИНОСТОЙКОСТЬ

В случаях, когда есть основания считать возможное разрушение хрупким, то обычно, предполагая справедливость положений линейной механики разрушения, расчет ведут по критерию разрушения (3.3.2). Вычисление стоящего слева коэффициента интенсивности напряжений  $K$  при современном развитии вычислительных методов и техники и наличии справочников, как правило, не вызывает затруднений. Гораздо труднее экспериментальное определение правой части критерия (3.3.2), а именно: критического коэффициента интенсивности напряжений  $K_c$ , называемого иногда вязкостью разрушения. Сопротивление материала росту трещины во многом определяется затратами энергии на пластическое деформирование объемов материала в ближайшей окрестности вершины трещины. А величина и распределение пластических деформаций, форма и размеры пластически деформированных областей как вдоль фронта трещины, так и в удалении от него существенно зависят от многих условий нагружения и размеров рассматриваемого объекта и образца, служащего для определения характеристики трещиностойкости. Поэтому постановке эксперимента по определению значений  $K_c$  (или, что в некотором смысле более просто,  $K_{Ic}$ ) следует уделять много внимания, проводя эксперимент с ориентацией на данную конструкцию.

Определив из критерия разрушения (описанных в разделах 3.3.1 и 3.3.2) критическую длину (или полудлину) трещины  $l_c$  при известной расчетной нагрузке на элемент конструкции, следует найти линейный размер трещи-

ны, на которой трещина увеличится в докритическом состоянии вследствие различных причин.

От исходной длины  $l_0$  трещина медленно может расти в результате коррозионно или адсорбционно активного воздействия окружающей среды, циклического нагружения в рабочем режиме или смене этих режимов. Этот медленный докритический рост трещины следует учитывать при назначении коэффициентов запасов по длине трещины, при этом полученную из расчета критическую длину трещины  $l_c$  делят на коэффициент запаса с целью получения допустимой длины трещины  $l_{доп}$ . Для того, чтобы трещина не достигла критической длины, рассчитанный докритический рост трещины ( $l_c - l_{доп}$ ) должен быть меньше возможной обнаруживаемой разности  $l_c - l_0$ , где  $l_0$  - исходная длина трещины, определяемая методами дефектоскопии или постулируемая на основании предварительных переруточных испытаний конструкции.

Критерий разрушения вида (3.3.2) справедлив для любой конструкции при разрушающем напряжении ниже предела текучести. Для конструкций более частного вида этот критерий может специально уточняться. Приведем пример такого уточнения.

**Критерии начала быстрого распространения трещины в цилиндрических сосудах давления и трубопроводах.** Эксперименты, проведенные на различных сосудах, указали на три категории сосудов, различающиеся критериями разрушения [8].

1. Сосуды из сплавов низкой и средней прочности. Предполагается, что эти сосуды с промежуточной толщиной стенки, т.е. отношение внутреннего радиуса к толщине стенки  $R/t = 5 \div 50$ ; длина трещины относительно велика, т.е.  $(K_c/\sigma_{0.2})^2/l < 7$ . В этом случае критическое окружное напряжение

$$\sigma_{\theta c} = \frac{K_c}{M \sqrt{l \varphi_3}}, \quad (3.4.12)$$

где  $M$  и  $\varphi_3$  - поправочные коэффициенты соответственно на геометрию сосуда [по формуле (3.3.39)] и пластическую зону; поправка на пластичность  $\varphi_3$  выведена на основании модели трещины с тонкой пластической зоной:

$$\varphi_3 = \frac{2}{\omega^2} \ln \cos \omega; \quad \omega = \frac{\pi M \sigma_{\theta c}}{2 \sigma_f}. \quad (3.4.13)$$

При высоких разрушающих напряжениях поправочный коэффициент не может быть выражен только через коэффициент интенсивности напряжений, как это следует из формулы (3.3.29), поскольку пластическая область перед трещиной становится большой. В этом случае, воспользовавшись моделью трещины Леонова-Панасюка-Витвицкого-Дагдейла [см., например,

(3.3.28)], можно записать раскрытие трещины в виде [8]

$$\delta = -\frac{8l}{\pi E} \sigma_f \ln \cos \frac{\pi \sigma}{2\sigma_f} = \frac{\sigma^2 \pi l}{E \sigma_f} \left( \frac{\pi \sigma}{2\sigma_f} \right)^{-2} \ln \sec^2 \frac{\pi \sigma}{2\sigma_f} = \frac{\sigma^2 \pi l}{E \sigma_f} \Phi_3.$$

Кроме того [9], известно, что

$$K^2 = EG = E \sigma_f \delta.$$

Исключая из полученных выражений раскрытие  $\delta$ , находим

$$K = \sigma \sqrt{\pi l \Phi_3}.$$

Поправочный коэффициент оказался зависящим от уровня приложенного напряжения.

Принятое в этих формулах усредненное напряжение в пластической зоне  $\sigma_f$  располагается между условным пределом текучести  $\sigma_{0,2}$  и пределом прочности  $\sigma_B$ . Соответственно и поправка на пластическую зону располагается в пределах

$$\Phi_3 | \sigma_f = \sigma_{0,2} < \Phi_3 < \Phi_3 | \sigma_f = \sigma_B.$$

Поэтому возможен расчет критического окружного напряжения  $\sigma_{0c}$  одновременно для крайних значений  $\sigma_f$ , равных  $\sigma_{0,2}$  и  $\sigma_B$ .

Область действия критерия (3.4.12) распространяется на трубопроводы и сосуды давления при температурах ниже критической.

2. Сосуды из высокопрочных сплавов с короткими трещинами. В этом случае по-прежнему  $R/t = 5 \div 50$ , относительная длина трещины  $(K_c / \sigma_{0,2})^2 / l > 7$ . При этом критерий разрушения имеет вид

$$\sigma_{0c} = \sigma_f / M. \quad (3.4.14)$$

Здесь предполагается, что  $M \sigma_{0c} \geq 0,9 \sigma_f$  и  $\Phi_3 \geq 2$ .

В большинстве случаев принимают  $\sigma_f = 0,5(\sigma_{0,2} + \sigma_B)$ , хотя и возможны варианты, например, типа  $\sigma_f = 1,04 \sigma_{0,2} + 70$  (МПа) для сталей низкой и средней прочности [9].

Этот критерий можно использовать для стальных трубопроводов и сосудов давления, разрушающихся путем среза (с косым изломом).

3. Тонкостенные сосуды из сплавов низкой и средней прочности. Отношение радиуса к толщине стенки  $R/t > 50$ , относительная длина трещины велика, т.е.  $(K_c / \sigma_{0,2})^2 / l < 7$ . Критерий разрушения по-прежнему имеет вид (3.4.12), но поправочный коэффициент на геометрию сосуда  $M$  теперь равен [8]

$$M = \left[ 1 + 1,61 \frac{l^2}{R^2} \left( 50 \operatorname{th} \frac{R}{50t} \right) \right]^{1/2}. \quad (3.4.15)$$

Подобный критерий может быть использован, например, для тонкостенных емкостей ракетного топлива.

Из приведенных формул следует, что сопротивление разрушению сосуда можно повысить увеличением  $\sigma_{0,2}$  и  $\sigma_B$  при коротких трещинах и увеличением  $K_c$  при длинных трещинах.

Существует понятие предел трещиностойкости  $I_c$  [7]. Эту характеристику обычно получают в виде диаграммы трещиностойкости в координатах  $I_c - \sigma_c$  (или  $I_c - P$ , где  $P$  - параметр нагрузки). Удобно введение относительных координат вида  $I_c / K_{Ic}$  (или  $I_c / I_{c \max}$ , где  $I_{c \max}$  - наибольшее значение  $I_c$  в данном эксперименте),  $\sigma_c / \sigma_B$  (или  $P_T$ , где  $P_T$  - параметр нагрузки в предельном по теории пластичности состоянии). Каждое значение  $I_c$  на этой диаграмме получено при разрушении образца по формуле для коэффициента  $K$  при данной длине трещины. Для получения диаграммы испытывают серию образцов с длиной трещины от нуля до 0,8 ширины образца в сечении с трещиной.

Область внутри диаграммы - допустимые состояния, точки на границе этой области (и вне ее) отражают недопустимые состояния тела с трещиной. Поскольку результаты испытания образцов по многим причинам не совпадают с результатами испытаний элементов конструкций, рекомендуется испытывать на предел трещиностойкости  $I_c$  образцы, имитирующие (в главных чертах) элемент конструкции. Возможно введение корректирующего сомножителя, конструкционного фактора  $\psi$ , который позволит по  $I_c$  образца получить  $I_c^{\text{дет}}$  данной детали посредством пересчета

$$I_c^{\text{дет}} = \psi I_c. \quad (3.4.16)$$

В этом случае расчетное уравнение на прочность имеет вид

$$K \leq \psi I_c. \quad (3.4.17)$$

Преимущество этого метода расчета состоит в доступности получения левой части этого критерия разрушения и в автоматически появляющейся возможности учета как хрупкого, промежуточного, так и вязкого состояний. При отсутствии трещины (или при коротких трещинах) из этого критерия получают нагрузку, соответствующую предельной при полностью вязком разрушении.

**Пример.** Рассмотрим возможность расчета балок из квадратных замкнутых профилей на

основе конструкционного предела трещиностойкости  $I_c^{дет}$ .

На рис. 3.4.6 показана экспериментально полученная диаграмма трещиностойкости  $I_c$  при изгибе образца (400x100x7 мм) из стали 09Г2.

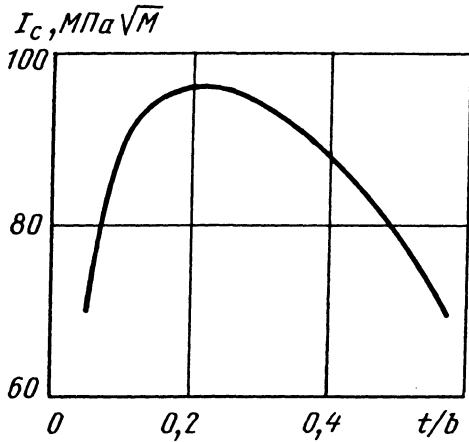


Рис. 3.4.6. Диаграмма трещиностойкости плоского образца с краевой трещиной при изгибе

Сопоставим результаты эксперимента и расчета для гнутых замкнутых коробчатых сварных профилей полого квадратного сечения (рис. 3.4.7) размерами 80x80x7 мм, 110x110x7 мм и 140x140x7 мм.

Остаточные от сварки напряжения удалены отжигом при температуре 900 °С.

Профили из низкоуглеродистой низколегированной стали 09Г2 с симметричной трещиной разной длины  $l$  на растянутой полке испытывали на изгиб.

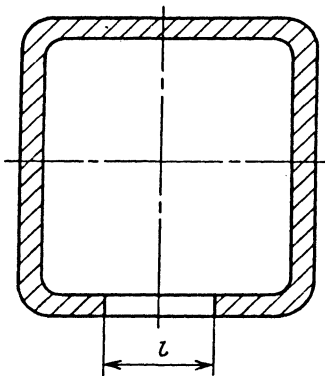


Рис. 3.4.7. Поперечное сечение коробчатого профиля с трещиной

Для представления результатов эксперимента в виде зависимости  $I_c^{дет}$  от относительной длины трещины отнесем длину трещины  $l$  к ширине  $b$ , в качестве которой возьмем  $3\Pi/4$ , где  $\Pi$  - периметр сечения профиля. Коэффициент  $3/4$  выбран для исключения сжатой полки. Экспериментальные конструкционные предельные кривые трещиностойкости  $I_c^{дет}$  для профилей приведены на рис. 3.4.8 (сплошные линии).

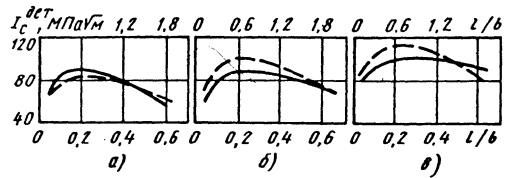


Рис. 3.4.8. Диаграммы трещиностойкости  $I_c^{дет}$  профилей разных размеров: а - 80x80x7 мм; б - 110x110x7 мм; в - 140x140x7 мм (длина трещины на верхней шкале отнесена к ширине полки, на нижней - к расчетной ширине  $3\Pi/4$ )

Согласно формуле (3.4.16) конструкционный предел трещиностойкости  $I_c^{дет}$  можно определить, умножив предел трещиностойкости образца  $I_c$  (см. рис. 3.4.6) на конструктивный фактор  $\psi$ .

Примем на основании экспериментов, что

$$\psi = \sqrt{\frac{b^{дет}}{b^{обп}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Pi}{b}} \quad (3.4.18)$$

Значения  $I_c^{дет}$ , вычисленные по формуле (3.4.16) с учетом этих данных, отличаются от экспериментальных  $I_c^{дет}$  не более чем на 15 % (штриховые линии на рис. 3.4.8).

Приведем расчет на прочность коробчатого профиля размерами 95x95x7 мм (см. рис. 3.4.7).

Определим номинальное напряжение разрушения при изгибе балки со сквозной усталостной трещиной длиной 60 мм на растянутой стороне.

Предел трещиностойкости образца  $I_c$  определен при  $b=100$  мм (см. рис. 3.4.6), а ширина детали  $b^{дет}=3\Pi/4=285$  мм. Относительная длина трещины в детали  $l/b^{дет}=60/285=0,21$ . Для этой длины по рис. 3.4.6 находим  $I_c=97$  МПа·м<sup>1/2</sup>. Конструкционный фактор находим по формуле (3.4.18):

$$\psi=0,5\sqrt{380/100} = 0,98.$$



Следовательно, конструкционный предел трещиностойкости профиля

$$I_c^{\text{дег}} = \psi I_c = 0,98 \times 97 = 95 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}.$$

Теперь можно подсчитать брутто-напряжение разрушения (максимальное при изгибе, т.е. в растянутой полке) по формуле (3.4.17):

$$\sigma_c = \frac{I_c^{\text{дег}}}{\sqrt{I} \cdot Y(l/b)} = \frac{95}{\sqrt{0,06} \cdot 1,22} = 320 \text{ МПа}.$$

Коэффициент формы  $Y(l/b)$  для профиля определен методом податливости (рис. 3.4.9).

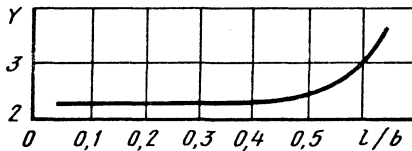


Рис. 3.4.9. График для определения коэффициента формы для трехточечного изгиба балки коробчатого профиля с симметричной трещиной на растянутой стороне

Таким образом, метод расчета по пределу трещиностойкости удобен тем, что позволяет экспериментально определять характеристики трещиностойкости (при любом характере разрушения) по максимальной силе, выдерживаемой деталью с трещиной, по формулам для коэффициента интенсивности напряжений и эту характеристику считать границей области допустимых состояний детали с трещиной.

Диаграмму трещиностойкости удобно аппроксимировать формулой вида  $I_c/I_{c \max} = f(\sigma_c/\sigma_B)$ , которую можно записать по отношению к небольшой числу экспериментальных точек. В частности,

$$I_c = I_{c \max} \sqrt{1 - (\sigma_c / \sigma_B)^2}, \quad (3.4.19)$$

или

$$I_c = K_{Ic} \frac{\sigma_c}{\sigma_f} \left[ \frac{8}{\pi^2} \ln \sec \left( \frac{\pi \sigma_c}{2 \sigma_f} \right) \right]^{-1/2}. \quad (3.4.20)$$

Сюда входят эмпирические величины, такие, как показатель степени  $q$  (примерно равный 2-4); временное сопротивление  $\sigma_B$ ; характеристика трещиностойкости (вязкость разрушения)  $K_{Ic}$ ; деформирующее напряжение  $\sigma_f$ , которое может быть принято равным одному из диапазона между  $\sigma_{0,2}$  и  $\sigma_B$  либо рассчитано как предельное на основе теории пластичности (при образовании пластического шарнира); максимальное значение  $I_c = I_{c \max}$  среди всех  $I_c$ , полученных в испытанном диапазоне длин трещин.

Предел трещиностойкости относится к так называемым двухпараметрическим критериям разрушения. Действительно, формулу (3.4.19) можно переписать в виде соотношения

$$\left( \frac{\sigma}{\sigma_B} \right)^q + \left( \frac{K}{I_{c \max}} \right)^2 = 1,$$

которое показывает долю участия каждого отдельного "моно"-критерия (а именно,  $\sigma \leq \sigma_B$  и  $K \leq I_{c \max}$ ) при их совместном использовании.

#### 3.4.5. РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОСНОВАНИЕ ЗАПАСОВ ПРОЧНОСТИ

Для вновь проектируемых машин и конструкций расчеты прочности проводят применительно ко всему спектру эксплуатационных режимов нагружения, включая предпусковые и периодические испытания, пуски-остановы, регулирование рабочих параметров и срабатывание систем аварийной защиты.

Для надлежащего обоснования прочности, ресурса и трещиностойкости требуется комплекс расчетов напряженно-деформированного состояния несущих элементов, включающий определение номинальных  $\sigma_n^3$  и максимальных  $\sigma_{\max}^3$  напряжений, амплитуд этих напряжений, максимальных  $T_{\max}^3$  и минимальных  $T_{\min}^3$  температур эксплуатации, чисел циклов  $N^3$  и времени  $t^3$  эксплуатации. Эти расчеты для сложных многоэлементных узлов дополняют испытаниями моделей из оптически активных (фотоупругость) и низкомодульных материалов и из соответствующих конструкционных материалов. Испытания проводят при имитации эксплуатационных режимов нагружения, а номинальные и локальные напряжения, деформации, температуры измеряют тензорезисторами, оптически активными и хрупкими тензочувствительными покрытиями, средствами муара, голографии, термовидения.

Для подтверждения критериев характеристик прочности, ресурса и трещиностойкости (см. гл. 3.1-3.3) проводят комплекс аттестационных испытаний на стандартных, унифицированных или специальных лабораторных образцах. В тех случаях, когда создаются новые и ответственные конструкции, проводят испытания моделей с доведением их до предельного состояния - развитие недопустимой деформации, вязкое или хрупкое разрушение, образование и развитие трещин. При этом широко используют методы и средства дефектоскопии - ультразвуковой, рентгеновской, оптической, акустической и акустоэмиссионной, электромагнитной, термовизионной, голографической.

По результатам указанных испытаний решают две важные практические задачи:

обоснование принятых расчетных схем, расчетных случаев, предельных состояний и запасов прочности;

переход на новые, обычно пониженные, запасы прочности.

В последнем случае предельно низкие запасы прочности обосновывают полномасштабными испытаниями в условиях, приближенных к штатным - по конструкторско-технологическим решениям и по представительному спектру эксплуатационных воздействий. Однако и при проведении таких испытаний запасы по местным напряжениям и деформациям рекомендуется иметь не ниже 1,15-1,25, а по ресурсу - не ниже 3-5.

На стадии эксплуатации машин и конструкций с учетом изменения состояния несущих элементов (механические свойства и дефектность) и накопления эксплуатационных повреждений проводят испытания образцов-свидетелей, отдельных узлов или целых изделий, определяют остаточную прочность, ресурс и трещиностойкость. Продлить ресурс безопасной эксплуатации можно с использованием всех запасов - по номинальным напряжениям, местным напряжениям и деформациям, трещиностойкости, времени и числу циклов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гусенков А. П.** Прочность при изотермическом и неизотермическом малоцикловом нагружении. М.: Наука, 1976. 295 с.
2. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
3. **Когаев В. П., Махутов Н. А., Гусенков А. П.** Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность. М.: Машиностроение, 1985. 224 с.
4. **Махутов Н. А.** Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций

на прочность. М.: Машиностроение, 1981. 272 с.

5. **Механика разрушения и прочность материалов:** Справочное пособие. В 4-х т./Под ред. В. В. Панасюка. Киев: Наукова думка. 1988, т.1. 488 с.; 1988, т.2. 620 с.; 1988, т. 3, 436 с.; 1990, т.4. 680 с.

6. **Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок:** Правила и нормы в атомной энергетике. М.: Энергоатомиздат, 1989. 525 с.

7. **Морозов Е. М.** Предел трещиностойкости в нелинейной механике разрушения// Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982. С. 203-215.

8. **Новые методы оценки сопротивления металлов хрупкому разрушению:** Пер. с англ./ Под ред. Ю. Н. Работнова. М.: Мир, 1972. 440 с.

9. **Панасюк В. В.** Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1968. 274 с.

10. **Паргон В. З., Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения. 2-е изд. М.: Наука, 1985. 503 с.

11. **Прочность материалов и элементов конструкций в экстремальных условиях.** В 2 т./ Под ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наукова думка, 1981. т.1. 531 с.; т. 2. 796 с.

12. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.

13. **Разрушение.** В 7 т./ Под ред. Г. Либовица. М., 1973-1975.

14. **Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М.** Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. М.: Машиностроение, 1975. 488 с.

15. **Уравнения состояния при малоцикловом нагружении / Н. А. Махутов, М. М. Галенин, Д. А. Гохфельд и др.** М.: Наука, 1981. 244 с.

16. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

## Раздел 4

# ТЕРМОПРОЧНОСТЬ

Для многих отраслей техники характерны конструкции, работающие в условиях интенсивных тепловых и силовых воздействий. Работоспособность и долговечность таких теплонапряженных конструкций зависят от большого числа взаимосвязанных факторов, которые являются предметом изучения разделов механики: теорий теплопроводности, термоупругости, пластичности и ползучести, механики разрушения и др. Однако особенности работы теплонапряженных конструкций обуславливают, как правило, совместное рассмотрение упомянутых разделов механики и их изложение с единых позиций. Такой путь позволяет инженеру-расчетчику ориентироваться во взаимосвязанных вопросах и квалифицированно подойти к решению достаточно сложных прикладных задач термочечности.

К этому кругу вопросов прежде всего следует отнести постановку, методы и алгоритмы решения задач по определению температурного и напряженно-деформированного состояний элементов конструкций с учетом неупругого поведения материалов при переменных режимах тепловых и силовых воздействий с целью оценки работоспособности и долговечности теплонапряженных конструкций. Комплекс этих вопросов, включая особенности численной реализации эффективных методов решения прикладных задач термочечности на ЭВМ и описание соответствующих алгоритмов расчета, изложен в данном разделе.

### Глава 4.1

#### **ФАКТОРЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ РАБОТОСПОСОБНОСТЬ ТЕПЛОНАПРЯЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Одним из основных факторов, влияющих на работоспособность теплонапряженных конструкций, является зависимость механических характеристик конструкционных материалов от температуры. Кроме того, неравномерное распределение температуры в конструкции (а для конструкции, выполненной из разных материалов, изменение даже однородной по объему температуры) вызывает неоднородное распределение температурных деформаций и, как след-

ствие, дополнительные напряжения, которые в сочетании с напряжениями от действующих на конструкцию силовых нагрузок могут привести к выходу ее из строя. Поэтому анализ работоспособности теплонапряженных конструкций в качестве необходимого этапа должен включать определение их температурного состояния. Обычно этот этап можно выполнить предварительно и независимо от последующего определения напряженно-деформированного состояния конструкции. Однако возможны случаи, когда условия теплового воздействия на конструкцию зависят от возникающих в ней усилий и перемещений. В этих случаях необходимо совместное определение температурного и напряженно-деформированного состояний конструкции.

Материал теплонапряженных конструкций обычно работает в области неупругих деформаций и в условиях переменных температур, так что параметры напряженно-деформированного состояния зависят не только от текущего уровня тепловых и силовых воздействий на конструкцию, но и от предшествующей "истории" ее нагружения, связанной с изменением остаточных деформаций конструкционного материала в процессе неупругого неизотермического деформирования и накоплением в материале повреждений, которые в итоге могут привести к его разрушению. Влияние "истории" нагружения теплонапряженной конструкции на ее работоспособность является также основным фактором, который следует учитывать при анализе термочечности, в частности, проследивать эволюцию тепловых и силовых воздействий на конструкцию, в том числе циклические режимы, характерные для большинства узлов энергетического и технологического оборудования.

Наконец, следует выделить влияние фактора времени на работоспособность и долговечность теплонапряженных конструкций. Это влияние связано, прежде всего, с ползучестью конструкционных материалов при высоких значениях температур и напряжений, что приводит к зависимости параметров напряженно-деформи-

рованного состояния конструкции от времени действия и скорости изменения тепловых и силовых нагрузок, к ограничению срока службы материала. Кроме того, конструкционный материал может подвергаться коррозионному действию агрессивных сред, радиационному облучению и воздействию других физических полей, влияние которых в зависимости от их интенсивности накапливается во времени и также определяет долговечность конструкции.

Для учета перечисленных факторов необходима значительная по объему информация о теплофизических характеристиках конструкционного материала и о его механических свойствах, описывающих процессы деформирования и разрушения в условиях изменяющихся во времени тепловых и силовых воздействий. Эта информация в сочетании с данными об эволюции температурного и напряженно-деформированного состояний позволяет использовать существующие критерии термопрочности для оценки работоспособности и долговечности теплонапряженных конструкций.

#### 4.1.1. ОСОБЕННОСТИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ И МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Из теплофизических характеристик конструкционных материалов необходимыми для анализа влияния теплового воздействия на температурное состояние конструкции являются коэффициент теплопроводности  $\lambda$  и удельная теплоемкость  $c$ . Значение  $\lambda$  зависит от химического состава материала, его структуры и температуры  $T$ . Значение  $\lambda$  обычно падает с ростом  $T$  и, кроме того, для сплавов типа твердых растворов оно ниже, чем для чистых металлов. Значение  $c$  также зависит от химического состава материала, но мало чувствительно к его структуре и растет с увеличением  $T$ . Коэффициент теплопроводности и удельную теплоемкость конструкционных материалов определяют экспериментально. Их значения можно найти в справочной литературе [34, 44, 106].

Зависимость от  $T$  температурной деформации  $\epsilon(T)$  структурно стабильных материалов близка к линейной и одинакова при нагреве и охлаждении. Если в рабочем диапазоне температур конструкционный материал претерпевает структурные превращения, связанные с изменением объема при определенных температурах, то такие эффекты необходимо учитывать путем скачкообразного изменения значения  $\epsilon(T)$  при этих температурах.

Для конструкционных материалов с ростом  $T$ , как правило, падают значения модулей упругости при растяжении  $E$ , сдвиге  $G$  и всесторон-

нем сжатии  $K = GE / (3G - E)$ , пределов текучести  $\sigma_T$  и временного сопротивления  $\sigma_B$ . При этом диаграммы растяжения образцов большинства материалов, используемых в теплонапряженных конструкциях [100, 81], становятся более пологими, т.е. снижается упрочнение материала при пластическом деформировании. Вместе с тем зависимость от  $T$  удлинения  $\delta$  и поперечного сужения  $\psi$  при разрыве образца может быть немонотонной, что связано с различным влиянием температуры на микромеханизмы пластического деформирования и разрушения конструкционных материалов [24, 28].

При фиксированном значении  $T$  увеличение скорости деформирования образца вызывает рост значений  $\sigma_T$  и  $\sigma_B$  [81], тогда как для значений  $\delta$  и  $\psi$  общая закономерность не прослеживается.

Особенностями ползучести металлов и сплавов являются необратимость накопленной деформации и резко выраженная нелинейная зависимость скорости деформации ползучести от действующего на образец растягивающего напряжения [78]. Рост температуры  $T$  вызывает увеличение скорости деформации ползучести пропорционально множителю вида

$$\exp\left[-\frac{U(\sigma)}{kT}\right], \quad (4.1.1)$$

где  $U(\sigma)$  - зависящая от напряжения  $\sigma$  энергия активации элементов микроструктуры материала, перемещение которых определяет микромеханизм процесса ползучести [24, 78];  $k$  - постоянная Больцмана.

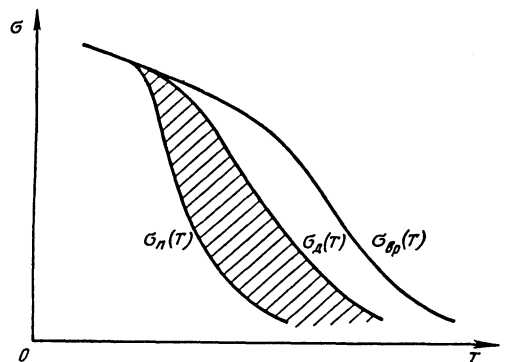


Рис. 4.1.1. Характер зависимости предельных напряжений от температуры

Можно ввести условный предел ползучести  $\sigma_n(T)$  (рис. 4.1.1) [78, 79], равный растягивающему напряжению, при котором за заданное время  $t_n$  при фиксированной температуре  $T$  в образце накапливается обусловленная деформа-

ция ползучести  $\epsilon_p$ . Выбор значений  $t_p$  и  $\epsilon_p$  зависит от условий эксплуатации конструкции, срока ее службы и уровня допустимых деформаций и перемещений. С увеличением температуры значение  $\sigma_p(T)$  снижается, а при фиксированной температуре  $T$  выбор более низкого значения  $t_p$  или более высокого значения  $\epsilon_p$  приводит к увеличению условного предела ползучести.

Если проводить испытания на ползучесть при постоянных значениях растягивающего напряжения  $\sigma$  и температуры  $T$  до разрушения образца, то можно получить зависимость  $t_*(\sigma, T)$  времени разрушения  $t_*$  от этих параметров. При заданном значении  $t_*$  эта зависимость дает предел длительной прочности  $\sigma_d(T)$  как функцию температуры  $T$  (см. рис. 4.1.1). Ясно, что с уменьшением  $t_*$  значения  $\sigma_d(T)$  будут расти и приближаться к значениям  $\sigma_{вр}(T)$ . Кривая зависимости  $\sigma_{вр}(T)$  на рис. 4.1.1 определяет верхнюю границу области параметров  $\sigma$  и  $T$ , в которой можно использовать данный конструкционный материал, тогда как зависимость  $\sigma_d(T)$  устанавливает верхнюю границу рабочей области с учетом срока службы теплонапряженной конструкции. Если точка с координатами  $T, \sigma$  попадает в заштрихованную на рис. 4.1.1 область, то при анализе работоспособности конструкции необходимо учитывать ползучесть материала. Кривая зависимости  $\sigma_p(T)$  определяет верхнюю границу области параметров  $\sigma$  и  $T$ , в которой можно пренебречь влиянием фактора времени на поведение конструкционного материала и рассматривать лишь его упругие и упруго-пластические деформации как мгновенную реакцию на действующие нагрузки при текущей температуре, но с учетом предшествующих этапов неупругого неизотермического деформирования материала.

Микромеханизмы возникновения мгновенных пластических деформаций и развивающихся во времени деформаций ползучести тесно связаны между собой, поэтому необходимо учитывать взаимодействие процессов ползучести и пластического деформирования, которое усиливается с ростом температуры. Кроме того, механические свойства конструкционных материалов изменяются с температурой не только как мгновенная реакция на ее текущее значение, но и с некоторым запаздыванием вследствие постепенной перестройки микроструктуры материала со скоростью, которая также пропорциональна множителю вида (4.1.1). Все это затрудняет при повышенных температурах раздельное определение характеристик пластичности и ползучести материала в экспериментах и заставляет учитывать взаимное влияние процессов ползучести и пластического деформирования на напряженно-деформированное состояние и работоспособность теплонапряженных конструкций [28].

#### 4.1.2. О КРИТЕРИЯХ РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛА ТЕПЛОНАПРЯЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Работоспособность теплонапряженных конструкций зависит от большого числа факторов. Одна из форм потери работоспособности элемента конструкции связана с разрушением его материала.

Прежде всего конструкционный материал должен удовлетворять критерию статической прочности при текущих значениях температуры и приложенных нагрузок. Если в некотором объеме изотропного материала напряженное состояние близко к однородному и разрушение материала носит хрупкий или квазихрупкий характер, т.е. происходит в упругой области или же остаточные деформации сравнительно малы, то хорошие результаты дает критерий наибольшего нормального напряжения, согласно которому материал не разрушается при

$$\sigma_1 \leq \sigma_{вр}(T), \quad (4.1.2)$$

где  $\sigma_1$  - наибольшее главное напряжение;  $\sigma_{вр}(T)$  - зависящее от температуры  $T$  временное сопротивление (предел прочности) материала на одноосное растяжение. Однако для теплонапряженных конструкций условие (4.1.2) не может рассматриваться как универсальный критерий, поскольку для хрупких материалов опасными с точки зрения разрушения являются и такие напряженные состояния, для которых  $\sigma_1 \leq 0$ . Такие напряженные состояния возникают, например, в поверхностных слоях деталей с вогнутой поверхностью, на которой происходит теплообмен с высокотемпературной средой.

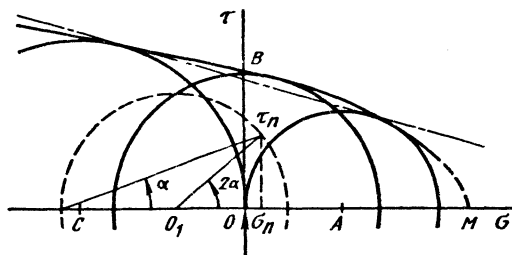


Рис. 4.1.2. Диаграмма предельных состояний хрупкого материала

Более полное представление о сопротивлении разрушению хрупких материалов дает диаграмма предельных состояний, связывающая между собой критические значения касательных  $\tau_n$  и нормальных  $\sigma_n$  напряжений, действующих в некоторой площадке с направлением нормали  $\vec{n}$ . Предельная кривая может быть построена как огибающая кругов Мора (рис. 4.1.2), радиусы которых определяются по результатам испытаний образцов материала на разрушение при

фиксированной температуре  $T$  и различных напряженных состояниях:  $OA = \sigma_{вр}(T)/2$ ,  $OB = \tau_{в}(T)$  и  $OC = \sigma_{вс}(T)/2$ , где  $\tau_{в}(T)$  и  $\sigma_{вс}(T)$  - зависящие от температуры  $T$  пределы прочности при чистом сдвиге и одноосном сжатии. Если нормаль к площадке составляет угол  $\alpha$  с осью, совпадающей с направлением наибольшего главного напряжения, то  $\sigma_n$  и абсолютное значение  $\tau_n$  являются координатами точки на дуге контура соответствующего круга Мора (штриховая линия на рис. 4.1.2). Запас прочности материала при напряженном состоянии, соответствующем заданному кругу Мора, можно оценить по отношению радиуса круга с центром в точке  $O_1$ , касающегося предельной кривой, к радиусу заданного круга.

Если огибающую заменить прямой, касающейся контуров кругов с центрами в точках  $A$  и  $C$  (штрихпунктирная линия на рис. 4.1.2), то вместо (4.1.2) получим [77]

$$\sigma_{экр} = \sigma_1 - \sigma_3 \sigma_{вр}(T) / \sigma_{вс}(T) \leq \sigma_{вр}(T)$$

или

$$\sigma_1 / \sigma_{вр}(T) - \sigma_3 / \sigma_{вс}(T) \leq 1, \quad (4.1.3)$$

где  $\sigma_3$  - наименьшее главное напряжение. Условие (4.1.3) дает удовлетворительные результаты для напряженных состояний, которым соответствуют круги Мора с центрами, лежащими на рис. 4.1.2 между точками  $A$  и  $C$ . При  $\sigma_1 < 0$  использование (4.1.3) не дает надежных результатов, так как в условиях трехосного сжатия разрушение материалов, хрупких при растяжении, сопровождается обычно заметной пластической деформацией. Ввиду невозможности при помощи эксперимента определить положение точки  $M$ , абсцисса которой соответствует прочности материала при равномерном всестороннем растяжении, условием (4.1.3) неправомерно пользоваться и при  $\sigma_3 > 0$ .

Напряженные состояния типа всестороннего растяжения возникают в зоне концентраторов напряжения (конструктивных или технологических, связанных с процессом получения материала или изготовления элемента конструкции - микротрещин, включений, пор, пустот, несплохов при сварке и т.п.). Концентратор напряжения в виде трещины с острой кромкой может появиться и в процессе эксплуатации конструкции (например, при циклическом нагружении). Условие прочности растягиваемой напряжением достаточно широкой, но тонкой полосы с трещиной длиной  $L$  имеет вид [77]

$$\sigma \sqrt{\pi L} \leq K_C(T), \quad (4.1.4)$$

где  $K_C(T)$  - вязкость разрушения материала при температуре  $T$ , не зависящая от  $\sigma$  и  $L$ , но характерная для плоского напряженного состояния ( $\sigma_3 = 0$ ), которое возникает в тонкой полосе. При увеличении толщины полосы происходит

изменение типа напряженного состояния от плоского к трехосному, причем в зоне кромки трещины будет  $\sigma_3 > 0$ . Это приводит к уменьшению правой части в (4.1.4), которая стремится к своему нижнему пределу  $K_{1C}(T)$ , соответствующему плоскому деформированному состоянию. Значение  $K_{1C}$  определяют экспериментально по испытаниям стандартизованных образцов, в которых в зоне трещины реализуется плоское деформированное состояние, и принимают в качестве характеристики материала образца, зависящей лишь от температуры.

Левую часть (4.1.4) можно рассматривать как параметр интенсивности напряжений, вызываемых трещиной в растягиваемой широкой тонкой полосе. Подобный параметр  $K_C$  может быть, в принципе, найден для заданных условий механического и теплового воздействия из решения задачи упругости или термоупругости в теле любой формы с учетом концентратора напряжения. Для некоторых сравнительно простых случаев для  $K_C$  удается получить замкнутые аналитические выражения [77, 88]. Таким образом, с некоторым запасом (4.1.4) в общем случае возможно заменить условием

$$K_C \leq K_{1C}(T). \quad (4.1.5)$$

С повышением температуры для большинства конструкционных материалов  $K_{1C}$  возрастает, причем характер разрушения в зоне концентратора напряжения остается хрупким (или квазихрупким, если пластические деформации малы). Вместе с тем возможность появления пластических деформаций в зоне концентратора снижает эффективное значение  $K_C$  в (4.1.5), так что это условие не всегда определяет опасность разрушения достаточно пластичного материала. При однородном напряженном состоянии условия (4.1.2) и (4.1.3) также оказываются недостаточными для оценки прочности таких материалов.

Для материалов, образцы которых при растяжении разрушаются со значительным удлинением и образованием шейки, в (4.1.2)  $\sigma_{вр}(T)$  следует заменить на сопротивление разрыву  $\sigma_p(T)$ , которое является наибольшим истинным напряжением в шейке образца перед разрушением и может быть найдено по формуле [88]

$$\sigma_p(T) = \sigma_{вр}(T) [1 + 1,35(1 - F_{ш}/F_0)], \quad (4.1.6)$$

где  $F_0$  и  $F_{ш}$  - площади поперечного сечения образца перед растяжением и шейки после разрыва.

Разрушение материала может произойти и путем среза под действием касательных напряжений. Для этого случая наибольшее касательное напряжение  $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$  сопоставляют с сопротивлением на срез  $\tau_{ср}(T)$ , которое определяют по истинной диаграмме кручения тонкостенных трубчатых образцов при фиксированной

температуре  $T$ . Под действием касательных напряжений материал не разрушается, если

$$\tau_{\max} \leq \tau_{\text{ср}}(T). \quad (4.1.7)$$

Поскольку для всех напряженных состояний  $1 \leq \sigma_{\text{н}} / (\sqrt{3}\tau_{\max}) \leq 2 / \sqrt{3} = 1,155$  [59], неравенство (4.1.7) допустимо заменить на

$$\sigma_{\text{н}} \leq \sigma_{\text{ср}}(T), \quad \sigma_{\text{ср}}(T) = \sqrt{3}\tau_{\text{ср}}(T), \quad (4.1.8)$$

где интенсивность напряжений [59]

$$\sigma_{\text{н}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

При произвольном напряженном состоянии с заданными значениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_{\text{н}}$  об опасности разрушения материала можно судить по диаграмме Давиденкова-Фридмана [48] (рис. 4.1.3). В предположении одинаковых масштабов по осям  $\sigma_1$  и  $\sigma_{\text{н}}$  на рис. 4.1.3,а проведены лучи: 1 - для кручения ( $\sigma_1 = -\sigma_3, \sigma_2 = 0, \sigma_{\text{н}}/\sigma_1 = \sqrt{3}$ ), 2 - для одноосного или двухосного равномерного растяжения ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  или  $\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_3 = 0, \sigma_{\text{н}}/\sigma_1 = 1$ ), 3 и 4 - для трехосного растяжения в зоне концентратора напряжения ( $\sigma_3 > 0$ ), причем луч 4 соответствует напряженному состоянию, близкому к равномерному всестороннему растяжению.

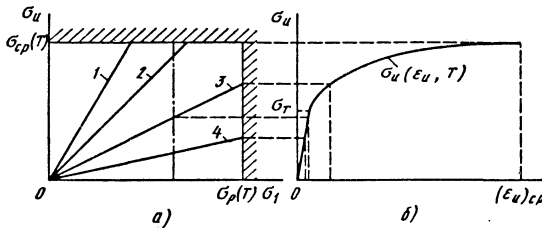


Рис. 4.1.3. Зависимость сопротивления разрушению пластичного материала от вида напряженного состояния

Если  $\sigma_p(T) \geq \sigma_{\text{ср}}(T)$ , то при  $\sigma_3 \leq 0$  разрушение однородного материала без микротрещин и концентраторов напряжений должно происходить путем среза и сопровождаться значительными пластическими деформациями, которым соответствует интенсивность  $(\epsilon_{\text{н}})_{\text{ср}}$ , определяемая по диаграмме  $\sigma_{\text{н}}(\epsilon_{\text{н}}, T)$  (см. рис. 4.1.3,б). При увеличении наименьшего главного напряжения ( $\sigma_3 > 0$ ) определяющим становится условие  $\sigma_1 \leq \sigma_p(T)$ , а разрушение сопровождается все меньшими пластическими деформациями. При напряженном состоянии, близком к равномерному всестороннему растяжению, разрушение может произойти в упругой области и носить хрупкий характер, несмотря на то, что материал при одноосном растяжении обладает высокой пластичностью. Наряду с изложенным подходом

к оценке статической прочности материала предложено большее число других критериев разрушения, в том числе и для анизотропных материалов [18].

Соотношение между  $\sigma_p(T)$  и  $\sigma_{\text{ср}}(T)$  зависит от температуры, структуры материала, технологии его обработки и истории нагружения. Увеличение размера зерен поликристаллического материала, ослабление прочности их границ, накопление микротрещин и повреждений в материале понижает  $\sigma_p(T)$ , но мало влияет на  $\sigma_{\text{ср}}(T)$ . Уровень  $\sigma_p(T)$  также зависит от размеров элемента конструкции, так как для больших размеров выше вероятность появления микротрещин или структурных неоднородностей. На рис. 4.1.3,а штрихпунктирной линией условно показано положение вертикальной границы предельных состояний, сместившейся вследствие снижения  $\sigma_p(T)$  по указанным причинам. Теперь и при напряженном состоянии, соответствующем лучу 3, разрушение носит хрупкий характер. Легирование и термообработка металлов, направленные на повышение пределов текучести  $\sigma_T$  и временного сопротивления  $\sigma_{\text{вр}}$ , обычно мало влияют на  $\sigma_p$  и также приводят к росту отношения  $\sigma_{\text{ср}}/\sigma_p$ , что в конечном счете увеличивает опасность хрупкого разрушения.

В зависимости от рабочей температуры для одного и того же материала при фиксированном типе напряженного состояния разрушение может носить хрупкий, квазихрупкий или вязкий характер. Смене характера разрушения материала при одноосном растяжении соответствуют вторая и первая критические температуры, которые повышаются при снижении отношения  $\sigma_{\text{вр}}/\sigma_T$ , поперечного сужения  $\psi = (F_0 - F_{\text{ш}})/F_0$  и повышении скорости деформирования, предела текучести  $\sigma_T$ , размеров элементов конструкций, количества и размеров повреждений в материале [63].

Для вязкого характера разрушения можно использовать критерий максимальной деформации в виде

$$\epsilon_{\max} \leq \epsilon_p(T) = -\ln[1 - \psi(T)]. \quad (4.1.9)$$

Поскольку накопление повреждений связано в данном случае с пластической деформацией материала, приращение степени повреждений можно записать как

$$d\Pi_1 = d\epsilon^{(p)} / \epsilon_p(T).$$

Тогда вместо (4.1.9) для одноосного растяжения имеем критерий

$$\Pi_1 = \int_0^{\epsilon^{(p)}} d\epsilon^{(p)} / \epsilon_p(T) \leq 1, \quad (4.1.10)$$

причем он применим и в случае неизотермического пластического деформирования, когда  $\epsilon_p(T)$  изменяется вследствие изменения температуры в процессе деформирования. При активно:

пластическом деформировании в условиях сложного напряженного состояния в (4.1.10) необходимо перейти к интенсивности деформации  $\epsilon_n^{(p)}$  [22]:

$$P_1 = \int_0^{\epsilon_n^{(p)}} d\epsilon_n^{(p)} / \epsilon_p(T) \leq 1. \quad (4.1.11)$$

В случае сложных программ нагружения существенным является учет влияния истории деформирования на работоспособность материала. Одной из характерных программ нагружения теплонапряженных элементов конструкций является циклическое изменение во времени тепловых и механических воздействий. Простейший вариант такой программы сводится к знакопеременному одноосному нагружению или деформированию образца материала при постоянной температуре, когда уровни температуры и напряжений таковы, что влияние ползучести материала можно не учитывать.

Процесс накопления повреждений в материале при его циклическом нагружении, завершающийся разрушением после некоторого числа циклов  $N_p$ , называют *усталостью*. При  $N_p > 10^4$  (*многоцикловая усталость*) ширина петли пластического гистерезиса обычно мала и ее трудно измерить [48]. Поэтому критерий многоциклового усталости строится на основе сравнения амплитуды изменения рабочего напряжения (при симметричном цикле изменения напряжения) с предельной амплитудой для данного материала и заданного числа циклов  $N$ . Для асимметричных циклов предельное состояние материала при заданном  $N$  зависит от соотношения между амплитудой изменения рабочего напряжения и его средним значением [88].

Для *малоциклового усталости* ( $N_p < 10^4$ ) ширина петли  $\Delta\epsilon^{(p)}$  пластического гистерезиса становится заметной, и именно по ней можно судить о накоплении повреждений за цикл. Анализ многочисленных результатов экспериментальных и теоретических исследований малоциклового усталости для разных материалов при различных температурах и значениях  $\Delta\epsilon^{(p)}$  показал [22, 69], что для одноосного нагружения можно принять

$$(\Delta\epsilon^{(p)})^2 N_p = C, \quad (4.1.12)$$

где постоянную  $C$  нетрудно определить по результатам испытаний материала на растяжение, полагая  $\Delta\epsilon^{(p)} = \epsilon_p = -\ln(1-\psi)$  и  $N_p = 1/4$ . Тогда  $C = (1/4)\ln^2(1-\psi)$ .

Если к началу  $k$ -го цикла накоплена пластическая деформация  $q_{k-1}^* = (k-1)\Delta\epsilon^{(p)}$ , то приращение степени повреждения материала  $P_2$  за  $k$ -й цикл

$$\Delta P_2^{(k)} = \frac{(\Delta\epsilon^{(p)})^2}{C} = \frac{(q_k^* - q_{k-1}^*)^2 / 4}{(1/4)\ln^2(1-\psi)}, \quad (4.1.13)$$

где  $q_k^* = k\Delta\epsilon^{(p)}$  - накопленная к концу  $k$ -го цикла пластическая деформация. Примем в (4.1.13)  $q_k^* = q^*$  переменной в пределах  $k$ -го цикла. Тогда с учетом возможного изменения температуры

$$dP_2 = 2 \frac{q^* - q_{k-1}^*}{\ln^2[1-\psi(T)]} dq^*$$

и вместо (4.1.12) получим критерий [28]

$$P_2 = \sum_{k=1}^{N_p} \int_{q_{k-1}^*}^{q_k^*} 2 \frac{q^* - q_{k-1}^*}{\ln^2[1-\psi(T)]} dq^* \leq 1, \quad (4.1.14)$$

причем для одноосного нагружения

$$q^* = \int |d\epsilon^{(p)}|, \quad (4.1.15)$$

а при сложном напряженном состоянии  $|d\epsilon^{(p)}|$  в

(4.1.15) следует заменить на  $|d\epsilon_n^{(p)}|$  (см. п. 4.5.5).

При использовании гипотезы линейного суммирования повреждений критерий прочности в виде

$$P_1 + P_2 \leq 1 \quad (4.1.16)$$

учитывает накопление повреждений в материале в неизотермических условиях как при монотонном изменении интенсивности деформации от цикла к циклу, так и при циклическом пластическом деформировании, причем циклы могут отличаться друг от друга.

В случае длительной работы теплонапряженных конструкций при достаточно высоком уровне температуры и напряжений существенное влияние на работоспособность элементов конструкций оказывает накопление повреждений в материале вследствие ползучести. Это влияние учитывается критериями длительной прочности материала [20, 26]. Зависимость времени  $t^*$  до разрушения образца материала, нагруженного в изотермических условиях постоянной растягивающей силой, от условного напряжения  $\sigma$ , определяемого по начальному значению  $F_0$  площади поперечного сечения образца, в логарифмических координатах имеет в общем случае два практически прямолинейных участка (рис. 4.1.4) [77]. Более пологий участок  $AB$  соответствует вязкому характеру разрушения с накоплением значительной деформации, а более крутой участок  $BC$  - хрупкому или квазихрупкому разрушению при сравнительно небольшой остаточной деформации. Эти участки могут стыковаться в точке  $B$ , но возможен и плавный переход (штриховая линия на рис. 4.1.4), которому отве-



часть область смешанных разрушений. Для некоторых материалов в определенном диапазоне температур один из участков может отсутствовать.

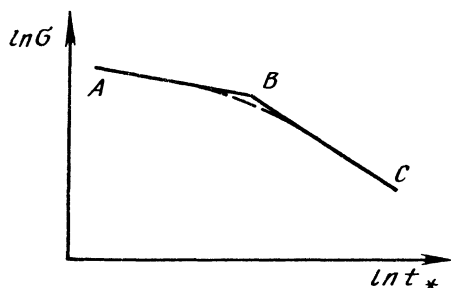


Рис. 4.1.4. Диаграмма длительной прочности материала

Результаты испытаний материалов на длительную прочность, проводимых при различных, но постоянных во времени температурах  $T$ , обычно обрабатывают в виде параметрических зависимостей, связывающих  $T$ ,  $\sigma$  и  $t_*$ . Наибольшее распространение получила зависимость Ларсона-Миллера

$$T(C_1 + \lg t_*) = F(\sigma), \quad (4.1.17)$$

в которой функцию  $F(\sigma)$  находят по результатам испытаний при какой-либо фиксированной температуре, а значение  $C_1$  подбирают путем обработки в координатах  $\lg t_*$  и  $T$  серии испытаний при заданном уровне  $\sigma$  и различных температурах. Для некоторых материалов значение  $C_1$  заметно меняется с изменением уровня  $\sigma$  и лучшее совпадение с данными испытаний может дать зависимость Мэнсона-Хафелда

$$(T - T_0) / \lg(t_* / t_0) = F(\sigma), \quad (4.1.18)$$

содержащая два подбираемых параметра  $T_0$  и  $t_0$ . Зависимости вида (4.1.17) и (4.1.18) и другие такого типа позволяют не только интерполировать экспериментальные данные для промежуточных значений  $\sigma$  и  $T$ , но и проводить достаточно надежную экстраполяцию результатов кратковременных испытаний при более высоких температурах на более длительные периоды нагружения материала при меньших температурах.

Анализ изменения эффективной площади поперечного сечения образца при различном характере его разрушения [78, 79] позволяет распространить гипотезу линейного суммирования повреждений на обобщение данных по длительной прочности применительно к сложным программам нагружения. Если приращение степени повреждения  $\Pi_3$  за период времени  $dt$  представить в виде [28]

$$d\Pi_3 = dt / t_*[\sigma(t), T(t)],$$

где  $t_*[\sigma(t), T(t)]$  - время до разрушения образца при постоянных  $\sigma$  и  $T$ , совпадающих с текущими значениями  $\sigma(t)$  и  $T(t)$ , то в качестве критерия длительной прочности при переменных во времени тепловых и механических воздействиях допустимо принять

$$\Pi_3 = \int_0^{t_*} dt / t_*[\sigma(t), T(t)] \leq 1. \quad (4.1.19)$$

Зависимость  $t_*[\sigma(t), T(t)]$  может быть получена из (4.1.17), (4.1.18) или какой-либо другой параметрической зависимости, если ее явно разрешить относительно  $t_*$ .

В случае сложного напряженного состояния в (4.1.19) вместо  $\sigma(t)$  в качестве аргумента следует использовать текущее значение интенсивности напряжений  $\sigma_{\text{и}}(t)$ . Для некоторых материалов оказывается существенным влияние на длительную прочность типа напряженного состояния, что удается учесть введением вместо  $\sigma_{\text{и}}$  некоторого эквивалентного напряжения  $\sigma_{\text{экв}}$  (например,  $\sigma_{\text{экв}} = (\sigma_{\text{и}} + \sigma_1) / 2$  [20]).

При работе материала теплонапряженных конструкций в условиях, когда его разрушение зависит от всех рассмотренных выше факторов, в качестве критерия прочности можно использовать условие

$$\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 \leq 1, \quad (4.1.20)$$

которое также следует из гипотезы линейного суммирования повреждений и позволяет учесть влияние сложной программы изменения тепловых и механических воздействий на конструкционный материал.

## Глава 4.2

### ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕРМОМЕХАНИКИ

#### 4.2.1. СООТНОШЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ НЕОБРАТИМЫХ ПРОЦЕССОВ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА С ВНУТРЕННИМИ ПАРАМЕТРАМИ СОСТОЯНИЯ

При исследовании поведения деформируемого тела под действием окружающей среды его необходимо рассматривать как термодинамическую систему. Если термодинамическая система обменивается массой или энергией с окружающей средой, то такую термодинамическую систему называют *открытой*. В противном случае ее называют или *закрытой*, если отсутствует обмен энергией, или *изолированной*, если одновременно отсутствуют массо- и энергообмен с окружающей средой [36, 47, 74, 87].

Состояние термодинамической системы в любой момент времени характеризуется параметрами термодинамического состояния, которые меняются вместе с изменением системы при

ее взаимодействии с окружающей средой. Если при постоянных внешних воздействиях параметры термодинамического состояния не меняются в течение рассматриваемого промежутка времени, то система находится в состоянии *термодинамического равновесия*. Состояние равновесия называют *устойчивым*, если при прекращении любых малых внешних воздействий система возвращается к исходному состоянию. В противном случае состояние равновесия называют *неустойчивым*.

При взаимодействии с окружающей средой термодинамическая система проходит ряд последовательных состояний, совокупность которых называют *термодинамическим процессом*. Термодинамический процесс называют *равновесным*, если в любом промежуточном состоянии при фиксированных внешних воздействиях для конечного интервала времени параметры термодинамического состояния системы не изменяются. *Неравновесными* называют процессы, состоящие из последовательности неравновесных состояний. При заданных внешних воздействиях реальные процессы в термодинамической системе всегда происходят с конечной скоростью изменения параметров термодинамического состояния, поэтому они всегда будут неравновесными. В том случае, если скорости изменения параметров термодинамического состояния достаточно малы, процесс приближенно можно считать равновесным. Равновесный процесс, который и в прямом, и в обратном направлениях проходит через одну и ту же последовательность состояний, только в обратном порядке, носит название *обратимого*. В противном случае термодинамический процесс называют *необратимым*. Необратимые термодинамические процессы характеризуются рассеянием энергии.

К числу параметров термодинамического состояния в зависимости от необходимости учета различных процессов, протекающих в термодинамической системе, относят плотность, температуру, тензор деформаций и другие аргументы, а также параметры, учитывающие внутреннюю структуру рассматриваемого тела. В зависимости от внутренней структуры материала тела - кристаллической, аморфной, высокомолекулярной и т.п. - внешние воздействия вызывают соответствующие структурные изменения. На макроуровне эти изменения описываются конечным, хотя и, в общем случае, достаточно большим количеством скалярных, векторных и тензорных величин, называемых внутренними параметрами состояния системы. Характер этих параметров, как и их изменение, вследствие протекающих в теле термомеханических процессов, определяется макроструктурным анализом их микромеханизма [47].

Изменение внутренних параметров состояния задается при помощи уравнений для скоростей их изменения, называемых уравнениями эволюции параметров. Определение внутренних

параметров состояния и уравнений, описывающих их изменение, необходимо связывать с результатами исследований в области микромеханики, физики твердого тела, теории дислокаций и структурных дефектов, физикохимии высокомолекулярных соединений и в других смежных областях науки. Основная трудность при этом состоит в согласовании результатов исследований на микроуровне с системой вводимых феноменологических гипотез, удовлетворяющих общим требованиям термодинамики необратимых процессов, для того, чтобы получить определяющие соотношения и уравнения эволюции в приемлемо упрощенном для применения виде.

Если параметры состояния и уравнения их эволюции постулируются феноменологически, то они должны иметь интерпретацию на микроуровне и экспериментальное подтверждение.

Для кристаллических решеток с различного типа дефектами (точечными, линейными, поверхностными), обладающими свойствами передвигаться и порождаться при термомеханических воздействиях, деформирование поликристалла сопровождается структурными изменениями, которые должны описываться внутренними параметрами состояния. В качестве таких параметров могут выступать статистически усредненные плотности структурных дефектов как тензорной, так и скалярной природы. На макроуровне эти внутренние параметры позволяют учесть вязкопластические деформации поликристаллов.

В материалах с высокомолекулярной структурой при невысоких уровнях воздействий происходит раскручивание и переориентация молекулярных цепей, что на макроуровне проявляется в виде вязких свойств. При более высоких уровнях внешней термомеханической нагрузки тепловое движение атомов может достигнуть такого энергетического уровня, при котором возбуждается химическая реакция распада, вызывающая разрыв связей в молекулярных цепях, образование более низкомолекулярного полимера и множества субмикротрещин в объеме полимерного материала. В этом случае микротрещины играют роль микродефектов, и в качестве внутренних параметров могут быть выбраны тензор плотности микродефектов, связанный с числом и средней длиной микротрещин в единице объема тела, и скалярная величина - скорость химической реакции распада.

При описании процесса теплопроводности, например, на основе представлений о движении фононного газа внутренний параметр состояния может быть ассоциирован с векторной функцией плотности распределения фононов.

Так как параметры термодинамического состояния и соответствующие эволюционные уравнения отражают физическую структуру материала, то вид связей в этих уравнениях может быть достаточно разнообразен. Однако, несмотря на это, они не могут быть произвольными. Конкретный вид каждого из уравнений должен под-

чиняться основным принципам: взаимной связи, причинности, равноприсутствия, объективности, локальности, затухающей памяти, допустимости и нулевому закону термодинамики. Наряду с этим должны выполняться законы сохранения и второй закон термодинамики [47, 74].

Суть указанных выше принципов заключается в следующем. В соответствии с *принципом взаимной связи* деформируемое тело имеет разные состояния, которые могут быть описаны с помощью известного числа величин, причем все остальные величины получаются из них при помощи некоторых определяющих зависимостей. Очевидно, что выбор базисных величин, определяющих состояния термодинамической системы, не является однозначным.

Если ввести понятия *реактивных* и *активных переменных*, причем первые характеризуют реакцию материала на внешние термомеханические воздействия, а вторые - внутренние силы, порожденные этими воздействиями, то каждая активная переменная связана с реактивными переменными с помощью определяющего уравнения. При этом также существует и обратная связь, т.е. каждая реактивная переменная зависит от активных переменных. В соответствии с *принципом причинности* любая реактивная переменная может зависеть от настоящих и прошлых значений активных переменных, но не от их значений в будущем.

*Принцип равноприсутствия* гласит, что если какая-либо величина присутствует в определяющем уравнении в качестве независимой переменной, то она может присутствовать и в остальных определяющих зависимостях.

*Принцип объективности* гласит, что определяющие уравнения сохраняют свою форму при произвольном вращении и трансляции в пространстве и времени исследуемого тела как абсолютно твердого.

Смысл *принципа локальности* заключается в том, что значения активных переменных и эволюционные уравнения для внутренних параметров состояния в окрестности рассматриваемой точки определяются только значениями реактивных переменных в окрестности этой точки. Если отказаться от принципа локальности, то в этом случае возможно построение более сложных, нелокальных моделей сплошной среды.

В соответствии с *принципом затухающей памяти* более отдаленные в прошедшем времени состояния термодинамической системы слабее влияют на значения активных и реактивных переменных в данный момент по сравнению с более близкими.

Согласно *принципу допустимости* все предложения, связанные с определяющими уравнениями эволюции внутренних параметров состояния, должны находиться в соответствии с законами сохранения и ограничениями, следующими из второго закона термодинамики.

*Нулевой закон термодинамики* гласит, что

любая изолированная термодинамическая система имеет по крайней мере одно основное состояние, в котором будет находиться неограниченно долго.

Для получения уравнений, описывающих температурные поля и напряжения в деформируемом теле, в дальнейшем рассматриваются малые перемещения и градиенты перемещений. В этом случае вектор перемещения  $\mathbf{u}$  с компонентами  $u_i$  рассматривается как некоторое векторное поле, тензор деформаций с компонентами  $\varepsilon_{ij}$  - как тензорное поле, определенные в действительном векторном пространстве [75]. Компоненты тензора деформаций выражаются через компоненты вектора перемещений соотношениями Коши  $\varepsilon_{ij} = (du_i/dx_j + du_j/dx_i)/2$  (здесь и далее  $i, j = 1, 2, 3$ , а также везде в формулах подразумевается суммирование по повторяющимся латинским индексам). Тогда из *уравнения неразрывности* (закона сохранения массы) [19]

$$\rho = \rho_0 \sqrt{1 + 2I_1 + 2(I_1^2 - I_2) - 4I_1I_2 + \frac{4}{3}I_1^3 + \frac{8}{3}I_3}, \quad (4.2.1)$$

где  $\rho_0$ ,  $\rho$  - начальное и текущее значения плотности;  $I_1, I_2, I_3$  - инварианты тензора деформаций, следует, что для малых деформаций

$$\rho \approx \rho_0. \quad (4.2.2)$$

На объем сплошной среды  $V$  в процессе деформирования действуют массовые силы интенсивностью  $\mathbf{b}$ , а на каждом элементе  $dS$  поверхности, ограничивающей  $V$ , приложен вектор напряжения с компонентами  $\sigma_i^{(n)}$ . Материальные частицы в объеме  $V$  имеют скорости  $\mathbf{v}$  с компонентами  $v_i = du_i/dt$ .

Для любого объема  $V$  сплошной среды можно написать *уравнение закона сохранения количества движения*, в соответствии с которым скорость изменения количества движения равна сумме всех действующих на тело внешних поверхностных и объемных сил, т.е. [36, 47, 74, 87]

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{du_i}{dt} dV = \int_V \rho b_i dV + \int_S \sigma_i^{(n)} dS. \quad (4.2.3)$$

Равенство (4.2.3) является основным постулируемым динамическим соотношением механики сплошной среды [87]. Как второй закон Ньютона является исходным в механике точки, так и уравнение (4.2.3) лежит в основе механики сплошной среды и является исходным для исследования любых движений сплошной среды. Подробно вопросы, связанные с законом сохранения количества движения, рассмотрены в [87].

После преобразования второго слагаемого в правой части (4.2.3) согласно принципу локальности следует формулировка закона сохранения количества движения

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i. \quad (4.2.4)$$

В соответствии с теоремой об изменении момента количества движения производная по времени от момента количества движения

$$\mathbf{N} = \int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) \rho dV$$

равна сумме моментов вне-

шних массовых и поверхностных сил, а также моментов действующих на этот объем распределенных массовых и поверхностных пар сил, вызванных внешними по отношению к объему  $V$  материальными объектами. В рассматриваемом случае распределенные массовые и поверхностные пары сил не учитываются (это делают при построении более сложных по сравнению с рассматриваемыми моделями деформируемых сред, называемых микрополярными). Тогда [36, 47, 74, 87]

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) \rho dV = \int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{b}) \rho dV + \int_S (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}^{(n)}) dS \quad (4.2.5)$$

или после преобразования второго слагаемого в правой части (4.2.5) и использования принципа локальности

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (4.2.6)$$

Соотношение (4.2.6) носит название условия парности касательных напряжений.

*Закон сохранения энергии*, который также называют первым законом термодинамики, гласит, что скорость изменения полной энергии деформируемого тела определяется мощностью внешних сил и количеством тепла, получаемым телом в единицу времени [36, 47, 74, 87]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_V \rho v_i v_i dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u dV &= \int_S \sigma_i^{(n)} v_i dS + \\ + \int_V \rho b_i v_i dV - \int_S q_i n_i dS + \int_V \rho r dV. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

В этом соотношении слагаемые в левой части представляют собой скорости изменения соответственно кинетической и внутренней энергии тела ( $u$  - массовая плотность внутренней энергии). Правая часть (4.2.7) состоит из следующих слагаемых: работы, совершаемой поверхностными и массовыми силами в единицу времени, тепла, потерянного при взаимодействии с окружающей средой через поверхность  $S$ , и тепла, полученного вследствие объемного взаимодействия с окружающей средой ( $q_i$  - компоненты вектора плотности теплового потока;  $r$  - массовая плотность мощности тепловых источников или стоков).

Локальная формулировка закона сохранения энергии имеет вид

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \sigma_{ji} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho r. \quad (4.2.8)$$

Для формулировки второго закона термодинамики постулируется существование двух различных параметров состояния - абсолютной температуры  $T$  и энтропии  $H$ . Абсолютная температура является положительной величиной ( $T > 0$ ). Предполагается, что энтропия обладает свойством аддитивности, т.е. полная энтропия термодинамической системы равна сумме энтропий ее частей. Полная энтропия определяется интегралом

$$H = \int_V \rho h dV, \quad (4.2.9)$$

где  $h$  - массовая плотность энтропии.

Изменение энтропии термодинамической системы на величину  $dh$  может осуществляться как вследствие процессов, происходящих внутри системы ( $dh^{(i)}$ ), так и вследствие взаимодействия с окружающей средой ( $dh^{(e)}$ ), т.е.  $dh = dh^{(i)} + dh^{(e)}$ .

Приращение  $dh^{(i)}$  неотрицательно для всех термодинамических процессов:  $dh^{(i)} > 0$  для необратимых процессов и  $dh^{(i)} = 0$  для обратимых процессов.

Если при обратимом процессе приток тепла, приходящий на единицу массы системы, составляет  $\delta Q$ , то приращение энтропии вследствие взаимодействия с окружающей средой  $dh^{(e)} = \delta Q/T$  является полным дифференциалом, и абсолютная температура выступает здесь в качестве интегрирующего множителя.

Второй закон термодинамики гласит, что скорость изменения энтропии  $H$  термодинамической системы, занимающей объем  $V$ , при любых термодинамических процессах не может быть меньше, чем сумма притока энтропии через границу тела  $S$  и энтропии, производимой внутри объема внешними источниками, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho h dV \geq \int_V \frac{\rho r}{T} dV - \int_S \frac{q_i n_i}{T} dS. \quad (4.2.10)$$

Неравенство (4.2.10) носит название неравенства Клаузиуса-Дюгема и является наиболее широко используемой математической формулировкой второго закона термодинамики.

Локальная формулировка неравенства Клаузиуса-Дюгема может быть получена в результате уже неоднократно проделанных преобразований:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{q_i}{T} \right) - \frac{\rho r}{T} \geq 0. \quad (4.2.11)$$

Второе слагаемое в левой части (4.2.11) можно представить в виде  $T^{-1} \partial q_i / \partial x_i - T^{-2} q_i \partial T / \partial x_i$ . Тогда изменение

энтропии термодинамической системы вследствие взаимодействия с окружающей средой  $\rho dh^{(\alpha)} / \partial t = -T^{-1} \partial q_i / \partial x_i$ . Если производство энтропии внутри деформируемого тела обусловлено только процессом теплопроводности и объемным энерговыделением, то  $\rho dh^{(\alpha)} / \partial t = T^{-2} q_i \partial T / \partial x_i - \rho r T^{-1}$ .

При описании поведения конкретных материалов могут быть использованы различные математические модели. В зависимости от условий нагружения и эксплуатации исследуемых конструкций эти модели должны учитывать эффекты вязкоупругости, пластичности и ползучести, накопления повреждений, конечности скорости распространения теплоты и др. Для получения определяющих уравнений используют три основных варианта, базирующихся на рассмотрении сред скоростного типа, сред с памятью и сред с внутренними параметрами состояния. Основными особенностями сред скоростного типа являются присутствие в качестве аргументов активных переменных скоростей изменения реактивных и невозможность использования таких моделей для описания релаксационных свойств активных переменных. Среды с памятью характеризуются тем, что связь между активными и реактивными переменными имеет вид функционалов, зависящих от истории изменения реактивных переменных. Этот подход является наиболее общим, предоставляет широкие возможности для учета разнообразных эффектов, но за математическим формализмом при этом не всегда видна физическая природа изучаемого явления.

Предполагается [47, 74], что состояние рассматриваемого деформируемого тела в окрестности любой материальной точки определяется четырьмя термодинамическими функциями - активными переменными: свободной энергией  $A = u - Th$ , энтропией  $h$ , тензором напряжений с компонентами  $\sigma_{ij}$  и вектором плотности теплового потока с компонентами  $q_i$ . Аргументами этих функций принимают следующие реактивные переменные: тензор малых деформаций с компонентами  $\epsilon_{kl}$ , температуру  $T$ , градиент температуры, компоненты которого  $\vartheta_k = \partial T / \partial x_k$ , и внутренние параметры состояния  $\chi^{(\alpha)}, \chi_k^{(\beta)}, \chi_{kl}^{(\gamma)}$  ( $\alpha = 1, \dots, \alpha_K; \beta = 1, \dots, \beta_M; \gamma = 1, \dots, \gamma_N$ ), т.е.

$$A = A(\epsilon_{kl}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi_k^{(\beta)}, \chi_{kl}^{(\gamma)});$$

$$h = h(\epsilon_{kl}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi_k^{(\beta)}, \chi_{kl}^{(\gamma)});$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon_{kl}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi_k^{(\beta)}, \chi_{kl}^{(\gamma)});$$

$$q_i = q_i(\epsilon_{kl}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi_k^{(\beta)}, \chi_{kl}^{(\gamma)}).$$

(4.2.12)

Постулируется, что скорость изменения внутренних переменных определяется только состоянием термодинамической системы [47, 74, 87]:

$$\frac{\partial \chi^{(\alpha)}}{\partial t} = \mathfrak{a}^{(\alpha)}(\epsilon_{kl}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi_k^{(\beta)}, \chi_{kl}^{(\gamma)});$$

$$\frac{\partial \chi_i^{(\beta)}}{\partial t} = \mathfrak{a}_i^{(\beta)}(\epsilon_{kl}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi_k^{(\beta)}, \chi_{kl}^{(\gamma)});$$

$$\frac{\partial \chi_{ij}^{(\gamma)}}{\partial t} = \mathfrak{a}_{ij}^{(\gamma)}(\epsilon_{kl}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi_k^{(\beta)}, \chi_{kl}^{(\gamma)}).$$

(4.2.13)

Компоненты тензора напряжений и энтропия определяются соотношениями:

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial A}{\partial \epsilon_{ij}}; \quad h = -\frac{\partial A}{\partial T}; \quad \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} = 0, \quad (4.2.14)$$

т.е. свободная энергия не зависит от градиента температуры.

Уравнения (4.2.13) не могут быть произвольными, конкретную их форму выбирают с учетом второго закона термодинамики, который может быть записан в виде

$$\rho \frac{\partial A}{\partial \chi^{(\alpha)}} \frac{\partial \chi^{(\alpha)}}{\partial t} + \rho \frac{\partial A}{\partial \chi_i^{(\beta)}} \frac{\partial \chi_i^{(\beta)}}{\partial t} + \rho \frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\gamma)}} \frac{\partial \chi_{ij}^{(\gamma)}}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} q_i \leq 0. \quad (4.2.15)$$

Закон сохранения энергии в форме уравнения теплопроводности будет

$$\rho c_\epsilon \frac{\partial T}{\partial t} = \rho T \frac{\partial^2 A}{\partial \epsilon_{ij} \partial T} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} - P^{(\alpha)} \frac{\partial \chi^{(\alpha)}}{\partial t} - Q_i^{(\beta)} \frac{\partial \chi_i^{(\beta)}}{\partial t} - R_{ij}^{(\gamma)} \frac{\partial \chi_{ij}^{(\gamma)}}{\partial t} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho r, \quad (4.2.16)$$

где  $c_\epsilon = -T \partial^2 A / \partial T^2$  - удельная теплоемкость при постоянной деформации;

$$\left. \begin{aligned} P^{(\alpha)} &= \rho (T \partial h / \partial \chi^{(\alpha)} + \partial A / \partial \chi^{(\alpha)}), \\ Q_i^{(\beta)} &= \rho (T \partial h / \partial \chi_i^{(\beta)} + \partial A / \partial \chi_i^{(\beta)}), \\ R_{ij}^{(\gamma)} &= \rho (T \partial h / \partial \chi_{ij}^{(\gamma)} + \partial A / \partial \chi_{ij}^{(\gamma)}) \end{aligned} \right\} \text{ - параметры}$$

связанности.

В уравнении теплопроводности (4.2.16) левая часть определяет связь свободной энергии с температурой. Первые четыре слагаемых в правой части этого уравнения определяют изменение свободной энергии тела, обусловленное деформациями и внутренними параметрами состояния. Их необходимо учитывать при рассмотрении связанных задач термомеханики.

**4.2.2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОСТИ, ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

Для получения линеаризованных уравнений термоупругости и термовязкоупругости полагают малыми не только полные деформации, но и температурные  $\left| \varepsilon_{ij}^{(T)} \right| \ll 1$ , а также внутренние параметры состояния  $\left| \chi^{(\alpha)} \right| \ll 1$ ,  $\left| \chi_i^{(\beta)} \right| \ll 1$ ,  $\left| \chi_{ij}^{(\gamma)} \right| \ll 1$ . В этом случае свободная энергия может быть представлена в виде

$$A(\varepsilon_{kl}, T, \chi^{(\alpha)}, \chi_k^{(\beta)}, \chi_{kl}^{(\gamma)}) = A^*(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}, \chi^{(\alpha)}, \chi_k^{(\beta)}, \chi_{kl}^{(\gamma)}) + B(T) - A^*(-\varepsilon_{kl}^{(T)}). \quad (4.2.17)$$

Для получения соотношений, описывающих термоупругую среду с конечной скоростью распространения теплоты, полагают, что первое и третье слагаемые в выражении (4.2.17) для свободной энергии могут быть заданы в виде квадратичной формы, т.е.

$$\rho A(\varepsilon_{kl}, T, \chi_k) = \frac{1}{2} C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)}) + \frac{1}{2} K_{ij} \chi_j \chi_i + \rho B(T) - \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(T)} \varepsilon_{ij}^{(T)}, \quad (4.2.18)$$

$$A(0, T_0, 0) = 0,$$

где  $T_0$  - начальная температура.

Выражение для компонентов тензора напряжений с учетом первого равенства из (4.2.14) примет вид

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}), \quad (4.2.19)$$

где  $C_{ijkl}$  - компоненты тензора модулей упругости, обладающего свойствами симметрии:  $C_{ijkl} = C_{klij}$ ,  $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ ,  $C_{ijkl} = C_{jikl}$ , а закон сохранения энергии согласно (4.2.16)

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = -C_{ijkl} T \frac{\partial \varepsilon_{kl}^{(T)}}{\partial T} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + \rho \frac{\partial A}{\partial \chi_i} \frac{\partial \chi_i}{\partial t} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho r. \quad (4.2.20)$$

Далее необходимо конкретизировать выражение для компонентов вектора плотности теплового потока и внутреннего параметра состояния, приняв их, например, в виде

$$q_i = \Phi_{ij} \chi_j; \quad \tau_T \frac{\partial \chi_j}{\partial t} = -\chi_j + \bar{\chi}_j, \quad (4.2.21)$$

где  $\tau_T, \bar{\chi}_j$  - время релаксации и установившееся значение внутреннего параметра состояния. Объединив эти соотношения, можно получить

$$\tau_T \frac{\partial q_i}{\partial t} + q_i = \Phi_{ij} \bar{\chi}_j; \quad (4.2.22)$$

$$q_i = \Phi_{ij} \left( \bar{\chi}_j - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_T}\right) \frac{\partial \bar{\chi}_j}{\partial t'} dt' \right).$$

Если задать установившееся значение внутреннего параметра состояния в виде  $\bar{\chi}_j = z_{jk} \mathfrak{S}_k$  и пренебречь слагаемым  $\rho(\partial A / \partial \chi_i) \partial \chi_i / \partial t$ , имеющим более высокий порядок малости по сравнению с остальными, то уравнение теплопроводности (4.2.20) примет вид

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = -C_{ijkl} T \frac{\partial \varepsilon_{kl}^{(T)}}{\partial T} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda_{ij}^{(T)} \times \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_T}\right) \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial T}{\partial x_j} dt' \right) + \rho r, \quad (4.2.23)$$

где  $\lambda_{ij}^{(T)} = -\Phi_{ik} z_{kj}$  - тензор теплопроводности.

Из соотношения (4.2.19) компоненты тензора деформаций выражаются через компоненты тензора напряжений

$$\varepsilon_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl} + \varepsilon_{ij}^{(T)}, \quad (4.2.24)$$

причем компоненты тензора  $A_{ijkl}$  образуют матрицу, обратную той, которую образуют компоненты тензора  $C_{ijkl}$ , и также обладают свойствами симметрии, а кроме того,

$$A_{ijkl} C_{klmn} = C_{ijkl} A_{klmn} = \Delta_{ijmn},$$

где  $\Delta_{ijmn} = (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) / 2$  - компоненты единичного тензора четвертого ранга. Объединяя (4.2.24) и (4.2.23), можно получить

$$\rho c_\sigma \frac{\partial T}{\partial t} = -\Delta_{ijkl} T \frac{\partial \varepsilon_{kl}^{(T)}}{\partial T} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda_{ij}^{(T)} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_T}\right) \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial T}{\partial x_j} dt' \right) + \rho r, \quad (4.2.25)$$

где  $c_\sigma = c_\varepsilon + T C_{ijkl} \left( \frac{\partial \varepsilon_{kl}^{(T)}}{\partial T} / \partial T \right) \left( \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} \right)$  - удельная теплоемкость при постоянном напряжении, определяемая в теплофизических экспериментах.

Если не учитывать связанность полей деформаций (или напряжений) и температуры, то процесс теплопроводности описывается уравнением

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda_{ij}^{(T)} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_T}\right) \frac{\partial}{\partial t'} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial T}{\partial x_j} dt' \right) + \rho r, \quad (4.2.26)$$

в котором  $c \approx c_\varepsilon$ .

Скорости распространения упругих возмущений определяют из равенства нулю определителя

$$\left| \rho V_\sigma^2 \delta_{ik} - C_{ijkl} n_j n_l \right| = 0, \quad (4.2.27)$$

а теплоты - из соотношения

$$V_T^2 = \lambda_{ik}^{(T)} n_k n_i / (\rho c_\varepsilon \tau_T), \quad (4.2.28)$$

где  $n_i, n_j, n_l, n_k$  - компоненты единичного вектора нормали к поверхности, разделяющей возмущенную и невозмущенную части термоупругой среды, и направленного в сторону невозмущенной части.

Для изотропного материала  $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ , где  $\lambda, \mu$  - коэффициенты Ляме, и скорости продольных и поперечных упругих волн

$$V_{\sigma 1} = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}; \quad V_{\sigma 2} = \sqrt{\mu / \rho}; \quad (4.2.29)$$

скорость распространения теплоты будет

$$V_T = \sqrt{\lambda^{(T)} / (\rho c_\varepsilon \tau_T)}. \quad (4.2.30)$$

Если  $\tau_T \rightarrow 0$ , то скорость распространения теплоты  $V_T \rightarrow \infty$  и вектор плотности теплового потока связан с градиентом температуры законом Фурье

$$q_i = -\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (4.2.31)$$

Уравнение теплопроводности в этом случае упрощается и принимает вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \rho r. \quad (4.2.32)$$

Соотношения, описывающие линейную термовязкоупругую среду в простейшей форме, можно получить, если свободную энергию задать следующим образом:

$$\rho A(\varepsilon_{kl}, T, \chi_k, \chi_{kl}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)}) + \\ + \frac{1}{2} K_{ij} \chi_j \chi_i + \frac{1}{2} H_{ijkl} \chi_{kl} \chi_{ij} - M_{ijkl} \chi_{kl} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)}) + \\ + \rho B(T) - \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(T)} \varepsilon_{ij}^{(T)}, \quad (4.2.33)$$

где  $M_{ijkl}$  - симметричный тензор, характеризующий вязкие свойства среды.

Компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) - M_{ijkl} \chi_{kl}; \quad (4.2.34)$$

закон сохранения энергии принимает форму

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = -T \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} \left( C_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} - M_{ijkl} \frac{\partial \chi_{kl}}{\partial t} \right) + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho r, \quad (4.2.35)$$

где отброшено вследствие более высокого порядка малости по сравнению с остальными слагаемое  $\rho (\partial A / \partial \chi_{ij}) \partial \chi_{ij} / \partial t$ .

Задав кинетическое уравнение для определения внутреннего параметра состояния  $\chi_{ij}$  в виде

$$\tau_\sigma \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial t} = -\chi_{ij} + \bar{\chi}_{ij}, \quad (4.2.36)$$

где  $\bar{\chi}_{ij} = X_{ijkl} \varepsilon_{kl}$  - установившееся значение параметра и  $\tau_\sigma$  - время его релаксации, можно получить

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) - \\ - R_{ijkl} \left( \varepsilon_{kl} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_\sigma}\right) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t'} dt' \right), \quad (4.2.37)$$

где  $R_{ijkl} = M_{ijmn} X_{mnkl}$ .

Соотношение (4.2.37) представляет собой интегральную форму связи напряжений с деформациями. Дифференциальная форма этой связи следует из (4.2.34) и (4.2.36):

$$\tau_\sigma \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \sigma_{ij} = \tau_\sigma C_{ijkl} \left( \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_{kl}^{(T)}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \\ + (C_{ijkl} - R_{ijkl}) \varepsilon_{kl} - C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(T)} \quad (4.2.38)$$

и описывает стандартную линейную среду с учетом температурных деформаций. Если  $C_{ijkl} = R_{ijkl}$ , то

$$\tau_\sigma \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \sigma_{ij} = \tau_\sigma C_{ijkl} \left( \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_{kl}^{(T)}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) - C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(T)} \quad (4.2.39)$$

соответствует среде Максвелла. Предположив, что в левой части (4.2.38) первое слагаемое существенно меньше второго слагаемого, т.е.  $\tau_\sigma \partial \sigma_{ij} / \partial t \ll \sigma_{ij}$ , можно получить зависимость, описывающую поведение среды Фойгта, но с дополнительным слагаемым, учитывающим вли-

яние температурных деформаций на напряжении.

Уравнение теплопроводности для линейной термовязкоупругой среды может быть получено на основе соотношений (4.2.35) и (4.2.21):

$$\rho c_{\epsilon} \frac{\partial T}{\partial t} = -C_{ijkl} T \frac{\partial \epsilon_{kl}^{(T)}}{\partial T} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} + M_{ijkl} T \frac{\partial \epsilon_{kl}^{(T)}}{\partial T} \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial t} + \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_{\sigma}}\right) \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial T}{\partial x_j} dt' \right) + pr, \quad (4.2.40)$$

Скорость изменения

$$\frac{\partial \chi_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{\tau_{\sigma}} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_{\sigma}}\right) \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial t'} dt'$$

и уравнение теплопроводности (4.2.24) можно записать в ином виде:

$$\rho c_{\epsilon} \frac{\partial T}{\partial t} = -C_{ijkl} T \frac{\partial \epsilon_{kl}^{(T)}}{\partial T} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{\sigma}} R_{ijkl} T \frac{\partial \epsilon_{kl}^{(T)}}{\partial T} \times \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_{\sigma}}\right) \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t'} dt' + \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda_{ij}^{(T)} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_T}\right) \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial T}{\partial x_j} dt' \right) + pr. \quad (4.2.41)$$

### 4.2.3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

Динамические задачи термовязкоупругости - это задачи, возникающие при математическом моделировании отклика элементов конструкций из упругих или термовязкоупругих материалов на динамические воздействия. Под динамическими воздействиями при этом подразумеваются различные виды импульсных, ударных или быстроизменяющихся температурных и механических нагрузжений. К более распространенным термовязкоупругим материалам в современном машиностроении относят полимеры, эластомеры, композиты на полимерной основе, твердые ракетные топлива, а также некоторые другие материалы. Из полимерных материалов (в том числе наполненных) и эластомеров изготавливают разного рода элементы, поглощающие энергию удара, амортизаторы, виброизолирующие и шумопоглощающие устройства и др. Из композиционных материалов (слоистых, дисперсно-волокнуто-армированных) изготавливают, в частности, различные несущие элементы конструкций автомобильной и аэрокосмической техники.

Динамическое нагружение элементов конструкций обусловлено воздействующими на них импульсными или быстроизменяющимися поверхностными и объемными силами, а также источниками тепла. При этом деформирование

материала под действием механических нагрузок сопровождается тепловыделением, обусловленным частичным рассеянием (диссипацией) механической энергии. Параметры диссипации энергии определяются микроструктурными механизмами деформирования материала, а процесс переноса рассеянного тепла - его теплофизическими свойствами. В композиционных материалах дополнительный механизм диссипации энергии деформации быть связан с тепловыделением вследствие трения при локальных относительных смещениях материалов разных фаз по поверхностям раздела, а также с прогрессирующей повреждаемостью при циклическом нагружении.

При термическом воздействии изменяются механические свойства материала и возникают температурные деформации. Таким образом, при решении динамических задач термоупругости и термовязкоупругости важное значение приобретает учет термомеханической связанности (термомеханического сопряжения), отражающей взаимное влияние механических полей (т.е. полей напряжений, перемещений и деформаций) и температурного поля. Задачи, в постановке которых учитывается взаимное влияние указанных полей, называются связанными.

Можно условно выделить два класса динамических задач термоупругости и термовязкоупругости. Первый класс - это нестационарные задачи импульсного или ударного термомеханического нагружения элементов конструкций из упругих и термовязкоупругих материалов, в которых основное внимание уделяется исследованию физико-механических явлений на фронтах волн, а также характеристик распространения волн, их асимптотического поведения и т.д. Распространение волн при этом трактуется как распространение поверхностей разрыва - ударных волн, волн ускорений, других сингулярных поверхностей. Второй класс - это задачи о вынужденных колебаниях элементов конструкций на достаточно больших интервалах времени, в которых, в основном, изучаются амплитудно-частотные характеристики колебаний, параметры диссипативного разогрева и виброползучести элементов.

Динамические задачи термовязкоупругости могут быть сформулированы на основе общих соотношений термодинамики необратимых процессов и механики сплошной среды (законов сохранения), записанных в интегральной или дифференциальной (локальной) форме. В общем виде основные соотношения, определяющие полевые величины в сплошной среде при нестационарных термомеханических процессах, приведены, например, в [110]. При решении конкретных задач динамики термоупругого или термовязкоупругого тела к этой системе основных соотношений добавляются соответствующие начальные и граничные условия.

Особенности указанной системы основных соотношений применительно к термовязкоупру-



гим материалам заключаются в принимаемых определяющих соотношениях. Изложение вопросов теории определяющих соотношений связанной термовязкоупругости имеется, например, в [47].

В математических постановках динамических задач термовязкоупругости можно выделить, как обычно, два основных источника нелинейности, один из которых определяется учетом конечности деформации среды (так называемая геометрическая нелинейность), а другой - нелинейностью определяющих соотношений (физическая нелинейность). При этом нелинейные определяющие соотношения могут быть приняты и в рамках геометрически линейной задачи. Еще один источник нелинейности может быть связан с нелинейностью граничных условий.

Таким образом, динамические задачи термовязкоупругости сводятся к решению начально-краевых задач для систем нелинейных дифференциальных, интегральных и интегродифференциальных уравнений.

Если анализ конкретной динамической задачи термовязкоупругости ограничивается рамками малых (инфинитезимальных) деформаций, принимают линейные определяющие соотношения и, кроме того, на границе рассматриваемого тела задают линейные граничные условия. то такую задачу называют линейной.

Различия линейных теорий термовязкоупругости состоят главным образом в используемых определяющих соотношениях. Определяющие соотношения получают обычно постулированием выражения для функционала свободной энергии, который каждой истории изменения полей перемещений и температур на промежутке времени  $[0, t]$  ставит в соответствие значение свободной энергии.

Приводимые ниже линейные определяющие соотношения связанной термовязкоупругости заимствованы в качестве одного из возможных вариантов из работы [114]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) = & C_{ijkl}(0)\varepsilon_{kl}(t) - L_{ij}(0)\theta(t) + \\ & + \int_0^t \frac{\partial C_{ijkl}(t-\tau)}{\partial t} \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau - \int_0^t \frac{\partial L_{ij}(t-\tau)}{\partial t} \theta(\tau) d\tau; \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

$$\begin{aligned} \rho h(t) = & L_{ij}(0)\varepsilon_{ij}(t) + \frac{\rho c(0)}{\theta_0} \theta(t) + \\ & + \int_0^t \frac{\partial L_{ij}(t-\tau)}{\partial t} \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau + \frac{\rho}{\theta_0} \int_0^t \frac{\partial c(t-\tau)}{\partial t} \theta(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

Здесь  $C_{ijkl}$ ,  $L_{ij}$  и  $c$  - функции наследственности (тензоры соответственно четвертого, второго и нулевого рангов), являющиеся характеристиками

материала, на которые накладываются некоторые ограничения. В соотношениях (4.2.42), (4.2.43) все величины, определяющие свойства материала и отклик тела, зависят от координат  $x_k$ .

При формулировке конкретных динамических задач термовязкоупругости необходимо задать соответствующие начальные и граничные условия, которые в совокупности с уравнениями законов сохранения движения и энергии, а также с (4.2.42) и (4.2.43) образуют полную систему соотношений рассматриваемой линейной начально-краевой задачи.

Решение связанных динамических задач термовязкоупругости даже в наиболее простых случаях представляет значительные трудности и может быть осуществлено только на основе применения приближенных и численных методов.

Наиболее часто употребляемый прием, позволяющий получить приближенное решение, состоит в "развязывании" задачи, когда взаимное влияние температурного и механических полей учитывают только частично или влияние, в рамках некоторых дополнительных предположений о характере термомеханического поведения, вообще не учитывают. Если, например, учитывают влияние температурного поля на напряженно-деформированное состояние тела, но не учитывают обратное влияние, т.е. пренебрегают тепловыделением при механическом нагружении, то такие задачи называют полусвязанными. Для динамических задач термовязкоупругости требуется тщательное обоснование такого допущения.

Некоторые методы решения задач термовязкоупругости рассматривались в [39, 49, 11, 99], где можно найти и дополнительную библиографию. Наиболее при решении связанных динамических задач термовязкоупругости представляется применение численных методов, основанных на конечно-разностной и конечно-элементной аппроксимации системы основных соотношений.

На начальном этапе исследования поведения элементов конструкций в условиях действия высокоинтенсивных термомеханических нагрузок целесообразно проанализировать влияние основных параметров нагружения и свойств материала конструкции на распределение температуры и напряжений. При этом возможно использование простейшей расчетной схемы - упругого изотропического и однородного полупространства с заданными внешними нагрузками. Наибольшие градиенты температуры и напряжения возникают в поверхностном слое конструкции в первые моменты времени после нагружения, тогда же наиболее сильно проявляется влияние инерционных членов уравнения движения и конечности скорости распространения теплоты на температурные поля и напряжения.

Анализ влияния конечной скорости распространения теплоты на температурные поля и напряжения при поверхностном нагреве может

быть проведен на основе решения следующей краевой задачи:

$$D^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}; \quad (4.2.44)$$

$$R^2 \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{t}^2} \right) = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}; \quad (4.2.45)$$

$$\bar{t} = 0, \theta(z, 0) = 0, \frac{\partial \theta(z, 0)}{\partial \bar{t}} = 0, \sigma(z, 0) = 0, \frac{\partial \sigma(z, 0)}{\partial \bar{t}} = 0;$$

$$z = 0 - \frac{\partial \theta(0, \bar{t})}{\partial z} = q_0(\bar{t}) + D^2 \frac{\partial q_0(\bar{t})}{\partial \bar{t}};$$

$$q_0(\bar{t}) = m^m \bar{t}^m \exp(-m\bar{t}) / (m-1)!, m \geq 1;$$

$$\sigma(0, \bar{t}) = 0;$$

$$z \rightarrow \infty \theta(z, \bar{t}) \rightarrow 0, \sigma(z, \bar{t}) \rightarrow 0, \quad (4.2.46)$$

где  $\bar{t} = t / t_0$ ;  $D^2 = \tau_T / t_0$ ;  $t_0 > 0$  - координата максимума подводимого теплового потока;  $z = x_1 / \sqrt{at_0}$ ;  $x_1$  - нормальная координата;  $a = \lambda^{(T)} / (\rho c)$  - температуропроводность материала;  $\theta = (T - T_0) / T^*$ ;  $T^*$  - характерная температура;  $\sigma = \sigma_{11} [(3\lambda + 2\mu)\alpha T^*]^{-1}$ ;  $\sigma_{11}$  - нормальное напряжение;  $R^2 = a / (t_0 V_{\sigma 1}^2)$ ;  $R^2 / D^2 = V_T^2 / V_{\sigma 1}^2$ .

Решение краевой задачи (4.2.44)-(4.2.46) имеет вид [30, 52]:

$$\theta(z, \bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} \left[ D \frac{\partial q_0(\bar{t} - u)}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{D} q_0(\bar{t} - u) \right] F_1(z, u) du; \quad (4.2.47)$$

$$\begin{aligned} \sigma(z, \bar{t}) = & \frac{R^2}{D^2 - R^2} \int_0^{\bar{t}} D \frac{\partial q_0(\bar{t} - u)}{\partial \bar{t}} \frac{R^2}{D(D^2 - R^2)} q_0(\bar{t} - u) + \\ & + \frac{R^2}{D(D^2 - R^2)^2} \exp\left(-\frac{\bar{t} - u}{D^2 - R^2}\right) \int_0^{\bar{t} - u} q_0(v) \exp\left(\frac{v}{D^2 - R^2}\right) dv \times \\ & \times [F_1(z, u) - F_2(z, u)] du; \quad (4.2.48) \end{aligned}$$

$$F_1(z, u) = \exp\left(-\frac{u}{2D^2}\right) I_0\left(\frac{\sqrt{u^2 z^2 D^2}}{2D^2}\right);$$

$$F_2(z, u) = \exp\left(-\frac{u - zR}{2D^2}\right) I_0\left(\frac{u - zR}{2D^2}\right);$$

$$F_1(z, u) = 0, \quad u \leq zD;$$

$$F_2(z, u) = 0, \quad u \leq zD,$$

$I_0$  - модифицированная функция Бесселя.

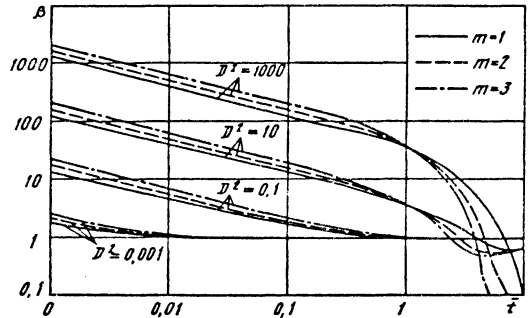


Рис. 4.2.1. Зависимость относительной температуры поверхности полуграниченного тела от времени для ряда значений параметров  $m$  и  $D^2$

Зависимость  $\beta$  (отношение температуры поверхности, определенной по (4.2.47), к температуре, вычисленной при  $D^2=0$ ) от времени  $\bar{t}$  для ряда значений  $m$  и  $D^2$  показана на рис. 4.2.1. Из анализа приведенных кривых следует, что учитывать скорость распространения теплоты целесообразно при  $D^2 \geq 0,001$ .

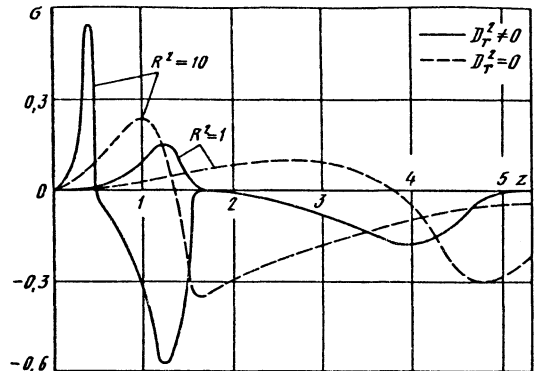


Рис. 4.2.2. Зависимость напряжений в полуграниченном упругом теле от координаты  $z$  при  $R^2/D^2=0,1$

Распределения напряжений в полупространстве в момент времени  $\bar{t} = 5$ , когда практически вся энергия поглощена телом, представлены для  $m=2$  на рис. 4.2.2. Так как  $V_{\sigma 1} > V_T$ , то полагали  $R^2 / D^2 = 0,1$ . В этом случае экстремумы при гиперболическом и параболическом

процессах теплопроводности для одинаковых значений  $R^2$  далеки друг от друга по координате  $z$ ; по абсолютной величине их различие уменьшается с уменьшением  $R^2$ .

Распределение напряжений в поглощающем излучение упругом теле при импульсном нагреве существенным образом зависит как от  $D^2$  и отношения  $R^2 / D^2$ , так и от значения коэффициента поглощения излучения  $\nu$  [31]. Если пренебречь процессом теплопроводности при определении температуры в поглощающем излучение теле, то

$$\theta(z, \bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} w(z, u) du, \quad (4.2.49)$$

где  $w(z, u) = q_0(u) \exp(-nz)$  - тепловыделение, обусловленное поглощением монохроматического излучения;  $n = \nu \sqrt{at_0}$  - безразмерный коэффициент поглощения монохроматического излучения. Нормальное напряжение в этом случае при однородных крайних условиях задается соотношением

$$\sigma(z, \bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} q_0(\bar{t} - u) \operatorname{ch}[n(u - zR)] du - \int_0^{\bar{t}} w(z, \bar{t} - u) \operatorname{ch}(nu / R) du. \quad (4.2.50)$$

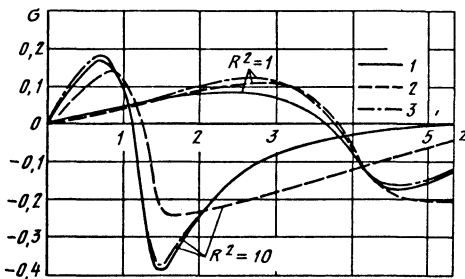


Рис. 4.2.3. Распределение напряжений в поглощающем излучение полуограниченном упругом теле

Результаты расчетов напряжений в поглощающем излучение упругом теле для  $R^2 / D^2 = 0,1$ ;  $\bar{t} = 5$ ;  $m=2$  и  $n=1$  показаны на рис. 4.2.3. Сплошные кривые соответствуют случаю, когда скорость распространения теплоты конечна, штриховые - параболическому распределению температуры и штрихпунктирные - соотношению (4.2.50). Различия в положениях и величине экстремумов приведенных кривых существенно зависят от параметра  $R^2$ ; с умень-

шением  $R^2$  при фиксированном значении  $n$  эти кривые сближаются. То же самое происходит и при уменьшении  $n$  для фиксированных значений  $R^2$ . При  $n < 1$  распределение напряжений в упругом теле можно приблизительно определять по соотношению (4.2.50).

#### 4.2.4. ЗАДАЧИ ТЕРМОМЕХАНИКИ ТЕЛ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

Во многих технологических процессах современного машиностроения встречаются твердые деформируемые тела, масса и конфигурация которых изменяются вследствие непрерывного или дискретного присоединения или удаления частиц материала. При этом рассматриваемое тело находится, как правило, под действием определенных объемных и поверхностных термомеханических нагрузок. В качестве наиболее распространенных процессов, в которых приходится иметь дело с телами, подвергающимися термомеханическому нагружению одновременно с присоединением материала извне, можно указать, например, намотку изделий из полимерных и композиционных материалов, напыление разного рода деталей и покрытий из керамических и других тугоплавких материалов, кристаллизацию слитков в технологических линиях непрерывной разливки, выращивание кристаллов, различные варианты технологий изготовления сплавов способом быстрого отверждения и др. Имеется также широкий круг процессов, в которых деформируемое тело, подвергающееся термомеханическому нагружению, теряет свои материальные частицы вследствие плавления, испарения, изнашивания, распада и т.д. В качестве примеров таких процессов можно упомянуть выгорание твердых топлив, абляцию при обдуве, коррозионные повреждения и др.

Тела, испытывающие присоединение или удаление частиц, называют телами переменного состава. Этот термин следует считать заимствованным из классической механики тел переменной массы, где он имеет более узкое содержание, поскольку деформируемость тел там не рассматривается. Задачи, возникающие при математическом моделировании термонапряженного состояния таких деталей и элементов конструкций, относят к задачам термомеханики тел переменного состава.

Если тело изменяет массу и конфигурацию только вследствие присоединения частиц материала извне, то его называют наращиваемым (или растущим) телом. Процесс наращивания, осуществляется посредством присоединения конечных объемов дополнительного материала в отдельные моменты времени, называют дискретным наращиванием. Если к растущему телу в каждый бесконечно малый промежуток времени (на рассматриваемом интервале) присоединяется элемент материала, имеющий инфинитезималь-

ные размеры, то имеет место непрерывное наращивание.

С точки зрения построения математической модели процессов термомеханического нагружения растущих тел основной интерес представляет случай непрерывного наращивания. Это связано с тем, что такие процессы, как, например, температурное напыление керамики или намотка тонких слоев и нитей на оправку, осуществляются путем присоединения бесконечно малых масс материала за каждый бесконечно малый промежуток времени. Кроме того, некоторые процессы дискретного наращивания, например послойное намоноличивание гидротехнических сооружений с помощью технологии укатанного бетона, допускают аппроксимацию соответствующим непрерывным процессом. Актуальность исследования процессов непрерывного наращивания определяется также тем обстоятельством, что при математическом моделировании таких процессов возникают постановки задач, принципиально отличающиеся от задач механики тел постоянного состава. Теоретический анализ указанного круга задач составляет предмет механики растущих тел, основные представления которой изложены в монографии [1] (там же приведены постановки и решения некоторых модельных задач, а также дополнительная библиография).

В технологических процессах наращивания предусматривается специальная подготовка материала, предназначенного для нанесения на субстрат, а непосредственно процесс нанесения часто осуществляют путем интенсивного температурного воздействия на наносимый материал. Например, в процессах плазменного напыления мелкодисперсные частицы материала расплавляются в струе высокотемпературной плазмы. Технологические операции намотки осуществляют, как правило, с применением пластифицированного связующего, при отверждении которого протекают различные физико-химические процессы, связанные с теплообменом. Аналогичным образом, процесс твердения бетона при намоноличивании массивных конструкций сопровождается выделением значительного количества тепла, обусловленного реакциями гидратации цемента. Это означает, что при построении теоретических моделей процессов наращивания указанного типа необходимо учитывать теплообмен между приращиваемыми элементами и наращиваемым телом, а также тепловыделение, протекающее в теле при изменениях структурного состояния материала.

Принципиальная особенность наращиваемых тел заключается в том, что каждый приращиваемый элемент начинает деформироваться в составе тела только с определенного момента времени, называемого моментом присоединения данного элемента. До этого момента элемент может быть приведен в произвольное термонапряженное состояние, не согласованное с состоя-

нием поверхности тела в том месте, где он приращивается.

Формоизменение наращиваемого тела (т.е. изменение его геометрической формы) имеет два существенно различных аспекта. С одной стороны, это деформация, вызванная действием приложенных к телу поверхностных и объемных термосиловых нагрузок, с другой стороны, это изменение формы вследствие неравномерного притока материала к разным участкам внешней поверхности тела. Термин "деформация" применительно к растущему телу имеет обычное для механики сплошной среды содержание, но отражает только первый из указанных аспектов. Второй аспект, в принципе никак не связанный с первым, служит характерным признаком наращиваемого тела. Вводимое при формулировке геометрически линейных задач механики растущих тел предположение о малости деформаций не накладывает никаких ограничений на формирование рассматриваемого тела вследствие наращивания.

С точки зрения кинематики конечных деформаций отличие наращивания тела от тел постоянного состава состоит в том, что для него невозможно зафиксировать какую-либо единую отсчетную конфигурацию частиц, по отношению к которой имело бы смысл говорить об изменении полевых величин (перемещений, деформаций и др.), определяющих состояние наращиваемого тела. Действительно, поскольку тело в процессе наращивания непрерывно пополняется новыми элементами, то произвольно выбранный элемент его не имеет прообраза ни в одной из конфигураций тела в моменты времени, предшествующие моменту присоединения рассматриваемого элемента. Кроме того, так как различные частицы могут присоединяться к телу в одной и той же точке пространства (имеется в виду случай конечных деформаций), для наращиваемого тела невозможно ввести корректное определение вектора перемещения.

Поскольку приращиваемый элемент вовлекается в деформирование в составе растущего тела с момента его присоединения, то лишь с этого момента можно говорить о его совместном деформировании с окружающими элементами. В рамках бесконечно малых деформаций непрерывно наращиваемого тела условия совместности полных деформаций среды не выполняются. Совместными оказываются лишь скорости деформаций, что является следствием инкрементального характера присоединения и загрузки элементов тела [1].

То обстоятельство, что применительно к растущему телу условия совместности выполняются для скоростей деформаций, приводит к необходимости задания специфических начальных условий для всех компонентов тензора деформаций, которые фактически определяют начальные деформации каждого элемента растущего тела в момент присоединения. Поскольку в

момент присоединения элемент находится на движущейся вследствие наращивания части внешней поверхности тела, называемой поверхностью наращивания, а деформации однозначно связаны с напряжениями вследствие принятых определяющих соотношений, то упомянутые условия тождественны граничным условиям, задаваемым на поверхности наращивания. Согласно этим условиям на поверхности наращивания задается полный тензор напряжений (в отличие от вектора напряжений, задаваемого на стационарных участках внешней поверхности).

При построении математической модели наращиваемого тела важно использовать определяющие соотношения (уравнения состояния), учитывающие характерные особенности процесса наращивания - скорость и последовательность присоединения частиц. Указанные параметры определяют специфическую возрастную неоднородность наращиваемого тела, обусловленную неодновременностью зарождения и приращивания частиц. При моделировании ряда реальных технологических процессов учет возрастания неоднородности весьма существен, поскольку физико-механические свойства частиц в момент присоединения могут значительно отличаться от свойств этих же частиц спустя некоторое время, определяемое темпом старения и условиями возможных структурных трансформаций материала. В монографии [2] изложены определяющие соотношения неоднородно стареющих вязкоупругих тел, которые отвечают упомянутым требованиям.

Таким образом, основные отличия математической формулировки начально-краевой задачи для наращиваемого тела от классических постановок задач в механике деформируемого твердого тела состоят, во-первых, в отказе от условий совместности полных деформаций, во-вторых, в особых граничных условиях на поверхности наращивания и, в-третьих, в определяющих соотношениях, которые должны учитывать возрастную неоднородность наращивания тела (это последнее обстоятельство не имеет решающего значения, поскольку общая модель растущего тела не накладывает принципиальных ограничений на вид используемых определяющих соотношений).

В задачах термомеханики растущих тел закон движения поверхности наращивания в общем случае определяется из системы соотношений, описывающих теплообмен тела с окружающей средой. Это особенно актуально по отношению к тем случаям, когда наращивание осуществляется за счет фронтального фазового перехода типа "жидкость - твердое тело". В задачах, включающих, помимо анализа напряженно-деформированного состояния растущего тела, определение кинетики фронта фазового превращения, первостепенное значение приобретает учет термомеханической связанности, т.е.

взаимного влияния температурного поля и напряженно-деформированного состояния.

#### 4.2.5. ВАРИАЦИОННЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ ЗАДАЧ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

Вариационные принципы, эквивалентные постановкам задачи в дифференциальной форме, удобно использовать для получения решений краевых задач методами Ритца, конечных элементов, другими численными методами [21]. Поскольку в функционалах содержатся производные более низкого порядка, чем в соответствующих дифференциальных уравнениях, это допускает использование для нахождения решения менее гладких функций.

Для квазистатической теории линейной вязкоупругости сформулируем вариационный принцип, являющийся обобщением принципа, предложенного Гертингом [51, 111].

Определяющие соотношения квазистатической краевой задачи вязкоупругости перепишем в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (4.2.51)$$

$$\sigma_{ij} = (C_{ijkl} - R_{ijkl})\varepsilon_{kl} - C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(T)} + R_{ijkl} \exp\left(-\frac{t}{\tau_\sigma}\right) * d\varepsilon_{kl}; \quad (4.2.52)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0; \quad (4.2.53)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma_i^{(n)} \text{ на } S_\sigma; \quad (4.2.54)$$

$$u_i = \Delta_i \text{ на } S_u,$$

где  $\sigma_i^{(n)}$  и  $\Delta_i$  - заданные напряжения и перемещения на соответствующих частях поверхности тела.

Свертка двух функций  $\varphi(x, t)$  и  $d\psi(x, t)$  определяется соотношением

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) * d\psi(x, t) &= \int_0^t \varphi(x, t - \tau) d\psi(x, \tau) = \\ &= \int_0^t \varphi(x, t - \tau) \frac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \end{aligned} \quad (4.2.55)$$

и, как показано в [111], обладает свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности:

$$\varphi * d\psi = \psi * d\varphi;$$

$$\varphi * (d\psi * d\omega) = (\varphi * d\psi) * d\omega = \varphi * d\psi * d\omega;$$

$$\varphi * d(\psi + \omega) = \varphi * d\psi + \varphi * d\omega.$$

Функционал  $F$  определяется зависимостью

$$F(x, t) = \int_V \left[ \frac{1}{2} (C_{ijkl} - R_{ijkl}) \varepsilon_{ij} * d\varepsilon_{kl} - C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^{(T)} * d\varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} R_{ijkl} \exp\left(-\frac{t}{\tau_\sigma}\right) * d\varepsilon_{ij} * d\varepsilon_{kl} - \sigma_{ij} * d\varepsilon_{ij} - \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i\right) * du_i \right] dV + \int_{S_u} (\sigma_i * d\Delta_i) dS + \int_{S_\sigma} [(\sigma_i - \sigma_i^{(n)}) * du_i] dS. \quad (4.2.56)$$

Вариационный принцип, соответствующий теореме Ху-Вашицу в теории термоупругости, формулируется следующим образом. Первая вариация  $\delta F$  функционала  $F$ , определяемого зависимостью (4.2.56), обращается в нуль тогда и только тогда, когда удовлетворяются все уравнения поля (4.2.51)-(4.2.53) и граничные условия (4.2.54).

Приведем доказательство этой теоремы. Пусть изменение состояния

$$u_i(x_k, t); \varepsilon_{ij}(x_k, t); \sigma_{ij}(x_k, t)$$

$$\text{имеет вид } \begin{aligned} u_i(x_k, t) + \alpha \delta u_i(x_k, t); \\ \varepsilon_{ij}(x_k, t) + \alpha \delta \varepsilon_{ij}(x_k, t); \\ \sigma_{ij}(x_k, t) + \alpha \delta \sigma_{ij}(x_k, t), \end{aligned}$$

где  $\alpha$  - действительное число,  $\delta u_i$ ,  $\delta \varepsilon_{ij}$ ,  $\delta \sigma_{ij}$  - произвольные, но достаточно гладкие изменения переменных.

Тогда первая вариация функционала, определенная соотношением

$$\delta F = \frac{d}{d\alpha} F(u_i + \alpha \delta u_i, \varepsilon_{ij} + \alpha \delta \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij} + \alpha \delta \sigma_{ij}) \Big|_{\alpha=0},$$

принимает вид

$$\delta F = \int_V \left[ (C_{ijkl} - R_{ijkl}) \varepsilon_{kl} * d\delta \varepsilon_{ij} - C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(T)} * d\delta \varepsilon_{ij} + R_{ijkl} \exp\left(-\frac{t}{\tau_\sigma}\right) * d\varepsilon_{kl} * d\delta \varepsilon_{ij} - \sigma_{ij} * d\delta \varepsilon_{ij} - \delta \sigma_{ij} * d\varepsilon_{ij} - \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i\right) * d\delta u_i - \frac{\partial \delta \sigma_{ij}}{\partial x_j} * du_i \right] dV + \int_{S_u} (\delta \sigma_i * d\Delta_i) dS + \int_{S_\sigma} (\sigma_i - \sigma_i^{(n)}) * d\delta u_i + \delta \sigma_i * du_i dS, \quad (4.2.57)$$

причем для получения первого и третьего слагаемых использовались свойства коммутативности свертки и соотношения симметрии для  $C_{ijkl}$  и  $R_{ijkl}$ .

Применяя теорему Гаусса-Остроградского для слагаемого

$$(\delta \delta \sigma_{ij} / \partial x_j) * du_i = d(\delta \delta \sigma_{ij} / \partial x_j) * u_i,$$

запишем (4.2.57) в форме

$$\delta F = \int_V \left\{ (C_{ijkl} - R_{ijkl}) \varepsilon_{kl} - C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(T)} + R_{ijkl} \exp\left(-\frac{t}{\tau_\sigma}\right) * d\varepsilon_{kl} - \sigma_{ij} * d\delta \varepsilon_{ij} - \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i\right) * d\delta u_i - \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) * d\delta \sigma_{ij} \right\} dV + \int_{S_\sigma} [(\sigma_i - \sigma_i^{(n)}) * d\delta u_i] dS + \int_{S_u} [(\Delta_i - u_i) * d\delta \sigma_i] dS. \quad (4.2.58)$$

Если уравнение поля и граничные условия (4.2.51)-(4.2.54) выполняются, то  $\delta F=0$ . С другой стороны, если  $\delta F=0$ , то для произвольно заданных  $\delta u_i$ ,  $\delta \varepsilon_{ij}$  и  $\delta \sigma_{ij}$ , как следует из (4.2.58), необходимо обращение в нуль выражений, стоящих при соответствующих вариациях, т.е. в качестве уравнений Эйлера следуют уравнения поля, а в качестве естественных граничных условий - соотношения (4.2.54).

Для краевой задачи связанной теории термоупругости в [115] предложены вариационные формулировки, соответствующие принципам минимума потенциальной энергии системы. Кастильяно, Хеллингера-Рейсснера и Ху-Вашицу, причем в функционалы с помощью свертки явно включены начальные условия. Наиболее удобно для решения краевых задач использовать принцип минимума потенциальной энергии системы или принцип Лагранжа для полей перемещений и температуры, который состоит в следующем [21].

Пусть векторное поле перемещения  $\mathbf{u}(x, t)$  и скалярное поле температуры  $T(x, t)$  представляют собой кинематически и термически допустимые поля, т.е. поля, удовлетворяющие граничным условиям для перемещения  $u_i = \Delta_i$  на  $S_u$  и температуры  $T = \tilde{T}$  на  $S_T$  и имеющие соответствующие свойства гладкости. Тогда среди всех таких полей истинными (удовлетворяющими решению смешанной задачи связанной термоупругости) являются те, которые сообщают стационарные значения функционалу

$$\begin{aligned}
\Phi\{u, T\} = & \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} g^* \frac{\partial u_l}{\partial x_j} * \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dV + \\
& + \frac{1}{2} \int_V \rho u_i * u_i dV - \int_V \beta_{ij} g^* \frac{\partial u_i}{\partial x_j} * T dV - \\
& - \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{T_0} \rho c_\epsilon g^* T * T dV - \frac{1}{2} \int_V \frac{\lambda_{ij}^{(T)}}{T_0} g^* \dot{g}^* \frac{\partial T}{\partial x_i} * \frac{\partial T}{\partial x_j} dV - \\
& - \int_V f_i * u_i dV + \int_V \frac{1}{T_0} g^* \omega * T dV - \int_{S_\sigma} g^* \sigma_i^{(n)} * u_i dS - \\
& - \int_{S_g} \frac{1}{T_0} g^* \dot{g}^* \tilde{g}^* T dS + \int_{S_h} \frac{h}{T_0} g^* \dot{g}^* \left( \frac{1}{2} T - T_c \right) * T dS,
\end{aligned} \tag{4.2.59}$$

где  $g(t) = t$  и  $\dot{g}(t) = \frac{dg}{dt} = 1$  - функция времени;

$$f_i(x_k, t) = g^* b_i + \rho(t v_i + d_i);$$

$$\omega(x_k, t) = \dot{g}^* \rho r + \rho c_\epsilon T_0 + T_0 \beta_{ij} \frac{\partial d_i}{\partial x_j},$$

а свертка двух функций определяется выражением

$$\varphi(x, t) * \psi(x, t) = \int_0^t \varphi(x, t - \tau) \psi(x, \tau) d\tau.$$

Как показано в [21, 115], в качестве уравнений Эйлера из условия стационарности функционала следуют уравнение движения в перемещениях и уравнение теплопроводности:

$$g^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \beta_{ij} T \right) + f_i - \rho \ddot{u}_i = 0;$$

$$g^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \omega = \rho c_\epsilon \dot{T} + T_0 \beta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

а в качестве естественных граничных условий - соотношения

$$\left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \beta_{ij} T \right) n_j = \sigma_i^{(n)} \text{ на } S_\sigma;$$

$$-\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_i = \tilde{q} \text{ на } S_q;$$

$$-\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_i = h(T_c - T) \text{ на } S_h.$$

Автоматически выполняются также начальные условия

$$u_i(x_k, 0) = d_i(x_k);$$

$$\frac{\partial u_i(x_k, 0)}{\partial t} = v_i(x_k);$$

$$T(x_k, 0) = T_0(x_k),$$

где  $d_i(x_k)$ ,  $v_i(x_k)$ ,  $T_0(x_k)$  - начальные распределения соответственно компонентов вектора перемещения, скоростей их изменения и температуры.

Как частные случаи из этой формулировки следуют вариационные принципы для задачи динамической термоупругости и нестационарной теплопроводности.

#### 4.2.6. ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ НЕОБРАТИМЫХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

Применительно к процессам деформирования твердых тел под *диссипацией* энергии понимают переход части энергии деформации под действием внешних термомеханических нагрузок в тепловую энергию. Вообще, для механических систем (дискретных или непрерывных) переход их механической энергии в другие формы (в конечном счете, после ряда возможных превращений, в тепловую) обусловлен протеканием различных диссипативных процессов. К диссипативным процессам относят, в частности, трение, диффузию, процессы неупругого (вязкого, пластического и т.д.) деформирования, необратимые фазовые и структурные превращения, химические реакции.

В качестве количественной характеристики диссипации энергии в процессе деформирования твердого тела используют скорость диссипации энергии, которая определяется скоростью внутреннего производства энтропии, т.е. приращением энтропии вследствие протекания внутренних необратимых процессов. Внутренняя диссипация энергии (без учета процесса теплопроводности), как следует из (4.2.15),

$$\begin{aligned}
\rho T \frac{dh}{dt} = & -\rho \frac{\partial A}{\partial \chi^{(\alpha)}} \frac{\partial \chi^{(\alpha)}}{\partial t} - \rho \frac{\partial A}{\partial \chi_i^{(\beta)}} \frac{\partial \chi_i^{(\beta)}}{\partial t} - \\
& - \rho \frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\gamma)}} \frac{\partial \chi_{ij}^{(\gamma)}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{4.2.60}$$

Если свободная энергия термодинамической системы может быть представлена в виде соотношения (4.2.17) и соответствующей квадратичной формы, то без учета процесса теплопроводности

$$\begin{aligned}
\rho T \frac{dh}{dt} = & \left( C_{ijkl} \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial t} - G_{ij}^{(\alpha)} \frac{\partial \chi^{(\alpha)}}{\partial t} - N_{ijk}^{(\beta)} \frac{\partial \chi_k^{(\beta)}}{\partial t} - \right. \\
& \left. - M_{ijkl}^{(\gamma)} \frac{\partial \chi_{kl}^{(\gamma)}}{\partial t} \right) T \frac{\partial \epsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} - \rho c_\epsilon \frac{\partial T}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{4.2.61}$$

В соотношении (4.2.61) удержаны слагаемые одного порядка малости и принято, что  $\varepsilon_{ij}^{(T)}$  линейно зависит от температуры.

Приближенно оценить изменение температуры вследствие изменений деформаций и внутренних параметров состояния можно по формуле

$$\rho c_\varepsilon \ln \frac{T}{T_0} \approx C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - G_{ij}^{(\alpha)} \chi^{(\alpha)} - N_{ijk}^{(\beta)} \chi_k^{(\beta)} - M_{ijkl}^{(\gamma)} \chi_{kl}^{(\gamma)}. \quad (4.2.62)$$

Изменение энтропии внутри термодинамической системы вследствие процесса теплопроводности можно рассматривать как произведение

“обобщенной силы”  $-T^{-1} \partial T / \partial x_i$  на соответствующий поток  $q_i / T$ . Обычно предполагают (см., например [47, 72, 87]), что и для других типов необратимых процессов скорость внутреннего производства энтропии определяется выражением

$$\rho \frac{\partial h^{(i)}}{\partial t} \equiv \sigma = J_k X_k, \quad (k=1, \dots, m, l=1, \dots, m) \quad (4.2.63)$$

где  $J_k$  - обобщенные потоки;  $X_k$  - соответствующие обобщенные термодинамические силы;  $m$  - конечное натуральное число. В приведенной записи (4.2.63) скалярные величины  $J_k$  и  $X_k$  следует рассматривать как компоненты нескольких векторов обобщенных потоков и соответствующих им векторов обобщенных термодинамических сил. Функцию  $\sigma$  в (4.2.63) называют диссипативной.

Один из возможных путей дальнейшего анализа необратимых термодинамических процессов предполагает наличие линейных феноменологических соотношений между обобщенными потоками и обобщенными термодинамическими силами:

$$J_k = L_{kl} X_l \quad (k, l = 1, \dots, m). \quad (4.2.64)$$

Примером феноменологического соотношения такого рода является закон теплопроводности Фурье, устанавливающий линейную связь между вектором плотности теплового потока и градиентом температуры.

Подстановка (4.2.64) в (4.2.63) дает положительно определенную квадратичную форму

$$\sigma = L_{kl} X_l X_k > 0. \quad (4.2.65)$$

В термодинамике показано, что матрица коэффициентов  $L_{kl}$  в (4.2.65) является симметричной, т.е.  $L_{kl} = L_{lk}$  ( $k, l = 1, \dots, m$ ). Утверждение о симметричности матрицы  $L_{kl}$  составляет содержание принципа Онзагера.

При моделировании процессов неупругого деформирования твердых тел часто используют представление диссипативной функции вида (4.2.63), в котором в качестве обобщенных термодинамических сил используют компоненты тензора напряжения, а в качестве обобщенных

потоков - компоненты скорости неупругой деформации. При этом наличие других диссипативных процессов иногда не учитывают, поскольку производство энтропии вследствие неупругого деформирования может играть существенно большую роль, нежели вследствие диффузионных процессов.

При количественном анализе диссипации энергии в общем случае необратимых процессов требуется совместное решение уравнений термомеханики сплошной среды при заданных начальных и граничных условиях. Такая система уравнений обсуждается, например, в [72, 87]. Получение замкнутых решений связанных задач термомеханики даже в наиболее простых случаях (например, для одномерных процессов) связано со значительными трудностями. Численный анализ термомеханических процессов осуществляют обычно на основе пространственно-временной дискретизации основных уравнений. При этом дискретизацию по пространственным координатам проводят с помощью конечных элементов, а по времени - с помощью конечных разностей. Основы конечно-элементного подхода к расчету термомеханического поведения твердых деформируемых тел изложены, например, в [72]. Подробный анализ диссипативных процессов применительно к пластическому деформированию твердых тел дан в [87, т. II].

### Глава 4.3

## МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ

Для большинства конструкционных и теплозащитных материалов затраты энергии на деформирование тела, вызванное изменением его температуры, малы по сравнению с затратами на изменение внутренней энергии (см. п. 4.2.2). В этих случаях температурное состояние тела можно рассчитывать независимо от его напряженно-деформированного состояния и определять на одном из начальных этапов анализа термостойкости конструкции.

### 4.3.1. ТИПОВЫЕ РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ И ПОСТАНОВКА ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Распространение теплоты в элементах конструкции как в твердых телах обычно происходит посредством теплопроводности (если только конструкционные или теплозащитные материалы не являются полупрозрачными для теплового излучения или пористыми с сообщающимися между собой порами, по которым может двигаться жидкость или газ). Поэтому расчет температурного состояния конструкции связан с решением задач теплопроводности в твердом теле соответствующей конфигурации с заданными на его поверхности условиями теплообмена с окружающей средой или теплоносителями, определяемого в общем случае двумя другими способами передачи теплоты - конвекцией и излучением.



Вследствие высоких эксплуатационных параметров современных теплонапряженных конструкций необходимо рассматривать нелинейные задачи теплопроводности, так как теплофизические характеристики материала зависят от температуры конструкции, а условия теплообмена - от температуры ее поверхности.

Информация о процессе передачи теплоты в твердом теле и условиях теплообмена на его поверхности составляет существо постановки задач теплопроводности. Эта информация входит в формализованном виде в уравнения и дополнительные соотношения, которые связывают между собой заданные параметры с определяемыми величинами. Совокупность таких уравнений и соотношений называют математической формулировкой данной задачи теплопроводности или математической моделью рассматриваемого процесса теплопроводности.

Одну и ту же задачу теплопроводности можно сформулировать несколькими математически эквивалентными способами, что расширяет возможность ее решения, так как каждая из математических моделей позволяет применить для получения искомого температурного состояния конструкции различные методы. Применительно к новым, малоисследованным задачам, не поддающимся точному решению, полезно воспользоваться для сравнения двумя или более методами, что в итоге повышает достоверность искомого результата.

Температурное состояние конструкции описывается при помощи *температурного поля*, которое является *совокупностью значений температуры* во всех точках твердого тела соответствующей конфигурации в рассматриваемый момент времени.

*Нестационарное* поле изменяется во времени, *стационарное* - остается неизменным.

Температурное поле может быть одномерным, двумерным или трехмерным, если распределение температуры в теле зависит, соответственно, от одной, двух или трех пространственных координат. В частном случае однородного по объему тела распределения температуры тепловое состояние всех точек тела в фиксированный момент времени характеризуется одним значением температуры (нуль-мерное температурное поле). В этом случае передача тепла теплопроводностью внутри твердого тела не происходит.

При математическом описании процесса теплопроводности материал тела представляют как сплошную среду, микроскопический механизм теплопроводности не рассматривают, а все характеристики процесса считают непрерывными функциями пространственных координат и времени. Геометрическое место точек тела, имеющих в данный момент времени одинаковую температуру  $T$ , называют изотермической поверхностью. Сечение таких поверхностей плоскостью дает семейство изотерм (рис. 4.3.1). Наиболее

резко температура меняется в направлении нормали  $n$  к изотермической поверхности. Предел отношения

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta n} = \frac{\partial T}{\partial n} = \text{grad } T$$

называют градиентом температуры. Это вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону роста температуры.

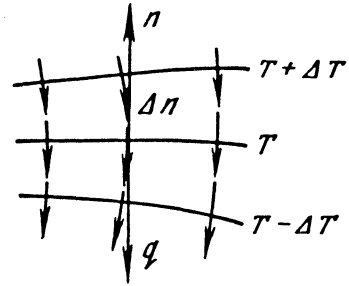


Рис. 4.3.1. К понятию градиента температуры

В изотропном теле направление передачи тепла теплопроводностью противоположно направлению градиента температуры. Линии теплового тока на рис. 4.3.1 показаны стрелками. Интенсивность передачи теплоты характеризуется поверхностной плотностью теплового потока  $q$ , Вт/м<sup>2</sup>, т.е. количеством тепла, передаваемым в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности. Связь между градиентом температуры и вектором плотности теплового потока  $q$  устанавливается согласно гипотезе Фурье соотношением [27, 42, 45, 47, 55, 56, 70]

$$q = -\lambda \text{grad } T. \quad (4.3.1)$$

Неотрицательный коэффициент пропорциональности  $\lambda$ , Вт/(м·К), называемый коэффициентом теплопроводности, зависит от рода материала тела, его структуры и температуры и обычно определяется экспериментально [98].

Наряду с изотропными материалами, для которых коэффициент теплопроводности во всех направлениях одинаков, в технике находят применение анизотропные материалы, у которых способность передавать теплоту теплопроводностью различна в различных направлениях. Это свойство анизотропных материалов обычно связано с особенностями их структуры (кристаллической, волокнистой, слоистой и т.п.). В анизотропном теле угол между направлениями векторов  $q$  и  $\text{grad } T$  может быть меньше  $\pi$ , но всегда остается больше  $\pi/2$ , что следует из второго закона термодинамики. Коэффициент теплопроводности для такого тела является не скаляром, как в выражении (4.3.1), а симметричным тензором второго ранга, что приводит к соответствующему обобщению гипотезы Фурье [27, 55]

$$q = -\lambda \text{grad } T. \quad (4.3.2)$$

В прямоугольной системе координат  $Oxyz$  тензор  $\tilde{\lambda}$  записывают в виде матрицы

$$\tilde{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{bmatrix}, \quad (4.3.3)$$

причем  $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$ ,  $\lambda_{xz} = \lambda_{zx}$  и  $\lambda_{yz} = \lambda_{zy}$ , а компоненты вектора  $q$  представляются соотношениями

$$q_x = -(\lambda_{xx} \partial T / \partial x + \lambda_{xy} \partial T / \partial y + \lambda_{xz} \partial T / \partial z);$$

$$q_y = -(\lambda_{yx} \partial T / \partial x + \lambda_{yy} \partial T / \partial y + \lambda_{yz} \partial T / \partial z);$$

$$q_z = -(\lambda_{zx} \partial T / \partial x + \lambda_{zy} \partial T / \partial y + \lambda_{zz} \partial T / \partial z). \quad (4.3.4)$$

Известно, что симметричный тензор второго ранга поворотом системы координат можно привести к главным осям  $X, Y, Z$ , в которых все недиагональные компоненты тензора обращаются в ноль, и вместо матрицы (4.3.3) можно написать

$$\tilde{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_X & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_Y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_Z \end{bmatrix}, \quad (4.3.5)$$

причем значения  $\lambda_X, \lambda_Y, \lambda_Z$  называют главными значениями тензора  $\tilde{\lambda}$ . В главных осях упрощаются выражения для компонентов вектора  $q$ :

$$q_X = -\lambda_X \frac{\partial T}{\partial X}; \quad q_Y = -\lambda_Y \frac{\partial T}{\partial Y}; \quad q_Z = -\lambda_Z \frac{\partial T}{\partial Z}. \quad (4.3.6)$$

Если ориентация главных осей тензора  $\tilde{\lambda}$  одинакова во всех точках тела, то процесс теплопроводности в таком теле удобнее описывать в системе координат, оси которых совпадают с осями  $X, Y, Z$ . Такие случаи характерны для тел в виде монокристаллов и для конструкций, выполненных из композиционных или армированных материалов с определенным взаимным расположением слоев, волокон или армирующих элементов.

Когда какие-либо два главных значения тензора  $\tilde{\lambda}$  совпадают (например,  $\lambda_X = \lambda_Y$ ), тогда в плоскости, содержащей соответствующие оси (в плоскости  $XOY$  и параллельных ей), материал тела является изотропным и выбор ориентации этих осей может быть произвольным. Такие материалы называют трансверсально изотропными (по отношению к фиксированной оси  $Z$ ). К ним относят слоистые композиционные материалы при условии, что в плоскости каждо-

го слоя коэффициент теплопроводности не зависит от направления, волокнистые материалы с преимущественной ориентацией волокон в одном направлении (например, дерево или армированные однонаправленным волокном композиты) или, наоборот, с хаотической ориентацией волокон, расположенных в параллельных плоскостях (различные теплоизоляционные материалы), а также - кристаллические тела с преимущественной ориентацией кристаллов, имеющих гексагональную плотноупакованную решетку. В последнем случае благодаря высокой степени симметрии относительно оптической оси кристаллы изотропны в плоскости, параллельной основаниям шестигранной призмы.

Другим важным свойством материала является его способность поглощать энергию при нагревании. Температуре  $T$  в точке твердого тела соответствует объемная плотность внутренней энергии  $U$ , Дж/м<sup>3</sup>, причем скалярная неотрицательная величина, Дж/(м<sup>3</sup>·К),

$$c = \partial U / \partial T \quad (4.3.7)$$

носит название удельной объемной теплоемкости материала тела. Она зависит главным образом от рода материала, его химического состава и температуры. Как правило, в справочниках по теплофизическим свойствам материалов приводится значение удельной теплоемкости  $c_m = c / \rho$ , Дж/(кг·К), где  $\rho$  - плотность материала, кг/м<sup>3</sup>. Для однородного тела величина  $c$  явно не зависит от пространственных координат. Тогда с учетом соотношения (4.3.7) выражение (4.3.2) приводится к виду

$$q = -\tilde{a} \text{grad } U, \quad (4.3.8)$$

где  $\tilde{a} = \tilde{\lambda} / c$  - тензор коэффициентов температуропроводности материала тела, обладающий для анизотропного тела такими же свойствами, как и тензор  $\tilde{\lambda}$ . В частном случае равенства между собой всех трех главных значений тензора  $\tilde{\lambda}$  ( $\lambda_X = \lambda_Y = \lambda_Z = \lambda$ ) материал тела становится изотропным, и вместо формулы (4.3.8) получается

$$q = -a \text{grad } U, \quad a = \lambda / c, \quad (4.3.9)$$

где  $a$  (м<sup>2</sup>/с) - коэффициент температуропроводности, который имеет смысл коэффициента молекулярной диффузии внутренней энергии и характеризует скорость распространения изотермической поверхности в материале рассматриваемого элемента конструкции [55].

Для изотропного тела с объемом  $V$  имеем дифференциальное уравнение теплопроводности [27]

$$c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = \text{div}[\lambda \text{grad } T(M, t)] + q_V, \quad M \in V \quad (4.3.10)$$

относительно температуры  $T(M, t)$  как функции пространственных координат точки  $M$  и време-

ни  $t$ . Это уравнение в общем случае является нелинейным, так как величины  $c$  и  $\lambda$  могут зависеть от искомой функции  $T(M, t)$ , а объемная мощность внутренних источников теплоты  $q_V$  может нелинейно зависеть от температуры.

Если в ожидаемом диапазоне изменения температуры тела изменениями величин  $c$ ,  $\lambda$  и  $q_V$  от  $T$  можно пренебречь по сравнению с их средними значениями, то уравнение (4.3.10) становится линейным. Если к тому же тело однородно, т.е. величины  $c$  и  $\lambda$  не зависят от пространственных координат, то выражение (4.3.10) переходит в дифференциальное уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами [27]

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \nabla^2 T(M, t) + q_V(M, t) / c, \quad M \in V, \quad (4.3.11)$$

где  $\nabla^2 = \text{div grad}$  - дифференциальный оператор Лапласа.

Когда внутренние источники теплоты в теле отсутствуют ( $q_V=0$ ), из выражения (4.3.11) следует уравнение Фурье

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \nabla^2 T(M, t), \quad M \in V. \quad (4.3.12)$$

Если процесс теплопроводности стационарный ( $\partial T / \partial t = 0$ ) и  $q_V=0$ , то получается уравнение Лапласа

$$\nabla^2 T(M, t) = 0, \quad M \in V. \quad (4.3.13)$$

Стационарный процесс теплопроводности в теле с внутренними источниками теплоты ( $q_V \neq 0$ ) и постоянным коэффициентом теплопроводности ( $\lambda = \text{const}$ ) описывается уравнением Пуассона

$$\nabla^2 T(M, t) + q_V(M) / \lambda = 0, \quad M \in V. \quad (4.3.14)$$

Для анизотропного тела дифференциальное уравнение теплопроводности имеет вид, аналогичный уравнению (4.3.10), в котором  $\lambda$  следует заменить тензором  $\tilde{\lambda}$ .

Дифференциальное уравнение теплопроводности отражает общие черты, свойственные процессам теплопроводности, и имеет бесчисленное множество решений. Особенности конкретного процесса устанавливаются условиями однозначности, которые состоят из геометрических, физических, временных (или начальных) и граничных условий. В первых двух содержатся сведения о форме и размерах тела, о значениях теплофизических характеристик материала тела и действующих в его объеме источниках тепла. Начальные и граничные условия обычно объединяют общим названием - *краевые условия*. Они указывают на особенности протекания процесса во времени и на поверхностях тела. Для нестационарных процессов теплопроводности временные условия задают начальное распределение температуры в теле.

В граничные условия входят условия теплообмена на поверхности тела. Если определение температурного состояния рассматриваемого тела неразрывно связано с одновременным нахождением распределения температуры в окружающей среде, теплоносителях или в контактирующих с ним твердых телах, то на соответствующих участках поверхности рассматриваемого тела задаются условия сопряжения температурных полей. Задачи теплопроводности, в математическую формулировку которых входят такие условия, называют сопряженными. Простейший вариант задания условий сопряжения температурных полей соответствует идеальному тепловому контакту рассматриваемого тела с окружающей средой или соседним твердым телом [5, 27, 55].

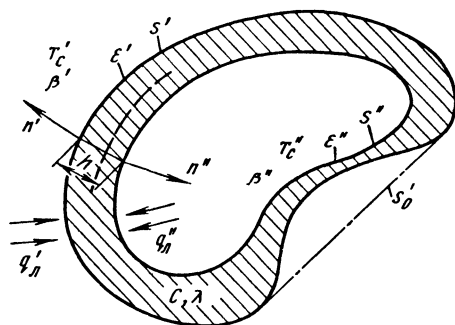


Рис. 4.3.2. К анализу граничных условий на поверхности тела

Для отражения наиболее характерных особенностей теплонапряженных конструкций рассмотрим тело, имеющее произвольную внешнюю поверхность  $S'$  и внутреннюю полость с поверхностью  $S''$  (рис. 4.3.2). К обеим поверхностям подводятся конвективные и лучистые тепловые потоки плотностью  $q'_k = \beta'(T'_c - T'_n)$ ,  $q''_k = \beta''(T''_c - T''_n)$  и  $q'_l$ ,  $q''_l$ . Согласно закону Стефана-Больцмана с поверхностями тела отводятся потоки собственного излучения плотностью  $\epsilon' \sigma_0 (T'_n)^4$  и  $\epsilon'' \sigma_0 (T''_n)^4$ , где  $\sigma_0 = 5,75 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>) - коэффициент излучения абсолютно черного тела. Параметры, помеченные одним штрихом, относят к внешней поверхности тела, двумя штрихами - к внутренней;  $\beta$  - коэффициент теплоотдачи;  $T_c$  - температура среды;  $T_n$  и  $\epsilon$  - температура и коэффициент излучения поверхности. Значения  $\beta$ ,  $T_c$  и  $q_l$  в общем случае могут зависеть от времени и положения точки на поверхности тела, а  $\beta$  и  $q_l$  - еще и от  $T_n$ . Также от  $T_n$  и положения точки на поверхности тела может зависеть  $\epsilon$ . Значение  $q_l$  определяется не только падающим излучением от источников

лучистой энергии, но и радиационным теплообменом между отдельными участками поверхности тела.

Граничное условие для произвольной точки поверхности имеет вид (штрихи опущены) [27]

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Pi} = \beta(T_c - T_{\Pi}) + q_{\text{л}} - \varepsilon \sigma_0 T_{\Pi}^4, \quad (4.3.15)$$

где  $n$  - внешняя нормаль к поверхности. Для последующего анализа его удобно привести к безразмерному виду

$$\frac{1}{\text{Bi}} \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{n}} \Big|_{\Pi} = 1 - \vartheta_{\Pi} - N_{\Pi} \vartheta_{\Pi}^4. \quad (4.3.16)$$

Здесь  $\text{Bi} = \frac{\beta h}{\lambda}$ ;  $\vartheta = \frac{T}{\bar{T}}$ ;  $\bar{n} = \frac{n}{h}$ ;  $N_{\Pi} = \frac{\varepsilon}{\beta} \sigma_0 \bar{T}^3$ ,

$$\bar{T} = T_c + \frac{q_{\text{л}}}{\beta}.$$

За характерный размер принята толщина  $h$  (в общем случае переменная) в направлении, нормальном к срединной поверхности, одинаково удаленной от внешней и внутренней поверхностей тела (штриховая линия на рис. 4.3.2). Приведенная температура  $\bar{T}$  позволяет учесть в одном выражении конвективный и лучистый тепловые потоки, подводимые к поверхности тела.

Если в выражении (4.3.16)  $N_{\Pi} \vartheta_{\Pi}^4$  мало по сравнению с  $1 - \vartheta_{\Pi}$ , то собственное излучение с поверхности можно не учитывать. Тогда это выражение переходит в соотношение  $\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Pi} = \beta(\bar{T} - T_{\Pi})$ , соответствующее в теории теплопроводности граничному условию III рода [27, 55], но в общем случае нелинейное относительно  $T_{\Pi}$ . Его можно линеаризовать, если допустимо считать  $\lambda$ ,  $\beta$  и  $q_{\text{л}}$  не зависящими от  $T_{\Pi}$ .

Критерий Био  $\text{Bi}$  в выражении (4.3.16) является отношением термического сопротивления тела к термическому сопротивлению конвективной теплоотдачи от среды к поверхности и характеризует степень неравномерности распределения температуры по толщине тела. При  $\text{Bi} \gg 1$  правую часть этого выражения можно приравнять нулю, пренебрегая отводом тепла внутрь тела вследствие его большого термического сопротивления ( $h/\lambda \gg 1/\beta$ ), и считать, что на поверхности устанавливается равновесная температура  $\bar{T}$ , соответствующая равновесию конвективного и лучистого тепловых потоков и потока собственного излучения. Тогда значение  $\bar{T}$  находят из алгебраического уравнения

$$N_{\Pi} \bar{\vartheta}^4 + \bar{\vartheta} = 1, \quad \bar{\vartheta} = \bar{T} / \bar{T}, \quad (4.3.17)$$

для решения которого удобно пользоваться графиком (рис. 4.3.3). Ясно, что при  $N_{\Pi} = 0$  (собственное излучение отсутствует)  $\bar{\vartheta} = 1$  и  $\bar{T} = \bar{T}$ . Этот случай в теории теплопроводности отвечает граничному условию I рода [27, 55].

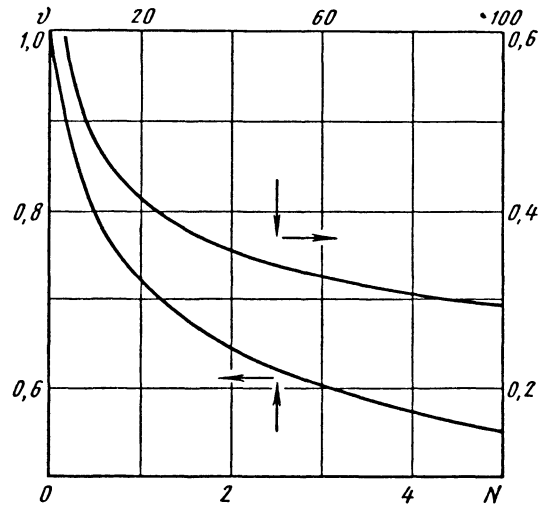


Рис. 4.3.3. График для определения равновесной температуры

При сопоставимых между собой термических сопротивлениях тела и конвективной теплоотдачи выражение (4.3.15) можно записать в виде граничного условия III рода

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Pi} = \beta_{\Pi}^* (\bar{T} - T_{\Pi}), \quad (4.3.18)$$

где  $\beta_{\Pi}^* = \beta + \varepsilon \sigma_0 (\bar{T}^2 + T_{\Pi}^2) (\bar{T} + T_{\Pi})$  в сильной степени зависит от  $T_{\Pi}$ .

Если  $T_{\Pi} \ll \bar{T}$ , а конвективный теплообмен отсутствует ( $\beta=0$ ), то выражение (4.3.15) будет соответствовать граничным условиям II рода [27, 55]

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Pi} = \varepsilon \sigma_0 (\bar{T}^4 - T_{\Pi}^4) \approx \varepsilon \sigma_0 \bar{T}^4 = q_{\text{л}}, \quad (4.3.19)$$

когда на поверхности тела задается плотность подводимого теплового потока.

В том случае, когда термическое сопротивление тела мало по сравнению с суммарным термическим сопротивлением теплообмена ( $h/\lambda \ll 1/\beta_{\Pi}^*$ ), перепад температуры по толщине  $h$  оказывается незначительным по сравнению с разностью  $|\bar{T} - T_{\Pi}|$  и температуру тела в

этом направлении можно считать одинаковой (расчетная схема термически тонкого тела). Тогда граничные условия, заданные по этому направлению, объединяются с дифференциальным уравнением теплопроводности в одно выражение, причем оно не содержит производных от температуры в указанном направлении. Например, дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности в круглой трубе (рис. 4.3.4) при выполнении в любой точке ее внешней и внутренней поверхностей условия

$h/\lambda \ll 1/\beta_{\text{п}}^*$  принимает вид [27]

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \frac{\ln(R_2/R_1)}{h/R} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \tilde{q}_V + \frac{2}{h} \left[ \tilde{\beta}(\tilde{T} - T) - \tilde{\varepsilon} \sigma_0 T^4 \right],$$

$$T = T(\varphi, z, t), \quad (4.3.20)$$

где

$$\tilde{\beta} = \frac{R_2 \beta' + R_1 \beta''}{2R}; \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{R_2 \varepsilon' + R_1 \varepsilon''}{2R};$$

$$\tilde{T} = \frac{R_2(\beta' T'_c + q'_l) + R_1(\beta'' T''_c + q''_l)}{2\beta R}$$

$$\tilde{q}_V = \frac{1}{Rh} \int_{R_1}^{R_2} q_V r dr;$$

$R = (R_1 + R_2)/2$  - средний радиус трубы, ось  $Z$  направлена по оси трубы.

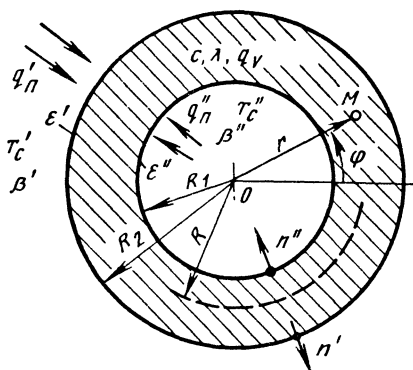


Рис. 4.3.4. К постановке задачи теплопроводности для круглой трубы

Уравнение (4.3.20) отличается от уравнения для двумерного температурного поля  $T(y, z, t)$ ,  $y=R\varphi$  в пластине толщиной  $h=R_2-R_1$  коэффициентом  $(R/h)\ln(R_2/R_1)$  при первом члене в

правой части и коэффициентами  $R_2/R = 1+h/(2R)$  и  $R_1/R = 1-h/(2R)$  в выражениях для  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\varepsilon}$  и  $\tilde{T}$ . Первый коэффициент меньше единицы на величину не более  $[(h/2)/(R-h/2)]^2$ , т.е. при  $h/R < 0,1$  отличие не превышает 0,5%. При этом отличие коэффициентов  $R_2/R$  и  $R_1/R$  от единицы несколько больше, но лежит в пределах  $\pm 5\%$ . Таким образом, при  $h/R < 0,1$  для расчета температурного поля в стенке трубы с одинаковой по толщине температурой допустимо использовать расчетную схему пластины, но при вычислении приведенных характеристик  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\varepsilon}$  и  $\tilde{T}$  следует учитывать отличие площадей внешней и внутренней поверхностей трубы. Расчетная схема пластины применима и в более общем случае стенки, ограниченной поверхностями двойной кривизны, если в условии  $h/R < 0,1$  принять  $1/R = (1/R' + 1/R'')/2$ , где  $R'$  и  $R''$  - главные радиусы кривизны средней поверхности стенки. Этот вывод справедлив и при изменении температуры по толщине стенки.

Когда тело имеет малое термическое сопротивление во всех направлениях, его температуру  $T$  можно считать одинаковой по всему объему. Тогда отдельные участки внутренней поверхности тела  $S''$  (см.рис. 4.3.2) будут находиться в состоянии температурного равновесия и  $q''_л = \varepsilon'' \sigma_0 (T''_{\text{п}})^4$ . Это равенство справедливо, если среда в полости тела диатермична (не поглощает излучения) и внутренние источники излучения отсутствуют. В этом случае теплообмен излучением в полости тела не оказывает влияния на его температурное состояние. Участки произвольной по форме внешней поверхности тела обмениваются между собой потоками излучения. Поэтому потоки  $q'_л$  и  $\varepsilon' \sigma_0 (T'_{\text{п}})^4$  можно рассматривать независимо друг от друга только для выпуклой внешней поверхности.

Для тела с малым термическим сопротивлением дифференциальное уравнение примет вид [27]

$$\frac{C_T}{S'} \frac{dT}{dt} = \beta_{\text{ср}} (\tilde{T}_{\text{ср}} - T) - \varepsilon_{\text{ср}} \sigma_0 T^4, \quad (4.3.21)$$

$$\text{где} \quad \beta_{\text{ср}} = \frac{1}{S'} \left( \int_{S'} \beta' dS + \int_{S'} \beta'' dS \right);$$

$$\tilde{T}_{\text{ср}} = \frac{1}{\beta_{\text{ср}} S'} \left[ \int_{S'} (\beta' T'_c + q'_l) dS + \int_{S'} \beta'' T''_c dS + \int_V q_V dV \right];$$

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{S'} \int_{S'} \varepsilon' dS; \quad C_T = \int_V c dV - \text{полная тепло-}$$

емкость тела. Если тело сплошное, т.е. полость отсутствует, то в выражениях для осредненных значений  $\bar{T}_{ср}$  и  $\beta_{ср}$  пропадают интегралы по поверхности  $S''$ . Для вогнутой внешней поверхности с постоянным значением  $\epsilon'$  при осреднении можно считать  $1/\epsilon_{ср} = 1 + S'_0(1/\epsilon' - 1)/S'$ , где  $S'_0$  - минимальная по площади невогнутая поверхность, обтягивающая тело (см.рис. 4.3.2). В этом случае удастся приближенно учесть радиационный теплообмен между соседними участками вогнутой поверхности и под  $q''_n$  понимать лишь плотность потоков, подводимых к телу от внешних источников излучения.

К расчетной схеме тела с одинаковой по объему температурой может быть сведена большая группа металлических элементов конструкций в виде тонкостенных стержней, пластин или оболочек с неизменными или слабо меняющимися по их поверхностям условиями теплообмена, а также массивные элементы из теплопроводных материалов, что обеспечивает малость внутреннего термического сопротивления по сравнению с суммарным термическим сопротивлением теплообмена. Для таких элементов конструкций изменение температуры по объему оказывается незначительным и сравнимо с возможной ошибкой в расчетах из-за недостаточной достоверности данных об условиях теплообмена и теплофизических свойствах материала или же не приводит к существенным деформациям элемента и изменению его механических характеристик.

**4.3.2. НАГРЕВ И ОХЛАЖДЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ С ОДНОРОДНОЙ ПО ОБЪЕМУ ТЕМПЕРАТУРОЙ**

При постоянных во времени  $t$  условиях теплообмена однородная по объему тела температура  $T$  согласно уравнению (4.3.21) стремится к равновесному значению  $\bar{T}$ , определяемому из уравнения (4.3.17) или по рис. 4.3.3 при  $\bar{\vartheta} = \bar{T} / \bar{T}_{ср}$  и  $N_{II} = \epsilon_{ср} \sigma_0 \bar{T}_{ср}^3 / \beta_{ср}$ . Если в некоторый момент времени, принимаемый за начальный ( $t=0$ ), температура тела  $T_0 \neq \bar{T}$ , то зависимость  $T$  от  $t$  следует из уравнения (4.3.21) в виде

$$t = \frac{1}{S'} \int_{T_0}^{\bar{T}} \frac{C_T dT}{\beta_{ср} (\bar{T}_{ср} - T) - \epsilon_{ср} \sigma_0 T^4} \quad (4.3.22)$$

При независимых от  $T$  величинах  $C_T, \beta_{ср}, T_{ср}$  и  $\epsilon_{ср}$  интеграл выражается в элементарных функциях [27]. Этот интеграл можно вычислить приближенно, преобразовав выражение (4.3.22) к виду

$$\tau = \int_{\vartheta_0}^{\bar{\vartheta}} \frac{d\vartheta}{\bar{\vartheta} - \vartheta + N_{II}(\bar{\vartheta}' - \vartheta')}, \quad (4.3.23)$$

где  $\tau = \beta_{ср} t S' / C_T$ ;  $\vartheta = T / \bar{T}_{ср}$ ;  $\vartheta_0 = T_0 / \bar{T}_{ср}$ .

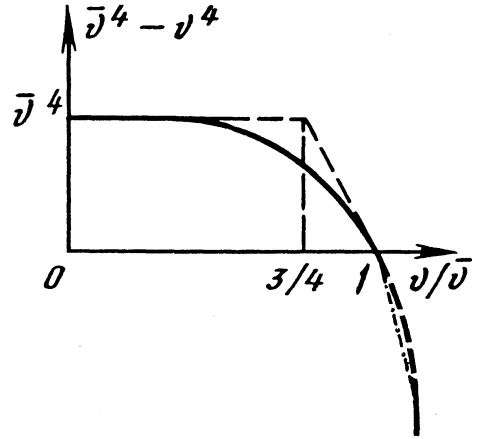


Рис. 4.3.5. Линеаризация зависимости потока излучения от температуры

При нагревании тела ( $\vartheta_0 < \bar{\vartheta}$ ) кривую зависимости  $\bar{\vartheta}^4 - \vartheta^4$  от  $\vartheta / \bar{\vartheta}$  (сплошная линия на рис. 4.3.5) приближенно заменим ломаной (штриховая линия) с абсциссой точки излома  $\vartheta / \bar{\vartheta} = 3/4$ . Ломаная состоит из отрезков касательных, проведенных к кривой в точках с абсциссами  $\vartheta / \bar{\vartheta} = 0$  и 1. Каждому отрезку ломаной соответствует свое приближенное решение, получаемое вычислением интеграла в выражении (4.3.23) [27]:

при  $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq 3\bar{\vartheta} / 4$   $(1 - \vartheta) / (1 - \vartheta_0) = \exp[-\tau]$ ;  
 при  $3\bar{\vartheta} / 4 \leq \vartheta \leq \bar{\vartheta}$   $4(1 - \vartheta / \bar{\vartheta}) = \exp[-(1 + 4N_{II} \bar{\vartheta}^3)(\tau - \tau_1)]$ ,  
 где  $\tau_1 = \ln[(1 - \vartheta_0) / (1 - 3\bar{\vartheta} / 4)]$ .

Если же  $3\bar{\vartheta} / 4 \leq \vartheta_0 < \bar{\vartheta}$ , то  $(\bar{\vartheta} - \vartheta) / (\bar{\vartheta} - \vartheta_0) = \exp[-(1 + 4N_{II} \bar{\vartheta}^3)\tau]$ .

В случае охлаждения тела ( $\vartheta_0 > \bar{\vartheta}$ ) кривую на рис. 4.3.5 можно приближенно заменить секущей (штрихпунктирная линия), проходящей через точки с абсциссами  $\vartheta / \bar{\vartheta} = 1$  и  $\vartheta_0 / \bar{\vartheta}$ . Тогда из выражения (4.3.23) следует [27]

$$(\bar{\vartheta} - \vartheta) / (\vartheta_0 - \bar{\vartheta}) = \exp[-\tau - N_{II}(\bar{\vartheta}^2 + \vartheta_0^2)(\bar{\vartheta} + \vartheta_0)\tau]$$

В случае отсутствия конвективного теплообмена ( $\beta_{ср} = 0$ ) вместо уравнения (4.3.21) имеем

$$\frac{C_T dT}{S' dt} = \varepsilon_{cp} \sigma_0 (\bar{T}^4 - T^4); \quad \bar{T}^4 = \frac{1}{\varepsilon_{cp} \sigma_0 S'} (Q_V + \int q'_n dS),$$

где  $Q_V$  - мощность энерговыделения в объеме тела, и решение в виде [27]

$$\frac{2}{C_T} \varepsilon_{cp} \sigma_0 S' \bar{T}^3 t = \operatorname{arctg} \left( \bar{T} \frac{T - T_0}{\bar{T}^2 + TT_0} \right) + \operatorname{Arth} \left( \bar{T} \frac{T - T_0}{\bar{T}^2 - TT_0} \right), \quad (4.3.23 \text{ a})$$

причем для  $|\zeta| < 1$   $\operatorname{Arth} \zeta = (1/2) \ln[(1+\zeta)/(1-\zeta)]$ .

Если тело лишь излучает тепло со своей поверхности и  $\bar{T} = 0$ , то вместо формулы (4.3.23 а) получим [27]

$$T / T_0 = (1 + 3\varepsilon_{cp} \sigma_0 S' T_0^3 t / C_T)^{-1/3}.$$

Наоборот, если собственным излучением с поверхности тела можно пренебречь, то из (4.3.21) получается наиболее простое уравнение

$$\frac{C_T dT}{S' dt} = \beta_{cp} (\bar{T}_{cp} - T),$$

решением которого будет

$$(\bar{T}_{cp} - T)(\bar{T}_{cp} - T_0) = \exp[-\beta_{cp} t S' / C_T] = \exp[-\tau t].$$

Когда  $C_T$ ,  $\beta_{cp}$ ,  $\bar{T}_{cp}$  и  $\varepsilon_{cp}$  зависят от  $T$ , решение в форме (4.3.22) сохраняет силу, однако вычислить интеграл аналитически обычно не удается и приходится прибегать к методам численного интегрирования, многие из которых реализованы в стандартных программах для ЭВМ [58, 104].

При переменных во времени условиях теплообмена для тела с одинаковой по объему температурой уравнение (4.3.21) в общем случае не имеет точного аналитического решения. Универсальным способом определения зависимости  $T$  от  $t$  является численное решение этого уравнения по конечным интервалам времени  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ , где  $t_{k-1}$  и  $t_k$  - моменты времени, соответствующие началу и концу  $k$ -го интервала. Разбивка на интервалы должна быть такой, чтобы в пределах каждого из них  $\beta_{cp}$  и  $\bar{T}_{cp}$  изменялись монотонно.

В пределах отдельно взятого интервала  $\Delta t_k$  скорость изменения температуры тела приближенно принимают постоянной и заменяют выражением в конечных разностях  $dT / dt \approx (T_k - T_{k-1}) / \Delta t_k$ , где  $T_{k-1}$  и  $T_k$  - значения температур в начале и конце  $k$ -го интервала времени. В действительности  $dT / dt$  не остается постоянной в пределах  $\Delta t_k$ , так как изменение  $T$  вызывает изменение правой части

уравнения (4.3.21):  $q = \beta_{cp} (\bar{T}_{cp} - T) - \varepsilon_{cp} \sigma_0 T^4$ . Это приводит к погрешности при численном решении по сравнению с точным решением.

Если  $dT / dt$  определить по условиям теплообмена и температурному состоянию тела в начале интервала, то соответствующее конечно-разностное уравнение будет иметь вид [5, 27]

$$\frac{T_k - T_{k-1}}{\Delta t_k} = q_{k-1} \frac{S'}{(C_T)_{k-1}} = \dot{T}_{k-1}, \quad (4.3.24)$$

где индексом  $k-1$  отмечены значения переменных величин в момент времени  $t_{k-1}$ . Из уравнения (4.3.24) получается явная формула относительно искомой температуры

$$T_k = T_{k-1} + \dot{T}_{k-1} \Delta t_k. \quad (4.3.25)$$

Если же  $dT / dt$  определить по условиям теплообмена и температурному состоянию тела в конце интервала, то соответствующее конечно-разностное уравнение

$$\frac{T_k - T_{k-1}}{\Delta t_k} = q_k \frac{S'}{(C_T)_k} = \dot{T}_k$$

не удается в общем случае явно разрешить относительно искомой температуры  $T_k$  и ее значения находят последовательными приближениями.

Помимо обеспечения необходимой точности расчета температуры тела на выбор значения  $\Delta t_k$  при численном решении уравнения (4.3.21) оказывают влияние и другие факторы. При увеличении  $\Delta t_k$  погрешности, вызванные аппроксимацией дифференциального уравнения конечно-разностным методом, могут возрасти настолько, что результаты расчета потеряют физический смысл. Например, при использовании формулы (4.3.25) физический смысл еще сохраняется, если  $T_k$  в конце интервала сравнивается со значением равновесной температуры  $\bar{T}_{k-1}$  в начале интервала, определяемым из равенства  $q_{k-1} = 0$ . Тогда при  $T_k = \bar{T}_{k-1}$  из формулы (4.3.25) получим предельно допустимый по величине интервал времени [15, 27]

$$[\Delta t_k] = (\bar{T}_{k-1} - T_{k-1}) / \dot{T}_{k-1} = (C_T)_{k-1} (\bar{T}_{k-1} - T_{k-1}) / (S' q_{k-1}).$$

#### 4.3.3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Аналитические методы решения задач делят на точные и приближенные. Получаемые с их помощью функциональные зависимости позволяют проанализировать влияние определяющих параметров на температурное состояние конструкции. Такие зависимости важны при

проведении проектировочных расчетов и оптимизации конструкции.

Возможности точных аналитических методов ограничены, как правило, решением линейных задач теплопроводности, когда теплофизические характеристики материала не зависят от температуры, а граничные условия выражаются линейной комбинацией температуры и ее градиента на поверхности конструкции. Если в материале действуют внутренние источники теплоты, мощность которых является функцией температуры, то эта функция также должна быть линейной.

Сферу применения точных аналитических методов удается расширить путем линеаризации нелинейных задач. Простейший способ линеаризации нелинейного уравнения теплопроводности (4.3.10) состоит в замене переменных величин теплофизических характеристик их постоянными значениями при некоторой определяющей температуре. Выбор определяющей температуры должен базироваться на предварительном качественном анализе [45], который учитывает характер процесса теплопроводности (нагрев или охлаждение) и поведение заменяемых параметров в ожидаемом диапазоне изменения температуры материала.

Анализ показывает, что не всегда целесообразно в качестве определяющей выбирать в этом диапазоне среднюю температуру или же заменять переменные величины их средними значениями. Возникающую при этом способе линеаризации погрешность количественно можно оценить либо сравнением полученного решения при постоянных теплофизических характеристиках с результатами расчета, проведенного на основе учета их реальных зависимостей от температуры, либо путем параметрического анализа в рамках полученного решения, сравнивая между собой результаты расчета при различных сочетаниях предельных значений характеристик в рассматриваемом диапазоне температуры.

Точное аналитическое решение линейной или предварительно линеаризованной многомерной задачи нестационарной теплопроводности удастся получить лишь для элементов конструкций сравнительно простой геометрической формы, ограниченных координатными поверхностями в какой-либо одной системе ортогональных координат. Для большинства таких тел известна и табулирована [42, 56] система собственных функций и спектр собственных значений соответствующей однородной задачи. Поэтому для подобных тел удобно использовать достаточно универсальный метод конечных интегральных преобразований. При однородных граничных условиях и одинаковой во всех точках тела начальной температуре решение многомерной задачи для тел простой формы удастся представить в виде произведения решений соответствующих одномерных задач [42, 55].

Но собственные функции и собственные

значения можно найти приближенно для линейной задачи теплопроводности в теле любой формы и на их основе построить приближенное аналитическое решение. Рассмотрим путь построения такого решения для процесса нестационарной теплопроводности в неоднородном теле объемом  $V$  с зависящими от координат точки  $M \in V$  удельной объемной теплоемкостью  $c(M)$  и коэффициентом теплопроводности  $\lambda(M)$ . Пусть распределение температуры  $T(M, t)$  описывается уравнением

$$c(M)\dot{T}(M, t) = \text{div}[\lambda(M)\text{grad } T(M, t)] - b(M)T(M, t) + q_V(M, t), \quad M \in V, \quad (4.3.26)$$

с начальными условиями

$$T(M, 0) = T_0(M), \quad M \in V, \quad (4.3.27)$$

и граничными условиями

$$T(N, t) = f_1(N, t), \quad M \in S_1 \quad (4.3.28)$$

на участке поверхности  $S_1$  и

$$\lambda(N)\frac{\partial T(N, t)}{\partial n(N)} + \beta(N)T(N, t) = f_2(N, t), \quad N \in S_2, \quad (4.3.29)$$

где  $b(M) \geq 0$ ,  $T_0(M)$  и  $\beta(N) \geq 0$  - заданные функции положения точек  $M$  в объеме тела и  $N$  на участке поверхности  $S_2$ , а  $q_V(M, t)$ ,  $f_1(N, t)$  и  $f_2(N, t)$  - заданные функции, зависящие еще и от времени  $t$ ;  $n(N)$  - направление внешней нормали в точке  $N \in S_2$ .

Собственные функции  $u^{(n)}(M)$  и соответствующие им собственные значения  $\nu_n$  определяются из решения однородной задачи [28]

$$\text{div}[\lambda(M)\text{grad } u(M)] + [c(M)\nu - b(M)]u(M) = 0, \quad M \in V; \quad (4.3.30)$$

$$u(M) = 0, \quad N \in S_1; \quad \lambda(N)\frac{\partial u(N)}{\partial n(N)} + \beta(N)u(N) = 0, \quad N \in S_2. \quad (4.3.31)$$

Соответствующий этой задаче функционал [28]

$$J(u) = \int_V \left\{ \lambda(M)[\text{grad } u(M)]^2 - [c(M)\nu - b(M)] \times \right. \\ \left. \times [u(M)]^2 \right\} dV + \int_{S_2} \beta(N)[u(N)]^2 dS$$

должен рассматриваться на непрерывных функциях  $u(M)$ , удовлетворяющих первому из граничных условий (4.3.31). Условиями стационарности этого функционала будут уравнение (4.3.30) и второе из соотношений (4.3.31), причём в стационарной точке достигается минимум,



равный нулю. Следовательно, собственные значения  $\nu_n$  можно найти, минимизируя функционал [28]

$$\nu(u) = \int_V \left\{ \lambda(M) [\text{grad } u(M)]^2 + b(M) [u(M)]^2 \right\} \times \\ \times dV + \int_{S_2} \beta(N) [u(N)]^2 dS \quad (4.3.32)$$

при условии нормирования

$$\int_V c(M) [u(M)]^2 dV = 1, \quad (4.3.33)$$

которое не позволяет использовать в качестве допустимой функции  $u(M) \equiv 0$ . Функционал (4.3.32) при условии (4.3.33) имеет единственный минимум, значение которого дает первое собственное значение  $\nu_1$ , а функция  $u^{(1)}(M)$ , на котором этот минимум достигается, является соответствующей собственной функцией задачи.

Вторую пару  $\nu_2$  и  $u^{(2)}(M)$  находят минимизацией функционала (4.3.32) на допустимых функциях  $u(M)$ , которые, помимо условия (4.2.33), должны удовлетворять дополнительному условию

$$\int_V c(M) u^{(1)}(M) u(M) dV = 0.$$

Оно является условием ортогональности с весом  $c(M)$  по отношению к уже найденной собственной функции  $u^{(1)}(M)$  и исключает тождественность  $u^{(1)}(M)$  и  $u^{(2)}(M)$ , а значит - и тождественность  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , причем обеспечивается неравенство  $\nu_1 < \nu_2$ .

При определении каждой следующей пары  $\nu_{n+1}$  и  $u^{(n+1)}(M)$  при минимизации функционала (4.3.32) накладываются дополнительные ограничения, которые являются условиями ортогональности с весом  $c(M)$  допустимых функций по отношению ко всем  $n$  уже найденным собственным функциям. Эти ограничения сужают множество допустимых функций  $u(M)$  и приводят к тому, что каждое найденное значение  $\nu_{n+1}$  оказывается больше предыдущего.

Ясно, что номер  $n$  может возрастать неограниченно, но практически можно найти лишь конечное число  $N_*$  пар  $\nu_n$  и  $u^{(n)}(M)$ , да и то в общем случае приближенно. Все же предположим, что нам известен полный спектр ( $N_* \rightarrow \infty$ ) точных значений  $\nu_n$  и полная система истинных собственных функций  $u^{(n)}(M)$ . Тогда к уравнению (4.3.26) и начальному условию (4.3.27) можно применить интегральное преобразование

$$T_n(\nu_n, t) = \int_V T(M, t) u^{(n)}(M) c(M) dV,$$

которое с учетом выражений (4.3.28)-(4.3.31) дает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для каждой функции  $T_n(\nu_n, t)$  с соответствующим начальным условием. После решения этих уравнений и обратного интегрального преобразования в итоге получим решение сформулированной задачи нестационарной теплопроводности (4.3.26)-(4.3.29):

$$T(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u^{(n)}(M) \exp[-\nu_n t] \times \\ \times \left\{ \int_V T_0(M) c(M) u^{(n)}(M) dV + \int_0^t \exp[\nu_n t'] dt' \times \right. \\ \times \left[ \int_V q_V(M, t') u^{(n)}(M) dV - \int_{S_1} f_1(N, t') \lambda(N) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial u^{(n)}(N)}{\partial n(N)} dS + \int_{S_2} f_2(N, t') u^{(n)}(N) dS \right] \left. \right\}. \quad (4.3.34)$$

Для непрерывных зависимостей  $T_0(M)$  и  $q_V(M)$  от координат точки  $M$  оно будет равномерно сходиться при  $M \in V$ , а равномерная сходимость в точках  $N \in S$  поверхности тела возможна, если для этих точек при  $t > 0$  граничные условия однородны [42]. В тех же точках поверхности тела, где граничные условия неоднородны, сходимость становится неравномерной, что затрудняет проведение практических расчетов по решению вида (4.3.34). Например, для  $N \in S_1$  все члены ряда в (4.3.34) равны нулю, так как  $u^{(n)}(N) = 0$  при  $N \in S_1$ , но в действительности в этих точках согласно условию (4.3.28)  $T(N, t) = f_1(N, t) \neq 0$ . Ряд сходится к значениям  $f_1(N, t)$  во внутренних точках  $M \in V$ , бесконечно близких к точкам  $N \in S_1$ , но непосредственно для  $N \in S_1$  дает нулевые значения. Чтобы в подобных случаях улучшить сходимость ряда в (4.3.34), целесообразно выделить из него в замкнутом виде частное решение, которое удовлетворяет неоднородным граничным условиям. Тогда оставшаяся часть решения в виде ряда будет удовлетворять только однородным граничным условиям, и ряд будет сходиться равномерно во всех точках в объеме и на поверхности тела.

Когда спектр собственных значений неполный ( $n \leq N_*$ ) и они вместе с соответствующими собственными функциями определены приближенно, бесконечная сумма в (4.3.34) заменяется конечной, состоящей из  $N_*$  слагаемых, причем каждое из слагаемых может быть с некоторой погрешностью, которая зависит от точности оп-

ределения  $v_n$  и  $u^{(n)}(M)$ . С ростом  $n$  слагаемые суммы уменьшаются по абсолютной величине. Поэтому к точности определения первой пары  $v_1$  и  $u^{(1)}(M)$  предъявляются более высокие требования, чем к точности второй пары и т.д.

Второй путь приближенного решения нестационарной задачи теплопроводности связан с использованием интегрального преобразования Лапласа [55]:

$$T(M, s) = \int_0^{\infty} T(M, t) \exp[-st] dt,$$

которое приводит соотношения (4.3.26)-(4.3.29) к уравнению для изображения  $T(M, s)$

$$\operatorname{div}[\lambda(M) \operatorname{grad} T(M, s)] - [c(M)s + b(M)] \times T(M, s) + c(M)T_0(M) + q_V(M, s) = 0, \quad M \in V \quad (4.3.35)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} T(N, s) &= f_1(N, s), \quad N \in S_1; \\ \lambda(N) \frac{\partial T(N, s)}{\partial n(N)} + \beta(N)T(N, s) &= f_2(N, s), \\ N &\in S_2, \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

где  $q_V(M, s)$ ,  $f_1(N, s)$  и  $f_2(N, s)$  - изображения по Лапласу функций соответственно  $q_V(M, t)$ ,  $f_1(N, t)$  и  $f_2(N, t)$ . Математической формулировке задачи (4.3.35), (4.3.36) в изображениях соответствует функционал [28]

$$\begin{aligned} J[T(M, s)] &= \int_V \left\{ \lambda(M) [\operatorname{grad} T(M, s)]^2 / 2 + \right. \\ &+ [c(M)s + b(M)] [T(M, s)]^2 / 2 - [c(M)T_0(M) + \\ &+ q_V(M, s)] T(M, s) \left. \right\} dV + \int_{S_2} T(N, s) \times \\ &\times [\beta(N)T(N, s) / 2 - f_2(N, s)] dS, \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

который следует рассматривать на допустимых функциях  $T(M, s)$ , непрерывных и удовлетворяющих первому граничному условию (4.3.36). Если принять

$$T(M, s) = T^0(M, s) + \sum_{n=1}^{N_*} B_n(s) w_n(M), \quad M \in V, \quad (4.3.38)$$

где функция  $T^0(M, s)$  является допустимой, а  $w_n(N) = 0, N \in S_1,$  (4.3.39)

то при любых  $B_n(s)$  (4.3.38) также будет допустимой функцией.

В качестве  $w_n(M)$  удобно выбрать собственные функции соответствующей однородной задачи, если они известны или их нетрудно найти. Коэффициенты  $B_n(s)$  после подстановки

(4.3.38) в (4.3.37) находят из условий  $\partial J[T(M, s)] / \partial B_n(s) = 0$  стационарности функционала (4.3.37), что приводит к системе алгебраических уравнений, содержащих параметр  $s$  интегрального преобразования. По найденным  $B_n(s)$  определяют оригиналы  $B_n(t)$ , а по функции  $T^0(M, s)$  - оригинал  $T^0(M, t)$ . Для перехода к оригиналам используют формулу обращения или таблицы изображений [55], возможно также численное обращение изображений [5]. В итоге вместо (4.3.38) получают приближенное решение

$$T(M, t) = T^0(M, t) + \sum_{n=1}^{N_*} B_n(t) w_n(M), \quad M \in V. \quad (4.3.40)$$

При  $N_* \rightarrow \infty$  и выборе в качестве  $w_n(M)$  полной системы собственных функций соответствующей однородной задачи (4.3.30), (4.3.31) формула (4.3.40) дает истинное решение рассматриваемой задачи нестационарной теплопроводности.

Рассмотрим также способ приближенного решения данной задачи на основе ее формулировки через интеграл взвешенной невязки вида [28]

$$\begin{aligned} \int_V \left\{ \lambda(M) \operatorname{grad} T(M, t) \operatorname{grad} w(M) + [c(M)\dot{T}(M, t) + \right. \\ \left. + b(M)T(M, t) - q_V(M, t)] w(M) \right\} dV + \\ + \int_{S_2} [\beta(N)T(N, t) - f_2(N, t)] w(N) dS = 0. \end{aligned} \quad (4.3.41)$$

Здесь  $w(M)$  - непрерывная функция, которая обращается в ноль в точках  $N \in S_1$ . Применим один из методов взвешенных невязок - метод Бубнова-Галеркина. Искомую зависимость  $T(M, t)$  примем в форме (4.3.40), где  $T^0(M, t)$  удовлетворяет условию (4.3.28), а  $w_n$  - (4.3.39). После подстановки (4.3.40) в (4.3.41) и выбора  $w(M) \equiv w_n(M)$  получим систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений для определения  $B_n(t)$ . При  $N_* \leq 2$  такую систему нетрудно решить аналитически и в итоге получить приближенное аналитическое решение в виде (4.3.40) для искомой зависимости  $T(M, t)$ . Для  $N_* > 2$  подобную систему уравнений рационально решать численно (например, методами типа Рунге-Кутты) [104]. С увеличением  $N_*$  при удачном выборе функций  $w_n(M)$ , в качестве которых и в данном случае целесообразно выбирать собственные функции соответствующей однородной задачи (4.3.30), (4.3.31) (если они известны), таким путем можно получить достаточно хорошее приближение к истинному решению. Для тел сложной формы эффективными

может оказаться способ построения функций  $w_n(M)$  методами алгебры логики [82].

Методами взвешенных невязок удается решать и нелинейные задачи нестационарной теплопроводности, но при этом для определения  $B_n(t)$  в формуле (4.3.40) получается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которую в общем случае приходится интегрировать численно. Таким образом, температурное поле в теле в фиксированный момент времени описывается аналитической зависимостью, но переход от одного момента времени к другому связан с определением значений  $B_n(t)$  численным интегрированием. Переход к конечным интервалам времени  $\Delta t_k$  позволяет использовать вариационную формулировку нелинейных задач [27], представляя анализ процесса нестационарной теплопроводности как последовательность решений ряда задач стационарной теплопроводности.

Математическая формулировка линейной задачи стационарной теплопроводности отличается от нестационарной равенством нулю правой части уравнения (4.3.26), так как  $\dot{T}(M, t) \equiv 0$ , т.е.

$$\operatorname{div}[\lambda(M)\operatorname{grad} T(M)] - b(M)T(M) + q_V(M) = 0,$$

$$M \in V, \quad (4.3.42)$$

отсутствием начального условия (4.3.27) и переходом к граничным условиям

$$\begin{aligned} T(N) &= f_1(N), \quad N \in S_1; \\ \lambda(N) \frac{\partial T(N)}{\partial n(N)} + \beta(N)T(N) &= f_2(N), \quad N \in S_2. \end{aligned} \quad (4.3.43)$$

Эти отличия приводят к тому, что в соотношениях (4.3.30), (4.3.33) и последующих условиях ортогональности собственных функций  $u^{(n)}(M)$  следует положить  $c(M) \equiv 1$ , но спектр собственных значений  $\nu_n$  стационарной задачи по-прежнему можно найти, минимизируя функционал (4.3.32).

Как и для нестационарной задачи, предположим, что нам известен полный спектр  $(N_* \rightarrow \infty)$  точных значений  $\nu_n$  и полная система истинных собственных функций  $u^{(n)}(M)$ . Тогда к уравнению (4.3.42) можно применить интегральное преобразование

$$T_n(\nu_n) = \int_V T(M) u^{(n)}(M) dV,$$

которое в итоге дает решение задачи (4.3.42), (4.3.43) в виде

$$\begin{aligned} T(M) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{(n)}(M)}{\nu_n} \left[ \int_V q_V(M) u^{(n)}(M) dV - \right. \\ &\quad \left. - \int_{S_1} f_1(N) \lambda(N) \frac{\partial u^{(n)}(N)}{\partial n(N)} dS + \right. \\ &\quad \left. + \int_{S_2} f_2(N) u^{(n)}(N) dS \right]. \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

Для равномерной сходимости ряда в (4.3.44) при  $M \in V$  необходима непрерывность зависимости  $q_V(M)$  от координат точки  $M$ , а равномерная сходимость при  $N \in S$  требует однородности граничных условий (4.3.43) [42]. Сходимость при  $N \in S$  можно улучшить, если в решении (4.3.44) в замкнутом виде выделить частное решение задачи, удовлетворяющее неоднородным граничным условиям.

Введем обозначение

$$G(M, M_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{(n)}(M) u^{(n)}(M_0)}{\nu_n} \quad (4.3.45)$$

и, изменяя в (4.3.44) очередность суммирования и интегрирования, запишем решение в форме

$$\begin{aligned} T(M_0) &= \int_V q_V(M) G(M, M_0) dV - \\ &\quad - \int_{S_1} f_1(N) \lambda(N) \frac{\partial G(N, N_0)}{\partial n(N)} dS + \\ &\quad + \int_{S_2} f_2(N) G(N, M_0) dS, \end{aligned} \quad (4.3.46)$$

которая равносильна использованию функции Грина  $G(M, M_0)$  для соответствующей однородной задачи, описываемой уравнением

$$\operatorname{div}[\lambda(M)\operatorname{grad} G(M, M_0)] - b(M)G(M, M_0) + \delta(M, M_0) = 0, \quad M, M_0 \in V$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} G(N, M_0) &= 0, \quad N \in S_1; \\ \lambda(N) \frac{\partial G(N, M_0)}{\partial n(N)} + \beta(N)G(N, M_0) &= 0, \quad N \in S_2, \end{aligned}$$

причем  $\delta(M, M_0)$  - функция Дирака, всюду равная нулю, а при совпадении точек  $M$  и  $M_0$  стремящаяся к бесконечности. Таким образом, формула (4.3.45) устанавливает связь функции Грина и полной системы собственной функций.

Если в (4.3.42)  $q_V$ , а в (4.3.43)  $f_2$  нелинейно зависят от температуры  $T(M)$ ,  $M \in V$ , то (4.3.46) можно использовать для решения нелинейной задачи последовательными приближениями. Связь между  $j$ -м и последующим  $j+1$ -м приближениями устанавливается в этом случае соотношением [28]

$$T^{(j+1)}(M_0) = \int_V q_V(M, T^{(j)}(M))G(M, M_0)dV - \int_{S_1} f_1(N)\lambda(N) \frac{\partial G(N, M_0)}{\partial n(N)} dS + \int_{S_2} f_2(N, T^{(j)}(N))G(N, M_0)dS.$$

Когда полная система собственных функций неизвестна ( $n \leq N^*$ ) и они вместе с собственными значениями определены приближенно, бесконечные суммы в (4.3.44) и (4.3.45) заменяют конечными, состоящими из  $N^*$  слагаемых, каждое из которых может быть вычислено с некоторой погрешностью. Тогда (4.3.44) и (4.3.46) дают лишь приближенно аналитическое решение рассматриваемой задачи стационарной теплопроводности. Среднюю квадратическую погрешность такого решения можно оценить на основе вариационного подхода [27].

Приближенное аналитическое решение данной задачи можно также получить на основе ее вариационной формулировки, содержащей функционал [28]

$$J(T) = \int_V \left\{ \lambda(M) |\text{grad } T(M)|^2 / 2 + [b(M)T(M) / 2 - q_V(M)]T(M) \right\} dV + \int_{S_2} \left\{ [\beta(N)T(N) / 2 - f_2(N)]T(N) \right\} dS, \quad (4.3.47)$$

или формулировки через интеграл взвешенной невязки [28]

$$\int_V \left\{ \lambda(M) \text{grad } T(M) \text{ grad } w(M) + [\beta(M)T(M) - q_V(M)]w(M) \right\} dV + \int_{S_2} \left\{ [\beta(N)T(N) - f_2(N)]w(N) \right\} dS = 0. \quad (4.3.48)$$

Если выбрать искомую зависимость  $T(M)$  в форме

$$T(M) = T^0(M) + \sum_{n=1}^{N_*} B_n w_n(M), \quad (4.3.49)$$

где  $T^0(M)$  и  $w_n(M)$  - непрерывные функции, удовлетворяющие соответственно первому граничному условию (4.3.43) и (4.3.39), то коэффи-

циенты  $B_n$  можно найти либо из условия минимума функционала (4.3.47), либо из (4.3.48), полагая  $w(M) = w_n(M)$ . И в том, и в другом случае для определения  $B_n$  получится система из  $N^*$  линейных алгебраических уравнений. При  $N_* \leq 3$  нетрудно получить для  $B_n$  аналитические выражения, которые в качестве аргументов включают теплофизические характеристики материала тела, его размеры и параметры условий теплообмена. Для  $N_* > 4$  такие выражения становятся слишком громоздкими и систему алгебраических уравнений целесообразно решать численно. При этом формула (4.3.49) по-прежнему дает приближенное аналитическое выражение для распределения температуры  $T(M)$  в теле, однако функциональная зависимость коэффициентов  $B_n$  от определяющих параметров утрачивается.

В нелинейных задачах стационарной теплопроводности для определения коэффициентов  $B_n$  используют нелинейную систему алгебраических уравнений, которую решают обычно численными методами с использованием ЭВМ [104].

#### 4.3.4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

При приближенном решении задач теплопроводности функции  $w_n(M)$  в формуле (4.3.40) или (4.3.49) не всегда удается задать в виде непрерывной зависимости от координат точки  $M$  во всем объеме  $V$  рассматриваемого тела. Но математические формулировки задач теплопроводности в интегральном виде (4.3.41), (4.3.47), (4.3.48) допускают представление искомого распределения температуры через кусочно-непрерывные функции, определенные не во всем объеме тела, а лишь в пределах его отдельных конечных областей. В этом состоит основная идея применения метода конечных элементов (МКЭ) для приближенного решения задач теплопроводности [85].

Так как под знаки интегралов по объему и поверхности тела в различных вариантах интегральной формулировки задачи теплопроводности входит искомое распределение температуры и компоненты его градиента, достаточно в простейшем варианте МКЭ в качестве кусочно-непрерывных функций  $w_n(M)$  рассматривать линейные функции от координат точки  $M \in V_\gamma$  в пределах каждого конечного элемента объемом  $V_\gamma$ , имеющего номер  $\gamma$ . Тогда в случае трехмерной задачи распределение температуры в пределах конечного элемента однозначно выражается через четыре значения температуры в точках, которые будут соответствовать вершинам тетраэдра, в случае двумерной задачи - через три значения в вершинах треугольника, а для одномерной задачи - через два значения на концах элемента в виде отрезка прямой.

Вместо (4.3.40) или (4.3.49) можно написать соответственно

$$T(M, t) = \sum_{n=1}^{N_*} T_n(t) w_n(M)$$

или

$$T(M) = \sum_{n=1}^{N_*} T_n w_n(M), \quad (4.3.50)$$

где  $N_*$  - общее число вершин (или узлов) конечных элементов, на которые условно разбивают рассматриваемое тело;  $T_n$  - неизвестные значения температуры в узлах.

Очевидно, что функция  $w_n(M)$  должна быть определена в пределах конечных элементов с объемами  $V_\gamma^{(n)}$ , имеющих общий узел с номером  $n$ , т.е. для точек  $M \in V_n$ , где  $V_n = \sum_\gamma V_\gamma^{(n)}$ .

Для одномерной задачи  $w_n(M)$  является треугольной функцией, равной единице в узле с номером  $n$  и нулю в узлах с номерами  $n-1$  и  $n+1$ . Для двумерной задачи  $w_n(M)$  - пирамидальная функция, равная нулю во всех узлах элементов, имеющих общий узел с номером  $n$ , за исключением этого узла, где она равна единице. Аналогичным образом строят функцию  $w_n(M)$  в случае трехмерной задачи.

В случае задачи нестационарной теплопроводности подставим первую формулу (4.3.50) в (4.3.41), приняв  $w(M) = w_m^y(M)$ ,  $m=1, 2, \dots, N_*$ . Тогда получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно узловых значений  $T_n(t)$ , которую можно представить в матричной форме

$$[C]\{\dot{T}\} + [\Lambda]\{T\} = \{Q\}. \quad (4.3.51)$$

Здесь  $\{T\}$  и  $\{\dot{T}\}$  - матрицы-столбцы  $N_* \times 1$  (векторы) значений температуры в узлах и их производных по времени;  $\{Q\}$  - матрица-столбец  $N_* \times 1$  (вектор) тепловых потоков, поступающих к узлам вследствие внутреннего тепловыделения и теплообмена с окружающей средой, причем для узла с номером  $m$

$$Q_m(t) = \sum_\gamma \left\{ \int_{V_\gamma^{(m)}} q_V(M, t) w_m^{(\gamma)}(M) dV + \int_{S_{2\gamma}^{(m)}} f_2(N, t) w_m^{(\gamma)}(N) dS \right\}, \quad (4.3.52)$$

$[C]$  и  $[\Lambda]$  - квадратные симметричные матрицы  $N_* \times N_*$  теплоемкости и теплопроводности с

компонентами соответственно

$$C_{mn} = \sum_\gamma \int_{V_\gamma^{(n)}} c(M) w_m^{(\gamma)}(M) w_n^{(\gamma)}(M) dV$$

и

$$\Lambda_{mn} = \sum_\gamma \left\{ \int_{V_\gamma^{(n)}} \lambda(M) \text{grad} w_m^{(\gamma)}(M) \text{grad} w_n^{(\gamma)}(M) dV + \int_{V_\gamma} b(M) w_m^{(\gamma)}(M) w_n^{(\gamma)}(M) dV + \int_{S_{2\gamma}^{(n)}} \beta(N) w_m^{(\gamma)}(N) w_n^{(\gamma)}(N) dS \right\}, \quad (4.3.53)$$

где  $S_{2\gamma}^{(n)}$  - участок поверхности элемента с номером  $\gamma$ , содержащего  $n$ -й узел, причем  $S_{2\gamma}^{(n)} \subset S_2$ . Эти формулы справедливы для любых допустимых функций  $w_m$ .

Если на части границы тела заданы условия I рода, то в матричном уравнении (4.3.51) нетрудно исключить строки, соответствующие тем узлам, в которых известны значения  $T$  и  $\dot{T}$ . После формирования матриц  $[C]$ ,  $[\Lambda]$  и вектора  $\{Q\}$  в (4.3.51) это матричное уравнение может быть решено относительно  $\{T\}$  численным интегрированием подобно тому, как решается уравнение для тела с однородной по объему температурой (см. 4.3.2). Пометим индексами  $k-1$  и  $k$  матрицы и векторы, компоненты которых относятся соответственно к началу и концу интервала времени  $\Delta t_k$ . Тогда вместо (4.3.51) можно записать конечно-разностное уравнение [28, 32]

$$\begin{aligned} [C]\{ \{T\}_k - \{T\}_{k-1} \} / \Delta t_k &= (1 - \eta) \{ \{Q\}_{k-1} - \\ &- [\Lambda]_{k-1} \{T\}_{k-1} \} + \eta \{ \{Q\}_k - [\Lambda]_k \{T\}_k \} \\ \text{и его решение в матричной форме} \\ \{T\}_k &= ([C] / \Delta t_k + \eta [\Lambda]_k)^{-1} \{ [C] \{T\}_{k-1} / \Delta t_k - \\ &- (1 - \eta) [\Lambda]_{k-1} \{T\}_{k-1} + (1 - \eta) \{Q\}_{k-1} + \eta \{Q\}_k \}, \end{aligned} \quad (4.3.54)$$

где параметр  $\eta$  выбирают в диапазоне  $0 \leq \eta \leq 1$ , а индекс матрицы  $[\Lambda]$  указывает на возможность изменение во времени коэффициентов в уравнении (4.3.26) и  $\beta$  в граничном условии (4.3.29). Наиболее точные результаты формула (4.3.54) дает при  $\eta=1/2$ .

Когда все или часть из величин  $c$ ,  $\lambda$ ,  $b$ ,  $q_V$  и  $\beta$  зависят от температуры, в (4.3.51) все или некоторые матрицы будут функциями компонентов  $\{T\}$ , т.е. матричное уравнение (4.3.51) станет

нелинейным. Тогда при численном интегрировании (4.3.51) на каждом интервале  $\Delta t_k$  необходимо решать систему нелинейных алгебраических уравнений (например, путем итераций, последовательно уточняя значения компонентов  $\{C\}$ ,  $\{\Lambda\}_k$  и  $\{Q\}_k$ ). Избежать решения такой системы можно при помощи трехслойной разностной схемы [28]

$$\frac{1}{2\Delta t}[C]_{k-1}(\{T\}_k - \{T\}_{k-2}) + \frac{1}{3}[\Lambda]_{k-1} \times \times (\{T\}_k + \{T\}_{k-1} + \{T\}_{k-2}) = \{Q\}_{k-1}, \quad (4.3.55)$$

в которой зависящие от температуры коэффициенты определяются по распределению температуры в момент времени  $t_{k-1}$ , соответствующий середине удвоенного интервала времени  $2\Delta t = t_k - t_{k-2}$ . Для определения  $\{T\}_k$  достаточно решить линейную систему алгебраических уравнений (4.3.55). В матричной форме это решение принимает вид

$$\{T\}_k = \left( \frac{3}{2\Delta t}[C]_{k-1} + [\Lambda]_{k-1} \right)^{-1} \left( \frac{3}{2\Delta t}[C]_{k-1}\{T\}_{k-2} - [\Lambda]_{k-1}(\{T\}_{k-1} + \{T\}_{k-2}) + 3\{Q\}_{k-1} \right).$$

В МКЭ выполняется закон сохранения энергии для конечных элементов, но он может нарушаться для отдельных узлов, что в процессе численного решения задачи нестационарной теплопроводности может привести к осцилляциям узловых значений температур. Избежать осцилляций можно путем диагонализации матрицы  $\{C\}$  [102].

Для стационарной задачи теплопроводности, когда в уравнении (4.3.26)  $\dot{T}(M, t) = 0$  и параметры в выражениях (4.3.26), (4.3.28) и (4.3.29) не зависят от времени, из условия минимума функционала (4.3.47) получается матричное уравнение

$$[\Lambda]\{T\} = \{Q\}, \quad (4.3.56)$$

в котором для компонентов  $[\Lambda]$  и  $\{Q\}$  остаются верными (4.3.53) и (4.3.52), а  $\{T\}$  является вектором постоянных во времени значений температуры в узлах конечных элементов. Решение уравнения (4.3.56)

$$\{T\} = [\Lambda]^{-1}\{Q\}$$

можно реализовать на ЭВМ, пользуясь стандартными программами [104]. В случае зависимости  $\lambda$ ,  $q_V$ ,  $b$  и  $\beta$  от температуры задача становится нелинейной. В некоторых случаях она может иметь вариационную формулировку [27], а в общем случае ее можно сформулировать при помощи интеграла взвешенной невязки. Для нелинейной задачи система уравнений вида (4.3.56) также будет нелинейной вследствие зависимости компонентов  $[\Lambda]$  и  $\{Q\}$  от температуры

и ее необходимо решать последовательными приближениями. При наличии вариационной формулировки нелинейной задачи, когда существует функционал с известными экстремальными свойствами, удается воспользоваться методом локальных вариаций [105]. Решение нелинейной задачи стационарной теплопроводности можно получить также методом установления, рассматривая искомое распределение температуры как итог нестационарного процесса теплопроводности при заданных неизменных во времени условиях теплообмена.

Если функцию  $w(M)$  в интеграле взвешенной невязки (4.3.48) заменить фундаментальным решением  $w(M, M_0)$ , удовлетворяющим уравнению  $\lambda \nabla^2 w(M, M_0) + 4\pi \delta(M, M_0) = 0$ , то (4.3.48) переходит в интегральное уравнение [28]

$$\Omega(M_0)T(M_0) = \int_V q_V(M)w(M, M_0)dV + \int_S \left[ \frac{\partial T(N)}{\partial n(N)} w(N, M_0) - T(N) \frac{\partial w(N, M_0)}{\partial n(N)} \right] dS, \quad (4.3.57)$$

причем  $\Omega(M_0)$  - телесный угол, под которым видно тело объемом  $V$  из точки  $M_0 \in S$  (при  $M_0 \in V$   $\Omega(M_0) = 4\pi$ , а когда  $M_0$  находится вне тела,  $\Omega(M_0) = 0$ ). Уравнение (4.3.57) может быть решено численно при помощи метода граничных элементов (МГЭ) [12, 28]. Рассмотрим сначала случай, когда объемные источники теплоты в теле отсутствуют, т.е.  $q_V(M) \equiv 0$  при  $M \in V$ . Тогда (4.3.57) примет вид

$$\Omega(M_0)T(M_0) + \int_S T(N)q^*(N, M_0)dS = \int_S q(N)w(N, M_0)dS, \quad (4.3.58)$$

где

$$q(N) = \lambda \frac{\partial T(N)}{\partial n(N)}; \quad q^*(N, M_0) = \lambda \frac{\partial w(N, M_0)}{\partial n(N)}.$$

Поверхность тела  $S$  разобьем на граничные элементы с общим числом узлов  $N_T$  и представим распределение температуры в виде

$$T(N) = \sum_{j=1}^{N_T} T_j w_j(N), \quad N \in S, \quad (4.3.59)$$

где  $T_j$  - температура  $j$ -го узла;  $w_j(N)$  - кусочно-непрерывные функции,  $N \in S$ . Совмещая точку  $M_0$  с  $i$ -м узлом, вместо (4.3.58) получим матричное уравнение

$$[H]\{T\} = [G]\{q\}, \quad (4.3.60)$$

где  $\{T\}$  и  $\{q\}$  - матрицы  $N_\Gamma \times 1$  (векторы-столбцы) с компонентами соответственно  $T_j$  и  $q_j$ , а  $[H]$  и  $[G]$  - квадратные матрицы  $N_\Gamma \times N_\Gamma$  с компонентами соответственно:

$$H_{ij} = \int_S q_i^*(N) w_j(N) dS, \quad i \neq j;$$

$$H_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_\Gamma} H_{ij}; \quad G_{ij} = \int_S w_i(N) w_j(N) dS.$$

Таким образом, уравнение (4.3.60) связывает между собой узловые значения  $T_j$  и  $q_j$ . Но с учетом второго граничного условия (4.3.43)  $q_j$  на участках  $S_2$  поверхности можно выразить через  $T_j$ , т.е. общее число неизвестных в (4.3.60) не превышает  $N_\Gamma$  и их значения могут быть найдены, а затем для любой точки  $M_0 \in V$  вычислено согласно (4.3.58) значение

$$T(M_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{N_\Gamma} \left[ q_j \int_S w_j(N, M_0) w_j(N) dS - T_j \int_S q^*(N, M_0) w_j(N) dS \right].$$

В более общем случае стационарной задачи, когда  $q_V(M) \neq 0$  при  $M \in V$ , в правую часть матричного уравнения (4.3.60) войдет дополнительно слагаемое в виде вектора тепловых нагрузок, компоненты которого выражаются через интегралы по объему тела. Для нелинейной стационарной задачи МГЭ может быть использован в сочетании с процедурой последовательных приближений [12, 28]. В случае применения МГЭ к решению нестационарной задачи теплопроводности требуется либо использование интегрального преобразования Лапласа, либо введение функций источника, либо предварительный переход к конечным разностям по времени [12, 28].

Распространенным численным методом решения дифференциального уравнения теплопроводности является метод конечных разностей [27, 60, 83]. Формально он базируется на приближенной замене в дифференциальном уравнении и граничных условиях производных разностями соотношениями между значениями температур в узлах конечно-разностной сети. В итоге для каждого узла с неизвестным значением температуры получается алгебраическое уравнение, которое для задачи стационарной теплопроводности может быть также получено из условия баланса тепловых потоков в дискретной модели тела, состоящей из теплопроводящих стержней [27]. Методы решения таких уравнений хорошо разработаны [84], а для их реализации в матема-

тическом обеспечении современных ЭВМ предусмотрены стандартные программы [4, 84, 104]. Алгебраическому уравнению для каждой узловой точки можно дать вероятностную интерпретацию и использовать для решения задачи метод статистического моделирования (метод Монте-Карло) [25].

В уравнении теплопроводности можно аппроксимировать конечными разностями производные не по всем независимым переменным. В итоге получится система дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных). Если удается получить аналитическое решение такой системы, то оно будет приближенным решением задачи, так как при конечно-разностной аппроксимации внесена погрешность в математическое описание процесса теплопроводности. Однако обычно такой прием частичной замены производных конечными разностями, известный как метод прямых [27], используют для решения полученной системы уравнений одним из эффективных численных методов. Например, для задачи нестационарной теплопроводности аппроксимация производных по пространственным координатам переводит уравнение в частных производных в систему обыкновенных дифференциальных уравнений (в общем случае нелинейных), которая может быть решена методами численного интегрирования Эйлера-Коши, Рунге-Кутта, Адамса и т.п. [4, 104]. Такую же систему обыкновенных дифференциальных уравнений получают из условия баланса тепловых потоков в дискретной модели тела, состоящей из теплоемких масс и теплопроводящих стержней [27].

Среди методов математического моделирования температурных полей следует отметить методы, основанные на электротепловой аналогии [46, 53]. Их эффективность объясняется сравнительной простотой и достаточно высокой точностью измерения и задания параметров электрических схем, что важно при экспериментальном решении задачи. Возможности электрического моделирования существенно расширяются при комбинировании аналоговых и цифровых вычислительных машин [62].

#### Глава 4.4

### ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ

Для анализа работоспособности теплонапряженных элементов конструкций, помимо данных о их температурном состоянии, необходимо располагать информацией о напряженно-деформированном состоянии, найденном с учетом реальных механических свойств конструктивных материалов. Получение этой информации в общем случае связано с постановкой и решением соответствующих задач термоупругости, термопластичности или термоползучести в зависимос-

ти от упругого или неупругого поведения материала конструкции. Если материал работает в упругой области и энергия его деформирования составляет малую долю внутренней энергии (см.п. 4.2.2), то расчет напряженно-деформированного состояния теллонапряженных конструктивных элементов сводится, по существу, к решению задачи по определению термоупругих напряжений при заданном температурном состоянии этих элементов.

**4.4.1. ТИПОВЫЕ РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ И ПОСТАНОВКА ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТЕРМОУПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ**

Для элементов сравнительно простой конфигурации в большинстве важных для инженерной практики случаев искомые параметры напряженно-деформированного состояния удается непосредственно связать с температурным состоянием конструкции, действующими на нее нагрузками и условиями ее закрепления. Примером подобных элементов конструкций являются стержневые элементы, под которыми будем понимать достаточно протяженные в одном направлении элементы конструкций. Для оценки работоспособности таких элементов допустимо учитывать влияние лишь однородного нормального напряжения в их поперечном сечении, т.е. считать, что их материал находится в одноосном напряженном состоянии. К такой расчетной схеме с учетом тех или иных допущений удается свести довольно большую группу реальных теллонапряженных конструктивных элементов.

Простейшим примером этой расчетной схемы является стержень длиной  $l$  с постоянной площадью  $F$  поперечного сечения и жестко закрепленного торцами. Если стержень был закреплен при температуре  $T_0$  и в его поперечном сечении при этом возникло однородное относительное удлинение  $\epsilon_0$ , то последующие изменения температуры  $T$  не приведут к изменению значения полной деформации  $\epsilon$ , т.е.  $\epsilon = \epsilon_0 = \text{const}$ . Это условие дает возможность определить нормальное напряжение  $\sigma$  в поперечном сечении стержня при любой заданной программе изменения температуры.

В случае линейно упругой работы материала стержня и однородного изменения температуры до значения  $T$  имеем

$$\sigma = E(T) \left( \epsilon_0 - \epsilon^{(T)} \right), \quad (4.4.1)$$

где  $E(T)$  - модуль упругости материала при температуре  $T$ ;  $\epsilon^{(T)}$  - температурная деформация, отсчитываемая от температуры  $T_0$ . Очевидно, что  $\sigma_0 = E(T_0)\epsilon_0$  представляет собой начальное напряжение в стержне.

Если площадь поперечного сечения стержня  $F(x)$  и температура  $T(x)$  переменны по длине стержня и зависят от продольной координаты  $x$ ,

то вместо (4.4.1) при  $\epsilon_0 = \epsilon_0(x)$  из условия закрепления торцов

$$\int_0^l [\epsilon(x) - \epsilon_0(x)] dx = 0 \quad (4.4.2)$$

получим

$$\sigma(x) = \frac{P}{F(x)}; \quad P = \frac{\int_0^l [\epsilon^{(T)}(x) - \epsilon_0(x)] dx}{\int_0^l dx / \{E[T(x)]F(x)\}}, \quad (4.4.3)$$

где  $P$  - постоянное по длине стержня нормальное усилие в его поперечном сечении.

Перед анализом работоспособности стержня в общем случае может потребоваться предварительно найти  $\epsilon_0(x)$  и соответствующее ему распределение  $\sigma_0(x)$  в момент закрепления торцов стержня при заданном распределении начальной температуры. Если перед закреплением торцов стержень был нагружен силой  $P_0$ , то

$$\sigma_0(x) = \frac{P_0}{F(x)}; \quad \epsilon_0(x) = \frac{P_0}{E[T_0(x)]F(x)} + \epsilon^{(T)}(x). \quad (4.4.4)$$

Если же при закреплении один торец стержня получил перемещение относительно другого торца, то из условия

$$u^0 = \int_0^l \epsilon_0(x) dx \quad (4.4.5)$$

получим согласно (4.4.3)

$$\sigma_0(x) = \frac{P_0}{F(x)}; \quad P_0 = \frac{\int_0^l \epsilon^{(T)}(x) dx - u^0}{\int_0^l dx / \{E[T_0(x)]F(x)\}}, \quad (4.4.6)$$

а затем при помощи (4.4.4) - распределение  $\epsilon_0(x)$ .

Пусть два стержня одинаковой длины  $l$ , выполненных из различных материалов, жестко скреплены между собой при температуре  $T_0$  так, что при закреплении первый стержень предварительно был удлинен на величину  $u_0$ , и их торцы свободны и имеют равные перемещения, а сами стержни не изгибаются и не выпучиваются. При изменении температуры первого стержня до  $T_1$ , а второго - до  $T_2$  в их поперечных сечениях возникают нормальные напряжения [81]



$$\sigma_1 = -kE_1\varepsilon_1^{(T)}; \quad \sigma_2 = -\sigma_1 F_1 / F_2, \quad (4.4.7)$$

где

$$k = \frac{1 - \varepsilon_2^{(T)} / \varepsilon_1^{(T)} - u_0 / (\varepsilon_1^{(T)} l)}{1 + E_1 F_1 / (E_2 F_2)}; \quad (4.4.8)$$

$E$ ,  $F$  и  $\varepsilon^{(T)}$  - модуль упругости, площадь поперечного сечения и отсчитываемая от состояния при температуре  $T_0$  температурная деформация, индексы 1 и 2 относятся соответственно к первому и второму стержням. Ясно, что при  $u_0 = (\varepsilon_1^{(T)} - \varepsilon_2^{(T)})l$  из формулы (4.4.8) следует  $k=0$  и напряжения в стержнях отсутствуют.

Если стержни скреплены по всей длине абсолютно жесткими болтами (или заклепками), поставленными в отверстия без зазоров, то срезающие силы  $P = \sigma_1 F_1 = -\sigma_2 F_2$  воспринимают лишь крайние болты (или заклепки). Для податливых болтовых (или заклепочных) соединений срезающие силы перераспределяются, однако наиболее нагруженными остаются крайние болты (или заклепки) [81].

Пусть длинный стержень имеет произвольное по форме, но неизменное по длине поперечное сечение площадью  $F$ , распределение температуры в котором определяется зависимостью  $T = f(y, z)$ , где  $y$  и  $z$  - центральные оси этого поперечного сечения. Температуру  $T$  отсчитывают от значения  $T_0$ , при котором напряжения в стержне отсутствовали. Тогда в любом поперечном сечении, достаточно удаленном от свободных торцов стержня, возникнет распределение нормальных напряжений [17]

$$\begin{aligned} \sigma_x = & -E\varepsilon^{(T)}(y, x) + \frac{E}{F} \int \varepsilon^{(T)} dF + \\ & + \frac{E}{J_y J_z - J_{yz}^2} \left\{ (y J_y - z J_{yz}) \int \varepsilon^{(T)} y dF + \right. \\ & \left. + (z J_z - y J_{yz}) \int \varepsilon^{(T)} z dF \right\}. \quad (4.4.9) \end{aligned}$$

Здесь модуль упругости  $E$  имеет постоянное значение,  $J_y$  и  $J_z$  - моменты инерции сечения относительно осей  $y$  и  $z$ ;  $J_{yz}$  - центробежный момент инерции. Если закрепление торцов стержня препятствует его изгибу, но допускает их перемещения в продольном направлении, то в формуле (4.4.9) следует отбросить слагаемое с фигурными скобками. В случае закрепления торцов, запрещающего их продольные перемещения, но допускающего его изгиб, следует опустить второе слагаемое в правой части формулы (4.4.9), которая становится справедливой для

всех поперечных сечений стержня. Если же запрещены и изгиб стержня, и продольные перемещения торцов, то в правой части формулы (4.4.9) остается лишь первое слагаемое. Аналогичным образом могут быть определены термоупругие напряжения в криволинейных стержнях и кольцах [81].

В случае неравномерно нагретой по толщине  $h$  свободной пластины с постоянным значением модуля упругости  $E$  имеем [17]

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = & -\frac{E\varepsilon^{(T)}(z)}{1 - \nu} + \frac{E}{h(1 - \nu)} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon^{(T)} dz + \\ & + \frac{12Ez}{h^3(1 - \nu)} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon^{(T)} z dz, \quad (4.4.10) \end{aligned}$$

где  $\varepsilon^{(T)}(z)$  - переменная по толщине пластины температурная деформация, отсчитываемая от состояния при температуре  $T_0$ , в котором напряжения отсутствовали;  $z$  - координата, отсчитываемая от среднего слоя пластины по нормали к ее поверхности;  $x$  и  $y$  - ортогональные оси, лежащие в плоскости среднего слоя пластины;  $\nu$  - коэффициент Пуассона. Формула (4.4.10) верна для точек пластины, достаточно удаленных от ее краев. Если закрепление краев препятствует изгибу пластины, но допускает их перемещения параллельно ее плоскости, то в правой части этой формулы следует отбросить третье слагаемое. Когда запрещены перемещения краев пластины параллельно ее плоскости, но допускается изгиб пластины, следует отбросить второе слагаемое в правой части формулы (4.4.9), которая при этом становится справедливой для всех точек пластины. Наконец, при запрещении и перемещений краев и изгиба пластины в правой части формулы (4.4.10) остается лишь первое слагаемое.

#### 4.4.2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Задачи несвязанной теории упругих температурных напряжений в случае зависящих от температуры свойств материала относят к классу задач теории упругости неоднородных тел. При неоднородном распределении температуры  $T = T(x_k, t)$  коэффициенты Ляме  $\lambda = \lambda(T)$ ,  $\mu = \mu(T)$  и уравнения движения (4.2.4) для малых деформаций принимают вид [54]

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i + \varepsilon_{kk} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (3\lambda + 2\mu)\varepsilon^{(T)}\delta_{ij} \right] + \rho b_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (4.4.11)$$

а краевые условия

$$t = 0 \quad u_i(x_k, 0) = u_i^0, \quad \partial u_i(x_k, 0) / \partial t = \dot{u}_i^0; \quad (4.4.12)$$

$$\left[ \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - (3\lambda + 2\mu)\varepsilon^{(T)}\delta_{ij} \right] \times \\ \times n_j = p_i(x_k)$$

на поверхности  $S_p$ ;  $u_i(x_k, t) = \varphi_i(x_k, t)$  на поверхности  $S_u$ , где  $S_p, S_u$  - части граничной поверхности тела, на которых заданы соответственно компоненты вектора внешней нагрузки  $p_i(x_k, t)$  и перемещения  $\varphi_i(x_k, t)$ .

Уравнения движения (4.4.11) и граничные условия (4.4.12) на поверхности  $S_p$  можно представить в виде [54]

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i + \varepsilon_{kk} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \\ + \rho b_i' = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}; \quad (4.4.13)$$

$$\left[ \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j = p_i'(x_k, t),$$

где  $b_i' = b_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (3\lambda + 2\mu)\varepsilon^{(T)}\delta_{ij} \right] / \rho;$

$$p_i' = p_i + (3\lambda + 2\mu)\varepsilon^{(T)}\delta_{ij}n_j,$$

т.е. рассматриваемая задача совпадает с задачей теории упругости неоднородных тел с модифицированными выражениями для векторов массовой  $b_i'$  и поверхностной нагрузки  $p_i'$ . Если не учитывать зависимость свойств от температуры, то в выражениях (4.4.11) и (4.4.12) пропадают третье и четвертое слагаемые в левой части. В дальнейшем будут рассматриваться методы решения задач теории температурных упругих напряжений применительно к квазистатическим задачам, когда распределение температуры зависит от времени, но не будут учитываться инерционные члены в уравнениях движения.

К основным методам решения квазистатических трехмерных задач теории упругих температурных напряжений относят методы, основанные на использовании *термоупругого потенциала перемещений, вариационных принципов, а также методы возмущений, Майзеля* и др. [43, 54, 57, 68, 73]. Для решения плоских задач могут быть ис-

пользованы *функция напряжения, методы теории функций комплексного переменного* [43, 54, 57, 68, 73]. Наряду с указанными методами для решения конкретных задач используют также традиционные методы математической физики.

При решении задачи об упругих температурных напряжениях в случае независимости свойств материала от температуры и отсутствия инерционных сил в уравнениях движения (4.4.13) компоненты вектора перемещений представляют в виде суммы

$$u_i(x_k) = u_i^*(x_k) + u_i^{(F)}(x_k) + u_i^{(T)}(x_k). \quad (4.4.14)$$

Вектор  $u^*$  представляют следующим образом [43, 73]:

$$u^* = 4(1 - \nu)\mathbf{B} - \text{grad}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{r} + B_0), \quad (4.4.15)$$

где  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор рассматриваемой точки;  $\mathbf{B}, B_0$  - гармонические вектор и скаляр, т.е.  $\nabla^2 \mathbf{B} = 0, \nabla^2 B_0 = 0$ . Если объемные силы имеют потенциал  $\Pi$ , т.е.  $\mathbf{b} = \text{grad} \Pi / \rho$ , то частное решение  $u^{(F)} = \text{grad} \Phi^{(F)}$ , где скалярная функция  $\Phi^{(F)}$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \Phi^{(F)} = -\frac{\Pi}{\lambda + 2\mu}. \quad (4.4.16)$$

Частное решение  $u^{(T)} = \text{grad} \Phi$ , где скалярная функция  $\Phi$  является решением уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha^{(T)}(T - T_0), \quad (4.4.17)$$

носит название термоупругого потенциала перемещений.

Последовательность решения задачи должна быть следующей: сначала при известном распределении температуры определяют термоупругий потенциал перемещений  $\Phi$ , затем  $u^{(T)}$ . Далее вычисляют отвечающие частным решениям для перемещений температурные напряжения. Затем на это решение накладывают решение соответствующей краевой задачи теории упругости, содержащее необходимое число постоянных интегрирования для удовлетворения граничных условий из (4.4.12).

Вариационные принципы Лагранжа, Кастиллиано, Хеллингена-Рейсснера и др. [14], учитывающие температурные деформации (см. п.4.2.5), также могут быть использованы при аналитическом решении задач теории упругих температурных напряжений.

В соответствии с вариационным принципом Лагранжа среди всех геометрически возможных положений равновесия в действительности осуществляется только то, для которого функционал

$$\Phi_{\varepsilon}(u_i) = \int_V \left( \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk} \varepsilon_{nn} \right) dV - \int_V \rho b_i u_i dV - \int_{S_p} p_i u_i dS - \int_V (3\lambda + 2\mu) \varepsilon^{(T)}_{kk} dV \quad (4.4.18)$$

достигает минимума, т.е.  $\delta\Phi_{\varepsilon} = 0$  ( $\delta^2\Phi_{\varepsilon} > 0$ ). При вычислении первой вариации функционала (4.4.18) полагают, что массовые и поверхностные силы и температура не изменяются, а рассматриваемое тело односвязно, так как только в односвязном теле заведомо обеспечена однозначность поля перемещений [71].

При использовании вариационного принципа (4.4.18) приближенно задают вектор перемещений, удовлетворяющий условиям совместности деформаций и главным краевым условиям (заданным перемещениям на граничной поверхности  $S_u$ ),

$$u_i^{(n)}(x_k) = \varphi_i^0(x_k) + a_i^{(1)} \varphi_i^{(1)}(x_k) + a_i^{(2)} \varphi_i^{(2)}(x_k) + \dots + a_i^{(n)} \varphi_i^{(n)}(x_k). \quad (4.4.19)$$

Далее, (4.4.19) подставляют в функционал Лагранжа  $\Phi_{\varepsilon}(u_i)$  и отыскивают его минимум из условий

$$\sum_{j=1}^n \partial\Phi_{\varepsilon}(u_i) / \partial a_i^{(j)} = 0.$$

Решение получающейся в результате этой процедуры системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_i^{(j)}$  дает возможность определить компоненты вектора перемещений  $u_i(x_k)$ , а затем деформаций и напряжений. Функции  $\varphi_i^{(j)}(x_n)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) называют координатными, они должны удовлетворять следующим условиям [64]: при любом натуральном  $n$  и при любых численных значениях коэффициентов  $a_i^{(j)}$  функция  $u_i^{(n)}(x_k)$  должна принадлежать к классу допустимых; какова бы ни была допустимая функция  $u_i^{(n)}(x_k)$ , можно выбрать натуральное число  $n$  и численные коэффициенты  $a_i^{(j)}$  так, чтобы  $u_i^{(n)}(x_k)$  достаточно мало отличались от функции  $u_i(x_k)$ . Последнее требование носит название условия полноты.

В соответствии с вариационным принципом Кастилиано среди всех статически допустимых состояний равновесия в действительности осуществляется только то, для которого функционал

$$\Phi_{\sigma}(\sigma_{ij}) = \int_V \left( \mu' \sigma_{ij} \sigma_{ij} + \frac{\lambda'}{2} \sigma_{kk} \sigma_{nn} \right) dV + \int_V \varepsilon^{(T)} \sigma_{kk} dV - \int_{S_u} p_i u_i dS \quad (4.4.20)$$

достигает минимума, т.е.  $\delta\Phi_{\sigma} = 0$  ( $\delta^2\Phi_{\sigma} > 0$ ), где  $\mu' = 1 / (4\mu)$ ,  $\lambda' = -\lambda / [2\mu(3\lambda + 2\mu)]$ . Задаваемое приближенно поле тензора напряжений аналогично (4.4.19) должно удовлетворять уравнениям равновесия.

Аналитическое решение динамических задач теории температурных напряжений может быть получено при помощи принципа Гамильтона [71].

При изложении метода возмущений предполагают, что модуль упругости  $E = E(T)$ , температурная деформация  $\varepsilon^{(T)} = \varepsilon^{(T)}(T)$ , а коэффициент Пуассона  $\nu = \text{const}$  и  $b_i = 0$ . Уравнения равновесия в этом случае имеют вид

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial x_i} - \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial \varepsilon^{(T)}}{\partial x_i} + \varepsilon R_j \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \varepsilon^{(T)} \delta_{ij} \right] = 0, \quad (4.4.21)$$

$$\text{где } R_j = \Phi(T) \partial T / \partial x_j; \quad \varepsilon \Phi(T) \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial x_j},$$

к которым должны быть присоединены соответствующие краевые условия.

Решение уравнений (4.4.21) с краевыми условиями из (4.4.12) на поверхности  $S_p$  ищут в виде степенного ряда [54]

$$u_i(x_k) = u_i^{(0)}(x_k) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_i^{(n)}(x_k), \quad (4.4.22)$$

т.е. получают последовательность краевых задач для  $u_i^{(0)}(x_k)$

$$\nabla^2 u_i^{(0)} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_{kk}^{(0)}}{\partial x_i} = \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial \varepsilon^{(T)}}{\partial x_i};$$

$$\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^{(0)} \delta_{ij} \right] n_j =$$

$$= \frac{1+\nu}{E} p_i + \frac{1+\nu}{1-2\nu} \varepsilon^{(T)} n_i \quad \text{на } S_p;$$

для  $u_i^{(1)}(x_k)$

$$\nabla^2 u_i^{(1)} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_{kk}^{(1)}}{\partial x_i} = -R_j \left[ \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^{(0)} \delta_{ij} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \varepsilon^{(T)} \delta_{ij} \right];$$

$$\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^{(0)} \delta_{ij} \right] n_j = 0$$

на  $S_p$

и последовательность краевых задач для  $u_i^{(n)}$ ,  $n=2,3,\dots$ ,

$$\nabla^2 u_i^{(n)} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_{kk}^{(n)}}{\partial x_i} = -R_j \left[ \frac{\partial u_i^{(n-1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(n-1)}}{\partial x_i} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^{(n-1)} \delta_{ij} \right];$$

$$\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^{(n)} \delta_{ij} \right] n_j = 0 \text{ на } S_p.$$

Компоненты тензора напряжений выражаются через решения соответствующих краевых задач теории упругости для однородного тела:

$$\sigma_{ij} = \frac{E(T)}{1+\nu} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^{(0)} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \varepsilon^{(T)} \delta_{ij} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^{(n)} \delta_{ij} \right] \right\}.$$

Метод Майзеля [43] основан на обобщении теоремы о взаимности работ на случай статической и квазистатической задач теории упругих температурных напряжений. Суть его заключается в том, что определение температурных напряжений, деформаций и перемещений сводится к задаче изотермической теории упругости о напряженном состоянии упругого тела под действием единичной сосредоточенной силы.

В теории упругих температурных напряжений при решении некоторых классов задач можно использовать представление компонентов тензора напряжений через те или иные функции напряжений. В случае трехмерной задачи и зависящих от температуры механических свойств материала использование функций напряжений Максвелла, Бельтрами и др. [57, 71] для получения решения невозможно. Для обобщенного плоского напряженно-деформированного состо-

яния при независимых от температуры свойствах материала функцию напряжений  $F$  вводят по формулам [43, 57]:

$$\sigma_{11} = \partial^2 F / \partial x_2^2; \quad \sigma_{22} = \partial^2 F / \partial x_1^2; \\ \sigma_{12} = -\partial^2 F / \partial x_1 \partial x_2. \quad (4.4.23)$$

Уравнения равновесия при использовании соотношений (4.4.23) удовлетворяются тождественно. Из одного (для обобщенного плоского напряженно-деформированного состояния) условия совместности деформаций следует бигармоническое уравнение для функции напряжений

$$\nabla^2 \nabla^2 F + E_1 \alpha_1^{(T)} \nabla^2 T = 0, \quad (4.4.24)$$

где  $E_1 = E$ ;  $\alpha_1^{(T)} = \alpha^{(T)}$  - для плоского напряженного состояния;  $E_1 = (1-\nu^2)E$ ;  $\alpha_1^{(T)} = (1+\nu)\alpha^{(T)}$  - для плоского деформированного состояния;  $E$  - модуль упругости;  $\nu$  - коэффициент Пуассона;  $\alpha^{(T)} = \partial \varepsilon^{(T)} / \partial T$  - температурный коэффициент линейного расширения.

Решение бигармонического уравнения (4.4.24) ищут в виде суммы  $F = F^* + F^{(T)}$  общего решения однородного бигармонического уравнения  $\nabla^2 \nabla^2 F^* = 0$  и частного решения неоднородного уравнения  $\nabla^2 F^{(T)} = E_1 \alpha_1^{(T)} \times (T - T_0)$ . Граничные условия для функции напряжений в случае односвязного тела будут следующие:  $F = 0$ ,  $\partial F / \partial n = 0$  на контуре  $L$  с внешней нормалью  $n$ , ограничивающем область. Особенности применения функции напряжений для многосвязного тела рассмотрены в [43].

Теория функций комплексного переменного нашла применение для решения плоской задачи теории упругих температурных напряжений при стационарном распределении температуры. В этом случае функция напряжений является бигармонической [см.(4.4.24)]. Последовательность решения задачи определения температурных напряжений этим методом можно найти в [43, 68, 76].

#### 4.4.3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТЕРМОУПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ

Наиболее гибким и универсальным численным методом решения задач теории упругих температурных напряжений является *метод конечных элементов* (МКЭ). Особенности этого метода без потери общности изложения можно рассмотреть применительно к плоской и осесимметричной задачам термоупругости для элементов конструкций, выполненных из линейно-упругого ортотропного материала.

Для вывода основных соотношений в случае *обобщенного плоского напряженно-деформированного состояния* при заданном распределении

температуры и определенных условиях закрепления или нагружения торцов цилиндрического тела полагают, что оси  $x_1$  и  $x_2$  прямоугольной системы координат лежат в плоскости поперечного сечения тела и совпадают с осями ортотропии материала. Кроме того, осевая деформация  $\epsilon_{33} = \text{const}$  и, следовательно, перемещение вдоль образующей цилиндрического тела  $u_3 = \epsilon_{33}x_3$ . В частном случае неподвижно закрепленных торцов  $\epsilon_{33} = 0$  и  $u_3 = 0$ , а в общем случае  $\epsilon_{33}$  определяют из условий закрепления или нагружения торцов.

Так как поперечные сечения тела остаются после деформирования плоскими, перемещения  $u_1$  и  $u_2$  зависят лишь от  $x_1$  и  $x_2$  и деформации сдвига

$$\gamma_{13} = \partial u_3 / \partial x_1 + \partial u_1 / \partial x_3 = 0;$$

$$\gamma_{23} = \partial u_3 / \partial x_2 + \partial u_2 / \partial x_3 = 0.$$

Для линейно-упругого ортотропного материала в этом случае

$$\sigma_{13} = 0; \quad \sigma_{23} = 0;$$

$$\sigma_{33} = E_3 \left( \epsilon_{33} - \alpha_3 \Delta T + \frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{22} \right)$$

и далее, как следует из (4.2.19),

$$\epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} (1 - \nu_{13}\nu_{31}) - \frac{\sigma_{22}}{E_2} (\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}) + \left( \alpha_1 + \nu_{31}\alpha_3 \right) \Delta T - \nu_{31}\epsilon_{33}; \quad (4.4.25)$$

$$\epsilon_{22} = -\frac{\sigma_{11}}{E_1} (\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}) + \frac{\sigma_{22}}{E_2} (1 - \nu_{23}\nu_{32}) + \left( \alpha_2 + \nu_{32}\alpha_3 \right) \Delta T - \nu_{32}\epsilon_{33},$$

где  $E_1, E_2, E_3$  - модули упругости в направлениях осей ортотропии;  $\nu_{12}, \nu_{21}$  - коэффициенты Пуассона, характеризующие уменьшение поперечного сечения образца в одном направлении ортотропии (второй индекс) при растяжении в другом направлении ортотропии (первый индекс);  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  - температурные коэффициенты линейного расширения в направлениях осей ортотропии;  $\Delta T = T(x_1, x_2) - T_0$ . Касательное напряжение  $\sigma_{12} = \mu_{12}\gamma_{12}$ , где  $\mu_{12}$  - модуль сдвига в плоскости  $x_1, x_2$ . Тогда связь между напряжениями и деформациями можно записать в следующей матричной форме:

$$\{\sigma\} = [D] \{ \epsilon \} - \{ \epsilon_0 \},$$

где

$$\{\sigma\}^T = \{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} \};$$

$$\begin{aligned} \{ \epsilon \}^T &= \{ \epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \gamma_{12} \}; \\ \{ \epsilon_0 \}^T &= \left\{ \left( \alpha_1 + \nu_{31}\alpha_3 \right) \Delta T - \nu_{31}\epsilon_{33}, \right. \\ &\quad \left. \left( \alpha_2 + \nu_{32}\alpha_3 \right) \Delta T - \nu_{32}\epsilon_{33}, 0 \right\}; \end{aligned}$$

$[D]$  - симметричная матрица (3×3) коэффициентов упругости

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}$$

с компонентами

$$D_{11} = E_1 (1 - \nu_{23}\nu_{32}) / z;$$

$$D_{22} = E_2 (1 - \nu_{13}\nu_{31}) / z;$$

$$D_{12} = E_1 (\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}) / z = E_2 (\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}) / z;$$

$$z = 1 - \nu_{21}\nu_{12} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31};$$

$$D_{33} = \mu_{12}.$$

Вариационная формулировка данной задачи будет содержать функционал

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon &= \Phi_1 - \int_F \left( f_1^0 u_1 + f_2^0 u_2 \right) dF - \\ &\quad - \int_{\Gamma'} \left( p_1^0 u_1 + p_2^0 u_2 \right) d\Gamma, \quad (4.4.26) \end{aligned}$$

где

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \int_F \left( \{ \epsilon \}^{(T)} - \{ \epsilon_0 \}^{(T)} \right) [D] \left( \{ \epsilon \} - \{ \epsilon_0 \} \right) dF;$$

$F, \Gamma'$  - площадь поперечного сечения тела и часть контура этого сечения, на которых заданы соответственно объемные распределенные силы с составляющими  $f_1^0$  и  $f_2^0$  и поверхностные распределенные силы с составляющими  $p_1^0$  и  $p_2^0$ . Функционал (4.4.26) допустимо рассматривать на непрерывных распределениях составляющих перемещения  $u_1$  и  $u_2$ , удовлетворяющих кинематическим граничным условиям на части контура  $\Gamma'$ :

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= u_1^0(x_1, x_2); \quad u_2(x_1, x_2) = u_2^0(x_1, x_2); \\ M(x_k) &\in \Gamma''; \quad k = 1, 2. \quad (4.4.27) \end{aligned}$$

В простейшем варианте МКЭ поперечное сечение тела представляют совокупностью треугольных элементов с линейными в пределах каждого элемента с номером  $e$  и площадью  $F_e$  распределениями перемещений  $u_1^e$  и  $u_2^e$ , однозначно выражаемыми через значения  $u_{1i}$  и  $u_{2i}$  соответствующих перемещений в узлах элемента (вершинах треугольника):

$$u_1(x_1, x_2) = \sum_{i=l, m, n} w_i^e(x_1, x_2) u_{1i}; \quad (4.4.28)$$

$$u_2(x_1, x_2) = \sum_{i=l, m, n} w_i^e(x_1, x_2) u_{2i}, \quad M(x_k) \in F_e,$$

где  $l, m, n$  - номера узлов (вершин) элемента  $e$ ;  $w_i^e(x_1, x_2)$  - линейная функция формы треугольного элемента, зависящая от положения точки с координатами  $x_k$  относительно узла с номером  $i$ .

Из условия минимума функционала (4.4.26) с учетом соотношений (4.4.28) получают систему линейных алгебраических уравнений  $\partial \Phi_e / \partial u_{1j} = 0$ ;  $\partial \Phi_e / \partial u_{2j} = 0$ ;  $j = 1, 2, \dots, N_1$ , где  $N_1$  - число узлов конечно-элементной сетки в поперечном сечении тела, для которых значения  $u_{1j}$  и  $u_{2j}$  являются искомыми. Эту систему можно представить в матричной форме

$$[K]\{u\} = \{P\}. \quad (4.4.29)$$

Однако для формирования матрицы  $[K]$  и вектора-столбца  $\{P\}$  удобнее считать сначала число неизвестных перемещений  $u_{1j}$  и  $u_{2j}$  равным  $2N$ , где  $N$  - общее число узлов сетки конечных элементов. Тогда в уравнении (4.4.29)  $\{u\}$  - матрица  $(2N \times 1)$  (вектор-столбец) узловых значений перемещений  $u_{1j}$  и  $u_{2j}$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ ;  $[K]$  и  $\{P\}$  - квадратная симметричная матрица  $(2N \times 2N)$  жесткости и матрица  $(2N \times 1)$  (вектор-столбец) нагрузок, компоненты которых получают суммированием вкладов отдельных элементов.

Для элемента с номером  $e$  и номерами вершин  $l, m, n$  узловые значения перемещений представляют в виде вектора-столбца  $\{u^e\}$  с компонентами

$$\{u^e\}^T = \{u_{1l}, u_{2l}, u_{1m}, u_{2m}, u_{1n}, u_{2n}\},$$

а деформация - вектором-столбцом  $\{\varepsilon^e\}$  с компонентами

$$\{\varepsilon^e\}^T = \{\varepsilon_{11}^e, \varepsilon_{22}^e, \gamma_{12}^e\}.$$

Поскольку  $\varepsilon_{11} = \partial u_1 / \partial x_1$ ,  $\varepsilon_{22} = \partial u_2 / \partial x_2$ ,  $\gamma_{12} = \partial u_1 / \partial x_2 + \partial u_2 / \partial x_1$ , связь между  $\{\varepsilon^e\}$  и  $\{u^e\}$  можно установить при помощи матрицы  $(3 \times 6)$   $[B^e]$ , компоненты которой нетрудно найти с учетом формул (4.4.28):

$$[B^e] = [B_l^e, B_m^e, B_n^e]; \quad (4.4.30)$$

$$[B_i^e]^T = \begin{bmatrix} \partial w_i^e / \partial x_1 & 0 & \partial w_i^e / \partial x_2 \\ 0 & \partial w_i^e / \partial x_2 & \partial w_i^e / \partial x_1 \end{bmatrix}, \quad i = l, m, n,$$

причем

$$\partial w_l^e / \partial x_1 = f_l^e / (2F_e) = (x_{2m} - x_{2n}) / (2F_e);$$

$$\partial w_l^e / \partial x_2 = g_l^e / (2F_e) = (x_{1n} - x_{1m}) / (2F_e),$$

если вершины  $l, m, n$  в элементе с номером  $e$  расположены в направлении обхода против часовой стрелки. По координатам  $x_{1i}$  и  $x_{2i}$  вершин треугольника находят его площадь

$$F_e = (f_l^e g_m^e - f_m^e g_l^e) / 2.$$

Таким образом,

$$\{\varepsilon^e\} = [B^e] \{u^e\}. \quad (4.4.31)$$

С учетом формул (4.4.26) и (4.4.31) для симметричной матрицы  $(6 \times 6)$  жесткости элемента с номером  $e$  получают

$$[K^e] = \int_{F_e} [B^e]^T [D^e] [B^e] dF.$$

В рассматриваемом варианте МКЭ компоненты матрицы  $[B^e]$  постоянны в пределах элемента, а зависящие от температуры компоненты матрицы  $[D^e]$  определяют по средней для элемента температуре

$$T_e = (T_l + T_m + T_n) / 3,$$

поэтому

$$[K^e] = [B^e]^T [D^e] [B^e] F_e. \quad (4.4.32)$$

Матрицу жесткости элемента с узлами  $l, m, n$  можно представить также в виде

$$[K^e] = \begin{bmatrix} k_{ll}^e & k_{lm}^e & k_{ln}^e \\ k_{ml}^e & k_{mm}^e & k_{mn}^e \\ k_{nl}^e & k_{nm}^e & k_{nn}^e \end{bmatrix},$$

где каждая из подматриц  $(2 \times 2)$

$$[k_{ij}^e] = [B_i^e]^T [D^e] [B_j^e] F_e,$$

причем  $[k_{ij}^e] = [k_{ji}^e]$ . Такое представление более удобно для вычислений, поскольку позволяет непосредственно провести суммирование вкладов всех соседних элементов, содержащих узел  $i$ , в глобальную матрицу  $[K]$

$$[k_{ii}] = \sum_e [k_{ii}^e],$$

а также вклады элементов, содержащих сторону с узлами  $i$  и  $j$ ,

$$[k_{ij}] = \sum_e [k_{ij}^e]$$

В последнем случае таких элементов не более двух, а если узлы  $i$  и  $j$  лежат на контуре поперечного сечения тела, то сторона между ними принадлежит лишь одному элементу.

Компоненты глобальной матрицы жесткости  $[K]$ , расположенные на главной диагонали, должны быть положительны, а сумма компонентов в строке - равной нулю. Компоненты матрицы  $[K]$ , соответствующие номерам пар узлов, не принадлежащих одному элементу, равны нулю, поэтому она имеет ленточную структуру, причем ширина ленты, включающей ненулевые компоненты матрицы, зависит от способа нумерации узлов и в каждом конкретном случае может быть сведена к минимуму. Это позволяет экономить память ЭВМ, расходуя ее для хранения не всей матрицы, а лишь элементов ленты.

Вклад элемента в вектор нагрузки  $\{P\}$  согласно формулам (4.4.26), (4.4.28) и (4.4.31) будет

$$\{P^e\} = \left( [B^e]^T [D^e] \{ \varepsilon_0^e \} + \{ f^e \} \right) F_e + \{ p^e \} \quad (4.4.33)$$

или после расчленения для каждого узла с номером  $i$

$$\{P_i^e\} = \left( [B_i^e]^T [D^e] \{ \varepsilon_0^e \} + \{ f_i^e \} \right) F_e + \{ p_i^e \}.$$

Здесь

$$\{P^e\}^T = \{P_l^e, P_m^e, P_n^e\}, \quad \{p^e\}^T = \{p_l^e, p_m^e, p_n^e\};$$

$$\{f_i^e\}^T = \{f_{1l}^0 / 6 + f_{1m}^0 / 12 + f_{1n}^0 / 12, f_{2l}^0 / 6 + f_{2m}^0 / 12 + f_{2n}^0 / 12\},$$

$\{ \varepsilon_0^e \}$  - матрица (3×1) (вектор-столбец) начальной деформации с компонентами, осредненными в пределах элемента  $e$ ;  $f_{1l}^0$  и  $f_{2l}^0$  - значения составляющих  $f_1^0$  и  $f_2^0$  распределенных объемных сил в узле  $i$ . Компоненты матрицы (2×1) (вектора-столбца)  $\{P_i^e\}$  отличны от нуля, если

узел  $i$  принадлежит стороне  $\Gamma_{ij}$  граничного элемента  $e$ , на которой заданы распределенные поверхностные силы  $p_1^0$  и  $p_2^0$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \{P_i^e\}^T &= \\ &= \left\{ (p_{1i}^0 + p_{1j}^0 / 2) \Gamma_{ij} / 3, (p_{2i}^0 + p_{2j}^0 / 2) \Gamma_{ij} / 3 \right\}, \end{aligned}$$

где  $p_{1i}^0$  и  $p_{2i}^0$  - значения  $p_1^0$  и  $p_2^0$  в узле  $i$ . Узел  $i$  может одновременно принадлежать двум сторонам  $\Gamma_{lm}$  и  $\Gamma_{ln}$  треугольного элемента  $e$ , которые прилегают к части контура  $\Gamma'$  с заданными распределенными поверхностными силами. В этом частном случае

$$\begin{aligned} \{P_i^e\}^T &= \left\{ (p_{1l}^0 + p_{1m}^0 / 2) \Gamma_{lm} / 3 + \right. \\ &+ (p_{1l}^0 + p_{1n}^0 / 2) \Gamma_{ln} / 3, (p_{2l}^0 + p_{2m}^0 / 2) \Gamma_{lm} / 3 + \\ &+ \left. (p_{2l}^0 + p_{2n}^0 / 2) \Gamma_{ln} / 3 \right\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что вклад всех соседних элементов, содержащих узел  $i$ , в вектор нагрузки определяется суммированием

$$\{P_i\} = \sum_e \{P_i^e\}.$$

После формирования матрицы  $[K]$  и вектора-столбца  $\{P\}$  следует учесть граничные условия (4.4.27), заданные на части контура  $\Gamma''$ , причем матричное уравнение (4.4.29) можно преобразовать двумя путями. Первый из них состоит в исключении соответствующих строк, для которых узловые значения перемещений оказываются заданными, и подстановке этих значений в уравнение (4.4.29). Второй путь является более простым при реализации на ЭВМ и заключается в умножении диагонального компонента  $K_{rr}$  матрицы жесткости, соответствующего заданному значению перемещения  $u_r$ , на очень большое число  $A$  и одновременной замене компонента  $p_r$  вектора нагрузки  $\{p\}$  на  $Au_r$ . Однако этот путь не применим, когда  $u_r=0$  или очень мало.

В том случае, когда на контуре поперечного сечения тела имеется участок  $\Gamma''$  и он лежит в плоскости симметрии тела, параллельной его образующей, или же примыкает к жесткой прямолинейной преграде, исключающей перемещение точек контура в направлении нормали к контуру, но не препятствующей их перемещению вдоль нее, граничные условия на участке  $\Gamma''$  целесообразно рассматривать как естественные, поскольку интеграл

$$\int_{\Gamma''} (p_1 u_1 + p_2 u_2) d\Gamma = 0,$$

не давая вклада в потенциальную энергию тела, не входит в функционал (4.4.26). Если же одна из координатных осей (например,  $x_1$ ) совпадает

с направлением нормали к  $\Gamma''$ , то целесообразно в точках  $x_k \in \Gamma''$  задать

$$u_1(x_1, x_2) = 0 \text{ и } p_2(x_1, x_2) = 0.$$

Решение преобразованного матричного уравнения (4.4.29) можно реализовать на ЭВМ, используя стандартные программы. По найденным узловым значениям перемещений в пределах каждого элемента согласно соотношению (4.4.31) нетрудно найти компоненты деформации, а затем по формуле (4.4.25) - компоненты напряжений. На границах между элементами расчетные значения напряжений будут разрывны.

Для трансверсально-изотропного относительно оси  $x_3$  материала несколько упростятся выражения для компонентов матрицы  $[D]$ , поскольку

$$\begin{aligned} E_1 = E_2; \quad v_{21} = v_{12} = v_1; \\ v_{13} = v_{23} = v_{31}E_1/E_3 = v_{32}E_1/E_3 = v_2; \\ D_{11} = D_{22} = (E_1 - E_3v_2^2)/z_1; \\ D_{12} = (E_1v_1 + E_3v_2^2)/z_1; \\ z_1 = 1 - v_1^2 - 2v_2^2(1 + v_1)E_3/E_1; \\ D_{33} = \mu_1 = (E_1/2)/(1 + v_1). \end{aligned} \quad (4.4.34)$$

В векторе начальной деформации ненулевые компоненты будут одинаковы и с учетом  $\alpha_1 = \alpha_2$  равны  $(\alpha_1 + v_2E_3\alpha_3/E_1)\Delta T - v_2E_3\varepsilon_{33}/E_1$ . Если материал тела трансверсально-изотропен относительно оси, лежащей в плоскости поперечного сечения (например, относительно оси  $x_2$ ), то в принятых обозначениях

$$\begin{aligned} D_{11} = (E_1 - E_3v_2^2)/z_1; \quad D_{22} = E_3(1 - v_1^2)/z_1; \\ D_{12} = E_3v_2(1 + v_1)/z_1; \quad D_{33} = \mu_2; \\ \{\varepsilon_0\}^T = \{\alpha_1(1 + v_1)\Delta T - v_1\varepsilon_{33}, \\ (\alpha_3 + v_2\alpha_1)\Delta T - v_2\varepsilon_{33}, 0\}. \end{aligned} \quad (4.4.35)$$

Наконец, для изотропного материала получим

$$\begin{aligned} D_{11} = D_{22} = E \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \\ D_{12} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \\ D_{33} = \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \end{aligned} \quad (4.4.36)$$

$$\{\varepsilon_0\}^T = \{\alpha(1 + \nu)\Delta T - \nu\varepsilon_{33}, \alpha(1 + \nu)\Delta T - \nu\varepsilon_{33}, 0\}.$$

В случае плоского напряженного состояния ( $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ ) все приведенные соотношения МКЭ остаются в силе, но необходимо

внести изменения в компоненты матрицы  $[D]$  и вектора начальной деформации. Для изотропного материала в соотношении (4.4.36) следует вместо  $E$ ,  $\nu$  и  $\alpha$  подставить соответственно

$$\begin{aligned} E' = E(1 + 2\nu)/(1 + \nu)^2; \\ \nu' = \nu/(1 + \nu); \quad \alpha' = \alpha(1 + \nu)/(1 + 2\nu), \end{aligned}$$

оставив значение  $\mu$  неизменным. Тогда получим

$$\begin{aligned} D_{11} = D_{22} = E/(1 - \nu^2); \quad D_{12} = E\nu/(1 - \nu^2); \\ D_{33} = \mu = (E/2)/(1 + \nu); \end{aligned}$$

$$\{\varepsilon_0\}^T = \{\alpha\Delta T, \alpha\Delta T, 0\}.$$

Для ортотропного материала при  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$  следует  $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$ , а с учетом температурных деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33} = -\nu_{13}\sigma_{11}/E_1 - \nu_{23}\sigma_{22}/E_2 + \alpha_3\Delta T; \\ \varepsilon_{11} = \sigma_{11}/E_1 - \nu_{21}\sigma_{22}/E_2 + \alpha_1\Delta T; \\ \varepsilon_{22} = \sigma_{22}/E_2 - \nu_{12}\sigma_{11}/E_1 + \alpha_2\Delta T. \end{aligned}$$

Определив из двух последних соотношений напряжения и приняв во внимание, что  $\sigma_{12} = \mu_{12}\gamma_{12}$ , снова получим матричное выражение (4.4.24), но теперь

$$\{\varepsilon_0\}^T = \{\alpha_1\Delta T, \alpha_2\Delta T, 0\},$$

а компоненты матрицы  $[D]$  имеют вид

$$\begin{aligned} D_{11} = E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}); \quad D_{22} = E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}); \\ D_{33} = \mu_{12}; \\ D_{12} = E_1\nu_{21}/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) = E_2\nu_{12}/(1 - \nu_{12}\nu_{21}). \end{aligned}$$

Если тело, находящееся в плоском напряженном состоянии, выполнено из трансверсально-изотропного относительно оси  $x_3$  материала, то

$$\{\varepsilon_0\}^T = \{\alpha_1\Delta T, \alpha_1\Delta T, 0\}$$

и

$$D_{11} = D_{22} = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2}; \quad D_{12} = \frac{E_1\nu_1}{1 - \nu_1^2};$$

$$D_{33} = \mu_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)}.$$

Если же материал трансверсально изотропен относительно оси  $x_2$ , то

$$\{\varepsilon_0\}^T = \{\alpha_1\Delta T, \alpha_3\Delta T, 0\}$$

и

$$D_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_2^2 E_3/E_1};$$



$$D_{22} = \frac{E_3}{1 - \nu_2^2 E_3 / E_1};$$

$$D_{12} = \frac{E_3 \nu_2}{1 - \nu_2^2 E_3 / E_1};$$

$$D_{33} = \mu_2.$$

Многие конструктивные элементы представляют собой тела вращения, причем тепловое и механическое воздействия на эти элементы также являются симметричными относительно оси вращения. В таком случае параметры напряженно-деформированного состояния зависят (как и в плоской задаче) от двух координат, а именно: от осевой  $x_2$  и радиальной  $x_1$  и не зависят от окружной координаты  $x_3$ . Задачу термоупругости по определению этих параметров называют *осесимметричной*.

Соотношения между деформациями и перемещениями в координатах  $x_1, x_2$  можно представить в виде

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \quad \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{u_1}{x_1};$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (4.4.37)$$

и для изотропного материала закон Гука можно записать в форме

$$\varepsilon_{22} = [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] / E + \alpha \Delta T;$$

$$\varepsilon_{11} = [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{22})] / E + \alpha \Delta T;$$

$$\varepsilon_{33} = [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{11})] / E + \alpha \Delta T;$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \sigma_{12} / \mu = \sigma_{21} / \mu.$$

Решая эти соотношения относительно напряжений, получают матричное выражение, в котором

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{22}, \sigma_{11}, \sigma_{33}, \sigma_{12}\};$$

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{22}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}\};$$

$$\{\varepsilon\}^T = \{\alpha \Delta T, \alpha \Delta T, \alpha \Delta T, 0\},$$

а  $[D]$  - симметричная матрица (4×4) коэффициентов упругости с компонентами

$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = E \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)};$$

$$D_{12} = D_{23} = D_{13} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)};$$

$$D_{44} = \mu; \quad D_{14} = D_{24} = D_{34} = 0.$$

Вариационная формулировка осесимметричной задачи термоупругости будет содержать функционал

$$\Phi_\varepsilon = \Phi_1 - \int_F (f_1^0 u_1 + f_2^0 u_2) x_1 dF -$$

$$- \int_{\Gamma'} (p_1^0 u_1 + p_2^0 u_2) x_1 d\Gamma, \quad (4.4.38)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \int_F (\{\varepsilon\}^T - \{\varepsilon_0\}^T) [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) x_1 dF; \quad (4.4.39)$$

$F$  - площадь осевого сечения рассматриваемого тела;  $\Gamma'$  - часть контура этого сечения, на которой заданы поверхностные распределенные силы с составляющими  $p_1^0$  и  $p_2^0$ . Функционал (4.4.38) допустимо рассматривать на непрерывных распределениях составляющих перемещения  $u_1$  и  $u_2$ , удовлетворяющих кинематическим граничным условиям на части контура  $\Gamma'$ :

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^0(x_1, x_2);$$

$$u_2(x_1, x_2) = u_2^0(x_1, x_2); \quad x_k \in \Gamma^n, \quad k = 1, 2. \quad (4.4.40)$$

Выражения (4.4.38) и (4.4.39) отличаются от соответствующих выражений (4.4.26) для плоской задачи термоупругости лишь наличием множителя  $x_1$  в подынтегральных выражениях, поэтому если осевое сечение тела представить совокупностью треугольных конечных элементов, размеры каждого из которых малы по сравнению с его средним радиусом  $x_{1e}$ , то нетрудно перейти от приведенных ранее соотношений МКЭ для плоской задачи к соотношениям для осесимметричной. Действительно, вместо формул (4.4.28) для элемента с номером  $e$ , площадью  $F$  и узлами  $l, m, n$  будет

$$u_1^e(x_1, x_2) = \sum_{i=l, m, n} w_i^e(x_1, x_2) u_{1i};$$

$$u_2^e(x_1, x_2) = \sum_{i=l, m, n} w_i^e(x_1, x_2) u_{2i};$$

$$x_k \in F_e, \quad k = 1, 2.$$

Линейную функцию формы  $w_i^0$  здесь целесообразно представить в виде (для  $i=l$ )

$$w_l^e = (a_l + b_l x_1 + c_l x_2) / (2F_e),$$

где

$$a_l = x_{1m} x_{2n} - x_{1n} x_{2m}; \quad b_l = x_{2m} - x_{2n};$$

$$c_l = x_{1n} - x_{1m}; \quad 2F_e = b_l c_m - b_m c_l;$$

$x_{2l}$  и  $x_{1l}$  - координаты узла с номером  $l$ . Для остальных значений формулы получают циклической перестановкой индексов при условии, что узлы  $l, m, n$  данного элемента расположены в направлении его обхода против часовой стрелки.

Тогда в матричном выражении (4.4.30) матрица (4×1) (вектор-столбец)  $\{\varepsilon^e\}$  будет иметь компоненты

$$\{\varepsilon^e\}^T = \{\varepsilon_{22}^e, \varepsilon_{11}^e, \varepsilon_{33}^e, \gamma_{12}^e\};$$

матрица (6×1) (вектор-столбец)  $\{u^e\}$  -

$$\{u^e\}^T = \{u_{2l}, u_{1l}, u_{2m}, u_{1m}, u_{2n}, u_{1n}\},$$

а матрицу (4×6)  $[B^e]$  можно, по-прежнему,

разбить на три подматрицы согласно выражению (4.4.30), но теперь в первом приближении

$$[B_i^e]^T = \begin{bmatrix} 0 & b_i & b_i + (a_i + c_i x_{2l}) / x_{1e} & c_i \\ c_i & 0 & 0 & b_i \end{bmatrix},$$

$$i = l, m, n,$$

где  $x_{2e} = (x_{2l} + x_{2m} + x_{2n}) / 3;$   
 $x_{1e} = (x_{1l} + x_{2m} + x_{2n}) / 3.$

Для вкладов элемента  $e$  в глобальную матрицу жесткости  $[K]$  и вектор нагрузки  $\{P\}$  будут справедливы формулы соответственно (4.4.32) и (4.4.33), если их правые части умножить на  $x_{1e}$ ,

а в выражениях для  $\{p_i^e\}^T$  и  $\{f_i^e\}^T$   $x_1$  заменить

на  $x_2$ , а  $x_2$  - на  $x_1$ . В итоге после суммирования вкладов по всем элементам для определения узловых значений перемещений  $u_{2j}$  и  $u_{1j}$  получится матричное уравнение вида (4.4.29), которое перед решением должно быть (как и в случае плоской задачи) преобразовано с учетом граничных условий (4.4.40). После определения неизвестных узловых значений перемещений деформации и напряжения в каждом элементе находят по формулам (4.4.31) и (4.4.33).

В случае ортотропного материала, для которого в каждой точке тела оси ортотропии совпадают с направлениями  $x_2, x_1$  и  $x_3$ , с учетом температурных деформаций и осевой симметрии ( $\gamma_{23} = \gamma_{31} = 0$  и  $\gamma_{32} = \gamma_{13} = 0$ ) можно записать:

$$\varepsilon_{22} = \sigma_{22} / E_2 - \nu_{12} \sigma_{11} / E_1 - \nu_{32} \sigma_{33} / E_3 + \alpha_2 \Delta T;$$

$$\varepsilon_{11} = -\sigma_{22} \nu_{21} / E_2 + \sigma_{11} / E_1 - \nu_{31} \sigma_{33} / E_3 + \alpha_1 \Delta T;$$

$$\varepsilon_{33} = -\nu_{12} \sigma_{22} / E_2 - \nu_{13} \sigma_{11} / E_1 + \sigma_{33} / E_3 + \alpha_3 \Delta T;$$

$$\gamma_{21} = \sigma_{21} / \mu_{21}.$$

Если определить из этих соотношений напряжения, то получится матричное выражение (4.4.25), в котором вектор начальной деформации

$$\{\varepsilon_0\}^T = \{\alpha_2 \Delta T, \alpha_1 \Delta T, \alpha_3 \Delta T, 0\},$$

а компоненты матрицы (4×4) коэффициентов упругости  $[D]$ :

$$D_{11} = E_2(1 - \nu_{13} \nu_{31}) / Z; \quad D_{22} = E_1(1 - \nu_{32} \nu_{23}) / Z;$$

$$D_{33} = E_3(1 - \nu_{12} \nu_{21}) / Z; \quad D_{12} = E_2(\nu_{12} + \nu_{13} \nu_{32}) / Z;$$

$$D_{13} = E_2(\nu_{32} + \nu_{31} \nu_{13}) / Z; \quad D_{23} = E_1(\nu_{31} + \nu_{32} \nu_{21}) / Z;$$

$$D_{44} = \mu_{12}, \quad D_{14} = D_{24} = D_{34} = 0. \quad (4.4.41)$$

Если материал трансверсально-изотропен относительно окружного направления, вместо соотношений (4.4.41) получим

$$D_{11} = D_{22} = (E_1 - E_3 \nu_2^2) / Z_1;$$

$$D_{33} = E_3(1 - \nu_1^2) / Z_1;$$

$$D_{12} = (E_1 \nu_1 + E_3 \nu_2^2) / Z_1;$$

$$D_{13} = D_{23} = E_3 \nu_2(1 + \nu_1) / Z_1;$$

$$D_{44} = \mu_1 = (E_1 / 2)(1 + \nu_1);$$

$$D_{14} = D_{24} = D_{34} = 0,$$

а для вектора начальной деформации

$$\{\varepsilon_0\}^T = \{\alpha_1 \Delta T, \alpha_1 \Delta T, \alpha_3 \Delta T, 0\}.$$

В осесимметричных элементах конструкции не все оси ортотропии материала могут совпадать с направлениями  $x_1, x_2, x_3$ . Чтобы задача термоупругости в этом случае сохранила осевую симметрию, необходимо совпадение одной из осей ортотропии с направлением окружной координаты  $x_3$ . Если две остальные оси ортотропии материала повернуть в плоскости осевого сечения тела на угол  $\beta$  относительно направлений  $x_2, x_1$ , то в уравнении (4.4.25) следует использовать преобразованную матрицу (4×4) коэффициентов упругости  $[D']$  с компонентами, определяемыми по формулам вида:

$$D_{11}' = D_{11} \cos^4 \beta + (D_{44} + 2D_{12}) \sin^2 \beta \cos^2 \beta + D_{22} \sin^4 \beta;$$

$$D_{22}' = D_{11} \sin^4 \beta + (D_{44} + 2D_{12}) \sin^2 \beta \cos^2 \beta + D_{22} \cos^4 \beta;$$

$$D_{33}' = D_{33}, \quad D_{44}' = D_{44} + (D_{11} + D_{22} - 2D_{12} - D_{44}) \sin^2 2\beta;$$

$$D_{12}' = D_{12} + (D_{11} + D_{22} - 2D_{12} - D_{44}) \sin^2 \beta \cos^2 \beta; \quad (4.4.42)$$

$$D_{13}' = D_{13} \cos^2 \beta + D_{23} \sin^2 \beta,$$

$$D_{23}' = D_{13} \sin^2 \beta + D_{23} \cos^2 \beta;$$

$$D_{14}' = \left[ D_{22} \sin^2 \beta - D_{11} \cos^2 \beta + (1/2)(D_{44} + 2D_{12}) \times \right. \\ \left. \times \cos 2\beta \right] \sin 2\beta;$$

$$D_{24}' = \left[ D_{22} \cos^2 \beta - D_{11} \sin^2 \beta - (1/2)(D_{44} + 2D_{12}) \times \right. \\ \left. \times \cos 2\beta \right] \sin 2\beta;$$

$$D_{34}' = (D_{23} - D_{13}) \sin 2\beta,$$

где компоненты матрицы  $[D]$  задаются соотношениями (4.4.41). При этом

$$\{\epsilon_0\}^T = \left\{ \left( \alpha_2 \cos^2 \beta + \alpha_1 \sin^2 \beta \right) \Delta T, \left( \alpha_2 \sin^2 \beta + \alpha_1 \cos^2 \beta \right) \Delta T, \alpha_3 \Delta T, 0 \right\}. \quad (4.4.43)$$

Когда ось трансверсальной изотропии материала лежит в осевом сечении тела и составляет угол  $\beta$  с направлением оси  $x_2$ , в формулы (4.4.42) следует подставить компоненты матрицы  $[D]$ :

$$\begin{aligned} D_{11} &= E_3(1 - \nu_1^2) / z_1; \\ D_{22} &= D_{33} = (E_1 - E_3 \nu_2^2) / Z_1; \\ D_{12} &= D_{13} = E_3 \nu_2(1 + \nu_1) / Z_1; \\ D_{23} &= (E_1 \nu_1 + E_3 \nu_2^2) / Z_1; \\ D_{44} &= \mu_2; \quad D_{14} = D_{24} = D_{34} = 0, \end{aligned}$$

соответствующие частному случаю  $\beta=0$ , а вместо формулы (4.4.43) использовать

$$\{\epsilon_0\}^T = \left\{ \left( \alpha_2 \sin^2 \beta + \alpha_3 \cos^2 \beta \right) \Delta T, \left( \alpha_2 \cos^2 \beta + \alpha_3 \sin^2 \beta \right) \Delta T, \alpha_1 \Delta T, 0 \right\}.$$

Таким образом, приведенные соотношения МКЭ для осесимметричной задачи термоупругости можно применить для расчета элементов конструкций из ортотропных и трансверсально-изотропных материалов с различной ориентацией осей симметрии упругих характеристик.

Подробное изложение метода конечных элементов с рассмотрением различного типа элементов, изложением методов численного интегрирования для получения матриц жесткости и векторов нагрузки приведено в [3, 33, 36, 72, 85] и др. Там же изложены принципы и примеры построения конечно-элементных программ для ЭВМ.

Применение метода конечных элементов для решения динамических и связанных задач термоупругости изложено в [21].

Другим численным методом, который может быть применен для расчета упругих напряжений в элементах конструкций, является *метод граничных элементов* (МГЭ). Суть этого метода и основные его соотношения можно рассмотреть на примере задачи о плоском деформированном состоянии изотропного тела [28].

В случае плоского деформированного состояния при  $\epsilon_{33} = \partial u_3 / \partial x_3 = 0$  перемещение в точке  $M$  неограниченной области в направлении оси  $x_i$  под действием приложенной в точке  $M$  сосредоточенной единичной силы, направленной вдоль оси  $x_k$  ( $i, k=1, 2$ ), будет

$$u_i^{(k)}(M, M_0) = [(3 - 4\nu)\delta_{ik} \ln(r_0 / r) +$$

$$+ (x_i^0 - x_i)(x_k - x_k^0) / r^2] / [8\pi\mu(1 - \nu)], \quad (4.4.44)$$

где  $x_i, x_i^0$  - координаты соответственно точек  $M$  и  $M_0$ ;  $r$  - расстояние между этими точками;  $r_0$  - некоторый характерный размер поперечного сечения рассматриваемого тела.

Тогда для точек на контуре  $\Gamma$  поперечного сечения  $F$  можно записать

$$\begin{aligned} \Omega(M_0)u_k(M_0) / (2\pi) + \int_{\Gamma} p_i^{(k)}(N, M_0)u_i(N)d\Gamma = \\ = \int_{\Gamma} u_i^{(k)}(N, M_0)p_i^0(N)d\Gamma + \int_F \left[ f_i^0(M)u_i^{(k)}(M, M_0) + \right. \\ \left. + 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \epsilon^{(T)}(M)u_{i,j}^{(k)}(M, M_0) \right] dF, \quad M_0 \in \Gamma. \end{aligned} \quad (4.4.45)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_i^{(k)}(N, M_0) = \left\{ (1 - 2\nu) \left[ (x_j - x_j^0)\delta_{ik} - (x_i - x_i^0)\delta_{jk} + \right. \right. \\ \left. \left. + (x_k - x_k^0)\delta_{ij} \right] + 2(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0) / r^2(N, M_0) \right\} \times \\ \times n_j(N) / \left[ 4\pi(1 - \nu)r^2(N, M_0) \right], \quad N \in \Gamma; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} u_{i,j}^{(k)}(M, M_0) = S^{(k)}(M, M_0) = - \frac{1+\nu}{1-\nu} \times \\ \times \left( x_k - x_k^0 \right) / \left[ 2\pi r^2(M, M_0) \right]; \end{aligned}$$

$\Omega(M_0) = \pi$  - для гладкого участка контура, а для угловой точки  $\Omega(M_0)$  равно внутреннему углу с вершиной в этой точке.

На контуре поперечного сечения тела выделим  $N_{\Gamma}$  граничных элементов так, чтобы угловые точки контура (если они имеются) оказались на стыке элементов. Если в пределах каждого элемента с номером  $m$  значения  $(u_1)_m, (u_2)_m$  и  $(p_1)_m, (p_2)_m$  принять постоянными, а узлы переместить в середину элементов, то при совмещении точки  $M_0$  с  $n$ -м узлом, лежащим на гладком участке контура  $[\Omega(M_0) / (2\pi) = 1 / 2]$ , вместо (4.4.45) получится матричное уравнение

$$[H]\{u\} = [G]\{p\} + \{B'\}, \quad (4.4.46)$$

где  $\{u\}$  и  $\{p\}$  - матрицы  $2N_{\Gamma} \times 1$  (вектор-столбцы) с компонентами соответственно  $u_{2m-1} = (u_1)_m, u_{2m} = (u_2)_m$  и  $p_{2m-1} = (p_1)_m, p_{2m} = (p_2)_m$ , или  $u_{2(m-1)+i} = (u_i)_m, p_{2(m-1)+i} = (p_i)_m$ , причем  $i = 1, 2$  и

$m = 1, 2, \dots, N_\Gamma$ ;  $\{B\}$  - матрица  $2N_\Gamma \times 1$  (вектор-столбец), компоненты которой

$$B'_{2(n-1)+k} = \int_F \left[ f_i^0(M) u_i^{(k)}(M, N_n) + S^{(k)}(M, N_n) \varepsilon^{(T)}(M) \right] dF, \quad (4.4.47)$$

$i, k = 1, 2; \quad n = 1, 2, \dots, N_\Gamma$

учитывают влияние на контурные узловые точки объемных сил и температурных деформаций  $\varepsilon^{(T)}$ ;  $[H]$  и  $[G]$  - квадратные матрицы  $2N_\Gamma \times 2N_\Gamma$  с компонентами соответственно

$$H_{(2n-2+k)(2m-2+i)} = \delta_{ik} \delta_{nm} / 2 + \int_{\Gamma_m} p_i^{(k)}(N, N_n) d\Gamma(N);$$

$$G_{(2n-2+k)(2m-2+i)} = \int_{\Gamma_m} u_i^{(k)}(N, N_n) d\Gamma(N),$$

где через  $N_n$  обозначен  $n$ -й граничный узел, а через  $\Gamma_m$  - длина граничного элемента с номером  $m$ .

При  $n=m$  в подинтегральных выражениях возникают особенности и требуются специальные приемы интегрирования в окрестности узловой точки  $n$ -го граничного элемента, когда  $r(N, N_n) \rightarrow 0, N \in \Gamma_n$ . Для прямолинейного элемента несобственные интегралы нетрудно вычислить аналитически. Криволинейный граничный элемент в окрестности узловой точки  $N \in \Gamma_n$  можно приближенно представить прямолинейным участком  $\Gamma'_n$ , для которого интегралы находят аналитически, а на остальной части элемента, где особенности в подинтегральных выражениях отсутствуют, интегрирование проводят численно. Так как (4.4.46) справедливо и для частного случая перемещения тела как жесткого целого, для каждой строки матрицы  $[H]$  сумма компонентов должна быть равна нулю. Поэтому диагональные компоненты этой матрицы можно также найти из равенства

$$H_{ll} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{2N_\Gamma} H_{lj}; \quad l = 2(n-1) + k = 1, 2, \dots, 2N_\Gamma. \quad (4.4.48)$$

Таким образом, (4.4.46) связывает между собой узловые значения перемещений и распределенных поверхностных нагрузок на контуре поперечного сечения тела. Согласно заданным граничным условиям в каждой узловой точке в каждом из направлений  $x_i, i=1, 2$ , будем считать известными значения либо перемещения, либо распределенной нагрузки.

Если контур поперечного сечения тела содержит участок  $\Gamma^m$ , то при совпадении одной из

координатных осей (например,  $x'_1$ ) с нормалью к этому участку имеем

$$u_1(N_m) = (u_1)_m = 0 \quad \text{и} \quad p_2(N_m) = (p_2)_m = 0$$

при  $N_m \in \Gamma^m$ . При произвольном расположении координатных осей  $x_i, i=1, 2$ , относительно участка  $\Gamma^m$ , на котором выделены  $N_\Gamma^m$  граничных элементов, к (4.4.46) необходимо для каждой узловой точки добавить уравнения

$$u_i(N_m) n_i(N_m) = 0; \quad i = 1, 2$$

и

$$p_1(N_m) n_2(N_m) - p_2(N_m) n_1(N_m) = 0$$

или

$$u_{2m-1} n_1(N_m) + u_{2m} n_2(N_m) = 0$$

и

$$p_{2m-1} n_2(N_m) - p_{2m} n_1(N_m) = 0. \quad (4.4.49)$$

Тогда (4.4.46) в сочетании с (4.4.49) будет содержать  $2N_\Gamma$  неизвестных, которые можно определить из матричного уравнения

$$[A]\{X\} = \{B\}. \quad (4.4.50)$$

Здесь  $\{X\}$  - матрица  $2N_\Gamma \times 1$  (вектор-столбец) неизвестных узловых значений  $(u_i)_m$  в узлах  $N_m \in \Gamma'$ ,  $(p_i)_m$  в узлах  $N_m \in \Gamma''$  и  $(u_2)_m, (p_1)_m$  в узлах  $N_m \in \Gamma^m$ ,  $[A]$  и  $\{B\}$  - матрицы  $2N_\Gamma \times 2N_\Gamma$  и  $2N_\Gamma \times 1$  (вектор-столбец) с компонентами

$$\begin{aligned} A_{pq} &= H_{pq}; \quad A_{pr} = -G_{pr}; \\ A_{ps} &= H_{ps} - H_{ps} n_2(N_m) / n_1(N_m); \\ A_{pt} &= -G_{ps} - G_{pt} n_2(N_m) / n_1(N_m); \\ A_{sq} &= -H_{sq} n_2(N_m) / n_1(N_m); \\ A_{sr} &= -G_{sr}, \quad A_{tq} = H_{tq}; \\ B_p &= B'_p + G_{pq} p_q - H_{pr} u_r; \\ A_{tr} &= -G_{tr} n_2(N_m) / n_1(N_m); \\ A_{wt} &= -G_{ws} - G_{wt} n_2(N_m) / n_1(N_m); \\ A_{ws} &= H_{wt} - H_{ws} n_2(N_m) / n_1(N_m); \\ B_w &= B'_w + G_{wq} p_q - H_{wr} u_r, \end{aligned}$$

где  $q = 2(m-1) + i, N_m \in \Gamma'$  и  $r = 2(m-1) + i, N_m \in \Gamma'', i=1, 2$ , причем  $p=q$  или  $r, s = 2m-1$  и  $t = 2m, N_m \in \Gamma^m$ , причем  $w=s$  или  $t$ .

После решения (4.4.50) во всех граничных узлах будут известны значения  $(u_i)_m$  и  $(p_i)_m, i=1, 2; m=1, 2, \dots, N_\Gamma$ . Это позволит из (4.4.45) при  $\Omega(M_0) = 2\pi$  найти перемещения  $u_k(M_0) (k=1, 2)$  в любой внутренней точке  $M_0 \in F$  поперечного сечения тела:

$$u_k(M_0) = \sum_{m=1}^{N_r} \left[ (p_i)_m u_i^{(k)}(N_m, M_0) - (u_i)_m p_i^{(k)}(N_m, M_0) \right] \Gamma_m + \int_F \left[ f_i^0(M) u_i^{(k)}(M, M_0) + S^{(k)}(M, M_0) \varepsilon^{(T)}(M) \right] dF, \quad i = 1, 2. \quad (4.4.51)$$

Для определения напряжений можно воспользоваться (4.4.25)

$$\sigma_{ij}(M_0) = \frac{2}{3} \mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \left[ u_{k,k}(M_0) - 3\varepsilon^{(T)}(M_0) \right] \delta_{ij} + \mu \left[ u_{i,j}(M_0) + u_{j,i}(M_0) - \frac{2}{3} u_{k,k}(M_0) \delta_{ij} \right], \quad i, j, k = 1, 2; \quad M_0 \in F. \quad (4.4.52)$$

Объединяя (4.4.51) и (4.4.52), получают

$$\sigma_{ij} = \sum_{m=1}^{N_r} \left[ (p_k)_m D_{ijk}(N_m, M_0) - (u_k)_m S_{ijkl}(N_m, M_0) \right] \times \times n_l(N_m) \Gamma_m + \int_F \left[ D_{ijk}(M, M_0) f_k^0(M) + S_{ij}(M, M_0) \varepsilon^{(T)}(M) \right] dF - 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \varepsilon^{(T)}(M_0) \delta_{ij}, \quad (4.4.53)$$

где

$$D_{ijk}(M, M_0) = \left\{ (1-2\nu) \left[ (x_i - x_i^0) \delta_{jk} + (x_j - x_j^0) \delta_{ik} - (x_k - x_k^0) \delta_{ij} \right] + 2(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \times \times (x_k - x_k^0) / r^2(M, M_0) \right\} / \left[ 4\pi(1-\nu)r^2(M, M_0) \right];$$

$$S_{ijkl}(N, M_0) = \mu \left\{ 2(1-2\nu) \left[ (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \delta_{kl} + \delta_{jk}(x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0) \right] + 2\nu \left[ (x_i - x_i^0) \delta_{jk}(x_l - x_l^0) + \delta_{il}(x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0) + \delta_{ik}(x_j - x_j^0)(x_l - x_l^0) + (x_i - x_i^0)(x_k - x_k^0) \delta_{jl} \right] - 8(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \times \times (x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0) / r^2(N, M_0) + [(1-2\nu)(\delta_{ik} \delta_{il} + \delta_{il} \delta_{jk}) - (1-4\nu) \delta_{ij} \delta_{kl}] r^2(N, M_0) \right\} / \left[ 2\pi(1-\nu) \times \times r^4(N, M_0) \right];$$

$$S_{ij}(M, M_0) = S_{ijkl}(M, M_0) \delta_{kl} + \mu \nu \left[ \delta_{ij} - \right.$$

$$\left. -2(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) / r^2(M, M_0) \right] / \left[ \pi(1-\nu) \times \times r^2(M, M_0) \right] = \left[ \delta_{ij} - 2(x_i - x_i^0) \times \times (x_j - x_j^0) / r^2(M, M_0) \right] \mu(1+\nu) / \left[ \pi(1-\nu^2) \times \times r^2(M, M_0) \right].$$

Если принять, что в пределах каждого граничного элемента с номером  $e$  зависимости  $u_i(N)$  и  $p_i(N)$ ,  $N \in \Gamma_e$  изменяются по линейному закону, то узловые точки целесообразно расположить на стыке соседних элементов. Пусть узлы  $m$  и  $m+1$  принадлежат элементу  $e$ . Тогда

$$u_i^{(e)}(N) = (u_i)_m w_m^{(e)}(N) + (u_i)_{m+1} w_{m+1}^{(e)}(N);$$

$$p_i^{(e)}(N) = (p_i)_m w_m^{(e)}(N) + (p_i)_{m+1} w_{m+1}^{(e)}(N),$$

где  $w_m^{(e)}(N)$  и  $w_{m+1}^{(e)}(N)$  - линейные функции положения точки  $N \in \Gamma_e$ , причем  $w_m^{(e)} N=1$  и  $w_{m+1}^{(e)} N=0$ , когда  $N$  совпадает с узлом  $m$ , а при совпадении  $N$  с узлом  $m+1$   $w_m^{(e)} N=0$  и  $w_{m+1}^{(e)} N=1$ .

Теперь в (4.4.46) компоненты матриц  $[H]$  и  $[G]$  следует вычислять по формулам

$$H_{(2n-2+k)(2m-2+i)} = \int_{\Gamma_{e-1} + \Gamma_e} p_i^{(k)}(N, N_n) w_m(N) d\Gamma(N);$$

$$G_{(2n-2+k)(2m-2+i)} = \int_{\Gamma_{e-1} + \Gamma_e} u_i^{(k)}(N, N_n) w_m(N) d\Gamma(N),$$

причем для  $N \in \Gamma_{e-1}$   $w_m(N) = w_m^{(e-1)}(N)$  и для  $N \in \Gamma_e$   $w_m(N) = w_m^{(e)}(N)$ . Для диагональных компонентов матрицы  $[H]$  справедливо (4.4.48), а для компонентов вектора  $\{B'\}$  - (4.4.47).

Переход от матричного уравнения (4.4.46) к (4.4.50) остается прежним, но после решения (4.4.50) перемещения и напряжения во внутренних точках поперечного сечения тела вместо (4.4.51) и (4.4.53) вычисляются по формулам:

$$u_k(M_0) = \sum_{m=1}^{N_r} \left[ (p_i)_m \int_{\Gamma_{e-1} + \Gamma_e} u_i^{(k)}(N, M_0) w_m(N) d\Gamma - (u_i)_m \int_{\Gamma_{e-1} + \Gamma_e} p_i^{(k)}(N, M_0) w_m(N) d\Gamma \right] +$$

$$\begin{aligned} & + \int_F \left[ f_i^0(M) u_i^{(k)}(M, M_0) + S^{(k)}(M, M_0) \varepsilon^{(T)}(M) \right] dF; \\ \sigma_{ij} = & \sum_{m=1}^{N_\Gamma} \left[ (p_k)_m \int_{\Gamma_{e-1+\Gamma_e}} D_{ijk}(N, M_0) w_m(N) d\Gamma - \right. \\ & \left. - (u_k)_m \int_{\Gamma_{e-1+\Gamma_e}} S_{ijkl}(N, M_0) n_l(N) w_m(N) d\Gamma \right] + \\ & + \int_F \left[ D_{ijk}(M, M_0) f_k^0(M) + \varepsilon^{(T)}(M) S_{ij}(M, M_0) \right] dF - \\ & - 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \varepsilon^{(T)}(M_0) \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Распределения  $u_i(N)$  и  $p_i(N)$  в пределах граничных элементов можно аппроксимировать и более сложными, чем линейные, зависимостями, причем целесообразно  $p_i(N)$  аппроксимировать полиномом степени на единицу меньше, чем  $u_i(N)$ , так как  $p_i(N)$  выражается через первые производные от  $u_i$ .

В случае постоянного значения  $\varepsilon_{33} = u_{3,3} \neq 0$  в (4.4.45) войдет дополнительный интеграл

$$-(\varepsilon_{33} / 3) \int_F S^{(k)}(M, M_0) dF.$$

Если использовать для нахождения  $\varepsilon_{33}$  способ последовательных приближений, задаваясь сначала ожидаемым значением  $\varepsilon_{33}$ , то наличие этого интеграла приведет к появлению дополнительного слагаемого в компонентах вектора  $\{B'\}$ . После определения перемещений и напряжений в поперечном сечении тела нетрудно уточнить значение  $\varepsilon_{33}$ , внести коррекцию в компоненты вектора  $\{B'\}$  и повторять описанную процедуру, пока не будет выполнено заданное условие контроля сходимости процесса последовательных приближений. Значение  $\varepsilon_{33}$  можно найти за один прием, если его рассматривать как еще одно неизвестное наряду с  $(u_i)_m$  и  $(p_i)_m$  в граничных узлах. Если принять  $\varepsilon_{33}$  в качестве  $(2N_\Gamma+1)$ -го компонента вектора  $\{u\}$ , то в матрице  $[H]$  появится  $(2N_\Gamma+1)$ -й столбец с компонентами

$$H_{(2m-2+k)(2N_\Gamma+1)} = \frac{1}{3} \int_F S^{(k)}(M, N_m) dF,$$

а к (4.4.46) добавится уравнение связи  $\varepsilon_{33}$  с  $(u_i)_m$  и  $(p_i)_m$ , которое следует из условия закрепления торцов тела.

При плоском напряженном состоянии справедливы все расчетные формулы, приведенные для плоского деформированного состояния при  $\varepsilon_{33} = u_{3,3} = 0$ , если в них  $\nu$  заменить на  $\nu_1 = \nu / (1 + \nu)$  [58]. Если упругие характеристики материала тела существенно зависят от координат точки  $M \in F$ , то МГЭ также можно использовать для решения задачи. Выберем в качестве  $\mu$  и  $\nu$  некоторые средние значения, например,

$$\mu = \frac{1}{F} \int_F \mu(M) dF; \quad \nu = \frac{1}{F} \int_F \nu(M) dF$$

и введем для случая  $\varepsilon_{33} = 0$  при плоской деформации дополнительные напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma'_{12}(M) &= [\mu(M) - \mu] \varepsilon_{12}(M); \\ \sigma'_{11}(M) &= \mu(M) \frac{[1 - \nu(M)] \varepsilon_{11}(M) + \nu(M) \varepsilon_{22}(M)}{1 - 2\nu(M)} - \\ & - \mu \frac{(1 - \nu) \varepsilon_{11}(M) + \nu \varepsilon_{22}(M)}{1 - 2\nu} - \mu(M) \frac{1 + \nu(M)}{1 - 2\nu(M)} \varepsilon^{(T)}(M); \\ \sigma'_{22}(M) &= \mu(M) \frac{[1 - \nu(M)] \varepsilon_{22}(M) + \nu(M) \varepsilon_{11}(M)}{1 - 2\nu(M)} - \\ & - \mu \frac{(1 - \nu) \varepsilon_{22}(M) + \nu \varepsilon_{11}(M)}{1 - 2\nu} - \mu(M) \frac{1 + \nu(M)}{1 - 2\nu(M)} \varepsilon^{(T)}(M). \end{aligned}$$

Тогда вместо (4.4.45) следует написать

$$\begin{aligned} & \frac{\Omega(M_0)}{2\pi} u_k(M_0) + \int_\Gamma p_i^{(k)}(N, M_0) u_i(N) d\Gamma = \\ & = \int_\Gamma u_i^{(k)}(N, M_0) p_i(N) d\Gamma + \int_F \left\{ f_i^0(M) u_i^{(k)}(M, M_0) - \right. \\ & \quad \left. - \sigma'_{ij}(M) \left[ u_{i,j}^{(k)}(M, M_0) + u_{j,i}^{(k)}(M, M_0) \right] \right\} dF, \\ & \quad i, j, k = 1, 2. \end{aligned}$$

Поскольку компоненты  $\sigma'_{ij}(M)$  дополнительных напряжений заранее неизвестны и зависят как от  $\mu(M)$ ,  $\nu(M)$  и  $\varepsilon^{(T)}(M)$ , так и от искомым перемещений, через которые выражаются деформации

$$\varepsilon_{ij}(M) = [u_{i,j}(M) + u_{j,i}(M)] / 2, \quad i, j = 1, 2,$$

реализация МГЭ ведется итерациями с последовательным уточнением значений  $\sigma'_{ij}(M)$  по решению, полученному на предыдущей итерации. Этот путь решения возможен и в случае плоского напряженного состояния с учетом замены  $\nu(M)$  на  $\nu_1(M) = \nu(M) / [1 + \nu(M)]$  и  $\nu$  на  $\nu_1 = \nu / (1 + \nu)$ .

Изложение метода граничных элементов применительно к решению разнообразных задач с подробным изложением теоретических основ и особенностей его реализации на ЭВМ содержится в [12, 50, 65, 101] и др.

Метод конечных разностей также может быть применен для расчета упругих температурных напряжений в элементах конструкций, но он обладает меньшей общностью по сравнению с рассмотренными. Особенности его применения к решению ряда конкретных задач содержатся, например, в [65, 75].

Некоторые другие численные методы рассмотрены в [75].

#### Глава 4.5

### ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ И ТЕРМОПОЛЗУЧЕСТИ

Для определения неупругого напряженно-деформированного состояния теллонапряженных конструкций при изменяющихся во времени температурах и нагрузках необходимо решать нелинейные задачи термопластичности и термоползучести. Если предполагать малость деформаций, то нелинейность является следствием соотношений, связывающих между собой напряжения и деформации в конструкционном материале и составляющих *математическую модель* этого материала. Необходимость применения той или иной модели материала обусловлена в основном характером действующих на конструкцию нагрузок и ее температурным состоянием.

Для большинства конструкций, работающих в условиях неизотермического нагружения, можно выделить режимы с постоянными нагрузками и температурами и этапы перехода с одного режима на другой. В этом случае целесообразно отдельно рассматривать этапы пластического деформирования при действии высоких температур и задачи ползучести в периоды работы конструкции при постоянных или мало меняющихся нагрузках и температурах. Однако в общем случае разделить во времени период появления только пластических деформаций и только деформаций ползучести затруднительно. Это характерно для машин, работающих на режимах с переменными нагрузками и температурами (маневренные двигатели, энергосиловые установки, ядерные реакторы и химическое оборудование в периоды пуска и остановки), для которых необходимо рассматривать неизотермическое неупругое деформирование, одновременно учитывая явления пластичности и ползучести.

В зависимости от условий нагружения и нагрева задачи термопрочности можно подразделить на несколько типов. Если нагрузки и температуры изменяются таким образом, что можно предположить *активное нагружение* материала

(монотонный рост пластических деформаций и отсутствие разгрузки), то для определения напряжений и деформаций приемлемы модели материала, основанные на *деформационной теории* (например, теории малых упруго-пластических деформаций, причем ползучесть может быть учтена на основе теории старения) (см.п. 4.5.1). Если же режимы нагрева и нагружения чередуются с режимами охлаждения и разгрузки, то необходимо применять более сложные модели материала, учитывающие возможность смен этапов активного нагружения и этапов разгрузки (например, модели, базирующиеся на *теории течения*, и *структурные модели*) (см.пп. 4.5.2, 4.5.4 и 4.5.5).

#### 4.5.1. ДЕФОРМАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ ИЗОТРОПНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Эта теория базируется на предположении о *простом* (пропорциональном) нагружении [100] и для изотропных материалов предполагает существование единой зависимости интенсивности напряжений  $\sigma_{ii}$  от интенсивности деформации  $\epsilon_{ii}$  и температуры  $T$ :

$$\sigma_{ii} = \sigma_{ii}(\epsilon_{ii}, T). \quad (4.5.1)$$

Зависимость (4.5.1) задает в координатах  $\epsilon_{ii}$ ,  $T$ ,  $\sigma_{ii}$  (рис. 4.5.1) семейство обобщенных кривых деформирования для различных температур, образующее *термомеханическую поверхность* материала [100].

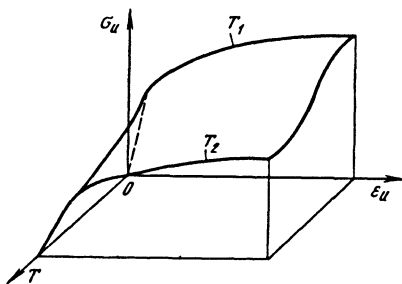


Рис. 4.5.1. Термомеханическая поверхность материала

Если принять, что:

1) компоненты  $\epsilon_{ij}$  тензора полной деформации равны сумме компонентов  $\epsilon_{ij}^{(e)}$ ,  $\epsilon_{ij}^{(p)}$  и  $\epsilon^{(T)} \delta_{ij}$  тензоров упругой, пластической и температурной деформаций

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{(e)} + \epsilon_{ij}^{(p)} + \epsilon^{(T)} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где  $\epsilon^{(T)}$  — деформация, вызванная температурным расширением материала;  $\delta_{ij}$  — компоненты единичного тензора (символ Кронекера);

2) изменение объема материала, характеризующее шаровой составляющей  $\varepsilon = \varepsilon_{ij} \delta_{ij} / 3 = \varepsilon_{ii}^{(e)} / 3 + \varepsilon^{(T)}$  (пластические деформации не вызывают изменения объема), линейно связано с шаровой составляющей  $\sigma = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3 = \sigma_{ij} / 3$  тензора напряжений

$$\varepsilon = \varepsilon^{(T)} + \sigma / (3K), \quad 3K = E / (1 - 2\nu), \quad (4.5.2)$$

где  $E$ ,  $K$  и  $\nu$  - модули растяжения и всестороннего сжатия и коэффициент Пуассона материала;

3) компоненты  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}$  девиатора деформации пропорциональны компонентам  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$  девиатора напряжений

$e_{ij} = s_{ij} \psi / (2G), 2G = E / (1 + \nu), \psi = 3G \varepsilon_{ii} / \sigma_{ii}$ , где  $G$  - модуль сдвига материала, то основные соотношения деформационной теории можно записать в виде [100]

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} (\varepsilon_{mn} - \varepsilon^{(T)} \delta_{mn}), \quad i, j, m, n = 1, 2, 3, \quad (4.5.3)$$

где

$$C_{ijmn} = \frac{E}{\psi(1 + \nu)} (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{ij} \delta_{mn} / 3) + \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \delta_{ij} \delta_{mn}; \quad (4.5.4)$$

$$\psi = \frac{3E}{2(1 + \nu)} \frac{\varepsilon_{ii}}{\sigma_{ii}}. \quad (4.5.5)$$

Соотношения деформационной теории для анизотропного материала можно построить на основе следующих предположений [16]:

в течение всего процесса деформирования  $\sigma = 3K\varepsilon$ ,  $(4.5.6)$

где  $\sigma = \sigma_{ij} \alpha_{ij}$  - аналог объемного напряжения;

$K = C_{ijkl} \alpha_{kl} \alpha_{ij} / 3$  - аналог модуля всестороннего сжатия;

$\varepsilon = (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)}) \beta_{ij}$  - аналог объемной деформации;

$\beta_{ij} = C_{ijkl} \alpha_{kl} / (3K)$ ;

$C_{ijkl}$  - тензор модулей упругости;

$\alpha_{ij}$  - симметричный тензор, удовлетворяющий условию  $\alpha_{ij} \alpha_{ij} = 1$ ;

при введении аналогов девиаторов и шаровых тензоров напряжений и деформаций  $s_{ij}, \sigma_{ij}^*$

и  $e_{ij}, \varepsilon_{ij}^*$  с помощью равенств

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*; \quad \sigma_{ij}^* = \beta_{ij} \sigma; \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)} - \varepsilon_{ij}^*; \quad \varepsilon_{ij}^* = \alpha_{ij} \varepsilon \quad (4.5.7)$$

обобщенные интенсивности напряжений

$$\sigma_{ii} = \sqrt{3KB_{ijkl} s_{kl} s_{ij}} = \sqrt{(3KB_{ijkl} - \alpha_{ij} \alpha_{kl})} \sigma_{kl} \sigma_{ij} \quad (4.5.8)$$

и деформаций

$$\varepsilon_{ii} = \sqrt{C_{ijkl} e_{kl} e_{ij}} / (3K) \quad (4.5.9)$$

в течение всего процесса деформирования связаны между собой зависимостью

$$s_{ij} = \frac{\sigma_{ii}}{3K \varepsilon_{ii}} C_{ijkl} e_{kl}, \quad (4.5.10)$$

причем  $B_{ijkl} = C_{ijkl}^{-1}$ .

В соотношениях (4.5.6)-(4.5.10) полагают, что компоненты тензора  $\alpha_{ij}$  могут меняться в течение процесса деформирования, т.е.  $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\varepsilon_{ii}, T)$ . Следовательно, аналог модуля всестороннего сжатия  $K = K(\varepsilon_{ii}, T)$  и  $\beta_{ij} = \beta_{ij}(\varepsilon_{ii}, T)$ .

Далее для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, постулируют существование инвариантной к виду деформированного состояния зависимости между обобщенными интенсивностями напряжений и деформаций

$$\sigma_{ii} = \sigma_{ii}(\varepsilon_{ii}, T). \quad (4.5.11)$$

Для упругой анизотропной среды соотношение (4.5.11) принимает вид  $\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}$ . Для

изотропного материала  $\alpha \delta_{ij} = \beta \delta_{ij} = 1 / \sqrt{3}$  и

аналог модуля всестороннего сжатия  $K = \lambda + 2G / 3$ , а аналоги объемных напряжений и деформаций  $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) / \sqrt{3}$ ,

$\varepsilon = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) / \sqrt{3}$  и соотношение (4.5.6)

совпадает с известным для изотропного материала. Путем преобразования выражений (4.5.8) и (4.5.9) можно показать, что для линейно-упругого изотропного материала

$$\frac{\sigma_{ii}}{3K \varepsilon_{ii}} = \frac{1}{2\sigma} \sqrt{I'_{2\sigma} / I'_{2\varepsilon}}, \quad (4.5.12)$$

где  $I'_{2\sigma}, I'_{2\varepsilon}$  - вторые инварианты девиаторов напряжений и деформаций.

Обобщенную диаграмму деформирования при заданной температуре строят с использованием одноосных диаграмм деформирования путем решения системы нелинейных алгебраических уравнений (4.5.6)-(4.5.11), записанных для одноосного нагружения.

#### 4.5.2. ТЕОРИЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ С ИЗОТРОПНЫМ И АНИЗОТРОПНЫМ УПРОЧНЕНИЕМ

Математические модели на основе соотношений теории пластического течения позволяют получить решения задач, для которых существенны эффекты действия нагрузок во времени.



К таким задачам следует отнести в первую очередь задачи при неизотермическом упруго-пластическом деформировании, при котором циклическое воздействие высоких температур или других физических полей вызывает изменения механических свойств материалов. Разработка нескольких вариантов теории пластического течения при неизотермическом нагружении вызвана требованием наиболее адекватно отразить экспериментальные результаты. Исходными положениями в этих вариантах служат постулаты о существовании *поверхности нагружения*, разделяющей области упругого и неупругого деформирования, и о справедливости ассоциированного с этой поверхностью закона течения. Тепловое воздействие вызывает изменение упругопластического состояния, что в свою очередь изменяет поверхность нагружения. Поэтому соотношения теории пластического течения для неизо-термического нагружения должны быть получены с учетом воздействий, изменяющих поверхность нагружения [9, 10, 23, 24, 38, 86, 108, 109, 113, 117].

Наряду с тепловым воздействием мгновенную термомеханическую поверхность изменяют и другие физические воздействия: радиационное, агрессивные среды и др. [23,88,].

Воздействие физического поля на механические свойства материала можно разделить на наследственное, зависящее от "истории" воздействия, и мгновенное, зависящее от мгновенного состояния физического поля. Если описывать воздействия физического поля на материал структурными параметрами  $k_\alpha(\tau, x)$ , то среди них будем различать параметры, описывающие физическое поле в точке  $x$  в момент времени  $\tau$ , и параметры, описывающие "историю" изменения физического поля за время его существования от момента времени  $\tau_0$  до  $\tau_1$ .

В дальнейшем принято, что деформации упругости, пластичности и ползучести являются независимыми, и тензор приращений деформаций  $d\epsilon_{ij}$  представляется суммой тензоров приращений упругих  $d\epsilon_{ij}^{(e)}$ , пластических  $d\epsilon_{ij}^p$  деформаций и приращений деформаций ползучести  $d\epsilon_{ij}^c$ :

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p + d\epsilon_{ij}^c. \quad (4.5.13)$$

Второе и третье слагаемые в (4.5.13) представляют неупругую составляющую приращений деформаций. Разложение ее на деформации пластичности и ползучести достаточно условно, так как для конструкционных материалов сложно определить, какой механизм является ответственным за появление неупругих деформаций. Поэтому примем, что пластические деформации - это такие деформации, которые появляются в теле одновременно с приложенными

нагрузками и не изменяются при постоянных характеристиках материала и нагрузках. Все неупругие деформации, развивающиеся в теле при постоянных нагрузках за период времени  $\tau_1 - \tau_0$ , будем относить к деформациям ползучести.

Такой подход позволяет разделить механизмы образования неупругих деформаций и получить зависимости, связывающие приращения деформаций пластичности и ползучести с приращениями напряжений. Зависимость, связывающая напряжения  $\sigma_{ij}$  и пластические де-

формации  $\epsilon_{ij}^p$ , получила название *поверхности пластического деформирования* [86]. Удобно рассматривать эту поверхность в пространстве тензоров напряжений  $\sigma_{ij}$  и пластических деформаций  $\epsilon_{ij}^p$ . Изменение тензора  $\sigma_{ij}$  может привести

к изменению тензора  $\epsilon_{ij}^p$ , и такой процесс нагружения будем считать *активным*. Если изменение тензора  $\sigma_{ij}$  не приводит к изменению пластических деформаций, то процесс деформирования происходит в упругой области, и при этом приращения упругой деформации связаны с приращениями напряжений зависимостью

$$d\epsilon_{ij}^e = A_{ijmn} d\sigma_{mn} + dA_{ijmn} \sigma_{mn} + d\epsilon_{ij}^0 \delta_{ij}, \quad (4.5.14)$$

где  $A_{ijmn}(k_\alpha)$  - тензор, описывающий свойства упругого анизотропного тела;  $\epsilon^0 = \alpha T$  - объемная деформация. В случае изотропного упругого тела с модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{1}{E} \left[ (1 + \nu) \delta_{im} \delta_{jn} - \nu \delta_{ij} \delta_{mn} \right] d\sigma_{mn} + \frac{\sigma_{mn}}{E} \left\{ \frac{\partial \nu}{\partial k_\alpha} (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{ij} \delta_{mn}) - \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial k_\alpha} \times \right. \\ \left. \times \left[ (1 + \nu) \delta_{im} \delta_{jn} - \nu \delta_{ij} \delta_{mn} \right] \right\} dk_\alpha + d\epsilon_{ij}^0 \delta_{ij}. \quad (4.5.15)$$

Процесс активного нагружения свяжем с поверхностью пластического деформирования, уравнение которой представим в виде [23, 35, 86]

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, k_\alpha, B_q, \alpha_\beta, \xi_\nu) = 0, \quad (4.5.16)$$

где  $B_q$  - структурные тензоры, учитывающие анизотропию пластических свойств материала, возникающую в результате воздействия агрессивной среды, температурного или радиационного полей;  $\alpha_\beta$  - скалярные параметры, описывающие историю пластического деформирования;  $\xi_\nu$  - структурные тензоры, характеризую-

щие анизотропию, приобретенную в процессе пластического деформирования.

Примем, что скалярные структурные параметры  $\mathfrak{a}_\beta$  и структурные тензоры  $\xi_\nu$  изменяются при изменении пластических деформаций (при изменении компонент тензора  $\varepsilon_{ij}^p$ ).

Если представить приращения скалярных структурных параметров  $\mathfrak{a}_\beta$  в виде

$$d\mathfrak{a}_\beta = H_{ij}^\beta d\varepsilon_{ij}^p + G_\beta (d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p)^{1/2}, \quad \beta = 1, \dots, r, \quad (4.5.17)$$

то при  $H'_{ij} = \sigma_{ij}$ ,  $G_1 = 0$  получим, что скалярный структурный параметр  $\mathfrak{a}_1$  представляет работу пластической деформации, а при  $H_2^2 = 0$ ,  $G_2 = 1$  получим, что скалярный структурный параметр  $\mathfrak{a}_2$  представляет длину траектории пластического деформирования - *параметр Уджвиста*.

Введение таких скалярных параметров в уравнения пластического течения необходимо для того, чтобы описать изменение свойств материала, таких, как модуль упругости, эффект Баушингера и закон упрочнения при активном нагружении. Однако полностью описать изменение этих параметров с помощью скалярной меры "истории" деформирования невозможно. Поэтому введем структурные тензоры

$$d\xi_\nu = A_\beta(\mathfrak{a}_\beta, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) \xi_\nu^0 d\mathfrak{a}_\beta, \quad (4.5.18)$$

где  $\nu = 1, 2$ ;

$$\xi_1^0 = \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{d\varepsilon_n^p}; \quad \xi_2^0 = \frac{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{kl}^p}{d\varepsilon_n^p d\varepsilon_n^p}; \quad d\varepsilon_n^p = \left( d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p \right)^{1/2};$$

$A_\beta$  - функции, определяемые экспериментально.

Поверхность деформирования зависит от инвариантов тензоров, входящих в (4.5.16) [23]. Для тензоров напряжений и деформаций рассмотрим систему инвариантов:

$$J_1 = \sigma_{ij} \delta_{ij}; \quad J_2 = s_{ij} s_{ij}; \quad J_3 = s_{ij} s_{jk} s_{ki};$$

$$E_1 = \varepsilon_{ij}^p \delta_{ij}; \quad E_2 = \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p; \quad E_3 = \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{jk}^p \varepsilon_{ki}^p;$$

$$D_1 = s_{ij} \varepsilon_{ij}^p; \quad D_2 = s_{ij} \varepsilon_{jk}^p \varepsilon_{ki}^p; \quad D_3 = s_{ij} s_{jk} \varepsilon_{ki}^p; \quad (4.5.19)$$

$$N_1 = \xi_1 \xi_1; \quad N_2 = \xi_2 \xi_2; \quad R_1 = \xi_1 \varepsilon_{ij}^p; \quad R_2 = \xi_2 \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{kl}^p;$$

$$II_1 = \xi_1 s_{ij}; \quad II_2 = \xi_2 s_{ij} s_{kl}; \quad C_1 = B_1 s_{ij}; \quad C_2 = B_2 s_{ij} s_{kl},$$

где

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij}.$$

Отсюда следует, что (4.5.16) примет вид

$$f(I_n, E_m, D_i, k_\alpha, C_q, \mathfrak{a}_\beta, N_\nu, R_\nu, II_\nu) = 0, \quad (4.5.20)$$

где  $n=1,2,3$ ;  $m=2,3$ ;  $i=1,2,3$ ;  $q=1,2$ ;  $\nu=1,2$ .

Изменение пластических свойств материала происходит при изменении напряжений и физических параметров  $k_\alpha$ . Будем считать, что напряжения  $\sigma_{ij}$  и физические параметры  $k_\alpha$  образуют пространство нагружения, в котором рассмотрим гиперповерхность нагружения

$$f_1 = f(\sigma_{ij}, k_\alpha, B_q; \underbrace{\varepsilon_{ij}^p, \mathfrak{a}_\beta, \xi_\nu}_{\text{const}}) = 0, \quad (4.5.21)$$

разделяющую области упругого и пластического деформирования и являющуюся подповерхностью гиперповерхности пластического деформирования при фиксированных значениях компонент пластической деформации, структурных параметров  $\mathfrak{a}_\beta$  и структурных тензоров  $\xi_\nu$ .

Примем, что если выполняется условие  $f_1 < 0$ , то точка, отображающая процесс деформирования, находится внутри гиперповерхности нагружения, и деформации являются упругими. Если отображающая точка переходит с поверхности  $f_1$  в область пространства, ограниченную этой поверхностью, то происходит разгрузка. Если же отображающая точка в процессе деформирования движется по поверхности  $f_1$ , то происходит процесс нейтрального нагружения. При этом функция  $f_1$  должна удовлетворять следующим условиям:

$$(f_1 \leq 0 \cap df_1 < 0) \cup (f_1 < 0 \cap df_1 \geq 0) -$$

разгрузка и нагрузка в упругой области,

$$f_1 = 0 \cap df_1 = 0 - \text{нейтральное нагружение.}$$

Таким образом, процесс активного нагружения имеет место при условии

$$f_1 = 0 \cap df_1 > 0. \quad (4.5.22)$$

Воспользуемся ассоциированным законом пластического течения

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{df}{ds_{ij}},$$

$d\lambda > 0$  - активное нагружение;  $d\lambda = 0$  - разгрузка, нагрузка в упругой области или нейтральное деформирование; после преобразований получим

$$d\varepsilon_{ij}^p = C_{ijkl}^p d\sigma_{kl} + \Psi_{ij(\alpha)}^p dk_\alpha, \quad (4.5.23)$$

где тензор переменных параметров

$$C_{ijkl}^p = -\frac{1}{\Phi} \sigma_{ij}^0 \sigma_{kl}^0; \quad (4.5.24)$$

тензор скоростей деформаций пластичности, вызванных изменением параметров  $k_\alpha$ ,

$$\Psi_{ij(\alpha)}^p = -\frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial f}{\partial k_\alpha} + \frac{\partial f_1}{\partial C_q} \frac{\partial C_q}{\partial k_\alpha} \right) \sigma_{ij}^0;$$

тензор активных напряжений

$$\sigma_{ij}^0 = \frac{\partial f_1}{\partial I_n} \frac{\partial I_n}{\partial s_{ij}} + \frac{\partial f_1}{\partial D_i} \frac{\partial D_i}{\partial s_{ij}} + \frac{\partial f_1}{\partial C_q} \frac{\partial C_q}{\partial s_{ij}} + \frac{\partial f_1}{\partial \Pi_v} \frac{\partial \Pi_v}{\partial s_{ij}};$$

функция упрочнения

$$\varphi = m \frac{\partial f}{\partial E_m} D_{m-1}^0 + \frac{\partial f}{\partial D_i} D_i^* + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_\beta} \mathfrak{a}_\beta^0 + \frac{\partial f}{\partial N_v} N_v^* + \frac{\partial f}{\partial R_v} R_v^* + \frac{\partial f}{\partial \Pi_v} \Pi_v^*;$$

здесь производная  $\frac{\partial f}{\partial k_\alpha}$  определяется при

$$C_q = \text{const}, \text{ а } \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_\beta} - \text{ при } R_v, \Pi_v, N_v = \text{const};$$

$$D_1^0 = \varepsilon_{ij}^p \sigma_{ij}^0; \quad D_2^0 = \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{jk}^p \sigma_{ki}^0;$$

$$D_1^* = s_{ij} \sigma_{ij}^0; \quad D_2^* = s_{ik} \varepsilon_{kj}^p \sigma_{ji}^0 + s_{ik} \sigma_{kj}^p \varepsilon_{ij}^p;$$

$$D_3 = s_{ik} s_{kj} \sigma_{ji}^0;$$

$$\mathfrak{a}_\beta^0 = H_{ij}^\beta \sigma_{ij}^0 + G_\beta (I_2^0)^{1/2};$$

$$\Psi_v = A_\beta (\mathfrak{a}_\beta, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) \mathfrak{a}_\beta^0 \frac{1}{I_2^{0v/2}};$$

$$I_2^0 = \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0;$$

$$N_1^* = \sigma_{ij}^0 \Psi_{ij}^0; \quad N_2^* = \sigma_{ij}^0 \sigma_{kl}^0 \Psi_{ij}^0 \sigma_{kl}^0;$$

$$\Pi_1^* = \Psi_{ij}^0 \sigma_{ij}^0; \quad \Pi_2^* = \Psi_{ij}^0 \sigma_{kl}^0 \sigma_{ij}^0 s_{kl};$$

$$R_1^* = \Psi_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^p + \xi_1 \sigma_{ij}^0;$$

$$R_2^* = \Psi_{ij}^0 \sigma_{kl}^0 \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{kl}^p + \xi_2 (\sigma_{ij}^p \varepsilon_{kl}^p + \varepsilon_{ij}^p \sigma_{kl}^0).$$

Рассмотрим различные частные зависимости для поверхности деформирования. Так, если поверхность деформирования имеет вид

$$f = I_2 + a_1^2 E_2 + a_2^2 N_2 + 2a_1 a_2 R_1 - 2a_1 D_1 - 2a_2 \Pi_2 - (\sigma_\tau)^2 = 0 \quad (4.5.25)$$

при  $a_1 = a_1(E_2, \mathfrak{a}, k_\alpha) \geq 0$ ;  $a_2 = a_2(E_2, \mathfrak{a}, k_\alpha) \geq 0$ ;

$\sigma_\tau = \sigma_\tau(\mathfrak{a}, k_\alpha) > 0$ , то тензор  $\sigma_{ij}^0$  определяется соотношением

$$\sigma_{ij}^0 = 2(s_{ij} - a_1 \varepsilon_{ij}^p - a_2 \xi_{ij}), \quad (4.5.26)$$

а уравнение поверхности нагружения представим следующим образом:

$$I_2^0 - 4\sigma_\tau^2(\mathfrak{a}, k_\alpha) = 0. \quad (4.5.27)$$

Рассмотрим частные случаи (4.5.26). Полагая в (4.5.26)  $a_1 = a_2 = 0$ , получим уравнение поверхности пластического деформирования в неизо-термической теории пластического течения с изотропным упрочнением

$$I_2 = \sigma_\tau^2(\mathfrak{a}, k_\alpha) = 0$$

и функцию упрочнения

$$\varphi = -4(\sigma_\tau)^2 \frac{\partial \sigma_\tau}{\partial \varepsilon_n^p}.$$

Компоненты тензора  $\sigma_{ij}^0$  определяются из (4.5.26) и поэтому из (4.5.24) получаем

$$\left. \begin{aligned} C_{ijmn}^p &= \frac{1}{(\sigma_\tau)^2} \frac{\partial \varepsilon_n^p}{\partial \sigma_\tau} s_{ij} s_{mn}; \\ \Psi_{ij(\alpha)}^p &= \frac{1}{\sigma_\tau} \frac{\partial \varepsilon_n^p}{\partial \sigma_\tau} \frac{\partial \sigma_\tau}{\partial k_\alpha} s_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.28)$$

Если ввести мгновенный предел текучести  $\sigma_\tau^0 = \sqrt{3/2} \sigma_\tau$  и интенсивность накопленных деформаций  $\varepsilon_n^p = \sqrt{2/3} \varepsilon_n$ , то (4.5.28) примет вид

$$\left. \begin{aligned} C_{ijmn}^p &= \frac{9}{4(\sigma_\tau^0)^2} \frac{\partial \varepsilon_n^p}{\partial \sigma_\tau^0} s_{ij} s_{mn}; \\ \Psi_{ij(\alpha)}^p &= \frac{3}{2\sigma_\tau^0} \frac{\partial \varepsilon_n^p}{\partial \sigma_\tau^0} \frac{\partial \sigma_\tau^0}{\partial k_\alpha} s_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.29)$$

Условия активного нагружения в этом случае имеют вид

$$\left( \sigma_\tau^0 = \sigma_n \right) \cap \left( d\sigma_n > \frac{\partial \sigma_\tau^0}{\partial k_\alpha} dk_\alpha \right). \quad (4.5.30)$$

Выражения (4.5.29) и (4.5.30) совпадают с приведенными в работе [9] зависимостями для неизо-термической теории пластического течения с изотропным упрочнением.

Полагая в (4.5.25)  $a_2 = 0$ , получаем уравнение поверхности пластического деформирования

$$I_2 + a_1^2 E_2 - 2a_1 D_1 - \sigma_\tau^2 = 0;$$

$$a_1 = a_1(E_2, k_\alpha); \quad \sigma_\tau = \sigma_\tau(\mathfrak{a}, k_\alpha).$$

Функция упрочнения в этом случае определяется соотношением

$$\varphi = -a_1 I_2^0 - 2 \frac{\partial a_1}{\partial E_2} (D_1^0)^2 - 2\sigma_\tau (I_2^0)^{1/2} \frac{\partial \sigma_\tau}{\partial \varepsilon_n^p},$$

а компоненты тензоров

$$C_{ijmn}^p = -\frac{1}{\varphi} \sigma_{ij}^0 \sigma_{mn}^0;$$

$$\Psi_{ij(\alpha)}^p = \frac{1}{\varphi} \left( \frac{\partial a_1}{\partial k_\alpha} D_1^0 + 2\sigma_\tau \frac{\partial \sigma_\tau}{\partial k_\alpha} \right) \sigma_{ij}^0.$$

Рассмотрим методику определения параметров  $a_1$  и  $\sigma_T$ . Испытывая образцы на растяжение до  $\sigma = \sigma_T^+$ , а затем на сжатие при постоянной температуре  $k_1 = T$ , находим при пластической деформации  $\epsilon_1^p$  напряжения  $\sigma_T^-$ , при которых начинается обратное пластическое деформирование. Из уравнения поверхности пластического деформирования, которая для одноосного растяжения примет вид

$$\frac{3}{2} \left( \frac{2}{3} \sigma_T^+ - a_1 \epsilon_1^p \right)^2 = \sigma_T^2,$$

а для последующего сжатия -

$$\frac{3}{2} \left( \frac{2}{3} \sigma_T^- - a_1 \epsilon_1^p \right)^2 = \sigma_T^2,$$

находим

$$a_1(T, \epsilon) = \frac{\sigma_T^+ + \sigma_T^-}{3\epsilon_1^p}; \quad \sigma_T(T, \epsilon) = \frac{\sigma_T^+ - \sigma_T^-}{\sqrt{6}},$$

что соответствует варианту теории Ю.И.Кадашевича, В.В.Новожилова, обобщенной на случай воздействия физических полей [23].

На основании рассмотренного в этом пункте общего подхода к выводу уравнений неизо-термической теории пластического течения можно обобщить различные варианты теорий анизотропного упрочнения на случай воздействия теплового поля, агрессивной среды, радиационного облучения [23].

Для получения окончательных уравнений, связывающих приращения деформаций и напряжений, представим приращения деформаций ползучести в виде

$$d\epsilon_{ij}^c = \psi_{ij}^c dt, \quad (4.5.31)$$

к которому приводят различные варианты теории ползучести, рассмотренные в п.4.5.5.

Суммируя приращения деформаций упругости, пластичности и ползучести, определяемые зависимостями соответственно (4.5.14), (4.5.23) и (4.5.31), получаем приращения полных деформаций

$$d\epsilon_{ij} = \left( A_{ijmn} + C_{ijmn}^p \right) d\sigma_{mn} + \left( \frac{\partial A_{ijmn}}{\partial k_\alpha} \sigma_{mn} + \frac{\partial \epsilon^0}{\partial k_\alpha} \delta_{ij} + \psi_{ij}^p(\alpha) \right) dk_\alpha + \psi_{ij}^c dt. \quad (4.5.32)$$

Здесь  $C_{ijmn}^p$  и  $\psi_{ij}^p$  отличны от нуля только в случае активного нагружения при выполнении условия (4.5.22).

При решении задач на ЭВМ соотношение (4.5.32) заменяется зависимостью в приращениях

$$\Delta \epsilon_{ij} = \left( A_{ijmn} + C_{ijmn}^p \right) \Delta \sigma_{mn} + \left( \frac{\partial A_{ijmn}}{\partial k_\alpha} \sigma_{mn} + \frac{\partial \epsilon^0}{\partial k_\alpha} \delta_{ij} + \psi_{ij}^p(\alpha) \right) \Delta k_\alpha + \psi_{ij}^c \Delta t, \quad (4.5.33)$$

в которой тензоры  $A_{ijmn}$ ,  $C_{ijmn}^p$ ,  $\psi_{ij}^p$ ,  $\psi_{ij}^c$  следует вычислить в промежуточной точке интервала изменения напряжений, физических параметров и времени.

Применение (4.5.33) позволяет построить универсальные алгоритмы шаговых методов решения задач деформирования с учетом "истории" нагружения.

### 4.5.3. ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ

Для решения задач неупругого деформирования используются современные численные методы, основанные на линеаризации нелинейных уравнений.

Идея линеаризации уравнений теории пластичности принадлежит А.А.Ильюшину, который предложил метод решения задач теории малых упругопластических деформаций - *метод упругих решений* [37]. Метод заключается в том, что пластическое тело заменяется упругим, имеющим такие же, как и пластическое, перемещения и деформации. Такая замена возможна при условии, что в теле возникают дополнительные напряжения, приводящие к дополнительным объемным и поверхностным силам. Эти первоначально неизвестные силы определяются путем последовательных приближений.

И.А.Биргер в работе [7] предложил другие методы линеаризации уравнений теории малых упругопластических деформаций: *метод дополнительных деформаций* и *метод переменных параметров упругости*. При линеаризации уравнений пластичности методом дополнительных деформаций предполагается, что в эквивалентном упругом теле напряжения совпадают с напряжениями пластического тела, а упругие характеристики соответствуют первоначальным упругим характеристикам. Такая замена возможна, если в эквивалентном упругом теле имеются начальные деформации типа температурных деформаций. Эти неизвестные начальные (дополнительные) деформации определяются последовательными приближениями.

Метод переменных параметров упругости заключается в том, что пластическое тело заменяется эквивалентным упругим, имеющим одинаковые с пластическим телом деформации и напряжения, что возможно, если эквивалентное упругое тело имеет переменные параметры упругости (для изотропного тела - переменные модуль упругости и коэффициент Пуассона). Для определения первоначально неизвестных переменных параметров упругости также используют последовательные приближения.

Впоследствии было предложено еще несколько методов линеаризации уравнений пластичности, развивающих идеи методов упругих решений, дополнительных деформаций и переменных параметров упругости [8, 13, 100, 107].

Путем линеаризации нелинейного вариационного уравнения принципа возможных перемещений Лагранжа для задач теории малых упругопластических деформаций и теории пластического течения ниже получены линейные соотношения для методов упругих решений, дополнительных деформаций, переменных параметров упругости, метода Ньютона-Канторовича и метода последовательных нагружений с коррекцией погрешности.

**Методы решения задач деформационной теории.** Принцип возможных перемещений Лагранжа для любой сплошной среды запишем в виде

$$\int_{\Omega} \sigma_{mn} \delta \epsilon_{mn} d\Omega - \int_{\Omega} F_{m\Omega} \delta u_m d\Omega - \int_S F_{mS} \delta u_{mS} dS = 0, \tag{4.5.34}$$

где  $\sigma_{mn}$  и  $\epsilon_{mn}$  - компоненты тензоров напряжений и деформаций, а  $u_m$ ,  $F_{m\Omega}$  и  $F_{mS}$  - компоненты векторов перемещений, объемных и поверхностных сил, действующих в объеме  $\Omega$  и на его поверхности  $S$ .

Задаваясь соотношением (4.5.3), связывающим напряжения и деформации в деформационной теории пластичности, из (4.5.34) можно получить разрешающие уравнения задачи термопластичности, которые нелинейны, так как переменные параметры упругости в (4.5.4) зависят от параметра пластичности  $\psi$ .

Рассмотрим два близких состояния в теле, которые характеризуются векторами перемещений  $u_{m(1)}$  и  $u_{m(2)}$ , деформациями  $\epsilon_{mn(1)}$  и  $\epsilon_{mn(2)}$  и напряжениями  $\sigma_{mn(1)}$  и  $\sigma_{mn(2)}$ . Тогда нелинейные зависимости (4.5.3) и (4.5.4) будут линеаризованы в методе дополнительных деформаций следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij(2)} &= C_{ijmn}^{(0)} \left( \epsilon_{mn(2)} - \alpha T \delta_{mn} - \epsilon_{mn(1)}^{(0)} \right); \\ \epsilon_{mn(1)}^{(0)} &= \left( 1 - \frac{1}{\psi_1} \right) \left( \delta_{mi} \delta_{nj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{mn} \right) \epsilon_{ij(1)}; \\ C_{ijmn}^{(0)} &= \frac{E}{1 + \nu} \left( \delta_{mi} \delta_{nj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{mn} \right) + \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \delta_{ij} \delta_{mn}, \end{aligned} \right\} \tag{4.5.35}$$

а в методе переменных параметров упругости

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij(2)} &= C_{ijmn}^{(1)} \left( \epsilon_{mn(2)} - \alpha T \delta_{mn} \right); \\ C_{ijmn}^{(1)} &= \frac{E}{(1 + \nu) \psi_1} \left( \delta_{mi} \delta_{nj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{mn} \right) + \\ &+ \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \delta_{ij} \delta_{mn}. \end{aligned} \right\} \tag{4.5.36}$$

Здесь и далее

$$\psi_1 = \frac{3E}{1 + \nu} \frac{\epsilon_{ii(1)}}{\sigma_{ii(1)}}. \tag{4.5.37}$$

Схемы метода дополнительных деформаций и метода переменных параметров упругости могут быть представлены графически в координатах  $\sigma_{ii}$ ,  $\epsilon_{ii}$  (рис. 4.5.2).

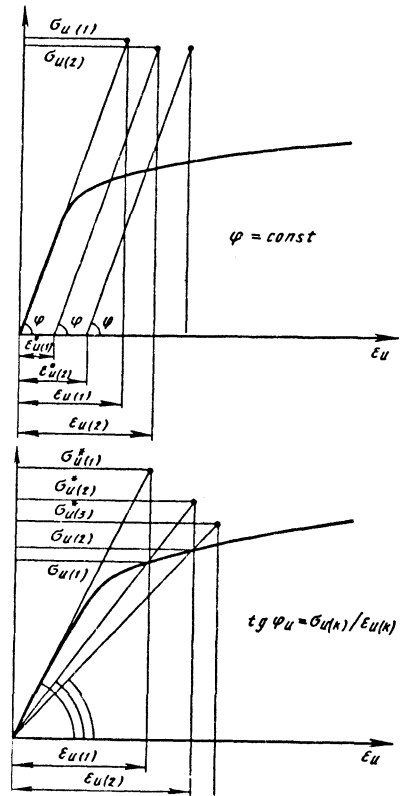


Рис. 4.5.2. Итерационные схемы методов дополнительных деформаций и переменных параметров упругости

Разрешающие уравнения итерационного метода дополнительных деформаций следуют из вариационного соотношения (4.5.34), которое с учетом (4.5.35) для  $k$ -го приближения будет таким:

$$\int_{\Omega} C_{ijmn(0)} \varepsilon_{mn(k)} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} C_{ijmn(0)} (\alpha T \delta_{mn} + \varepsilon_{mn}^0(k-1)) \delta \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} F_{m\Omega} \delta u_m d\Omega - \int_S F_{mS} \delta u_{mS} dS = 0, \quad (4.5.38)$$

а разрешающие уравнения итерационного процесса метода переменных параметров упругости следуют из (4.5.34), которое с учетом (4.5.36) для  $k$ -го приближения примет вид

$$\int_{\Omega} C_{ijmn(k-1)} \varepsilon_{mn(k)} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} C_{ijmn(k-1)} \alpha T \delta_{mn} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} F_{m\Omega} \delta u_m d\Omega - \int_{S_f} F_{mS} \delta u_{mS} dS = 0. \quad (4.5.39)$$

Вариационные соотношения (4.5.38) и (4.5.39) представляют слабые формулировки итерационных методов, из которых, задаваясь связью деформаций и перемещений, можно получить в качестве уравнений Эйлера уравнения в перемещениях для различных задач. Однако значение этих соотношений заключается в том, что они являются основой для вывода разрешающих уравнений при различных способах дискретизации задачи, например МКЭ, а также для получения теоретических оценок сходимости методов.

Впервые доказательство сходимости метода упругих решений было выполнено И.И.Ворovichem и Ю.П.Красовским [15] и базируется на оценке расстояний двух последовательных приближений от точного решения задачи. Это расстояние определяется в энергетической норме

$$\|v\| = \left( \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^v \varepsilon_{ij}^v d\Omega \right)^{1/2}$$

Для метода упругих решений, метода дополнительных деформаций и метода переменных параметров упругости получены оценки [15, 91, 95, 102]

$$\|u^* - u_2\| \leq \beta \|u^* - u_1\|, \quad (4.5.40)$$

где  $u^*$  - вектор точного решения задачи, а  $u_1$  и  $u_2$  - векторы двух последовательных приближений.

Параметр сжатия  $\beta$  для метода упругих решений и метода дополнительных деформаций определяется зависимостью

$$\beta = 1 - \frac{E_k^{*1}}{E},$$

где

$$E_k^{*1} = \frac{2(1+\nu)}{3} \frac{f(\varepsilon_n^*, T) - f(\varepsilon_n^1, T)}{\varepsilon_n^* - \varepsilon_n^1}.$$

средний касательный модуль кривой деформирования  $\sigma_n = f(\varepsilon_n, T)$  между точками с интенсивностью деформаций  $\varepsilon_n^*$  и  $\varepsilon_n^1$ .

Для метода переменных параметров параметр  $\beta$  имеет вид

$$\beta = 1 - \frac{E_c^{*1}}{E_c^{*1}},$$

где  $E_c^{*1}$  - максимальный секущий модуль кривой деформирования на интервале между точками  $\varepsilon_n^*$  и  $\varepsilon_n^1$ .

Отметим вариант метода дополнительных деформаций [13], в котором

$$C_{ijmn}^{(0)} = \frac{E}{(1+\nu)\psi_0} \left( \delta_{im} \delta_{jn} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{mn} \right) + \frac{E}{3(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{mn}, \quad (4.5.41)$$

а напряжения и деформации в двух последовательных приближениях связаны зависимостями

$$\sigma_{ij(2)} = C_{ijmn}^{(0)} \left( \varepsilon_{mn(2)} - \alpha T \delta_{mn} - \varepsilon_{mn(1)}^{(0)} \right);$$

$$\varepsilon_{mn(1)}^{(0)} = \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{1}{\psi_0} - \frac{1}{\psi_1} \right) \left( \delta_{im} \delta_{nj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{mn} \right),$$

где  $\psi_0$  - параметр ускорения сходимости.

Оценка скорости сходимости этого варианта метода приводит к неравенству (4.5.40), в котором параметр сжатия

$$\beta = \sup_{\Omega} \left[ \left| 1 - \frac{\psi_0}{\psi_1} \right| + \frac{\psi_0}{\psi_1} \left( 1 - \frac{\varepsilon_n^1}{f(\varepsilon_n^1, T)} \times \frac{f(\varepsilon_n^*, T) - f(\varepsilon_n^1, T)}{\varepsilon_n^* - \varepsilon_n^1} \right) \right].$$

В работах [13, 94] для этого метода получено ограничение на величину параметра ускорения  $\psi_0$ . Если в теле имеется упругая область с  $\psi_1 = 1$ , то  $\psi_0 < 2$ .

Рассмотренные методы решения задач пластичности имеют линейную скорость сходимости последовательных приближений [13, 15, 78, 91, 95]. Более высокой скоростью сходимости обладает метод Ньютона-Канторовича, соотношения ко-

того в вариационной постановке могут быть представлены в виде [94]

$$\int_{\Omega} C_{ijmn}^{uk} \varepsilon_{ij}^{k+1} \delta \varepsilon_{mn}^k d\Omega = \int_{\Omega} \Delta C_{ijmn}^k \varepsilon_{ij}^k \delta \varepsilon_{mn}^k d\Omega + (F, \delta u), \quad (4.5.42)$$

где

$$(F, \delta u) = \int_{\Omega} F_{m\Omega} \delta u_m d\Omega + \int_{S_F} F_{mS} \delta u_{mS} dS;$$

$$C_{ijmn}^{uk} = C_{ijmn(k)} + \frac{2E}{3(1+\nu)} \frac{1}{\varepsilon_{ii}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ii}} \left( \frac{1}{\Psi} \right) e_{ij}^k e_{mn}^k;$$

$$\Delta C_{ijmn}^k = \frac{2E}{3(1+\nu)} \frac{1}{\varepsilon_{ii}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ii}} \left( \frac{1}{\Psi} \right) e_{ij}^k e_{mn}^k.$$

При таком итерационном процессе на каждом шаге рассматривается фиктивное анизотропное тело с дополнительными деформациями.

Скорость сходимости метода Ньютона-Канторовича оценивается неравенством [94]

$$\|u^* - u_2\| \leq \beta \|u^* - u_1\|^\alpha,$$

где  $1 < \alpha \leq 2$ , а параметр  $\beta$  имеет вид

$$\beta = \frac{1}{2\sqrt{C}} \left| \frac{f''}{f'} \right| \frac{1}{\Omega^{1-\alpha}}; \quad C = \frac{\Phi' \varepsilon_{ii}}{\Phi} \leq 1.$$

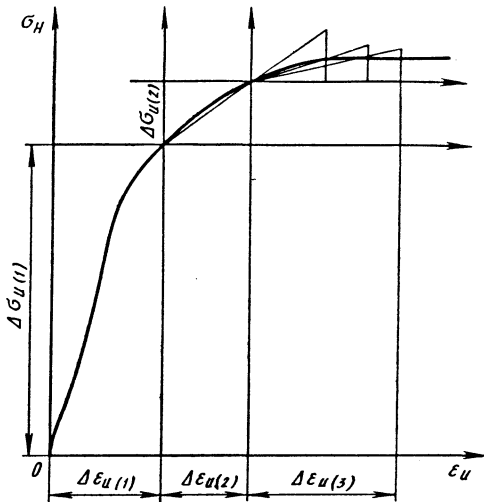


Рис. 4.5.3. Итерационная схема метода линеаризации при введении хордального модуля кривой деформирования

Основным недостатком метода Ньютона-Канторовича является то, что на каждом шаге необходимо решать задачу для анизотропного упругого тела. Поэтому в ряде случаев целесооб-

разно применять метод линеаризации уравнений пластичности, основанный на введении хордального модуля кривой деформирования. При этом процесс нагружения разбивают на несколько этапов, расчет которых проводят методом переменных параметров упругости. Начало первого этапа соответствует ненагруженному состоянию тела. Нагрузки на этапе определяются долей полной нагрузки, приложенной к телу. Переменные параметры упругости определяются на участке единой кривой деформирования (рис.4.5.3), соответствующем этапу нагружения. Начало первого участка совпадает с началом координат. Начало второго участка находится в точке с деформацией  $\varepsilon_{ii} = \Delta \varepsilon_{ii(1)}$ , определенной на первом этапе. Начало третьего участка находится в точке с деформацией  $\varepsilon_{ii} = \Delta \varepsilon_{ii(1)} + \Delta \varepsilon_{ii(2)}$ , соответствующей полной деформации двух этапов нагружения. Полные значения напряжений, деформаций, перемещений определяются суммированием их приращений по всем этапам. На каждом этапе скорость сходимости метода хордального модуля соответствует скорости сходимости метода переменных параметров упругости. Однако близость начального приближения к точному решению задач на этапе сокращает число приближений и соответственно время решения задачи.

**Методы решения задач теории пластического течения.** Для упругопластических материалов, свойства которых описываются уравнениями теории пластического течения, необходимо рассматривать процесс нагружения, считая, что нагрузки, перемещения, деформации и напряжения являются функциями параметра  $q$  (в частности,  $q$  определяет время протекания процесса). Рассмотрим два состояния процесса, соответствующие значениям  $q_i$  и  $q_{i+1}$ . В этом случае из (4.5.34) при  $q=q_{i+1}$  получим

$$\int_{\Omega} \Delta \sigma_{mn}^{i+1} \delta \varepsilon_{mn}^k d\Omega - \int_{\Omega} \Delta F_{m\Omega}^{i+1} \delta u_m d\Omega - \int_{S_F} \Delta F_{mS}^{i+1} \delta u_{mS} dS =$$

$$= \beta_i \left( \int_{\Omega} \sigma_{mn}^i \delta \varepsilon_{mn}^k d\Omega - \int_{\Omega} F_{m\Omega}^i \delta u_m d\Omega - \int_{S_F} F_{mS}^i \delta u_{mS} dS \right); \quad (4.5.43)$$

здесь  $\Delta \sigma_{mn}^{i+1}, \Delta F_{m\Omega}^{i+1}, \Delta F_{mS}^{i+1}$  - приращения действующих напряжений и нагрузок на интервале  $[q_i, q_{i+1}]$ ;  $\beta_i$  - весовой множитель, значение которого выбирают из условия улучшения сходимости.

Напряжения и деформации в момент  $q_i = q_{i+1}$

$$\sigma_{mn}^{i+1} = \sigma_{mn}^i + \Delta \sigma_{mn}^{i+1}; \quad \varepsilon_{mn}^{i+1} = \varepsilon_{mn}^i + \Delta \varepsilon_{mn}^{i+1}.$$

Из (4.5.33) следует, что приращения напряжений можно представить в виде

$$\Delta\sigma_{mn} = C_{mnij} \left( \Delta\varepsilon_{ij} - \psi_{ij}^T dT - \psi_{ij}^c \Delta\tau \right), \quad (4.5.44)$$

где

$$\psi_{ij}^T = \frac{\partial A_{ijmn}}{\partial T} \sigma_{mn} + \frac{\partial \varepsilon^0}{\partial T} \delta_{ij} + \psi_{ij}(T);$$

$C_{ijmn}$  - тензор, обратный тензору  $A_{ijmn} + C_{ijmn}^P$ .

Если принять, что  $\Delta q_{i+1} = \Delta\tau_{i+1}$  и  $\Delta T = T_{i+1} - T_i$ , то из (4.5.43) следует вариационное соотношение для получения разрешающих уравнений в задачах неизотермического пластического течения

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} C_{ijmn}^{i+1} \Delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{mn} d\Omega - \int_{\Omega} C_{ijmn}^{i+1} \psi_{ij}^T \Delta T \delta\varepsilon_{mn} d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} C_{ijmn}^{i+1} \psi_{ij}^c \Delta\tau \delta\varepsilon_{mn} d\Omega - \int_{\Omega} \Delta F_{m\Omega}^{i+1} \delta u_m d\Omega - \\ & - \int_{S_F} \Delta F_{mS}^{i+1} \delta u_{mS} dS = \beta_i \left( \int_{\Omega} \sigma_{mn}^i \delta\varepsilon_{mn} d\Omega - \right. \\ & \left. - \int_{\Omega} F_{m\Omega}^i \delta u_m d\Omega - \int_{S_F} F_{mS}^i \delta u_{mS} dS \right). \quad (4.5.45) \end{aligned}$$

ший из двух итерационных процессов. На рис. 4.5.4 показаны поверхности текучести для двух последовательных этапов нагружения, соответствующих началу и концу интервала  $[q_i, q_{i+1}]$ . Если для точки тела при активном нагружении началу интервала соответствует точка  $A$  на поверхности нагружения  $f_{1(1)}$ , то вектор приращений напряжений задается вектором  $\Delta\sigma_{AB}$ , направление которого определяется точкой  $B$  на поверхности  $f_{1(2)}$ . Первоначально положение точки  $B$  неизвестно. Предположим, что она находится на продолжении вектора  $\Delta\sigma_A$ , представляющего направление приращений напряжений при условии, что тензоры  $\psi_{ij}^T, \psi_{ij}^c$  определяются в точке  $A$ , а тензор  $C_{ijmn}$  в (4.5.44) является обратным к тензору  $A_{ijmn} + \gamma C_{ijmn}^P$ . Причем компоненты тензора  $A_{ijmn}$  и тензора  $C_{ijmn}^P$  вычисляются в точке  $A$ . Параметр  $\gamma$  определяется итерациями. Для этого запишем (4.5.44) в виде

$$\Delta\sigma_{mn} = C_{ijmn}(\gamma) \left( \Delta\varepsilon_{ij} - \psi_{ij}^T - \psi_{ij}^c \right). \quad (4.5.46)$$

Задавая  $\gamma = 1$ , получим разрешающие уравнения для определения приращений деформаций, по которым вычислим первое приближение полных деформаций, параметров  $\varepsilon_{\beta}, \xi_{\nu}$ , соответствующих концу интервала нагружения. Они определяют первое приближение поверхности нагружения в конце интервала. Подставляя в зависимость (4.5.21) напряжения и деформации, вычисленные для конца интервала нагружения с учетом (4.5.46), найдем такое  $\gamma$ , при котором  $f_{1(2)} = 0$ . Вычислим новые значения тензора  $C_{ijmn}(\gamma)$  и перейдем ко второй итерации определения приращений деформаций по (4.5.45). Таким образом, организуется итерационный процесс метода переменных параметров упругости для определения приращений деформаций по нормали к поверхности  $f_{1(1)}$ . Сходимость этого процесса оценивается близостью последовательных приближений  $\gamma$ , приращений деформаций или напряжений.

Введение параметра  $\gamma$  не изменяет ориентацию вектора  $\Delta\sigma_{AB}$  к поверхности  $f_{1(1)}$ , а только изменяет его длину и позволяет определить первое приближение поверхности  $f_{1(2)}$ . Для определения ее истинного положения применим второй итерационный процесс. Представим временной интервал  $\Delta t$  в виде

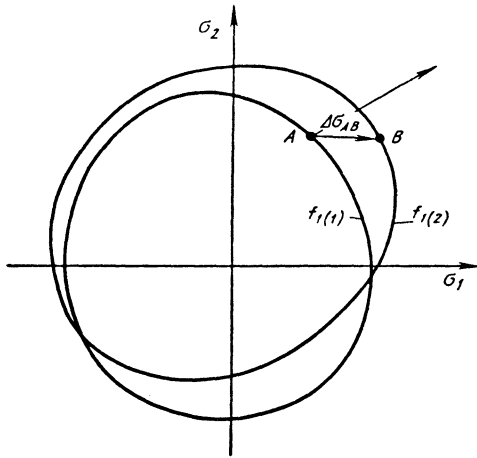


Рис. 4.5.4. Поверхности текучести для двух последовательных этапов нагружения

Зависимости (4.5.44) нелинейны, так как тензоры переменных параметров  $C_{ijmn}$ , скоростей тепловых деформаций  $\psi_{ij}^T$  и деформаций ползучести  $\psi_{ij}^c$  должны быть определены в промежуточной точке интервала. Для этого необходимо построить специальный алгоритм, состоя-



$$\Delta\tau(\zeta) = \Delta\tau\zeta, \quad 0 \leq \zeta \leq 1.$$

Выберем  $\zeta$  в точках интегрирования Гаусса  $\zeta_q$ , где  $q=1, \dots, n$ ,  $n$  - порядок точности квадратурной формулы Гаусса.

Проведем серию итерационных процессов метода переменных параметров упругости для интервалов  $\Delta\tau(\zeta_q)$ . Найдем соответствующие им приращения деформаций  $\Delta\varepsilon_{mn}^q$ , напряжений  $\Delta\sigma_{mn}^q$ , параметры  $\alpha_\beta^q$  и  $\xi_v^q$ ; по ним в каждом случае вычислим тензоры  $\Psi_{ij(q)}^T$ ,  $\Psi_{ij(q)}^c$ ,  $C_{ijmn}^p(q)$ , а затем средние значения тензоров на интервале  $\Delta\tau$ :

$$\langle C_{ijmn}^p \rangle = \sum_{q=1}^n w_q C_{ijmn}^p(q);$$

$$\langle \Psi_{ij}^T \rangle = \sum_{q=1}^n w_q \Psi_{ij}^T(q);$$

$$\langle \Psi_{ij}^c \rangle = \sum_{q=1}^n w_q \Psi_{ij}^c(q),$$

где  $w_q$  - весовые коэффициенты.

По усредненным значениям тензоров можно, применяя итерационный процесс метода переменных параметров упругости, найти новые значения приращений деформаций, напряжений и других параметров в точках интегрирования. Повторяя процедуру усреднения и итерационные процессы метода переменных параметров несколько раз, найдем окончательное положение поверхности  $f_{1(2)}$  и направление вектора  $\Delta\sigma_{AB}$ . Для экономии времени вычислений необходимо при вычислении последовательных значений  $\Delta\varepsilon_{mn}(q)$  в качестве начального приближения брать параметр  $\gamma_{q-1}$ , полученный при расчете предыдущего интервала, а после усреднения при вычислении нового тензора  $C_{ijmn}(\gamma)$  в точке  $q=1$  в качестве начального приближения - параметр  $\gamma_1$ , полученный до усреднения в этой точке.

Так как параметр  $\gamma$  аналогичен параметру  $\psi$  в (4.5.4), то для линеаризации (4.5.44) можно применять все методы, разработанные в деформационной теории пластичности.

Рассмотренный двойной итерационный процесс позволяет обеспечить выполнение условий активного нагружения и обеспечивает нахождение точки, отображающей процесс на поверхности деформирования. Но шаговый алгоритм обладает особенностью накапливать по-

грешности, вызванные погрешностями аппроксимации и округления при решении задач большой размерности на ЭВМ. Эти погрешности могут привести к нарушению устойчивости шагового алгоритма и его расходимости [90, 92]. Введение в (4.5.45) весового множителя  $\beta_i$  позволяет обеспечить коррекцию погрешностей и устойчивое поведение алгоритма при условии  $0 < \beta_i < 2$ , если шаги по  $\tau$  удовлетворяют условиям Куранта-Леви [90, 92]. Более подробно эти вопросы рассмотрены в п.4.6.2.

#### 4.5.4. СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ И ТЕРМОПОЛЗУЧЕСТИ

Рассмотренные в п.4.5.1 и 4.5.2 теории неупругого поведения материала в неизотермических условиях не учитывают в явной форме его микроструктуру и микромеханизм процесса деформирования, т.е. являются феноменологическими. Использование современных физических представлений о структуре конструкционных материалов и микромеханизме неупругого деформирования позволяет построить соответствующие физические модели термопластичности и термоползучести. Однако физические модели весьма сложны и их нерационально использовать при проведении инженерных расчетов теплонапряженных конструкций. Такие модели путем численного анализа дают возможность выявить общие закономерности в поведении материала при характерных режимах термического и неизотермического нагружения теплонапряженных конструкций и при необходимости уточнить более простые и удобные для практического применения феноменологические теории.

Промежуточное положение между физическими моделями и феноменологическими теориями деформирования занимают структурные модели, состоящие из совокупности механически связанных между собой структурных элементов, наделенных определенными свойствами. Структурные модели материала менее сложны, чем физические. Путем подбора параметров можно добиться удовлетворительного по точности описания такими моделями поведения реальных конструкционных материалов при произвольных режимах нагружения. Это позволяет использовать структурные модели при проведении инженерных расчетов теплонапряженных конструкций и для анализа их работоспособности.

Поскольку анализ пропорционального нагружения при сложном напряженном состоянии эквивалентен рассмотрению одноосного нагружения и, кроме того, во многих прикладных задачах теплонапряженную конструкцию удается свести к расчетной схеме, соответствующей одноосному напряженному состоянию, целесообразно сначала остановиться на варианте струк-

турной модели одноосного нагружения, которая способна описать большинство существенных особенностей в поведении реального поликристаллического конструкционного материала, которые проявляются при нагружении теллонажренных конструкций.

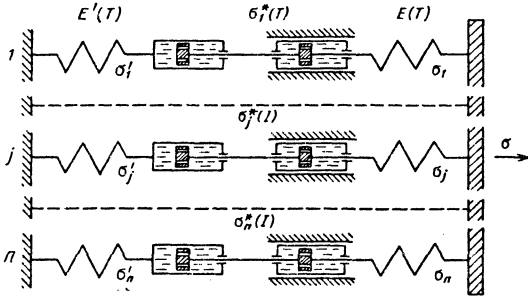


Рис. 4.5.5. Структурная модель материала

В этом варианте материал представляется совокупностью нагруженных в одном направлении совместно деформируемых *структурных элементов*, обладающих индивидуальными характеристиками пластичности и ползучести (рис.4.5.5). Поведение каждого структурного элемента качественно соответствует поведению отдельно взятой системы скольжения в кристаллическом зерне [28] и описывается механическим аналогом, состоящим из двух упругих и двух вязких элементов и элемента сухого трения. Различие в характеристиках структурных элементов отражает, прежде всего, различную ориентацию систем скольжения в зернах и зерен в поликристаллическом материале и позволяет путем согласования с экспериментальными данными интегрально учесть влияние ряда дополнительных факторов, которые не учитываются даже физической моделью поликристалла.

Примем, что диаграмма мгновенного деформирования каждого структурного элемента с номером  $j$  в координатах  $\epsilon_j, \sigma_j$  имеет упругий участок с зависящим от температуры  $T$  модулем упругости  $E(T)$  и участок линейного упрочнения с коэффициентом упрочнения  $E'(T)$ , причем  $E(T)$  и  $E'(T)$  одинаковы для всех элементов. Диаграммы отличаются лишь пределами текучести  $\sigma_j^*(T)$ , которые одинаковым образом зависят от температуры, т.е.  $\sigma_j^*(T) / \sigma_j^*(T_0) = f(T / T_0)$ , где  $T_0$  - температура, для которой определяется спектр распределения  $\sigma^*(T_0)$  по структурным элементам. Этот спектр находят по экспериментальной диаграмме растяжения материала  $\sigma = \sigma(\epsilon, T_0)$  путем ее двойного дифференцирования:

$$S(\sigma^*) = \frac{1}{E(T_0)[E(T_0) - E'(T_0)]} \frac{\partial^2 \sigma(\epsilon, T_0)}{\partial \epsilon^2}$$

От непрерывного криволинейного спектра  $S(\sigma^*)$  переходят к ступенчатому распределению, причем значение  $\delta_j = S(\sigma_j^*) \Delta \sigma_j^*$  показывает, какую долю общей нагрузки воспринимает  $j$ -й структурный элемент с пределом текучести  $\sigma_j^*$  при упругом деформировании всех  $n$  элементов в модели, если выполнено условие нормирования

$$\sum_{j=1}^n \delta_j = 1.$$

При произвольной программе одноосного нагружения материала напряжение  $\sigma_j$  в каждом структурном элементе находят с учетом текущего значения  $T$  из условия совместности деформации всех элементов

$$\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_j = \dots = \epsilon_n, \quad (4.5.47)$$

причем напряжение в материале (приняв во внимание правило суммирования по повторяющимся индексам)

$$\sigma = \sigma_j \delta_j. \quad (4.5.48)$$

В каждом структурном элементе при неупругом деформировании возникают внутренние напряжения  $\sigma_j'$ , при отсутствии ползучести

$$\sigma_j' = E'(T) \left[ \epsilon - \sigma_j / E(T) \right], \quad (4.5.49)$$

если выполняется условие  $|\sigma_j - \sigma_j'| = \sigma_j^*(T)$ , или

$$\sigma_j - \sigma_j' = \sigma_j^*(T) \text{sign}(\sigma_j - \sigma_j'). \quad (4.5.50)$$

При активном нагружении (например, при простом изотермическом растяжении материала за пределом упругости) это условие выполняется и из (4.5.49) и (4.5.50) следует

$$\sigma_j = \frac{E'(T)\epsilon + \sigma_j^*(T) \text{sign}(\sigma_j - \sigma_j')}{1 + E'(T) / E(T)}. \quad (4.5.51)$$

Ползучесть структурных элементов модели описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_j^{(c)} &= A(T) \text{sh} \left[ B(T) \frac{\sigma_j - \sigma_j'}{\sigma_j^*(T)} \right]; \\ \dot{\epsilon}_j' &= \frac{\dot{\sigma}_j'}{E'(T)} = \dot{\epsilon}_j^{(c)} - A'(T) \text{sh} \left[ B'(T) \frac{\sigma_j'}{\sigma_j^*(T)} \right]. \end{aligned} \quad (4.5.52)$$

В общем случае зависящие от  $T$  коэффициенты  $A(T)$  и  $A'(T)$ ,  $B(T)$  и  $B'(T)$  могут попарно отличаться друг от друга. По физическому смыслу  $A(T)$  и  $A'(T)$  связаны с энергиями активации соответственно процессов преодоления дислокации препятствий своему движению и процессов переползания дислокаций в параллельные плоскости скольжения [28]. В первом приближении можно считать эти энергии одинаковыми и положить  $A(T) = A'(T)$ . Коэффициенты  $B(T)$  и  $B'(T)$ , связанные с соответствующими активационными объемами, также будем считать одинаковыми:  $B(T) = B'(T)$ .

При этих условиях процесс ползучести, описываемый соотношениями (4.5.52) для  $\sigma_j = \text{const}$ , после неустановившейся стадии переходит в установившуюся с постоянной скоростью ползучести

$$\left(\xi_j\right)_{\infty} = \left(\dot{\varepsilon}_j^{(c)}\right) = A(T) \operatorname{sh} \left[ B(T) \frac{\sigma_j}{2\sigma_j^*(T)} \right] = \text{const},$$

$$j = \overline{1; n}, \quad (4.5.53)$$

причем  $\left(\sigma_j'\right)_{\infty} = \sigma_j / 2$ . Неустановившаяся стадия отсутствует, если  $|\sigma_j| \geq 2\sigma_j^*(T)$ . Тогда согласно (4.5.50) сразу наступает установившаяся стадия ползучести при скорости

$$\left(\xi_j\right)_{\infty} = A(T) \operatorname{sh} \left[ B(T) \frac{\sigma_j - \sigma_j^*(T) \operatorname{sign} \sigma_j}{\sigma_j^*(T)} \right] = \text{const},$$

$$j = \overline{1; n}.$$

И в том и другом случаях поведения отдельных структурных элементов модели в целом дает единую зависимость для неустановившейся и установившейся стадий ползучести при  $\sigma$ ,  $T = \text{const}$ . В начале процесса скорость ползучести различных структурных элементов различна. Это вызывает перераспределение  $\sigma_j$  до тех пор, пока отношения  $\sigma_j / \sigma_j^*(T)$  и  $\sigma_j' / \sigma_j^*(T)$  не станут практически одинаковыми для всех структурных элементов. Тогда значения  $\left(\xi_j\right)_{\infty}$  также становятся одинаковыми и наступает установившаяся стадия ползучести.

Если известны значения  $\xi_I$  и  $\xi_{II}$  установившейся скорости ползучести материала при  $T = \text{const}$  и двух значениях  $\sigma_I$  и  $\sigma_{II}$ , то согласно соотношению (4.5.53)

$$\frac{\xi_I}{\operatorname{sh} [B(T)k_1 / 2]} = \frac{\xi_{II}}{\operatorname{sh} [B(T)k_2 / 2]}, \quad (4.5.54)$$

где с учетом формулы (4.5.48)

$$k_1 = \frac{\sigma_j}{\sigma_j^*(T)} \Big|_I = \frac{\sigma_I}{\sigma_j^*(T)\delta_j}$$

и

$$k_2 = \frac{\sigma_j}{\sigma_j^*(T)} \Big|_{II} = \frac{\sigma_{II}}{\sigma_j^*(T)\delta_j}.$$

Из уравнения (4.5.54) можно найти  $B(T)$ , а затем вычислить

$$A(T) = \xi_I / \operatorname{sh} [B(T)k_1 / 2] = \xi_{II} / \operatorname{sh} [B(T)k_2 / 2]. \quad (4.5.55)$$

Помимо достаточно точной интерполяции диаграмм растяжения по температурам и кривых простого последования по температурам и напряжениям структурная модель в хорошем согласии с результатами опытов описывает поведение материала в процессе ползучести при переменных напряжениях и температурах, а также отражает взаимное влияние мгновенной пластической деформации и деформации ползучести. При скачкообразном изменении напряжения (ступенчатое нагружение) наиболее близкое к реальному описанию поведения материала дает теория упрочнения [59]. Однако во многих экспериментах [78, 79] подмечено, что по сравнению с опытными данными из этой теории следуют заниженные скорости ползучести при переходе от меньшего напряжения к большему и, наоборот, завышенные - при переходе от большего к меньшему напряжению. Структурная модель лучше описывает для этого случая опытные данные, чем теория упрочнения. Хорошее согласие с экспериментальными данными дает структурная модель и в случае ползучести при знакопеременных напряжениях.

Описание поведения материала при знакопеременном нагружении в соответствии с принципом Мазинга [28] согласуется с опытом, когда влияние изотропного упрочнения менее существенно, чем анизотропного. Однако при многократных циклических нагружениях накапливается значительная по абсолютной величине пластическая деформация (параметр Уджвиста [59]), которая приводит к заметному изотропному упрочнению материала [67, 103]. Эту особенность в поведении материала можно отразить в структурной модели, если каждый структурный элемент наделить свойством изотропного упрочнения.

Некоторые материалы, находящиеся в неустойчивом состоянии после наклепа или закалки, при циклическом нагружении разупрочняются [67, 103]. Поведение таких материалов также описывается структурной моделью, но при этом

индивидуальные пределы текучести  $\sigma_j^*$  структурных элементов должны уменьшаться по мере возрастания накопленной пластической деформации  $q_j^* = \left| \int d\epsilon_j^{(p)} \right|$ .

Таким образом, при одноосном нагружении конкретная структурная модель описывает все те эффекты в поведении реальных конструкционных материалов, которые удастся отразить в характеристиках отдельно взятого структурного элемента, аналогичного по свойствам системе скольжения в кристаллическом зерне. В этом отношении структурная модель по своим возможностям не уступает физической модели поликристалла [28], причем точность описания свойств реальных материалов структурной моделью оказывается выше благодаря более простому и непосредственному подбору характеристик структурных элементов по данным стандартных испытаний образцов этих материалов. Результаты, полученные при одноосном нагружении, нетрудно распространить на случай пропорционального нагружения при произвольном напряженном состоянии, если в структурной модели от  $\sigma$  и  $\epsilon$  перейти к интенсивностям  $\sigma_n$  и  $\epsilon_n$  напряженного и деформированного состояний.

Возможно формальное обобщение структурной модели на случай непропорционального нагружения при произвольном напряженном состоянии. При этом каждый структурный элемент устанавливает связь между  $(\sigma_n)_j$  и  $(\epsilon_n)_j$

для некоторого микрообъема материала в предположении однородности в макрообъеме материала напряженного или деформированного состояний или же в предположении более общего закона механического взаимодействия микрообъемов между собой [28, 40]. Параметры напряженно-деформированного состояния макрообъема материала находят осреднением соответствующих параметров микрообъемов.

Если структурные элементы модели наделять свойствами, учитывающими накопление повреждений в материале, то появится возможность описания процесса разрушения при различных режимах нагружения, в том числе при знакопеременном неизотермическом нагружении и на III (ускоряющейся) стадии ползучести. Количественно накопление повреждений можно характеризовать изменением значений  $\delta_j$ , причем более чувствительными будут более слабые структурные элементы, для которых значения  $\sigma_j^*$  меньше. Именно эти элементы модели будут раньше выходить из строя, вызывая перераспределение нагрузки между оставшимися элементами, пока все они последовательно не потеряют работоспособность.

Однако расширение возможностей структурной модели связано с ее усложнением, что

вызывает трудности при ее практическом использовании в расчетах теплонапряженных конструкций. Кроме того, подбор параметров усложненной модели по данным испытаний образцов материала превращается в самостоятельную и довольно непростую задачу, которая не всегда имеет удовлетворительное решение (или же при задании допустимой погрешности ее решение может быть неоднозначным).

При проведении практических расчетов теплонапряженных конструкций для описания поведения конструкционного материала при одноосном нагружении можно воспользоваться упрощенным вариантом модели, который также базируется на механическом аналоге системы скольжения в кристаллическом зерне (рис. 4.5.6), но теперь этот аналог описывает свойства материала в целом.

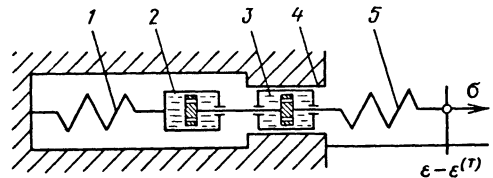


Рис. 4.5.6. Механический аналог поведения упруговязкопластического материала

При сравнительно низких температурах, когда термически активируемые процессы протекают довольно медленно (вязкость жидкости в элементах вязкого трения механического аналога на рис. 4.5.6 весьма велика), приращение мгновенной пластической деформации возникает при условии

$$|\sigma - \sigma'| = \sigma^*, \quad (4.5.56)$$

где  $\sigma$  и  $\sigma'$  - приложенное к образцу материала напряжение и среднее значение микронапряжений в материале, соответствующие на рис. 4.5.6 внешней силе и натяжению пружины 1, которая в общем случае имеет нелинейную характеристику, а  $\sigma^*$  - предел текучести, соответствующий в аналоге силе сопротивления при движении элемента 4 сухого трения относительно направляющих. Примем, что в изотермических условиях  $\sigma'$  зависит от температуры  $T$  и мгновенной пластической деформации  $\epsilon^{(p)}$ :

$$\sigma' = f'(T, \epsilon^{(p)}); \quad \epsilon^{(p)} = \int d\epsilon^{(p)}, \quad (4.5.57)$$

а  $\sigma^*$  - от  $T$  и абсолютной величины накопленной пластической деформации  $q_p^*$ :

$$\sigma^* = f^*(T, q_p^*); \quad q_p^* = \int |d\epsilon^{(p)}|. \quad (4.5.58)$$

Таким образом, функция  $f'$  характеризует анизотропное упрочнение, а  $f^*$  - изотропное.

Условие (4.5.56) необходимо, но недостаточно для возникновения приращений мгновенной пластической деформации. Его следует дополнить условием [28]

$$d'|\sigma - \sigma'| = d'[(\sigma - \sigma')\text{sign}(\sigma - \sigma')] > d'\sigma^*, \quad (4.5.59)$$

где штрих у знака дифференциала указывает, что приращения вычисляются без учета упрочнения, вызванного текущим пластическим деформированием, т.е. при  $d\epsilon^{(p)} = 0$ . Тогда с учетом соотношений (4.5.57) и (4.5.58) вместо условия (4.5.59) получим

$$\begin{aligned} (d\sigma - k_T dT)\text{sign}(\sigma - \sigma') > k_T^* dT; \\ k_T = \frac{\partial f'}{\partial T}; \quad k_T^* = \frac{\partial f^*}{\partial T}. \end{aligned} \quad (4.5.60)$$

При выполнении условия (4.5.56) замена в условии (4.5.60) знака "больше" на равенство будет соответствовать нейтральному нагружению, а замена на знак "меньше" - началу упругой разгрузки материала. Ясно, что в обоих случаях приращения мгновенной пластической деформации не происходит,  $d\epsilon^{(p)} = 0$ .

Поскольку (4.5.56) является необходимым условием пластического деформирования, для полных приращений согласно соотношениям (4.5.57) и (4.5.58) справедливо равенство

$$\begin{aligned} (d\sigma - k_T dT - k_p d\epsilon^{(p)})\text{sign}(\sigma - \sigma') = \\ = k_T^* dT + k_p^* dq_p^*. \end{aligned} \quad (4.5.61)$$

Из сравнения выражений (4.5.60) и (4.5.61) следует

$$\begin{aligned} k_p d\epsilon^{(p)} \text{sign}(\sigma - \sigma') + k_p^* dq_p^* > 0; \\ k_p = \frac{\partial f'}{\partial \epsilon^{(p)}}; \quad k_p^* = \frac{\partial f^*}{\partial q_p^*}. \end{aligned}$$

Для устойчиво деформируемых материалов знак  $d\epsilon^{(p)}$  совпадает со знаком разности  $\sigma - \sigma'$ , т.е. с учетом соотношений (4.5.58)

$$d\epsilon^{(p)} \text{sign}(\sigma - \sigma') = |d\epsilon^{(p)}| = dq_p^*.$$

Из двух последних соотношений получим ограничение на коэффициенты упрочнения в виде [28]

$$k_p + k_p^* = \frac{\partial f'}{\partial \epsilon^{(p)}} + \frac{\partial f^*}{\partial q_p^*} > 0. \quad (4.5.62)$$

В случае материала, обладающего изотропным разупрочнением ( $k_p^* < 0$ ), устойчивое пласти-

ческое деформирование возможно, если  $k_p > |k_p^*|$ . В предельном случае  $k_p = |k_p^*|$ , как и для идеально пластичного материала с постоянным пределом текучести, установление однозначной связи  $d\sigma$  и  $d\epsilon^{(p)}$  возможно лишь при наличии дополнительных условий.

С повышением температуры интенсифицируются термически активируемые процессы и даже при неизменных во времени условиях теплового и механического воздействия возникает приращение неупругой деформации материала из-за ползучести. При этом скорость деформации ползучести

$$\frac{d\epsilon^{(c)}}{dt} = \dot{\epsilon}^{(c)} = f_c(T, \sigma - \sigma'). \quad (4.5.63)$$

В механическом аналоге (см.рис. 4.5.6) явлению ползучести соответствует конечная вязкость жидкости в нелинейных элементах вязкого трения 2 и 3, а функции  $f_c$  отвечает характеристика элемента 3. Термическое разупрочнение материала вызывает уменьшение  $\sigma'$  по абсолютному значению, причем для неизотермических условий [28]

$$\dot{\sigma}' = k_T \dot{T} + k_p \dot{\epsilon}^{(p)} + k_c f_c(T, \sigma - \sigma') - f''(T, \sigma'), \quad (4.5.64)$$

где  $k_c = \partial f' / \partial \epsilon^{(c)}$ . В случае одинакового механизма анизотропного упрочнения материала при мгновенной пластической деформации  $\epsilon^{(p)}$  и деформации ползучести  $\epsilon^{(c)}$  имеем  $k_p = k_c$ . В общем случае  $k_p \neq k_c$  и  $f' = f'(T, \epsilon^{(p)}, \epsilon^{(c)})$ . Функция  $f''$  задает скорость снятия анизотропного упрочнения материала вследствие релаксации микронапряжений и соответствует характеристике элемента 2 вязкого трения на рис. 4.5.6.

Скорость полной деформации

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{(e)} + \dot{\epsilon}^{(T)} + \dot{\epsilon}^{(p)} + \dot{\epsilon}^{(c)} \quad (4.5.65)$$

включает скорости упругой  $\dot{\epsilon}^{(e)} = \dot{\sigma} / E - (\sigma / E^2) \dot{T} (dE / dT)$ , температурной  $\dot{\epsilon}^{(T)}$ , мгновенной пластической  $\dot{\epsilon}^{(p)}$  деформации и деформации ползучести  $\dot{\epsilon}^{(c)}$ , определяемой согласно соотношению (4.5.63). Модуль упругости  $E(T)$  материала в аналоге на рис.4.5.6 соответствует жесткости пружины 5,  $\dot{\epsilon}^{(p)}$  пропорционально скорости движения элемента 4 сухого трения относительно неподвижных направляющих, а  $\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^{(T)}$  - скорости точки приложения внешней силы.

При высоких температурах процесс термического разупрочнения материала влияет и на значение  $\sigma^*$ . При достаточно длительной выдержке образца в изотермических условиях

( $\dot{T} = 0$ ) без неупругого деформирования ( $\dot{\varepsilon}^{(p)} = \dot{\varepsilon}^{(c)} = 0$ ) значение  $\sigma^*$  должно стремиться к характерному для данного материала уровню  $\sigma_0^*(T)$ , который соответствует пределу текучести после высокотемпературного отжига. Положим

$$\dot{\sigma}^* = k_T \dot{T} + k_p \dot{q}_p + k_c \dot{q}_c - f^{**}(T, \sigma^* - \sigma_0^*), \quad (4.5.66)$$

где

$$k_c^* = \frac{\partial f^*}{\partial q_c^*}; \quad q_c^* = \int_0^t |\dot{\varepsilon}^{(c)}| dt.$$

В случае одинакового механизма изотропного упрочнения материала вследствие накопленных значений мгновенной пластической деформации  $q_p^*$  и деформации ползучести  $q_c^*$  имеем  $k_p^* = k_c^*$ .

В общем случае  $k_p^* \neq k_c^*$  и  $f^* = f^*(T, q_p^*, q_c^*)$ .

Функция  $f^{**}$  характеризует скорость снятия изотропного упрочнения, а также позволяет учесть эффект запаздывания во времени изменения предела текучести по отношению к изменению температуры [28]. Теперь в дополнение к необходимому условию (4.5.56) возникновения мгновенных пластических деформаций вместо условия (4.5.60) согласно соотношениям (4.5.59), (4.5.64) и (4.5.66) получим

$$\left[ \dot{\sigma} - k_T \dot{T} - k_c \dot{\varepsilon}^{(c)} + f^{**}(T, \sigma') \right] \text{sign}(\sigma - \sigma') > > k_T \dot{T} + k_c \dot{q}_c - f^{**}(T, \sigma^* - \sigma_0^*), \quad (4.5.67)$$

но ограничение (4.5.62) остается в силе.

Таким образом, упрощенный вариант модели описывает основные эффекты, которые характерны для неупругого поведения конструкционного материала в неизоотермических условиях. Среди этих эффектов следует отметить [29]: изменение предела текучести при изменении направления деформирования (эффект Баушингера); следование принципу Мазинга, распространенному на неизоотермические условия; циклическое изотропное упрочнение и разупрочнение материала; неустановившуюся и установившуюся стадии ползучести при постоянной нагрузке; взаимное влияние деформации ползучести и мгновенной пластической деформации; изменение скорости ползучести при ступенчатом нагружении одного знака и знакопеременном нагружении; обратную ползучесть в процессе разгрузки и в разгруженном состоянии; релаксацию микронапряжений и возврат пластических свойств (отдых) материала; влияние рекристаллизации на снятие изотропного упрочнения; запаздывание изменения предела текучести в неизоотермических условиях.

Этот перечень учитываемых эффектов свидетельствует о больших возможностях данного варианта модели, для подбора параметров которого требуется сравнительно небольшой объем экспериментальных данных, полученных при

стандартных испытаниях образцов при одноосном нагружении. Физические представления о микромеханизме неупругого деформирования кристаллических тел [28] позволяют конкретизировать функции  $f_c$ ,  $f^*$  и  $f^{**}$  и тем самым упростить подбор числовых значений параметров. Эти функции можно представить в виде двух сомножителей. По аналогии с соотношениями (4.5.52) первый из них зависит лишь от температуры, а второй представляется в виде гиперболического синуса, аргумент которого зависит от соответствующего напряжения и температуры. Тогда можно написать

$$f_c = A \text{sh} \left( B \frac{\sigma - \sigma'}{\sigma^*} \right); \quad f^* = A' \text{sh} \left( B' \frac{\sigma'}{\sigma^*} \right); \\ f^{**} = A^* \text{sh} \left( B^* \frac{\sigma^* - \sigma_0^*}{\sigma^*} \right), \quad (4.5.68)$$

где  $A, A', A^*$  и  $B, B', B^*$  - подбираемые по результатам испытаний образцов материала функции температуры  $T$ .

Если считать влияние мгновенной пластической деформации и деформации ползучести на упрочнение материала одинаковым, т.е.  $k_p = k_c$

и  $k_p^* = k_c^*$ , а также принять  $A' = k_p A$  и  $B = B'$ , то число подбираемых параметров заметно уменьшится. Для их подбора будет достаточно диаграмм растяжения при различных температурах и кривых ползучести при различных напряжениях и температурах, а для разделения эффектов изотропного и анизотропного упрочнения - данных знакопеременного циклического нагружения [22, 103]. Параметры функции  $f^{**}$  можно подобрать по данным о скорости рекристаллизации при отжиге и времени запаздывания изменения предела текучести в неизоотермических условиях.

Для циклически стабильных материалов, не проявляющих изотропного упрочнения или разупрочнения ( $k_p^* = k_c^* \equiv 0$  и  $f^{**} \equiv 0$ ), подбор ограничивается функциями  $k_p, k_T, k_T^*$  и  $A, B$ .

Для подбора  $k_p, k_T$  и  $k_T^*$  достаточно располагать диаграммами мгновенного растяжения в заданном диапазоне изменения температуры и аппроксимировать их за пределом текучести  $\sigma^* = f^*(T)$  зависимостью вида

$$\sigma(\varepsilon, T) = \sigma^* + \sigma' = f^*(T) + f'(T, \varepsilon^{(p)}) = \\ = f^*(T) + f' \left( T, \varepsilon - \frac{\varepsilon}{E} \right). \quad (4.5.69)$$

Для подбора функций  $A$  и  $B$  достаточно располагать кривыми ползучести, по которым можно найти значения скорости ползучести

$\dot{\varepsilon}_{\infty}^{(c)}(\sigma, T)$  на установившейся стадии при заданных значениях  $\sigma$  и  $T$ . Тогда при фиксированной температуре из уравнения (4.5.54) по значениям  $\xi_I = \dot{\varepsilon}_{\infty}^{(c)}(\sigma_I, T)$ ;  $\xi_{II} = \dot{\varepsilon}_{\infty}^{(c)}(\sigma_{II}, T)$  и  $k_1 = \sigma_I / \sigma^*$ ;  $k_2 = \sigma_{II} / \sigma^*$

при двух напряжениях  $\sigma_I$  и  $\sigma_{II}$  нетрудно найти  $B$ , а затем из формулы (4.5.55) определить  $A$ .

При ограниченных значениях  $\dot{\sigma}$  и  $\dot{\varepsilon}$  и сравнительно высоких температурах вклад мгновенной пластической деформации в суммарную неупругую деформацию оказывается небольшим. Диаграмма изотермического растяжения, полученная экспериментально в таких условиях, не дает возможности выделить явно зависимость мгновенной пластической деформации от действующего напряжения. Это, в свою очередь, затрудняет обработку результатов испытаний на ползучесть при наличии начальной пластической деформации и достоверное построение кривых ползучести при  $\sigma = \text{const}$ . Такая диаграмма представляет собой функцию  $\sigma = \sigma(\varepsilon, T)$  или обратную ей  $\varepsilon = \varepsilon(\sigma, T)$ , построенную (в зависимости от условий испытаний) либо при  $\dot{\varepsilon} = \text{const}$  (постоянная скорость движения захватов испытательной машины), либо при  $\sigma = \text{const}$  (постоянная скорость возрастания нагрузки) [59].

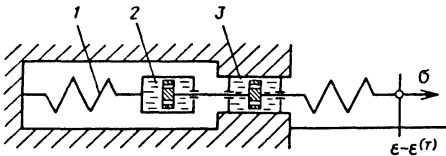


Рис. 4.5.7. Механический аналог поведения вязкоупругого материала

При умеренных значениях  $\dot{\sigma}$  и  $\dot{\varepsilon}$  для описания поведения материала целесообразно в механическом аналоге на рис. 4.5.6 отказаться от элемента сухого трения и моделировать неупругую деформацию лишь при помощи элементов вязкого трения (рис. 4.5.7). Тогда работу такого аналога можно описать соотношениями

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{(e)} + \dot{\varepsilon}^{(n)} + \dot{\varepsilon}^{(T)};$$

$$\dot{\varepsilon}^{(e)} = \sigma / E - (\sigma / E^2) \dot{T} (dE / dT); \quad (4.5.70)$$

$$\dot{\varepsilon}^{(n)} = \left| 1 - \left( |\sigma - \sigma'| / \sigma^* \right)^m \right|^{-1} A \text{sh} \left[ B(\sigma - \sigma') / \sigma^* \right]; \quad (4.5.71)$$

$$\dot{\sigma} = k_T \dot{T} + k_n \left[ \dot{\varepsilon}^{(n)} - A' \text{sh} \left( B' \sigma' / \sigma^* \right) \right]; \quad (4.5.72)$$

$$\dot{\sigma} = k_1 \dot{T} + k_n \dot{q}_n - A' \text{sh} \left[ B' \left( 1 - \sigma_0^* / \sigma^* \right) \right], \quad (4.5.73)$$

где

$$k_n = \frac{\partial f'}{\partial \varepsilon^{(n)}}; \quad k_n^* = \frac{\partial f^*}{\partial q_n^*}; \quad f' = f'(T, \varepsilon^{(n)});$$

$$f^* = f^*(T, q_n^*); \quad \varepsilon^{(n)} = \int_0^t \dot{\varepsilon}^{(n)} dt; \quad q_n^* = \int_0^t \dot{\varepsilon}^{(n)} | \dot{\varepsilon}^{(n)} | dt.$$

Коэффициент  $\left| 1 - \left( |\sigma - \sigma'| / \sigma^* \right)^m \right|^{-1}$  при  $m \gg 1$

быстро возрастает, когда  $|\sigma - \sigma'| / \sigma^* \rightarrow 1$ , что ограничивает рост  $\sigma$  даже при весьма больших значениях  $\dot{\varepsilon}$ .

Если для малых деформаций пренебречь изотропным упрочнением и в изотермических условиях ( $\dot{T} = 0, \dot{\varepsilon}^{(T)} = 0$ ) считать  $\dot{\sigma}^* = 0$ , то при  $\sigma = \text{const}$ ,  $A = A'$  и  $B = B'$  установившееся значение скорости неупругой деформации согласно соотношениям (4.5.71) и (4.5.72) будет близко к

$$\dot{\varepsilon}_{\infty}^{(n)} = A \text{sh}(B\sigma / 2), \quad (4.5.74)$$

причем  $\sigma' \approx \sigma / 2$  и  $\sigma - \sigma' \approx \sigma / 2$ . Значение  $m$  должно быть подобрано из условия, чтобы  $1 - \left( |\sigma / 2| / \sigma^* \right)^m$  мало отличалось от единицы.

#### 4.5.5. МОДЕЛИ НЕУПУГОВОГО ПОВЕДЕНИЯ КОНСТРУКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

Рассмотренный в п.4.5.4 упрощенный вариант модели деформирования материала при одноосном нагружении нетрудно распространить на случай произвольного напряженного состояния и непропорционального нагружения [28]. Условию (4.5.56) возникновения приращения мгновенной пластической деформации поставим в соответствие условие пластичности в виде

$$f_p = \frac{3}{2} a_{ij} a_{ij} - (\sigma^*)^2 = 0; \quad a_{ij} = s_{ij} - \rho_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.5.75)$$

где  $s_{ij}$ ,  $a_{ij}$  и  $\rho_{ij}$  - компоненты девиаторов полных и активных напряжений и микронапряжений, а  $\sigma^*$  определяется в общем случае согласно формуле (4.5.66), но теперь с соответствующими индексами  $p$  или  $c$ :

$$dq^* = \sqrt{\frac{2}{3} de_{ij} de_{ij}} \geq 0; \quad q^* = \int dq \geq 0;$$

$$q^* = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} \geq 0,$$

т.е.

$$\dot{\sigma}^* = k_T^* \dot{T} + k_p^* \dot{q}_p^* + k_c^* \dot{q}_c^* - f^{**}(T, \sigma^* - \sigma_0^*). \quad (4.5.76)$$

По аналогии с одноосным напряженным состоянием (см.п.4.5.4) необходимое условие (4.5.75) следует дополнить неравенством

$$d'a_{и} > d'\sigma^*; \quad a_{и} = \sqrt{\frac{3}{2} a_{ij} a_{ij}}, \quad (4.5.77)$$

где штрих у знака дифференциала, по-прежнему, обозначает приращение интенсивности активных напряжений  $a_{и}$  или предела текучести  $\sigma^*$  без учета упрочнения, вызванного текущим пластическим деформированием. Если условие (4.5.75) выполнено, но  $d'a_{и} = d'\sigma^*$  либо  $d'a_{и} < d'\sigma^*$ , то происходит соответственно нейтральное нагружение либо начинается упругая разгрузка материала.

При одновременном выполнении условий (4.5.75) и (4.5.77) справедливы соотношения [12]

$$de_{ij}^{(p)} = \frac{3}{2} \frac{a_{ij}}{a_{и}} dq_p^*; \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} = \frac{3}{2} \frac{a_{ij}}{a_{и}} \dot{q}_p^*. \quad (4.5.78)$$

Если же условия (4.5.75) и (4.5.77) не выполняются, то  $de_{ij}^{(p)}$  и  $dq_p^*$ , а также  $\dot{\epsilon}_{ij}^{(p)}$  и  $\dot{q}_p^*$  равны нулю, и неупругое деформирование материала определяется лишь ползучестью, причем

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} = \frac{3}{2} \frac{a_{ij}}{a_{и}} f_c(T, a_{и}); \quad \dot{q}_c^* = f_c(T, a_{и}) \geq 0, \quad (4.5.79)$$

где в функции  $f_c$  из соотношения (4.5.63) вместо  $\sigma - \sigma'$  в качестве аргумента используется  $a_{и}$ . Для компонентов девиатора скоростей неупругой деформации при выполнении условий (4.5.75) и (4.5.77) согласно формулам (4.5.78) и (4.5.79) получим

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(n)} = \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} + \dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} = \frac{3}{2} \frac{a_{ij}}{a_{и}} \left[ \dot{q}_p^* + f(T, a_{и}) \right], \quad (4.5.80)$$

а для скоростей полной деформации

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_0 \sigma_{ij} + \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_0 \sigma_{ij} + \dot{\epsilon}_{ij}^{(e)} + \dot{\epsilon}_{ij}^{(n)}, \quad (4.5.81)$$

причем

$$\dot{\epsilon}_0 = \dot{\sigma}_0 / (3K) + \dot{\epsilon}^{(T)} - (\sigma_0 / K^2) (\dot{T} / 3) dK / dT; \\ \dot{\epsilon}_{ij}^{(e)} = \dot{s}_{ij} / (2G) - (s_{ij} / G^2) (\dot{T} / 2) dG / dT,$$

где  $\dot{\sigma}_0$  - скорость изменения среднего (гидростатического) напряжения.

По аналогии с формулой (4.5.64) для произвольного напряженного состояния будем иметь

$$\dot{\rho}_{ij} = \frac{2}{3} \left( k_p \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} + k_c \dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} \right) + \frac{k_T \dot{T} - f''(T, \rho_{и})}{\rho_{и}} \rho_{ij}; \quad (4.5.82)$$

здесь

$$\rho_{и} = \sqrt{\frac{3}{2} \rho_{ij} \rho_{ij}}; \quad k_p = \frac{\partial f'}{\partial \epsilon_{и}^{(p)}}; \\ k_c = \frac{\partial f'}{\partial \epsilon_{и}^{(c)}}; \quad k_T = \frac{\partial f'}{\partial T}.$$

Функции  $f'(T, \epsilon_{и}^{(p)}, \epsilon_{и}^{(c)})$  и  $f''(T, \rho_{и})$  характеризуют анизотропное упрочнение и термическое разупрочнение материала. В случае одинакового механизма анизотропного упрочнения вследствие мгновенной пластической деформации и деформации ползучести  $f' = f'(T, \epsilon_{и}^{(n)})$

и  $k_p = k_c = \partial f' / \partial \epsilon_{и}^{(n)}$ , где  $\epsilon_{и}^{(n)} = \sqrt{(2/3) e_{ij}^{(n)} e_{ij}^{(n)}}$ .

Поскольку условие (4.5.75) должно выполняться в любой момент пластического деформирования материала,  $\dot{a}_{и} = \dot{\sigma}_{и}^*$ . Отсюда с учетом соотношений (4.5.76), (4.5.78), (4.5.79) и (4.5.82) получим

$$\left( k_p + k_p^* \right) \dot{q}_p^* = \frac{3}{2} \frac{a_{ij}}{a_{и}} \dot{s}_{ij} - \left( k_c + k_c^* \right) f_c(T, a_{и}) - \\ - k_T^* \dot{T} + f^{**}(T, \sigma^* - \sigma_0^*) - \frac{k_T \dot{T} - f''(T, \rho_{и})}{2 a_{и} \rho_{и}} \times \\ \times \left( s_{и}^2 - a_{и}^2 - \rho_{и}^2 \right). \quad (4.5.83)$$

Условие (4.5.77) теперь эквивалентно положительности правой части выражения (4.5.83), но при этом должно оставаться в силе ограничение (4.5.62). Из выражения (4.5.83) с учетом формул (4.5.80) и (4.5.81) нетрудно получить связь между скоростями полной деформации и напряжений в виде

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \left( \frac{\dot{\sigma}_0}{3K} - \frac{\sigma_0}{3K^2} \dot{T} \frac{dK}{dT} + \dot{\epsilon}^{(T)} \right) \delta_{ij} + \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} - \\ - \frac{s_{ij}}{2G^2} \dot{T} \frac{dG}{dT} + \frac{3}{2} \frac{a_{ij}}{k_p + k_p^*} \left[ \frac{3}{2} \frac{a_{mn}}{a_{и}} \dot{s}_{mn} - \right.$$



$$\begin{aligned}
& -k_T^* \dot{T} + \left( k_p + k_p^* - k_c - k_c^* \right) f_c(T, a_n) - \\
& - \frac{k_T \dot{T} - f''(T, \rho_n)}{2a_n \rho_n} \left( s_n^2 - a_n^2 - \rho_n^2 \right) + \\
& + f^{**} \left( T, \sigma^* - \sigma_0^* \right) \left. \right\} \quad (4.5.84)
\end{aligned}$$

При одинаковых механизмах анизотропного и изотропного упрочнения из-за мгновенной пластической деформации и деформации ползучести  $k_p + k_p^* - k_c - k_c^* = 0$  и закон ползучести (4.5.79) в явной форме не оказывает влияния на  $\dot{\epsilon}_{ij}$ . Однако это влияние косвенно проявляется в соответствии с соотношениями (4.5.76) и (4.5.82) через изменение  $\sigma^*$  и  $\rho_{ij}$ , а значит, и через изменение  $\rho_n$ ,  $a_{ij} = s_{ij} - \rho_{ij}$  и  $a_n$ .

В некоторых случаях для определения напряженно-деформированного состояния конструкций при неупругом поведении материала целесообразно вместо формулы (4.5.84) пользоваться зависимостью, аналогичной закону Гука для линейно-упругого анизотропного материала:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = S_{ijmn}^{(n)} \dot{\sigma}_{mn} + \dot{\epsilon}_{ij}^0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.5.85)$$

где

$$\begin{aligned}
S_{ijmn}^{(n)} &= S_{ijmn} + \frac{9/4 \cdot a_{ij} a_{mn}}{a_n^2 k_p + k_p^*}; \\
\dot{\epsilon}_{ij}^0 &= \left( \frac{dS_{ijmn}}{dT} \sigma_{mn} - \alpha_{ij} \right) \dot{T} + \frac{3}{2} \frac{a_{ij} / a_n}{k_p + k_p^*} \times \\
& \times \left[ \left( k_p + k_p^* - k_c - k_c^* \right) f_c(T, a_n) + \right. \\
& + f^{**} \left( T, \sigma^* - \sigma_0^* \right) - k_T^* \dot{T} - \frac{k_T \dot{T} - f''(T, \rho_n)}{2a_n \rho_n} \times \\
& \left. \times \left( s_n^2 - a_n^2 - \rho_n^2 \right) \right], \quad \alpha_{ij} = \frac{\partial \epsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T}. \quad (4.5.86)
\end{aligned}$$

Если условия (4.5.75) и (4.5.77) не выполняются, т.е.  $\dot{q}_p^* = 0$ , то в формуле (4.5.85)  $S_{ijmn}^{(n)} = S_{ijmn}$ , а  $\dot{\epsilon}_{ij}^0 = \left[ \left( dS_{ijmn} / dT \right) \sigma_{mn} + \alpha_{ij} \right] \dot{T} + (3/2) \times \left( a_{ij} / a_n \right) f_c(T, a_n)$ . Для материала, изотропного в упругом состоянии, коэффициенты податливости  $S_{ijmn} = S_{ijmn}^0$  и выражаются через зависящие от температуры  $T$  модули всестороннего сжатия  $K$  и сдвига  $G$  или через  $G$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ :

$$\begin{aligned}
S_{ijmn}^0 &= \frac{1}{2G} \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{2G}{9K} \right) \delta_{ij} \delta_{mn} + \frac{1}{2} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) \right] = \\
&= \frac{1}{2G} \left[ \frac{1}{2} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) - \frac{1+\nu}{\nu} \delta_{ij} \delta_{mn} \right].
\end{aligned}$$

Очевидно, что  $S_{ijmn}^{(n)}$  и  $\dot{\epsilon}_{ij}^0$  являются компонентами симметричных тензоров соответственно четвертого и второго ранга. Поэтому первый из них можно представить в виде матрицы  $6 \times 6$   $[S^{(n)}]$  с компонентами

$$S_{pq}^{(n)} = S_{pq} + \frac{9/4}{a_n^2} \frac{a_p a_q}{k_p + k_p^*}, \quad p, q = 1, 2, \dots, 6,$$

а второй - в виде матрицы  $6 \times 1$  (вектора-столбца)  $\{\dot{\epsilon}^0\}$  с компонентами

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}_p^0 &= \left( \frac{dS_{pq}}{dT} \sigma_q + \alpha_p \right) \dot{T} + \frac{3}{2} \frac{a_p / a_n}{k_p + k_p^*} \times \\
& \times \left[ \left( k_p + k_p^* - k_c - k_c^* \right) f_c(T, a_n) + \right. \\
& + f^{**} \left( T, \sigma^* - \sigma_0^* \right) - k_T^* \dot{T} - \\
& \left. - \frac{k_T \dot{T} - f''(T, \rho_n)}{2a_n \rho_n} \left( s_n^2 - a_n^2 - \rho_n^2 \right) \right], \quad (4.5.87)
\end{aligned}$$

где  $a_p$  и  $\alpha_p$  - соответственно компоненты векторов

$$\begin{aligned}
\{a\}^T &= \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, 2a_{23}, 2a_{31}, 2a_{12}\}; \\
\{\alpha\}^T &= \{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, 2\alpha_{23}, 2\alpha_{31}, 2\alpha_{12}\},
\end{aligned}$$

а  $\sigma_q$  - компоненты вектора

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}.$$

При нарушении условий (4.5.75) и (4.5.77)

$$S_{pq}^{(n)} = S_{pq} \quad \text{и} \quad \dot{\epsilon}_p^0 = \left[ \left( dS_{pq} / dT \right) \sigma_q + \alpha_p \right] \dot{T} + (3/2) \left( a_p / a_n \right) f_c(T, a_n).$$

Если материал изотропен в упругом состоянии, то  $S_{pq} = S_{pq}^0$  и выражаются через  $K$  и  $G$  или  $G$  и  $\nu$ :

$$\begin{aligned}
S_{pq}^0 &= \frac{1}{3G} + \frac{1}{9K} = \frac{1}{2(1+\nu)G} \quad \text{при} \quad p = q = 1, 2, 3; \\
S_{pq}^0 &= -\frac{1}{6G} + \frac{1}{9K} = -\frac{\nu}{2(1+\nu)G} \\
& \quad \text{при} \quad p, q = 1, 2, 3, \text{ но } p \neq q; \\
S_{pq}^0 &= 1/G \quad \text{при} \quad p = q = 4, 5, 6 \text{ и}
\end{aligned}$$

$S_{pq}^0 = 0$  во всех остальных случаях.

В итоге вместо формулы (4.5.85) получим

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \left[ S^{(n)} \right] \{\dot{\sigma}\} + \left\{ \dot{\varepsilon}^0 \right\} \quad \text{или}$$

$$\dot{\varepsilon}_p = S_{pq}^{(n)} \dot{\sigma}_q + \dot{\varepsilon}_p^0, \quad p, q = 1, 2, \dots, 6, \quad (4.5.88)$$

где векторы  $\{\dot{\varepsilon}\}$  и  $\{\dot{\sigma}\}$  скоростей деформации и напряжений строятся аналогично векторам деформации и напряжений.

Если не учитывать влияние термического разупрочнения на предел текучести  $\sigma^*$ , которое для реальных материалов, по-видимому, становится существенным при приближении рабочих температур к температуре рекристаллизации, то в (4.5.66)  $f^{**} \equiv 0$  и в представленном виде описания неупругого деформирования материала по своим возможностям близко к одному из вариантов теории пластичности и ползучести с анизотропным упрочнением, разработанной Н.Н.Малининым и Г.М.Хажинским [59]. В частном случае  $f_c^* \equiv 0$ , что соответствует затвердеванию жидкости в элементе 3 вязкого трения в аналоге на рис.4.5.6, неупругие деформации возможны лишь при выполнении условий (4.5.75) и (4.5.77), а их скорости при постоянных действующих напряжениях  $\sigma_{ij}$  определяются

только скоростями снятия изотропного и анизотропного упрочнения. Если к тому же  $f^{**} \equiv 0$  и  $f^* \equiv 0$ , т.е. отсутствует термическое разупрочнение, то описание неупругого поведения материала отвечает варианту теории пластического течения Ю.И.Кадашевича и В.В.Новожилова [40, 59].

При  $f^* \equiv 0$ , что соответствует затвердеванию жидкости в элементе 2 вязкого трения (см.рис.4.5.6), скорости деформации ползучести при неизменных  $\sigma_{ij}$  уменьшаются по абсолютному значению по мере упрочнения материала, а после разгрузки отдыха материала сопровождается обратной ползучестью. Если к тому же элемент сухого трения 4 в механическом аналоге на рис.4.5.6 оказывается неподвижным относительно направляющих, то мгновенные пластические деформации не возникают, а поведение материала описывается одним из вариантов технической теории ползучести - теорией упрочнения в виде соотношения (4.5.79), причем компоненты  $\rho_{ij}$

являются однозначными функциями  $\varepsilon_{ij}^{(c)}$  и  $T$ . После разгрузки вследствие обратной ползучести неупругие деформации постепенно исчезают, т.е. материал ведет себя как нелинейное вязкоупругое тело.

Наоборот, если вязкость жидкости в элементе 2 на рис. 4.5.6 становится ничтожной и ею можно пренебречь, то компоненты микронап-

ряжений  $\rho_{ij} \rightarrow 0$  и материал не обладает анизотропным упрочнением, что может иметь место для реальных конструкционных материалов при весьма высоких температурах. В этом случае мгновенные пластические деформации и деформации ползучести не влияют друг на друга. При  $k_c^* \equiv 0$  и  $f^{**} \equiv 0$  имеем

$$e_{ij}^{(p)} = \frac{3 \varepsilon_{ii}^{(p)}}{2 \sigma_{ii}} s_{ij}; \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{(c)} = \frac{3 s_{ij}}{2 \sigma_{ii}} f_c(T, \sigma_{ii});$$

$$\sigma_{ii} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}},$$

что отвечает теории пластического течения при изотропном упрочнении и теории установившейся ползучести.

При бесконечной жесткости пружины 1 (см.рис. 4.5.6) и затвердевании жидкости в элементе 3 вязкого трения получим модель вязкопластического материала. В этом случае при  $\sigma_{ii} \leq \sigma^*$  материал ведет себя как упругий, а при  $\sigma_{ii} > \sigma^*$  мгновенные пластические деформации не возникают, но происходит ползучесть по закону:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(c)} = \frac{3 s_{ij}}{2 k_c \sigma_{ii}} f^*(T, \sigma_{ii} - \sigma^*). \quad (4.5.89)$$

Такой материал не обладает анизотропным упрочнением и его поведение не зависит от истории нагружения.

Наконец, при ничтожной вязкости жидкости в элементе 3 вязкого трения (см.рис. 4.5.6) элемент 4 сухого трения остается неподвижным относительно направляющих, активные напряжения  $a_{ij} = s_{ij} - \rho_{ij} = 0$ , а мгновенные деформации определяются как для нелинейно упругого материала из соотношений

$$e_{ij}^{(p)} = \frac{3 \varepsilon_{ii}^{(p)}}{2 \sigma_{ii}} s_{ij} = \frac{3}{2 k_p} s_{ij},$$

характерных для деформационной теории (теории малых упругопластических деформаций) [59]. Ползучесть такого материала снова соответствует установившейся стадии

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(c)} = \frac{3 s_{ij}}{2 k_c \sigma_{ii}} f^*(T, \sigma_{ii}).$$

Поскольку после разгрузки в двух последних случаях микронапряжения отсутствуют, отсутствует и обратная ползучесть.

Таким образом, представленное описание неупругого деформирования конструкционного материала, построенное на основе механического аналога, отражающего поведение системы скольжения в кристаллическом теле, в своих

частных случаях соответствует различным вариантам феноменологических теорий пластичности и ползучести.

Нетрудно обобщить на случай сложного напряженного состояния и непропорционального нагружения и описание неупругого деформирования материала при одноосном нагружении, соответствующее механическому аналогу, изображенному на рис. 4.5.7. Прежде всего для изотропного в упругой области материала первую формулу (4.5.70) следует заменить на соотношение (4.5.81) и для скорости изменения компонентов девиатора неупругой деформации воспользоваться соотношением

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(n)} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_n^{(n)}}{a_n} a_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.5.90)$$

где интенсивность скорости неупругой деформации [28]

$$\dot{\varepsilon}_n^{(n)} = \left| 1 - (a_n / \sigma^*)^m \right|^{-1} f_n(T, a_n) = \dot{q}_n^* \geq 0, \quad (4.5.91)$$

а функция  $f_n(T, a_n)$  является характеристикой элемента 3 вязкого трения в аналоге на рис. 4.5.7. Теперь вместо формулы (4.5.82) будем иметь

$$\dot{\rho}_{ij} = \frac{2}{3} k_n \dot{\varepsilon}_{ij}^{(n)} + \frac{k_T \dot{T} - f''(T, \rho_n)}{\rho_n} \rho_{ij}, \quad (4.5.92)$$

причем  $k_n = \partial f'(T, \varepsilon_n^{(n)}) / \partial \varepsilon_n^{(n)}$ . Функции  $f'(T, \varepsilon_n^{(n)})$  и  $f''(T, \rho_n)$ , как и ранее, описывают анизотропное упрочнение и термическое разупрочнение материала, а в аналоге на рис. 4.5.7 являются характеристиками пружины 1 и элемента 2 вязкого трения. В формуле (4.5.76) второй и третий члены в правой части следует объединить и написать

$$\dot{\sigma}^* = k_T \dot{T} + k_n^* \dot{\varepsilon}_n^{(n)} - f^{**}(T, \sigma^* - \sigma_0^*), \quad (4.5.93)$$

где

$$k_n^* = \frac{\partial f^*(T, q_n^*)}{\partial q_n^*}; \quad q_n^* = \int dq_n^*;$$

$$dq_n^* = \sqrt{\frac{2}{3} de_{ij}^{(n)} de_{ij}^{(n)}} \geq 0.$$

По-прежнему, функция  $f^*(T, q_n^*)$  описывает изотропное упрочнение материала, зависящее от температуры  $T$  и интенсивности  $q_n^*$  накопленной неупругой деформации, а функция  $f^{**}(T, \sigma^* - \sigma_0^*)$  - термически активируемое

изотропное разупрочнение и запаздывание во времени изменения характеристики изотропного упрочнения  $\sigma^*$  при изменении температуры. Из выражения (4.5.81) с учетом соотношений (4.5.90) и (4.5.91) получим

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \left( \frac{\dot{\sigma}_0}{3K} - \frac{\sigma_0}{3K^2} \dot{T} \frac{dK}{dT} + \dot{\varepsilon}^{(T)} \right) \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2G} - \frac{\dot{T}}{2G^2} s_{ij} \frac{dG}{dT} + \frac{3}{2a_n} \left| 1 - (a_n / \sigma^*)^m \right|^{-1} a_{ij} f_n(T, a_n), \quad (4.5.94)$$

или в форме, аналогичной закону Гука для линейно-упругого изотропного тела,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\dot{\sigma}_0}{3K} \delta_{ij} + \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \dot{\varepsilon}_{ij}^0, \quad (4.5.95)$$

где

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^0 = \left( \dot{\varepsilon}^{(T)} - \frac{\sigma_0}{3K^2} \dot{T} \frac{dK}{dT} \right) \delta_{ij} - \frac{\dot{T}}{2G^2} s_{ij} \frac{dG}{dT} + \frac{3}{2a_n} \left| 1 - \left( \frac{a_n}{\sigma^*} \right)^m \right|^{-1} a_{ij} f_n(T, a_n). \quad (4.5.96)$$

Для упругоанизотропного материала вместо этих формул будем иметь

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = S_{ijmn} \dot{\sigma}_{mn} + \left( \alpha_{ij} + \frac{dS_{ijmn}}{dT} \sigma_{mn} \right) \dot{T} + \frac{3}{2a_n} \left| 1 - \left( \frac{a_n}{\sigma^*} \right)^m \right|^{-1} a_{ij} f_n(T, a_n)$$

или в матричной форме -

$$\{\dot{\varepsilon}\} = [S] \{\dot{\sigma}\} + \{\dot{\varepsilon}^0\}. \quad (4.5.97)$$

Используя правило суммирования по повторяющемуся индексу, это соотношение можно также записать в виде

$$\dot{\varepsilon}_p = S_{pq} \dot{\sigma}_q + \dot{\varepsilon}_p^0, \quad p, q = 1, 2, \dots, 6,$$

где

$$\dot{\varepsilon}_p^0 = \left( \alpha_p + \frac{dS_{pq}}{dT} \sigma_q \right) \dot{T} + \frac{3}{2a_n} \left| 1 - \left( \frac{a_n}{\sigma^*} \right)^m \right|^{-1} a_p f_n(T, a_n). \quad (4.5.98)$$

Преимущество последнего варианта описания неупругого деформирования материала состоит в том, что отпадает необходимость в проверке условий пластичности материала, а скорость изменения компонентов полной деформации представляется единым выражением (4.5.94). Это создает определенные удобства при алгоритмизации решения прикладных задач неупругого деформирования элементов конструкций в неизоотермических условиях.

## 4.5.6. ЭФФЕКТ ПАМЯТИ ФОРМЫ

Память формы называют специфическое свойство некоторых металлических сплавов, которое состоит в восстановлении деформаций, сообщенных материалу при температуре ниже некоторой переходной, в результате его нагревания до температуры выше переходной. Указанное свойство определяется особенностями кристаллической структуры и фазовых трансформаций этих сплавов при изменениях термонапряженного состояния. Под фазовыми трансформациями при этом понимают переход исходной (условно ее можно назвать высокотемпературной) фазы в мартенситную (низкотемпературную) фазу - мартенсит - при понижении температуры, и также обратный переход мартенсита в исходную фазу при повышении температуры. *Мартенсит* (в честь немецкого металлурга Мартенса) - метастабильная фаза металла или сплава, получаемая охлаждением от температуры выше переходной, характеризующаяся игольчатой (пластинчатой) кристаллической микроструктурой. Помимо охлажден сплава напряжениями мартенситный переход (в определенном диапазоне температур) может быть инициирован приложенными к образцу

Одной из основных характерных черт мартенситного перехода в сплавах, обладающих свойством памяти формы, является его кристаллографическая обратимость в том смысле, что процесс формирования и роста мартенситных кристаллов, имеющий место при понижении температуры, идет в строго обратном направлении при повышении температуры (в отсутствие внешних напряжений). Если, например, перво-

начально имелся монокристалл исходной фазы, который при охлаждении трансформировался в агрегат, состоящий из нескольких пластинок мартенсита различной ориентации, то при последующем нагревании снова получается исходный монокристалл высокотемпературной фазы. Такие мартенситные переходы называют *термоупругими*. Мартенситные переходы в сталях не обладают этим свойством (т.е. не являются обратимыми в указанном смысле), поэтому эффект памяти формы в них не наблюдается.

Эффект памяти формы можно проиллюстрировать на следующем примере [116]. Пусть имеется тонкая пластина (на рис. 4.5.8 слева вверху), изготовленная из сплава, обладающего свойством памяти формы и полностью состоящего из исходной (высокотемпературной) фазы. Температура  $T$  при этом принимает значения в области  $I$ , соответствующей области устойчивости исходной фазы. При понижении температуры  $T$  в отсутствие внешних напряжений мартенситный переход инициируется при температуре  $M_s$  и завершается при температуре  $M_f$  (область  $III$  - область образования мартенсита при охлаждении). Если к пластине в процессе охлаждения прикладывают внешние механические нагрузки, то мартенситный переход может начаться при температуре  $M_0 > M_s$  (область  $II$  - область мартенситного перехода, индуцированного напряжениями). Ниже температуры  $M_f$  пластина состоит из мартенситной фазы сплава (область  $IV$  - область устойчивости мартенсита).

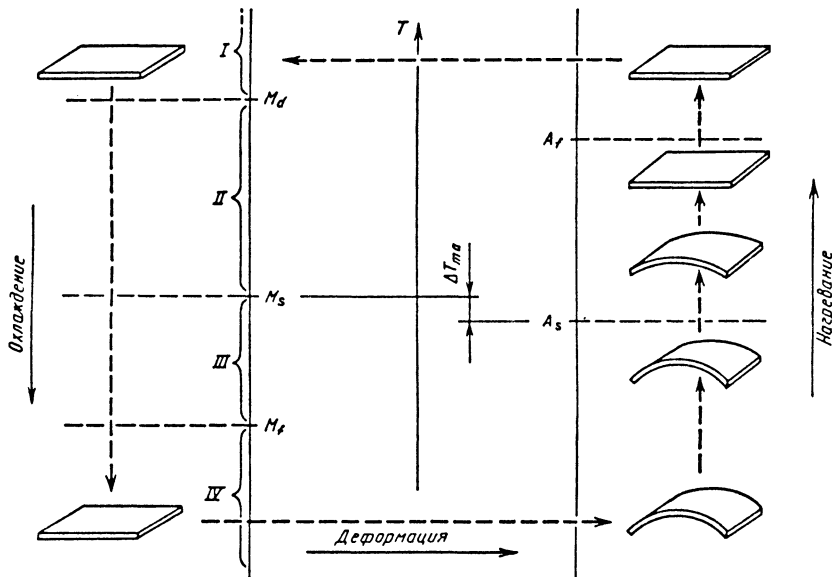


Рис. 4.5.8. К эффекту памяти формы

Пусть теперь пластину при низкой температуре подвергают пластическому изгибу и затем внешнюю нагрузку снимают. В пластине при этом сохраняются остаточные деформации и остаточные прогибы (на рис. 4.5.8 - справа внизу). При нагревании до температуры  $A_s$  сплав остается в мартенситной фазе и деформированное состояние пластины не изменяется. При  $T = A_s$  начинается обратное превращение мартенсита в исходную (высокотемпературную) фазу, которое завершается в точке  $T = A_f$ . Между температурами прямого и обратного переходов  $M_s$  и  $A_s$  имеется, как правило, ярко выраженное различие  $\Delta T_{ma} = M_s - A_s$  (гистерезис). Повышение температуры от  $A_s$  до  $A_f$  сопровождается восстановлением начальной формы пластины. Описанный цикл может быть повторен практически неограниченное число раз (в прямых экспериментах - до нескольких десятков миллионов раз).

Восстанавливаемая деформация для различных сплавов может достигать 10 % и более. Если пластическая деформация, сообщенная образцу в низкотемпературной фазе, превышает уровень восстанавливаемой для данного сплава, то избыточная пластическая деформация при повышении температуры до исходного значения ( $> A_f$ ) остается.

Механизм проявления эффекта памяти формы в общих чертах выглядит следующим образом. Кристаллы исходной фазы имеют обычно симметричную кубическую объемно центрированную решетку, которая при охлаждении от температуры  $M_s$  до  $M_f$  может изменять ориентацию множеством различных способов (допустимых для рассматриваемых понижений симметрии). Понижение температуры от уровня  $M_s$  сопровождается формированием мартенсита в результате бездиффузионной сдвиговой трансформации объемно центрированной кристаллической решетки. При этом семейства кристаллов одинаковой ориентации, имеющие форму клиньев и полос, "подстраиваются" друг под друга в процессе трансформации.

Если подвергнуть поликристаллическую мартенситную структуру пластической деформации, то в результате двойникового (особый вид скольжения по смежным системам кристаллографических плоскостей) и смещения поверхностей раздела кристаллов мартенсита формируется структура, которая характеризуется некоторой преобладающей ориентацией кристаллов мартенсита. Переориентация кристаллов определяется направлением действия внешней нагрузки. При последующем повышении температуры мартенсит, имеющий кристаллическую структуру преобладающей ориентации, переходит в исходную

фазу более высокой группы симметрии с единственной ориентацией кристаллов и одновременным "возвратом" сдвиговой деформации кристаллической решетки. Макроформа образца сплава при этом восстанавливается.

Эффект памяти формы для каждого конкретного сплава проявляется в довольно узком диапазоне температур при определенной последовательности чередования режимов охлаждения-нагрева и механического деформирования. Если сплав находится в высокотемпературной фазе ( $T > M_d$ ), то его локальное поведение под действием прикладываемых нагрузок характеризуется как обычное упругое (при высоких напряжениях) или упругопластическое (для нагрузения за пределом упругости).

Если образец из сплава с памятью формы подвергать одноосному нагружению при постоянной температуре  $T_1$ , лежащей в диапазоне  $A_f < T_1 < M_d$  (см. рис.4.5.8), то его механическое поведение резко изменяется. При повышении напряжения от 0 до некоторого значения  $\sigma_{A-M}$  (в точке  $B$  на рис. 4.5.9) материал ведет себя как обычный упругий материал. При достижении уровня напряжения  $\sigma_{A-M}$  в сплаве инициируется мартенситный переход (напряжение  $\sigma_{A-M}$  зависит, естественно, от температуры  $T_1$ ), который завершается в точке  $C$ . Приращение деформации  $\epsilon_{A-M}$  и наклон участка  $BC$  определяются индивидуальными особенностями мартенситного фазового перехода в рассматриваемом сплаве.

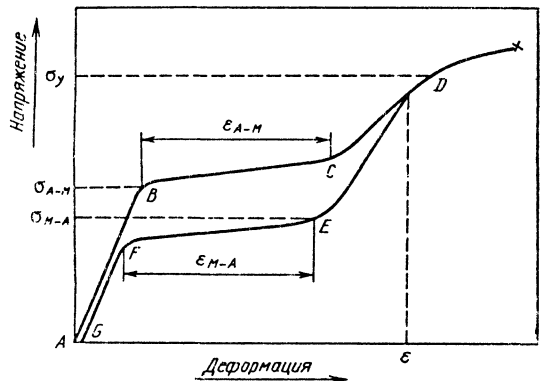


Рис. 4.5.9. Диаграмма деформирования сплава с памятью формы

При дальнейшем нагружении материал продолжает деформироваться упруго до точки  $D$ , соответствующей пределу пластичности  $\sigma_y$  (за которой материал испытывает пластическое течение и разрушается). Если не доходя до точки

$D$ , начать разгрузку материала (от достигнутого значения полной деформации  $\epsilon$ ), то при понижении напряжения до значения  $\sigma_{M-A}$  (точка  $E$ ) наблюдается упругое поведение. При напряжении  $\sigma_{M-A}$  инициируется обратный фазовый переход, в процессе которого мартенсит, находящийся при температуре  $T_1$  в нестабильном состоянии, превращается в исходную фазу (деформация  $\epsilon_{M-A}$  на участке  $EF$  соответствует восстановлению исходной ориентации кристаллов). На участке  $FG$  имеет место упругая разгрузка исходной фазы. Описанное поведение при фиксированной температуре  $T_1$  ( $A_f < T_1 < M_d$ ) характерно для сплавов с памятью формы и его называют псевдоупругостью.

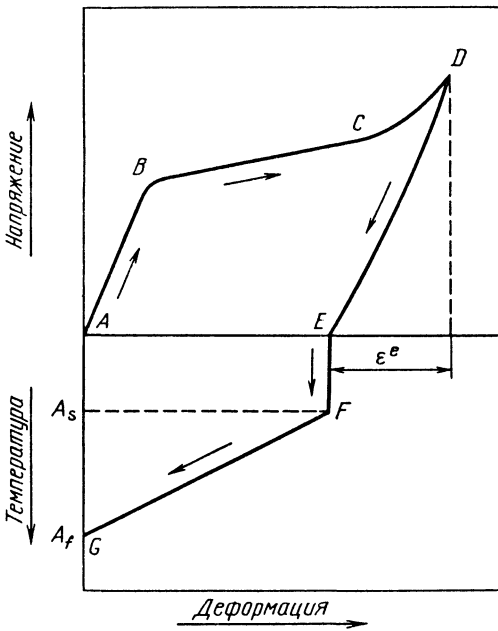


Рис. 4.5.10. Диаграмма деформирования сплава с памятью формы при термомеханическом воздействии

Локальное поведение сплава при восстановлении формы иллюстрируется рис. 4.5.10, дополняющим рис. 4.5.8. Восходящая ветвь кривой “напряжение-деформация” (см.рис. 4.5.10) до точки  $D$  соответствует переориентации кристаллов мартенсита вследствие приложения механических напряжений при температуре  $T_2 < M_f$ , если мартенсит был сформирован путем охлаждения. Разгрузка при фиксированной температуре (участок  $DE$ ) приводит к снятию упругой деформации ( $\epsilon^e$  - величина упру-

гой деформации). Восстановление оставшейся деформации возможно при нагревании образца. Повышение температуры до уровня  $A_s$  (точка  $F$ ) инициирует обратное превращение мартенсита в исходную фазу, которое завершается в точке  $G$ . При этом остаточная деформация, соответствующая отрезку  $AE$ , восстанавливается полностью, если пластическая деформация при низкой температуре ( $< M_f$ ) не превосходила предельно восстанавливаемый уровень для данного сплава. В случае, когда формирование мартенсита было инициировано приложенными напряжениями при температуре, меньшей  $M_d$  (и  $A_f$ ), восстановление остаточной деформации (отрезок  $AE$ ) будет неполным.

Исключительная важность практических применений сплавов с памятью формы в различных сферах вызывает необходимость разработки математических моделей для прогнозирования поведения таких сплавов при переменных механических и температурных нагрузках. Завершенной теории, позволяющей количественно описывать термомеханическое поведение сплавов с памятью формы, еще не создано. Существующие немногочисленные теоретические модели [61, 112, 118, 119] дают лишь качественное соответствие прогнозируемого на их основе термомеханического состояния сплава с экспериментальными данными, что позволяет моделировать локально одномерное поведение сплава. Эти модели опираются, как правило, на теории фазовых переходов Ландау или его модификации. Указанный подход дает возможность на качественном уровне описать эволюцию одномерных диаграмм “напряжение-деформация” в достаточно широком диапазоне температур.

Элемент, изготовленный из сплава с памятью формы, подвергнутый пластической деформации при температуре ниже  $M_f$ , при последующем нагревании до температуры  $A_f$  восстанавливает свою форму. При этом он может совершить работу против внешних сил. Это обстоятельство широко используют в разнообразных приложениях [61, 120].

В качестве одного из приложений можно упомянуть соединительные муфты из сплава с памятью формы, которые после деформации раздвигаются при низкой температуре свободно надеваются на соединяемые встык трубчатые элементы, а при повышении температуры до эксплуатационной плотно обжимают их в месте соединения. Соединения такого типа особенно удобны при сборке конструкций, монтаж которых другими способами по каким-либо причинам затруднен (например, при монтаже трубопроводного оборудования самолета). Кроме того, упомянутые соединения отличаются повышен-

ной надежностью. Сплавы с памятью формы используют также для изготовления разного рода зажимов, переключателей, терморегуляторов, спусковых механизмов, преобразователей энергии, в биомедицинских приложениях.

Первоначально эффект памяти формы был открыт для сплава NiTi (нитинол). Установлено более 20 металлов, образующих сплавы с памятью формы, с температурой мартенситных переходов в диапазоне от  $-190$  до  $+100$  °C. Широкий спектр сплавов с памятью формы и возможность варьирования их химического состава позволяют целенаправленно подбирать материалы по заданным диапазонам переходных температур для конкретных приложений.

## Глава 4.6

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОНАПРЯЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ЭВМ

Для анализа работоспособности и долговечности теплонапряженных конструкций, материал которых (в общем случае) проявляет неупругие свойства в условиях переменных температур, необходима информация об изменении температурного и напряженно-деформированного состояния элементов конструкций в процессе их эксплуатации. Такая информация дает возможность определить изменение размеров и формы конструкции и сравнить его с допустимым, позволяет оценить степень поврежденности конструкционного материала на различных этапах его работы и может быть получена расчетным путем как результат решения задачи неупругого неизотермического деформирования конструкции при заданном режиме теплового и силового воздействий.

#### 4.6.1. МЕТОДИКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОНАПРЯЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Применительно к анализу работоспособности и долговечности теплонапряженных конструкций можно выделить ряд этапов, характерных для методики математического моделирования. Как и при решении любой инженерной задачи, на первом этапе осуществляют переход от реально существующей или проектируемой конструкции к ее расчетной схеме, отражающей наиболее важные свойства и особенности рассматриваемого объекта и, наоборот, не учитывающей второстепенные моменты, которыми можно пренебречь благодаря их слабому влиянию на конечный результат. На втором этапе проводят математическую обработку расчетной схемы и формируют математическую модель рассматриваемой конструкции, включающую уравнения и дополнительные соотношения, описывающие

поведение конструкции при заданных тепловых и силовых воздействиях. Третий этап заключается в выборе рационального метода анализа математической модели и в разработке соответствующего ему алгоритма вычислительного эксперимента на ЭВМ. Четвертый этап состоит в написании, отладке и тестировании ЭВМ-программы, которую затем используют для получения результатов математического моделирования рассматриваемой теплонапряженной конструкции путем вычислительного эксперимента.

Достоверность результатов математического моделирования оценивают их сравнением с данными экспериментов или испытаний реальной или аналогичной проектируемой конструкции, а также сопоставлением с известными результатами решения подобных задач. При недостаточном уровне достоверности необходимо уточнить расчетную схему конструкции и ее математическую модель, проанализировать возможные погрешности, вносимые выбранным методом анализа математической модели и алгоритмом вычислительного эксперимента. Достаточно достоверные результаты математического моделирования могут быть далее использованы для оценки работоспособности и долговечности рассматриваемой теплонапряженной конструкции и для выработки практических рекомендаций по совершенствованию этой конструкции.

Рассмотрим некоторые подходы к анализу математической модели теплонапряженной конструкции, температурное состояние которой не зависит от ее напряженно-деформированного состояния и может быть найдено предваритель-

но. Если материал конструкции не проявляет свойств ползучести, т.е. его неупругое поведение связано лишь с возникновением мгновенных пластических деформаций, то при сравнительно медленно меняющихся тепловых и силовых воздействиях на конструкцию, исключая появление динамических эффектов, изменение ее напряженно-деформированного состояния должно практически без запаздывания отслеживать изменения в распределении температуры и действующих нагрузок. В фиксированный момент времени в каждой точке  $M \in V$  объема  $V$  тела, соответствующего рассматриваемой конструкции, компоненты полной деформации можно представить в виде суммы

$$\varepsilon_{ij}(M) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i(M)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(M)}{\partial x_i} \right] = \varepsilon_{ij}^{(e)}(M) + \varepsilon_{ij}^{(p)}(M) + \varepsilon_{ij}^{(T)}(M), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.6.1)$$

компонентов упругой, мгновенной пластической и температурной деформации, помеченных верхними индексами соответственно  $e$ ,  $p$  и  $T$ . В дальнейшем будем считать  $\varepsilon_{ij}^{(p)}$  компонентами

девиатора, т.е.  $\varepsilon_{ij}^{(p)}\delta_{ij} = \varepsilon_{ii}^{(p)} = 0$ , а для изотропного материала примем  $\varepsilon_{ij}^{(T)} = \varepsilon^{(T)}\delta_{ij}$  и для компонентов тензора напряжений будем иметь [7]

$$\sigma_{ij} = K\left(\varepsilon_{ii} - 3\varepsilon^{(T)}\right)\delta_{ij} + 2G\left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(p)} - \varepsilon_{ii}\delta_{ij} / 3\right),$$

$$i, j, l = 1, 2, 3, \quad (4.6.2)$$

где  $K$  и  $G$  - модули всестороннего сжатия и сдвига материала.

Поскольку в общем случае связь  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ , а значит, связь  $\sigma_{ij}$  и компонентов перемещений  $u_i$  неоднозначна, для рассматриваемой задачи термопластичности не удастся дать вариационную формулировку, которая бы содержала функционал с известными экстремальными свойствами. В частном случае описания неупругого поведения материала при помощи деформационной теории термопластичности в рамках предположения о простом нагружении (см. п.4.5.1) эта связь становится однозначной, материал можно рассматривать как нелинейно-упругий и в вариационной формулировке задачи использовать функционал [28]

$$J(u_i) = \int_V \left[ \frac{K}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - 3\varepsilon^{(T)} \right)^2 + \int_0^{\varepsilon_{ii}} \sigma_{ii}(\varepsilon_{ii}) d\varepsilon_{ii} - f_i^0 u_i \right] dV - \int_{S_p} p_i^0 u_i^0 dS,$$

где  $u_i$ ,  $f_i^0$  и  $p_i^0$  - компоненты векторов искомого перемещения и заданных объемной и поверхностной нагрузок;  $\varepsilon_{ii}$  и  $\sigma_{ii}$  - интенсивности деформированного и напряженного состояний. Этот функционал допустимо рассматривать на непрерывных в объеме  $V$  распределениях перемещений, удовлетворяющих на участках  $S_u$  поверхности  $S$  тела условию

$$u_i(P) = u_i^0(P), \quad P \in S_u,$$

где  $u_i^0(P)$  - заданные функции координат точки  $P$ . Помимо участков  $S_p$  поверхности тела, на которых заданы поверхностные нагрузки с компонентами  $p_i^0$ , и участков  $S_u$  поверхность тела может включать участки  $S_{up}$ , на которых заданы смешанные граничные условия. Однако в каждой точке  $P \in S_{up}$  независимо можно задать лишь такую комбинацию компонентов поверхностной нагрузки и перемещения, которые удовлетворяют условию  $p_i^0(P)u_i^0(P) = 0$ , т.е.

векторы  $p^0(P)$  и  $u^0(P)$  ортогональны и заданные поверхностные нагрузки не совершают работу на заданных перемещениях.

Искомые компоненты  $u_i^*$  вектора перемещения находят из условия стационарности

$$\delta J(u_i^*) = 0$$

функционала  $J(u_i)$ , который при этом достигает минимального значения, если найденные распределения  $u_i^*(M)$ ,  $M \in V$  удовлетворяют уравнениям равновесия [28].

Так как в общем случае, помимо неоднозначности и нелинейности связи между  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ , заранее неизвестны границы областей тела, в которых материал перешел в неупругое состояние, для решения задачи термопластичности приходится использовать последовательные приближения. При этом целесообразно задаваться ожидаемыми распределениями  $\varepsilon_{ij}^{(p)}(M)$  и решать линейную задачу относительно перемещений  $u_i(M)$  и далее определять по формулам (4.6.1) и (4.6.2) полные деформации  $\varepsilon_{ij}(M)$  и напряжения  $\sigma_{ij}(M)$ , а затем по соотношениям теории термопластичности уточнять распределения  $\varepsilon_{ij}^{(p)}(M)$  и снова повторять описанную процедуру. Такой подход по существу не отличается от варианта метода дополнительных (или начальных) деформаций [28, 33, 100]. Его целесообразно применять для определения параметров напряженно-деформированного состояния конструкции при постоянных нагрузках и распределении температуры  $T(M)$  или при их монотонном изменении во времени, когда можно выделить в программе нагружения конструкции укрупненные этапы, в пределах которых следует ожидать монотонного изменения напряжений и деформаций во всех точках рассматриваемого тела [100].

При более сложных программах нагружения с немонотонным изменением тепловых и силовых воздействий необходимо рассматривать достаточно малые этапы последовательного нагружения конструкции. На таких этапах удобно оперировать приращениями нагрузок, перемещений поверхностных точек и температур, а соотношения, описывающие напряженно-деформированное состояние, представлять в приращениях напряжений и деформаций. Проследим путь решения задачи термопластичности в пределах малого этапа нагружения, используя вариант модели неупругого поведения конструкционного материала, рассмотренный в п.4.5.5.



Примем, что в момент времени  $t_{k-1}$ , соответствующий началу  $k$ -го этапа нагружения, известны из расчета на предыдущем этапе температурное и напряженно-деформированное состояние конструкции и все параметры, которые характеризуют состояние материала в рамках используемого варианта его модели. Для момента времени  $t_k$  в конце  $k$ -го этапа нагружения будем считать заданными приращения температур во всех точках конструкции и приращения действующих на конструкцию нагрузок или перемещений точек на ее поверхности. Тогда вместо формул (4.6.1) и (4.6.2) можно написать

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right) = \Delta \varepsilon_{ij}^{(e)} + \Delta \varepsilon_{ij}^{(p)} + \Delta \varepsilon^{(T)} \delta_{ij}; \tag{4.6.3}$$

$$\Delta \sigma_{ij} = K_k \left( \Delta \varepsilon_{ij} - 3 \Delta \varepsilon^{(T)} \delta_{ij} + 2 G_k \left( \Delta \varepsilon_{ij} - \Delta \varepsilon_{ij}^{(p)} - \Delta \varepsilon_{ij} \delta_{ij} / 3 \right) \right), \tag{4.6.4}$$

а уравнения равновесия примут вид [28]

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ G_k \left( \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( K_k - \frac{2}{3} G_k \right) \times \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_j} \right] + \Delta f_i^0 = 3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_k \Delta \varepsilon^{(T)} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( G_k \Delta \varepsilon_{ij}^{(p)} \right) \tag{4.6.5}$$

с граничными условиями

$$K_k \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_i} - 3 \Delta \varepsilon^{(T)} \right) n_i + G_k \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_i} \delta_{ij} - 2 \Delta \varepsilon_{ij}^{(p)} \right) n_j = \Delta p_i^0 \quad \text{на } S_p \tag{4.6.6}$$

и

$$\Delta u_i = \Delta u_i^0 \quad \text{на } S_u. \tag{4.6.7}$$

В соотношениях (4.6.4)-(4.6.6) нижний индекс  $k$  у  $K$  и  $G$  указывает, что значения модулей всестороннего сжатия и сдвига приняты при температуре  $T_k(M)$  в конце  $k$ -го этапа нагружения.

В нулевом приближении примем  $\left[ \Delta \varepsilon_{ij}^{(p)}(M) \right]_k^0 \equiv 0$ ,  $M \in V$  и, решая линейную задачу (4.6.5)-(4.6.7) в приращениях перемещений, определим первое приближение  $\Delta u_i^{(1)}(M)$ , а по формулам (4.6.3) и (4.6.4) -  $\Delta \varepsilon_{ij}^{(1)}(M)$  и

$\Delta \sigma_{ij}^{(1)}(M)$ . Знание  $\Delta \sigma_{ij}^{(1)}$  позволяет вычислить первые приближения для  $\Delta s_{ij}^{(1)}$ ,  $s_{ij}^{(1)}$ ,  $a_{ij}^{(1)}$  и  $a_{ij}^{(1)}$ , по формуле (4.5.83) при  $f_c = f^{**} = f'' = 0$  найти

$$\left[ \Delta \varepsilon_{ij}^{(p)} \right]_k^{(1)} = \frac{1}{k_p + k_p^*} \left\{ \frac{3}{2} \frac{a_{ij}^{(1)}}{a_{ij}^{(1)}} \Delta s_{ij}^{(1)} - \left[ k_T^* + k_T \frac{\left( s_{ij}^{(1)} \right)^2 - \left( a_{ij}^{(1)} \right)^2 - \left( \rho_{ij}^{(k-1)} \right)^2}{2 a_{ij}^{(1)} \rho_{ij}^{(k-1)}} \right] \times \left( T_k - T_{k-1} \right) \right\},$$

а затем из соотношений (4.5.78) определить первое приближение для

$$\left[ \Delta \varepsilon_{ij}^{(p)} \right]_k^{(1)} = (3/2) \left[ \Delta \varepsilon_{ij}^{(p)} \right]_k^{(1)} a_{ij}^{(1)} / a_{ij}^{(1)}$$

и использовать его при повторном решении линейной задачи (4.6.5)-(4.6.7) и т.д.

В процессе последовательных приближений на  $k$ -м этапе нагружения  $\Delta \varepsilon_{ij}^{(p)}$  в каждой итерации находят независимо от предыдущей итерации, используя одну и ту же информацию о состоянии материала в начале этого этапа. Лишь после завершения процесса последовательных приближений на  $k$ -м этапе эта информация изменяется и затем используется для расчета на  $k+1$ -м этапе нагружения. Контроль сходимости последовательных приближений в пределах каждого этапа целесообразно вести по изменению значений компонентов вектора перемещений от итерации к итерации.

Более быструю сходимость последовательных приближений по сравнению с методом дополнительных деформаций обычно обеспечивает метод переменных параметров упругости [100] (см.п.4.5.3). Кроме того, этот метод позволяет естественным образом учесть возможную анизотропию материала конструкции в упругом состоянии. В пределах малого этапа нагружения материал представляется как неоднородный упругоанизотропный, причем характеристики  $S_{ijmn}^{(n)}$  (или  $S_{pq}^{(n)}$  в матричной форме) такого материала зависят от того, выполняются ли в данной точке условия пластического деформирования (см.п.4.5.5). Эти характеристики могут быть найдены по формулам (4.5.86) и использованы на данном этапе нагружения при решении линейной задачи для упругоанизотропного материала, причем температурные деформации должны быть заменены дополнительными деформациями

циями  $\varepsilon_{ij}^0$  (или  $\varepsilon_p^0$ ), определяемыми без учета ползучести ( $f_c = f^{**} = f'' = 0$ ) также по формулам (4.5.86) (или в матричной форме - по формулам (4.5.87)). По результатам этого решения проверяют локальное выполнение условий пластического деформирования (4.5.75) и (4.5.77), уточняют характеристики материала  $S_{ijmn}^{(n)}$  (или  $S_{pq}^{(n)}$ ) и снова проводят решение той же задачи, пока не будет достигнуто приемлемое совпадение следующих друг за другом итераций, после чего можно переходить к рассмотрению очередного этапа нагружения. В некоторых случаях при монотонном изменении параметров нагружения может оказаться достаточным выполнение на данном этапе всего лишь одного приближения.

При сложных программах изменения теплового и силового воздействий на конструкцию число расчетных этапов оказывается значительным и накапливаемые от этапа к этапу вычислительные погрешности могут превысить допустимый уровень, что приведет либо к неустойчивости процесса приближений, либо к тому, что результаты расчета потеряют практическую ценность. В этом случае необходима коррекция возникающих на каждом этапе погрешностей [80] (см. пп. 4.5.3. и 4.6.2). Кроме того, следует учитывать, что для материалов, имеющих сравнительно малое деформационное упрочнение в неупругом состоянии, что характерно для работы в условиях повышенных температур, коэффициенты  $S_{ijmn}^{(n)}$  или  $S_{pq}^{(n)}$  соответственно в формулах (4.5.85) или (4.5.88) существенно возрастают, так что вклад упругой сжимаемости в матрицу коэффициентов упругопластической податливости оказывается незначительным. Это приводит к плохой обусловленности соотношений (4.5.85) или (4.5.88), если их рассматривать как системы линейных уравнений относительно компонентов  $\dot{\sigma}_{ij}$  или  $\dot{\sigma}_p$ . В результате численная реализация обратных преобразований вида

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijmn}^{(n)} (\dot{\varepsilon}_{mn}^0 - \dot{\varepsilon}_{mn})$$

или

$$\{\sigma\} = [C^{(n)}] \{ \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_0 \}, \quad i, j, m, n = 1, 2, 3,$$

где  $C_{ijmn}^{(n)}$  - компоненты тензора, обратного тензору с компонентами  $S_{ijmn}^{(n)}$ , и

$[C^{(n)}] = [S^{(n)}]^{-1}$ , происходит с большими погрешностями и приводит к неверным результатам, поскольку вычислительный процесс становится неустойчивым по отношению к малым возмущениям деформаций.

Указанные трудности удается преодолеть, если компоненты полной деформации в конце  $k$ -го этапа нагружения представить в виде суммы [28]

$$[\varepsilon_{ij}(M)]_k = \varepsilon'_{ij}(M) + \varepsilon''_{ij}(M), \quad M \in V, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.6.8)$$

где

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(e)} + \Delta \varepsilon_{ij}^{(p)} \quad \text{и} \quad \varepsilon''_{ij} = [\varepsilon_{ij}^{(p)}]_{k-1} + [\varepsilon^{(T)}]_k \delta_{ij},$$

причем компоненты  $\varepsilon''_{ij}$  известны перед началом расчета на  $k$ -м этапе, а  $\varepsilon'_{ij}$  являются искомыми величинами. Тогда с учетом  $\Delta \varepsilon_{ij}^{(p)} \delta_{ij} = 0$  вместо формул (4.6.2) получим

$$\sigma_{ij} = \left( K_k - \frac{2}{3} G_k \right) \varepsilon'_{ij} \delta_{ij} + 2G_k (\varepsilon'_{ij} - \Delta \varepsilon_{ij}^{(p)})$$

или в рамках метода переменных параметров упругости [100] с учетом формулы (4.6.8)

$$\sigma_{ij} = \left( K_k - \frac{2}{3} G_* \right) (\varepsilon_{ij} - \varepsilon''_{ij}) \delta_{ij} + 2G_* (\varepsilon_{ij} - \varepsilon''_{ij}), \quad (4.6.9)$$

где  $G_*(M)$  - определяемый на каждой итерации в пределах каждого этапа нагружения приведенный модуль сдвига материала в рассматриваемой точке  $M \in V$ .

При использовании деформационной теории термопластичности  $G_*$  находят через секущий модуль по диаграмме растяжения, построенной для заданной температуры в координатах  $\varepsilon_n$  и  $\sigma_n$ . В теории пластического течения однозначная связь между  $\varepsilon_n$  и  $\sigma_n$  не может быть установлена заранее. Поэтому при использовании для описания поведения конструкционного материала теории неизотермического пластического течения значение  $G_*$  находят последовательными приближениями.

В качестве нулевого приближения примем  $G_*^0(M) = G_k(M)$  и решим для условий нагружения на  $k$ -м этапе линейную задачу, вычислив в первом приближении напряжения  $s_{ij}^{(1)}$ ,  $a_{ij}^{(1)} = s_{ij}^{(1)} - \rho_{ij}^{(k-1)}$  и соответствующие интенсивности  $\sigma_n^{(1)}$  и  $a_n^{(1)}$ . Если  $a_n^{(1)}(M) < \sigma^*(M)$ , то в данной точке  $M \in V$  материал ведет себя упруго и для первого приближения остается  $G_*^{(1)}(M) = G_k(M)$ . Также следует поступить в случае  $a_n^{(1)}(M) = \sigma^*(M)$ , но при нарушении

условия (4.5.77). Если же  $a_n^{(1)}(M) > \sigma^*(M)$ , то вместо  $s_{ij}^{(1)}(M)$  в этой точке  $M$  следует принять  $s_{ij} = Cs_{ij}^{(1)}$  и  $a_{ij} = Cs_{ij}^{(1)} - \rho_{ij}^{(k-1)}$ , а коэффициент  $C$  определить из условия

$$a_n = \sqrt{\frac{3}{2} \left( Cs_{ij}^{(1)} - \rho_{ij}^{(k-1)} \right) \left( Cs_{ij}^{(1)} - \rho_{ij}^{(k-1)} \right)} = \sigma^*,$$

что при реальных свойствах конструкционных материалов, для которых при сравнительно малых деформациях  $\rho_n < \sigma^*$ , дает

$$C = \frac{3}{2(\sigma_n^{(1)})^2} \left\{ s_{ij}^{(1)} \rho_{ij}^{(k-1)} + \sqrt{\left( s_{ij}^{(1)} \rho_{ij}^{(k-1)} \right)^2 + \frac{4}{9} \left[ (\sigma^*)^2 - (\rho_n^{(k-1)})^2 \right] / (\sigma_n^{(1)})^2} \right\}.$$

При выполнении условия (4.5.77) и  $a_n^{(1)}(M) = \sigma^*(M)$  имеем  $C=1$ , но при  $a_n^{(1)}(M) > \sigma^*(M)$  в первом приближении

$$G_*^{(1)}(M) = C \frac{\sigma_n^{(1)}(M)}{3[\varepsilon'_n(M)]^1},$$

где

$$[\varepsilon'_n]^{(1)} = \sqrt{(2/3)(e'_{ij})^{(1)}(e'_{ij})^{(1)}},$$

$$(e'_{ij})^{(1)} = (\varepsilon'_{ij})^{(1)} - (\varepsilon'_{ii})^{(1)} \delta_{ij} / 3;$$

$$(\varepsilon'_{ij})^{(1)} = (\varepsilon_{ij})^{(1)} - \varepsilon_{ij}^*, (\varepsilon_{ij})^{(1)} = (1/2) \left( \partial u_i^{(1)} / \partial x_j + \partial u_j^{(1)} / \partial x_i \right),$$

причем распределение перемещений  $u_i^{(1)}(M)$  является результатом решения линейной задачи первого приближения. После определения  $G_*^{(1)}(M)$  эту задачу для неоднородного упругоизотропного материала решают во втором приближении, и процесс уточнения  $G_*(M)$  повторяют до тех пор, пока поправки на очередном приближении не станут менее заданного допуска.

При проявлении материалов конструкции свойств ползучести, связанных с протеканием во времени  $t$  термически активируемых процессов, целесообразно формулировку задачи неупругого

деформирования теплонапряженных элементов конструкций представить через скорости изменения параметров температурного и напряженно-деформированного состояний. Если для описания неупругого поведения материала воспользоваться вариантом теории неізотермического деформирования, который обобщает свойства механического аналога, изображенного на рис. 4.5.7 (см. пп. 4.5.4 и 4.5.5), то учет ползучести конструкционного материала возможен при помощи итерационных алгоритмов, описанных выше.

Если для описания неупругого поведения материала привлечены теории или модели с разделением неупругой деформации на мгновенную пластическую и деформацию ползучести, то компоненты полной деформации в момент времени  $t_k$  можно по-прежнему представить соотношениями (4.6.8), но теперь

$$\varepsilon_{ij}^* = \left( \varepsilon_{ij}^{(p)} \right)_{k-1} + \left( \varepsilon_{ij}^{(c)} \right)_{k-1} + \varepsilon_k^{(T)} \delta_{ij} + \left( \xi_{ij}^{(c)} \right)_{k-1} \Delta t_k. \tag{4.6.10}$$

Последний член в правой части формулы (4.6.10) представляет собой приращение деформации ползучести за  $k$ -й интервал, которое вычислят по компонентам скорости ползучести  $\left( \xi_{ij}^{(c)} \right)_{k-1}$  в начале этого интервала. Последнее

обстоятельство приводит к ограничению на выбор шага по времени  $\Delta t_k$  из соображений устойчивости вычислительного процесса [28]. Это ограничение может оказаться в некоторых случаях весьма обременительным и привести к большим затратам машинного времени при реализации описанного выше алгоритма на ЭВМ. Если в этом алгоритме на каждой  $v$ -й итерации в пределах  $k$ -го интервала времени вместо формул (4.6.10) использовать

$$\left( \varepsilon_{ij}^* \right)^v = \left( \varepsilon_{ij}^{(p)} \right)_{k-1} + \left( \varepsilon_{ij}^{(c)} \right)_{k-1} + \varepsilon_k^{(T)} \delta_{ij} + \left( \xi_{ij}^{(c)} \right)_k^{(v-1)} \Delta t_k,$$

где  $\left( \xi_{ij}^{(c)} \right)_k^{(v-1)}$  определяют при температуре  $T_k$

в момент времени  $t_k$  по параметрам состояния материала, найденным на предыдущей,  $v$ -й итерации, то результаты расчета сохраняют физический смысл при любом  $\Delta t_k$ , а выбор значения  $\Delta t_k$  повлияет лишь на точность расчета. Для  $v=1$  можно принять

$$\left( \xi_{ij}^{(c)} \right)_k^{(v-1)} = \left( \xi_{ij}^{(c)} \right)_k^0 = \left( \xi_{ij}^{(c)} \right)_{k-1}.$$

**4.6.2. ШАГОВЫЕ И ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ И ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСОВ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОНАПРЯЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Задачи термпрочности по своей сложности не позволяют получить решение в замкнутой аналитической форме. Поэтому для их решения наиболее перспективными являются методы, основанные на дискретизации расчетной области и сведении нелинейной задачи к последовательности линейных задач, решаемых при помощи алгоритмов линейной алгебры [80]. Наибольшее распространение получили методы дискретизации с использованием конечных разностей [75], конечных элементов [33, 72] и граничных элементов [50, 89, 101].

Рассмотренные в п. 4.5.3 методы линейризации уравнений пластичности дают возможность построить эффективные алгоритмы и комплексы программ математического моделирования теплонапряженных конструкций методом конечных элементов (МКЭ). Если перейти к векторным обозначениям, то аналогами тензоров напряжений, деформаций и переменных параметров упругости будут векторы соответственно

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^T &= \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}; \\ \{\varepsilon\}^T &= \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}\}, \end{aligned}$$

связанные зависимостью

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}, \quad (4.6.11)$$

где матрица  $[D]$  - аналог тензора  $C_{ijmn}$ ,  $\{\varepsilon_0\}$  - вектор начальных деформаций [33], компоненты которого включают и температурные деформации материала конструкции.

Нелинейное соотношение (4.6.11) линейризуется способами, рассмотренными в п. 4.5.3. В зависимости от способа линейризации матрица  $[D]$  переходит в матрицы  $[D_c]$ ,  $[D_k]$ ,  $[D_\Delta]$ , содержащие соответственно секущие и касательные модули и параметры, связывающие приращения напряжений и деформаций. Переменные параметры упругости имеют вид

$$\begin{aligned} E^* &= \frac{3E}{2(1+\nu)\psi + 1 - 2\nu}; \\ \nu^* &= \frac{(1+\nu)\psi - 1 + 2\nu}{2(1+\nu)\psi + 1 - 2\nu}. \end{aligned} \quad (4.6.12)$$

Из (4.6.12) при  $\psi = 1$  получаем параметры  $E^* = E$  и  $\nu^* = \nu$  для вычисления компонентов матрицы  $[D]$ , а при  $\psi \neq 1$  следуют переменные параметры  $E^*$  и  $\nu^*$  для вычисления матрицы  $[D_c]$ , которая эквивалентна тензору с компонен-

тами  $C_{ijmn}$  (см.п. 4.5.3) и для объемного напряженного состояния имеет вид

$$[D_c] = \frac{E^*(1-\nu^*)}{(1+\nu^*)(1-2\nu^*)} \times \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu^*}{1-\nu^*} & \frac{\nu^*}{1-\nu^*} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu^*}{1-\nu^*} & 1 & \frac{\nu^*}{1-\nu^*} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu^*}{1-\nu^*} & \frac{\nu^*}{1-\nu^*} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu^*}{2(1-\nu^*)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu^*}{2(1-2\nu^*)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu^*}{2(1-2\nu^*)} \end{bmatrix}.$$

В случае осесимметричного напряженного состояния

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0,$$

и поэтому вектор деформации  $\{\varepsilon\}$  имеет четыре отличных от нуля компонента, а соответствующая ему матрица  $[D_c]$  определяется в виде

$$[D_c] = \frac{E^*(1-\nu^*)}{(1+\nu^*)(1-2\nu^*)} \times \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu^*}{1-\nu^*} & \frac{\nu^*}{1-\nu^*} & 0 \\ \frac{\nu^*}{1-\nu^*} & 1 & \frac{\nu^*}{1-\nu^*} & 0 \\ \frac{\nu^*}{1-\nu^*} & \frac{\nu^*}{1-\nu^*} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu^*}{2(1-\nu^*)} \end{bmatrix}.$$

Для плоского деформированного состояния при условии  $\varepsilon_{33} = 0$

$$[D_c] = \frac{E^*(1-\nu^*)}{(1+\nu^*)(1-2\nu^*)} \times \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu^*}{1-\nu^*} & 0 \\ \frac{\nu^*}{1-\nu^*} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu^*}{2(1-\nu^*)} \end{bmatrix}$$

а при плоском напряженном состоянии

$$[D_c] = \frac{E}{1-(\nu^*)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu^* & 0 \\ \nu^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu^*}{2} \end{bmatrix}$$

Матрица  $[D_k]$  эквивалентна тензору с компонентами  $C_{ijmn}^{uk}$  [см. (4.5.42)], т.е.

$$[D_k] = [D_c] + \frac{2}{3} \frac{1}{\epsilon_n} \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial \epsilon_n} \left( \frac{1}{\Psi} \right) \times [J] \{ \epsilon \} \{ \epsilon \}^T [J], \quad (4.6.13)$$

где матрица  $[J]$  для объемного напряженного состояния имеет вид

$$[J]_6 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Для осесимметричного состояния

$$[J]_4 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[D_k]_4 = [D_0]_4 + \frac{2}{3} \frac{1}{\epsilon_n} \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial \epsilon_n} \left( \frac{1}{\Psi} \right) \times [J]_4 \{ \epsilon \}_4 \{ \epsilon \}_4^T [J]_4; \quad (4.6.14)$$

здесь

$$\{ \epsilon \}_4^T = \{ \epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{12} \}.$$

Вычисление матрицы  $[D_k]$  для плоского напряженного и плоского деформированного состояний представляет определенные трудности вследствие того, что зависимости Коши по двум перемещениям  $u_1$  и  $u_2$  позволяют получить только деформации  $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}$ . В упругопластической области необходимо сделать предположение о деформации  $\epsilon_{33}$ , чтобы определить величину  $\epsilon_n$ .

Для плоского деформированного состояния  $\epsilon_{33} = 0$ , а при плоском напряженном состоянии для определения  $\epsilon_{33}$  применим итерационную процедуру метода переменных параметров упругости. Задавая первоначальным вектором  $\{ \epsilon \}_4^T = \{ \epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33} \}$ , в каждой расчетной точке находим вектор  $\{ e \} = \{ e_{11}, e_{22}, e_{33}, 2e_{12} \}^T = [J]_4 \{ \epsilon \}_4$ , соответствующий девиатору деформаций.

Определяя интенсивность деформаций

$$\epsilon_n = \left[ \frac{2}{3} \left( e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + 2e_{12}^2 \right) \right]^{1/2}$$

и затем по ней значения  $\Psi$  и  $\nu^*$ , найдем первое приближение

$$\epsilon_{33}^1 = -\frac{\nu^*}{1-\nu^*} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}).$$

Корректируя вектор  $\{ \epsilon \}_4$  и подставляя в него значение  $\epsilon_{33}^1$ , переходим ко второму приближению  $\epsilon_n$  и так далее до тех пор, пока в каждой расчетной точке не будет выполнено условие сходимости

$$\frac{|\Psi_k - \Psi_{k-1}|}{\Psi_k} \leq \Delta,$$

где  $\Delta$  - заданная точность расчета.

По известному вектору  $\{ \epsilon \}_4$ , матрице  $[D_c]$  для осесимметричного состояния и зависимости (4.6.14) найдем матрицу  $[D_k]_4$ .

Для плоского деформированного состояния матрица  $[D_k]$  определяется из матрицы  $[D_k]_4$  вычеркиванием третьей строки и третьего столбца. При плоском напряженном состоянии из зависимости, связывающей приращения напряжений и деформаций,

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma_{11} \\ \Delta \sigma_{22} \\ 0 \\ \Delta \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [D_k]_4 \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{11} \\ \Delta \varepsilon_{22} \\ \Delta \varepsilon_{33} \\ 2\Delta \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

следует:

$$\Delta \varepsilon_{33} = -\frac{1}{d_{33}}(d_{31}\Delta \varepsilon_{11} + d_{32}\Delta \varepsilon_{22} + 2d_{32}\Delta \varepsilon_{12}). \quad (4.6.15)$$

Здесь и далее  $d_{ij}$  ( $i = \overline{1;4}, j = \overline{1;4}$ ) - компоненты матрицы  $[D_k]_4$ . Окончательно получаем

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma_{11} \\ \Delta \sigma_{22} \\ \Delta \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [D_k]_3 \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{11} \\ \Delta \varepsilon_{22} \\ 2\Delta \varepsilon_{12} \end{Bmatrix},$$

где  $[D_k]_3$  для плоского напряженного состояния имеет вид

$$[D_k]_3 = \begin{bmatrix} d_{11} - \frac{d_{13}d_{31}}{d_{33}} & d_{12} - \frac{d_{13}d_{32}}{d_{33}} & d_{14} - \frac{d_{13}d_{34}}{d_{33}} \\ d_{21} - \frac{d_{23}d_{31}}{d_{33}} & d_{22} - \frac{d_{23}d_{32}}{d_{33}} & d_{24} - \frac{d_{23}d_{34}}{d_{33}} \\ d_{41} - \frac{d_{43}d_{31}}{d_{33}} & d_{42} - \frac{d_{43}d_{32}}{d_{33}} & d_{44} - \frac{d_{43}d_{34}}{d_{33}} \end{bmatrix}.$$

Матрица  $[D_\Delta]$ , эквивалентная тензору с компонентами  $\Delta C_{ijmn}$  [см.(4.5.42)], для всех рассмотренных случаев имеет вид

$$[D_\Delta] = [D_k] - [D_c]. \quad (4.6.16)$$

Представим векторы перемещений  $\{u\}$  и деформаций  $\{\varepsilon\}$  в конечном виде [33]

$$\{u\} = [N]\{u\}_e; \{\varepsilon\}_e = [B]\{u\}_e, \quad (4.6.17)$$

где  $\{u\}_e$  - вектор узловых перемещений элемента;  $[N]$  - матрица положения;  $[B]$  - матрица связи узловых перемещений и деформаций.

С учетом введенных обозначений из (4.5.39) получим уравнение МКЭ для метода переменных параметров упругости

$$[K_c]_k \{U_{k+1}\} = \{F\}_{0k}, \quad (4.6.18)$$

а из (4.5.42) - уравнение МКЭ для метода Ньютона-Канторовича

$$[K_k]_k \{U_{k+1}\} = [K_\Delta]_k \{U\}_k + \{F\}_k, \quad (4.6.19)$$

где  $\{U\}$  - глобальный вектор перемещений, а компоненты матриц  $[K_c]$ ,  $[K_k]$ ,  $[K_\Delta]$  и вектора  $\{F\}$  на  $k$ -м шаге итерационного процесса находят в каждом конечном элементе по следующим зависимостям [33]:

$$\begin{aligned} [K_c]_e &= \int_{\Omega_e} [B]_e^T [D_c]_k [B]_e d\Omega; \\ [K_k]_e &= \int_{\Omega_e} [B]_e^T [D_k]_k [B]_e d\Omega; \\ [K_\Delta]_e &= \int_{\Omega_e} [B]_e^T [D_\Delta]_k [B]_e d\Omega; \\ \{F\}_k &= \int_{\Omega_e} (\varepsilon^0 [B]_e^T [D_c]_k \{I\} + \\ &\quad + [N]_e^T \{F\}_e) d\Omega + \int_{S_e} [N]_e^T \{F_S\}_e dS; \end{aligned} \quad (4.6.20)$$

здесь  $\{F\}_e$  - вектор объемных сил, действующих в элементе;  $\{F_S\}_e$  - вектор поверхностных сил, действующих на элемент, граничащий с поверхностью  $S_F$ ;  $\{I\}$  - вектор, имеющий отличные от нуля компоненты, соответствующие линейным деформациям. Для всех видов напряженно-деформированного состояния кроме плоского деформированного состояния, эти отличные от нуля компоненты вектора  $\{I\}$  равны единице. При плоском деформированном состоянии вектор  $\{I\}$  имеет вид

$$\{I\}^T = \{1 + \nu^*, 1 + \nu^*, 0\}.$$

Из (4.6.19) следуют также соотношения модифицированного метода Ньютона-Канторовича (метода дополнительных деформаций)

$$[K_0]\{U_{k+1}\} = [K_\Delta]_k^0 \{U\}_k + \{F\}_k, \quad (4.6.21)$$

где компоненты матриц  $[K_0]$  и  $[K_\Delta]_k^0$  вычисляют при  $[D_k]_0 = [D_c]_0$ , зависящей от  $\psi = \psi_0$ , и  $[D_\Delta]_k^0 = [D_k]_0 - [D_c]_k$ .

Из (4.6.20) следует, что необходимо многократно решать системы линейных алгебраических уравнений (4.6.18), (4.6.19), (4.6.21). В методах переменных параметров упругости и Ньюто-

на-Канторовича необходимо пересчитывать на каждой итерации матрицы жесткости системы уравнений и векторы правых частей, а метод дополнительных деформаций и его модификации позволяют сохранить при итерациях матрицу жесткости системы уравнений неизменной и пересчитывать только векторы правых частей.

Процесс последовательных приближений в каждом итерационном методе прекращают при выполнении условия

$$\Delta^k = \left\| \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1} \right\| / \left\| \mathbf{u}^k \right\| \leq \Delta,$$

где  $\Delta$  - заданная точность расчета.

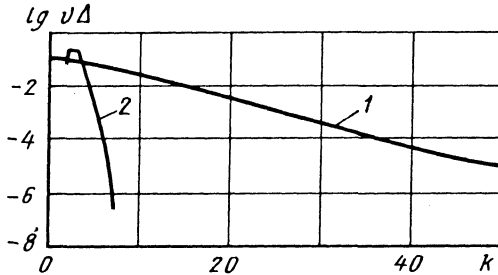


Рис. 4.6.1. Изменение относительной погрешности при расчете осесимметричного напряженного состояния образца с кольцевым надрезом: 1 - метод переменных параметров упругости; 2 - метод Ньютона-Канторовича

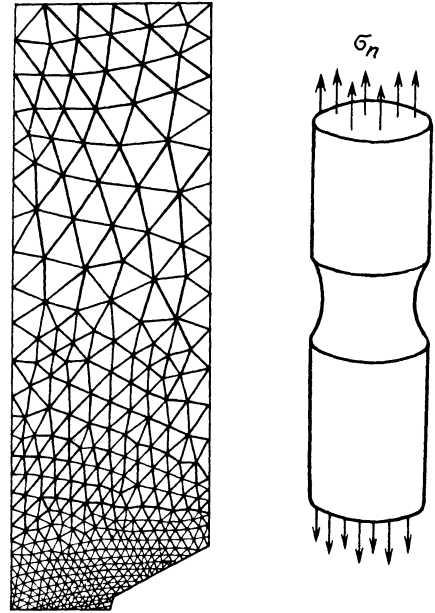


Рис. 4.6.3. Расчетная схема образца с кольцевым надрезом ( $\sigma_n = 1,75 \sigma_T$ )

В п. 4.5.3 приведены оценки асимптотической скорости сходимости этих итерационных методов. Представляет интерес их сравнение в численном эксперименте [94]. На рис. 4.6.1 приведен характер изменения относительной погрешности  $\Delta$  в зависимости от числа итераций  $k$  при расчете осесимметричного образца различными итерационными методами. Диаграмма деформирования образца представлена на рис. 4.6.2, а его расчетная схема - на рис. 4.6.3. Сетка конечных элементов содержала 685 узлов. Результаты показывают высокую эффективность метода Ньютона-Канторовича и подтверждают приведенные в п.4.5.3 оценки асимптотической погрешности.

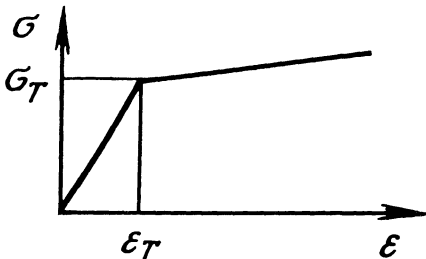


Рис. 4.6.2. Диаграмма деформирования материала образца

В задачах теории пластического течения вектор приращений деформаций  $\{\Delta \epsilon\}$  выражается через векторы приращений напряжений  $\{\Delta \sigma\}$ , упругопластических деформаций  $\{\Delta \epsilon^p\}$  и деформаций ползучести  $\{\Delta \epsilon^c\}$ . При этом, вводя параметр  $\gamma$ , рассмотренный в п.4.5.3, заменим (4.5.33) соотношением

$$\{\Delta \epsilon\} = [C^e] \left( [I] + [C^e]^{-1} \frac{\gamma}{\phi} \left\{ \sigma^0 \right\} \left\{ \sigma^0 \right\}^T \right) \times \{\Delta \sigma\} + \{\Delta \epsilon^p\} + \{\Delta \epsilon^c\}, \tag{4.6.22}$$

где  $[C^e]$  - матрица связи напряжений и деформаций в упругой области, являющаяся аналогом тензора  $A_{ijmn}$  из соотношения (4.5.14);  $[I]$  - единичная матрица;  $\{\sigma^0\}$  - вектор активных напряжений.

Компоненты  $\{\Delta \epsilon^p\}$  представляют приращения упругопластических деформаций, выз-

ванные изменением физического поля. Они определяются также как компоненты

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \left( \frac{\partial A_{ijmn}}{\partial k_\alpha} \sigma_{mn} + \frac{\partial \varepsilon^0}{\partial k_\alpha} \delta_{ij} + \psi_{ij}^p(\alpha) \right) \Delta k_\alpha$$

тензора, который для задач термопластичности в работах И.А. Биргера получил название тензора температурной податливости.

Компоненты  $\{\Delta \varepsilon^c\}$  определяют так же, как компоненты  $\Delta \varepsilon_{ij}^c = \psi_{ij}^c \Delta t$  тензора приращений деформаций ползучести.

Учитывая, что обратная матрица для матрицы  $[I] + \frac{1}{\varphi} \{a\} \{b\}^T$ , где  $\{a\}$  и  $\{b\}$  - векторы-столбцы, имеет вид

$$\left( [I] + \frac{1}{\varphi} \{a\} \{b\}^T \right)^{-1} = [I] - \alpha \{a\} \{b\}^T;$$

$$\alpha = \frac{1}{\varphi + \{b\}^T \{a\}},$$

из (4.6.22) получаем

$$\{\Delta \sigma\} = \left( [D^e] - \alpha [D^e] \{ \sigma_0 \} \{ \sigma_0 \}^T [D^e] \right) \times$$

$$\times \left( \{\Delta \varepsilon\} - \{\Delta \varepsilon^p\} - \{\Delta \varepsilon^c\} \right);$$

$$\alpha = \frac{\gamma}{\varphi + \gamma \{ \sigma_0 \} \{ \sigma_0 \}^T [D^e]}, \quad (4.6.23)$$

где  $[D^e] = [C^e]^{-1}$  - матрица упругих параметров.

Зависимость (4.6.23) является векторным аналогом зависимости (4.5.22), поэтому из вариационного соотношения (4.5.23) с помощью стандартных преобразований получим систему уравнений МКЭ

$$[K_K^T] \{\Delta u\} = \{\Delta F\} + \{\Delta F_p\} + \{\Delta F_c\} + \beta \{\Delta F^*\} \quad (4.6.24)$$

для решения задачи термопластичности на шаге нагружения. Здесь  $[K_K^T]$  - касательная матрица жесткости;  $\{\Delta F\}$  - вектор приращений нагрузок;  $\{\Delta F_p\}$  - вектор дополнительных нагрузок, вызванных упругопластическими деформациями и при изменении физического поля;  $\{\Delta F_c\}$  - вектор дополнительных нагрузок, вызванных изменением деформаций ползучести;  $\{\Delta F^*\}$  - вектор корректирующих нагрузок, полученных из невязок уравнений равновесия на предыдущем шаге [92].

Компоненты матриц и векторов в каждом конечном элементе:

$$\left. \begin{aligned} [K_K^T]_e &= \int_{\Omega_e} [B]_e^T [D_K] [B]_e d\Omega; \\ \{\Delta F\}_e &= \int_{\Omega_e} [N]_e^T \{\Delta F_\Omega\} d\Omega + \int_{S_e} [N]_e^T \{\Delta F_S\} dS; \\ \{\Delta F_p\}_e^T &= \int \{\Delta \varepsilon^p\}^T [D_K] [B]_e d\Omega; \\ \{\Delta F_c\}_e^T &= \int \{\Delta \varepsilon^c\}^T [D_K] [B]_e d\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (4.6.25)$$

где, как и следует из (4.6.23),

$$[D_K] = [D^e] - \alpha [D^e] \{ \sigma_0 \} \{ \sigma_0 \}^T [D^e].$$

Компоненты корректирующего вектора  $\{\Delta F^*\}_e$  вычисляются по результатам решения на предыдущем шаге:

$$\{\Delta F^*\}_e^T = \int_{\Omega_e} \{\sigma^i\}^T [B]_e d\Omega - \int_{\Omega_e} \{F_\Omega^i\}^T [N]_e d\Omega -$$

$$- \int_{S_F} \{F_S^i\}^T [N]_e dS \quad (4.6.26)$$

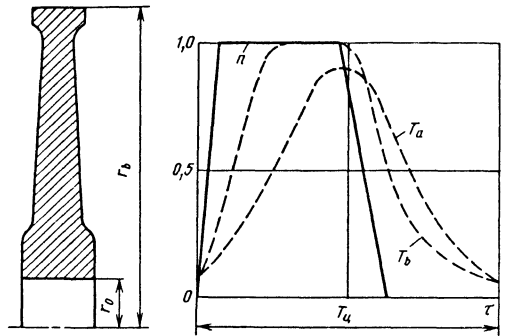


Рис. 4.6.4. Программа нагружения диска:  $n$  - частота вращения;  $T_a$  и  $T_b$  - температуры на радиусах  $r_a$  и  $r_b$ ;  $T_{II}$  - продолжительность цикла нагружения

Эффективность предложенного алгоритма проверена при решении большого числа задач неизоотермического нагружения. В качестве примера рассмотрим результаты расчета диска турбины, программа нагружения которого представлена на рис. 4.6.4. Кривые деформирования материала диска приведены на рис. 4.6.5. В плас-



тической области для данного материала касательный модуль значительно меньше модуля упругости. В связи с этим незначительным изменениям напряжений соответствуют большие приращения деформации. Поэтому при проведении вычислений возможна потеря устойчивости счета.

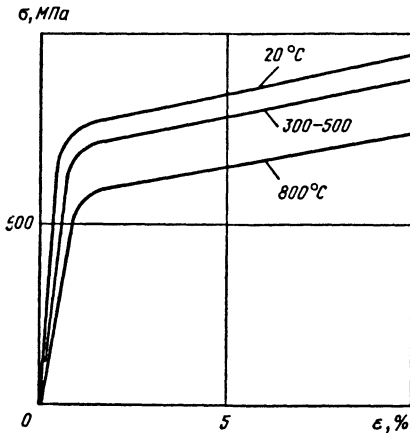


Рис. 4.6.5. Диаграммы деформирования материала диска

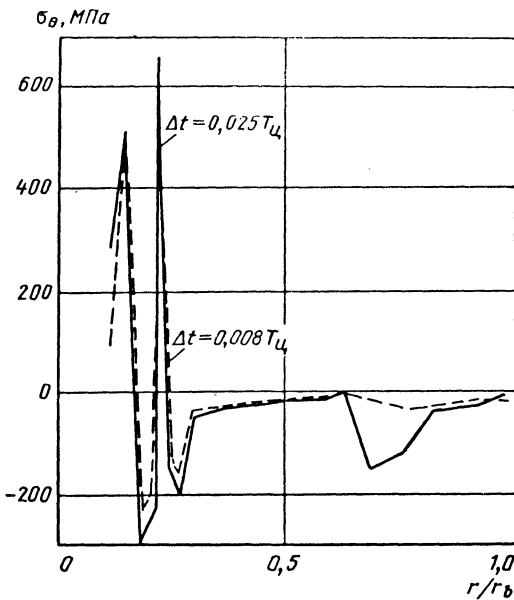


Рис. 4.6.6. Распределение окружных напряжений  $\sigma_\phi$  в диске в момент времени  $t=2,083 T_{II}$  (расчет без коррекции погрешности)

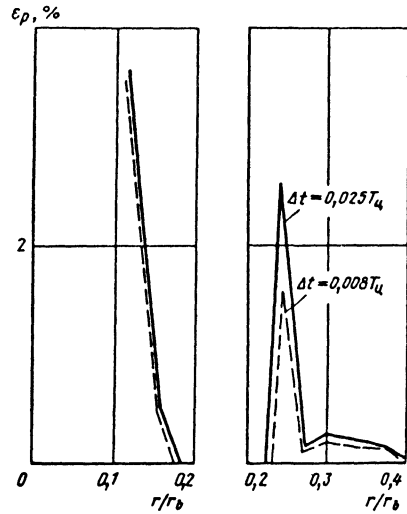


Рис. 4.6.7. Распределение остаточных пластических деформаций  $\epsilon_p$  в диске в момент времени  $t=2,083 T_{II}$  (расчет без коррекции)

На рис. 4.6.6 и 4.6.7 приведены результаты расчета диска без коррекции погрешности при  $\beta_i = 0$  (см. п.4.5.3). В устойчивых дискретных схемах изменение шага по времени в определенных пределах не должно давать различные результаты. Приведенные на рис. 4.6.6 напряжения определены при различных шагах  $\Delta t$  по времени, однако варьирование шага по времени не позволило получить стабильные результаты. Это следует из рис. 4.6.7, на котором представлены накопленные пластические деформации, разные по значениям при различных шагах по времени. Существенным является отмеченное в расчетах отклонение значений на границе  $N_{ra}$  и  $N_{rb}$  от заданных, причем отклонение в процессе счета увеличивалось. Результаты расчетов диска по уравнениям с коррекцией погрешности приведены на рис. 4.6.8 и 4.6.9. На основе представленных на рис. 4.6.8 эпюр напряжений можно сделать вывод о том, что области  $0,005 T_{II} < \Delta t < 0,008 T_{II}$  решения, полученные модифицированным шаговым методом, в данном примере устойчивы и совпадают. Совпадают и значения накопленных пластических деформаций, приведенных на рис. 4.6.9. Для сравнения на рис. 4.6.9 даны результаты, полученные в неустойчивой области при  $\Delta t = 0,025 T_{II}$ . На основе их можно заключить, что потеря устойчивости счета связана с неравномерным упругопластическим деформированием диска и накоплением погрешностей в зонах упругопластического деформирования.

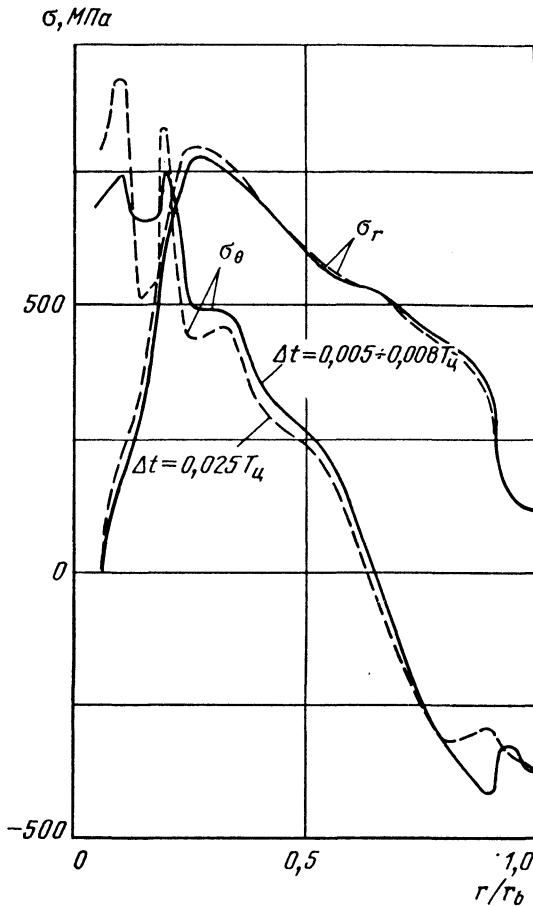


Рис. 4.6.8. Распределение окружных  $\sigma_\theta$  и радиальных  $\sigma_r$  напряжений в диске в момент времени  $t=2,083 T_{II}$  (расчет с коррекцией погрешности)

Область устойчивого счета в случае применения уравнений (4.6.24) определяется несколькими пробными расчетами при различных значениях шага по времени. Критерием устойчивости является стабильность результатов, а также значения невязок уравнений равновесия и совместности деформаций, которые характеризуются максимальными значениями нормы векторов  $\{\Delta F_i^*\}$ . Для проведения таких расчетов не требуется значительного времени счета на ЭВМ, так как потеря устойчивости вычислительного процесса при неправильно подобранном шаге интегрирования происходит в пределах первого цикла нагружения.

Таким образом, применение самокорректирующегося метода позволяет получать решения нелинейных задач с погрешностями, которые меньше погрешностей при обычном шаговом методе. Введение корректирующих членов в

разрешающие уравнения незначительно увеличивает время решения задач на ЭВМ, причем вследствие того, что схема с коррекцией (4.6.24) более устойчива, чем обычная схема, которая следует из (4.6.24) при  $\beta_i=0$ , время решения может быть сокращено путем увеличения шага  $\Delta t$ . Это важно при решении многомерных задач, в которых время расчета одного шага по времени даже на современных быстродействующих ЭВМ может составлять десятки, а иногда и сотни секунд.

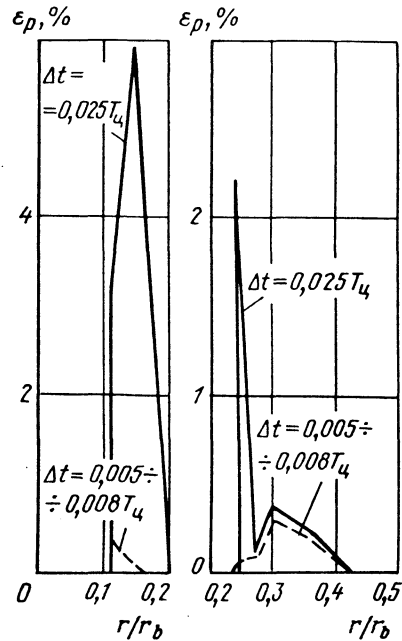


Рис. 4.6.9. Распределение остаточных пластических деформаций  $\epsilon_p$  в диске в момент времени  $t=2,083 T_{II}$  (расчет с коррекцией погрешности)

Ускорение вычислений может быть достигнуто как применением эффективных алгоритмов линеаризации соотношений (4.6.22), аналогичных разработанным для задач теории малых упругопластических деформаций, так и рациональным построением программных комплексов для математического моделирования телонапряженных конструкций.

Решение задач термочпрочности на ЭВМ связано с организацией управления большими объемами информации и различными программными модулями [97]. Основными модулями программного комплекса (рис. 4.6.10) являются программа решения задачи теплопроводности и программа расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций (на основе результатов решения задачи теплопроводности).

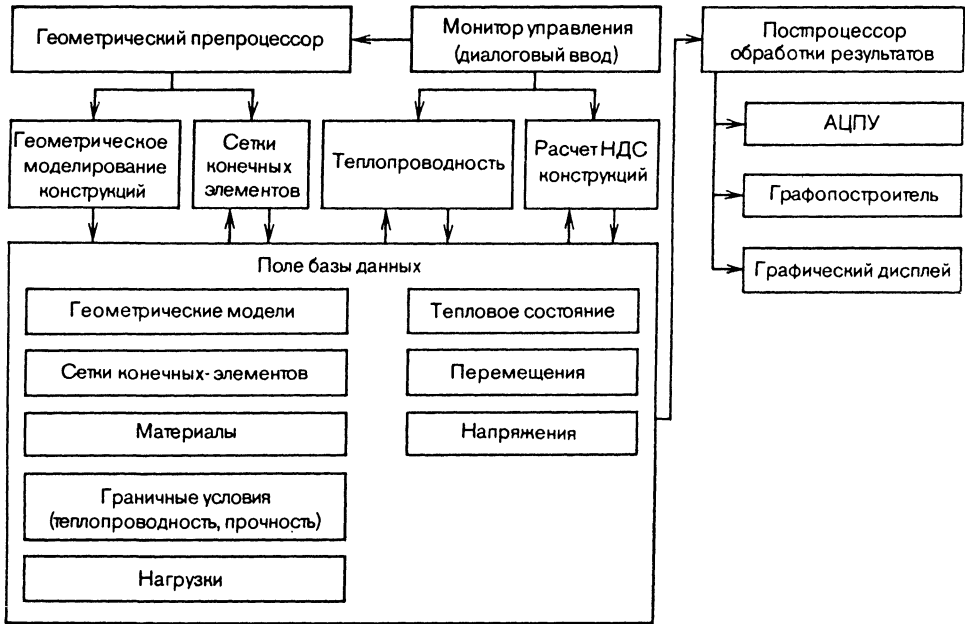


Рис. 4.6.10. Структурная схема программного комплекса для решения задач термпрочности

Между этими модулями необходим обмен информацией о геометрии расчетной области и температурах точек тела в заданный момент времени. Объемы этой информации велики и поэтому необходимо управлять процессами ее передачи с помощью системы управления базой данных.

В ряде случаев решение задач теплопроводности и термпрочности может проводиться на различных расчетных сетках и поэтому программный комплекс должен включать модуль автоматизированной генерации сетки конечных элементов. Требования, предъявляемые к сеткам конечных элементов при решении нестационарных задач термпрочности, весьма высоки. Размеры элементов в областях с резкими изменениями расчетных параметров следует выбирать таким образом, чтобы с достаточной точностью обеспечивать описание характера изменения этих параметров. Поэтому при решении нестационарных задач необходимо предусмотреть возможность регенерации сетки после определенного числа шагов по времени.

Важную роль в работе программного комплекса играет система управления базой данных по свойствам конструкционных материалов. Исходные данные о кривых деформирования, характеристиках ползучести и других физических параметрах могут быть получены как экспериментально, так и на основе аппроксимирующих

математических моделей материала. В базе данных, к которой происходит обращение прикладных программ в процессе счета, эти сведения должны быть представлены таким образом, чтобы обеспечивать получение информации расчетным модулем в любом возможном интервале температур, деформаций, напряжений.

Результаты расчетов анализируются с помощью постпроцессоров графической обработки.

#### 4.6.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ В ДЕТАЛЯХ ЭНЕРГОСИЛОВЫХ УСТАНОВОК

Рассмотрим расчет упругопластического состояния диска турбомшины авиационного ГТД (рис. 4.6.11). Материал диска - жаропрочный никелевый сплав, диаграмма деформирования которого для различных температур показана на рис. 4.6.12. При выходе на максимальную частоту вращения в диске возникает неравномерное температурное состояние. Программа нагружения диска представлена на рис. 4.6.13. Уровень температур в диске и его напряженное состояние таковы, что можно пренебречь деформациями ползучести и провести расчет его упругопластического состояния при максимальной частоте вращения и максимальном градиен-

те температур. На рис. 4.6.14 показаны полученные расчетным путем: изменение геометрической формы диска в работе (рис. 4.6.14,а); распределение упругопластических деформаций (рис. 4.6.14,б). Результаты расчета остаточных перемещений (рис. 4.6.14,в) в точках 1-7 диска (см.рис. 4.6.11) хорошо согласуются с данными измерений после остановки диска на стенде.

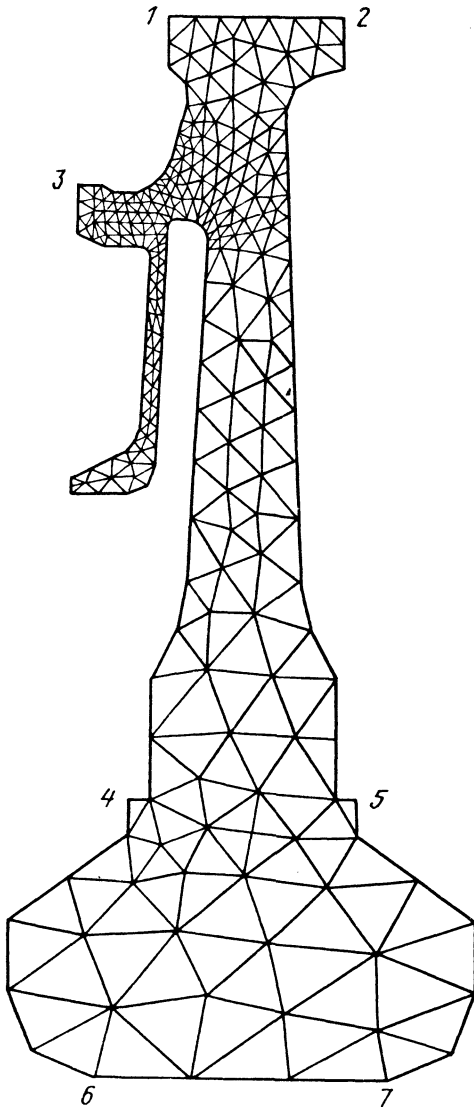


Рис. 4.6.11. Конечно-элементная дискретизация осевого сечения диска

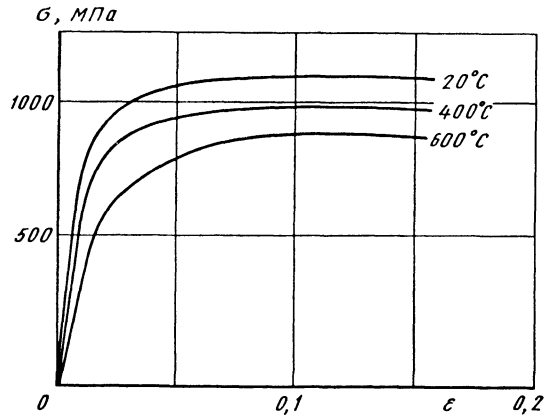


Рис. 4.6.12. Диаграммы деформирования материала диска при различных значениях температуры  $T$

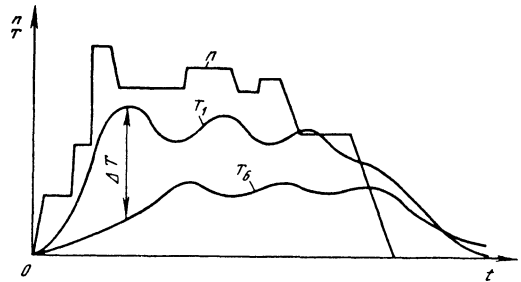


Рис. 4.6.13. Программа нагружения диска:  $n$  - частота вращения;  $T_1$  и  $T_6$  - температуры в точках 1 и 6 на рис. 4.6.11

Применение деформационной теории пластичности может оказаться эффективным при анализе ползучести стационарно работающих конструкций, ползучести в зонах концентрации напряжений, расчете конструкций на ползучесть при нестационарном нагружении, предполагающем нагрузки и разгрузки. При этом важно, чтобы в зонах концентрации напряжений не возникало знакопеременное упругопластическое деформирование. Уравнения теории ползучести сводятся к соотношениям деформационной теории на основании представленной теории старения [59, 78]. Для каждого момента времени можно построить изохронные кривые ползучести и свести задачу к последовательности задач деформационной теории пластичности. При нестационарном циклическом нагружении изохронные кривые ползучести строят для суммарного времени наработки на режиме действия максимальных нагрузок и температур, а разгрузки предполагают упругими.

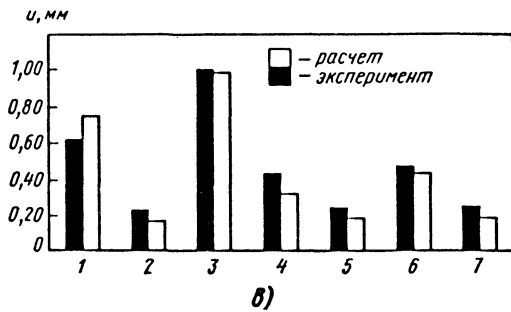
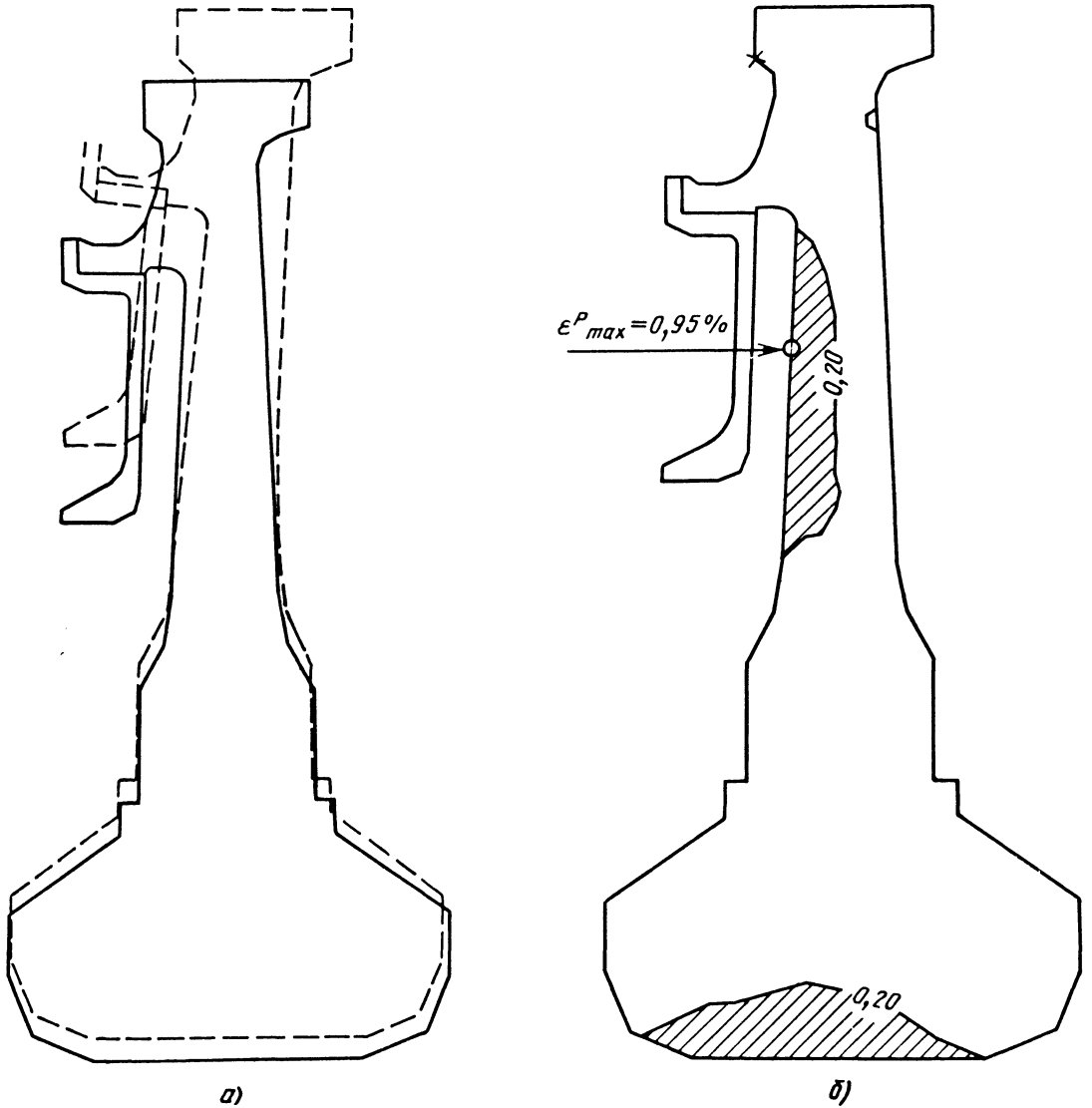


Рис. 4.6.14. Результаты расчета диска

Рассмотрим пример ползучести в зонах концентрации напряжений замкового выступа диска турбины (рис. 4.6.15,а). Зубья елочного замка нагружены распределенным давлением от хвостовика лопатки.

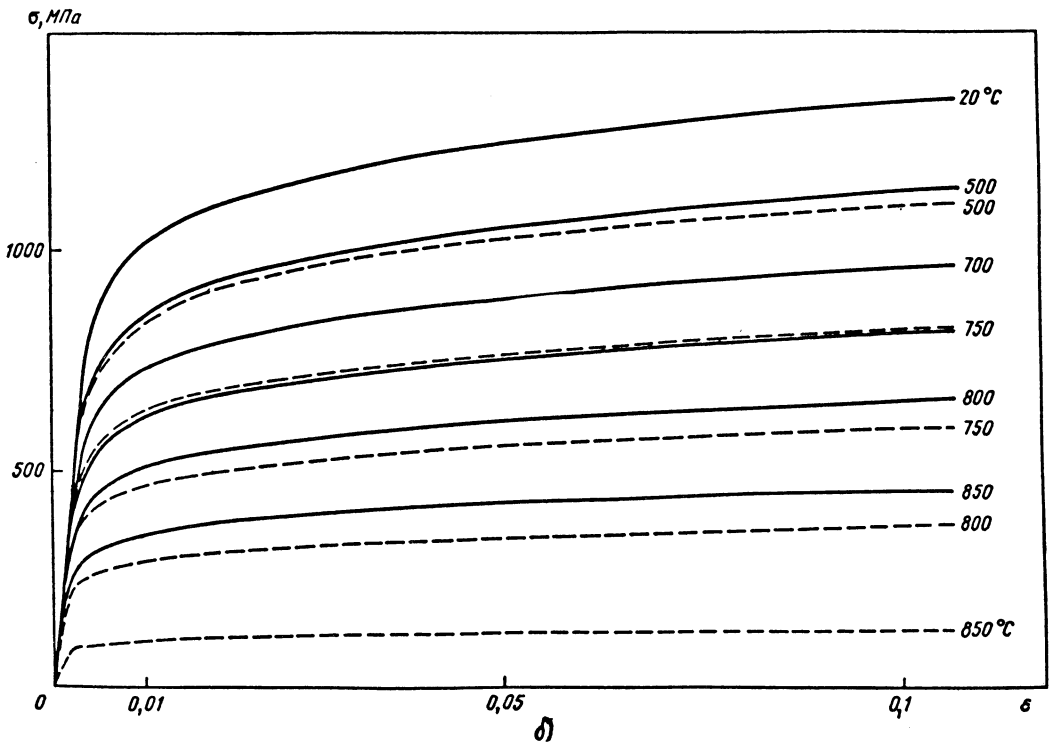
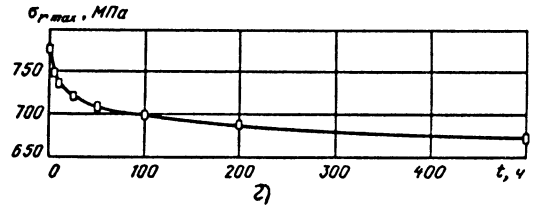
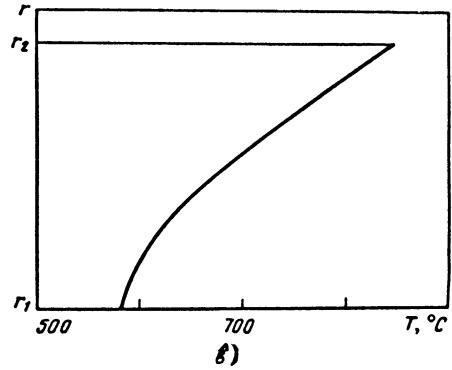
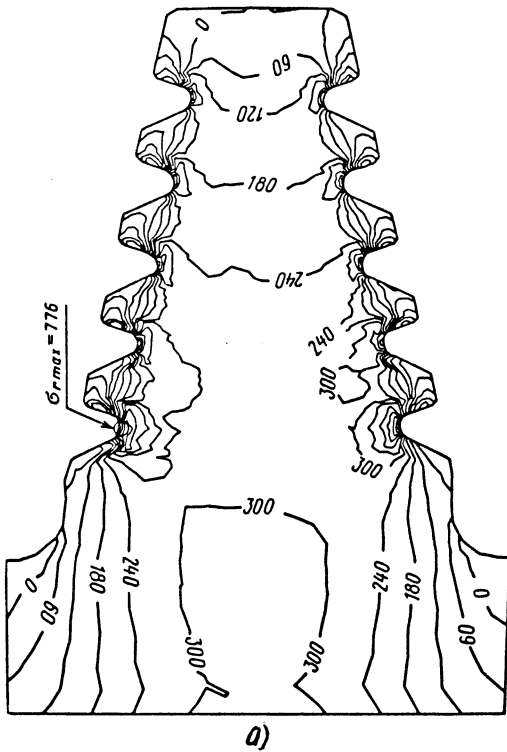


Рис. 4.6.15. К расчету замкового выступа диска турбины

На рис. 4.6.15,б показаны изохронные кривые деформирования для  $t=1$  ч (сплошная линия) и  $t=500$  ч (штриховые линии), полученные в результате обработки кривых ползучести материала диска. Изменение температурного состояния замкового выступа диска по радиусу представлено на рис. 4.6.15,в и рис. 4.6.15,б. На рис. 4.6.15,г показан процесс изменения во времени максимальных напряжений в зоне концентратора, которым является пятый паз елочного замка, отмеченный на рис. 4.6.15,а стрелкой. Изолинии распределения радиальных упругопластических напряжений в МПа даны для времени наработки  $t=1$  ч.

В общем случае предположение об отсутствии знакопеременного упругопластического деформирования для многих деталей энергосиловых установок может быть достаточно ограничительным. Тогда необходимо обобщение теории малых упругопластических деформаций на случай циклического нагружения при воздействии физических полей. Один из вариантов модели поведения конструкционного материала при циклическом нагружении описывается соотношениями

$$\sigma^* = \begin{cases} \alpha_{\infty} d_{\infty} E, & \varepsilon^* < \frac{\alpha_{\infty}}{d_{\infty}} \varepsilon_S = \varepsilon_S^*; \\ \varepsilon^* d_{\infty} E + d_{\infty} b_{\infty} \left[ f_{\sigma} \left( \varepsilon_S + \frac{\varepsilon^* - \varepsilon_S}{b_{\infty}} \right) - \sigma_S \right], & \varepsilon^* > \varepsilon_S^*. \end{cases} \quad (4.6.27)$$

Здесь  $\infty$  - структурный параметр, характеризующий историю циклического деформирования;  $\alpha_{\infty}, b_{\infty}, d_{\infty}$  - характеристики пластичности при циклическом нагружении:  $\alpha_{\infty}$  - мера эффекта Баушингера,  $b_{\infty}$  - масштаб преобразования нелинейного участка первоначальной кривой деформирования,  $d_{\infty}$  - коэффициент, учитывающий изменение первоначального модуля упругости. В качестве структурного параметра предлагается использовать параметр накопленной пластической деформации  $\infty = \int |d\varepsilon_p|$ .

Экспериментальное изучение процессов циклического деформирования различных конструкционных материалов показывает, что в широком диапазоне циклических нагружений параметры  $\alpha_{\infty}, b_{\infty}, d_{\infty}$  определяются безразмерным параметром  $\infty / \infty_{\max}$ , где  $\infty_{\max}$  - предельное значение накопленной пластической деформации при заданной программе нагружения. Для циклического нагружения по программам мягкого и жесткого нагружений величина  $\infty_{\max}$  связана с предельным числом полуциклов до разрушения зависимостью

$$N_p = \left( \frac{\infty_{\max}}{\delta} \right)^{\gamma}; \quad (4.6.28)$$

Здесь  $\delta$  и  $\gamma$  - константы материала.

Влияние воздействия физического поля может быть учтено изменением параметров  $\alpha_{\infty}, b_{\infty}, d_{\infty}, \delta, \gamma$ . Если обобщить представление о термомеханической поверхности на случай циклического нагружения, то можно считать, что параметры кривой циклического нагружения в (4.6.27) изменяются с температурой, а время суммарной наработки при повышенных температурах влияет на их изменение существенно слабее. В этом случае можно для каждой расчетной точки построить кривые циклического деформирования при нагрузке и разгрузке, предполагая, что нагрузка и разгрузка происходят при разных температурах (рис. 4.6.16). На основании такой модели материала можно исследовать кинетику напряжений и деформаций в зоне концентратора напряжений при циклическом неизоотермическом нагружении [96].

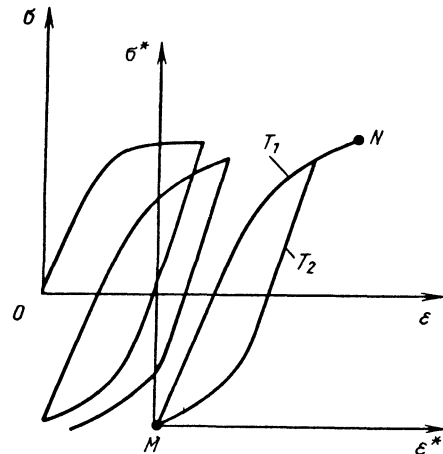


Рис. 4.6.16. Кривые циклического деформирования с учетом нагрузки и разгрузки при различных температурах  $T_1$  и  $T_2$

Рассмотрим кинетику упругопластических деформаций в зоне отверстия под болты в диске турбины авиационного ГТД (рис. 4.6.17,а). Материал диска - жаропрочный никелевый сплав ХН73МБТ10-ВД. Значения параметров  $\alpha_{\infty}, b_{\infty}, d_{\infty}$  модели (4.6.27) для этого материала приведены на рис. 4.6.17,б. На рис. 4.6.17,в показано распределение размахов пластических деформаций на линии MN в полуциклах нагружения 1-4, а на рис. 4.6.17,г - распределение напряжений  $\sigma_{\theta}$  на линии MN в зависимости от

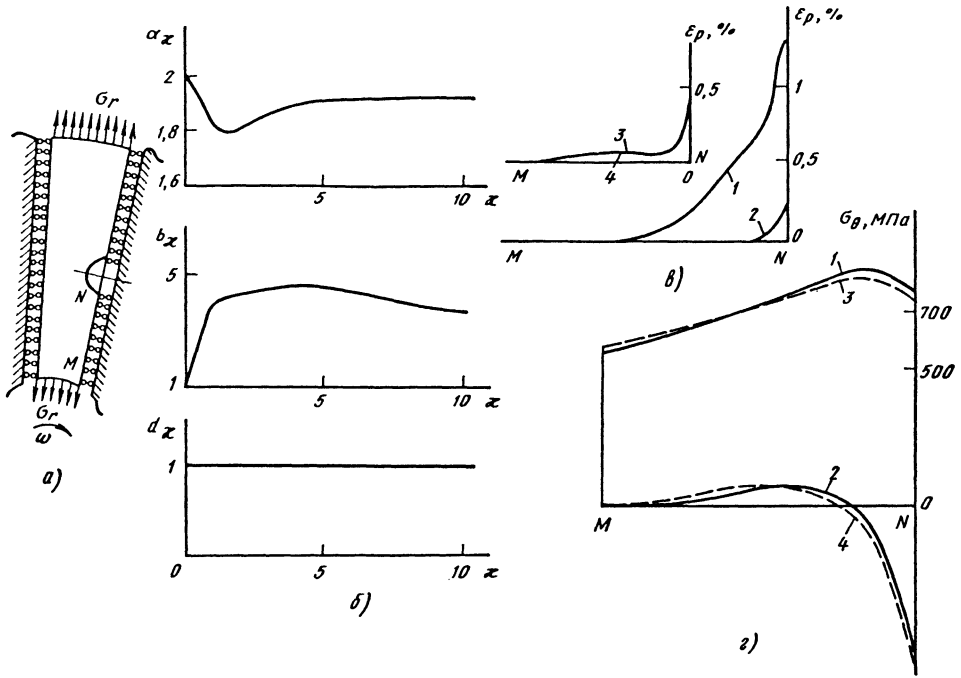


Рис. 4.6.17. Расчет деформаций в зоне болтовых отверстий диска турбины

номера полуцикла 1-4. Вычисленные размахи напряжений и деформаций позволяют отказаться от аппроксимирующих зависимостей для коэффициентов концентрации напряжений и деформаций в упругопластической области и уточнить методику определения циклической долговечности детали до начала развития трещины в зоне концентратора напряжений.

В области высоких температур и высоких уровней напряжений деформации ползучести за полуцикл нагружения могут оказаться соизмеримыми с деформациями пластичности. Характер нагружения многих деталей энергосиловых установок позволяет разделить процессы актив-

ного пластического деформирования и ползучести, так как для ползучести существенны продолжительность выдержек при высоких температурах и напряжениях, а деформации пластичности вызываются изменением напряженного состояния при нагрузке и разгрузке. Выдержки деталей энергосиловых установок при высокой температуре обычно следуют непосредственно за этапом термомеханического нагружения. Поэтому кривая деформирования в точке тела при наличии деформаций ползучести практически совпадает с кривой циклического деформирования образца при трапецидальной программе нагружения с выдержками в полуцикле нагрузки (сплошные линии на рис. 4.6.18,а).

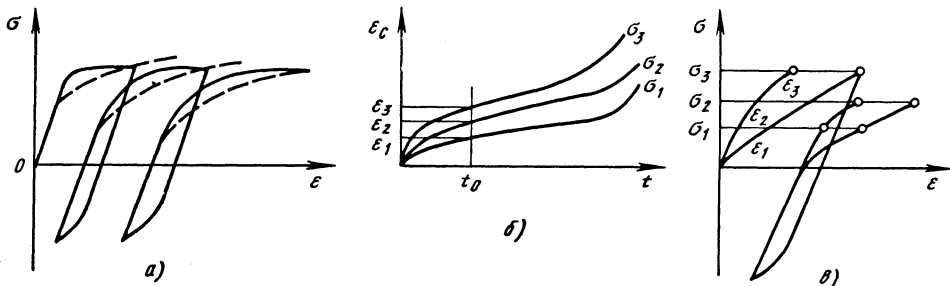


Рис. 4.6.18. Кривые циклического деформирования с учетом ползучести



Если рассматривать неупругое состояние образца в конце выдержки при повышенной температуре и различных условиях напряжений, то можно получить участок изохронной кривой ползучести при циклическом нагружении (штриховые линии на рис. 4.6.18,а). Поэтому при расчете циклического деформирования возможен учет деформаций ползучести на основе представлений теории старения (рис. 4.6.18,б и в).

Подобный подход применим к материалам, для которых существенно наследственное влияние физического поля.

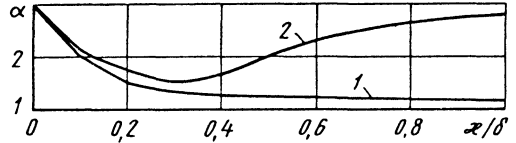


Рис. 4.6.21. Зависимость эффективного коэффициента концентрации напряжений при циклическом упругопластическом деформировании от параметра  $\alpha$ : 1 - до облучения нейтронами потоком; 2 - после облучения

На рис. 4.6.19 показано изменение временного сопротивления  $\sigma_B$ , предела текучести  $\sigma_T$ , относительного сужения  $\psi$ , относительного удлинения  $\delta$  стали А-212В [24] от суммарного потока нейтронов до  $10^{10} \text{ nVt}$ . Аналогичное изменение претерпевает и кривая деформирования (рис. 4.6.20). Поэтому в процессе циклического деформирования участвуют два механизма, влияющих на кривые циклического деформирования: механизм накопления повреждаемости пластичности с параметром  $q$  и механизм влияния физического поля с параметром  $k_1$ . Простейший способ учета взаимовлияния этих механизмов заключается в том, что параметры циклического деформирования представляются в виде

$$\begin{aligned} a_{\alpha} &= a_{\alpha}(q)a(k_1); & b_{\alpha} &= b_{\alpha}(q)b(k_1); \\ d_{\alpha} &= d_{\alpha}(q)d_{\alpha}(k_1); & \delta &= \delta(k_1); & \gamma &= \gamma(k_1). \end{aligned} \tag{4.6.29}$$

Действие радиационного облучения приводит к существенному упрочнению материала конструкции вследствие увеличения пределов текучести и временного сопротивления. При этом ширина петель циклического деформирования сокращается и эффективный коэффициент концентрации  $\alpha$  при циклическом упругопластическом деформировании сначала (при небольших значениях параметра  $k_1$ ) убывает так же, как и при отсутствии действия физического поля, а затем начинает возрастать, приближаясь к первоначальному упругому значению (рис. 4.6.21).

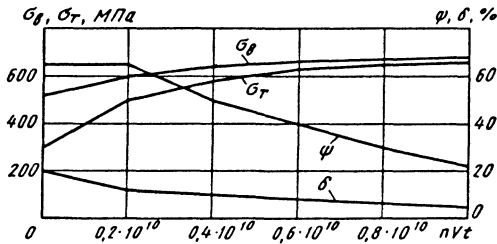


Рис. 4.6.19. Зависимость механических характеристик стали от суммарного потока нейтронов

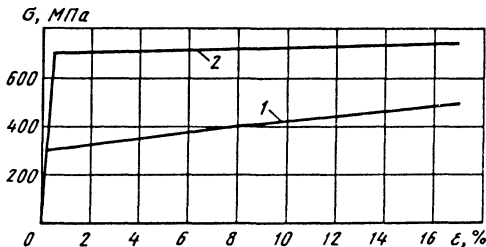


Рис. 4.6.20. Диаграммы деформирования стали: 1 - до облучения нейтронами потоком; 2 - после облучения

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э.** Механика растущих вязкоупругопластичных тел. М.: Наука, 1987. 472 с.
2. **Арутюнян Н.Х., Колмановский Б.В.** Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336с.
3. **Бате К., Вилсон Е.** Численные методы анализа и метод конечных элементов: Пер. с англ. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
4. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.
5. **Беляев Н.М., Рядно А.А.** Методы теории теплопроводности: Учебное пособие для вузов. В 2 ч. М.: Высшая школа, 1982. Ч.1.327 с. Ч.2.304 с.
6. **Биргер И.А.** Круглые пластинки и оболочки вращения. М.: Оборонгиз, 1961. 368 с.
7. **Биргер И.А.** Некоторые математические методы решения инженерных задач. М.: Оборонгиз, 1956. 150 с.
8. **Биргер И.А.** Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С.5-71.
9. **Биргер И.А.** Теория пластического течения при неизотермическом нагружении // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1961. №1. С.80-86.
10. **Биргер И.А., Демьянушко И.В.** Теории пластичности при неизотермическом нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1968. №6. С.70-77.
11. **Болотин В.В., Новичков Ю.Н.** Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
12. **Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел М.** Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
13. **Быков Д.Л., Шачнев В.А.** Об одном обобщении метода упругих решений // ПММ, 1969. Т.33, вып.2. С.290-298.
14. **Василзу К.** Вариационные методы теории упругости и пластичности: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 542 с.
15. **Ворович И.И., Красовский Ю.П.** О методе упругих решений // ДАН СССР. 1959. Т.126. № 1. С.740-743.
16. **Геогджаев В.О.** К вопросу о теории упругопластической деформации анизотропных материалов // Изв. вузов. Машиностроение, 1958. № 3-4. С.9-13.
17. **Гейтвуд Б.Е.** Температурные напряжения применительно к самолетам, снарядам, турбинам и ядерным реакторам: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 350 с.
18. **Гольденблат И.И., Копнов В.А.** Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.
19. **Гольденблат И.И.** Нелинейные проблемы теории упругости. М.: Наука, 1969. 336 с.
20. **Гольденблат И.И., Бажанов В.Л., Копнов В.А.** Длительная прочность в машиностроении. М.: Машиностроение, 1977. 248 с.
21. **Грибанов В.Ф., Паничкин Н.Г.** Связанные и динамические задачи термоупругости. М.: Машиностроение, 1984. 184 с.
22. **Гусенков А.П.** Прочность при изотермическом и неизотермическом малоцикловом нагружении. М.: Наука, 1979. 296 с.
23. **Демьянушко И.В., Темис Ю.М.** К построению теорий пластического течения с анизотропным упрочнением для материалов, находящихся под воздействием физических полей // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 5. С.111-119.
24. **Екоборн Т.** Физика и механика разрушения и прочности твердых тел: Пер. с англ. М.: Металлургия, 1971. 264 с.
25. **Ермаков С.М., Михайлов Г.А.** Курс статистического моделирования. М.: Наука, 1976. 320 с.
26. **Закономерности ползучести и длительной прочности:** Справочник/ Под общ. ред. С.А.Шестерикова. М.: Машиностроение, 1983. 101 с.
27. **Зарубин В.С.** Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
28. **Зарубин В.С.** Прикладные задачи термпрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
29. **Зарубин В.С., Кадашевич Ю.И., Кузьмин М.А.** Описание ползучести металлов при помощи структурной модели // Прикладная механика. 1979. Т. 13. № 9. С.10-13.
30. **Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.** Использование структурных параметров для исследования термонапряженного состояния деформируемого тела при импульсном нагреве // Инж.физич. журнал. 1988. Т.54. № 3. С.468-476.
31. **Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.** Особенности расчета термонапряженного состояния деформируемого тела при импульсном нагреве // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1989. №1. С.127-132.
32. **Зенкевич О., Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
33. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике: Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 541 с.
34. **Зиновьев В.Е.** Теплофизические свойства металлов при высоких температурах. М.: Металлургия, 1989. 484 с.
35. **Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.** Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.

36. **Ильюшин А.А.** Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 287 с.
37. **Ильюшин А.А.** Некоторые вопросы теории пластических деформаций // ПММ. 1943. Т.7. вып.4. С.245-272.
38. **Ильюшин А.А.** Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР. 1963. 272 с.
39. **Ильюшин А.А., Победря Б.Е.** Основы математической теории термо-вязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280с.
40. **Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В.** Об учете микронапряжений в теории пластичности // Инж. журн. Механика твердого тела. 1968. №3. С.82-91.
41. **Карнаухов В.Г.** Связанные задачи термовязкоупругости. Киев: Наукова думка, 1982. 260 с.
42. **Карташов Э.М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел: Учебное пособие. 2-е изд., доп. М.: Высшая школа, 1985. 480 с.
43. **Коваленко А.Д.** Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970. 307 с.
44. **Кожевников И.Г., Новицкий Л.А.** Теплофизические свойства материалов при низких температурах: Справочник. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1982. 328 с.
45. **Коздоба Л.А.** Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М.: Наука, 1975. 228 с.
46. **Коздоба Л.А.** Электрическое моделирование явлений тепло- и массопереноса. М.: Энергия, 1972. 296 с.
47. **Коларов Д., Балтов Л., Бончева Н.** Механика пластических сред: Пер. с болг. М.: Мир, 1979. 302 с.
48. **Костюк А.Г.** Динамика и прочность турбин. М.: Машиностроение, 1982. 264 с.
49. **Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С.** Механика полимерных и композиционных материалов: Экспериментальные и численные методы. М.: Наука, 1985. 303 с.
50. **Крауч С., Старфилд А.** Методы граничных элементов в механике твердого тела: Пер. с англ. М.: 1987. 328 с.
51. **Кристенсен Р.** Введение в теорию вязкоупругости: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 340 с.
52. **Кувыркин Г.Н.** Термодинамический вывод гиперболического уравнения теплопроводности // Теплофизика высоких температур. 1987. Т.25. № 1. С.78-82.
53. **Кузьмин М.П.** Электрическое моделирование нестационарных процессов теплообмена. М.: Энергия, 1974. 416 с.
54. **Ломакин В.А.** Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. 368 с.
55. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.
56. **Лыков А.В.** Теплообмен: Справочник. М.: Энергия, 1978. 480 с.
57. **Лурье А.И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
58. **Мак-Кракен Д., Дорн У.** Численные методы и программирование на Фортране. М.: Мир, 1977. 584 с.
59. **Малинин Н.Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
60. **Марчук Г.И.** Методы вычислительной математики. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1980. 535 с.
61. **Материалы со свойствами памяти формы:** Справочник. Т. 1-3/ Под общ. ред. В.А.Лихачева. Л.: Машиностроение, 1991.
62. **Мацевитый Ю.М.** Электрическое моделирование нелинейных задач технической теплофизики. Киев: Наукова думка, 1977. 255 с.
63. **Махутов Н.А.** Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. М.: Машиностроение, 1981. 272 с.
64. **Михлин С.Г.** Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
65. **Молчанов И.И.** Численные методы решения некоторых задач теории упругости. Киев: Наукова думка, 1979. 316 с.
66. **Морозов Е.М., Никишков Г.П.** Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука, 1980. 256 с.
67. **Москвитин В.В.** Циклические нагружения элементов конструкций. М.: Наука, 1981. 344 с.
68. **Мухелишвили Н.И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
69. **Мэнсон С.** Температурные напряжения и малоцикловая усталость: Пер.с англ. М.: Машиностроение, 1974. 344 с.
70. **Никитенко Н.И.** Теория теплообмена. Киев: Наукова думка, 1983. 352 с.
71. **Новацкий В.** Теория упругости: Пер. с польск. М.: Мир, 1975. 872 с.
72. **Оден Дж.** Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред: Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 464 с.
73. **Паркус Г.** Неустановившиеся температурные напряжения: Пер. с нем. М.: Мир, 1987. 542 с.
74. **Петров Н., Бранков И.** Современные проблемы термодинамики: Пер. с болг. М.: Мир, 1986. 285 с.
75. **Победря Б.Е.** Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. 344 с.
76. **Прусов И.А.** Некоторые задачи термоупругости. Минск: Изд-во БГУ, 1972. 200 с.
77. **Работнов Ю.Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
78. **Работнов Ю.Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

79. **Работнов Ю.Н., Милейко С.Т.** Кратковременная ползучесть. М.: Наука, 1970. 224 с.
80. **Райс Дж.** Матричные вычисления и математическое обеспечение: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 264 с.
81. **Расчет конструкций на тепловые воздействия/** Под ред. И.И.Гольденבלата. М.: Машиностроение, 1969. 600 с.
82. **Рвачев В.Л., Слесаренко А.П.** Алгебраические проекционные методы в задачах теплообмена. Киев: Наукова думка, 1978. 140 с.
83. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. 2-е изд., испр. М.: Наука, 1983. 616 с.
84. **Самарский А.А., Николаев Е.С.** Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
85. **Сегерлинд Л.** Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
86. **Седов Л.И.** Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
87. **Седов Л.И.** Механика сплошной среды. В 2 т. Т.1. М.: Наука, 1983. 528 с.; Т.2. М.: Наука, 1984. 560 с.
88. **Серенсен С.В., Когаев В.П., Швейдерович Р.М.** Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1975. 488 с.
89. **Теллес К.Д.Ф.** Применение метода граничных элементов для решения неупругих задач: Пер. с англ. М.: Стройиздат, 1987. 160 с.
90. **Темис Ю.М.** Метод последовательных нагружений с коррекцией погрешности в геометрически нелинейных упругих задачах // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. Горький: Изд-во Горьковск. ун-та, 1980. Вып. 16. С.3-10.
91. **Темис Ю.М.** О сходимости метода переменных параметров упругости в задачах деформационной теории пластичности: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР. 1984. Т.15. №3. С.137-148.
92. **Темис Ю.М.** Самокорректирующийся шаговый метод решения нелинейных задач упругости и пластичности. М., 1980. 24с. (Тр. ЦИАМ № 918).
93. **Темис Ю.М.** Применение метода Ньютона-Канторовича к решению задач деформационной теории пластичности // Труды ЦИАМ, №1256. 1988. С.1-21.
94. **Темис Ю.М.** Сходимость метода Ньютона-Канторовича в задачах деформационной теории пластичности // Труды ЦИАМ, № 1256. 1988. С.22-40.
95. **Темис Ю.М.** Сходимость метода переменных параметров упругости при численном решении задач пластичности методом конечных элементов // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем: Всесоюз. межвуз. сб. Горький: Изд-во Горьковск. ун-та, 1982. Вып.21. С.21-34.
96. **Темис Ю.М.** Пластичность и ползучесть деталей ГТД при циклическом нагружении // Проблемы прочности и динамики в авиационном двигателестроении. Труды ЦИАМ, № 1237. Вып.1. 1989. С.32-50.
97. **Темис Ю.М., Соборнов М.В.** Автоматизация проектирования деталей роторов на основе расчета напряженно-деформированного состояния методом конечных элементов//Проблемы прочности. 1982. № 8. С.26-32.
98. **Теплопроводность твердых тел:** Справочник/ А.О.Охитин, Р.П.Боровикова, Т.В.Нечаева, А.С.Пушкарский: Под ред. А.С.Охитина. М.: Энергоатомиздат, 1984. 320с.
99. **Термомеханика** эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении. Киев: Наукова думка, 1987. 288 с.
100. **Термопрочность** деталей машин / Под ред.И.А.Биргера и Б.Ф.Шорра. М.: Машиностроение, 1975. 456 с.
101. **Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М.** Методы граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1986. 296 с.
102. **Уманский С.Э.** Оптимизация приближенных методов решения краевых задач механики. Киев: Наукова думка, 1983. 165 с.
103. **Уравнения** состояния при малоцикловом нагружении// Н.А.Махутов, М.М.Гаденин, Д.А.Гохфельд и др. М.: Наука, 1981. 244 с.
104. **Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.** Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.
105. **Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В.** Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 240 с.
106. **Чиркин В.С.** Теплофизические свойства материалов ядерной техники. М.: Атомиздат, 1968. 484 с.
107. **Шевченко Ю.Н.** Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Численные методы решения прикладных задач. В 6 т. Т.6. Киев: Наукова думка, 1986. 272 с.
108. **Шевченко Ю.Н.** Термопластичность при переменных нагружениях. Киев: Наукова думка, 1970. 287 с.
109. **Шевченко Ю.Н.** Уравнения терморadiационной пластичности // Тепловые напряжения в элементах конструкций. Киев: Наукова думка, 1972. Вып. 12. С.39-52.
110. **Coleman B.D., Gurtin M.E.** Waves in materials with memory. IV Thermodynamics and the velocity of general acceleration waves// Arch. Ration. Mech. and Anal. 1965. Vol. 19. №5.P.317-338.
111. **Gurtin M.E.** Variational principles in the linear theory of viscoelasticity. //Arch. Rat. Mech. Anal. 1963. Vol. 13. P.179-191.
112. **ICOMAT-82.** International Conference on Martensitic Transformations. Leuven (Belgium), Aug. 8-12, 1982, Ed. by L. Delaey and M.

Chandrasekaran. J. Physique, 1982, T. 43, C-4 (suppl.an № 12).

113. **Naghi P.M.** Stress-strain relations in plasticity and thermoplasticity // Plasticity. Proc. 2-nd Symp. Nav. Struct. Mech. 1960. P.121-167 // Механика: Сб. перев. 1962. № 1. С.87-133.

114. **Navarro C.B.** Asymptotic stability in linear thermoviscoelasticity // J. Math. Anal. and Appl. 1978. Vol. 65, № 2. P.399-431.

115. **Nickell R.E., Sakman J.L.** Variational principles for linear coupled thermoelasticity // Quart. Appl. Math. 1968. Vol. 26. № 1. P.11-26.

116. **Perkins J**, Shape-memory-effect alloys:

Basic principles. In: Encyclopedia of material science and engineering. Ed. by M.V.Bever. Vol. 6. Pergamon Press, 1986. P.4356-4368.

117. **Prager W.** Non izothermal plastic deformation // Proceedings Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen. 1958. Vol. 61. № 3. P.176-182 // Механика: Сб. перев. 1959. № 5. С.95-101.

118. **Shape-memory alloys** Ed.by H.Eunakubo. N.Y.:Gordon and Breach, 1987.

119. **Shape-memory effects in alloy.** Ed. by J.Perkins. N.Y.: Plenum Press,1975.

120. **Wayman C.M.** Some applications of shape memory alloys. J.Metals, 1980, Vol.32. № 6, P.129-137.

## Раздел 5

# МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

Композиционными материалами или композитами обычно называют многофазные сплошные среды, состоящие из армирующих элементов и соединяющего их связующего вещества (матрицы). В качестве армирующих элементов используют непрерывные или дискретные тонкие волокна, образованные из них нити, жгуты и ткани. Обладая высокой прочностью и жесткостью, волокна обеспечивают необходимые механические свойства композитов. В качестве матриц используют отвержденные или карбонизованные термореактивные полимерные смолы, термопласты, металлические сплавы и керамику. Матрица обеспечивает заданную форму изделия, эффективную совместную работу волокон и в основном определяет технологические и теплофизические свойства композитов. Матрица может содержать наполнители в виде коротких волокон или частиц, вводимых для повышения ее механических характеристик.

Композиты обладают комплексом свойств и особенностей, существенно отличающих их от традиционных конструкционных материалов (металлических сплавов) и открывающих широкие возможности как для совершенствования существующих конструкций, так и для разработки новых перспективных конструктивных форм и технологических процессов. Композиты, как правило, обладают высокой удельной прочностью и жесткостью, хорошей сопротивляемостью хрупкому разрушению. Кроме того, материалы на основе полимерных матриц отличаются высокой коррозионной стойкостью; сочетание этих матриц с органическими или стеклянными волокнами позволяет получить материал, обладающий электроизоляционными свойствами и радиопрозрачностью, а комбинация полимерной или металлической матрицы и углеродных волокон обеспечивает электропроводность.

Низкая теплопроводность большинства композитов позволяет эксплуатировать их без дополнительной теплозащиты в условиях интенсивного кратковременного поверхностного нагрева. Высокая теплостойкость углеродной карбонизованной или керамических матриц в сочетании с высокой прочностью, жесткостью и теплостойкостью углеродных волокон обеспечивает получение материалов, сохраняющих высокий уровень механических характеристик при температурах, превышающих температуры плавления

большинства металлических сплавов. Композиции на основе углеродных волокон позволяют создавать конструкции, сохраняющие стабильность геометрических параметров в условиях циклического температурного воздействия. Таким образом, композиты обладают широким спектром полезных, а в некоторых отношениях и уникальных свойств, а рациональное сочетание этих свойств позволяет получать эффективные конструкции с высокими значениями коэффициента использования материала и степени весового совершенства.

Композиты являются неоднородными материалами, причем степень их неоднородности характеризуется двумя уровнями. Первый уровень (микрон неоднородность) связан с наличием в материале двух фаз - матрицы и армирующих элементов различной природы. Вторым уровнем (макрон неоднородность) связан со слоистой структурой материала, который может состоять из совокупности различно ориентированных монослоев. При расчете и проектировании композитных элементов конструкций обычно используется макроструктурная феноменологическая модель, включающая некоторые средние (эффективные) упругие постоянные (см. п. 5.1.1.); при этом монослой считают условно однородным и ортотропным.

С учетом микроструктуры проводится анализ разрушения монослоя и определяются его средние характеристики, исходя из свойств и объемного содержания армирующих элементов и матрицы. Соответствующие результаты, полученные на основе микромеханики композитов, представлены в п. 5.1.2-5.1.7. Задачей микромеханики композитов, рассмотренной в пп. 5.2.1., 5.2.2, является определение свойств слоистого материала в зависимости от свойств, количества и характера расположения монослоев. При расчете композитных элементов конструкций часто используют экспериментально определенные характеристики прочности и жесткости монослоев и их наиболее часто встречающихся сочетаний. В связи с этим в п. 5.2.3 приведены ориентировочные свойства типовых композитов. Для получения более точных данных необходимо провести экспериментальное исследование конкретного материала.

Итак, считают, что композит, образующий некоторый конструктивный элемент, является в

общем случае макронеоднородным и состоит из отдельных монослоев. Каждый монослой считают условно однородным с механическими характеристиками (п. 5.1.1), которые определяют методами микромеханики (п. 5.1.2-5.1.7) или экспериментально (п. 5.2.3). Характеристики системы слоев устанавливают расчетным путем методами макромеханики (п. 5.2.1, 5.2.2); они в явном виде зависят от макроструктурных параметров материала. В результате расчета композитного элемента находят деформации слоистого материала. По ним определяют средние деформации и напряжения в монослоях (п. 5.2.1), а затем оценивают прочность монослоя (п. 5.1.2-5.1.7).

## Глава 5.1

### МЕХАНИКА АРМИРОВАННОГО МОНОСЛОЯ

#### 5.1.1. МАКРОМЕХАНИКА МОНОСЛОЯ

Расчетная модель однонаправленно армированного монослоя показана на рис. 5.1.1. Такие монослои являются структурными элементами композитных элементов конструкций. Для расчета конструкций, состоящих из таких элементов, важно знать их механические свойства.

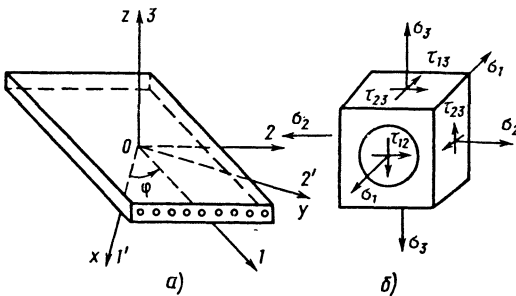


Рис. 5.1.1. Расчетная схема монослоя (а) и напряженное состояние (б) повторяющегося элемента структуры

**Закон деформирования в осях упругой симметрии.** В первом приближении можно принять, что монослой находится в плоском напряженном состоянии. С учетом ортотропности монослоя плоское напряженное состояние определяется условием

$$\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = 0.$$

Деформация в направлении, перпендикулярном к плоскости монослоя, определяется равенством

$$\varepsilon_3 = s_{13}\sigma_1 + s_{23}\sigma_2.$$

Закон деформирования монослоя имеет вид

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{12} & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}. \quad (5.1.1)$$

Компоненты матрицы податливости монослоя:

$$s_{11} = \frac{1}{E_1}; \quad s_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}; \quad (5.1.2)$$

$$s_{22} = \frac{1}{E_2}; \quad s_{66} = \frac{1}{G_{12}},$$

где  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu_{12}$  и  $\nu_{21}$  - технические упругие постоянные монослоя. Коэффициент Пуассона  $\nu_{ij}$  определяет поперечную деформацию в направлении  $i$  при нагружении в направлении  $j$ . Закон деформирования (5.1.1) может быть представлен также в обратной форме:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}.$$

Коэффициенты матрицы жесткости монослоя:

$$Q_{11} = \frac{s_{22}}{s_{11}s_{22} - s_{12}^2} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}};$$

$$Q_{12} = \frac{s_{12}}{s_{11}s_{22} - s_{12}^2} = \frac{\nu_{21}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}};$$

$$Q_{22} = \frac{s_{11}}{s_{11}s_{22} - s_{12}^2} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}};$$

$$Q_{66} = \frac{1}{s_{66}} = G_{12}. \quad (5.1.3)$$

Величина произведения  $\nu_{12}\nu_{21}$ , входящая в эти зависимости, обычно пренебрежимо мала ( $\nu_{12}\nu_{21} = \nu_{12}^2 E_1/E_2$ ) по сравнению с единицей.

**Закон деформирования в произвольных осях.** Напряжения в произвольных осях  $x$  и  $y$  (см. рис.5.1.1) определяют следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix}, \quad (5.1.4)$$

где матрица трансформации  $[T]$  имеет вид

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & -2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix}. \quad (5.1.5)$$

Закон деформирования монослоя в произвольных осях принимает вид

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (5.1.6)$$

В уравнениях (5.1.6) через  $S_{ij}$  обозначены составляющие трансформированной матрицы податливости, определяемые по следующим формулам:

$$S_{11} = s_{11} \cos^4 \varphi + (2s_{12} + s_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + s_{22} \sin^4 \varphi;$$

$$S_{12} = s_{12} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) + (s_{11} + s_{22} - s_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi;$$

$$S_{22} = s_{11} \sin^4 \varphi + (2s_{12} + s_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + s_{22} \cos^2 \varphi; \quad (5.1.7)$$

$$S_{16} = (2s_{11} - 2s_{12} - s_{66}) \sin \varphi \cos^3 \varphi - (2s_{22} - 2s_{12} - s_{66}) \sin^3 \varphi \cos \varphi;$$

$$S_{26} = (2s_{11} - 2s_{12} - s_{66}) \sin^3 \varphi \cos \varphi - (2s_{22} - 2s_{12} - s_{66}) \sin \varphi \cos^3 \varphi;$$

$$S_{66} = 2(2s_{11} + 2s_{22} - 4s_{12} - s_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + s_{66} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi).$$

В произвольных осях имеется взаимодействие между нормальными напряжениями и деформациями сдвига, отсутствующие в осях упругой симметрии монослоя.

Из зависимостей (5.1.7) с учетом (5.1.2) вытекают следующие формулы для определения технических упругих постоянных монослоя в произвольных осях  $x$  и  $y$ :

$$\frac{1}{E_x} = \frac{\cos^4 \varphi}{E_1} + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{21}}{E_1} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{\sin^4 \varphi}{E_2};$$

$$\frac{1}{E_y} = \frac{\sin^4 \varphi}{E_1} + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{21}}{E_1} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{E_2};$$

$$\nu_{yx} = E_x \left[ \frac{\nu_{21}}{E_1} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) - \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \right];$$

$$\frac{1}{G_{xy}} = 2 \left( \frac{2}{E_1} + \frac{2}{E_2} + \frac{4\nu_{21}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{1}{G_{12}} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi); \quad (5.1.8)$$

$$\eta_{xy,x} = E_x \left[ \left( \frac{2}{E_1} + \frac{2\nu_{21}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin \varphi \cos^3 \varphi - \left( \frac{2}{E_2} + \frac{2\nu_{21}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^3 \varphi \cos \varphi \right];$$

$$\eta_{xy,y} = E_y \left[ \left( \frac{2}{E_1} + \frac{2\nu_{21}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^3 \varphi \cos \varphi - \left( \frac{2}{E_2} + \frac{2\nu_{21}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin \varphi \cos^3 \varphi \right].$$

Через технические упругие постоянные закон деформирования (5.1.6) записывают следующим образом:



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{yx}/E_x & \eta_{xy,x}/E_x \\ -\nu_{yx}/E_x & 1/E_y & \eta_{xy,y}/E_y \\ \eta_{xy,x}/E_x & \eta_{xy,y}/E_y & 1/G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.1.9)$$

В формулах (5.1.8) и (5.1.9) появились две дополнительные упругие характеристики  $\eta_{xy,x} = S_{16}E_x$  и  $\eta_{xy,y}$ . Между этими характеристиками существует зависимость

$$\eta_{xy,x}(\varphi) = \eta_{xy,y} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right).$$

Для учета влияний температуры, влаги и поперечных напряжений приведенные выше классические зависимости для плоского напряженного состояния должны быть модифицированы. При этом зависимость (5.1.4) обобщается следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \text{ и } \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \frac{\varepsilon_{yz}}{2} \\ \frac{\varepsilon_{xz}}{2} \\ \frac{\varepsilon_{xy}}{2} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \frac{\varepsilon_{23}}{2} \\ \frac{\varepsilon_{13}}{2} \\ \frac{\varepsilon_{12}}{2} \end{Bmatrix}, \quad (5.1.10)$$

где

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n & m & 0 \\ mn & -mn & 0 & 0 & 0 & (m^2 - n^2) \end{bmatrix};$$

$$m = \cos\varphi; \quad n = \sin\varphi.$$

В обратной форме зависимость (5.1.10) имеет вид

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \text{ и } \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \frac{\varepsilon_{23}}{2} \\ \frac{\varepsilon_{13}}{2} \\ \frac{\varepsilon_{12}}{2} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \frac{\varepsilon_{yz}}{2} \\ \frac{\varepsilon_{xz}}{2} \\ \frac{\varepsilon_{xy}}{2} \end{Bmatrix},$$

где

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & (m^2 - n^2) \end{bmatrix}.$$

Закон деформирования монослоя в осях упругой симметрии, учитывающий влияние поперечных напряжений, температуры и влаги, имеет следующий вид:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T - \beta_1 \Delta M \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T - \beta_2 \Delta M \\ \varepsilon_3 - \alpha_3 \Delta T - \beta_3 \Delta M \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}, \quad (5.1.11)$$

где  $\Delta T$  и  $\Delta M$  - изменение температуры и влажности.

Коэффициенты матрицы жесткости монослоя  $Q_{ij}$  зависят только от температуры в момент нагружения и практически не зависят от режима ее изменения. Коэффициенты термического расширения  $\alpha_i$  в уравнении (5.1.11) принимают

ся как константы материала, не зависящие от температуры. Такое допущение противоречит известным многочисленным опытным данным, из которых следует, что  $\alpha_i$  не являются константами, а существенно зависят от температуры. Это значит, что в уравнении (5.1.11) вместо коэффициентов термического расширения  $\alpha_i$  надо ввести функции термического расширения  $\alpha_i(T)$ . Коэффициенты влажностного расширения  $\beta_i$  можно считать константами материала. В таком случае при изменении температуры от  $T_1$  до  $T_2$  вместо (5.1.11) справедливо

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & & & \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & & & \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & & & \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \int_{T_1}^{T_2} \alpha_1(T) dT - \beta_1 \Delta M \\ \varepsilon_2 - \int_{T_1}^{T_2} \alpha_2(T) dT - \beta_2 \Delta M \\ \varepsilon_3 - \int_{T_1}^{T_2} \alpha_3(T) dT - \beta_3 \Delta M \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.1.12)$$

Коэффициенты матрицы жесткости, входящие в (5.1.12), определяют следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{1}{\Delta} E_{11} (1 - \nu_{23} \nu_{32}); \\ Q_{22} &= \frac{1}{\Delta} E_{22} (1 - \nu_{31} \nu_{13}); \\ Q_{13} &= \frac{1}{\Delta} E_{33} (1 - \nu_{12} \nu_{21}); \\ Q_{44} &= G_{23}; \quad Q_{55} = G_{13}; \end{aligned}$$

$$Q_{66} = G_{12}; \quad Q_{12} = \frac{1}{\Delta} E_{11} (\nu_{12} - \nu_{31} \nu_{23}) =$$

$$= \frac{1}{\Delta} E_{22} (\nu_{21} - \nu_{32} \nu_{13});$$

$$Q_{13} = \frac{1}{\Delta} E_{11} (\nu_{13} + \nu_{21} \nu_{32}) =$$

$$= \frac{1}{\Delta} E_{22} (\nu_{31} + \nu_{12} \nu_{23});$$

$$Q_{23} = \frac{1}{\Delta} E_{22} (\nu_{23} + \nu_{12} \nu_{31}) =$$

$$= \frac{1}{\Delta} E_{33} (\nu_{32} + \nu_{21} \nu_{13});$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2\nu_{12} \nu_{32} \nu_{13}.$$

Для предварительных расчетов, когда не требуется высокая точность, можно пользоваться упрощенной формой уравнения (5.1.12):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \int_{T_1}^{T_2} \alpha_1(T) dT - \beta_1 \Delta M \\ \varepsilon_2 - \int_{T_1}^{T_2} \alpha_2(T) dT - \beta_2 \Delta M \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}.$$

В координатной системе  $x, y, z$  закон деформирования монослоя имеет вид

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & A_{26} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & A_{36} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \times$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x - \int_{T_1}^{T_2} \alpha_x(T) dT - \beta_x \Delta M \\ \varepsilon_y - \int_{T_1}^{T_2} \alpha_y(T) dT - \beta_y \Delta M \\ \varepsilon_z - \int_{T_1}^{T_2} \alpha_z(T) dT - \beta_z \Delta M \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} - \int_{T_1}^{T_2} \alpha_{xy}(T) dT - \beta_{xy} \Delta M \end{array} \right\}, \quad (5.1.13)$$

где  $[A] = [T][Q][T]^{-1}$ , или в развернутой форме:

$$A_{11} = Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4;$$

$$A_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4);$$

$$A_{13} = Q_{13}m^2 + Q_{23}n^2;$$

$$A_{16} = -mn^3Q_{22} + m^3nQ_{11} - mn(m^2 - n^2) \times \\ \times (Q_{12} + 2Q_{66});$$

$$A_{22} = Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4;$$

$$A_{23} = n^2Q_{13} + m^2Q_{23}; \quad A_{33} = Q_{33};$$

$$A_{26} = -m^3nQ_{22} + mn^3Q_{11} + mn(m^2 - n^2) \times \\ \times (Q_{12} + 2Q_{66});$$

$$A_{36} = (Q_{13} - Q_{23})mn; \quad A_{44} = Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2;$$

$$A_{45} = (Q_{55} - Q_{44})mn; \quad A_{55} = Q_{55}m^2 + Q_{44}n^2;$$

$$A_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2n^2 + \\ + Q_{66}(m^2 - n^2)^2;$$

$$\alpha_x(T) = \alpha_1(T)m^2 + \alpha_2(T)n^2;$$

$$\beta_x = \beta_1m^2 + \beta_2n^2;$$

$$\alpha_y(T) = \alpha_2(T)m^2 + \alpha_1(T)n^2;$$

$$\beta_y = \beta_2m^2 + \beta_1n^2; \quad \alpha_z(T) = \alpha_3(T); \quad \beta_z = \beta_3;$$

$$\alpha_{xy}(T) = [\alpha_1(T) - \alpha_2(T)]mn;$$

$$\beta_{xy} = (\beta_1 - \beta_2)mn.$$

В приближенных расчетах вместо первых трех равенств (5.1.13) можно пользоваться упрощенной формой закона деформирования

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \times$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x - \int_{T_1}^{T_2} \alpha_x(T) dT - \beta_x \Delta M \\ \varepsilon_y - \int_{T_1}^{T_2} \alpha_y(T) dT - \beta_y \Delta M \\ \varepsilon_{xy} - \int_{T_1}^{T_2} \alpha_{xy}(T) dT - \beta_{xy} \Delta M \end{array} \right\}. \quad (5.1.14)$$

В законах деформирования (5.1.2) - (5.1.14)  $Q_{ij}$  и  $A_{ij}$  определяют при  $T=T_2$ .

Если можно пренебречь температурной зависимостью коэффициентов термического расширения, закон деформирования (5.1.14) принимает вид

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \times$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x - \alpha_x \Delta T - \beta_x \Delta M \\ \varepsilon_y - \alpha_y \Delta T - \beta_y \Delta M \\ \varepsilon_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T - \beta_{xy} \Delta M \end{array} \right\}. \quad (5.1.15)$$

Коэффициенты матрицы жесткости  $Q_{ij}$  в случае применения законов деформирования (5.1.14) или (5.1.15) определяют по зависимости (5.1.3).

### 5.1.2. МИКРОМЕХАНИКА УПРУГИХ СВОЙСТВ МОНОСЛОЯ

Упругие характеристики однонаправленно армированного слоя определяются как упругими

свойствами и объемным содержанием компонентов, так и особенностями их расположения. Однонаправленно армированный слой рассматривается как трансверсально изотропный материал, характеризующийся пятью независимыми упругими характеристиками: модулями упругости в направлении армирования  $E_1$  и в трансверсальном направлении  $E_2$ , коэффициентами Пуассона в плоскости укладки волокон  $\nu_{12}$  и в плоскости изотропии  $\nu_{23}$  (первый индекс соответствует направлению поперечной деформации, а второй - направлению нагружения), а также модулем продольного сдвига  $G_{12}$ .

Основной задачей микромеханики композитов является построение зависимостей, выражающих средние (эффективные) упругие постоянные слоя  $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{23}$  через упругие постоянные волокон и матрицы, а также геометрические характеристики структуры. Разработано большое число микромоделей композитов, которые можно разделить на следующие группы:

1) модели, учитывающие только упругие свойства и объемное содержание компонентов [16, 26];

2) самосопряженные (согласованные) модели, в соответствии с которыми композит представляется в виде волокна, окруженного бесконечной средой, которая обладает свойствами композита [11, 32];

3) энергетические модели, основанные на аппроксимации полей напряжений и перемещений и использовании вариационных принципов, позволяющих получить верхнюю и нижнюю границы для эффективных упругих постоянных [22, 23, 12];

4) статистические модели, основанные на предположении о случайном расположении волокон [24, 27, 30];

5) модели, учитывающие форму волокон и предпологающие их регулярное расположение:

а) основанные на точных решениях плоской задачи теории упругости для изотропного пространства (матрицы) с периодической системой включений (волокон) [4, 5];

б) основанные на осреднении и асимптотическом анализе регулярных структур, описываемых уравнениями теории упругости неоднородных сред [10, 15];

в) основанные на приближенных аналитических и численных решениях задачи теории упругости, а также экспериментальном анализе напряженного состояния повторяющегося элемента структуры с одним или несколькими волокнами [1, 19, 20].

Приведенные ниже данные главным образом соответствуют модели 5в, позволяющей получить достаточно простые и точные результаты.

При определении упругих характеристик однонаправленно армированного слоя принимаются следующие условия: 1) связующее является изотропным материалом, а волокна могут быть изотропными или трансверсально изотропными; 2) волокна непрерывные, параллельные, прямые, распределены равномерно и имеют круглое поперечное сечение; 3) между волокнами и связующим существует жесткое сцепление;

4) компоненты однородные, линейно упругие; 5) отсутствуют поры в связующем, волокнах и контактном слое.

Модуль упругости в направлении армирования для трансверсально изотропных волокон согласно точному решению [37]

$$E_1 = \nu E_{fz} + (1 - \nu) E_m + \eta E_m, \quad (5.1.16)$$

где

$$\eta = 2\nu(1 - \nu) \left( \nu_m - \nu_{fz} \right)^2 / \left( 1 + \nu_m + \nu \left( 1 - \nu_m - 2\nu_m^2 \right) + (1 - \nu) \left( 1 - \nu_{f\theta} - 2\nu_{fz} \nu_{fz} \right) E_m / E_{fr} \right)$$

параметр, учитывающий различие коэффициентов Пуассона компонентов;  $\nu$  - объемное содержание волокон;  $E_{fz}$  - модуль упругости волокна в продольном направлении;  $E_{fr}$  - модуль упругости волокна в поперечном направлении;  $E_m$  - модуль упругости связывающего;  $\nu_m$  - коэффициент Пуассона связывающего;  $\nu_{fz}, \nu_{fz}$  - продольно-поперечные коэффициенты Пуассона волокна;  $\nu_{f\theta}$  - коэффициент Пуассона волокна в плоскости изотропии.

Если  $\nu_m = \nu_{fz}, \eta = 0$  и зависимость (5.1.16) принимает вид, соответствующий правилу смеси:

$$E_1 = \nu E_{fz} + (1 - \nu) E_m. \quad (5.1.17)$$

Зависимость (5.1.17) является общепринятой для определения модуля упругости в направлении армирования. Это обосновано тем, что влияние поперечных эффектов, возникающих вследствие различия коэффициентов Пуассона полимерного связывающего и волокон, не превышает 2%. В случае высокомодульных волокон, для которых выполняется условие  $E_{fz} \gg E_m$ , модуль упругости в направлении армирования определяется упругими свойствами волокон согласно зависимости

$$E_1 = \nu E_{fz}.$$

Модуль упругости в поперечном направлении  $E_2$  и коэффициенты Пуассона  $\nu_{12}$  и  $\nu_{23}$  определяются с использованием двоякопериодической расчетной модели однонаправленно армированного пластика (рис. 5.1.2, а). Повторяющийся элемент структуры разделен на тонкие параллельные слои (рис. 5.1.2, б).

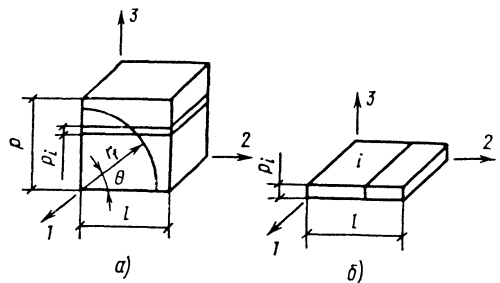


Рис. 5.1.2. Расчетная схема материала: а - повторяющийся элемент периодической структуры; б - бесконечно тонкий слой

В случае квадратичной укладки волокон геометрические параметры укладки волокон  $p$  и  $l$ , радиус волокон  $r_f$  и объемное содержание волокон  $v$  связаны соотношениями

$$\frac{r_f}{p} = 2\sqrt{\frac{v}{\pi}}; \quad l = p.$$

При гексагональной упаковке

$$\frac{r_f}{p} = 2\sqrt{\frac{2v}{\sqrt{3}\pi}}; \quad l = \frac{\sqrt{3}}{2} p.$$

Уравнения неразрывности деформаций и уравнения равновесия, учитывающие объемное напряженное состояние компонентов, образуют систему уравнений, решение которой позволяет определить поперечный модуль упругости

$$E_2 = \frac{r_f}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} E_2^{(0)} \cos \theta d\theta + \left(1 - \frac{r_f}{p}\right) \times \\ \times \frac{s_{m12} v_{12} + s_{m11}}{s_{m11} - s_{m12}^2} \quad (5.1.18)$$

и коэффициенты Пуассона:

$$v_{23} = \frac{r_f}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{s_{m11}}{s_{m12}} v_{12} - \left( s_{m12} - \frac{s_{m11}^2}{s_{m12}} \right) B_0 - \right. \\ \left. - (s_{m12} - s_{m11}) E_2^{(0)} \right\} \cos \theta d\theta - \left(1 - \frac{r_f}{p}\right) \times \\ \times \frac{s_{m12}}{s_{m11} + s_{m12}} (1 - v_{12}); \quad (5.1.19)$$

$$v_{12} = \frac{\frac{r_f}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi B_4 - (1 - \psi) B_5}{B_1 B_5 - B_2 B_4} \cos \theta d\theta + \dots}{\frac{r_f}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{B_5 B_3 - B_2 B_6}{B_1 B_5 - B_2 B_4} \left[ 1 - \psi \left( 1 + \frac{B_4}{B_5} \right) \right] + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{r_f}{p}\right) \frac{s_{m12}}{s_{m11}^2 - s_{m12}^2} \right] + \dots} + \psi \frac{B_6}{B_5} \cos \theta d\theta - \left(1 - \frac{r_f}{p}\right) \frac{s_{m11}}{s_{m11}^2 - s_{m12}^2}, \quad (5.1.20)$$

$$E_2^{(0)} = \left[ \psi \left( \frac{1}{s_{m12}} - \frac{1}{s_{f12}} \right) - \frac{1}{s_{m12}} \right] v_{12} - (1 - \psi) \times$$

$$\times \frac{s_{m11}}{s_{m12}} B_0 + \psi \frac{s_{f11}}{s_{f12}} \frac{1}{B_5} (B_4 B_0 - B_6 v_{12});$$

$$B_0 = \frac{B_5 + (B_5 B_3 - B_2 B_6) v_{12}}{B_1 B_5 - B_2 B_4};$$

$$B_1 = (1 - \psi) \left( s_{m12} - s_{m11} - \frac{s_{m11}}{s_{m12}} f_1 \right);$$

$$B_2 = \psi \left[ s_{f12} - \frac{s_{f11}}{s_{f12}} (s_{f23} + f_1) \right];$$

$$B_3 = 1 + \frac{f_1}{s_{m12}} + \psi \left( \frac{s_{f23} + f_1}{s_{f12}} - \frac{f_1}{s_{m12}} - 1 \right);$$

$$B_4 = s_{m12} - \frac{s_{m11}}{s_{m12}} [(1 - \psi) f_2 + s_{m11}];$$

$$B_5 = -s_{f12} - \frac{s_{f11}}{s_{f12}} [\psi f_2 - s_{f22}];$$

$$B_6 = \frac{s_{m11} + (1 - \psi) f_2}{s_{m12}} - \frac{\psi f_2 - s_{f22}}{s_{f12}};$$

$$f_1 = s_{m11} - s_{m12} + \psi f_2;$$

$$f_2 = s_{m12} - s_{m11} - s_{f23} + s_{f22}; \quad \psi = \frac{r}{l} \cos \theta;$$

$s_{mij}$ ,  $s_{fj}$  - коэффициенты матриц податливости связующего и волокна, определяемые согласно (5.1.2).

Зависимости (5.1.18) - (5.1.20) содержат ряд интегралов, определять которые целесообразно численными методами.

На рис. 5.1.3 сопоставлены расчетные и экспериментальные значения поперечного модуля упругости стекло-, угле- и боропластиков в зависимости от объемного содержания волокон. Исходные данные для расчета взяты из работ [19, 20].

Более простая зависимость для определения поперечного модуля упругости [19]

$$E_2 = \left[ \frac{r_f}{p} I + \left(1 - \frac{r_f}{p}\right) \frac{1}{1 - v_m^2} \right] E_m, \quad (5.1.21)$$

где

$$I = \frac{1}{bE_m} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctg \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \right];$$

$$a = \frac{1 - \nu_m^2}{E_m}; \quad b = \frac{r_f}{l} \left[ \frac{1 - \nu_{fr} \nu_{fr}}{E_{fr}} - a \right].$$

Зависимость (5.1.21) получена из решения плоской задачи вместо объемной, вследствие чего дает несколько заниженные значения модуля поперечной упругости.

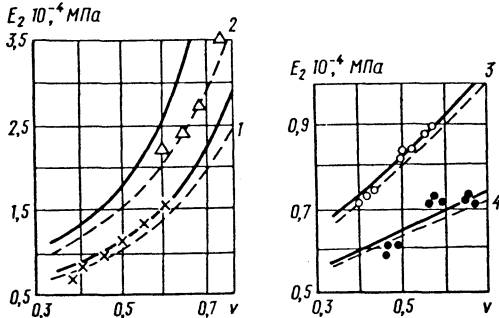


Рис. 5.1.3. Зависимость модуля упругости  $E_2$  от объемного содержания волокон стекло- (1) и боропластика (2), высокомодульного (3) и высокопрочного (4) углепластика: сплошные линии - квадратичная укладка, штриховые - гексагональная, точки - эксперимент

При известных значениях  $E_1$ ,  $E_2$  и  $\nu_{12}$  коэффициент Пуассона  $\nu_{21}$  однонаправленно армированного пластика

$$\nu_{21} = \frac{E_1}{E_2} \nu_{12}. \quad (5.1.22)$$

Коэффициент Пуассона  $\nu_{21}$  можно определять и по зависимости, соответствующей правилу смеси:

$$\nu_{21} = (1 - \nu) \nu_m + \nu \nu_{fr}. \quad (5.1.23)$$

Зависимость для определения коэффициента Пуассона в плоскости изотропии  $\nu_{23}$  получена в результате решения двухосной задачи [19]

$$\nu_{23} = \left( 1 - \frac{r_f}{p} \right) \nu_m + \frac{r_f}{p} \left[ \frac{\nu_m}{\nu_{fr}} g_2 + \frac{E_m}{E_{fr}} (g_1 - g_2) \right] \times \nu_{fr}, \quad (5.1.24)$$

$$g_1 = \frac{1}{k_1} \left[ \frac{2}{\sqrt{1 - k_1^2}} \arctg \sqrt{\frac{1 + k_1}{1 - k_1}} - \frac{\pi}{2} \right] + \frac{1}{c} \times \left( \frac{\nu_m E_{fr}}{\nu_{fr} E_m} - 1 \right) \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{l}{r_f c (\beta_1 - \beta_2)} \sqrt{\beta_1^2 - 1} \times \arctg \sqrt{\frac{\beta_1 + 1}{\beta_1 - 1}} \right];$$

$$g_2 = \begin{cases} \frac{l}{r_f c^2 (\beta_1 - \beta_2)} \sqrt{\beta_2^2 - 1} \arctg \sqrt{\frac{\beta_2 + 1}{\beta_2 - 1}}, & \text{если } |\beta_2| > 1; \\ \frac{l}{r_f c^2 (\beta_1 - \beta_2)} \sqrt{1 - \beta_2^2} \ln \left| \frac{1 + \beta_2 + \sqrt{1 - \beta_2^2}}{1 + \beta_2 - \sqrt{1 - \beta_2^2}} \right|, & \text{если } |\beta_2| < 1; \end{cases}$$

$$c = \frac{r_f}{l} \left( \frac{E_{fr}}{E_m} + \frac{E_m}{E_{fr}} - 2 \right); \quad k_1 = \frac{r_f}{l} \left( 1 - \frac{E_m}{E_{fr}} \right);$$

$$\beta_1 = \frac{l}{r_f} \frac{E_{fr}}{E_{fr} - E_m}; \quad \beta_2 = \frac{l}{r_f} \frac{E_m}{E_{fr} - E_m}.$$

При выводе формулы (5.1.24) не учитывались эффекты, возникающие в армированном пластике вследствие взаимодействия компонентов в направлении армирования. Влияние этих эффектов существенно проявляется в случае анизотропных высокомодульных волокон, какими являются угле- и органоволокна. Коэффициент Пуассона  $\nu_{23}$  для пластиков, армированных изотропными волокнами, при реальных объемных содержаниях волокон существенно ниже коэффициентов Пуассона компонентов.

Модуль сдвига в плоскости изотропии однонаправленно армированного пластика может быть найден по зависимости

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}. \quad (5.1.25)$$

Модуль продольного сдвига  $G_{12}$  для расчетной схемы, представленной на рис. 5.1.2, определяется по формуле

$$G_{12} = \left[ 1 - \frac{r_f}{p} + \frac{r_f}{p} k \left( \frac{2k}{\sqrt{k^2 - 1}} \arctg \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - \frac{\pi}{2} \right) \right] G_m, \quad (5.1.26)$$

$$\text{где } k = \left[ \frac{r_f}{l} \left( 1 - \frac{G_m}{G_{rz}} \right) \right]^{-1}.$$

При определении упругих характеристик гибридного монослоя, содержащего менее жесткие волокна типа *B* и более жесткие волокна типа *C*, следует учитывать тип микроструктуры (рис. 5.1.4).

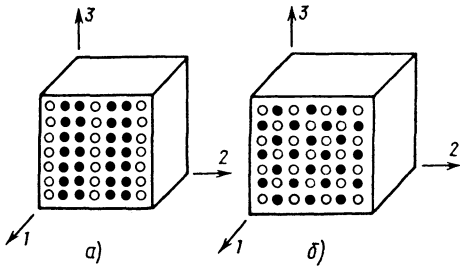


Рис. 5.1.4. Структура гибридных пластиков:  
а - слоистая; б - дисперсная

Для любого типа микроструктуры

$$E_1 = (1 - \nu) E_m + (1 - \mu_C) \nu E_{Bz} + \mu_C \nu E_{Cz},$$

$$\text{где } \mu_C = \frac{\nu_C}{\nu_B + \nu_C} = \frac{\nu_C}{\nu}; \nu_B \text{ и } \nu_C - \text{относи-}$$

тельные объемные содержания волокон типа *B* и *C*;  $\nu$  - суммарное объемное содержание волокон.

Коэффициент Пуассона  $\nu_{21}$  определяется зависимостями [20]:

в случае дисперсной гибридной структуры

$$\nu_{21} = (1 - \nu) \nu_m + (1 - \mu_C) \nu \nu_{Bz} + \mu_C \nu \nu_{Cz};$$

в случае слоистой гибридной структуры

$$\nu_{21} = \frac{\mu_C \nu_{Cz} E_{Cr} + (1 - \mu_C) \nu_{Bz} E_{Br}}{\mu_C E_{Cr} + (1 - \mu_C) E_{Br}},$$

где  $E_{Br}$  и  $E_{Cr}$  - поперечные модули упругости волокон, а  $\nu_{Bz}$  и  $\nu_{Cz}$  - коэффициенты Пуассона волокон.

Для определения поперечного модуля упругости гибридного монослоя  $E_2$  в работе [20] предложены следующие формулы:

в случае дисперсной структуры

$$E_2 = \frac{E_{B2} E_{C2}}{E_{B2} \mu_C + E_{C2} (1 - \mu_C)};$$

в случае слоистой структуры

$$E_2 = E_{B2} (1 - \mu_C) + E_{C2} \mu_C,$$

где  $E_{B2}$  и  $E_{C2}$  - модули упругости пластика, армированного только волокнами типа *B* или типа *C* ((5.1.18) или (5.1.21)).

Аналогичные зависимости получены для модуля сдвига  $G_{12}$  [20]:

в случае дисперсной структуры

$$G_{12} = \frac{G_{B12} G_{C12}}{G_{B12} \mu_C + G_{C12} (1 - \mu_C)};$$

в случае слоистой структуры

$$G_{12} = G_{B12} (1 - \mu_C) + G_{C12} \mu_C,$$

где  $G_{B12}$  и  $G_{C12}$  определяют по формуле (5.1.26).

При учете влияния температуры на упругие характеристики монослоя с достаточной для практики точностью можно принять, что от температуры не зависят упругие характеристики волокон и коэффициент Пуассона полимерного связующего  $\nu_m$ . В таком случае  $\nu_{21}$  и  $\nu_{23}$  при любой температуре определяются формулами (5.1.23) и (5.1.19) или (5.1.24),

$$E_1(T) = E_m(T)(1 - \nu) + E_{fz} \nu \approx \nu E_{fz},$$

где  $E_m(T)$  - температурная зависимость модуля упругости связующего, которая может быть аппроксимирована полиномом третьей степени;

$$E_m(T) = a + bT + cT^2 + dT^3. \quad (5.1.27)$$

В последней формуле коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  устанавливаются экспериментально, а температуру  $T$  измеряют в градусах Кельвина.

Температурная зависимость модуля сдвига связующего

$$G_m(T) = \frac{1}{2(1 + \nu_m)} E_m(T).$$

Для определения температурной зависимости  $E_2(T)$  и  $G_{12}(T)$  следует в выражениях (5.1.18), (5.1.21) и (5.1.26) вместо  $E_m$  и  $G_m$  ввести  $E_m(T)$  и  $G_m(T)$ .

Зависимость от температуры коэффициента Пуассона  $\nu_{12}$  может быть получена введением в выражение (5.1.20) упругих характеристик, зависящих от температуры, или по формуле

$$\nu_{12}(T) = \frac{\nu_{21}(T)}{E_1(T)} E_2(T).$$

Таким образом, для учета влияния температуры на упругие характеристики монослоя достаточно экспериментально установить температурную зависимость модуля упругости связующего в виде полинома (5.1.27).

Температурные зависимости коэффициентов матрицы жесткости монослоя  $Q_{ij}(T)$  определяют по формулам (5.1.3) с учетом  $E_1(T)$ ,  $E_2(T)$ ,  $G_{12}(T)$  и  $\nu_{21}(T)$ .

В заключение приведем выражения для коэффициентов термического расширения композита вдоль и поперек волокон:

$$\alpha_1(T) = \alpha_m(T) - [\alpha_m(T) - \alpha_{fz}] \frac{\nu E_{fz}}{E_1(T)};$$

$$\alpha_2(T) = [1 + \alpha_m(T)]\alpha_m(T)(1 - \nu) + \alpha_{fz} \nu (1 + \nu_{fz}) - \alpha_1(T) [\nu \nu_{fz} + (1 - \nu) \nu_m],$$

где  $\alpha_m$  и  $\alpha_{fz}$  - коэффициенты термического расширения матрицы и волокон.

5.1.3. МИКРОМЕХАНИКА УПРУГИХ СВОЙСТВ ПЛАСТИКА, АРМИРОВАННОГО ТКАНЬЮ

**Расчетная модель тканевого пластика.** Пластики, армированные тканями, представляют собой очень сложный класс композитных материалов. Это объясняется тем, что вследствие переплетения нитей жесткость и напряженное состояние тканевых пластиков в пределах повторяющегося элемента структуры непрерывно меняются от сечения к сечению. Кроме того, в пределах любого сечения распределение напряжений имеет весьма сложный неоднородный характер. Ниже изложена методика приближенного определения напряжений в структурных элементах тканевого пластика с учетом переплетения нитей и ступенчатого характера разрушения материала. Для исследования напряженно-деформированного состояния тканевого пластика используется расчетная модель его структуры (рис. 5.1.5). Направления основы и утка обозначены через "о" и "у". В основе предложенной расчетной модели тканевого пластика лежат следующие допущения:

1. Структура материала регулярна и все его компоненты деформируются линейно.

2. Искривления нитей смежных слоев совпадают по фазе.

3. Изменение искривления нитей в процессе нагружения материала пренебрежимо мало.

4. Искривленная ось волокон заменяется ломаной, характерные параметры которой ( $T_o$ ,  $T_y$ ,  $c_o$ ,  $c_y$ ,  $\beta_o$  и  $\beta_y$ ) показаны на рис. 5.1.5. Все вышеприведенные параметры определяются по микрофотографиям структуры материала.

5. Отдельный слой представляется как состоящий из двух условных монослоев основы и утка, которые обозначаются через "о" и "у". Искривление нитей учитывается чередованием в условных монослоях наклонно и продольно армированных полос, которые на рис. 5.1.5 для монослоя основы обозначены через "оβ" и "о1", а для монослоя утка через "уβ" и "у1". Относительные ширины наклонно армированных полос определяются по зависимостям

$$n_o = 2c_o/T_o; \quad n_y = c_y/T_y.$$

6. Элементарные волокна размещены равномерно по объему условных монослоев, которые, следовательно, имеют во всех точках одинаковое относительное объемное содержание волокон, равное среднему для всего материала  $\nu$ , и относительные толщины  $m_o$  и  $m_y$ , определяемые по следующим формулам:

$$m_o = t_o/t = \left(1 + k_y f_y p_y / k_o f_o p_o\right)^{-1};$$

$$m_y = t_y/t = \left(1 + k_o f_o p_o / k_y f_y p_y\right)^{-1}; \quad (5.1.28)$$

$$m_o + m_y = 1,$$

где  $k_o$  и  $k_y$  - число элементарных волокон в нитях основы и утка (зависит от номера нитей);  $f_o$  и  $f_y$  - средние площади поперечных сечений элементарных волокон;  $p_o$  и  $p_y$  - число нитей на единицу длины. Если нити основы и утка одинаковые, то зависимости (5.1.28) принимают вид

$$m_o = \left(1 + p_y/p_o\right)^{-1}; \quad m_y = \left(1 + p_o/p_y\right)^{-1}.$$

7. При нагружении материала в плоскости ткани в условных монослоях возникают одинаковые средние деформации, равные средним деформациям всего слоя:

$$\epsilon_o^o = \epsilon_o^y = \epsilon_o; \quad \epsilon_y^o = \epsilon_y^y = \epsilon_y; \quad \gamma_{oy}^o = \gamma_{oy}^y = \gamma_{oy}.$$

$$(5.1.29)$$

Здесь и далее нижние индексы означают направления деформаций или напряжений, а верхние - структурный элемент.

8. Средние напряжения в отдельном слое складываются из средних напряжений в условных монослоях по закону смеси:

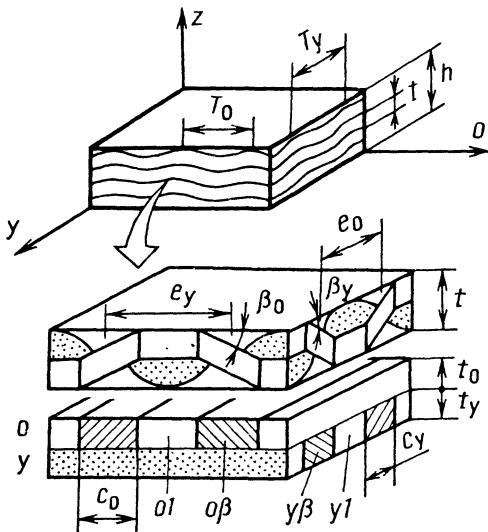


Рис. 5.1.5. Модель структуры тканевого пластика



$$\sigma_o = m_o \sigma_o^o + m_y \sigma_o^y; \quad \sigma_y = m_o \sigma_y^o + m_y \sigma_y^y;$$

$$\tau_{oy} = m_o \tau_{oy}^o + m_y \tau_{oy}^y. \quad (5.1.30)$$

9. Между средними деформациями условных монослоев, наклонно и продольно армированных полос, существуют соотношения

$$\varepsilon_o^o = n_o \varepsilon_o^{o\beta} + (1 - n_o) \varepsilon_o^{o1};$$

$$\varepsilon_y^y = n_y \varepsilon_y^{y\beta} + (1 - n_y) \varepsilon_y^{y1};$$

$$\varepsilon_y^o = \varepsilon_y^{o\beta} = \varepsilon_y^{o1}; \quad \varepsilon_o^y = \varepsilon_o^{y\beta} = \varepsilon_o^{y1};$$

$$\gamma_{oy}^o = n_o \gamma_{oy}^{o\beta} + (1 - n_o) \gamma_{oy}^{o1};$$

$$\gamma_{oy}^y = n_y \gamma_{oy}^{y\beta} + (1 - n_y) \gamma_{oy}^{y1}.$$

10. Между средними напряжениями в условных монослоях, в наклонно и продольно армированных полосах существуют следующие соотношения:

$$\sigma_o^o = \sigma_o^{o\beta} = \sigma_o^{o1}; \quad \sigma_y^y = \sigma_y^{y\beta} = \sigma_y^{y1};$$

$$\sigma_y^o = n_o \sigma_y^{o\beta} + (1 - n_o) \sigma_y^{o1};$$

$$\sigma_o^y = n_y \sigma_o^{y\beta} + (1 - n_y) \sigma_o^{y1};$$

$$\tau_{oy}^o = \tau_{oy}^{o\beta} = \tau_{oy}^{o1}; \quad \tau_{oy}^y = \tau_{oy}^{y\beta} = \tau_{oy}^{y1}.$$

11. Учитывая, что влияние несимметрии пакета из несимметричных относительно срединной поверхности слоев очень быстро ослабевает с увеличением числа этих слоев, а также с учетом того, что отдельный слой тканевого пластика работает в составе пакета, принимается, что напряженно-деформированное состояние условных монослоев основы и утка по толщине однородное, т.е. при продольном нагружении коробление материала отсутствует.

12. Напряженно-деформированное состояние условных наклонно армированных полос зависит от взаимодействия переплетенных нитей в местах их перекрещивания (рис. 5.1.6). Взаимодействие нитей учитывается с помощью следующих условий для наклонно армированных полос:

условие неразрывности деформаций

$$\gamma_{oz}^{o\beta} c_o = -\gamma_{yz}^{y\beta} c_y; \quad (5.1.31)$$

условие равновесия

$$\tau_{oz}^{o\beta} e_o m_o = \tau_{yz}^{y\beta} e_y m_y, \quad (5.1.32)$$

где  $e_o$  и  $e_y$  - ширины полосок условных монослоев основы и утка, армированных волокнами только одной нити ( $e_o = 1/p_o$ ;  $e_y = 1/p_y$ ).

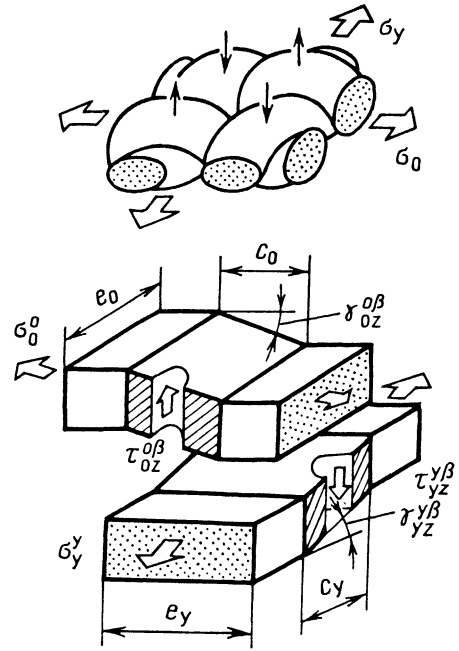


Рис. 5.1.6. Схема взаимодействия переплетенных нитей

13. Нормальными напряжениями в направлении оси  $z$  пренебрегаем.

14. Все одинаковые элементы структуры тканевого пластика разрушаются одновременно.

Все вышепринятые допущения применимы как в случае тканей с полотняным (см. рис. 5.1.5 и 5.1.6), так и саржевым и сатиновым переплетением.

**Упругие характеристики тканевого пластика.** Показанный на рис. 5.1.5 слоистый тканепластик является ортотропным материалом, для которого закон деформирования при нагружении в осях упругой симметрии имеет вид

$$\begin{Bmatrix} \sigma_o \\ \sigma_y \\ \tau_{oy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^T & Q_{12}^T & 0 \\ Q_{21}^T & Q_{22}^T & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{oy} \end{Bmatrix}, \quad (5.1.33)$$

где  $T$  означает "тканевый пластик". Согласно принятой расчетной модели закон деформирования (5.1.33) относится и к отдельному слою, работающему в составе пакета.

Из допущений (5.1.29) и (5.1.30) следует, что составляющие приведенной матрицы упругости  $Q_y^T$  в законе деформирования (5.1.33) определяются по закону смеси

$$Q_{ij}^T = m_o Q_{ij}^o + m_y Q_{ij}^y, \quad (5.1.34)$$

где составляющие приведенных матриц упругости условных монослоев  $Q_{ij}^o$  и  $Q_{ij}^y$  должны определяться с учетом наклонно армированных полос и взаимодействия переплетенных нитей согласно допущениям 7 и 9-14 (см. выше). Как показано на рис. 5.1.6, взаимодействие переплетенных нитей выражается таким образом, что при осевом нагружении, например, только монослоя основы его деформации вследствие моноклинной анизотропии слоя и согласно условиям (5.1.31) и (5.1.32) передаются на монослой утка. При сдвиге материала в плоскости слоев взаимодействием переплетенных нитей в первом приближении можно пренебречь. Тогда, выражая  $Q_{ij}^o$  и  $Q_{ij}^y$  в зависимости (5.1.34) через технические упругие характеристики монослоев, армированных в одном направлении прямыми волокнами, получаем [21]

$$Q_{11}^T = \frac{m_o}{\omega a_o} + m_y E_2^y; \quad Q_{22}^T = m_o E_2^o + \frac{m_y}{\omega a_y};$$

$$Q_{66}^T = m_o G_{12}^o + m_y G_{12}^y; \quad (5.1.35)$$

$$Q_{21}^T = -\frac{1}{\omega} \left( m_o E_2^o \frac{b_o}{a_o} + m_y E_2^y \frac{b_y}{a_y} + m_y \frac{d_o}{a_o a_y} \right);$$

$$Q_{12}^T = -\frac{1}{\omega} \left( m_o E_2^o \frac{b_o}{a_o} + m_y E_2^y \frac{b_y}{a_y} + m_o \frac{d_y}{a_o a_y} \right),$$

где

$$\omega = 1 - \frac{d_o d_y}{a_o a_y};$$

$$a_i = n_i \left[ S_{11}^{\#} - \frac{(S_{15}^{\#})^2 c_i}{G m_i e_i} \right] + \frac{1 - n_i}{E_1^i};$$

$$b_i = n_i \left[ S_{12}^{\#} - S_{15}^{\#} S_{25}^{\#} \frac{c_i}{G m_i e_i} \right] - (1 - n_i) \frac{v_{12}^i}{E_1^i};$$

$$d_i = -\Omega \frac{T_i}{m_j e_j};$$

$$\Omega = n_o n_y \frac{S_{15}^{o\beta} S_{15}^{y\beta}}{2G}; \quad G = \frac{S_{55}^{o\beta} c_o}{m_o e_o} + S_{55}^{y\beta} \frac{c_y}{m_y e_y};$$

$$S_{11}^{\#} = \frac{\cos^4 \beta_i}{E_1^i} + \frac{\sin^4 \beta_i}{E_3^i} +$$

$$+ \left( \frac{1}{G_{13}^i} - 2 \frac{v_{31}^i}{E_1^i} \right) \cos^2 \beta_i \sin^2 \beta_i;$$

$$S_{55}^{\#} = \frac{1}{G_{13}^i} + 4 \left( \frac{1 + 2v_{31}^i}{E_1^i} + \frac{1}{E_3^i} - \frac{1}{G_{13}^i} \right) \times$$

$$\times \cos^2 \beta_i \sin^2 \beta_i;$$

$$S_{12}^{\#} = -\frac{v_{21}^i}{E_1^i} \cos^4 \beta_i - \frac{v_{23}^i}{E_3^i} \sin^4 \beta_i;$$

$$S_{15}^{\#} = \left[ \left( \frac{1}{G_{13}^i} - 2 \frac{v_{31}^i}{E_1^i} \right) (\cos^2 \beta_i - \sin^2 \beta_i) - \right.$$

$$\left. - 2 \left( \frac{\cos^2 \beta_i}{E_1^i} - \frac{\sin^2 \beta_i}{E_3^i} \right) \right] \cos \beta_i \sin \beta_i;$$

$$S_{25}^{\#} = 2 \left( \frac{v_{21}^i}{E_1^i} - \frac{v_{23}^i}{E_3^i} \right) \cos \beta_i \sin \beta_i;$$

$$i, j = o, y; \quad i \neq j; \quad \beta_i > 0.$$

Технические упругие характеристики  $E_1^i, E_2^i = E_3^i, v_{21}^i = v_{31}^i, v_{23}^i, G_{12}^i$  ( $i = o, y$ ) определяются зависимостями, которые приведены в п. 5.1.2. Индекс в зависимостях (5.1.35) использован для учета случая, когда в направлениях основы и утка применены волокна разного типа. К представленному виду формулы (5.1.35) приведены после некоторых упрощений, незначительно влияющих на конечный результат.

Технические упругие характеристики тканевого пластика до потери сплошности материала определяются зависимостями:

$$E_o = Q_{11}^T - \frac{Q_{12}^T Q_{21}^T}{Q_{22}^T} \approx \frac{m_o}{a_o} - m_y E_2^y;$$

$$E_y = Q_{22}^T - \frac{Q_{12}^T Q_{21}^T}{Q_{11}^T} \approx m_o E_2^o + \frac{m_y}{a_y};$$

$$v_{y_o} = \frac{Q_{21}^T}{Q_{22}^T}; \quad v_{o_y} = \frac{Q_{12}^T}{Q_{11}^T};$$

$$G_{o_y} = Q_{66}^T = m_o G_{12}^o + m_y G_{12}^y.$$

Поскольку в зависимостях (5.1.35)  $m_y d_o = m_o d_y$ , до потери сплошности для тканевых пластиков характерна симметрия упругих свойств, т.е.  $Q_{12}^T = Q_{21}^T$ .

Тканевые пластики склонны к потере сплошности. Даже небольшие растягивающие напряжения, действующие поперек направления армирования, могут вызвать растрескивание условных монослоев, что изменяет упругие характеристики материала в целом. Принимается, что при наличии трещин поврежденные условные монослои не воспринимают касательных и растягивающих напряжений, действующих соответственно параллельно и перпендикулярно к плоскости трещин. В таком случае при определении упругих характеристик тканевого пластика для условного монослоя с трещинами следует принимать  $E_2^+ = v_{21}^+ = v_{12}^+ = v_{32}^+ = G_{12} = 0$ , где знак "+" означает растяжение. При разгрузке и повторном нагружении на сжатие эти трещины практически не влияют на восприятие монослоем сжимающих напряжений. Таким образом, после потери сплошности тканевый пластик обладает бимодульными свойствами. В условиях растяжения или сдвига в направлениях упругой симметрии он в зависимости от вида потери сплошности может иметь следующие технические упругие характеристики:

в случае растрескивания монослоя утка

$$E_o^+ = \frac{m_o}{a_o}; \quad E_y^+ = E_y; \quad G_{oy}^+ = m_o G_{12}^o;$$

$$v_{yo}^+ = \frac{m_o E_2^o b_o + m_y \frac{d_o}{a_y}}{\omega Q_{22}^T a_o}; \quad v_{yo}^+ = E_2^o b_o + \frac{d_y}{a_y};$$

(5.1.36)

в случае растрескивания монослоя основы

$$E_o^+ = E_o; \quad E_y^+ = \frac{m_y}{a_y}; \quad G_{oy}^+ = m_y G_{12}^y;$$

$$v_{yo}^+ = E_2^y b_y + \frac{d_o}{a_o}; \quad v_{oy}^+ = \frac{m_y E_2^y b_y + m_o \frac{d_y}{a_o}}{\omega Q_{11}^T a_y};$$

(5.1.37)

в случае растрескивания монослоев основы и утка

$$E_o^{+(+)} = E_o^{(+)}; \quad E_y^{+(+)} = E_y^{(+)}; \quad G_{oy}^{+(+)} = 0;$$

$$v_{yo}^{+(+)} = \frac{d_o}{a_o}; \quad v_{oy}^{+(+)} = \frac{d_y}{a_y}.$$

(5.1.38)

При сжатии в направлениях упругой симметрии тканевый пластик имеет начальные модули упругости и коэффициенты Пуассона, не зависящие от вида потери сплошности. В общем случае плоского напряженно-деформированного состояния модули упругости и коэффициенты Пуассона тканевого пластика в направлениях его упругой симметрии зависят от вида потери сплошности и соотношения между приложенными напряжениями  $\sigma_o$  и  $\sigma_y$  или деформациями  $\epsilon_o$  и  $\epsilon_y$ , т.е. от того, раскрываются трещины или сжимаются. В первом приближении при выборе модулей упругости и коэффициентов Пуассона с учетом потери сплошности тканевого пластика можно ограничиться только учетом знаков напряжений  $\sigma_o$  и  $\sigma_y$  и пользоваться табл. 5.1.1.

Растрескиванием и взаимодействием переплетенных нитей объясняется несимметричность упругих свойств (т.е. неравенство  $v_{yo} E_y \neq v_{oy} E_o$ ) для тканевых пластиков [21].

5.1.1. Модули упругости и коэффициенты Пуассона растрескавшегося тканевого пластика

Знак напряжений		Растрескавшиеся условные монослои		
$\sigma_o$	$\sigma_y$	Основа	Уток	Основа и уток
-	-	$E_o; E_y; v_{oy}; v_{yo}$	$E_o; E_y; v_{oy}; v_{yo}$	$E_o; E_y; v_{oy}; v_{yo}$
+	+	$E_o; E_y^{(+)}; v_{oy}^{(+)}; v_{yo}^{(+)}$	$E_o^+; E_y; v_{oy}^+; v_{yo}^+$	$E_o^+; E_y^+; v_{oy}^{+(+)}; v_{yo}^{+(+)}$
+	-	$E_o; E_y; v_{oy}; v_{yo}$	$E_o^+; E_y; v_{oy}^+; v_{yo}^+$	$E_o^+; E_y; v_{oy}^+; v_{yo}^+$
-	+	$E_o; E_y; v_{oy}^{(+)}; v_{yo}^{(+)}$	$E_o; E_y; v_{oy}; v_{yo}$	$E_o; E_y^{(+)}; v_{oy}^{(+)}; v_{yo}^{(+)}$

Принимается, что модуль сдвига тканевых пластиков в осях его упругой симметрии зависит только от вида потери сплошности материала и при любой форме напряженно-деформированного состояния определяется формулами (5.1.36), (5.1.37) или (5.1.38).

Используя технические упругие характеристики тканевого пластика, определенные по формулам (5.1.36) - (5.1.38), можно получить все коэффициенты его матриц податливости и жесткости с учетом вида потери сплошности материала:

$$[S_{ij}^T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_o} & \frac{\nu_{oy}}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_{yo}}{E_o} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{oy}} \end{bmatrix};$$

$$[Q_{ij}^T] = \begin{bmatrix} E_o & \nu_{oy}E_o & 0 \\ 1 - \nu_{oy}\nu_{yo} & 1 - \nu_{oy}\nu_{yo} & 0 \\ \nu_{yo}E_y & E_y & 0 \\ 1 - \nu_{oy}\nu_{yo} & 1 - \nu_{oy}\nu_{yo} & 0 \\ & & G_{oy} \end{bmatrix} = [S_{ij}^T]^{-1}$$

При растрескивании обоих монослоев тканевого пластика (когда  $\sigma_{oy} \approx 0$ ) все составляющие матрицы податливости под углом к направлениям упругой симметрии материала стремятся к бесконечности.

**Диаграмма деформирования тканепластика. Бимодальность.** Предварительная потеря сплошности при растяжении отражается на диаграмме деформирования тканепластиков. До полного разрыва образцов на диаграммах деформирования при растяжении обычно наблюдаются два характерных перелома, соответствующие различным механизмам потери сплошности. При сжатии диаграмма деформирования вплоть до разрушения является линейной.

Принимается, что при достижении приложенным напряжением  $\sigma_o$  значения, соответствующего уровню потери сплошности, все однотипные находящиеся в наиболее невыгодном напряженном состоянии структурные элементы тканевого пластика разрушаются одновременно, в результате чего происходит скачкообразное изменение упругих свойств материала. Но фактически в реальном тканевом пластике вследствие разброса геометрических параметров (несовпадение по фазе искривлений нитей отдельных тканей, разброс значений углов  $\beta_o$  и  $\beta_y$  и др.) напряженное состояние однотипных

структурных элементов не одинаковое. Кроме того, существует и разброс упругих и прочностных свойств связующего и волокон. Поэтому изменение жесткости в момент потери сплошности носит не скачкообразный, а плавный характер, как это видно по точкам экспериментальной диаграммы деформирования (рис. 5.1.7). Используемая в данном случае детерминированная модель разрушения позволяет с достаточной для практики точностью учитывать важнейшие особенности процесса разрушения тканевого пластика. Для учета плавного характера потери сплошности необходимо применить стохастическую модель разрушения.

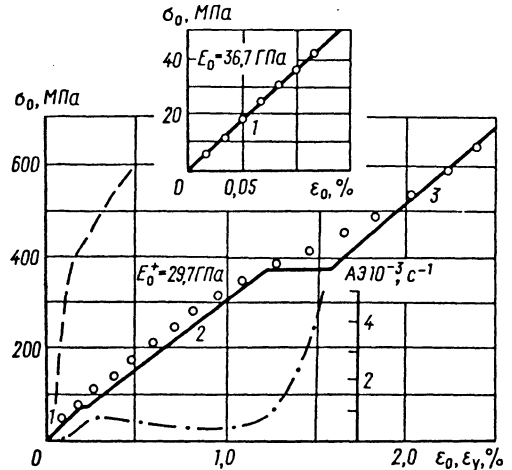


Рис. 5.1.7. Диаграмма продольного (сплошная линия) и поперечного (пгтриховая) деформирования тканевого пластика при одноосном растяжении в направлении основы; точки - эксперимент

Диаграмма деформирования (см. рис. 5.1.7) соответствует пластику, армированному тканью Т-42-36, которая в направлении основы содержит органоволокна СВМ, а в направлении утка - стекловолокна ВМП и построена при следующих исходных данных:

для волокон СВМ -  $E_{fc} = 110$  ГПа;  $E_{fr} = 3,6$  ГПа;  $\nu_{frc} = \nu_{frr} = 0,16$ ;  $G_{frc} = 2,2$  ГПа;  $G_{frr} = 1,51$  ГПа;  $\bar{\sigma}_{fc}^+ = 2,3$  ГПа;  $\bar{\sigma}_{fr}^+ = 70$  МПа;  $\bar{\tau}_{fcr} = 45$  МПа; для волокон ВМП -  $E_f = 75$  ГПа;  $\nu_f = 0,22$ ;  $G_f = 31$  ГПа;  $\bar{\sigma}_{fc}^+ = 1,55$  ГПа; для связующего ЭХД-У -  $E_m = 3$  ГПа;  $\nu_m = 0,35$ ;  $G_m = 1,11$  ГПа;  $\bar{\sigma}_m^+ = 75$  МПа;  $\bar{\tau}_m = 65$  МПа; для ткани Т-42-36 -  $m_o = 0,53$ ;  $n_o = 0,35$ ;  $n_y = 0,40$ ;  $\beta_o = 12^\circ$ ;  $\beta_y = 11^\circ$ ;  $\nu = 0,55$ . Прямая 1 характеризует модуль упругости тканепластика при сжатии и начальный модуль при растяжении. Напряжение  $\sigma_o$ , соответ-

ствующее моменту первой ступени потери сплошности, при которой появляются трещины вдоль утка, определено по методике, изложенной в работе [21]. При дальнейшем увеличении нагрузки происходит скачкообразный переход на прямую 2, которая построена по зависимости (5.1.36). Следующий перелом на диаграмме деформирования связан с растрескиванием материала на наклонных участках. Фактически начинается раздробление связующего по всему объему тканевого пластика и выпрямление нитей основы, т.е. наступает вторая ступень потери сплошности материала. Теоретическая прямая 3 на диаграмме деформирования построена на основе допущения, что волокна основы выпрямились мгновенно и конечное разрушение материала происходит при их разрыве. Диаграмма акустической эмиссии (АЭ) подтверждает наличие двух ступеней потери сплошности (штрихпунктирная линия).

После однократного нагружения выше уровня потери сплошности тканепластик становится бимодульным материалом, так как при сжатии имеет модуль упругости  $E_0$ , а при растяжении модуль  $E_0^+$ .

#### 5.1.4. МИКРОМЕХАНИКА ПОЛЗУЧЕСТИ МОНОСЛОЯ

**Вязкоупругие свойства компонентов.** Полимерные связующие обладают выраженными вязкоупругими свойствами, и их деформации при постоянном длительном нагружении могут отличаться в несколько раз от первоначальных значений.

Практически для всех полимерных связующих существует диапазон напряжений и интервалы температур, в которых эти материалы подчиняются соотношениям линейной вязкоупругой среды наследственного типа. В этом случае физические соотношения между напряжениями и деформациями можно записать в следующей форме:

$$2Ge_{ij}(t) = s_{ij}(t) + \int_0^t \Gamma(t-\theta)s_{ij}(\theta)d\theta; \quad (5.1.39)$$

$$K_0\varepsilon_V(t) = \sigma(t) + \int_0^t U(t-\theta)\sigma(\theta)d\theta,$$

где  $G$  - мгновенно-упругий модуль сдвига;  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}$  - девиатор деформаций;  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$  - девиатор напряжений;  $\varepsilon_V = \varepsilon_{kk}$  - относительное изменение объема;  $\sigma = \frac{\sigma_{kk}}{3}$  - среднее напряжение;  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_{kk}}{3}$  - средняя деформация;  $K_0$  - мгновенный модуль

объемной деформации. Ядра ползучести  $\Gamma(t-\theta)$  и  $U(t-\theta)$  - инвариантные относительно начала отсчета времени характеристики реономных свойств материала. Из принципов наследственности следуют общие требования к ядрам ползучести. Они должны быть положительно монотонно убывающими, асимптотически стремящимися к нулю, а при отрицательных значениях аргумента тождественно равными нулю.

Функция  $\Gamma(t-\theta)$  определяется на основе экспериментальных кривых ползучести при чистом сдвиге. Согласно уравнению (5.1.39), учитывая, что  $S_{ij}(t) = \sigma_{12} = \tau = \text{const}$ ;  $\sigma_{kk} = 0$ , а  $e_{ij}(t) = \varepsilon_{12}(t) = \frac{1}{2}\gamma(t)$  и  $\varepsilon_{kk}(t) = 0$ ,

получаем

$$G\gamma(t) = \left[ 1 + \int_0^t \Gamma(t-\theta)d\theta \right] \tau. \quad (5.1.40)$$

Дифференцированием экспериментальной кривой ползучести  $\gamma(t)$  определяется ядро ползучести в виде

$$\Gamma(t) = G \frac{dI(t)}{dt}, \quad (5.1.41)$$

где

$$I(t) = \frac{\gamma(t)}{\tau} = \frac{1}{G} \left( 1 + \int_0^t \Gamma(t-\theta)d\theta \right). \quad (5.1.42)$$

Установление аналитического выражения функции  $\Gamma(t)$  сводится к аппроксимации дифференцированных кривых ползучести. Простейшей аналитической формой ядра ползучести является сумма экспонент

$$\Gamma(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \exp(-\beta_i t), \quad (5.1.43)$$

где  $\lambda_i$  и  $\beta_i$  - вещественные параметры.

Наличие двух-трех членов ряда (5.1.43) обеспечивает достаточно высокую точность аппроксимации. Часто на практике интерес представляют лишь деформации ползучести при больших длительностях нагружения. В этих случаях можно воспользоваться ядром ползучести в виде одной экспоненты. Для более точного описания деформаций ползучести в области малых времен нагружения прибегают к функциям со слабой сингулярностью. Наиболее распространенными ядрами такого рода являются ядра, предложенные Дюффингом, Ржаницыным, Работновым. Применение сингулярных функций в качестве ядер ползучести связано с весьма сложной процедурой определения параметров этих ядер. Поэтому были предприняты попытки разработать аппроксимации интегралов таких функций. Так

М. И. Розовским предложена аппроксимация интеграла дробно-экспоненциальной функции в виде

$$\int_0^t \Gamma(t-\theta) d\theta = \int_0^t \Theta_\alpha(-\beta_i t - \theta) d\theta \approx \int_0^t \Theta_\alpha(-\beta \gamma t^{1+\alpha}) d\theta \approx \frac{1}{\beta} \left[ 1 - \exp(-\beta \gamma t^{1+\alpha}) \right], \quad (5.1.44)$$

где  $0 < \alpha < 1$ ;  $\gamma = (1 + \alpha)^{1+\alpha}$ .

Зависимость (5.1.44) содержит три параметра, которые могут быть определены из кривой ползучести по выражениям:

$$\alpha = -1 + \frac{1}{\ln t_2/t_1} \ln \frac{\frac{e(\infty) - e(t_1)}{e(\infty) - e(0)}}{\frac{e(\infty) - e(t_2)}{e(\infty) - e(0)}};$$

$$\beta = - \frac{\ln \frac{e(\infty) - e(t_1)}{e(\infty) - e(0)}}{\left[ (1 + \alpha) t_1 \right]^{1+\alpha}}.$$

В дальнейшем понадобится также следующий параметр:

$$\lambda = \beta \left[ \frac{e(\infty)}{e(0)} - 1 \right].$$

Здесь  $e(t_1)$ ,  $e(t_2)$ ,  $e(0)$ ,  $e(\infty)$  - деформации при произвольных фиксированных значениях времени  $t_1$  и  $t_2$ , в начальный момент нагружения и при неограниченно длительном нагружении.

Из уравнений (5.1.39) следует, что для изотропного материала в общем случае упруговязкие свойства определяются двумя независимыми функциями времени. Однако для полимерных связующих изменение объема при гидростатическом давлении практически упругое. Таким образом, реономные свойства полимерного связующего в линейной области деформирования определяются одним ядром ползучести, например, ядром ползучести при сдвиге  $\Gamma(t)$ .

Обычно более доступны экспериментальные кривые ползучести при осевом нагружении. Между ядрами ползучести при сдвиге  $\Gamma(t - \theta)$  и ядром ползучести при осевом нагружении  $K(t - \theta)$  существует прямая линейная связь

$$\Gamma(t - \theta) = \left( 1 - \frac{G}{3K} \right) K(t - \theta). \quad (5.1.45)$$

В результате интегрирования соотношения (5.1.45) с учетом (5.1.41) устанавливается зави-

симость между функциями ползучести полимерного связующего при осевом нагружении и чистом сдвиге

$$I(t) = \frac{3}{2} D(t) - \frac{1}{6K}, \quad (5.1.46)$$

где функция ползучести при осевом нагружении  $D(t)$  определяется выражением

$$D(t) = 1 + \int_0^t K(t - \theta) d\theta. \quad (5.1.47)$$

Соотношение между функциями ползучести полимерного связующего в поперечном и продольном направлениях к направлению нагружения определяется соотношением

$$D_1(t) = \frac{1 - 2\nu}{2E} - \frac{1}{2} D(t),$$

где  $D_1(t)$  - функция ползучести в поперечном направлении.

Следовательно, деформации полимерного связующего при трехосном длительном нагружении определяются выражением

$$\varepsilon_1(t) = \frac{1 - 2\nu}{2E} (\sigma_2 + \sigma_3) + D(t) \left[ \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right], \quad (5.1.48)$$

а при сдвиге выражением (5.1.40).

Ползучесть монослоя зависит не только от упруговязких свойств связующего, но и от свойств волокон. Некоторые применяемые на практике волокна в первом приближении можно считать идеально упругими. К таким относят, например, борные, стеклянные и углеродные волокна. Явно выраженными упруговязкими свойствами обладают органические волокна.

#### Ползучесть при продольном нагружении.

Проблема определения деформаций ползучести монослоя по деформативным свойствам его компонент сводится к решению системы линейных интегральных уравнений типа (5.1.39) с условием совместности деформаций и уравнением равновесия. Такая задача решена, например, для ядер ползучести полимерного связующего и волокон в виде дробно-экспоненциальных или экспоненциальных функций [19] при условии, что реологически активными являются как полимерное связующее, так и волокна.

С целью регулирования вязкоупругих свойств монослоев с вязкоупругими волокнами, например органическими, используют гибридные монослои, в которых органические волокна чередуются с упругими волокнами (стеклянными, углеродными, борными). Реологические свойства компонентов гибридных монослоев сильно различаются, в результате чего происходит перераспределение напряжений во времени между этими компонентами. При постоянной внешней на-

грузке компоненты с более выраженными вязкоупругими свойствами во времени разгружаются при увеличении напряжений в остальных. Ограничиваясь наиболее простым случаем, когда кривые ползучести полимерного связующего и волокон могут быть аппроксимированы в виде экспоненциальных функций, кривую ползучести гибридного монослоя в направлении волокон можно задать зависимостью

$$\varepsilon_1(t) = \frac{\sigma_1}{E_1} \left[ 1 - \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{p_i} (1 - \exp p_i t) \right], \quad (5.1.49)$$

где  $A_i$  и  $p_i$  - параметры, определяющие реологические свойства связующего и волокон гибридного монослоя.

Ползучесть органостеклопластика регулируется относительным объемным содержанием стеклянных волокон. Степень ползучести органостеклопластика  $\varepsilon(\infty)/\varepsilon(0)$  при реальных объемных содержаниях волокон убывает с увеличением содержания стеклянных волокон по закону, близкому к линейному. Зависимость степени ползучести органостеклопластика от общего объемного содержания волокон незначительна.

**Ползучесть при продольном сдвиге.** Продольный сдвиг монослоя - это вид нагружения, при котором наиболее сильно проявляются вязкоупругие свойства полимерного связующего. Для определения ползучести монослоя по деформативным свойствам компонентов воспользуемся расчетной моделью (см. рис. 5.1.2). Согласно этой модели материал состоит из неограниченного числа слоев бесконечно малой толщины, параллельных плоскости нагружения. Полагается, что каждый слой находится в однородном напряженном состоянии и средние деформации всех слоев в любой момент нагружения одинаковы. Деформация сдвига слоя складывается из деформаций полимерного связующего и волокон. В процессе ползучести напряжения в компонентах монослоя меняются, т.е. происходит их перераспределение во времени. Таким образом, эпюры распределения напряжений сдвига в момент нагружения и при любом фиксированном значении времени нагружения различны. В результате решения системы уравнений равновесия с учетом закона деформирования компонентов (5.1.39) получается закон деформирования монослоя при продольном сдвиге

$$\varepsilon_{12}(t) = [g_1 + g_2 J_m(t)] \tau_{12}, \quad (5.1.50)$$

где

$$g_1 = \frac{\eta_\tau - \eta_{m\tau}}{1 - \eta_{m\tau}} \frac{1}{G_{12}};$$

$$g_2 = \frac{1 - \eta_\tau}{1 - \eta_{m\tau}} \frac{G_m}{G_{12}}.$$

Параметры  $\eta_\tau$  и  $\eta_{m\tau}$  характеризуют степень ползучести монослоя и полимерного связующего при сдвиге. Они определяются соотношением деформаций сдвига при установившейся ползучести  $\varepsilon_{12}(\infty)$  и кратковременном нагружении  $\varepsilon_{12}(0)$  для фиксированного значения напряжения  $\tau_{12}$ . С учетом зависимостей (5.1.42) и (5.1.46) справедливо

$$\eta_{m\tau} = \frac{I_m(\infty)}{I_m(0)} = 1 + \frac{3}{2(1 + \nu_m)} \frac{\lambda_m}{\beta_m}, \quad (5.1.51)$$

где  $\lambda_m, \beta_m$  - параметры ползучести полимерного связующего при осевом растяжении.

Характеристика степени ползучести монослоя  $\eta_\tau$  зависит от соотношения модуля сдвига монослоя  $G_{12}$  (5.1.26) и модуля установившейся ползучести  $G_{12}(\infty)$ , определяемого аналогичной зависимостью, в которой упругие характеристики заменены соответствующими длительными характеристиками. В результате некоторых преобразований получено

$$\eta_\tau = \frac{1 - \frac{r_f}{l} + k \frac{r_f}{l} \left( \frac{2k}{\sqrt{k^2 - 1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - \frac{\pi}{2} \right)}{1 - \frac{r_f}{l} + k_1 \frac{r_f}{l} \left( \frac{2k_1}{\sqrt{k_1^2 - 1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k_1+1}{k_1-1}} - \frac{\pi}{2} \right)} \times \eta_{m\tau}, \quad (5.1.52)$$

где

$$k_1 = \left[ \frac{r_f}{l} \left( 1 - \frac{G_m}{\eta_{m\tau} G_{fz}} \right) \right]^{-1}.$$

Зависимость (5.1.50) совместно с выражениями (5.1.51) и (5.1.52) дает возможность прогнозировать кривую ползучести монослоя по заданным деформативным свойствам компонент, их объемному содержанию и геометрии расположения. Выражение (5.1.52) позволяет учесть анизотропию волокон.

**Ползучесть при поперечном нагружении.** Для определения напряженно-деформированного состояния компонентов монослоя при длительном поперечном нагружении следует решить объемную задачу для неоднородной двухкомпонентной среды. Однако точного решения такой задачи не существует. С целью установления лишь основных, наиболее существенных закономерностей распределения и перераспределения напряжений и деформаций в компонентах при длительном поперечном нагружении монослой рассматривается как двоякопериодическая среда, повторяющийся элемент которой, выбираемый в

качестве расчетной модели, представлен на рис. 5.1.2.

Задача определения поперечной ползучести монослоя сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений совместно с уравнениями деформирования компонент. Полагаем, что волокна являются трансверсально-изотропными и упругими, а полимерное связующее деформируется согласно зависимости (5.1.48). В итоге получаем зависимости для определения напряжений в волокнах и полимерном связующем в любой момент времени. Оказывается, что полимерное связующее находится в неоднородном трехосном напряженном состоянии. В случае монослоев с борными или стеклянными волокнами это напряженное состояние практически не меняется во время нагружения. Деформации ползучести монослоя при поперечном нагружении определяются зависимостью

$$\varepsilon_2(t) = [d_1 + d_2 D_m(t)] \sigma_2, \quad (5.1.53)$$

где

$$d_1 = \frac{r_f}{l} \frac{\tilde{\sigma}_r}{E_{fr}} + \left(1 - \frac{r_f}{l}\right) \frac{1 - 2\nu_m}{2E_m} (\tilde{\sigma}_\theta + \tilde{\sigma}_z);$$

$$d_2 = \left(1 - \frac{r_f}{l}\right) \left( \tilde{\sigma}_r - \frac{\tilde{\sigma}_\theta + \tilde{\sigma}_z}{2} \right),$$

а  $D_m(t)$  - функция ползучести полимерного связующего при осевом нагружении, определяемая зависимостью (5.1.47). Безразмерные коэффициенты  $\tilde{\sigma}_r, \tilde{\sigma}_\theta, \tilde{\sigma}_z$  характеризуют концентрацию напряжений в компонентах монослоя и зависят от упругих характеристик, объемного соотношения и геометрии распределения компонентов.

Для монослоев с анизотропными волокнами (углеродные, органические) изложенная методика является весьма приближенной. Напряженное состояние компонентов угле- и органо-пластиков при поперечном нагружении изменяется во времени. Так, например, в углепластике максимальное значение напряжения в полимерном связующем в процессе ползучести может увеличиться на 30 %.

Задача прогнозирования поперечной ползучести монослоя с учетом переменного во времени объемного напряженного состояния компонентов решена в работе [2]. В этом случае полагается, что напряжения не изменяются лишь в некотором фиксированном сечении повторяющегося элемента расчетной модели монослоя. Кривая ползучести при поперечном нагружении для пластиков с анизотропными волокнами

$$\varepsilon_2(t) = \frac{E_m}{E_2} \left[ \frac{\eta_2 - \eta_m}{E_m} + (1 - \eta_2) D_m(t) \right] \frac{\sigma_2}{1 - \eta_m},$$

где

$$\eta_2 = \frac{E_2(\infty)}{E_2}; \quad \eta_m = \frac{\beta_m}{\lambda_m + \beta_m}.$$

Модуль поперечной упругости  $E_2$  определяется зависимостью (5.1.18) или (5.1.21), а  $E_2(\infty)$  - этими же зависимостями, если модуль упругости полимерного связующего  $E_m$  заменить на модуль упругости при установившейся ползучести

$$E_m(\infty) = \frac{\beta_m}{\lambda_m + \beta_m} E_m.$$

Из изложенного следует, что для прогнозирования ползучести монослоя с упругими волокнами достаточно знать кривую ползучести полимерного связующего при растяжении или сдвиге, относительное объемное содержание и упругие характеристики волокон. При наличии органических волокон необходима также кривая ползучести этих волокон.

### 5.1.5. МИКРОМЕХАНИКА КРАТКОВРЕМЕННОЙ ПРОЧНОСТИ МОНОСЛОЯ

**Напряженное состояние компонентов.** Расчетная модель монослоя показана на рис. 5.1.1. Средние напряжения монослоя в направлениях его упругой симметрии определяются зависимостями:

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau_{xy} 2 \sin \varphi \cos \varphi;$$

$$\sigma_2 = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - \tau_{xy} 2 \sin \varphi \cos \varphi;$$

$$\tau_{12} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi),$$

где через  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  обозначены средние

напряжения монослоя в координатах  $x, y$ .

В случае осевого нагружения в направлении армирования  $l$  в компонентах монослоя создается неоднородное напряженное состояние вследствие различия значений коэффициентов Пуассона полимерного связующего и волокон. Чем больше это различие, тем больше абсолютные значения поперечных напряжений. Однако максимальные значения напряжений в направлениях, поперечных к направлению нагружения, незначительны. Так, для угле- и стеклопластиков эти напряжения не превышают 10-12 % от напряжений в направлении армирования. Для практических расчетов этими напряжениями можно пренебречь. В таком случае напряжения в направлении нагружения в полимерном связующем и в волокнах будут распределяться пропорционально их модулям упругости:



$$\sigma_m = \frac{E_m}{(1-\nu)E_m + \nu E_{fz}} \sigma_1;$$

$$\sigma_f = \frac{E_{fz}}{(1-\nu)E_m + \nu E_{fz}} \sigma_1.$$

Для пластиков, армированных высокомолекулярными волокнами, эти зависимости могут быть упрощены:

$$\sigma_m = \frac{1}{\nu} \frac{E_m}{E_{fz}} \sigma_1; \quad \sigma_f = \frac{1}{\nu} \sigma_1.$$

Так как отношение модулей упругости волокон в осевом направлении  $E_{fz}$  и полимерного связующего  $E_m$  для высокомолекулярных волокон составляет 40-100, то напряжения в полимерном связующем при продольном осевом нагружении монослоя не превышают 1-2,5 % напряжений в волокнах.

Схема напряженного состояния при нагружении в поперечном направлении показана на рис. 5.1.8.

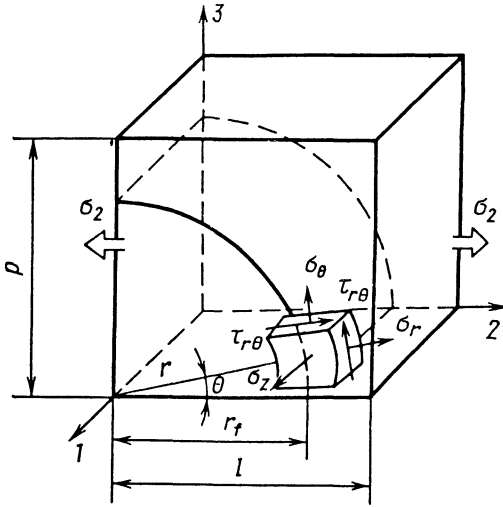


Рис. 5.1.8. Схема ориентации компонент напряжений в полимерном связующем при поперечном нагружении

В случае регулярного распределения волокон определение напряженно-деформированного состояния структурных элементов монослоя при поперечном нагружении сводится к решению плоской краевой задачи для двухфазной дальнопериодической среды. Решение такой задачи позволяет установить поле напряжений в любой точке полимерного связующего по зависимостям следующего вида [19]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \tilde{\sigma}_r \sigma_2; & \sigma_\theta &= \tilde{\sigma}_\theta \sigma_2; \\ \tau_{r\theta} &= \tilde{\tau}_{r\theta} \sigma_2; & \sigma_z &= \tilde{\sigma}_z \sigma_2, \end{aligned} \quad (5.1.54)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_r &= f(l, r_f) \left\{ B_0' r^{-2} + 2C_0' - \sum_{n=2,4,\dots}^N [n(n-1) \times \right. \\ &\quad \times A_n' r^{n-2} + n(n+1) B_n' r^{-n-2} + (n+1)(n-2) \times \\ &\quad \left. \times C_n' r^n + (n-1)(n+2) D_n' r^{-n} \right] \cos n\theta \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_\theta &= f(l, r_f) \left\{ -B_0' r^{-2} + 2C_0' + \sum_{n=2,4,\dots}^N [n(n-1) \times \right. \\ &\quad \times A_n' r^{n-2} + n(n+1) B_n' r^{-n-2} + (n+1)(n+2) \times \\ &\quad \left. \times C_n' r^n + (n+1)(n-2) D_n' r^{-n} \right] \cos n\theta \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{r\theta} &= f(l, r_f) \left\{ \sum_{n=2,4,\dots}^N [n(n-1) A_n' r^{n-2} - \right. \\ &\quad - n(n+1) B_n' r^{-n-2} + n(n+1) C_n' r^n - \\ &\quad \left. - n(n-1) D_n' r^{-n} \right] \sin n\theta \}; \end{aligned}$$

$$\tilde{\sigma}_z = \nu_m (\tilde{\sigma}_r + \tilde{\sigma}_\theta);$$

$$\begin{aligned} f(l, r_f) &= \left\{ 2F_0' r_f + B_0' \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{r_f} \right) + 2C_0' (l - r_f) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2,4,\dots}^N \left[ n A_n' (l^{n-1} - r_f^{n-1}) - n B_n' \left( \frac{1}{l^{n+1}} - \frac{1}{r_f^{n+1}} \right) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad \left. + (n+2) C_n' (l^{n+1} - r_f^{n+1}) - (n-2) D_n' \left( \frac{1}{l^n} - \frac{1}{r_f^n} \right) + \right. \\ &\quad \left. + n K_n' r_f^{n-1} + (n+2) F_n' r_f^{n+1} \right] (-1)^{\frac{n}{2}} \left. \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

В этих зависимостях введены следующие обозначения:  $r$  и  $\theta$  - полярные координаты;  $l$  -

параметр упаковки волокон;  $r_f$  - радиус волокон;  $B_0, C_0, F_0, A_n, B_n, C_n, D_n, F_n$  и  $K_n$  - коэффициенты функций напряжений;  $N$  - число удерживаемых членов ряда.

Схема ориентации компонент напряжений  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$  и  $\tau_{r\theta}$  показана на рис. 5.1.8.

Коэффициенты функций напряжений не зависят от приложенного напряжения  $\sigma_2$ , а зависят только от вида упаковки и объемного содержания волокон и упругих характеристик компонентов. Эти коэффициенты находят приближенными методами, например методом коллокации, а точность определения зависит в основном от числа членов рядов функций напряжений, удерживаемых при практическом составлении алгоритма решения. Устойчивое и достаточно точное решение получают при сохранении около 40 членов ряда.

Безразмерные параметры  $\tilde{\sigma}_r, \tilde{\sigma}_\theta, \tilde{\sigma}_z$  и  $\tilde{\tau}_{r\theta}$ , входящие в зависимости (5.1.54), представляют собой коэффициенты концентраций напряжений, зависящие от коэффициентов функций напряжений. Для случая квадратичной упаковки волокон зависимость коэффициента концентрации напряжений  $\tilde{\sigma}_r$  от отношения поперечного модуля упругости волокон  $E_{fr}$  к модулю упругости связующего  $E_m$  при различных относительных объемных содержаниях волокон  $v$  показана на рис. 5.1.9.

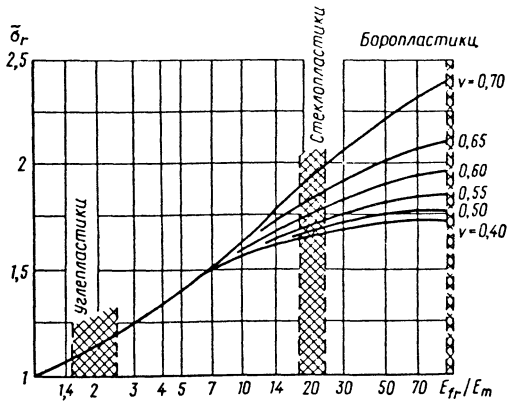


Рис. 5.1.9. Зависимость  $\tilde{\sigma}_r$  от соотношения модулей упругости волокон и связующего

Определение поля напряжений при продольном сдвиге сводится к решению плоской граничной задачи относительно повторяющегося элемента структуры, показанного на рис. 5.1.10.

Решая задачу методом бесконечно тонких слоев, получаем [19]

$$\tau_{rz} = \tilde{\tau}_{rz} \tau_{12}, \quad (5.1.55)$$

где коэффициент концентрации напряжений

$$\tilde{\tau}_{rz} = \frac{\sigma_{frz}}{G_{12}} \left[ \frac{G_{frz}}{G_m} \left( 1 - \frac{r_f}{l} \right) + \frac{r_f}{l} \right]^{-1};$$

здесь  $G_{frz}$  и  $G_{12}$  - модули продольного сдвига волокон и монослоя. Практически коэффициент  $\tilde{\tau}_{rz}$  определяют по графику (рис. 5.1.11).

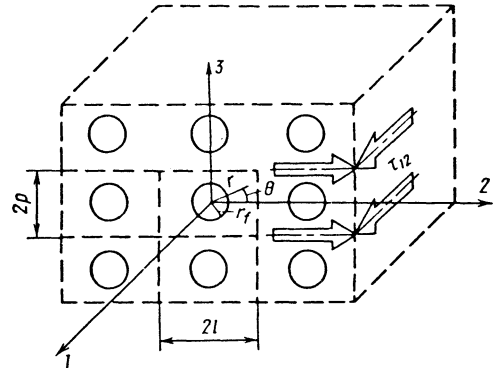


Рис. 5.1.10. Расчетная модель монослоя при продольном сдвиге

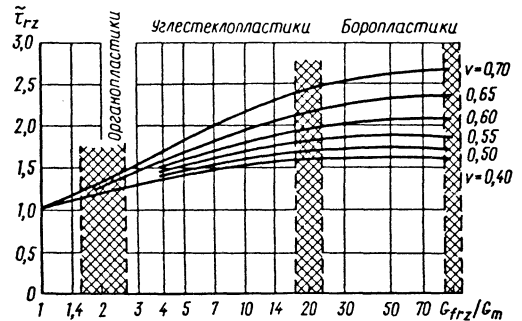


Рис. 5.1.11. Зависимость  $\tilde{\tau}_{rz}$  от соотношения модулей сдвига компонентов

**Прочность структурных элементов монослоя.** Типичная предельная кривая прочности эпоксидного связующего ЭД-16 приведена на рис. 5.1.12.

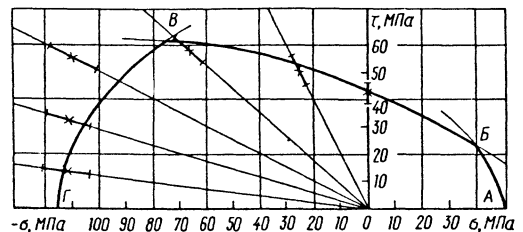


Рис. 5.1.12. Предельная кривая прочности эпоксидного связующего ЭД-16

На участке  $AB$  предельные кривые описываются обычным энергетическим критерием в виде

$$\left(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}_m^+}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\bar{\tau}_m}\right)^2 = 1. \quad (5.1.56)$$

На участке  $BB$  связующее разрушается от сдвига. Из рис. 5.1.12 следует, что сжимающие напряжения повышают прочность связующего при сдвиге. Для учета этого эффекта используем следующую рабочую гипотезу: связующее разрушается, когда удельная работа главного растягивающего напряжения достигает своего предельного значения. В таком случае уравнение для участка  $BB$  имеет вид

$$\sigma^2 + 2(1 + \nu_m)\tau^2 + \sigma\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 2\left(\bar{\sigma}_m^+\right)^2. \quad (5.1.57)$$

На участке  $BG$  сжимающие напряжения близки к прочности связующего при сжатии и предельная кривая описывается энергетическим критерием в виде [19]

$$\sigma^2 + 2(1 + \nu_m)\tau^2 + \sigma\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 2\left(K_c \bar{\sigma}_m^+\right)^2, \quad (5.1.58)$$

где

$$K_c = \left[ \frac{1}{2} \sin^4 \beta + \frac{1 + \nu_m}{2} \sin^2 2\beta - \sin^3 \beta \times \right. \\ \left. \times \sqrt{4 - 3 \sin^2 \beta} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

В этой формуле через  $\beta$  обозначен угол ориентации плоскости разрушения.

Для армирования монослоя применяют различные волокна: стеклянные, борные, углеродные и др. Большинство из этих волокон являются хрупкими, и поэтому их прочность в большей мере зависит от поверхностных дефектов. Влияние этих дефектов проявляется в виде разброса опытных данных при экспериментальном исследовании прочности волокон постоянной длины. Кроме того, влияние дефектов сказывается и на снижении прочности волокон при увеличении их длины. Таким образом, волокна, которыми армирован монослой, не разрушаются одновременно. Когда степень разрушения наименее прочных волокон достигает определенного уровня, начинается лавинное разрушение волокон. Так, например, установлено, что лавинное разрушение волокон стеклопластика начинается при степени разрушения 10-15 %. Учитывая, что в процессе лавинного разрушения волокон напряжения изменяются в очень узком интервале, можно принять, что деформация армированного пластика, т.е. монослоя в процессе лавинного

разрушения волокон, практически не меняется. Предельную деформацию волокон, соответствующую началу лавинного разрушения волокон, при растяжении обозначим через  $\bar{\epsilon}_f^+$ , а при сжатии - через  $\bar{\epsilon}_f^-$ . Из вышесказанного следует, что

предельная деформация  $\bar{\epsilon}_f^\pm$  является важным параметром прочности волокон и практически равняется предельной деформации монослоя при осевом нагружении в направлении армирования. Из такого допущения вытекает методика экспериментального определения  $\bar{\epsilon}_f^\pm$ . Таким образом, условие прочности волокон может быть представлено в виде

$$\epsilon_f^\pm \leq \bar{\epsilon}_f^\pm, \quad (5.1.59)$$

где  $\bar{\epsilon}_f^\pm$  - фактическая деформация волокон. При осевом нагружении волокна однонаправленно армированного монослоя практически находятся в одноосном однородном напряженном состоянии. [На таком допущении основан критерий (5.1.59).]

Причиной разрушения монослоя может быть также нарушение сцепления между волокнами и полимерными связующими. В общем случае нагружения на контактную поверхность между волокнами и связующим одновременно действуют как нормальные, так и касательные напряжения, и для оценки прочности необходимо применить соответствующий критерий, учитывающий взаимодействие этих напряжений. Для составления критерия прочности сцепления используется допущение, что межмолекулярные связи разрушаются только при растяжении. Растяжение связей происходит в тех случаях, когда на контактную поверхность действуют нормальные растягивающие напряжения  $\sigma_r$ , касательные напряжения  $\tau_{rz}$  или комбинации этих напряжений. Воздействие всех остальных напряжений не вызывает удлинение межмолекулярных связей и, следовательно, в этом случае разрушение начинается не на контактной поверхности, а в объеме одного из контактирующих материалов. При таких допущениях из обобщенного критерия прочности [8] вытекает следующий критерий прочности сцепления между волокнами и связующим:

$$\frac{\sigma}{\bar{\sigma}_0} + \left(\frac{\tau_{rz}}{\bar{\tau}_0}\right)^2 = 1, \quad (5.1.60)$$

где  $\bar{\sigma}_0$  и  $\bar{\tau}_0$  - прочность сцепления при отрыве и при сдвиге.

С учетом зависимостей (5.1.54) и (5.1.55) критерий (5.1.60) может быть переписан в виде

$$\frac{\sigma_2 \tilde{\sigma}_r}{\bar{\sigma}_0} + \left( \frac{\tau_{12} \tau_{r\theta}}{\tau_0} \right)^2 = 1. \quad (5.1.61)$$

**Прочность монослоя при одноосном растяжении.** При растяжении в направлении армирования всю нагрузку воспринимают волокна. Прочность при растяжении в направлении армирования

$$\bar{\sigma}_1^+ = [(1 - \nu)E_m + \nu E_f] \varepsilon_f^+.$$

Из рис. 5.1.8 следует, что в случае поперечного растяжения в полимерном связующем действуют напряжения  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$  и  $\tau_{r\theta}$ . Тогда критерий (5.1.56) принимает вид

$$\frac{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \nu_m (\sigma_r + \sigma_\theta)^2}{(\bar{\sigma}_m^+)^2} + \left( \frac{\tau_{r\theta}}{\bar{\tau}_m} \right)^2 - \frac{2\nu_m}{(\bar{\sigma}_m^+)^2} \times$$

$$\times [\sigma_r \sigma_\theta + \nu_m \sigma_r (\sigma_r + \sigma_\theta) + \nu_m \sigma_\theta (\sigma_r + \sigma_\theta)] = 1. \quad (5.1.62)$$

Критерием (5.1.62) можно пользоваться, если известен угол  $\theta = \theta_{\text{крит}}$  (см. рис. 5.1.8), при котором прочность минимальна. Минимизируя левую часть критерия (5.1.62), можно убедиться, что  $\theta_{\text{крит}} = 0^\circ$ .

При  $r=r_f$  и  $\theta=0^\circ$  напряжение  $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$ . Учитывая зависимость (5.1.54) и обозначая величину среднего напряжения  $\sigma_2$  в момент разрушения через  $\bar{\sigma}_2^+$ , из критерия (5.1.62) получаем следующую формулу для определения прочности при поперечном растяжении:

$$\bar{\sigma}_2^+ = \frac{\bar{\sigma}_m^+}{\bar{\sigma}_r \sqrt{1 - \nu_m^2}}. \quad (5.1.63)$$

Формула (5.1.63) применима, если прочность связующего меньше прочности сцепления. Если прочность сцепления меньше прочности связующего, то для определения  $\bar{\sigma}_2^+$  необходимо использовать критерий (5.1.61), который в данном случае принимает вид

$$\bar{\sigma}_2^+ = \bar{\sigma}_0 / \tilde{\sigma}_r. \quad (5.1.64)$$

Формула (5.1.64) дает возможность определить прочность монослоя при поперечном растяжении, если задана его структура и прочность сцепления между волокнами и связующим на отрыв  $\bar{\sigma}_0$ . Эта формула может быть использована и для решения обратной задачи - определения прочности сцепления  $\bar{\sigma}_0$  по экспериментально установленной прочности  $\bar{\sigma}_2^+$  и заданной

структуре материала, т.е. по параметру  $\tilde{\sigma}_r$ . При этом формула для определения  $\bar{\sigma}_0$  имеет вид

$$\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_2^+ \tilde{\sigma}_r.$$

Таким образом, при помощи формулы (5.1.63) можно определить прочность монослоя в том случае, когда первым разрушается связующее, а при помощи формулы (5.1.64) - когда первым разрушается сцепление. Фактическая прочность армированного пластика равна меньшей из этих двух прочностей. Оптимальным является случай, когда связующее и сцепление разрушаются одновременно. Оптимальная зависимость между этими прочностями связана с видом нагружения. В случае поперечного растяжения из зависимостей (5.1.63) и (5.1.64) следует

$$\bar{\sigma}_m^+ = \bar{\sigma}_0 \sqrt{1 - \nu_m^2}. \quad (5.1.65)$$

Зависимость (5.1.65) дает возможность оценить степень использования прочности связующего при заданном  $\bar{\sigma}_0$  или определить прочность сцепления  $\bar{\sigma}_0$ , необходимую для полного использования прочности связующего.

Формулы (5.1.62) - (5.1.65) не применимы для органопластиков. При поперечном растяжении органопластиков первыми разрушаются волокна. Эта особенность органопластиков отличает их от других армированных пластиков, у которых первыми разрушаются связующее или нарушается сцепление между волокнами и связующим.

В качестве исходного допущения для определения  $\bar{\sigma}_2^+$  принимается, что разрушение волокон при поперечном растяжении связано с разрушением сцепления между фибриллами. Для приближенной оценки прочности органопластиков используется критерий (5.1.61), который в данном случае принимает вид

$$\frac{\bar{\sigma}_2^+ \tilde{\sigma}_r}{\bar{\sigma}_f} = 1, \quad (5.1.66)$$

где  $\bar{\sigma}_f^+$  - прочность волокон при поперечном растяжении. Из зависимости (5.1.66) следует

$$\bar{\sigma}_2^+ = \bar{\sigma}_f^+ / \tilde{\sigma}_r. \quad (5.1.67)$$

Коэффициент концентрации напряжений  $\tilde{\sigma}_r$  можно определить по графикам (см. рис. 5.1.9). Для органопластиков при  $E_{fr} / E_m \approx 1,0$  этот коэффициент практически не зависит от объемного содержания волокон  $\nu$  (при его изменении в пределах от 0,4 до 0,7) и является величиной постоянной:  $\tilde{\sigma}_r = 1,0$ . В таком случае формула (5.1.67) для органопластиков принимает вид

$$\bar{\sigma}_2^+ \approx \bar{\sigma}_{fr}^+ \quad (5.1.68)$$

Из (5.1.68) следует, что  $\bar{\sigma}_2^+$  для органопластиков практически не зависит от объемного содержания волокон  $v$ . Формула (5.1.68) может быть также использована для определения  $\bar{\sigma}_{fr}^+$ .

**Прочность монослоя при продольном сдвиге.** Геометрия внутреннего строения монослоя при продольном сдвиге (см. рис. 5.1.10) также является причиной возникновения неоднородного напряженного состояния его структурных элементов. С увеличением отношения модулей сдвига волокон и связующего, а также объемного содержания волокон концентрация напряжений возрастает.

При продольном сдвиге монослоя исчерпание прочности связующего в точках максимальной концентрации напряжений не приводит к лавинообразному разрушению материала, а влечет за собой условное течение связующего и перераспределение поля напряжений в монослое. Экспериментально установлено, что в результате условного течения связующего прочность при продольном сдвиге однонаправленно армированных пластиков в пределах разброса можно считать равной прочности связующего при сдвиге  $\bar{\tau}_m$ . Следовательно, концентрация напряжений в пластике при сдвиге как бы не проявляется и не влияет на его прочность. В таком случае можно принимать  $\bar{\tau}_{rc} = 1$ .

Таким образом, если прочность связующего меньше прочности сцепления (адгезионной прочности), в первом приближении можно принять, что прочность при продольном сдвиге определяется формулой  $\bar{\tau}_{12} = \bar{\tau}_m$ .

Разрушение ряда армированных пластиков начинается с нарушения сцепления между волокнами и связующим. Прочность таких материалов при продольном сдвиге существенно зависит от концентрации напряжений и определяется формулой

$$\bar{\tau}_{12} = \bar{\tau}_o / \bar{\tau}_{rc} \quad (5.1.69)$$

Если экспериментально установлена величина  $\bar{\tau}_{12}$  и известна структура материала, т.е.  $\bar{\tau}_{rc}$ , формулу (5.1.69) можно использовать для определения адгезионной прочности при сдвиге  $\bar{\tau}_o$ :

$$\bar{\tau}_o = \bar{\tau}_{12} \bar{\tau}_{rc}$$

Для органопластиков адгезионная прочность обычно больше прочности связующего, но особенность их разрушения состоит в том, что первыми разрушаются органические волокна. В таком случае

$$\bar{\tau}_{12} = \bar{\tau}_{frz} / \bar{\tau}_{rc}, \quad (5.1.70)$$

где  $\bar{\tau}_{frz}$  - прочность органических волокон при продольном сдвиге. При  $G_{frz} / G_m \approx 1,7$  коэффициент концентрации  $\bar{\tau}_{rc}$  практически не зависит от объемного содержания волокон  $v$ :  $\bar{\tau}_{rc} \approx 1,2$  (см. рис. 5.1.11). В таком случае формула (5.1.70) для определения прочности однонаправленно армированного органопластика при продольном сдвиге имеет вид

$$\bar{\tau}_{12} \approx 0,8 \bar{\tau}_{frz} \quad (5.1.71)$$

Формула (5.1.71) может быть также использована для определения прочности органических волокон при продольном сдвиге по экспериментально установленной прочности однонаправленно армированного органопластика  $\bar{\tau}_{12}$ . Получаем

$$\bar{\tau}_{frz} = 1,2 \bar{\tau}_{12}$$

**Прочность монослоя при одноосном сжатии.** При сжатии в направлении армирования первыми обычно разрушаются волокна. В таком случае для определения прочности монослоя на сжатие

$\bar{\sigma}_1^-$  можно использовать "правило смеси":

$$\bar{\sigma}_1^- = [E_{fr} v + E_m (1 - v)] \bar{\epsilon}_f^-$$

(принято, что предельная деформация волокон на сжатие  $\bar{\epsilon}_f^-$  равняется предельной деформации монослоя).

Схема разрушения однонаправленно армированного монослоя при поперечном сжатии показана на рис. 5.1.13.

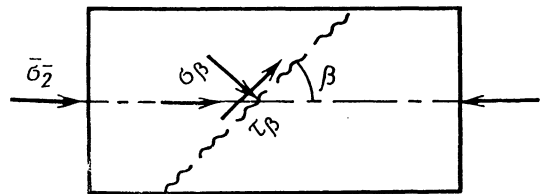


Рис. 5.1.13. Расчетная схема для определения прочности при поперечном сжатии

В первом приближении можно принимать, что в плоскости, перпендикулярной к направлению армирования, все направления равноправны, т.е. материал является трансверсально изотропным. Напряжения, действующие в плоскости разрушения, показаны на рис. 5.1.13.

Для определения прочности монослоя при поперечном сжатии  $\bar{\sigma}_2^-$  используется теория прочности Мора. Уравнение огибающей главных кругов Мора при нагружении в плоскости трансверсальной изотропии имеет вид

$$\tau_\beta = \bar{\tau}_{23} + \sigma_\beta, \quad (5.1.72)$$

где  $\bar{\tau}_{23}$  - прочность при сдвиге в плоскости трансверсальной изотропии;  $s$  - коэффициент влияния нормальных напряжений, действующих перпендикулярно к плоскости разрушения.

Подставив в уравнение (5.1.72) выражения для  $\tau_{\beta}$  и  $\sigma_{\beta}$ , получим

$$\bar{\sigma}_2^- = \frac{2\bar{\tau}_{23}}{\sin 2\beta - s(1 - \cos 2\beta)}. \quad (5.1.73)$$

Минимальное значение прочности  $\bar{\sigma}_2^-$  соответствует достижению максимума функции

$$\frac{\bar{\tau}_{23}}{\bar{\sigma}_2^-} = \frac{1}{2} [\sin 2\beta - s(1 - \cos 2\beta)],$$

т.е. при  $\operatorname{tg} 2\beta = \frac{1}{s}$ . Отсюда  $\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{s}$ , или

$$s = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\beta}.$$

Подставив выражение для  $s$  в (5.1.73), получим

$$\bar{\sigma}_2^- = \frac{2\bar{\tau}_{23} \sin 2\beta}{1 - \cos 2\beta} = 2\bar{\tau}_{23} \operatorname{ctg} \beta, \quad (5.1.74)$$

где  $\bar{\tau}_{23} = G_{23} \bar{\varepsilon}_{23} = 2G_{23} \bar{\varepsilon}_2^+$ .

Модуль сдвига

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}.$$

Подставив в (5.1.74) выражения для  $\bar{\tau}_{23}$  и  $G_{23}$ , получим

$$\bar{\sigma}_2^- = \frac{2E_2 \bar{\varepsilon}_2^+}{1 + \nu_{23}} \operatorname{ctg} \beta = \frac{2\bar{\sigma}_2^+}{1 + \nu_{23}} \operatorname{ctg} \beta. \quad (5.1.75)$$

В случае разрушения связующего  $\bar{\sigma}_2^+$  определяют по формуле (5.1.63), а в случае нарушения сцепления между волокнами и связующими - по формуле (5.1.64).

Угол наклона плоскости разрушения  $\beta$  (см. рис. 5.1.13) определяется экспериментально. Для армированных пластиков можно принять  $\beta \approx 30^\circ = \text{const}$ . Тогда формула (5.1.75) принимает вид

$$\bar{\sigma}_2^- = 3,5 \frac{\bar{\sigma}_2^+}{1 + \nu_{23}}. \quad (5.1.76)$$

Для органопластиков расчет по (5.1.76) дает заниженные результаты по сравнению с экспериментом, так как ввиду специфики деформирования органических волокон при поперечном сжатии  $\bar{\varepsilon}_{23} \neq 2\bar{\varepsilon}_2^+$ . Хорошее совпадение с экспериментом дает допущение  $\bar{\varepsilon}_{23} = 4\bar{\varepsilon}_2^+$ . Экспери-

ментально установлено, что для органопластиков  $\beta \approx 35^\circ$ . В таком случае формула (5.1.75) для органопластиков при  $\nu_{23} = 1,3$  принимает вид

$$\bar{\sigma}_2^- = \frac{E_2 \operatorname{ctg} \beta}{1 + \nu_{23}} \bar{\varepsilon}_{23} = 4,4 E_2 \bar{\varepsilon}_2^+ = 4,4 \bar{\sigma}_2^+.$$

**Критерии прочности монослоя при комбинированном нагружении.** На основе критериев прочности связующего и сцепления (5.1.56) и (5.1.61), учитывая зависимости (5.1.54) и (5.1.55), можно составить соответствующие критерии прочности при комбинированном нагружении, когда на однонаправленно армированный пластик одновременно действуют нормальные напряжения  $\sigma_2$ , перпендикулярные к направлению армирования, и напряжения продольного сдвига  $\tau_{12}$ . При таком нагружении прочность монослоя обычно определяется прочностью связующего или прочностью сцепления.

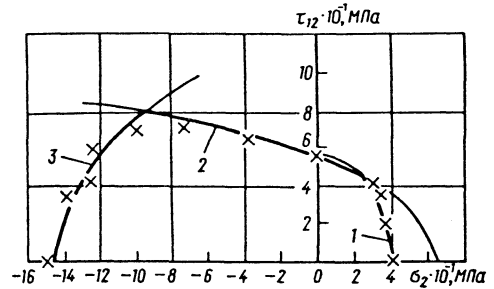


Рис. 5.1.14. Кривая прочности однонаправленно армированного эпоксидного стеклопластика при комбинированном осевом и сдвиговом нагружении (x - эксперимент [14])

Рассмотрим случай, когда прочность связующего меньше адгезионной прочности. Здесь в зависимости от величины и знака напряжений  $\sigma_2$  и  $\tau_{12}$  возможны следующие три механизма разрушения: разрушение связующего при растяжении, сдвиге и сжатии. Типичная предельная кривая прочности показана на рис. 5.1.14. Участок 1 этой кривой соответствует разрушению связующего при растяжении [построен по формуле (5.1.77)], участок 2 - разрушению при сдвиге [построен по формуле (5.1.78)], а участок 3 - разрушению пластика при сжатии [построен по формуле (5.1.79)].

Для оценки прочности монослоя в случае разрушения связующего при растяжении используется критерий (5.1.56), который в данном случае принимает вид

$$\left( \frac{\sigma_2}{\bar{\sigma}_m^+} \tilde{\sigma}_r \right)^2 \left( 1 - \nu_m^2 \right) + \left( \frac{\tau_{12}}{\bar{\tau}_m} \right)^2 = 1. \quad (5.1.77)$$

Если разрушение материала при комбинированном нагружении имеет характер, типичный для продольного сдвига, тогда необходимо использовать критерий (5.1.57). В результате обработки многочисленных опытных данных установлено, что в случае сдвигового разрушения вследствие текучести связующего можно принимать  $\tilde{\sigma}_r = 1$ ; тогда критерий (5.1.57) для монослоя принимает вид

$$\sigma_2^2 \left(1 + \nu_m^2\right) + 2\tau_{12}^2 (1 + \nu_m) + \sigma_2 (1 + \nu_m) \times \sqrt{\sigma_2^2 (1 - \nu_m)^2 + 4\tau_{12}^2} = 2\left(\bar{\sigma}_m^+\right). \quad (5.1.78)$$

Когда отношение величины сжимающих напряжений к величине сдвиговых напряжений  $\tau_{12}$  превышает определенный предел, разрушение монослоя носит характер разрушения при поперечном сжатии. Принимая, что монослой является трансверсально изотропным, для оценки его прочности можно использовать критерий типа (5.1.58). В данном случае справедливо выражение

$$\sigma_2^2 + 2(1 + \nu_{23})\tau_{12}^2 + \sigma_2 \sqrt{\sigma_2^2 + 4\tau_{12}^2} = 2\left(\bar{\sigma}_2^-\right)^2, \quad (5.1.79)$$

где  $\sigma_2$  - абсолютные значения сжимающих напряжений.

В случае адгезионного разрушения критерий прочности монослоя имеет вид

$$\frac{\sigma_2 \sigma_r}{\bar{\sigma}_0} + \left(\frac{\tau_{12} \tilde{\tau}_{rz}}{\bar{\tau}_0}\right)^2 = 1,$$

где  $\bar{\sigma}_0$  - прочность сцепления при отрыве;  $\bar{\tau}_0$  - прочность сцепления при сдвиге.

Основная особенность разрушения органо-пластиков состоит в том, что от воздействия напряжений  $\sigma_2$  и  $\tau_{12}$  первыми разрушаются волокна. В качестве гипотезы принимаем, что разрушение органических волокон связано с разрушением сцепления между фибриллами этих волокон. В первом приближении на такой случай разрушения можно распространить критерий (5.1.61), и критерий прочности монослоя органо-пластика принимает вид

$$\frac{\sigma_2 \tilde{\sigma}_r}{\bar{\sigma}_r^+} + \left(\frac{\tau_{12} \tilde{\tau}_{rz}}{\bar{\tau}_{rz}}\right)^2 = 1.$$

В этом критерии через  $\bar{\sigma}_r$  и  $\bar{\tau}_{rz}$  обозначены коэффициенты концентрации напряжений между фибриллами. Методика их определения отсутствует. Для практических расчетов можно принимать  $\tilde{\sigma}_r = 1,0$  и  $\tilde{\tau}_{rz} = 1,2$ , тогда критерий

прочности для монослоя органо-пластика принимает вид

$$\frac{\sigma_2}{\bar{\sigma}_r^+} + 1,4 \left(\frac{\tau_{12}}{\bar{\tau}_{rz}}\right)^2 = 1.$$

В случае разрушения волокон следует пользоваться условием прочности (5.1.59), на основе которого критерий прочности для монослоя, армированного под углом  $\varphi$ , имеет вид

$$\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_f,$$

или в развернутом виде

$$\varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_x \sin^2 \varphi + \varepsilon_{xy} \sin \varphi \cos \varphi = \bar{\varepsilon}_f. \quad (5.1.80)$$

В этой зависимости через  $\bar{\varepsilon}_f$  обозначены предельные деформации волокон на растяжение  $\left(\bar{\varepsilon}_f^+\right)$  или на сжатие  $\left(\bar{\varepsilon}_f^-\right)$ .

Если монослой входит в пакет слоистого материала произвольной структуры, его средние деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\varepsilon_{xy}$  определяют методами механики слоистых материалов (см. п. 5.2.1).

Критерий (5.1.80) следует применять ко всем слоям, имеющим различную ориентацию волокон. В результате такого расчета можно установить, который из монослоев разрушается первым.

**Прочность гибридного монослоя.** При нагружении в направлении армирования прочность гибридного монослоя практически не зависит от структуры, которая может быть слоистой или дисперсной (см. рис. 5.1.4).

Допустим, что между предельными деформациями волокон типов *B* и *C* и связующего существует следующая зависимость:

$$\bar{\varepsilon}_m > \bar{\varepsilon}_B > \bar{\varepsilon}_C.$$

На первом этапе нагружения в направлении армирования гибридный монослой деформируется по закону

$$\sigma_1 = (\nu_m E_m + \nu_B E_{Bz} + \nu_C E_{Cz}) \varepsilon_1,$$

где  $\nu_m$ ,  $\nu_B$  и  $\nu_C$  - относительные объемные содержания компонентов. Этот этап кончается в момент нагружения, когда деформации волокон типа *C* достигают своего предельного значения  $\bar{\varepsilon}_C$ . В этот момент среднее напряжение

$$\sigma_1 = (\nu_m E_m + \nu_B E_{Bz} + \nu_C E_{Cz}) \bar{\varepsilon}_C.$$

После разрушения волокон типа *C* скачкообразно меняется напряженно-деформированное состояние гибридного монослоя. При растяжении в направлении армирования эти изменения качественно зависят от режима нагружения. В случае простого механического нагружения в момент разрушения волокон типа *C* среднее

напряжение  $\sigma_1'$  не меняется, а средняя деформация  $\epsilon_1$  увеличивается от  $\bar{\epsilon}_C^+$  до  $\epsilon_1'$ , т.е. потенциальная энергия системы увеличивается ( $\Delta u > 0$ ). При нагружении гибридного монослоя на гидравлической испытательной машине по режиму  $\dot{\sigma}_1 = \text{const}$  после разрушения более жестких волокон типа  $C$  потенциальная энергия системы не меняется, т.е.  $\Delta u = 0$ , а при нагружении с постоянной скоростью деформирования ( $\dot{\epsilon}_1 = \text{const}$ ) часть потенциальной энергии теряется, т.е.  $\Delta u < 0$ . Схематически диаграммы деформирования гибридного монослоя при различных режимах нагружения показаны на рис. 5.1.15.

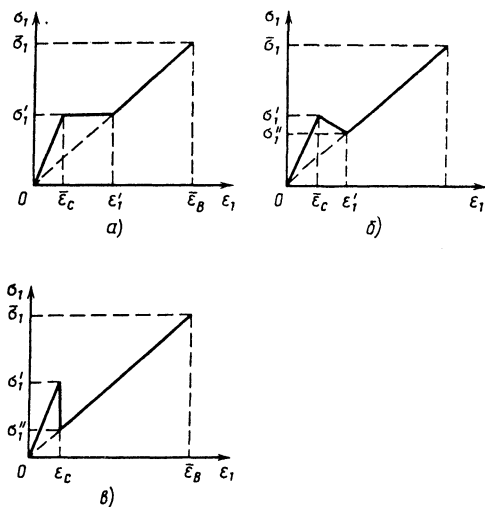


Рис. 5.1.15. Диаграмма деформирования гибридного монослоя:

а - при  $\Delta u > 0$ ; б -  $\Delta u = 0$ ; в - при  $\Delta u < 0$

При  $\Delta u > 0$  (рис. 5.1.15, а) после разрушения волокон типа  $C$  всю нагрузку практически воспринимают волокна типа  $B$ . Приложенное среднее напряжение  $\sigma_1$  в момент разрушения не меняется, а деформация  $\epsilon_1$  увеличивается до величины

$$\epsilon_1' = \frac{(\nu_m E_m + \nu_B E_{Bz} + \nu_C E_{Cz}) \bar{\epsilon}_C}{(\nu_m E_m + \nu_B E_{Bz})}$$

или

$$\epsilon_1' = \frac{[(1 - \nu) E_m + \mu_B \nu E_{Bz} + (1 - \mu_B) \nu E_{Cz}] \bar{\epsilon}_C}{[(1 - \nu) E_m + \mu_B \nu E_{Bz}]}, \quad (5.1.81)$$

где  $\mu_B = \nu_B / \nu$ .

При  $\epsilon_1' = \bar{\epsilon}_B$  сразу после разрушения волокон типа  $C$  в результате скачкообразного перераспределения напряжений разрушаются волокна типа  $B$ . В этом случае формула (5.1.81) принимает вид

$$\bar{\epsilon}_B = \frac{(1 - \nu) E_m + \mu_{Bкрит} \nu E_{Bz} + \dots}{\left[ (1 - \nu) E_m + \mu_{Bкрит} \nu E_{Bz} \right]} \dots + \frac{(1 - \mu_{Bкрит}) \nu E_{Cz}}{\bar{\epsilon}_C}. \quad (5.1.82)$$

При постоянном общем относительном объемном содержании волокон  $\nu$  из формулы (5.1.82) можно определить критическое относительное содержание волокон типа  $B$

$$\mu_{Bкрит} = \frac{(1 - \nu) E_m (\bar{\epsilon}_C - \bar{\epsilon}_B) + \nu E_{Cz} \bar{\epsilon}_C}{\nu E_{Bz} (\bar{\epsilon}_B - \bar{\epsilon}_C) + \nu E_{Cz} \bar{\epsilon}_C} \approx \frac{E_{Cz} \bar{\epsilon}_C}{E_{Bz} (\bar{\epsilon}_B - \bar{\epsilon}_C) + E_{Cz} \bar{\epsilon}_C}$$

При  $\mu_B < \mu_{Bкрит}$  прочность гибридного монослоя определяется формулой

$$\bar{\sigma}_1 = [(1 - \nu) E_m + \mu_B \nu E_{Bz} + (1 - \mu_B) \nu E_{Cz}] \bar{\epsilon}_C, \quad (5.1.83)$$

а при  $\mu_B > \mu_{Bкрит}$

$$\bar{\sigma}_1 = [(1 - \nu) E_m + \mu_B \nu E_{Bz}] \bar{\epsilon}_B. \quad (5.1.84)$$

На рис. 5.1.16 показана зависимость прочности монослоя углестеклопластика при растяжении и сжатии от относительного содержания стеклянных волокон  $\mu_B$  при постоянном объемном содержании волокон  $\nu$  и  $\Delta u > 0$ .

При  $\Delta u = 0$  (см. рис. 5.1.15, б) величину деформации  $\epsilon_1'$  можно определить на основе изменения потенциальной энергии. В момент разрушения волокон типа  $C$  накопленная в них энергия передается неразрушенной части гибридного монослоя

$$\frac{1}{2} E_{Cz} (1 - \mu_B) \nu \bar{\epsilon}_C^2 = \frac{1}{2} \left[ E_{Bz} \mu_B \nu + E_m (1 - \nu) \right] \left[ (\epsilon_1')^2 - \bar{\epsilon}_C^2 \right]$$

Из этого уравнения получаем

$$\epsilon_1' = \bar{\epsilon}_C \sqrt{1 + \frac{E_{Cz} (1 - \mu_B) \nu}{E_m (1 - \nu) + E_{Bz} \mu_B \nu}}. \quad (5.1.85)$$



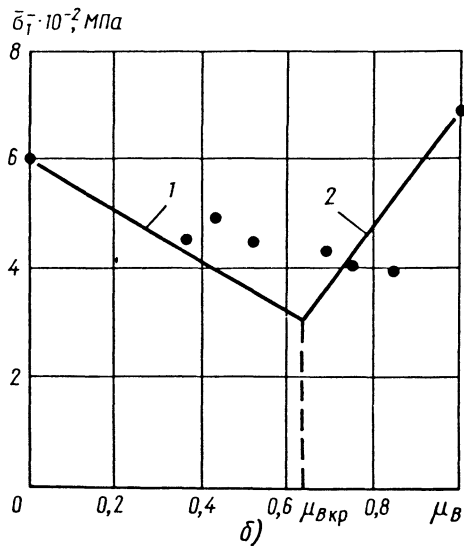
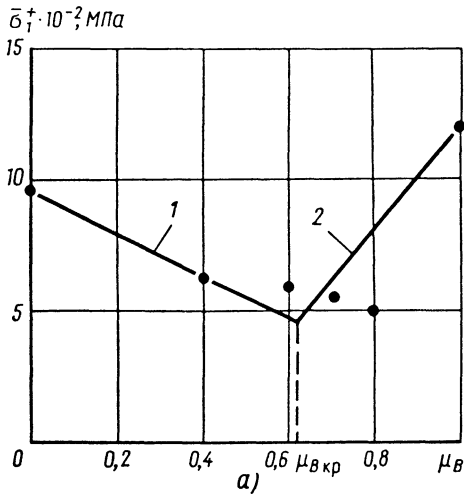


Рис. 5.1.16. Кривые прочности монослоя углестеклопластика при растяжении (а) и сжатии (б): точки - эксперимент [13], линии - расчет при исходных данных:

$$\nu=0,62; \bar{\epsilon}_C^+=0,003; \bar{\epsilon}_B^+=0,036; E_m=3500 \text{ МПа};$$

$$E_{Bz}=83750 \text{ МПа}; E_{Cz}=502500 \text{ МПа}; \bar{\epsilon}_C^-=0,021;$$

$$\bar{\epsilon}_B^-=0,0019$$

В момент разрушения волокон типа *C* средняя деформация монослоя увеличивается до величины  $\bar{\epsilon}_1^+$ , а среднее напряжение уменьшается от величины  $\sigma_1^+$  до  $\sigma_1''$ :

$$\sigma_1'' = [E_m(1-\nu) + \mu_B \nu E_{Bz}] \bar{\epsilon}_C \times$$

$$\times \sqrt{1 + \frac{E_{Cz}(1-\mu_B)\nu}{E_m(1-\nu) + E_{Bz}\mu_B\nu}}$$

При  $\bar{\epsilon}_1^+ = \bar{\epsilon}_B$  вслед за разрушением волокон типа *C* происходит также и разрушение волокон типа *B*. В таком случае формула (5.1.85) может быть переписана в виде

$$\bar{\epsilon}_B = \bar{\epsilon}_C \sqrt{1 + \frac{E_{Cz}(1-\mu_{Вкрит})\nu}{E_m(1-\nu) + E_{Bz}\mu_{Вкрит}}}$$

Из этой зависимости можно определить  $\mu_{Вкрит}$  для рассматриваемого режима нагружения, при котором  $\Delta u = 0$ . Получаем

$$\mu_{Вкрит} = \frac{E_{Cz}\nu - \left[ \left( \frac{\bar{\epsilon}_B}{\bar{\epsilon}_C} \right)^2 - 1 \right] (1-\nu)E_m}{\left[ \left( \frac{\bar{\epsilon}_B}{\bar{\epsilon}_C} \right)^2 - 1 \right] \nu E_{Bz} + \nu E_{Cz}} \approx \frac{E_{Cz}}{\left[ \left( \frac{\bar{\epsilon}_B}{\bar{\epsilon}_C} \right)^2 - 1 \right] E_{Bz} + E_{Cz}} \quad (5.1.86)$$

Прочность гибридного монослоя определяется формулами (5.1.83) и (5.1.84).

Из формулы (5.1.86) следует, что значение параметра  $\mu_{Вкрит}$ , при котором гибридный монослой имеет минимальную прочность, в большей мере зависит от отношения предельных деформаций волокон типа *B* и *C*.

При  $\Delta u < 0$  (см. рис. 5.1.15, в) в момент разрушения более жестких волокон типа *C* деформация гибридного монослоя не меняется, а среднее напряжение

$$\sigma_1' = [(1-\nu)E_m + \mu_B \nu E_{Bz} + (1-\mu_B)\nu E_{Bz}] \bar{\epsilon}_C.$$

После разрушения волокон типа *C* среднее напряжение  $\sigma_1'$  скачкообразно уменьшается до значения  $\sigma_1''$ :

$$\sigma_1'' = [(1-\nu)E_m + \mu_B \nu E_{Bz}] \bar{\epsilon}_C.$$

При нагружении с постоянной скоростью деформирования ( $\dot{\epsilon}_1 = \text{const}$ ) разрушение волокон типа *C* не вызывает полного разрушения

гибридного монослоя по той причине, что  $\epsilon_1 = \bar{\epsilon}_C < \bar{\epsilon}_B$ . При дальнейшем увеличении нагрузки закон деформирования имеет вид

$$\sigma_1 = [(1 - \nu)E_m + \mu_B \nu E_{Bz}] \epsilon_1.$$

Полное разрушение гибридного монослоя наступает при достижении деформаций  $\epsilon_1$  значения предельной деформации волокон типа *B*. В таком случае прочность определяется зависимостью (5.1.84). При  $\mu_B = \mu_{Bкрит}$  монослой имеет минимальную прочность.

Вышеприведенные зависимости для определения прочности гибридного монослоя применимы в случае, когда предельные деформации волокон типа *B* и *C* сильно различаются. Если эти деформации соизмеримы, то предельная деформация монослоя [36]

$$\bar{\epsilon}_1 = \bar{\epsilon}_B - \mu_C (\bar{\epsilon}_B - \bar{\epsilon}_C),$$

где  $\mu_C = 1 - \mu_B$ .

Типичным примером такого случая является монослой органоупрочненного пластика, прочность которого при растяжении

$$\bar{\sigma}_1^+ = E_1 \left[ \bar{\epsilon}_B^+ - \mu_C (\bar{\epsilon}_B^+ - \bar{\epsilon}_C^+) \right], \quad (5.1.87)$$

где  $\bar{\epsilon}_B^+$  и  $\bar{\epsilon}_C^+$  - предельные деформации стеклянных и органических волокон при растяжении.

При сжатии в направлении армирования прочность монослоя органоупрочненного пластика определяется по зависимости

$$\bar{\sigma}_1^- = E_1 \left[ \bar{\epsilon}_B^- - \mu_C (\bar{\epsilon}_B^- - \bar{\epsilon}_C^-) \right]. \quad (5.1.88)$$

5.1.2. Упругие и деформативные характеристики компонентов органоупрочненного пластика

$E_m$ , МПа	$E_{Bz} \cdot 10^3$ , МПа	$E_{Cz} \cdot 10^3$ , МПа	$\bar{\epsilon}_B^+$	$\bar{\epsilon}_C^+$	$\nu$	Источник
3660	71,1	131,1	1,8	1,42	0,50	[8]
3300	95	130	2,54	2,0	0,55	[3]
3600	91	131	1,82	1,67	0,56	[12]
3600	71	131			0,44	[9]

Предельные деформации по опытным данным были определены косвенно и имели следующие значения:  $\bar{\epsilon}_C^- = 3,9 \cdot 10^{-3}$ ,  $\bar{\epsilon}_B^- = 9,1 \cdot 10^{-3}$  (для прямой 1) и  $\bar{\epsilon}_C^- = 3,2 \cdot 10^{-3}$ ,  $\bar{\epsilon}_B^- = 9,1 \cdot 10^{-3}$  (для прямой 4).

5.1.6. МИКРОМЕХАНИКА ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ

Свойственная армированным пластикам зависимость прочностных свойств от длительности нагружения является результатом соответ-

ствующих реономных свойств (деформативных и прочностных) компонентов этих материалов (полимерного связующего и волокон) и определяется их структурой. Поэтому при прогнозировании длительной прочности армированных пластиков перспективным представляется структурный подход, позволяющий оценить изменение прочности в зависимости от длительности нагружения исходя из свойств компонентов и адгезии между ними, а также геометрии их расположения в материале. Это позволяет оценить вид возможного разрушения, влияющие структуры

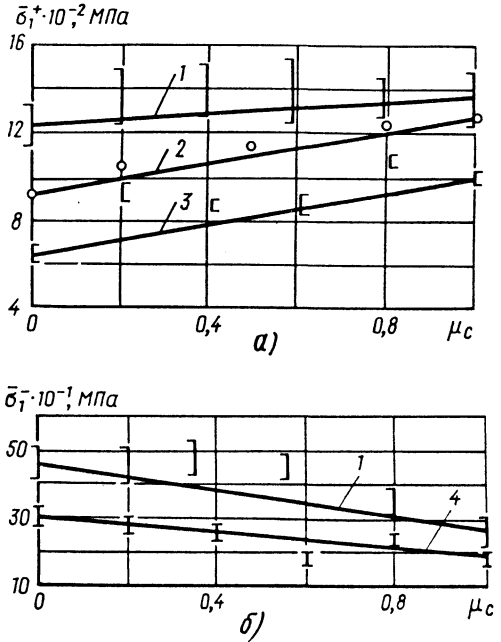


Рис. 5.1.17. Кривые прочности монослоя органоупрочненного пластика при растяжении (а) и сжатии (б): 1 -  $\nu=0,55$ ; 2 -  $\nu=0,56$ ; 3 -  $\nu=0,50$ ; 4 -  $\nu=0,44$

материала и свойств компонентов, а также оценить фактор времени при рациональном проектировании армированных пластиков.

Даже при одноосном постоянном во времени нагружении компоненты армированного пластика находятся в условиях непрерывно меняющегося сложного напряженного состояния, что вызывается их реономными свойствами и структурой материала. Следовательно, для описания длительной прочности компонентов необходимо использование критериев, учитывающих изменение напряженного состояния во времени.

Для описания предельного состояния полимерного связующего используется критерий [21], согласно которому разрушение материала во времени имеет место при достижении величиной удельной упруговязкой работы главных растягивающих напряжений  $W^+(t)$  некоторого

предельного значения  $W_R^+$  и, следовательно, поверхность прочности определяется неравенством

$$W^+(t) \leq W_R^+ \quad (5.1.89)$$

Обоснованность такого критерия прочности подтверждена анализом характера разрушения полимерного связующего, согласно которому разрушение имеет место по площадкам действия главных растягивающих напряжений. При одноосном нагружении условие (5.1.89) вырождается в энергетический критерий, что подтверждается экспериментально для полимерного связующего ПН-1 при статическом и равномерно возрастающем во времени одноосном растяжении [21]. Поверхность длительной прочности при комбинированном нагружении ( $\sigma_r$  и  $\tau_{r\theta}$ ) показана на рис. 5.1.18.

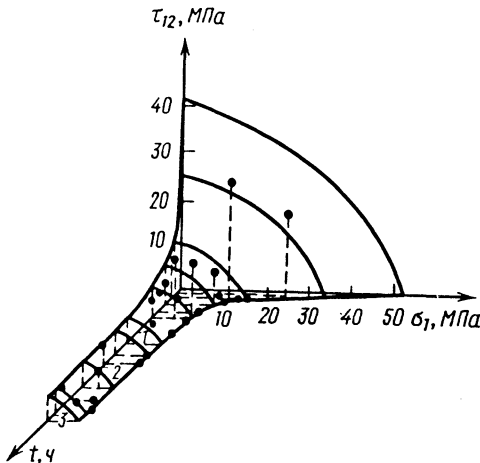


Рис. 5.1.18. Поверхность длительной прочности при комбинированном нагружении полимерного связующего ПН-1

Теоретическая поверхность согласно (5.1.89) для линейно-вязкоупругого материала при  $\sigma_r \geq 0$  построена по закону

$$\Psi^* \left\{ \sigma_r^2(t) + 2(1 + \nu_m) \tau_{r\theta}^2(t) + \sigma_r(t) \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\sigma_r^2(t) + 4\tau_{r\theta}^2(t)} \right\} = 2(\bar{\sigma}_m^+)^2,$$

где  $\Psi^*$  - оператор по правилу:

$$\Psi^*[F(t)] = F(t) + 2 \int_0^t F(\theta) K_m(t - \theta) d\theta;$$

$K_m(t - \theta)$ ,  $\nu_m$ ,  $\bar{\sigma}_m^+$  - соответственно ядро ползучести, коэффициент Пуассона и кратковременная прочность при растяжении полимерного связующего.

Предельное состояние сцепления определяется нормальным  $\sigma_{rr}$  и касательными  $\tau_{r\theta}$ ,  $\tau_{rz}$  напряжениями, действующими на контактной поверхности. В случае сложного, непрерывно меняющегося во времени напряженного состояния по аналогии с кратковременным условием [19] справедлив критерий длительной адгезионной прочности [21]

$$\int_0^t \frac{d\sigma_{rr}(\theta)}{\bar{\sigma}_o(t - \theta)} + \left[ \int_0^t \frac{d\tau_{r\theta}(\theta)}{\bar{\tau}_o(t - \theta)} \right]^2 + \left[ \int_0^t \frac{d\tau_{rz}(\theta)}{\bar{\tau}_o(t - \theta)} \right]^2 \leq 1, \quad (5.1.90)$$

где  $\bar{\sigma}_o(t)$ ,  $\bar{\tau}_o(t)$  - законы изменения длительной адгезионной прочности при отрыве и сдвиге при постоянном нагружении.

В качестве критерия длительной прочности волокон используется критерий, позволяющий учитывать историю нагружения  $\sigma_z(t)$  [21]:

$$\int_0^t \frac{d\sigma_z(\theta)}{\bar{\sigma}_{z\theta}^+[t - \theta]} \leq 1, \quad (5.1.91)$$

где  $\bar{\sigma}_{z\theta}^+[t - \theta]$  - закон изменения длительной прочности волокон при статическом растяжении.

Разрушение при длительном напряженном состоянии монослоя так же, как и в случае кратковременного нагружения, определяется разрушением наиболее слабого компонента - полимерного связующего, волокон или связи между ними.

Длительная прочность монослоя, причиной разрушения которого является разрушение связующего или его связи с волокнами, при плоском напряженном состоянии определяется величиной и соотношением средних напряжений в плоскости армирования слоя  $\sigma_2$  и  $\tau_{12}$ , так как напряжения в направлении армирования  $\sigma_1$

практически полностью воспринимаются высокопрочными волокнами. Разрушение связующего в монослоях при кратковременном поперечном нагружении начинается в наиболее нагруженных зонах и имеет в дальнейшем лавинообразный характер. При продольном сдвиге с ростом нагружения наблюдается перераспределение поля напряжений и прочность слоя при сдвиге практически равна прочности связующего при сдвиге. Аналогично, при длительном комбинированном нагружении разрушение монослоя во времени вследствие разрушения связующего происходит в его наиболее нагруженных зонах. Момент первых разрушений является началом лавинообразного разрушения связующего и, следовательно, моментом разрушения всего слоя. Напряженное состояние при этом в наиболее нагруженных зонах связующего характеризуется следующими соотношениями [3]:

$$\sigma_r(t) = \tilde{\sigma}_r(t)\sigma_2; \quad \sigma_\theta(t) = \tilde{\sigma}_\theta(t)\sigma_2; \quad (5.1.92)$$

$$\sigma_z(t) = \tilde{\sigma}_z(t)\sigma_2; \quad \tau_{rz}(t) = \tau_{12},$$

где  $\tilde{\sigma}_r(t)$ ,  $\tilde{\sigma}_\theta(t)$ ,  $\tilde{\sigma}_z(t)$  - зависимости коэффициентов концентрации нормальных напряжений в связующем от длительности поперечного нагружения. Согласно условию (5.1.89) критерий длительной прочности слоя в случае разрушения связующего (при  $\sigma_2 > 0$ ) принимает вид [21]:

а)  $\tau_{12}/\sigma_2 < a_1(t)$  - все три главных напряжения в наиболее нагруженной точке связующего положительны:

$$\psi^* \{a_2(t)\sigma_2^2 + a_3\tau_{12}^2\} = (\bar{\sigma}_m^+)^2; \quad (5.1.93)$$

б)  $\tau_{12}/\sigma_2 > a_1(t)$  - два из трех напряжений положительны:

$$\psi^* \{a_4(t)\sigma_2^2 + a_5(t)\sigma_2\tau_{12} + a_6\tau_{12}^2\} = (\bar{\sigma}_m^+)^2, \quad (5.1.94)$$

где  $a_i(t)$  - безразмерные структурные функции времени:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \sqrt{v_m \tilde{\sigma}_r(t) [\tilde{\sigma}_r(t) + \tilde{\sigma}_\theta(t)]}; \\ a_2(t) &= [\tilde{\sigma}_r^2(t) + \tilde{\sigma}_\theta^2(t)](1 - v_m^2) - \\ &\quad - 2v_m(1 + v_m)\tilde{\sigma}_r(t)\tilde{\sigma}_\theta(t); \\ a_3 &= 2a_6 = 2(1 + v_m) = \text{const}; \\ a_4(t) &= 0,5[\tilde{\sigma}_r^2(t) + 2\tilde{\sigma}_\theta^2(t)](1 + v_m^2) - \\ &\quad - 1,5v_m(1 + v_m)\tilde{\sigma}_r(t)\tilde{\sigma}_\theta(t); \\ a_5(t) &= \tilde{\sigma}_r(t)(1 + v_m). \end{aligned} \quad (5.1.95)$$

Выражения (5.1.95) получены в пренебрежении продольными деформациями слоя ( $\epsilon_1 = 0$ ). На рис. 5.1.19 приведены эксперимен-

тальные данные [34], полученные при испытании однонаправленно армированных намоточных трубчатых стеклопластиковых образцов на кручение и растяжение. Теоретические кривые построены по зависимостям (5.1.93) - (5.1.95) при выборе ядра ползучести связующего в виде

$$K_m(t - \theta) = c_m \exp[-\alpha_m(t - \theta)],$$

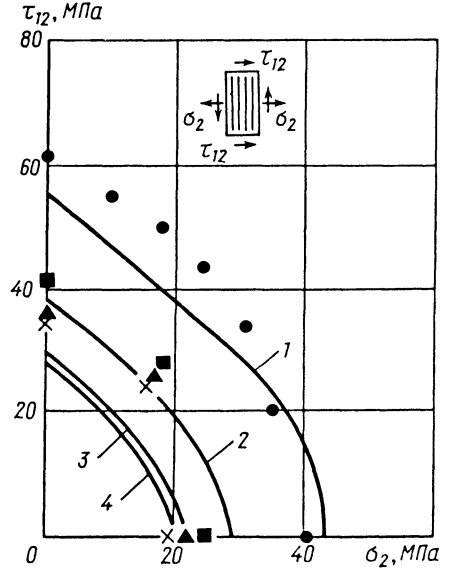


Рис. 5.1.19. Кривые длительного предельного состояния монослоя стеклопластика при фиксированных значениях времени комбинированного нагружения при

$E_f/E_m=20; v_m=0,35; v_f=0,23; \bar{\sigma}_m^+=65$  МПа;  
 $v=0,65; c_m=0,00675$  ч<sup>-1</sup>;  $\alpha_m=0,00435$  ч<sup>-1</sup>;  
 1(●)- $t=0$ ; 2(■)- $t=100$  ч; 3(▲)- $t=500$  ч; 4(×)- $t=1000$  ч

В случае одноосного длительного растяжения однонаправленно армированного слоя под углом  $\varphi$  к направлению армирования напряжения в осях упругой симметрии определяются выражениями:

$$\sigma_1 = \sigma_\varphi \cos^2 \varphi; \quad \sigma_2 = \sigma_\varphi \sin^2 \varphi; \quad \tau_{12} = \sigma_\varphi \frac{\sin 2\varphi}{2}. \quad (5.1.96)$$

Длительная прочность монослоя в случае разрушения сцепления также определяется разрушением в наиболее нагруженных точках, приводящим к лавинообразному разрушению слоя. Тогда согласно условию (5.1.90) критерий длительной адгезионной прочности слоя с учетом (5.1.92) имеет вид

$$\sigma_2 \int_0^t \frac{d\bar{\sigma}_r(\theta)}{\bar{\sigma}_0(t-\theta)} + \left\{ \tau_{12} \int_0^t \frac{d\bar{\tau}_{rz}(\theta)}{\bar{\tau}_0(t-\theta)} \right\}^2 = 1, \quad (5.1.97)$$

где  $\bar{\tau}_{rz}(\theta)$  - зависимость коэффициента концентрации касательных напряжений в связующем от длительности продольного сдвига. Аппроксимацию функций  $\bar{\sigma}_0(t)$  и  $\bar{\tau}_0(t)$  в выражениях (5.1.90), (5.1.97) рекомендуется представлять в виде

$$\bar{\sigma}(t) = \frac{\bar{\sigma}_0}{1 + \sum_{i=1}^N b_i [1 - \exp(-d_i t)]}, \quad (5.1.98)$$

где  $\bar{\sigma} = \{\bar{\sigma}_0, \bar{\tau}_0\}$ ;  $\bar{\sigma}(0)$  - значение кратковременной адгезионной прочности;  $N$  - число удерживаемых членов ряда. Определение численных характеристик функций  $\bar{\sigma}_0(t)$  и  $\bar{\tau}_0(t)$  согласно (5.1.98) может быть осуществлено двумя способами: прямым (исследованием адгезионной прочности непосредственно системы связующее - волокно) и косвенным (на основе испытания однонаправленных пластиков и дальнейшего определения параметров  $\bar{\sigma}(0)$ ,  $b_i$ ,  $d_i$  по методу наименьших квадратов). Анализ результатов экспериментов показывает, что прочность при растяжении слоя существенно зависит от угла нагружения. При уменьшении  $\varphi$  все большую часть напряжений воспринимают волокна. Предел прочности  $\bar{\sigma}_\varphi^+$  при  $t \rightarrow \infty$  составляет 75-80% кратковременных значений в диапазоне  $45^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ .

Прочность волокон в однонаправленном слое таких материалов, как стекло-, угле- и боропластики, реализуется лишь при продольном нагружении. Используя правило смеси и учитывая, что при таком виде нагружения разрушение слоя определяется разрушением волокон, согласно (5.1.91) в пренебрежении перераспределением напряжений в направлении армирования справедливо условие длительной прочности в виде

$$\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_\varphi^+(t)} \leq 1. \quad (5.1.99)$$

Совокупность условий (5.1.93), (5.1.94), (5.1.97) и (5.1.99) представляет собой структурный критерий длительной прочности монослоев, причиной разрушения которых при заданном длительном нагружении является тот структурный элемент, условие предельного состояния которого выполняется первым.

Предложенный структурный критерий длительной прочности однонаправленно армированных пластиков может быть использован и при анализе слоистых пластиков. При этом предполагается, что нарушение сплошности сло-

истого армированного пластика при длительном нагружении также определяется разрушением наислабейшего структурного элемента (связующего, сцепления или волокон) в наиболее нагруженном слое [21]. А напряженное состояние в слоях пластика, непрерывно меняющееся во времени, может быть определено на основе решения соответствующей задачи вязкоупругости [17].

Приведенные выше критерии прочности армированного слоя основаны на структурной модели слоя, которая позволяет аналитически учесть микроструктурные параметры композита. В расчетной практике широкое распространение получили также феноменологические критерии прочности, основанные на условно однородной модели слоя. Пределы прочности такого слоя при простых видах нагружения (растяжении, сжатии, сдвиге) определяются экспериментально, а критерий прочности позволяет предсказать предельное сочетание этих напряжений при сложном нагружении слоя. Феноменологические критерии прочности иногда применяют для оценки прочности слоистого материала, если известны пределы прочности материала при простых видах нагружения. Преимуществом феноменологического критерия по сравнению со структурным является его высокая точность, обусловленная тем, что феноменологический критерий по существу является аппроксимацией экспериментальных данных. Для структурных критериев требуется меньшее число экспериментальных результатов, и в отличие от феноменологических критериев они позволяют выявить механизм и форму разрушения материала. Феноменологические критерии прочности композитов подробно описаны в литературе [7, 8, 18, 25].

### 5.1.7. ДИССИПАТИВНЫЕ СВОЙСТВА МОНОСЛОЯ

При циклическом нагружении материалов уже при малых амплитудах деформации наблюдается рассеяние (диссипация) энергии вследствие внутренних процессов различной физической природы. В области амплитуд напряжений, не превышающих предел упругости материала, это явление обычно называют внутренним трением, или несовершенной упругостью [14].

Наибольшее распространение получили два подхода к описанию внутреннего трения в твердых телах: теория линейной вязкоупругости и приближенный энергетический метод. При учете рассеяния энергии для стационарных моногармонических нагружений вязкоупругого материала осуществляется переход к комплексной форме представления связи между напряжениями и деформациями, введение комплексных модулей. Суть энергетического метода заключается в том, что сохраняется линейная упругая зависимость между напряжениями и деформациями, но вводятся дополнительные гипотезы о функции рас-

сеяния энергии за цикл нагружения. Поэтому наряду с упругими константами вводятся независимые диссипативные параметры материала (логарифмические декременты колебаний или коэффициенты рассеивания). Применение энергетического метода обычно сводится к определению частот и форм колебаний системы как абсолютно упругой и к последующему использованию уравнения энергетического баланса для приближенного определения амплитуд колебаний.

В энергетическом методе для описания диссипативных свойств тела вводится коэффициент диссипации - отношение потерь энергии в объеме тела к амплитудному значению упругой энергии за цикл гармонического нагружения. Если коэффициент диссипации не изменяется при пропорциональном увеличении амплитуд всех компонент напряжений при сложном напряженном состоянии материала, то такое внутреннее трение называют амплитудно независимым. Далее рассмотрен только этот случай.

Для изотропных тел считают, что потери энергии в единице объема тела за цикл нагружения  $\Delta W$  зависят от двух коэффициентов  $\psi'$ ,  $\psi''$ , амплитудных значений энергий формоизменения  $W'$  и изменения объема  $W''$ :

$$\Delta W = \psi' W' + \psi'' W''.$$

Анизотропные тела как объекты, свойства которых зависят от ориентации системы координат, имеют более сложную систему параметров, характеризующих диссипацию энергии. Так, для трансверсально-изотропного материала (однонаправленного композиционного монослоя), рассматриваемого в системе координат, оси которой совпадают с осями симметрии, в случае плоского напряженного состояния функция рассеяния энергии [9] имеет вид

$$\Delta W = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [\psi] \{\sigma\}, \quad (5.1.100)$$

где

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}, \quad [\psi] = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{66} \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\{\sigma\}$  - амплитудные значения компонент тензора напряжений (ось 1 - ось изотропии), компоненты  $\psi_{ij}$  выражаются через коэффициенты рассеяния энергии при соответствующих видах напряженного состояния - технические диссипативные постоянные материала и упругие модули. Соотношение (5.1.100) может быть представлено через матрицу комплексных податливостей для вязкоупругого тела в форме

$$\Delta W = -\pi \{\sigma\}^T [S''] \{\sigma\},$$

где  $[S'']$  - матрица мнимых частей комплексных податливостей.

Демпфирующие характеристики композита зависят от внутренней структуры и состава компонентов композита (волокон и матрицы). Компоненты матрицы  $[\psi]$  могут быть связаны с упругими и диссипативными характеристиками волокон и матрицы, составляющими однонаправленный монослой:

$$\psi_{11} = [\psi_f E_f \nu + \psi_m E_m (1 - \nu)] / E_1^2;$$

$$\psi_{12} = -\nu_{12} \psi_{11} = \psi_{21};$$

$$\psi_{22} = \frac{\psi_f}{E_f} \nu + \frac{\psi_m}{E_m} (1 - \nu);$$

$$\psi_{66} = \frac{\psi_f}{G_f} \nu + \frac{\psi_m}{G_m} (1 - \nu),$$

(5.1.101)

где  $\psi_f, \psi_m$  - коэффициенты рассеяния энергии волокна и матрицы;  $E_f, G_f, E_m, G_m$  - модули упругости и сдвига соответственно волокна и матрицы;  $E_1$  - модуль упругости монослоя вдоль волокон;  $\nu$  - относительное объемное содержание волокон.

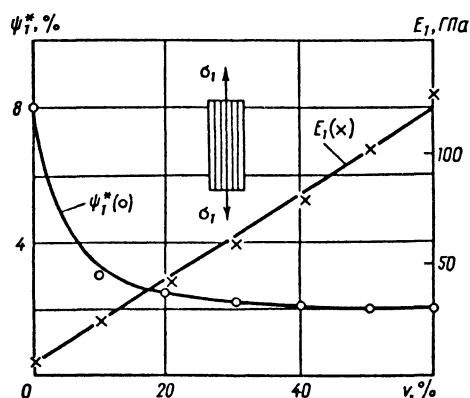


Рис. 5.1.20. Зависимость коэффициента диссипации  $\psi_1^*$

и модуля  $E_1$  от объемного содержания  $\nu$  при

$$E_B = 194 \text{ ГПа}; \quad \nu_B = 0,3; \quad \psi_B = 1,8 \%;$$

$$E_M = 6 \text{ ГПа}; \quad \nu_M = 0,3; \quad \psi_M = 8,0 \%$$

Значения компонент матрицы  $[\psi]$  в (5.1.100) могут быть определены феноменологически через упругие и диссипативные постоянные слоя

$$\Psi_{11} = \frac{\Psi_1^*}{E_1}; \Psi_{22} = \frac{\Psi_2^*}{E_2}; \Psi_{66} = \frac{\Psi_6^*}{G_{12}}, \quad (5.1.102)$$

где  $E_1, E_2$  - модули упругости вдоль и поперек волокон;  $G_{12}$  - модуль сдвига в плоскости слоя. Таким образом, соотношения (5.1.102) показывают, что диссипация энергии зависит как от коэффициентов диссипации при простых видах напряженного состояния, так и от упругих постоянных материала. Зависимости коэффициента диссипации  $\Psi_1^*$  и модуля  $E_1$  при одноосном нагружении вдоль волокон от относительного объемного содержания  $v$  представлены на рис. 5.1.20. Сплошные линии - расчет по формулам (5.1.101), точки - эксперимент.

При переходе от "естественной" системы координат  $1, 2$  к некоторой произвольно ориентированной системе координат  $1', 2'$ , повернутой относительно системы  $1, 2$  на угол  $\varphi$  (см. рис. 5.1.1, а), соотношения для потерь энергии (5.1.100) и амплитудного значения упругой энергии принимают вид

$$\Delta W = \frac{1}{2} \{\sigma'\}^T [\Psi'] \{\sigma'\};$$

$$W = \frac{1}{2} \{\sigma'\} [S'] \{\sigma'\} = \frac{1}{2} \{\varepsilon'\}^T [G'] \{\varepsilon'\};$$

$$\{\sigma'\} = [T_1] \{\sigma\}, \quad \{\varepsilon'\} = [T_2] \{\varepsilon\},$$

$$\text{где } [\Psi'] = [T_2] [\Psi] [T_2]^T.$$

Матрицы преобразования координат  $[T_1]$  и  $[T_2]$  имеют вид

$$[T_1] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix},$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -mn \\ n^2 & m^2 & mn \\ 2mn & -2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix},$$

где  $m = \cos\varphi$ ;  $n = \sin\varphi$ .

Обозначим коэффициенты диссипации (технические постоянные) при одноосном циклическом нагружении материала вдоль осей  $1', 2'$  соответственно  $\Psi_1', \Psi_2'$  и при чистом сдвиге в осях  $1', 2'$  через  $\Psi_6'$ .

Тогда

$$\Psi_1' = \Psi_{11}' / S_{11}'; \Psi_2' = \Psi_{22}' / S_{22}'; \Psi_6' = \Psi_{66}' / S_{66}'.$$

Через технические упругие и диссипативные постоянные монослая коэффициент  $\Psi_1'$  выражается следующим образом:

$$\Psi_1' = \left[ \frac{\Psi_1^*}{E_1} m^4 + \frac{\Psi_2^*}{E_2} n^4 + \left( \frac{\Psi_6^*}{G_{12}} - 2\nu_{21} \frac{\Psi_1^*}{E_1} \right) m^2 n^2 \right] \times \left[ \frac{m^4}{E_1} + \frac{n^4}{E_2} + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{21}}{E_1} \right) m^2 n^2 \right]^{-1}. \quad (5.1.103)$$

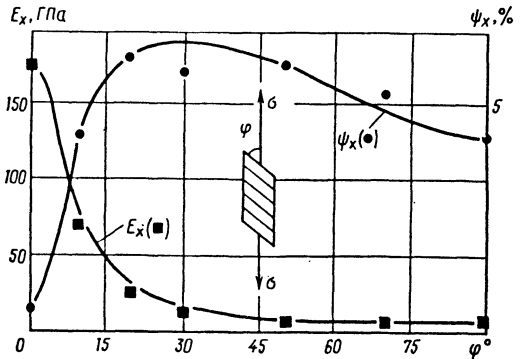


Рис. 5.1.21. Зависимость коэффициента диссипации  $\Psi_x = \Psi_1'$  и модуля  $E_x$  от угла ориентации волокон  $\varphi$  при  $E_1 = 172$  ГПа;  $E_2 = 7,6$  ГПа;  $G_{12} = 3,8$  ГПа;  $\nu_{12} = 0,3$ ;  $\Psi_1^* = 0,49$  %;  $\Psi_2^* = 4,2$  %;  $\Psi_6^* = 7,1$  %

На рис. 5.1.21 представлены зависимости коэффициента диссипации  $\Psi_x = \Psi_1'$  и модуля  $E_x = E_1'$  при одноосном нагружении от угла  $\varphi$  [точки - экспериментальные значения, сплошные линии - расчет по формуле (5.1.103)].

## Глава 5.2

### МЕХАНИКА СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

#### 5.2.1. ТЕРМОУПРУГИЕ СВОЙСТВА СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

Основная неоднородность композитов проявляется на макроуровне и порождается их слоистой структурой. Элемент типичной композитной стенки, состоящий из  $k$  слоев, обладающих в общем случае различными углами армирования, толщинами и свойствами материала, показан на рис. 5.2.1. Элемент нагружен нормальными и касательными (сдвигающими) усилиями  $N, Q$ , изгибающими и крутящими моментами  $M$ . Под действием этих усилий и моментов в

элементе возникают деформации, в общем случае зависящие от координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Однако с учетом малости толщины слоистой стенки  $h$  в прикладных теориях обычно задают распределение деформаций по толщине, т.е. по координате  $z$ . В частности, считают, что трансверсальная нормальная деформация отсутствует ( $e_z=0$ ), т.е. толщина стенки при нагружении не изменяется. Принимают, что трансверсальные деформации сдвига постоянны по толщине, т.е.  $e_{xy} = \psi_x(x, y)$ ,  $e_{yz} = \psi_y(x, y)$ , и используют линейное распределение деформаций:

$$e_x = \varepsilon_x + z\alpha_x; \quad e_y = \varepsilon_y + z\alpha_y; \quad e_{xy} = \varepsilon_{xy} + z\alpha_{xy}, \quad (5.2.1)$$

где  $\varepsilon$  и  $\alpha$  - величины, характеризующие деформацию и искривление некоторой базовой плоскости, от которой отсчитывают координату  $z$  и которая располагается на расстояниях  $e$  и  $s$  от внутренней и наружной поверхностей стенки (см. рис. 5.2.1).

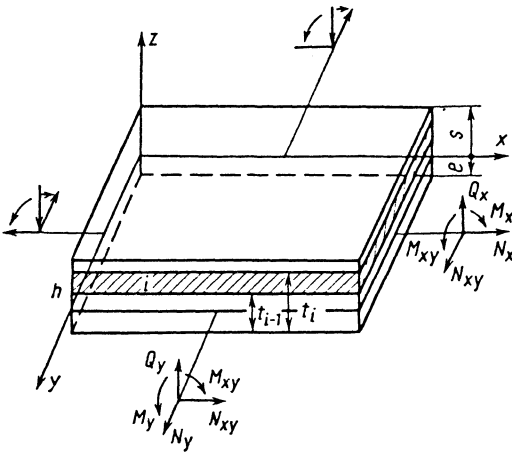


Рис. 5.2.1. Элемент слоистого композиционного материала

Для  $i$ -го монослоя напряжения определяются законом Гука, который можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(i)} &= A_{11}^{(i)} e_x^{(i)} + A_{12}^{(i)} e_y^{(i)} + A_{16}^{(i)} e_{xy}^{(i)} - A_{1T}^{(i)} \Delta T_i; \\ \sigma_y^{(i)} &= A_{12}^{(i)} e_x^{(i)} + A_{22}^{(i)} e_y^{(i)} + A_{26}^{(i)} e_{xy}^{(i)} - A_{2T}^{(i)} \Delta T_i; \\ \tau_{xy}^{(i)} &= A_{16}^{(i)} e_x^{(i)} + A_{26}^{(i)} e_y^{(i)} + A_{66}^{(i)} e_{xy}^{(i)} - A_{6T}^{(i)} \Delta T_i, \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

где

$$A_{11}^{(i)} = \bar{E}_1^{(i)} m_i^4 + 2E_{12}^{(i)} m_i^2 n_i^2 + \bar{E}_2^{(i)} n_i^4;$$

$$\begin{aligned} A_{12}^{(i)} &= \nu_{12}^{(i)} \bar{E}_1^{(i)} + \left( \bar{E}_1^{(i)} + \bar{E}_2^{(i)} - 2E_{12}^{(i)} \right) m_i^2 n_i^2; \\ A_{22}^{(i)} &= \bar{E}_1^{(i)} n_i^4 + 2E_{12}^{(i)} m_i^2 n_i^2 + \bar{E}_2^{(i)} m_i^4; \\ A_{16}^{(i)} &= m_i n_i \left[ \bar{E}_1^{(i)} m_i^2 - \bar{E}_2^{(i)} n_i^2 - E_{12}^{(i)} (m_i^2 - n_i^2) \right]; \\ A_{26}^{(i)} &= m_i n_i \left[ \bar{E}_1^{(i)} n_i^2 - \bar{E}_2^{(i)} m_i^2 + E_{12}^{(i)} (m_i^2 - n_i^2) \right]; \\ A_{66}^{(i)} &= \left( \bar{E}_1^{(i)} + \bar{E}_2^{(i)} - 2\nu_{12}^{(i)} \bar{E}_1^{(i)} \right) m_i^2 n_i^2 + \\ &\quad + G_{12}^{(i)} (m_i^2 - n_i^2)^2; \\ A_{1T}^{(i)} &= \bar{E}_1^{(i)} \left( \alpha_1^{(i)} + \nu_{12}^{(i)} \alpha_2^{(i)} \right) m_i^2 + \bar{E}_2^{(i)} \times \\ &\quad \times \left( \alpha_2^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} \alpha_1^{(i)} \right) n_i^2; \\ A_{2T}^{(i)} &= \bar{E}_1^{(i)} \left( \alpha_1^{(i)} + \nu_{12}^{(i)} \alpha_2^{(i)} \right) n_i^2 + \bar{E}_2^{(i)} \times \\ &\quad \times \left( \alpha_2^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} \alpha_1^{(i)} \right) m_i^2; \\ A_{6T}^{(i)} &= m_i n_i \left[ \bar{E}_1^{(i)} \left( \alpha_1^{(i)} + \nu_{12}^{(i)} \alpha_2^{(i)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \bar{E}_2^{(i)} \left( \alpha_2^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} \alpha_1^{(i)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

В соотношениях (5.2.3) обозначено

$$\bar{E}_{1,2}^{(i)} = \frac{E_{1,2}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}}; \quad E_{12}^{(i)} = \nu_{12}^{(i)} \bar{E}_1^{(i)} + 2G_{12}^{(i)};$$

$$m_i = \cos \varphi_i; \quad n_i = \sin \varphi_i;$$

$\varphi_i$  - угол между осью основного армирования  $l$  и осью  $x$  (см. рис. 5.1.1, а). Равенства (5.2.2) учитывают только температурное воздействие. Для учета влияния влажности в них следует добавить члены, аналогичные температурным, заменив в последних коэффициенты линейного температурного расширения  $\alpha$  на соответствующие коэффициенты  $\beta$ , характеризующие деформацию материала под действием влаги, и приращение температуры  $\Delta T$  на изменение влажности  $\Delta M$ .

Для слоя из изотропного материала (например, из металла, термопласта, резины) коэффициенты (5.2.3) имеют вид

$$A_{11}^{(i)} = A_{22}^{(i)} = \bar{E}_i = E_i / (1 - \nu_i^2); \quad A_{12}^{(i)} = \nu_i \bar{E}_i;$$



$$A_{16}^{(i)} = A_{26}^{(i)} = 0; A_{66}^{(i)} = E_i/2(1 + \nu_i);$$

$$A_{1T}^{(i)} = A_{2T}^{(i)} = \bar{E}_i \alpha_i (1 + \nu_i); A_{6T}^{(i)} = 0.$$

Для ортотропного слоя, оси ортотропии которого совпадают с осями  $x$  и  $y$ ,

$$A_{11}^{(i)} = \bar{E}_x^{(i)}; A_{22}^{(i)} = \bar{E}_y^{(i)};$$

$$A_{12}^{(i)} = \nu_{xy}^{(i)} \bar{E}_x^{(i)} = \nu_{yx}^{(i)} \bar{E}_y^{(i)};$$

$$A_{16}^{(i)} = A_{26}^{(i)} = 0; A_{66}^{(i)} = G_{xy}^{(i)};$$

$$A_{1T}^{(i)} = \bar{E}_x^{(i)} \left( \alpha_x^{(i)} + \nu_{xy}^{(i)} \alpha_y^{(i)} \right);$$

$$A_{2T}^{(i)} = \bar{E}_y^{(i)} \left( \alpha_y^{(i)} + \nu_{yx}^{(i)} \alpha_x^{(i)} \right); A_{6T}^{(i)} = 0;$$

$$\bar{E}_{xy}^{(i)} = \bar{E}_{xy}^{(i)} / \left( 1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)} \right).$$

В композитных элементах конструкций часто встречается симметричная система слоев, состоящая из двух соседних одинаковых монослоев с углами армирования  $\pm \varphi_i$ . При расчете конструкции симметричную систему монослоев обычно рассматривают как один ортотропный слой. Для такого слоя  $A_{16}^{(i)} = A_{26}^{(i)} = A_{6T}^{(i)} = 0$ , а остальные коэффициенты жесткости определяются равенством (5.2.3).

Напряжения в слоях (5.2.2) должны сводиться к усилиям  $N$  и моментам  $M$ , действующим на элемент слоистого материала (см. рис. 5.2.1). Равенства (5.2.1) и (5.2.2) позволяют получить следующие соотношения термоупругости слоистых композитов:

$$N_x = B_{11} \varepsilon_x + B_{12} \varepsilon_y + B_{16} \varepsilon_{xy} + C_{11} \varpi_x +$$

$$+ C_{12} \varpi_y + C_{16} \varpi_{xy} - B_{1T};$$

$$N_y = B_{12} \varepsilon_x + B_{22} \varepsilon_y + B_{26} \varepsilon_{xy} + C_{12} \varpi_x +$$

$$+ C_{22} \varpi_y + C_{26} \varpi_{xy} - B_{2T};$$

$$N_{xy} = B_{16} \varepsilon_x + B_{26} \varepsilon_y + B_{66} \varepsilon_{xy} + C_{16} \varpi_x +$$

$$+ C_{26} \varpi_y + C_{66} \varpi_{xy} - B_{6T};$$

$$M_x = C_{11} \varepsilon_x + C_{12} \varepsilon_y + C_{16} \varepsilon_{xy} + D_{11} \varpi_x +$$

$$+ D_{12} \varpi_y + D_{16} \varpi_{xy} - D_{1T};$$

$$M_y = C_{12} \varepsilon_x + C_{22} \varepsilon_y + C_{16} \varepsilon_{xy} + D_{12} \varpi_x +$$

$$+ D_{22} \varpi_y + D_{26} \varpi_{xy} - D_{2T};$$

$$M_{xy} = C_{16} \varepsilon_x + C_{26} \varepsilon_y + C_{66} \varepsilon_{xy} + D_{16} \varpi_x +$$

$$+ D_{26} \varpi_y + D_{66} \varpi_{xy} - D_{6T}. \quad (5.2.4)$$

В соотношения (5.2.4) входят коэффициенты жесткости слоистого материала:

$$B_{mn} = I_{mn}^{(0)}; C_{mn} = I_{mn}^{(1)} - e I_{mn}^{(0)};$$

$$D_{mn} = I_{mn}^{(2)} - 2e I_{mn}^{(1)} + e^2 I_{mn}^{(0)}, \quad (5.2.5)$$

где

$$I_{mn}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k A_{mn}^{(i)} \left( t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1} \right);$$

здесь  $r=0, 1, 2$ ;  $mn=11, 12, 22, 16, 26, 66$ ;  $A_{mn}^{(i)}$  - коэффициент жесткости  $i$ -го слоя;  $t_i$  - координата  $i$ -го слоя, равная расстоянию между его верхней поверхностью и нижней поверхностью стенки (см. рис. 5.2.1);  $t_0=0$ ,  $t_k=h$ ;  $k$  - число слоев;  $h$  - толщина слоистого материала. Температурные коэффициенты, входящие в соотношения (5.2.4), определяются равенствами

$$B_{mT} = I_{mT}^{(0)}; D_{mT} = I_{mT}^{(1)} - e I_{mT}^{(0)},$$

где

$$I_{mT}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k A_{mT}^{(i)} \left( t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1} \right) \Delta T_i;$$

здесь  $r=0, 1$ ;  $m=1, 2, 6$ ;  $\Delta T_i$  - приращение температуры  $i$ -го слоя.

Кроме деформаций, входящих в соотношения (5.2.4), при поперечном изгибе стенки в ней возникают межслойные деформации сдвига, которые, как уже отмечалось, усредняются по толщине. В результате можно записать следующие соотношения, связывающие средние деформации поперечного сдвига и поперечные усилия:

$$Q_x = K_{11} \Psi_x + K_{12} \Psi_y; Q_y = K_{21} \Psi_x + K_{22} \Psi_y. \quad (5.2.6)$$

Входящие сюда коэффициенты жесткости при поперечном сдвиге имеют вид

$$K_{11} = \frac{k_{22}}{\bar{k}}; K_{22} = \frac{k_{11}}{\bar{k}};$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{k_{12}}{\bar{k}} = \frac{k_{21}}{\bar{k}}, \quad (5.2.7)$$

где

$$k_{11} = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^k a_{44}^{(i)} h_i; k_{22} = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^k a_{55}^{(i)} h_i;$$

$$k_{12} = k_{21} = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^k a_{45}^{(i)} h_i; \bar{k} = k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21}.$$

Здесь  $h_i = t_i - t_{i-1}$  - толщина  $i$ -го слоя, а  $a_{mn}^{(i)}$  - коэффициенты податливости материала при сдвиге;

$$a_{44}^{(i)} = \frac{A_{55}^{(i)}}{A_i}; a_{55}^{(i)} = \frac{A_{44}^{(i)}}{A_i}; a_{45}^{(i)} = \frac{A_{45}^{(i)}}{A_i} = \frac{A_{54}^{(i)}}{A_i},$$

где  $A_i = A_{44}^{(i)}A_{55}^{(i)} - A_{45}^{(i)}A_{54}^{(i)}$  и для монослоя, армированного под углом  $\varphi_i$ , имеем

$$\begin{aligned} A_{44}^{(i)} &= G_{13}^{(i)} \cos^2 \varphi_i + G_{23}^{(i)} \sin^2 \varphi_i; \\ A_{55}^{(i)} &= G_{13}^{(i)} \sin^2 \varphi_i + G_{23}^{(i)} \cos^2 \varphi_i; \\ A_{45}^{(i)} &= A_{54}^{(i)} = \left( G_{13}^{(i)} - G_{23}^{(i)} \right) \sin \varphi_i \cos \varphi_i. \end{aligned}$$

В эти формулы входят модули сдвига монослоя в плоскостях 1-3 и 2-3 (см. рис. 5.1.1).

Итак, усилия и моменты, действующие на элемент материала (см. рис. 5.2.1), связаны с соответствующими деформациями соотношениями (5.2.4), (5.2.6), которые включают 20 коэффициентов  $B, C, D, K$ , характеризующих жесткость слоистого композита.

Коэффициенты  $B$  (5.2.5) называют мембранными жесткостями. Они определяют жесткость материала при его деформировании в базовой плоскости  $z=0$  (см. рис. 5.2.1). В частности, коэффициенты  $B_{11}$  и  $B_{22}$  являются жесткостями стенки при растяжении и сжатии вдоль осей  $x$  и  $y$ , коэффициент  $B_{12}$  связан с эффектом Пуассона при этих видах нагружения, а  $B_{66}$  характеризует жесткость стенки при сдвиге в базовой плоскости. Два коэффициента влияния  $B_{16}$  и  $B_{26}$  отличны от нуля только в случае, когда материал слоев является анизотропным. Они позволяют найти деформацию сдвига  $\varepsilon_{xy}$ , возникающую при действии нормальных усилий  $N_x$  и  $N_y$ , и нормальные деформации  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ , возникающие при действии касательного усилия  $N_{xy}$ . Для ортотропного и изотропного материала  $B_{16} = B_{26} = 0$ .

Коэффициенты  $C$ , называемые смешанными, характеризуют связь между деформациями стенки в своей плоскости и ее искривлением. В частности, коэффициенты  $C_{11}$  и  $C_{22}$  отражают связь между изгибом в плоскостях  $xz$  и  $yz$  и нагружением в направлении осей  $x$  и  $y$ , коэффициент  $C_{12}$  связан с эффектом Пуассона,  $C_{66}$  характеризует взаимное влияние сдвига и кручения элемента, а коэффициенты  $C_{16}$  и  $C_{26}$  определяют связь между растяжением или сжатием и кручением, а также сдвигом в базовой плоскости и изгибом.

Из второго равенства (5.2.5) следует, что смешанные коэффициенты зависят не только от структуры материала, но и от выбора координаты базовой плоскости  $e$  (см. рис. 5.2.1). Иногда оказывается возможным задать положение базовой плоскости так, что все смешанные коэффициенты обращаются в нуль. В этом случае нагружение элемента стенки усилиями  $N_x, N_y, N_{xy}$  не вызывает ее искривления, а при действии моментов отсутствуют деформации базовой плоскости. В общем случае такой выбор плоскости оказывается возможным, если стенка симметрична относительно срединной плоскости, разделяющей толщину пополам. При этом  $e=s=h/2$  и коэффициенты жесткости принимают вид

$$\begin{aligned} B_{mn} &= 2 \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} (z_i - z_{i-1}); \quad C_{mn} = 0; \\ D_{mn} &= \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} (z_i^3 - z_{i-1}^3). \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Координата  $z_i$  является расстоянием между верхней поверхностью  $i$ -го слоя и срединной плоскостью. Слои нумеруют, начиная от этой плоскости, а суммы в соотношениях (5.2.8) распространяют на половину слоев, лежащую по одну сторону от срединной плоскости. Если число слоев  $k$  является нечетным, то для использования формул (5.2.8) средний слой следует разделить на два одинаковых слоя. Распространенным частным случаем симметричной стенки является однородная или однослойная стенка, для которой соотношения (5.2.8) упрощаются следующим образом:

$$B_{mn} = A_{mn} h; \quad C_{mn} = 0; \quad D_{mn} = A_{mn} \frac{h^3}{12}.$$

В общем случае для отсутствия смешанных жесткостей необходимо выполнение следующих условий:

$$C_{mn} = I_{mn}^{(1)} - e I_{mn}^{(0)} = 0, \quad (5.2.9)$$

где  $mn=11, 12, 22, 33, 16, 26$ . Из (5.2.9) следует, что всегда можно задать координату  $e$  так, чтобы одна из смешанных жесткостей обратилась в нуль. В общем случае система шести уравнений (5.2.9), включающих одну неизвестную величину  $e$ , является несовместной, т.е. не существует базовой плоскости, позволяющей в общем случае разделить деформацию в плоскости и изгиб слоистой стенки. Однако если увеличить число неизвестных в системе (5.2.9), включив в их число толщины и координаты некоторых слоев, то часто удается подобрать структуру, для которой выполняются все уравнения (5.2.9). Такая структура обладает определенными преимуществами - она не изгибается при растяжении, сжатии и сдвиге в плоскости слоев, обладает большей из-

гибной жесткостью, чем структуры, не удовлетворяющие условиям (5.2.9) и образованные из тех же слоев, и описывается более простыми уравнениями.

Коэффициенты  $D$  определяют изгибные жесткости стенки. В частности,  $D_{11}$  и  $D_{22}$  соответствуют изгибу в плоскостях  $xz$  и  $yz$ , а  $D_{66}$  - кручению. Коэффициент  $D_{12}$  отражает связь между изгибными деформациями в плоскостях  $xz$  и  $yz$ , обусловленную эффектом Пуассона, а  $D_{16}$  и  $D_{26}$  - связь между изгибом и кручением. Из третьего равенства (5.2.5) следует, что рассматриваемые коэффициенты зависят от координаты  $e$ , т.е. от положения базовой плоскости, к которой приведены моменты. Для того чтобы получить истинную изгибную жесткость, следует рассмотреть действие только одного момента и задать координату  $e$  с помощью соответствующего уравнения (5.2.9). В результате изгибные ( $mm=11, 22$ ) и крутильная ( $mm=66$ ) жесткости будут иметь вид

$$D_{mm} = I_{mm}^{(2)} - \left( I_{mm}^{(1)} \right) / I_{mm}^{(0)}.$$

И наконец, коэффициенты  $K$  (5.2.7) определяют жесткость стенки при межслоевом сдвиге в плоскостях  $xz$  и  $yz$ . Для однородной (однослойной) стенки эти жесткости имеют следующий вид:  $K_1 = G_{xz}h$ ;  $K_2 = G_{yz}h$ . Для трехслойной стенки, у которой податливость при сдвиге определяется слоем изотропного легкого заполнителя,  $K_1 = K_2 = G_0 h^2 / h_0$ , где  $G_0$  и  $h_0$  - модуль сдвига и толщина слоя заполнителя.

Соотношения (5.2.5) и (5.2.6) в совокупности с уравнениями равновесия или движения, а также геометрическими соотношениями, связывающими деформации с перемещениями, образуют полную систему уравнений статики или динамики тонкостенных композитных элементов конструкций. Расчет таких элементов осуществляют по следующей схеме.

1. В результате решения исходной системы уравнений находят перемещения и деформации в любой точке конструкции.

2. По формулам

$$\begin{aligned} e_1^{(i)} &= e_x^{(i)} m_i^2 + e_y^{(i)} n_i^2 + e_{xy}^{(i)} m_i n_i; \\ e_2^{(i)} &= e_x^{(i)} n_i^2 + e_y^{(i)} m_i^2 - e_{xy}^{(i)} m_i n_i; \\ e_{12}^{(i)} &= 2 \left( e_y^{(i)} - e_x^{(i)} \right) m_i n_i + e_{xy}^{(i)} \left( m_i^2 - n_i^2 \right) \end{aligned}$$

с учетом равенств (5.2.1), где принимают  $z=z_i$ , находят деформации в координатах, связанных с направлением армирования  $i$ -го слоя (см. рис. 5.1.1).

3. С помощью закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(i)} &= \bar{E}_1^{(i)} \left( e_1^{(i)} + \nu_{12}^{(i)} e_2^{(i)} \right); \\ \sigma_2^{(i)} &= \bar{E}_2^{(i)} \left( e_2^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} e_1^{(i)} \right); \\ \tau_{12}^{(i)} &= G_{12}^{(i)} e_{12}^{(i)} \end{aligned}$$

определяют напряжения в монослоях. Подстановка найденных напряжений в условиях прочности, приведенные в пп. 5.1.5 и 5.1.6, позволяет оценить прочность отдельных слоев и всей конструкции, а сравнение полученных перемещений с допускаемыми позволяет оценить ее жесткость.

Более полная информация о методах расчета композитных элементов конструкций представлена в работе [6].

### 5.2.2. ДИССИПАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

Воспользуемся результатами, представленными в п. 5.1.7 для монослоя, и рассмотрим диссипативные свойства слоистых материалов.

При идеальной взаимосвязи слоев потери энергии в многослойном композите при циклическом нагружении равны сумме потерь в монослоях. Величину потерь за цикл нагружения в  $i$ -м слое определяют с помощью матрицы  $\left[ \psi^{(i)} \right]$  монослоя через амплитудные значения напряжений. Потери энергии в многослойном параллелепипеде единичной длины и ширины, отнесенные к толщине пакета  $h$ , могут быть представлены в форме, обобщающей равенство (5.1.100):

$$\Delta W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left\{ \sigma^{(i)} \right\}^T \left[ \psi^{(i)} \right] \left\{ \sigma^{(i)} \right\} \bar{h}^{(i)},$$

где  $\bar{h}^{(i)}$  - относительная толщина  $i$ -го слоя  $\left( \bar{h}^{(i)} = h^{(i)} / h \right)$ ,

или

$$\Delta W = \frac{1}{2} \left\{ \sigma \right\}^T \left[ \psi \right] \left\{ \sigma \right\},$$

где

$$\left[ \psi \right] = \left[ S \right] \sum_{i=1}^k \left[ G^{(i)} \right] \left[ \psi^{(i)} \right] \left[ G^{(i)} \right] \left[ h^{(i)} \right] \left[ S \right], \quad (5.2.10)$$

а  $\left[ G \right]$ ,  $\left[ S \right]$  - матрицы жесткости и податливости

$$\text{ти пакета слоев} \left( \left[ G \right] = \left[ S \right]^{-1} \right).$$

Для частных случаев структуры пакета слоев многослойного материала формула (5.2.10) может быть упрощена. Так, при одноосном нагружении перекрестно армированного композита вдоль оси симметрии структуры материала 1' соответствующий коэффициент диссипации принимает вид

$$\psi_1 = \frac{\psi'_{11} (g'_{11}g'_{22} - g'^2_{12})}{g'_{22}} + \frac{2\psi'_{16} (g'_{16}g'_{22} - g'_{26}g'_{12})}{g'_{22}} + \frac{\psi'_{66} (g'_{61}g'_{22} - g'_{26}g'_{12})^2}{g'_{22} (g'_{11}g'_{22} - g'^2_{12})}$$

Здесь штрихами отмечены компоненты матриц жесткости и диссипативных характеристик монослоя. На рис. 5.2.2 представлены зависимости от угла армирования коэффициента рассеяния  $\psi_x = \psi_1$  и модуля упругости  $E_x = E'_1$  при одноосном нагружении симметрично армированного композита.

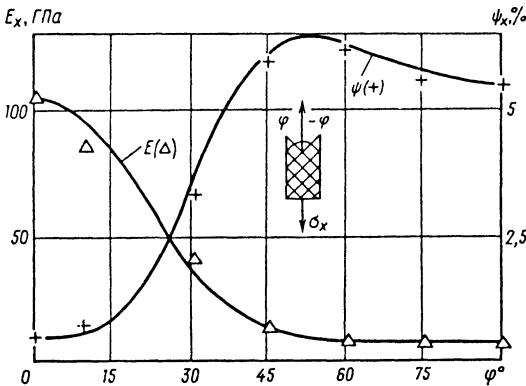


Рис. 5.2.2. Зависимость коэффициента диссипации  $\psi_x$  и модуля  $E_x$  от угла ориентации волокон  $\varphi$  при  $E_1=103,4$  ГПа;  $E_2=7,2$  ГПа;  $G_{12}=3,8$  ГПа;  $\nu_{12}=0,29$ ;  $\psi_1=0,45$  %;  $\psi_2=5,5$  %;  $\psi_6=6,7$  %

**5.2.3. СВОЙСТВА КОНСТРУКЦИОННЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ**

В табл. 5.2.1 представлены типовые механические и физические характеристики наиболее распространенных композиционных материалов. Индекс 1, как и ранее, соответствует направлению волокон в однонаправленном материале или направлению основного армирования в тка-

ных материалах. Величины  $E_1$  и  $E_2$  являются модулями упругости при нагружении соответственно в продольном и поперечном направлениях. Величины  $\sigma_1^+$  и  $\sigma_2^+$  определяют пределы прочности при растяжении в этих направлениях, а  $\sigma_1^-$  и  $\sigma_2^-$  - пределы прочности при сжатии. Значения  $\tau$  соответствуют пределу прочности при сдвиге между слоями. В последних столбцах таблицы приведены значения коэффициента линейного температурного расширения  $\alpha_1$  и коэффициента теплопроводности  $\lambda_1$  в продольном направлении, удельной теплоемкости  $c_p$  и плотности  $\rho$ .

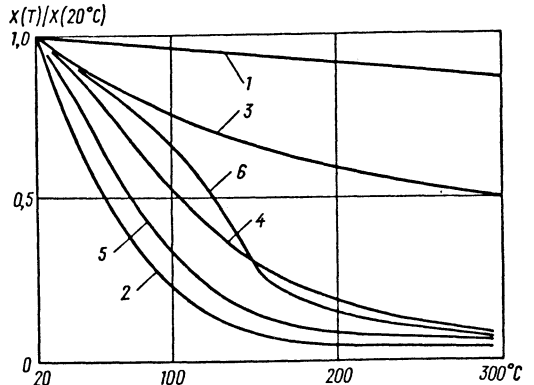


Рис. 5.2.3. Зависимость относительных механических характеристик однонаправленного стеклопластика от температуры:

- 1- $E_1(T)$ ; 2- $G_{12}(T)$ ; 3- $\sigma_1^+(T)$ ;
- 4- $\sigma_1^-(T)$ ; 5- $\sigma_2^-(T)$ ; 6- $\tau_{12}(T)$

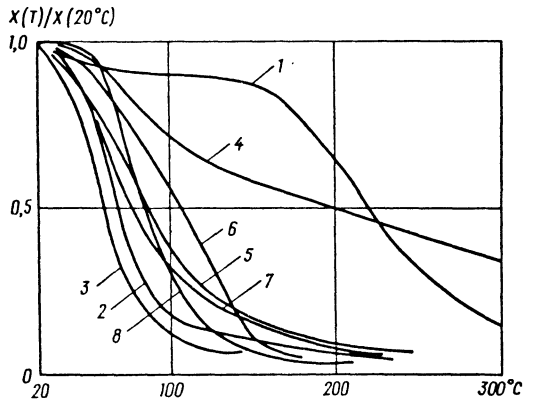


Рис. 5.2.4. Зависимость относительных механических характеристик однонаправленного органического композита от температуры:

- 1- $E_1(T)$ ; 2- $E_2(T)$ ; 3- $G_{12}(T)$ ; 4- $\sigma_1^+(T)$ ;
- 5- $\sigma_1^-(T)$ ; 6- $\sigma_2^+(T)$ ; 7- $\sigma_2^-(T)$ ; 8- $\tau_{12}(T)$

### 5.2.1. Типовые свойства композиционных материалов

Материал	Вид армирования	Марка наполнителя	Марка связующего	$E_1$	$E_2$	$\sigma_1^+$	$\sigma_2^+$	$\sigma_1^-$	$\sigma_2^-$	$\tau$	$\alpha \cdot 10^6, \text{K}^{-1}$	$\lambda_1, \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$	$c_p, \text{кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$	$\rho, \text{кг}/\text{м}^3$
				ГПа		МПа								
Стеклопластики	Тканые	ТСУ8/3-ВМ-78	ЭХД-У	22	28	400	400	280	350	32	6,2	0,32	1,5	1850
		Т-25(ВМ)-78	ЭП-5122	50	18	800	90	500	200	30	12,0	0,40	1,1	1850
		Т-10	ЭП-5122	26	20	560	310	260	220	28	8,0	0,33	1,1	1900
		НП-750	ЭХД-У	26	22	240	260	220	240	45	6,5	0,29	1,1	1800
	Однонаправленные	ВМПС	ЭХД-МК	55	3,0	1800	12	600	100	32	20	0,4	1,2	2100
		РВМН	ЭДТ-10	60	3,5	1500	12	600	100	35	15	0,4	1,4	2050
		РБН	ЭДТ-10	40	3,0	1300	10	400	100	30	20	0,4	1,4	2100
	Хаотически армированные	БС	Р-2	18	18	80	80	130	130	45	20	0,35	1,2	1950
		БС	ФН	18	18	500	500	140	140	50	25	0,36	1,3	1950
		БС	Р-2М	18	18	100	100	130	130	50	18	0,40	1,3	2000
Углепластики	Однонаправленные	ВМН-4	УП-632	150	3,5	900	10	600	100	25	-0,4	0,50	0,72	1500
		УКН-5000	ЭХД-МК	120	3,0	1300	10	800	70	30	0,2	0,53	0,77	1540
		ЭЛУР	ПАИС	130	3,0	800	11	90	80	30	-0,1	0,47	0,76	1480
		ЛУ-П	ЭНУП	130	2,5	800	11	600	80	25	0,2	0,48	0,75	1490
Органо-пластики	Однонаправленные	СВМ-У	ЭХД-МК	85	3,0	2500	10	210	100	32	0,8	0,15	0,80	1300
		ЖСВМ	ЭХД-МК	80	3,0	2200	10	170	100	35	1,0	0,15	0,80	1320
		Амос	ЭХД-МД	95	3,5	2700	12	346	105	39,2	-0,5	0,17	0,95	1300
	Тканые	Арт. 56313	ЭДТ-10П	34	34	600	500	150	160	44	0,77	0,13	1,1	1250
		Арт. 56334	ЭДТ-10П	30	45	550	700	140	180	42	0,75	0,13	1,1	1250

5.2.2. Механические характеристики конструкционных композитов при температуре 20° С

Материал	$\rho \cdot 10^{-3}$ , кг/м <sup>3</sup>	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	$\sigma_1^+$	$\sigma_1^-$	$\sigma_2^+$	$\sigma_2^-$	$\tau_{12}$	$\alpha_1 \cdot 10^6$	$\alpha_2 \cdot 10^6$	Способ изготовления
		ГПа				ГПа		МПа					
Однонаправленный стеклопластик ( $\nu=0,75$ )	2,05	60-70	11	0,5	0,28	1,75-2,1	0,4	27	72	36	8	100	Намотка
Однонаправленный органоластик на основе арамидных волокон ( $\nu=0,65$ )	1,30-1,38	78-95	4,1-5,5	2,1	0,29	1,4-2,2	0,28-0,31	12-28	97-138	20-44	-2,5	100-200	>>
Однонаправленный углепластик ( $\nu=0,5$ )	1,5	140-160	5-6	5,5	0,32	1,1-1,6	0,5-1	20	75	30-50	-1,5	40	>>
Однонаправленный боропластик	1,9	250	25	9,8	0,22	1,2	1,16	20	70	60	2,4	100	Выкладка
Однонаправленный бороалюминий ( $\nu=0,4$ )	2,6	218	141	42	0,23	1,52	1,76	141	211	162	0,65	2,78	Прессование
Однонаправленный углеорганоластик (50 % углеродных и 50 % органоволокон) ( $\nu=0,6$ )	1,5	108	4-6	2	0,4	1,2	0,7	25	100	56	-2	40	Намотка
Стеклотекстолит на основе ткани сатинового переплетения ( $\nu=0,65$ )	1,8	19,2	24,2	7	0,14	0,38	0,22	50	270	85	9,5	9,5	Прессование
Углепластик на основе углеткани ( $\nu=0,57$ )	1,39	12,4	11	5,8	0,16	0,15	0,165	95	120	20	13,3	16,6	>>
Квазиизотропный хаотически армированный стекловолокнистый пресс-материал ( $\nu=0,62$ )	2	16,3	16,3	6,5	0,27	0,13	0,25	130	250	127	-	-	>>

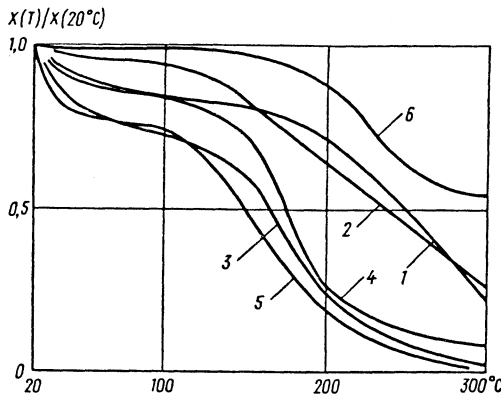


Рис. 5.2.5. Зависимость относительных механических характеристик стеклотекстолита от температуры:

$$1-E_1(T); 2-\sigma_1^+(T); 3-\sigma_1^-(T); 4-\sigma_2^+(T); 5-\sigma_2^-(T); \\ 6-\tau_{12}(T)$$

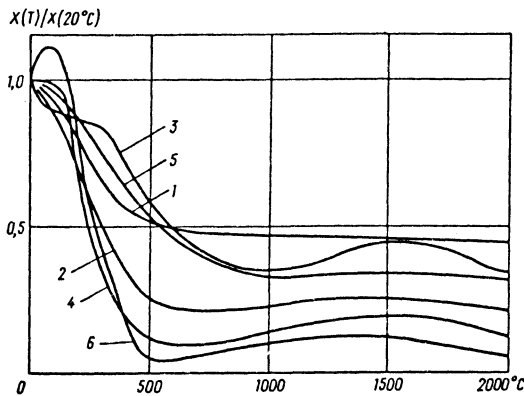


Рис. 5.2.6. Зависимость относительных механических характеристик термостойкого материала на основе углеткани от температуры:

$$1-E_1(T); 2-E_2(T); 3-\sigma_1^+(T); 4-\sigma_1^-(T); 5-\sigma_2^+(T); \\ 6-\sigma_2^-(T)$$

В табл. 5.2.1 приведены характеристики конкретных композиционных материалов. В связи с тем, что номенклатура этих материалов непрерывно расширяется, в табл. 5.2.2 представлены средние характеристики основных классов отечественных композитов. Индекс 12 соответствует характеристикам в плоскости слоя;  $\nu_{12}$  - коэффициент Пуассона при нагружении в направлении армирования;  $G_{12}$  и  $\tau_{12}$  - модуль сдвига и предел прочности при сдвиге. Из пара-

метров окружающей среды наибольшее влияние на прочность композитов с полимерной матрицей оказывает температура. Соответствующие зависимости для типовых композиционных материалов (см. табл. 5.2.2) представлены на рис. 5.2.3 - 5.2.6.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакулия В. Н., Рассоха А. А. Метод конечных элементов и голографическая интерферометрия в механике композитов. М.: Машиностроение, 1987. 311 с.
2. Булавс Ф. Я., Радиныш И. Г. Деформативные свойства однонаправленно армированного пластика при трансверсальном нагружении // Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1980. С. 73-81.
3. Булавс Ф. Я., Радиныш И. Г. Микромеханика ползучести однонаправленно армированных пластиков при продольном сдвиге // Механика армированных пластиков. Рига: Рижский политех. ин-т, 1981. С. 19-26.
4. Ван Фо Фы Г. А. Теория армированных материалов. Киев: Наукова Думка, 1971. 232 с.
5. Вавин Г. А. Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наукова Думка, 1985. 302 с.
6. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 270 с.
7. Викарно А., Толаид Р. Критерии прочности и анализ разрушения конструкций из композиционных материалов // Композиционные материалы / Под ред. Л. Браутмана и Л. Крока. Т.7. М.: Машиностроение, 1978. С. 62-107.
8. Гольденблат И. И., Копнов В. А. Критерии прочности и пластичности конструктивных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 191с.
9. Зиновьев П. А., Ермаков Ю. Н. Анизотропия диссипативных свойств волокнистых композитов // Механика композитных материалов. 1985, № 5. С. 816-825.
10. Каламкаргов А. Л., Кудрявцев Б. А., Партов В. З. Асимптотический метод осреднения в механике композитов регулярной структуры // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер. Механика деформируемого твердого тела. 1987. № 19. С. 78-147.
11. Кильчинский А. А. Об одной модели для определения термоупругих характеристик материалов, армированных волокнами // Прикладная механика. 1965. Т. 1. № 12. С. 65.
12. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
13. Максимов Р. Д., Плуме Э. З., Пономарев В. М. Прочностные свойства однонаправленно армированных гибридных композитов //

Механика композитных материалов. 1984. № 1. С. 35-41.

14. **Москвитин В. В.** Циклические нагружения элементов конструкций. М.: Наука, 1981. 344 с.

15. **Победра Б. Е.** Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.

16. **Рабинович А. Л., Верховский И. А.** Об упругих постоянных ориентированных стеклопластиков // Инж. журнал. 1964. № 1. С. 90-100.

17. **Радиньш И. Г., Гурвич М. Р.** Вязкоупругие свойства слоистых армированных пластиков при длительном плоском нагружении // Механика армированных пластиков. Рига: Рижский политех. ин-т, 1981. С. 76-89.

18. **Роуланде Р.** Течение и потеря несущей способности композитов в условиях двухосного напряженного состояния: Сопоставление расчета и экспериментальных данных // Сб. переводов. Механика, 16. М.: Мир, 1978. С. 140-179.

19. **Скудра А. М., Булавс Ф. Я.** Структурная теория армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1978. 192 с.

20. **Скудра А. М., Булавс Ф. Я.** Прочность армированных пластиков. М.: Химия, 1982. 216с.

21. **Скудра А. М., Булавс Ф. Я., Гурвич М. Р., Круклиньш А. А.** Элементы строительной механики стержневых систем из композитных материалов. Рига: Зинатне, 1989. 250 с.

22. **Хашин З., Розен В.** Упругие модули материалов, армированных волокнами // Прикладная механика, 1964. № 2. С. 71-82.

23. **Хилл Р.** Теория механических свойств волокнистых композиционных материалов. Ч. 1. Упругое поведение // Механика. Вып. 2. М.: Мир, 1966. С. 131-143.

24. **Хорошун Л. П.** О методике определения упругих модулей армированных тел // Механика полимеров. 1968. № 1. С. 78.

25. **Цай С., Хан Х.** Анализ разрушения композитов // Механика. Вып. 16. М.: Мир, 1978. С. 104-139.

26. **Шаффер Б.** Соотношения между напряжениями и деформациями для армированных пластиков при действии внешних сил параллельно и нормально их внутренним волокнам //

Ракетная техника и космонавтика. 1964. № 2. С. 163-169.

27. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399с.

28. **Вак I.** Deformation behaviour and failure of glassfibrereinforced resin material // *Plastics and Polymers*. 1970. Vol. 38. N 133. P. 27-30.

29. **Chou T. K., Fukuda H.** Stiffness and strength of hybrid composites // *Composite Materials Japan*. - US conf. Tokyo. 1981. P. 87.

30. **Foye R. L.** An Evaluation on Various Engineering Estimates of Transverse Properties of Unidirectional Composites // *SAMPE Journal*. 1966. vol. 10. P. 16-31.

31. **Gruber M. B., Overbeeke I. L., Chou T.** A reasonable sandwich beam concept for composite compression test // *J. Composite Materials*. 1982. Vol. 16. P. 162-171.

32. **Hill R.** Theory of Mechanical Properties of Fibre Strengthened Materials. 111. Self-consistent Models // *J. Mech. Phys. Solids*. 1965. 13. P. 189-198.

33. **Kalnin I. L.** Evaluation of unidirectional glass-graphite fiber epoxy resin composites // *Composite Materials: Testing and Design (Second conference)*, ASTM STP 497, American Society for Testing and Materials, 1972. P. 551-563.

34. **Knappe W., Schneider W.** Bruchkriterien für unidirektionellen Glasfaser / Kunststoffe unter ebenen Kurzzeit und Langzeit Beanspruchung // *Kunststoffe*. 1972. Bd. 62. H. 12. S. 864.

35. **Pinselli R.** La fibre aramide et ses application dans les composites hybrides // *Materiaux et techniques*. 1984. Jan. Fev. 72 Annee, NS 1-2. P. 43-48.

36. **Short D., Summerscales I.** A new theoretical approach to the strength of fibre composite hybrid materials // 13th Reinforced Plastic Congress, London, 1982. P. 225-229.

37. **Whithney J. M.** Elastic Moduli of Unidirectional Composites with Anisotropic Filaments // *J. Composite Materials*. 1967. Vol. 1. P. 188-193.

38. **Wu E. M., Ruhmann D. C.** Stress rupture of glass-epoxy composites: environmental and stress effects // *Composite Reliability*. ASTM STP 580. 1975. P. 263-287.



## Раздел 6

# КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### Глава 6.1

#### КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

##### 6.1.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Одним из наиболее общих способов составления дифференциальных уравнений движения голономных систем с двусторонними связями являются уравнения Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6.1.1)$$

Линейными называют системы, колебания которых описываются линейными дифференциальными уравнениями. Это имеет место, в частности, если кинетическая энергия системы  $T$ , диссипативная функция Рэлея  $\Phi$  и потенциальная энергия  $\Pi$  могут быть представлены в виде квадратичных форм обобщенных координат  $q_i$  и скоростей  $\dot{q}_i$ :

$$T = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j / 2; \quad \Phi = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j / 2;$$

$$\Pi = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} q_i q_j / 2, \quad (6.1.2)$$

содержащих постоянные коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$ , называемые соответственно обобщенными инерционными коэффициентами, коэффициентами вязкого сопротивления и квазиупругими коэффициентами.

Часто для получения линейных дифференциальных уравнений дополнительно вводят понятие *малых колебаний*, при которых обобщенные координаты  $q_i$  и скорости  $\dot{q}_i$  рассматривают как величины первого порядка малости, а в функциях  $T$ ,  $\Phi$  и  $\Pi$  ограничиваются малыми второго порядка. Таким образом, некоторые системы при малых колебаниях ведут себя, как, линейные.

Потенциальная энергия системы приводит к форме (6.1.2), если обобщенные координаты  $q_i$  отсчитываются от какого-либо из положений равновесия системы, в которых  $\partial \Pi / \partial q_i = 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Система совершает колебательные движения около положения равновесия, если оно является устойчивым. Достаточным условием устойчивости является минимум потенциальной энергии и, как следствие, положительная определенность квадратичной формы (6.1.2) потенциальной энергии, которая может быть установлена критерием Сильвестра:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix} > 0 \quad (m = 1, 2, \dots, n).$$

**Пример 1.** Определить, при каких значениях жесткости пружины положение равновесия в поле тяжести системы, представленной на рис. 6.1.1, будет устойчивым.

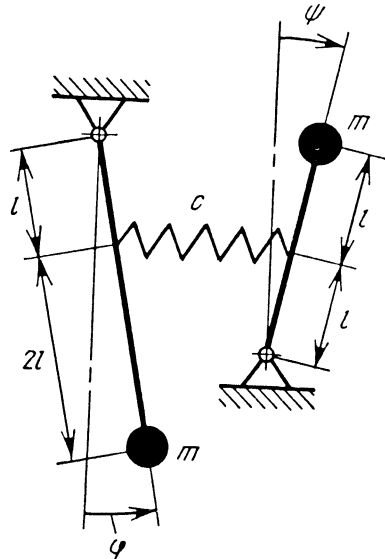


Рис. 6.1.1. К определению устойчивости положения равновесия

Потенциальная энергия системы выражается формулой

$$P = 3mgl(1 - \cos \varphi) - 2mgl(1 - \cos \psi) + \\ + cI^2(\varphi - \psi)^2 / 2.$$

Учитывая, что при  $\alpha \ll 1$   $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2 / 2$ , запишем  $P(\psi, \varphi)$  в форме (6.1.2)

$$P = \left( c_{11}\psi^2 + 2c_{12}\psi\varphi + c_{22}\varphi^2 \right) / 2,$$

где  $c_{11} = cI^2 - 2mgl$ ;  $c_{12} = c_{21} = -cI^2$ ;  $c_{22} = cI^2 + 3mgl$ .

Согласно критерию Сильвестра должно быть

$$c_{11} > 0; \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

откуда следует, что положение равновесия  $\psi=0$ ,  $\varphi=0$  является устойчивым, если  $c > 6mg/l$ .

Дифференциальные уравнения колебаний линейной системы около положения равновесия при наличии сил сопротивления согласно (6.1.1), (6.1.2) имеют вид

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij}\ddot{q}_j + b_{ij}\dot{q}_j + c_{ij}q_j) = Q_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.1.3)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t), \quad (6.1.4)$$

где  $\mathbf{q}=(q_i)$  - вектор (матрица-столбец) обобщенных координат;  $\mathbf{A}=(a_{ij})$ ;  $\mathbf{B}=(b_{ij})$ ;  $\mathbf{C}=(c_{ij})$  - соответственно симметричные матрицы обобщенных инерционных коэффициентов, коэффициентов вязкого сопротивления и квазиупругих коэффициентов;  $\mathbf{Q}(t)$  - вектор обобщенных сил, обусловленных возмущающимися воздействиями.

**Пример 2.** Составить дифференциальные уравнения колебаний около положения равновесия системы, состоящей из трех грузов (рис. 6.1.2, а), если их массы  $m_1=m$ ,  $m_2=4m/3$ ,  $m_3=m$ , сила сопротивления  $k$ -го демпфера пропорциональна скоростям движения "поршня" относительно "цилиндра"  $F_k^{\text{сопр}} = \mu_k v_k^{\text{отн}}$ , причем  $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=\mu$ , а сила упругости  $k$ -й пружины пропорциональна ее удлинению  $F_k^{\text{упр}} = c_k \Delta_k$ , где  $c_1=c_2=c_3=c_4=c$ ;  $\Delta_k$  - деформация пружины.

1. Решим задачу с помощью уравнений Лагранжа II рода. Выбираем в качестве обобщенных координат перемещения  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  соответствующих грузов из положения равновесия. Кинетическая энергия

$$T = m_1\dot{x}_1^2 / 2 + m_2\dot{x}_2^2 / 2 + m_3\dot{x}_3^2 / 2.$$

Потенциальная энергия системы равна энергии упругих деформаций пружин

$$\Phi = \mu_1\dot{x}_1^2 / 2 + \mu_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 / 2 + \\ + \mu_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^2 / 2 + \mu_4\dot{x}_3^2 / 2.$$

Потенциальная энергия системы равна энергии упругих деформаций пружин

$$P = c_1x_1^2 / 2 + c_2(x_2 - x_1)^2 / 2 + \\ + c_3(x_3 - x_2)^2 / 2 + c_4x_3^2 / 2.$$

Учитывая соотношения между  $m_k$ ,  $\mu_k$  и  $c_k$  и сравнивая полученные выражения  $T$ ,  $\Phi$  и  $P$  с (6.1.2) и (6.1.4), находим

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 4m/3 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2\mu & -\mu & 0 \\ -\mu & 2\mu & -\mu \\ 0 & -\mu & 2\mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2c & -c & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -c & 2c \end{pmatrix}.$$

Записывая работу  $\delta A$  возмущающей силы  $F(t)$  на возможных перемещениях  $\delta x_1$ ,  $\delta x_2$ ,  $\delta x_3$  грузов системы  $\delta A = F(t)\delta x_1$ , определяем компоненты вектора столбца внешних возмущений  $\mathbf{Q}(t) = (F(t), 0, 0)^T$ .

2. Задачу, сформулированную в примере 2, легко решить, используя уравнения поступательного движения твердого тела  $m_j\ddot{x}_j = \sum_k F_{kj}$ .

Проекции сил  $F_{kj}$ , приложенных к  $j$ -му грузу, легко определить с помощью рис. 6.1.2, б. Для трех грузов получаем

$$m_1\ddot{x}_1 = F(t) - \mu_1\dot{x}_1 - c_1x_1 + \mu_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \\ + c_2(x_2 - x_1); \\ m_2\ddot{x}_2 = -\mu_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_2(x_2 - x_1) + \\ + \mu_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + c_3(x_3 - x_2); \\ m_3\ddot{x}_3 = -\mu_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - c_3(x_3 - x_2) - \\ - \mu_4\dot{x}_3 - c_4x_3.$$

Сравнивая полученные уравнения с (6.1.3), (6.1.4), приходим к тому же результату, что и в п. 1.

Форма (6.1.4) записи дифференциальных уравнений движения, называемая *прямой* [9, 67], не является единственной.

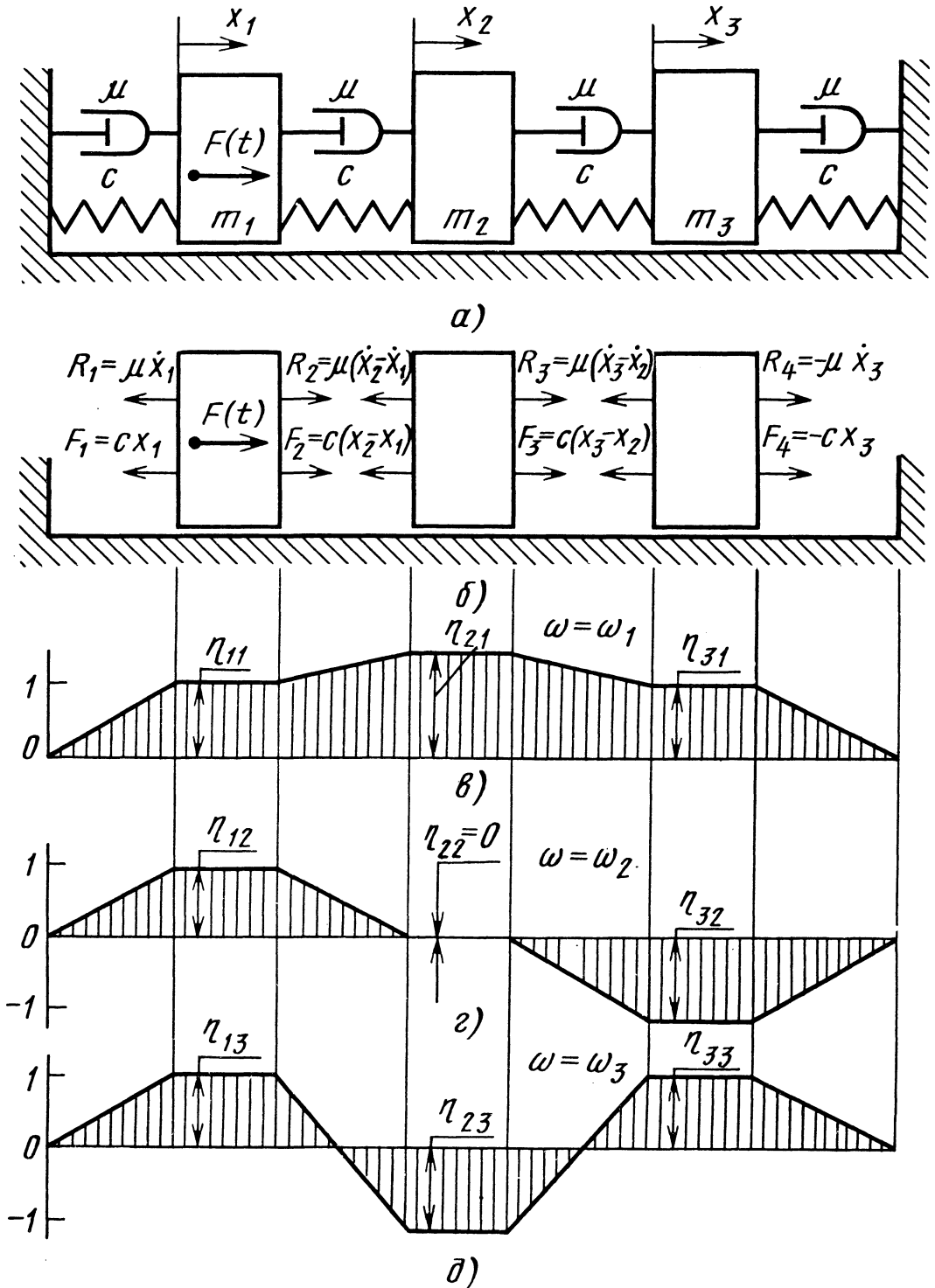


Рис. 6.1.2. Система с тремя степенями свободы

Для несвободных систем, имеющих упругий безмассовый каркас, несущий сосредоточенные инерционные элементы, целесообразно применять принцип Даламбера в сочетании с линейными соотношениями между действующими на инерционные элементы силами и их перемещениями

$$q_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} Q_j \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (6.1.5)$$

где  $\delta_{ij}$  - приращение  $i$ -й обобщенной координаты  $q_i$  от действия единичной  $j$ -й обобщенной силы  $Q_j=1$ . Симметрическую матрицу  $\delta=(\delta_{ij})$  называют матрицей коэффициентов влияния  $\delta_{ij}$ .

В обобщенных силах, кроме возмущающих  $Q_j(t)$  и сил сопротивления среды (внешнее трение)  $-b_{jj}\dot{q}_j$ , учитывают даламберовы силы инерции  $-a_{jj}\ddot{q}_j$ :

$$Q_j = Q_j(t) - b_{jj}\dot{q}_j - a_{jj}\ddot{q}_j \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Подстановка  $Q_j$  в (6.1.5) приводит к уравнениям колебаний в *обратной форме*, которые в матричной записи имеют вид

$$\mathbf{q} = \delta(\mathbf{Q}(t) - \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}). \quad (6.1.6)$$

Матрицы  $\mathbf{A}=(a_{ij})$  и  $\mathbf{B}=(b_{ij})$  коэффициентов инерции и сопротивления в обратной форме записи являются диагональными.

Для перехода от уравнений (6.1.6) в обратной форме к прямой форме (6.1.4) необходимо (6.1.6) домножить слева на матрицу  $\delta^{-1}=\mathbf{C}$  квазиупругих коэффициентов.

**Пример 3.** Составить дифференциальные уравнения малых колебаний упругой безинерционной балки, несущей сосредоточенный груз, имеющий массу  $m$  и момент инерции  $I$  (рис. 6.1.3).

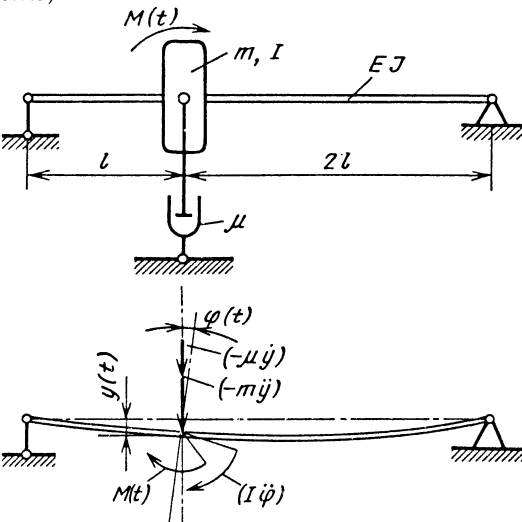


Рис. 6.1.3. Система с двумя степенями свободы

В качестве обобщенных координат примем прогиб балки в месте крепления груза  $y$  и угол поворота груза  $\varphi$ . Приложив единичные силу и момент по правилу Верещагина [86], вычислим коэффициенты влияния  $\delta_{11}=4\beta^3/9EJ$ ,  $\delta_{12}=\delta_{21}=2l^2/9EJ$ ,  $\delta_{22}=l/3EJ$ . Тогда матрицы, входящие в уравнение (6.1.4), будут иметь вид

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} y \\ \varphi \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mu, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} m, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ M(t) \end{pmatrix}; \quad \delta = \frac{1}{9EJ} \begin{pmatrix} 4l^3, & 2l^2 \\ 2l^2, & 3l \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \delta^{-1} = 9EJ \begin{pmatrix} 3/8l^3, & -1/4l^2 \\ -1/4l^2, & 1/2l \end{pmatrix}.$$

### 6.1.2. КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

В соответствии с (6.1.3) дифференциальное уравнение колебаний имеет вид

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q(t). \quad (6.1.7)$$

*Свободные (собственные) колебания* происходят при отсутствии возмущающих воздействий [ $Q(t)=0$ ], если в начальный момент ( $t=0$ ) система выведена из состояния покоя.

**Свободные колебания системы без трения** (консервативная система). Дифференциальное уравнение колебаний согласно (6.1.7) имеет вид  $a\ddot{q} + cq = 0$ , общее решение которого  $q(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$  (рис. 6.1.4, а), где *круговая (циклическая) частота*  $\omega=(c/m)^{0.5}$ , а *амплитуда*  $A$  и *начальная фаза*  $\alpha$  колебаний зависят от начальных условий  $q(0)=q_0$ ,  $\dot{q}(0)=\dot{q}_0$ , причем  $A = \left( q_0^2 + (\dot{q}_0 / \omega)^2 \right)^{0.5}$ ;  $\alpha = \text{arctg}(q_0 \omega / \dot{q}_0)$ .

*Периодом колебаний*  $T=2\pi/\omega$  называют продолжительность одного полного цикла колебаний (рис. 6.1.4). Используется также *частота в герцах*  $\nu=1/T=\omega/2\pi$ , равная численно числу колебаний в секунду.

**Свободные колебания системы при наличии вязкого трения** (диссипативная система). Дифференциальное уравнение колебаний согласно (6.1.7) имеет вид  $a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0$  или

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = 0, \quad (6.1.8)$$

где величину  $\varepsilon=b/2a$  называют коэффициентом демпфирования.

При "малом" демпфировании ( $\varepsilon < \omega$ ) решение (6.1.8) может быть записано в виде

$$q(t) = Ae^{-\varepsilon t} \sin(\omega_1 t + \alpha), \quad (6.1.9)$$

где  $\omega_1=(\omega^2-\varepsilon^2)^{0.5}$ , а  $A$  и  $\alpha$  определяются из начальных условий

$$A = \left( q_0^2 + (\dot{q}_0 + \varepsilon q_0)^2 / \omega_1^2 \right)^{0.5};$$

$$\alpha = \arctg(q_0 \omega_1 / (\dot{q}_0 + \varepsilon q_0)).$$

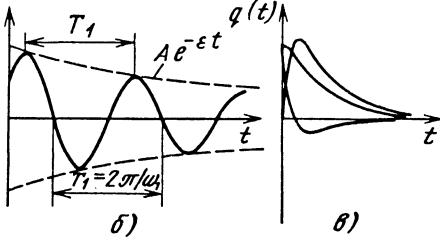
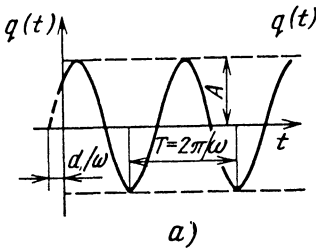


Рис. 6.1.4. Графики свободных движений

Решение (6.1.9) описывает затухающие колебания (рис. 6.1.4, б). Хотя процесс не является периодическим, для его характеристики используют понятия условного периода  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ , условной частоты  $\omega_1$ , условной переменной амплитуды  $Ae^{-\varepsilon t}$ , которые имеют смысл при  $\varepsilon \ll \omega$ .

Интенсивность убывания амплитуды характеризуют также:

декремент колебаний  $\Delta = e^{\varepsilon T_1}$ , который равен отношению амплитудных значений  $q(t)$ , взятых через условный период  $T_1$ ;

логарифмический декремент  $\delta = \ln \Delta = \varepsilon T_1$ , величина  $1/\delta$  равна числу колебаний, за которое условная амплитуда убывает в  $e \approx 2.7$  раза;

постоянная времени  $\tau_0 = 1/\varepsilon$ , равная времени, за которое условная амплитуда убывает в  $e$  раз;

добротность системы  $D = \omega/2\varepsilon$  при  $\varepsilon \ll \omega$ , равная  $\pi/\delta$  - количеству колебаний, по истечении которых амплитуда уменьшается в  $e^{\pi} \approx 23$  раза, т.е. колебания становятся исчезающе малыми.

При "большом" демпфировании ( $\varepsilon > \omega$ ) решение (6.1.8) имеет вид

$$q(t) = e^{-\varepsilon t} \left( C_1 e^{\omega_2 t} + C_2 e^{-\omega_2 t} \right), \quad (6.1.10)$$

где  $\omega_2 = (\varepsilon^2 - \omega^2)^{0.5}$ , а  $C_1$  и  $C_2$  определяют из начальных условий

$$C_1 = (1/2\omega_2)(q_0(\omega_2 + \varepsilon) + \dot{q}_0);$$

$$C_2 = (1/2\omega_2)(q_0(\omega_2 - \varepsilon) - \dot{q}_0).$$

В этом случае система не обладает колебательными свойствами, а движение имеет аperiodический характер (рис.6.1.4, в).

При "критическом" демпфировании ( $\varepsilon = \omega$ ), решение (6.1.8) с учетом начальных условий имеет вид

$$q(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\varepsilon t} \quad (C_1 = q_0, C_2 = \dot{q}_0 + \varepsilon q_0), \quad (6.1.11)$$

а движение имеет также аperiodический характер (см. рис.6.1.4, в).

Вынужденными называют колебания, происходящие вследствие наличия действующих на систему внешних возмущений.

**Вынужденные колебания при гармоническом возмущающем воздействии.** Внешние возмущения могут быть обусловлены действием на систему заданных сил (рис.6.1.5, а) или моментов (силовое возмущающее воздействие), наличием нестационарных связей (рис.6.1.5, б) (кинематическое возбуждение); "действием" на систему сил инерции переносного движения (рис.6.1.5, в) или подвижных элементов системы (рис.6.1.5, г) (инерционное возмущение) и т.д.

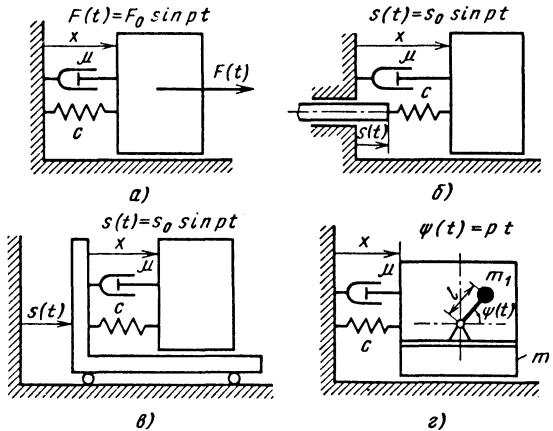


Рис. 6.1.5. Схемы возбуждения вынужденных колебаний

Обобщенная возмущающая сила при гармоническом возбуждении  $Q(t) = Q_0 \sin pt$ . При силовом и кинематическом возмущении амплитуды  $Q_0$  обобщенной возмущающей силы постоянна (на рис.6.1.5, а  $Q_0 = F_0$ , на рис.6.1.5, б  $Q_0 = cs_0$ ), а при инерционном возмущении  $Q_0$  пропорциональна квадрату частоты  $p$  возмуще-

ния (на рис.6.1.5, в  $Q_0=ms_0p^2$ , на рис.6.1.5, г  $Q_0=m_1p^2$ ).

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний согласно (6.1.7) имеет вид  $a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q_0 \sin pt$ , или

$$\ddot{q} + 2\epsilon\dot{q} + \omega^2 q = (Q_0 / a) \sin pt. \quad (6.1.12)$$

Его общее решение есть  $q(t)=q_c+q_B$ , где  $q_c$  - общее решение однородного уравнения (6.1.8) вида (6.1.9), (6.1.10) или (6.1.11), которое асимптотически стремится к нулю. Частное решение  $q_B$  уравнения (6.1.12) описывает *установившиеся вынужденные колебания* системы

$$q_B = q_{B0} \sin(pt + \varphi), \quad (6.1.13)$$

где амплитуда вынужденных колебаний

$$q_{B0} = (Q_0 / a) \left( (\omega^2 - p^2)^2 + (2\epsilon p)^2 \right)^{-0,5}, \quad (6.1.14)$$

а сдвиг фаз между колебаниями системы и возмущающей силой

$$\varphi = \arctg \left( -2\epsilon p / (\omega^2 - p^2) \right). \quad (6.1.15)$$

Используя понятия *коэффициента расстройки*  $\gamma=p/\omega$ , *добротности*  $D=\omega/2\epsilon$  и *статического смещения*  $q_{ст}=Q_0/c$  системы под действием постоянной силы, равной  $Q_0$ , формулы (6.1.14), (6.1.15) приводят к безразмерной форме

$$\lambda = q_{B0} / q_{ст} = \left( (1 - \gamma^2)^2 + (\gamma / D)^2 \right)^{-0,5},$$

$$\varphi = \arctg \left( -\gamma / \left( (1 - \gamma^2) D \right) \right). \quad (6.1.16)$$

При инерционном возбуждении амплитуду  $q_{B0}$  относят к пределу амплитуды  $q_\infty$  при  $p \rightarrow \infty$  (на рис.6.1.5, в  $q_\infty=s_0$ ; на рис.6.1.5, г  $q_\infty=lm_1/m$ ). Тогда безразмерная амплитуда

$$\lambda_1 = q_{B0} / q_\infty = \lambda \gamma^2 = \gamma^2 \left( (1 - \gamma^2)^2 + (\gamma / D)^2 \right)^{-0,5}. \quad (6.1.17)$$

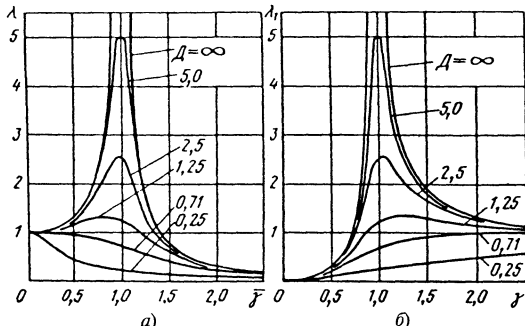


Рис. 6.1.6. Зависимость коэффициентов динамичности от коэффициента расстройки  $\gamma$

Зависимость *коэффициентов динамичности* (безразмерных амплитуд)  $\lambda$  и  $\lambda_1$  от безразмерной частоты, т.е. амплитудно-частотные характеристики даны на рис.6.1.6. Для систем с малым демпфированием ( $\epsilon \ll \omega$  и  $D \gg 1$ ) при  $p=\omega$  ( $\gamma=1$ ) характерно наличие больших амплитуд колебаний, называемое *резонансом*. Максимальные значения  $\lambda$  и  $\lambda_1$  соответствуют  $\gamma=(1-1/(2D^2))^{0,5}$  (рис.6.1.6, а) и  $\gamma=(1-1/(2D^2))^{-0,5}$  (рис.6.1.6, б) и равны  $\lambda_{max}=D(1-1/(2D^2))^{-0,5}$ . Таким образом, добротность характеризует высоту “резонансного пика” ( $\lambda_{max} \approx D$ ). При  $D < 2^{-0,5} \approx 0,71$  система не обладает резонансными свойствами.

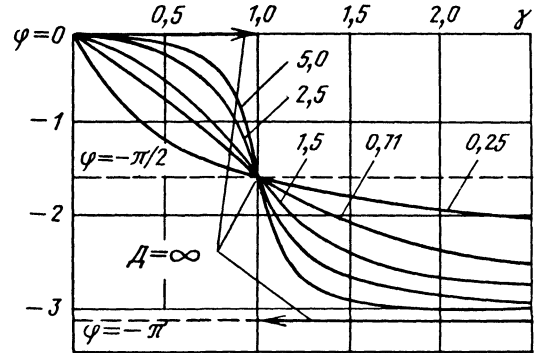


Рис. 6.1.7. Фазочастотная характеристика системы с одной степенью свободы

Фазочастотные характеристики (рис.6.1.7)  $\varphi(\gamma)$  показывают, что системы с малым демпфированием ( $D \gg 1$ ) “до резонанса” ( $p < \omega$ ) колеблются “в фазе” ( $\varphi \approx 0$ ), а “после резонанса” ( $p > \omega$ ) - в “противофазе” ( $\varphi \approx -\pi$ ) с возмущающим воздействием. В области резонанса колебания “запаздывают” на четверть периода ( $\varphi \approx -\pi/2$ ).

Графики (см. рис.6.1.6) подтверждают, что силы вязкого сопротивления оказывают заметное воздействие на коэффициент динамичности лишь в околорезонансной области. Это позволяет в удалении от резонанса не учитывать наличие вязкого трения и представлять установившиеся колебания в виде

$$q(t) = q_{ст} (1 - \gamma^2)^{-1} \sin pt \quad \text{или}$$

$$q(t) = q_\infty \gamma^2 (1 - \gamma^2)^{-1} \sin pt.$$

**Вынужденные колебания при произвольных возмущениях.** При произвольной обобщенной силе  $Q=Q(t)$  и  $\epsilon < \omega$  метод вариации произвольных постоянных при нулевых начальных условиях приводит к решению уравнения (6.1.7) в виде

$$q(t) = (1 / a\omega_1) \int_0^t Q(\tau) e^{-\epsilon(t-\tau)} \sin \omega_1(t - \tau) d\tau. \quad (6.1.18)$$

Для некоторых часто встречающихся на практике зависимостей  $Q=Q(t)$  формула (6.1.18) приводит к следующим результатам:

а) мгновенный импульс  $S$ , приложенный в момент времени  $\tau$ ,

$$q(t) = (S / a\omega_1) e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega_1(t - \tau) \quad (t > \tau);$$

б) постоянная сила  $Q_0$ , приложенная при  $t=0$ ,

$$q(t) = (Q_0 / c) \left( 1 - e^{-\varepsilon t} (\cos \omega_1 t + (\varepsilon / \omega_1) \sin \omega_1 t) \right);$$

в) сила, меняющаяся во времени по линейному закону  $Q(t)=At$ ,

$$q(t) = At / c - \left( A / c\omega_1^2 \right) \left( 2\varepsilon - e^{-\varepsilon t} (2\varepsilon \cos \omega_1 t - (\omega_1 - \varepsilon^2 / \omega_1) \sin \omega_1 t) \right);$$

г) сила, меняющаяся во времени по закону  $Q(t)=Q_0(1-e^{-\alpha t})$ ,

$$q(t) = (Q_0 / c) \left( 1 - e^{-\alpha t} \left( 1 + \nu^2 \right) / \left( 1 + \mu^2 \right) + e^{-\varepsilon t} \left( \frac{\nu^2 - \mu^2}{1 + \mu^2} \cos \omega_1 t + \left( \frac{1 + \nu^2}{1 + \mu^2} \mu - \nu \right) \sin \omega_1 t \right) \right),$$

где  $\mu=(\varepsilon-\alpha)/\omega_1$ ;  $\nu=\varepsilon/\omega_1$ .

**Вынужденные колебания при действии произвольного периодического возбуждения.** Применяют два способа получения частного решения уравнения (6.1.7) при обобщенной силе  $Q(t)=Q(t+T_B)$ , имеющей период изменения  $T_B$ .

**Способ гармонического анализа.** Обобщенную силу  $Q(t)$  представляют как сумму гармонических сил

$$Q(t) = F_0 + \sum_k F_k \sin(p_k t + \delta_k), \quad (6.1.19)$$

где

$$F_0 = (1 / T_B) \int_0^{T_B} Q(t) dt; \quad F_k = (a_k^2 + b_k^2)^{0,5};$$

$$\delta_k = \arctg(a_k / b_k); \quad p_k = kp; \quad p = 2\pi / T_B;$$

$$a_k = (2 / T_B) \int_0^{T_B} Q(t) \cos p_k t dt;$$

$$b_k = (2 / T_B) \int_0^{T_B} Q(t) \sin p_k t dt.$$

Тогда частное решение (6.1.7) будет суперпозицией гармонических колебаний

$$q(t) = (1 / c) \left( F_0 + \sum_k F_k \lambda_k \sin(p_k t + \delta_k + \varphi_k) \right),$$

$$\text{где } \lambda_k = \left( (1 - \gamma_k^2)^2 + (\gamma_k / D)^2 \right)^{-0,5};$$

$$\varphi_k = -\arctg \left( (\gamma_k / D) (1 - \gamma_k^2) \right); \quad \gamma_k = p_k / \omega.$$

**Способ Дюффинга,** который оказывается более удобным в случае плохой сходимости ряда (6.1.19).

Используя формулу (6.1.18), отыскивают в замкнутой форме периодическое решение  $q(t)=q(t+T_B)$ .

Вычисляют коэффициенты

$$C_0 = \int_0^{T_B} Q(t) e^{\varepsilon t} \cos \omega_1 t dt; \quad S_0 = \int_0^{T_B} Q(t) e^{\varepsilon t} \sin \omega_1 t dt$$

и решение для промежутка времени  $0 \leq t \leq T_B$  записывают в виде

$$q(t) = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\omega_1} \left( e^{\varepsilon T_B} \frac{C_0 \sin \omega_1(t+T_B) - S_0 \cos \omega_1(t+T_B)}{1 - 2e^{\varepsilon T_B} \cos \omega_1 T_B + e^{2\varepsilon T_B}} + \frac{S_0 \cos \omega_1 t - C_0 \sin \omega_1 t}{1 - 2e^{\varepsilon T_B} \cos \omega_1 T_B + e^{2\varepsilon T_B}} + \int_0^t Q(\tau) e^{\varepsilon \tau} \sin \omega_1(t-\tau) d\tau \right),$$

(6.1.20)

Решение представляет движение в промежутке времени  $[0, T_B]$ , и в него нельзя подставлять  $t > T_B$ . Однако, имея график  $q(t)$  для  $0 \leq t < T_B$ , можно вследствие периодичности смещать его в соседние промежутки  $[T_B, 2T_B]$ ,  $[2T_B, 3T_B]$  и т.д.

В частном случае действия мгновенных периодических импульсов  $S$  решение (6.1.20) имеет вид [67]

$$q(t) = \frac{S e^{\varepsilon(T_B - t)} \left( \sin \omega_1(T_B - t) + e^{\varepsilon T_B} \sin \omega_1 t \right)}{\omega_1 \left( 1 - 2e^{\varepsilon T_B} \cos \omega_1 T_B + e^{2\varepsilon T_B} \right)}.$$

### 6.1.3. КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ БЕЗ УЧЕТА СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

**Свободные (собственные) колебания.** Уравнения колебаний в матричной форме согласно (6.1.4) при  $\mathbf{B}=0$  и  $\mathbf{Q}(t)=0$  имеют вид

$$\Lambda \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (6.1.21)$$

Частное решение (6.1.21) вида

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{v} \sin(\omega t + \alpha) \quad (6.1.22)$$

описывает *главное колебание* всей системы с частотой  $\omega$  и начальной фазой  $\alpha$ . Вектор-столбец  $\mathbf{v}$  характеризует форму главного колебания, т.е. распределение амплитуд колебаний по точкам системы.

Подстановка (6.1.22) в (6.1.21) приводит к матричному уравнению

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (6.1.23)$$

которое имеет нетривиальные решения  $\mathbf{v}_k$ , только если величины  $\omega_k^2$  равны собственным значениям матрицы  $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})$ , определяемым из характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{E}) = 0. \quad (6.1.24)$$

Последовательность значений  $\omega_k$ , расположенных в порядке их возрастания, называют *спектром собственных частот*. Формы главных колебаний  $\mathbf{v}_k$  являются собственными векторами матрицы  $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})$ , которые определяют с точностью до произвольного множителя. Обычно формы главных колебаний нормируют, относив компоненты вектора  $\mathbf{v}_k$  к первой или  $k$ -й компоненте:

$$\eta_{jk} = v_{jk} / v_{1k} \quad \text{или} \quad \eta_{jk} = v_{jk} / v_{kk} \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Формы главных колебаний удовлетворяют условиям ортогональности с весом матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$

$$\eta_k^T \mathbf{A} \eta_r = 0; \quad \eta_k^T \mathbf{C} \eta_r = 0 \quad (k \neq r). \quad (6.1.25)$$

Таким образом, механическая система с  $n$  степенями свободы может иметь  $n$  главных колебаний, характеризующихся формами  $\eta_k$  и частотами  $\omega_k$ :

$$\mathbf{q}_k = A_k \eta_k \sin(\omega_k t + \alpha_k), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где  $A_k$  и  $\alpha_k$  - произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

Общее решение (6.1.21) представляет собой сумму главных колебаний

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{q}_k(t) = \sum_{k=1}^n A_k \eta_k \sin(\omega_k t + \alpha_k)$$

или в развернутой форме

$$q_j(t) = \sum_{k=1}^n A_k \eta_{jk} \sin(\omega_k t + \alpha_k) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

В общем случае при произвольных начальных условиях свободные колебания представляют собой полигармонический процесс. При специальном подборе начальных условий в системе могут быть реализованы и гармонические (главные) колебания с любой из собственных частот  $\omega_k$ .

**Нормальные координаты.** Сформируем матрицу  $\mathbf{H}$ , столбцами которой являются векторы  $\eta_k$  форм главных колебаний системы:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \dots & \eta_{1n} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \dots & \eta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & \dots & \eta_{nn} \end{pmatrix} \quad (6.1.26)$$

Введем нормальные (главные) координаты  $\theta_k(t)$ , линейно связанные с "обычными" обобщенными координатами соотношением

$$\mathbf{q} = \mathbf{H}\theta; \quad \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T. \quad (6.1.27)$$

Подстановка (6.1.27) в (6.1.21) приводит к матричному уравнению

$$\ddot{\theta} + \left( \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{H} \right) \theta = \mathbf{0}. \quad (6.1.28)$$

Поскольку матрица  $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})$  симметрическая, преобразование подобия при помощи матрицы  $\mathbf{H}$  приводит ее к диагональному виду

$$\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{H} = \text{diag}(\omega_k^2),$$

где  $\text{diag}(\omega_k^2)$  - диагональная матрица с элементами  $\omega_k^2$ , вследствие чего матричное уравнение (6.1.28) эквивалентно системе уравнений

$$\ddot{\theta}_k + \omega_k^2 \theta_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (6.1.29)$$

Таким образом, совокупность дифференциальных уравнений колебаний механической системы с  $n$  степенями свободы в нормальных координатах распадается на  $n$  не связанных между собой уравнений, каждое из которых описывает одно из главных колебаний.

Выражения для кинетической и потенциальной энергий, являющиеся квадратичными формами обобщенных скоростей и координат, можно записать в матричной форме следующим образом:

$$T = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} / 2 = \dot{\theta}^T \left( \mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H} \right) \dot{\theta} / 2;$$

$$U = \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} / 2 = \theta^T \left( \mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H} \right) \theta / 2.$$

Согласно (6.1.25) матрицы  $(\mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H})$  и  $(\mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H})$  являются диагональными. Следовательно, выражения кинетической и потенциальной энергии в нормальных координатах не содержат произведений различных обобщенных скоростей и координат.

Систему уравнений (6.1.29) можно с учетом (6.1.25) получить другим способом, при котором отсутствуют трудоемкие вычисления обратных матриц  $\mathbf{A}^{-1}$  и  $\mathbf{H}^{-1}$ :

$$\left( \mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H} \right) \ddot{\theta} + \left( \mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H} \right) \theta = \mathbf{0},$$

что приводит к системе дифференциальных уравнений

$$a_k \ddot{\theta}_k + c_k \theta_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

эквивалентной (6.1.29), где  $a_k$  и  $c_k$  - диагональные элементы матриц  $(\mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H})$  и  $(\mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H})$ . Из (6.1.29) следует, что колебания каждой из нормальных координат  $\theta_k$  являются гармоническими при любых начальных условиях.

Очевидно, что с учетом ортогональности векторов форм квадраты собственных частот  $\omega_k^2 = c_k / a_k$  и собственные формы  $\eta_k$  или  $\mathbf{v}_k$  связаны между собой тождественным соотношением



$$\omega_k^2 = \frac{\boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{C} \boldsymbol{\eta}_k}{\boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{A} \boldsymbol{\eta}_k} = \frac{\mathbf{v}_k^T \mathbf{C} \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k^T \mathbf{A} \mathbf{v}_k},$$

которое называют формулой Рэлея.

С точностью до 1/2 числитель формулы Рэлея равен максимальному во времени значению потенциальной энергии системы при ее главном колебании по  $k$ -му тону, а знаменатель - соответственно кинетической энергии.

С формулой Рэлея связаны вариационные принципы для собственных частот и форм колебаний, такие, как вариационный принцип Рэлея, расширенный вариационный принцип Рэлея, минимальный вариационный принцип Куранта [20], позволяющие построить алгоритм приближенного вычисления собственных частот и форм колебаний при больших значениях  $n$  - числа степеней свободы.

Кроме того, они позволяют также оценить влияние некоторых изменений условий задачи (изменение инерционных и квазиупругих параметров, наложение дополнительных связей) на собственные частоты системы.

Однако развитие вычислительной техники несколько снизило актуальность применения вариационных принципов для систем с конечным числом степеней свободы.

При нарушении симметричности матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$  систему также можно привести к не связанному между собой уравнениям с использованием условий биортогональности [87].

**Пример 4.** Определить собственные частоты и формы колебаний системы, рассмотренной в примере 2, без учета демпфирования (см. рис. 6.1.2).

Положив  $\mu$  и  $F(t)$  равными нулю, получим  $m\ddot{x}_1 + 2cx_1 - cx_2 = 0;$

$$(4m/3)\ddot{x}_2 - cx_1 + 2cx_2 - cx_3 = 0;$$

$$m\ddot{x}_3 - cx_2 + 2cx_3 = 0.$$

Задав  $x_j(t)$  в виде

$$x_j(t) = v_j \sin(\omega t + \alpha) \quad (j = 1, 2, 3),$$

приходим к характеристической системе однородных линейных уравнений относительно  $v_j$ :

$$(2c - m\omega^2)v_1 - cv_2 = 0;$$

$$-cv_1 + (2c - (4m/3)\omega^2)v_2 - cv_3 = 0;$$

$$-cv_2 + (2c - m\omega^2)v_3 = 0.$$

Приравняв к нулю определитель системы, получим квадраты собственных частот  $\omega_k^2$

$$\omega_1^2 = c/2m; \quad \omega_2^2 = 2c/m; \quad \omega_3^2 = 3c/m.$$

Подставив поочередно найденные значения  $\omega_k^2$  в характеристическую систему, найдем соот-

ношения между компонентами собственных векторов

$$\eta_{21} = v_{21}/v_{11} = 3/2; \quad \eta_{22} = v_{22}/v_{12} = 0;$$

$$\eta_{23} = v_{23}/v_{13} = -1;$$

$$\eta_{31} = v_{31}/v_{11} = 1; \quad \eta_{32} = v_{32}/v_{12} = -1;$$

$$\eta_{33} = v_{33}/v_{13} = 1,$$

а с учетом нормирования и векторы  $\boldsymbol{\eta}_k$  форм главных колебаний

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эпюры распределения амплитуд трех главных колебаний, определяемые векторами форм  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ , представлены на рис.6.1.2, *в-д*.

**Вынужденные установившиеся колебания.**

Уравнения вынужденных колебаний в соответствии с (6.1.4) имеют вид

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(t). \quad (6.1.30)$$

В случае гармонического возбуждения  $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_0 \sin pt$  вынужденные колебания можно представить в виде

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{D} \sin pt,$$

где  $\mathbf{D}$  - искомый вектор формы вынужденных колебаний.

Тогда задача о вынужденных колебаниях сводится к решению неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

$$(\mathbf{C} - p^2\mathbf{A})\mathbf{D} = \mathbf{Q}_0. \quad (6.1.31)$$

Единственное решение (6.1.31) существует при условии

$$\det(\mathbf{C} - p^2\mathbf{A}) \neq 0,$$

тогда вектор формы вынужденных колебаний можно определить по формуле

$$\mathbf{D} = (\mathbf{C} - p^2\mathbf{A})^{-1}\mathbf{Q}_0.$$

Если частота возбуждения  $p$  будет стремиться к одной из собственных частот  $\omega_k$ , определитель  $|\mathbf{C} - p^2\mathbf{A}|$  будет стремиться к нулю, а элементы матриц  $(\mathbf{C} - p^2\mathbf{A})^{-1}$  и  $\mathbf{D}$  - к бесконечности. Это означает, что система может иметь резонанс на каждой из собственных частот  $\omega_k$ .

**Пример 5.** Исследовать вынужденные колебания трехмассовой системы, рассмотренной в примере 2, без учета демпфирования, полагая  $F(t) = F_0 \sin pt$ .

Дифференциальные уравнения колебаний при  $\mu=0$  имеют вид

$$m\ddot{x}_1 + 2cx_1 - cx_2 = F_0 \sin pt;$$

$$(4m/3)\ddot{x}_2 - cx_1 + 2cx_2 - cx_3 = 0;$$

$$m\ddot{x}_3 - cx_2 + 2cx_3 = 0.$$

Задав  $x_j(t)$  в виде

$$x_j(t) = D_j \sin pt \quad (j = 1, 2, 3),$$

получим неоднородную алгебраическую систему

$$(2c - mp^2)D_1 - cD_2 = F_0;$$

$$-cD_1 + (2c - (4m/3)p^2)D_2 - cD_3 = 0;$$

$$-cD_2 + (2c - mp^2)D_3 = 0,$$

откуда

$$D_1 = \frac{F_0}{m} \frac{(0,8486c/m - p^2)(2,651c/m - p^2)}{(c/2m - p^2)(2c/m - p^2)(3c/m - p^2)};$$

$$D_2 = \frac{3F_0}{4m} \frac{c/m}{(c/2m - p^2)(3c/m - p^2)};$$

$$D_3 = \frac{3F_0}{4m} \frac{(c/m)^2}{(c/2m - p^2)(2c/m - p^2)(3c/m - p^2)}.$$

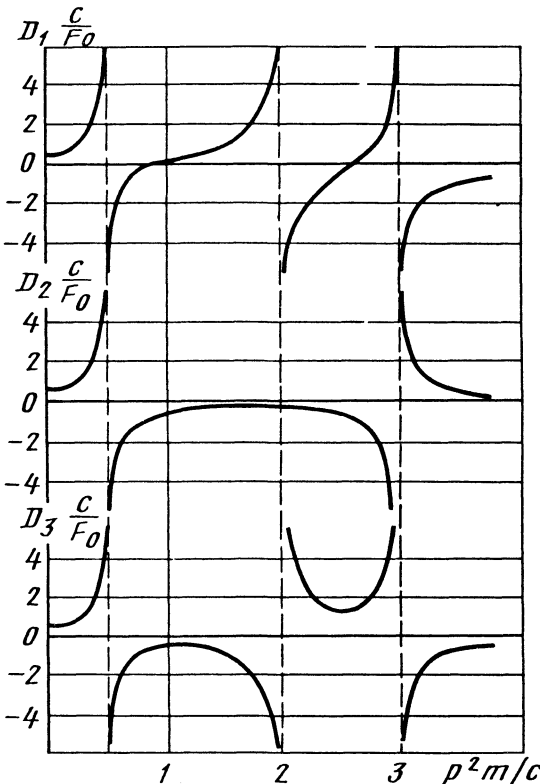


Рис. 6.1.8. Зависимость коэффициентов  $D$  от  $p^2$  для трехмассовой системы при вынужденных колебаниях

Из выражений для  $D_j$  следует, что первый груз не колеблется, если  $p^2=0,8486c/m$  или  $2,6514c/m$ , что соответствует равенству  $p$  собственным частотам колебаний усеченной двух-степенной системы, получаемой из исходной, если закрепить неподвижно первый груз ( $x_1(t)=0$ ). Такое явление называют *антirezонансом* и используют при создании динамических гасителей колебаний. Координата  $x_2(t)$  при резонансной частоте  $p=\omega_2=(2c/m)^{0,5}$  конечна, поскольку собственная форма колебаний, соответствующая частоте  $\omega_2$ , имеет "узел" на средней массе ( $\eta_{22}=0$ ). Зависимость  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$  от  $p^2$  показана на рис. 6.1.8.

**Использование нормальных координат.** В этом случае на зависимость возмущения от времени не накладывается каких-либо ограничений.

Применив подстановку (6.1.27) и умножив уравнение (6.1.30) слева на матрицу  $\mathbf{H}^T$ , получим

$$\left(\mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H}\right) \ddot{\theta} + \left(\mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H}\right) \dot{\theta} = \mathbf{H}^T \mathbf{Q}(t),$$

или, в развернутой форме,

$$a_k \ddot{\theta}_k + c_k \dot{\theta}_k = \sum_{j=1}^n \eta_{kj} Q_j(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \tag{6.1.32}$$

где  $a_k$ ,  $c_k$  - элементы диагональных матриц  $(\mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H})$  и  $(\mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H})$ .

Решение не связанных уравнений вида (6.1.32) при различных зависимостях  $Q_j(t)$  от времени рассмотрено в п. 6.1.2.

Недостатком нормальных координат является, как правило, их затруднительная физическая интерпретация. Поэтому, получив решения (6.1.32), необходимо осуществить переход от нормальных координат к исходным обобщенным координатам, используя преобразование (6.1.27).

#### 6.1.4. КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

**Свободные колебания.** Уравнения свободных колебаний в матричной форме можно получить из (6.1.4):

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0. \tag{6.1.33}$$

Решение (6.1.33) можно искать в виде

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{v} e^{\lambda t},$$

где  $\mathbf{v}$  - комплексный числовой вектор.

Система с  $n$  степенями свободы будет иметь  $2n$  характеристических показателей  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$ , являющихся корнями характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C}) = 0. \tag{6.1.34}$$

Поскольку коэффициенты уравнения (6.1.34) действительны, то при сделанных в п.

6.1.1 при выводе уравнений малых колебаний допущения характеристические показатели при малом вязком сопротивлении будут комплексно сопряженными с отрицательными вещественными частями. В случае большого сопротивления возможно появление действительных отрицательных показателей, соответствующих апериодическим движениям.

Представив характеристические показатели в виде

$$\lambda_k = -\varepsilon_k + i\omega_{1k}; \lambda_{n+k} = -\varepsilon_k - i\omega_{1k},$$

где  $\varepsilon_k \geq 0$ ;  $\omega_{1k} \geq 0$  - коэффициенты демпфирования и условные частоты диссипативной системы, получим решение (6.1.33) в виде

$$q(t) = \sum_{k=1}^n e^{-\varepsilon_k t} (C_{1k} \xi_k \cos \omega_{1k} t + C_{2k} \zeta_k \sin \omega_{1k} t),$$

где  $C_{1k}, C_{2k}$  - подлежащие определению из начальных условий действительные произвольные постоянные;  $\xi_k, \zeta_k$  - действительные числовые векторы.

Подобное решение задачи о свободных колебаниях диссипативной системы связано с большим объемом вычислений, не адекватным получаемым результатам, и требуется применение вычислительной техники даже в случаях относительно простых задач.

**Использование нормальных координат.** Из алгебры известно, что не существует такого линейного преобразования, которое одновременно приводило бы к диагональному виду три матрицы. Поэтому разделение системы (6.1.33) на независимые уравнения возможно, если матрицы  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  линейно зависимы, а именно  $\mathbf{B} = 2\varepsilon\mathbf{A} + 2\alpha\mathbf{C}$ . В этом случае нормальные координаты совпадают с нормальными координатами не диссипативной системы, а преобразование (6.1.27) после умножения (6.1.33) слева на матрицу  $\mathbf{H}^T$  (6.1.26) приводит к системе независимых уравнений

$$\ddot{\theta}_k + 2(\varepsilon + \alpha\omega_k^2)\dot{\theta}_k + \omega_k^2\theta_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

решение которых описано в п. 6.1.2. В случае "внешнего" трения ( $\alpha=0$ ) затухание характеризуется одинаковой для всех главных колебаний постоянной времени  $\tau_0 = 1/\varepsilon$ . При "внутреннем" трении ( $\varepsilon=0$ ) декременты главных колебаний почти пропорциональны собственным частотам, вследствие чего высокочастотные составляющие собственных колебаний затухают чрезвычайно быстро.

В случае малого вязкого сопротивления при произвольной матрице  $\mathbf{B}$  можно в первом приближении считать, что трение не влияет на формы собственных колебаний и пренебречь недиагональными элементами преобразованной матрицы  $(\mathbf{H}^T\mathbf{B}\mathbf{H})$ . Этот прием может быть оправдан и тем, что, как правило, отсутствует достаточно надежная информация о диссипативных силах.

Обратный переход к исходным координатам  $q(t)$  осуществляется через (6.1.27).

**Вынужденные колебания.** Решение задачи о вынужденных колебаниях в диссипативных системах с конечным числом степеней свободы может быть получено с использованием нормальных координат недиссипативной системы. В случае, если матрица  $\mathbf{B}$  является линейной комбинацией матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$ , это решение будет точным. При произвольной матрице  $\mathbf{B}$  придется пренебречь, как указано выше, недиагональными элементами преобразованной матрицы демпфирования.

Применив подстановку (6.1.27) и умножив уравнение (6.1.4) слева на матрицу  $\mathbf{H}^T$  (6.1.26), получим

$$a_k \ddot{\theta}_k + b_k \dot{\theta}_k + c_k \theta_k = \sum_{j=1}^n \eta_{kj} Q_j(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где  $a_k, b_k, c_k$  - диагональные элементы матриц  $(\mathbf{H}^T\mathbf{A}\mathbf{H}), (\mathbf{H}^T\mathbf{B}\mathbf{H})$  и  $(\mathbf{H}^T\mathbf{C}\mathbf{H})$ .

Решение полученных уравнений при любых  $Q_j(t)$  описано в п. 6.1.2. Для перехода к исходным координатам используют преобразование (6.1.27).

**Пример 6.** Исследовать вынужденные колебания трехмассовой системы, представленной на рис. 6.1.2, полагая  $F(t) = F_0 \sin pt$  и  $\mu = 2\beta(cm)^{0.5}$ .

Дифференциальные уравнения колебаний получены в примере 2. Сопоставив матрицы  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ , убеждаемся, что имеет место "внутреннее" демпфирование. Матрицу  $\mathbf{H}$  составим по столбцам из векторов собственных форм (см. пример 4):

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3/2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введя подстановку  $x(t) = \mathbf{H}\theta(t)$  и домножив уравнение (6.1.4) слева на  $\mathbf{H}^T$ , получим в развернутой форме

$$5m\ddot{\theta}_1 + (5\mu/2)\dot{\theta}_1 + (5c/2)\theta_1 = F_0 \sin pt;$$

$$2m\ddot{\theta}_2 + 4\mu\dot{\theta}_2 + 4c\theta_2 = F_0 \sin pt;$$

$$(10m/3)\ddot{\theta}_3 + 10\mu\dot{\theta}_3 + 10c\theta_3 = F_0 \sin pt$$

или, поделив на коэффициенты при  $\ddot{\theta}_k$ ,

$$\ddot{\theta}_1 + 2\varepsilon_1\dot{\theta}_1 + \omega_1^2\theta_1 = f_1 \sin pt;$$

$$\ddot{\theta}_2 + 2\varepsilon_2\dot{\theta}_2 + \omega_2^2\theta_2 = f_2 \sin pt;$$

$$\ddot{\theta}_3 + 2\varepsilon_3\dot{\theta}_3 + \omega_3^2\theta_3 = f_3 \sin pt,$$

где  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  - собственные частоты системы, найденные в примере 4,  $\varepsilon_1=2^{0,5}\beta\omega_1$ ,  $\varepsilon_2=2^{0,5}\beta\omega_2$ ,  $\varepsilon_3=3^{0,5}\beta\omega_3$ ,  $f_1=0,2F_0/m$ ,  $f_2=0,5F_0/m$ ,  $f_3=0,3F_0/m$ .

Частные решения полученных уравнений, соответствующие установившимся вынужденным колебаниям, имеют вид

$$\theta_k(t) = f_k \left( (\omega_k^2 - p^2)^2 + (2\varepsilon_k p)^2 \right)^{0,5} \sin(pt + \varphi_k);$$

$$\varphi_k = -\arctg \left( 2\varepsilon_k p / (\omega_k^2 - p^2) \right);$$

В соответствии со структурой матрицы **H** решение для исходных координат  $x_j$  запишем в виде

$$x_1 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3;$$

$$x_2 = (3/2)\theta_1 - \theta_3;$$

$$x_3 = \theta_1 - \theta_2 + \theta_3.$$

6.1.5. ДИНАМИЧЕСКИЙ ГАСИТЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ

Иногда для гашения колебаний в системах используют явление антирезонанса, отмеченное при решении примера 5 [8, 52].

Пусть имеется основная колебательная система, состоящая из основной массы  $m_1$ , скрепленной с пружиной жесткости  $c_1$  и находящейся под воздействием силы, изменяющейся во времени по гармоническому закону  $F(t) = F_0 \sin pt$ . Динамическим гасителем называют дополнительную малую массу  $m_2$ , связанную с основной массой через пружину жесткости  $c_2$  (рис. 6.1.9, а).

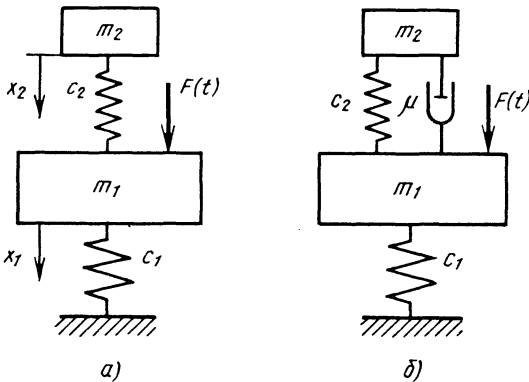


Рис. 6.1.9. Схема динамических гасителей колебаний

Дифференциальные уравнения движения системы масса - гаситель имеют вид

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 = F_0 \sin pt; \tag{6.1.35}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 x_1 + c_2 x_2 = 0,$$

где  $x_1, x_2$  - смещения массы и гасителя, отсчитываемые от положения равновесия.

Задав частное решение (6.1.35) в виде

$$x_1(t) = D_1 \sin pt; \quad x_2(t) = D_2 \sin pt,$$

получим формулы амплитуд вынужденных колебаний:

$$D_1 = \frac{F_0 (c_1 / m_1)(c_2 / m_2 - p^2)}{c_1 (\omega_1^2 - p^2)(\omega_2^2 - p^2)}; \tag{6.1.36}$$

$$D_2 = \frac{F_0 (c_1 / m_1)(c_2 / m_2)}{c_1 (\omega_1^2 - p^2)(\omega_2^2 - p^2)},$$

где  $\omega_1, \omega_2$  - собственные частоты двухстепенной системы.

Очевидно, что при  $p_0=(c_2/m_2)^{0,5}$ , т.е. при совпадении частоты возмущающей силы с *парциальной частотой* гасителя,  $D_1=0$ , т.е. основная система становится неподвижной. При этом  $D_2=-F_0/c_2$ , а упругая сила  $c_2 x_2$ , возникающая в пружине гасителя, компенсирует воздействие возмущающей силы на основную массу.

Введем следующие обозначения:  $\omega_0=(c_1/m_1)^{0,5}$  - частота основной системы;  $\Omega=(c_2/m_2)^{0,5}$  - частота гасителя;  $\beta=m_2/m_1$  - отношение масс гасителя и основной системы;  $D_{ст}=F_0/c_1$  - статическое смещение основной массы;  $\delta=\Omega/\omega_0$ ;  $\gamma=p/\omega_0$  - безразмерные частоты гасителя и возмущающей силы;  $u_1=|D_1/D_{ст}|$ ;  $u_2=|D_2/D_{ст}|$  - безразмерные амплитуды колебаний основной массы и гасителя.

Тогда из (6.1.36) получим

$$u_1 = \left| (\delta^2 - \gamma^2) / \left( (1 + \beta\delta^2 - \gamma^2)(\delta^2 - \gamma^2) - \beta\delta^4 \right) \right|;$$

$$u_2 = \left| \delta^2 / \left( (1 + \beta\delta^2 - \gamma^2)(\delta^2 - \gamma^2) - \beta\delta^4 \right) \right|.$$

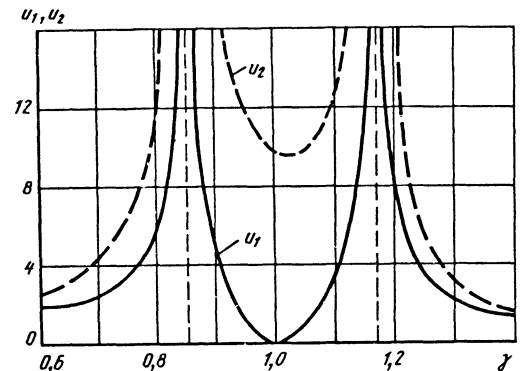


Рис. 6.1.10. Амплитудно-частотная характеристика динамического гасителя колебаний

Амплитудно-частотные характеристики системы при  $\beta=0,1$ ;  $\delta=1$  представлены на рис. 6.1.10. Наряду с гашением колебаний основной массы на частоте гасителя имеются два резонанса на собственных частотах двухмассовой системы  $\omega_1=0,854\omega_0$  и  $\omega_2=1,17\omega_0$ , что ограничивает использование подобных гасителей только системами с ограниченным спектральным составом.

Устранить резонансные колебания с большими амплитудами на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  оказывается возможным, если ввести в конструкцию динамического гасителя трение. Динамический гаситель с трением представляет собой дополнительную массу  $m_2$ , соединенную с основной системой пружиной жесткости  $c_2$  и демпфером с коэффициентом вязкого сопротивления  $\mu$  (см. рис. 6.1.9, б).

При наличии демпфера полное гашение колебаний основной системы становится невозможным, поскольку в случае останова основной массы гаситель оказался бы предоставлен самому себе, его движение стало бы затухающим и он не смог бы компенсировать воздействие возмущающей силы на основную систему. Однако наличие демпфера позволяет при рационально подобранном гасителе получить ограниченную амплитуду колебаний основной системы во всем диапазоне частот.

Используя введенные выше безразмерные параметры  $\beta, \delta, \gamma$  и добавив к ним безразмерный коэффициент вязкого сопротивления  $\eta = \mu/2m_2\omega_0$ , запишем выражения для  $u_1$  и  $u_2$  [9, 83]:

$$u_1 = \frac{\sqrt{(\delta^2 - \gamma^2)^2 + 4\eta^2 \gamma^2}}{\sqrt{((1 - \gamma^2)(\delta^2 - \gamma^2) - \beta\delta^2 \gamma^2)^2 + 4\eta^2 \gamma^2 (1 - \gamma^2 - \beta\gamma^2)^2}};$$

$$u_2 = \frac{\sqrt{\delta^2 + 4\eta^2 \gamma^2}}{\sqrt{((1 - \gamma^2)(\delta^2 - \gamma^2) - \beta\delta^2 \gamma^2)^2 + 4\eta^2 \gamma^2 (1 - \gamma^2 - \beta\gamma^2)^2}}.$$

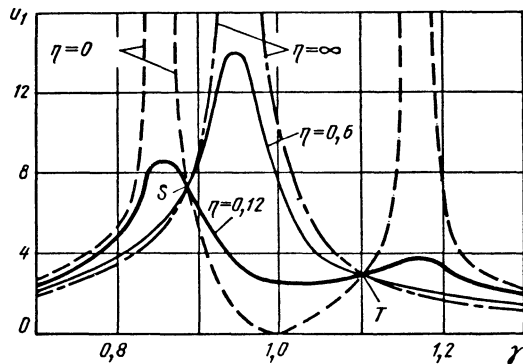


Рис. 6.1.11. Амплитудно-частотные характеристики при различных коэффициентах вязкого сопротивления

Эффективность работы гасителя зависит от рационального выбора параметров  $\beta, \delta, \eta$ . Наибольший интерес представляет зависимость  $u_1$  от  $\eta$ . На рис. 6.1.11 представлены амплитудно-частотные характеристики  $u_1(\gamma)$  при  $\beta=0,1, \delta=1$ , построенные для различных значений  $\eta$ .

При  $\eta=0$  характеристика имеет два резонансных пика и тождественна представленной на рис. 6.1.10.

При  $\eta \rightarrow \infty$  относительное движение гасителя становится невозможным, система как бы трансформируется в одноступенную с резонансом на частоте  $\omega_{рез} = (1 + \beta)^{-0.5} \omega_0 = 0,953 \omega_0$  - рассеяния энергии в демпфере не происходит.

При любом значении  $\eta$  амплитудно-частотные кривые проходят через точки  $S$  и  $T$ .

Параметры гасителя считают оптимальными, если точки  $S$  и  $T$  лежат на одной высоте, а коэффициент демпфирования выбран так, чтобы в одной из этих точек амплитудно-частотная кривая имела максимум (при этом и второй максимум весьма незначительно превышает ординаты точек  $S$  и  $T$ ).

Чтобы выполнить первое условие, необходимо параметры  $m_2$  и  $c_2$  гасителя подобрать так, чтобы  $\delta = (1 + \beta)^{-1}$ . При этом ординаты точек  $S$  и  $T$  будут равны  $u_1 = (2/\beta + 1)^{0.5}$ .

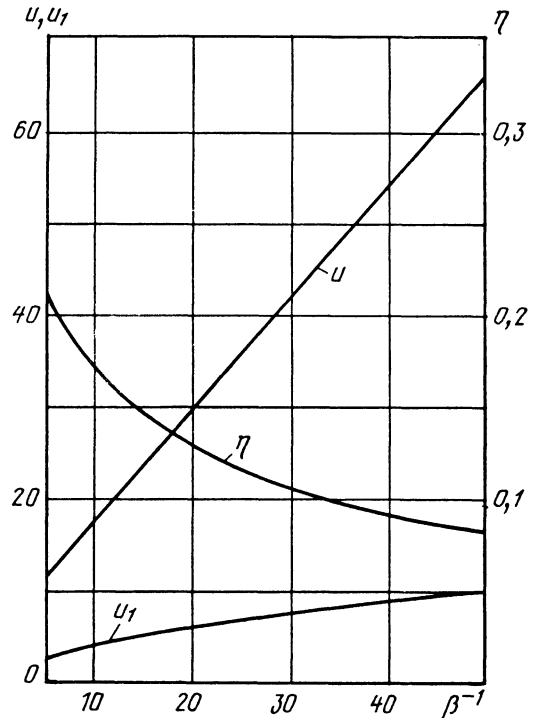


Рис. 6.1.12. Зависимости  $\eta, u, u_1$  от  $\beta^{-1}$

Определение оптимального значения  $\eta$  более сложно. При его выборе можно руководствоваться рис. 6.1.12, где приведена зависимость оптимального  $\eta$  от отношения  $m_1/m_2 = \beta^{-1}$ , полученная с помощью ЭВМ. Здесь же для оптимально подобранного гасителя даны кривые максимального значения  $u_1$  и максимального значения  $u$  - относительного перемещения гасителя по отношению к основной массе (максимальное растяжение пружины), также полученные с помощью ЭВМ.

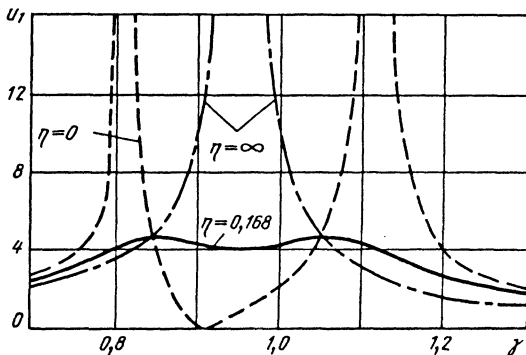


Рис. 6.1.13. Амплитудно-частотная характеристика при оптимальном коэффициенте вязкого сопротивления

На рис. 6.1.13 представлена амплитудно-частотная кривая для основной массы при оптимально подобранном гасителе для случая  $\beta=0,1$ . Значения параметров  $\delta=0,9091$ ,  $\eta=0,168$ ; максимальная амплитуда  $u_1=4,59$ .

В двигателях внутреннего сгорания используют динамические гасители, частота настройки которых меняется автоматически при изменении частоты возмущения. Устройство таких гасителей основано на том, что в поле центробежных сил собственная частота маятника пропорциональна угловой скорости вращения.

Подобрав соответственно радиус качания маятника, подвешенного к коленчатому валу, можно добиться, чтобы собственная частота колебаний маятника была в 2, 3, ...,  $n$  раз больше скорости вращения. В этом случае гаситель будет устранять крутильные колебания, вызываемые 2, 3, ...,  $n$ -й гармониками возмущающих моментов.

Одна из конструкций маятникового гасителя изображена на рис. 6.1.14. В качестве маятника используют противовес  $l$ , укрепленный с помощью роликов 2 на щеке 3 коленчатого вала. Диаметр роликов  $d$  меньше, чем диаметр  $D$  сверлений в щеке и противовесе. Благодаря этому все точки противовеса могут перемещаться относительно коленчатого вала по дугам равных радиусов  $l=D-d$ .

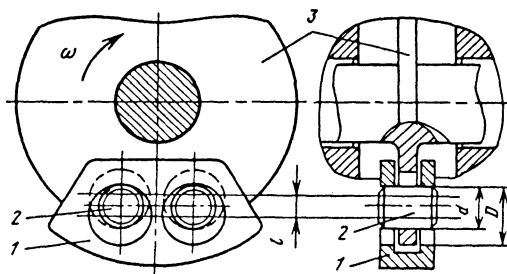


Рис. 6.1.14. Схема маятникового гасителя крутильных колебаний

Частота собственных колебаний гасителя

$$\Omega = \omega(R/l-1)^{0,5},$$

где  $R$  - расстояние центра тяжести гасителя от оси вала;  $\omega$  - угловая скорость вращения вала.

Для того чтобы гаситель был настроен на  $k$ -ю гармонику, необходимо так подобрать его размеры, чтобы

$$(R/l-1)^{0,5} = k.$$

Массу противовеса подбирают из условия, чтобы при допустимых амплитудах качания создаваемый им момент равнялся  $k$ -й гармонике возмущающего момента.

## Глава 6.2

### КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

#### 6.2.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

**Предварительные замечания.** Под упругими системами с распределенными параметрами понимают упругие механические системы с непрерывно распределенными массой и жесткостью. Они имеют бесконечное число степеней свободы, их динамическое поведение выражают дифференциальными уравнениями в частных производных. При решении задач динамики для распределенных упругих систем, кроме начальных условий, требуется задавать краевые (граничные) условия.

Часто задача динамики сводится к задаче определения дополнительных динамических нагрузок на конструкции машин в установившихся режимах. В таких случаях рассматриваются только частные решения дифференциальных уравнений, для которых начальные условия не имеют значения. Начальные условия не имеют значения также при определении форм и частот свободных колебаний. Граничные же условия всегда существенны.

**Методы составления дифференциальных уравнений колебаний упругих систем.** Они изложены в разделе 1 данного тома. При выводе уравнений динамики надо согласно принципу Даламбера к действующим силам добавить распределенные силы инерции. В случаях, когда упругая система взаимодействует с упругоподвешенными сосредоточенными массами, целесообразно применять метод уравнений Лагранжа II рода. С этой целью надо составить выражения для кинетической энергии системы, потенциальной энергии деформаций и выражения для обобщенных сил, затем с помощью уравнений Лагранжа II рода получить дифференциальные уравнения колебаний. Метод уравнений Лагранжа удобен для получения дифференциальных уравнений вынужденных колебаний, когда формы свободных колебаний известны.

**Поперечные колебания струны.** Струна - тонкое упругое одномерное тело с пренебрежимо малой жесткостью на изгиб. Плоские колебания струны длины  $l$ , растянутой силой  $N$  и закрепленной по концам, выражаются уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( N \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t), \quad (6.2.1)$$

где  $w$  - отклонение струны в направлении, перпендикулярном к оси  $Ox$ ;  $\rho$  - плотность материала струны;  $F$  - площадь поперечного сечения;  $q$  - интенсивность нагрузки, действующей в плоскости колебаний.

Краевые (граничные) условия

$$w(0, t) = w(l, t) = 0. \quad (6.2.2)$$

При  $t=0$  должны выполняться начальные условия

$$w(x, 0) = f(x); \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = v(x). \quad (6.2.3)$$

**Продольные колебания прямого стержня.**

Под стержнем понимают упругое тело, у которого два размера малы по сравнению с третьим. Пусть координатная ось  $Ox$  направлена вдоль оси стержня. На основании гипотезы плоских сечений все точки, лежащие в поперечном сечении, перпендикулярном к оси стержня, имеют одинаковые перемещения  $u = u(x, t)$ . Выражения для потенциальной энергии деформаций и кинетической энергии имеют вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EF \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx; \quad T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (6.2.4)$$

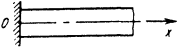
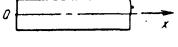
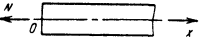
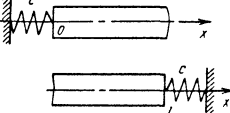
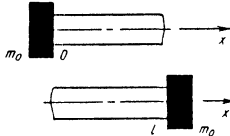
где  $EF(x)$  - жесткость на растяжение-сжатие;  $\rho$  - плотность материала.

Уравнение продольных колебаний стержня приводится к виду

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(x, t). \quad (6.2.5)$$

Различные краевые условия представлены в табл.6.2.1. Начальные условия записываются аналогично (6.2.3).

6.2.1. Основные типы краевых условий для продольных колебаний стержней

Схема	Тип закрепления	Условия при $x=0$
	Заделка	$u=0$
	Свободный конец	$EF \frac{\partial u}{\partial x} = 0$
	На конце приложена сила	$EF \frac{\partial u}{\partial x} = N$
	Упругое закрепление	$EF \frac{\partial u}{\partial x} - cu = 0; \quad EF \frac{\partial u}{\partial x} + cu = 0$ (при $x=l$ )
	На конце закреплена масса $m_0$	$EF \frac{\partial u}{\partial x} = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad EF \frac{\partial u}{\partial x} = -m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (при $x=l$ )

**Крутильные колебания прямого призматического стержня.** Потенциальную и кинетическую энергию определяют по формулам

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l GJ_k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx; \quad T = \frac{1}{2} \int_0^l I_0 \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (6.2.6)$$

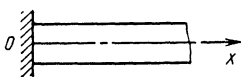
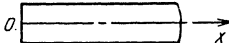
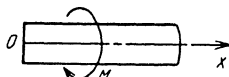
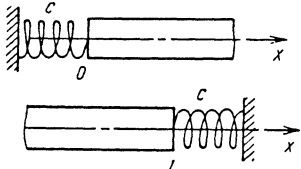
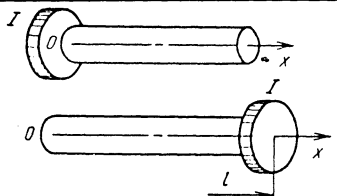
Уравнение крутильных колебаний имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( GJ_k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - I_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \mu(x, t) = 0, \quad (6.2.7)$$

где  $GJ_k$  - жесткость стержня на кручение;  $I_0(x)$  - погонный момент инерции относительно продольной оси стержня;  $\mu(x, t)$  - интенсивность внешней нагрузки;  $\theta(x, t)$  - угол закручивания.

Основные типы граничных условий сведены в табл. 6.2.2.

**6.2.2. Основные типы краевых условий для крутильных колебаний стержней**

Схема	Тип закрепления	Условия при $x=0$
	Заделка	$\theta=0$
	Свободный конец	$GJ_k \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$
	На конце действует момент $M$	$GJ_k \frac{\partial \theta}{\partial x} = M$
	Упругое закрепление	$GJ_k \frac{\partial \theta}{\partial x} - c\theta = 0; \quad GJ_k \frac{\partial \theta}{\partial x} + c\theta = 0$ (при $x=l$ )
	На конце диск с моментом инерции $I$	$GJ_k \frac{\partial \theta}{\partial x} = I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}; \quad GJ_k \frac{\partial \theta}{\partial x} = -I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$ (при $x=l$ )

**Поперечные колебания прямого призматического стержня.** Плоскость колебаний  $Oxz$ , ось  $Ox$  направлена вдоль стержня и проходит через центры тяжести поперечных сечений, оси  $Oy$  и  $Oz$  - главные. Принимается гипотеза плоских сечений - поперечные сечения при деформации остаются плоскими и перпендикулярными к деформированной оси стержня; нормальные напряжения на площадках, параллельных оси  $Ox$ , пренебрежимо малы. Растяжением оси пренебрегают. Потенциальная энергия деформации и кинетическая энергия связаны с прогибом стержня  $w$  следующим образом:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx; \quad T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (6.2.8)$$

где  $J(x) = \int (F) z^2 dF$  - момент инерции сечения относительно  $Oy$ .

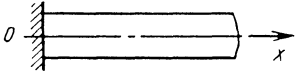
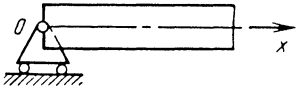
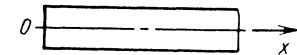
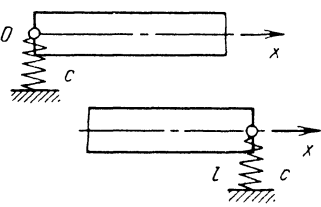
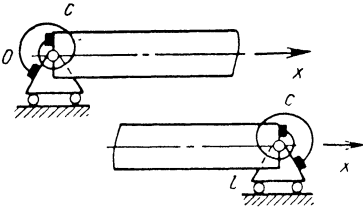
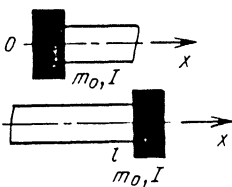
Поперечные колебания стержня выражаются уравнением

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t). \quad (6.2.9)$$

Основные типы граничных условий представлены в табл. 6.2.3. Начальные условия аналогичны (6.2.3).



## 6.2.3. Основные типы краевых условий для поперечных колебаний стержней

Схема	Тип закрепления	Условия при $x=0$
	Заделка	$w=0; \frac{\partial w}{\partial x} = 0$
	Свободное опирание	$w=0; EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$
	Свободный конец	$EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial}{\partial x} \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$
	Упругое закрепление (поперечное)	$\frac{\partial}{\partial x} \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + cw = 0; EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$ $\frac{\partial}{\partial x} \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - cw = 0 \quad (\text{при } x = l)$
	Упругое закрепление (угловое)	$EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c \frac{\partial w}{\partial x} = 0; w = 0; EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c \frac{\partial w}{\partial x} = 0$
	На конце груз, имеющий массу $m_0$ и момент инерции $I$	$\frac{\partial}{\partial x} \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = I \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2};$ $\frac{\partial}{\partial x} \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -I \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}$ <p style="text-align: center;">(при <math>x=l</math>)</p>

**Поперечные колебания при наличии продольных сил.** Если стержень сжимается продольной силой  $N(x)$ , то дифференциальное уравнение поперечных колебаний вместо (6.2.9) будет следующим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( N \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t). \quad (6.2.10)$$

**Учет поперечных сдвигов и инерции поперечных сечений.** Когда длина волны поперечных колебаний соизмерима с размерами поперечного сечения стержня, применяют уточненные уравнения, в которых учтены поперечные сдвиги и инерция поворота сечений. В уточненной теории Тимошенко введено предположение: поперечные сечения остаются плоскими, но не перпендикулярными к деформированной оси стержня. Потенциальная энергия деформации

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \alpha GF \beta^2 dx. \quad (6.2.11)$$

Здесь  $\beta$  - средний угол сдвига;  $\alpha$  - коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения;  $G$  - модуль сдвига. Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho J \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (6.2.12)$$

Граничные условия можно представить в виде

$$EJ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) = M \text{ или } \frac{\partial w}{\partial x} - \beta = 0; \\ -\alpha GF = Q \text{ или } w = 0.$$

Между функциями  $\beta$  и  $w$  существует связь

$$\frac{\partial}{\partial x} (\alpha GF \beta) = \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q,$$

которая позволяет из уравнений исключить  $\beta$ . Тогда уравнение колебаний стержня постоянного поперечного сечения можно привести к виду

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho J \left( 1 + \frac{E}{\alpha G} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 J}{\alpha G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = q(x, t), \quad (6.2.13)$$

которое известно как уравнение Тимошенко.

**Балка на упругом основании.** Допускаем, что массой упругого основания можно пренебречь. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний однородной балки, лежащей на упругом основании с жесткостью основания (коэффициент постели)  $c$ , будет

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -cy + q(x, t). \quad (6.2.14)$$

**Изгибные колебания пластины.** При определении кинетической энергии учитывают только скорости, нормальные к срединной поверхности пластины, поэтому уравнения колебаний можно получить из уравнений статического равновесия деформируемой пластины, добавив в них распределенные силы инерции  $\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ . Так,

для однородной пластины толщиной  $h$  уравнение изгибных колебаний имеет вид

$$D \Delta \Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x_1, x_2, t), \quad (6.2.15)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  - оператор Лапласа;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  - цилиндрическая жесткость пластины.

Граничные условия для шарнирно опертой по контуру пластины

$$w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \text{ при } x_1=0, a_1; \\ w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0 \text{ при } x_2=0, a_2. \quad (6.2.16)$$

Для круглой пластины  $w(r, \theta, t)$  оператор Лапласа в полярных координатах

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Граничные условия для защемленной по контуру пластины

$$w=0, \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \text{ при } r=r_0.$$

Аналогично добавлением распределенных сил инерции в уравнения статического изгиба оболочек можно получить уравнения колебаний оболочек.

### 6.2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

**Разделение переменных.** Уравнения колебаний в (6.2.1) допускают разделение переменных. Функция  $w(x, t)$ , например, может быть представлена произведением двух функций

$$w(x, t) = \varphi(x)e^{i\omega t}. \quad (6.2.17)$$

После подстановки (6.2.17) в уравнение (6.2.9) при  $q(x, t) = 0$  получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(EJ\varphi''(x))'' - \omega^2 \rho F\varphi(x) = 0 \quad (6.2.18)$$

с граничными условиями для функции  $\varphi(x)$ , например, при свободном опирании концов стержня следующими:

$$\text{при } x=0 \quad \varphi(x)=0, \quad EJ\varphi''(x) = 0;$$

$$\text{при } x=l \quad \varphi(x)=0, \quad EJ\varphi''(x) = 0. \quad (6.2.19)$$

Задачу (6.2.18), (6.2.19) называют задачей Штурма - Лиувилля по определению собственных значений и собственных функций. При постоянных коэффициентах в (6.2.18) она имеет аналитическое решение.

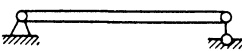
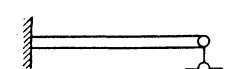
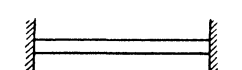
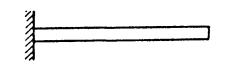
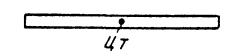
**Аналитическое решение.** Уравнение (6.2.18) запишем в виде

$$\varphi^{IV}(x) - k^4\varphi(x) = 0, \quad (6.2.20)$$

где  $k^4 = \omega^2 \frac{\rho F}{EJ}$ . Его решением будет

$$\varphi(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \operatorname{sh} kx + C_4 \operatorname{ch} kx. \quad (6.2.21)$$

### 6.2.4. Собственные значения и формы свободных поперечных колебаний стержней

Схема закрепления стержня	Уравнение частот	Корни уравнения частот		Уравнение форм свободных колебаний
		N	значение	
	$\sin kl = 0$	1 2 ⋮ n	3.142 6.283  nπ	$\varphi_n(x) = \sin k_n x$
	$\operatorname{tg} kl - \operatorname{th} kl = 0$	1 2 ⋮ n	3.927 7.069  $\frac{\pi}{4}(4n+1)$	$\varphi_n(x) = (\operatorname{sh} k_n l + \sin k_n l)(\operatorname{ch} k_n x - \cos k_n x) - (\operatorname{ch} k_n l - \cos k_n l)(\operatorname{sh} k_n x - \sin k_n x)$
	$\cos k \operatorname{ch} kl = 1$	1 2 ⋮ n	4.73 7.853  $\frac{\pi}{2}(2n+1)$	$\varphi_n(x) = (\sin k_n l - \operatorname{sh} k_n l)(\operatorname{ch} k_n x - \cos k_n x) - (\operatorname{ch} k_n l - \cos k_n l)(\operatorname{sh} k_n x - \sin k_n x)$
	$\cos k \operatorname{ch} kl = -1$	1 2 ⋮ n	1.875 4.694  $\frac{\pi}{2}(2n-1)$	$\varphi_n(x) = (\operatorname{sh} k_n l + \sin k_n l)(\operatorname{ch} k_n x - \cos k_n x) + (\operatorname{ch} k_n l + \cos k_n l)(\operatorname{sh} k_n x - \sin k_n x)$
	$\cos k \operatorname{ch} kl = 1$	-1 0 1 2 ⋮ n	0 0 4.73 7.853  $\frac{\pi}{2}(2n+1)$	$\varphi_{-1}(x) = 1;$ $\varphi_0(x) = \frac{1}{x_{\text{ИГ}}} (x - x_{\text{ИГ}});$ $\varphi_n(x) = (\operatorname{ch} k_n l - \cos k_n l)(\sin k_n x + \operatorname{sh} k_n x) + (\sin k_n l - \operatorname{sh} k_n l)(\cos k_n x + \operatorname{ch} k_n x)$

Подстановка (6.2.21) в граничные условия (6.2.19) приводит к системе однородных алгебраических уравнений для определения постоянных  $C_j$ . Из условия существования ненулевого решения определитель, составленный из коэффициентов при  $C_j$ , должен быть равен нулю, что и дает уравнение для определения собственных значений. В рассматриваемом примере получим  $\sin kl=0$ . Следовательно, собственные значения  $k_n=n\pi/l$ ,  $n=1, 2, \dots$

Из системы алгебраических уравнений находим:  $C_2=0$ ,  $C_3=0$ ,  $C_4=0$ ,  $C_1 \neq 0$ . Примем  $C_1=1$ . Каждому собственному значению соответствует собственная функция  $\varphi_n(x)=\sin k_n x = \sin(n\pi/l)x$ , называемая формой свободных колебаний, и частота свободных колебаний

$$\omega_n = k_n^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}. \quad (6.2.22)$$

Решением уравнения будет

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (6.2.23)$$

Уравнения для определения собственных значений, собственные значения, частоты и соответствующие им формы свободных колебаний для прямых однородных стержней приведены в табл. 6.2.4.

**Балка на упругом основании.** Уравнение для определения форм свободных колебаний

$$EJ\varphi_n^{IV}(x) + \alpha\varphi_n(x) = m\omega_n^2\varphi_n(x). \quad (6.2.24)$$

В случае балки со свободно опертыми концами

$$\varphi_n = \sin \frac{n\pi}{l} x; \quad \omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \frac{EJ}{m} + \frac{c}{m}. \quad (6.2.25)$$

**Метод последовательных приближений.** Метод заключается в построении последовательности функций, сходящихся к одной из форм свободных колебаний, при этом для каждой найденной формы определяется и частота свободных колебаний. Начальная функция может быть достаточно произвольной, но чем ближе она будет к искомой форме свободных колебаний, тем меньшее число приближений придется выполнить. Итерационный процесс без наложения дополнительных условий всегда сходится к форме свободных колебаний первого тона. Для нахождения форм свободных колебаний второго и более высоких тонов необходимо при получении каждого следующего приближения вводить ортогонализацию функций ко всем ранее определенным формам свободных колебаний.

Схему метода проиллюстрируем на примере продольных колебаний прямого стержня. Дифференциальное уравнение имеет вид

$$[EF(x)\varphi'(x)]' + \omega^2 \rho F(x)\varphi(x) = 0. \quad (6.2.26)$$

Пусть граничными условиями будут  $\varphi(0)=0$ ;  $EF(l)\varphi'(l) = 0$ .

1. Выбираем начальную функцию  $\varphi_1^{(0)}(x)$ .

2. Подставляем  $\varphi_1^{(0)}(x)$  во второй член дифференциального уравнения (6.2.26) и дважды уравнение интегрируем с соблюдением граничных условий. Будем иметь

$$EF(x)\varphi_1'(x) = -\omega^2 \left[ \int_0^x \rho F(x)\varphi_1^{(0)}(x)dx + C_1 \right];$$

$$C_1 = -\int_0^l \rho F(x)\varphi_1^{(0)}(x)dx;$$

$$\varphi_1(x) = -\omega_1^2 \left[ \int_0^x \frac{1}{EF(x)} \left( \int_0^x \rho F(x)\varphi_1^{(0)}(x)dx + C_1 x \right) dx + C_2 \right];$$

$C_2 = 0$ .

Обозначив

$$\hat{\varphi}_1^{(1)}(x) = -\int_0^x \frac{1}{EF(x)} \left( \int_0^x \rho F(x)\varphi_1^{(0)}(x)dx + C_1 x \right) dx,$$

запишем форму  $\varphi_1^{(1)}(x)$  и квадрат частоты  $\lambda_1^{(1)}$  колебаний первого приближения, выполнив нормировку  $\varphi_1^{(1)}(x) = \varphi_1(x) / \varphi_1(l)$ ,

$$\varphi_1^{(1)}(x) = \frac{\hat{\varphi}_1^{(1)}(x)}{\hat{\varphi}_1^{(1)}(l)}; \quad \lambda_1^{(1)} = \frac{1}{\hat{\varphi}_1^{(1)}(l)}. \quad (6.2.27)$$

3. Находим второе приближение, приняв в качестве исходной функцию первого приближения  $\varphi_1^{(1)}(x)$  и т.д.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_1^{(n)}(x) = \varphi_1(x); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^{(n)} = \lambda_1 = \omega_1^2.$$

4. В практических расчетах после каждого приближения по сходимости форм и частот можно определять, когда следует остановиться, чтобы иметь форму и частоту с заданной степенью точности. Например, после  $k$ -го приближения

$$\varphi_1(x) \approx \hat{\varphi}_1^{(k)}(x) / \hat{\varphi}_1^{(k)}(l); \quad \omega_1^2 \approx \lambda_1^{(k)} = 1 / \hat{\varphi}_1^{(k)}(l). \quad (6.2.28)$$

5. Для второго тона колебаний в качестве исходной принимаем форму колебаний однородного стержня  $\varphi_2^*(x)$  с некоторой добавкой, которую находим из условия ортогональности с уже известной  $\varphi_1(x)$ . В дифференциальное уравнение (6.2.26) подставляем

$$\varphi_2^{(1)} = \varphi_2^*(x) + \mu_{21}\varphi_1(x). \quad (6.2.29)$$

Коэффициент  $\mu_{21}$  находим из уравнения

$$\int_0^l \rho F(x) \left( \varphi_2^*(x) + \mu_{21} \varphi_1(x) \right) \varphi_1(x) dx = 0;$$

$$\mu_{21} = - \frac{\int_0^l \rho F(x) \varphi_2^*(x) \varphi_1(x) dx}{m_1}; \quad (6.2.30)$$

$$m_1 = \int_0^l \rho F(x) \varphi_1^2(x) dx.$$

6. Второе приближение начинаем с уточнения коэффициента  $\mu_{21}$ , принимая в выражении (6.2.29) вместо  $\varphi_2^*(x)$  полученную в первом приближении функцию  $\varphi_2^{(1)}(x)$ . Квадрат частоты и форму свободных колебаний определяем по (6.2.28).

7. Для третьего тона колебаний будем иметь

$$\varphi_3^{(0)} = \varphi_3^* + \mu_{31} \varphi_1 + \mu_{32} \varphi_2, \quad (6.2.31)$$

где

$$\mu_{31} = - \frac{\int_0^l \rho F \varphi_3^* \varphi_1 dx}{m_1}; \quad \mu_{32} = \frac{- \int_0^l \rho F \varphi_3^* \varphi_2 dx}{m_2};$$

$$m_2 = \int_0^l \rho F \varphi_2^2 dx.$$

Сходимость приближений ухудшается при близких частотах свободных колебаний.

**Метод начального параметра.** Приближенный метод, удобный для определения форм и частот свободных колебаний неоднородных стержней. Сущность метода заключается в следующем: 1) длину стержня разбивают на участки, для каждого из которых  $EF_i = \text{const}$  и  $\rho F_i = \text{const}$ ; 2) в качестве первого приближения  $\omega_n$  принимают частоту свободных колебаний однородного стержня; 3) для каждого  $i$ -го участка известно аналитическое решение уравнения (6.2.26)

$$\varphi_{ni}(x_i) = C_{1i} \cos k_{ni} x_i + C_{2i} \sin k_{ni} x_i, \quad (*)$$

$$\text{где } k_{ni} = \omega_n \sqrt{\rho F_i / EF_i}.$$

Одну произвольную постоянную решения для первого участка определяют из граничного условия на левом конце стержня (при  $x_1=0$ ), другая остается пока неизвестной; 4) из двух условий сопряжения на границах первого и второго участ-

тков  $\varphi_{n1}(l_1) = \varphi_{n2}(0)$ ;  $EF_1 \varphi'_{n1}(l) = EF_2 \varphi'_{n2}(0)$  находят произвольные постоянные  $C_{12}$  и  $C_{22}$  через оставшуюся пока неизвестной постоянную первого участка. Так проходят все участки; 5) для определения оставшейся произвольной постоянной используют граничное условие на правом конце стержня. Если бы частота  $\omega_n$  была выбрана точно, то в силу ненулевого решения коэффициент при постоянной был бы равен нулю. На самом деле  $\Delta_1(\omega_n) \neq 0$ ; 6) расчет повторяют для нового значения  $\omega_n$ , в результате которого также  $\Delta_2(\omega_n) \neq 0$ . Как только  $\Delta_k(\omega_n)$  и  $\Delta_{k+1}(\omega_n)$  будут иметь разные знаки, то искомое значение  $\omega_n$ , при котором  $\Delta(\omega_n) = 0$ , будет находиться на отрезке  $(\omega_n)_k - (\omega_n)_{k+1}$ . Дальнейшие приближения очевидны; 7) зная  $\omega_n$ , вычисляют  $k_{ni} = \omega_n \sqrt{\rho F_i / EF_i}$ ; при известных  $k_{ni}$ ,  $C_{1i}$ ,  $C_{2i}$  форму свободных колебаний строят по аналитическим выражениям (\*).

Последовательность приближений для решения задачи о поперечных колебаниях стержня аналогична изложенной. Отличие заключается лишь в том, что аналитическое решение (6.2.21) имеет четыре произвольные постоянные; из граничных условий при  $x_1=0$  определяют две постоянные первого участка, через оставшиеся две находят все постоянные всех участков на основании условий сопряжения на их границах:

$$\varphi_{ni}(l_i) = \varphi_{ni+1}(0); \quad \varphi'_{ni}(l_i) = \varphi'_{ni+1}(0);$$

$$EJ_i \varphi''_{ni}(l_i) = EJ_{i+1} \varphi''_{ni+1}(0);$$

$$EJ_i \varphi'''_{ni}(l_i) = EJ_{i+1} \varphi'''_{ni+1}(0).$$

Для определения оставшихся двух постоянных используют два граничных условия на правом конце последнего участка; получают два однородных алгебраических уравнения относительно неизвестных постоянных. Находят определитель системы  $\Delta(\omega_n)$  из коэффициентов при этих неизвестных; для произвольно выбранного  $\omega_n \Delta(\omega_n) \neq 0$ . Подбором  $\omega_n$  находят  $\Delta(\omega_n) = 0$ ; зная  $\omega_n$ , вычисляют  $k_{ni}$ ,  $C_{1i}$ ,  $C_{2i}$ ,  $C_{3i}$ ,  $C_{4i}$  и строят форму свободных колебаний, по виду которой определяют номер тона.

Методом начального параметра можно определить частоту и форму свободных колебаний любого тона без решения задачи для предшествующих тонов. В случае решения задачи для высоких тонов поперечных колебаний стержня могут накапливаться ошибки [26].

**Метод Ритца.** Основан на вариационном принципе: среди форм движения истинными формами свободных колебаний будут те, которые сообщают функционалу Рэлея

$$\omega^2 = \frac{P_0(\varphi)}{T_0(\varphi)} \quad (6.2.32)$$

стационарные значения

$$\delta \left[ \frac{P_0(\varphi)}{T_0(\varphi)} \right] = 0. \quad (6.2.33)$$

Условию (6.2.33) эквивалентно также

$$\delta \left[ P_0(\varphi) - \omega^2 T_0(\varphi) \right] = 0, \quad (6.2.34)$$

где  $P_0(\varphi)$  - максимальное во времени значение потенциальной энергии упругой деформации системы, совершающей гармонические колебания;  $T_0(\varphi)$  - максимальное во времени значение кинетической энергии, вычисленное с точностью до множителя  $\omega^2$ .

Согласно методу Ритца решение уравнений типа (6.2.26) представляется в виде ряда функций

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^N f_{nk} \psi_k(x), \quad (6.2.35)$$

причем координатные функции  $\psi_k(x)$  должны быть линейно независимыми и удовлетворить по крайней мере кинематическим граничным условиям.

Задаются координатными функциями  $\psi_k(x)$ , вычисляют  $P_0(\varphi_n)$ ,  $T_0(\varphi_n)$ , подставляют их в выражение (6.2.34) и получают систему алгебраических уравнений для обобщенных координат  $f_{nk}$ :

$$\sum_{k=1}^N (c_{nk} - \omega^2 a_{nk}) f_{nk} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (6.2.36)$$

Для существования ненулевого решения определитель системы (6.2.36) должен быть равен нулю. Это условие дает уравнение частот

$$|c_{nk} - \omega^2 a_{nk}| = 0, \quad k, n = 1, 2, \dots, N. \quad (6.2.37)$$

Для каждой найденной частоты свободных колебаний  $\omega_n$  из системы однородных уравнений (6.2.36) определяют значения коэффициентов  $f_{nk}$ . Форма свободных колебаний  $n$ -го тона на основании (6.2.35) будет иметь вид

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^N f_{nk} \psi_k(x). \quad (6.2.38)$$

**Метод Рэлея** очень прост и удобен для приближенного определения частоты свободных колебаний первого тона. Сущность метода заключается в том, что в качестве формы свободных колебаний выбирают некоторую функцию  $\varphi(x)$ , удовлетворяющую по крайней мере кинематическим граничным условиям и близкую к предполагаемой форме свободных колебаний первого тона. Вычисляют значения  $P_0(\varphi)$ ,  $T_0(\varphi)$  и по формуле (6.2.32) находят искомую частоту. Метод дает значение частоты с завышением.

### 6.2.3. СВОЙСТВА ЧАСТОТ И ФОРМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Частоты свободных колебаний могут быть представлены в виде упорядоченной совокупности

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n,$$

называемой спектром частот свободных колебаний.

Среди множества частот свободных колебаний могут быть и нулевые. Непосредственной проверкой можно установить, что линейно независимые функции  $\varphi_{-1}(x) = 1$  и  $\varphi_0(x) = x - x_{ц.т.}$ , где  $x_{ц.т.}$  - координата центра тяжести стержня, удовлетворяют при  $\omega = 0$  уравнению (6.2.18) и граничным условиям

$$EJ\varphi''(x) = 0; \quad [EJ\varphi''(x)]' = 0 \quad (x = 0, \quad x = l).$$

Функции  $\varphi_{-1}$  и  $\varphi_0$  соответствуют параллельному перемещению стержня и его повороту вокруг центра тяжести как жесткого тела; функции  $\varphi_n(x)$  соответствуют поперечным упругим колебаниям стержня с частотами  $\omega_n (n \geq 1)$ .

Когда форма свободных колебаний известна, то соответствующую ей частоту определяют по формуле Рэлея

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^l EJ(\varphi_n'')^2 dx}{\int_0^l m(x)\varphi_n^2 dx}. \quad (6.2.39)$$

Формы свободных колебаний попарно ортогональны с весовой функцией  $m(x)$ . Например, для стержня условия ортогональности имеют вид

$$\int_0^l m(x)\varphi_n\varphi_m dx = 0, \quad n \neq m. \quad (6.2.40)$$

Условия ортогональности различных форм колебаний эквивалентны следующему утверждению: работа сил инерции, возникающих при колебаниях стержня по  $n$ -му тону, на перемещениях, соответствующих колебаниям по  $m$ -му тону, равна нулю. Или: колебания стержня по какому-либо тону не могут вызвать упругие колебания других тонов. Условия ортогональности упругих форм свободных колебаний  $\varphi_n(x)$  с  $\varphi_{-1}$  и  $\varphi_0$  соответствуют теоремам механики о сохранении количества движения и моменте количества движения в системе, на которую не действуют внешние силы.

Производные форм свободных колебаний попарно ортогональны с весовой функцией  $EF(x)(EJ(x))$ . Для стержня условия ортогональности имеют вид

$$\int_0^l [EF\varphi'_n(x)]' \varphi_m dx = - \int_0^l EF\varphi'_n(x)\varphi'_m(x) dx = 0, \quad n \neq m; \quad (6.2.41)$$

$$\int_0^l [EJ\varphi''_n(x)]'' \varphi_m dx = \int_0^l EJ\varphi''_n(x)\varphi''_m(x) dx = 0, \quad n \neq m.$$

Формы свободных колебаний образуют полный базис. Это означает, что любые движения, внешние силы могут быть разложены по формам свободных колебаний, т.е. представлены в виде ряда

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x). \quad (6.2.42)$$

Коэффициенты  $a_n$  можно определить, умножив равенство (6.2.42) на  $m(x)\varphi_n(x)$ , где  $m(x) = \rho F$  - весовая функция, и интегрируя по  $x$  в пределах от 0 до  $l$ . С учетом условий ортогональности получим

$$a_n = \frac{\int_0^l u(x)m(x)\varphi_n(x) dx}{\int_0^l m(x)\varphi_n^2(x) dx}. \quad (6.2.43)$$

Понятие формы колебаний можно обобщить на более сложный случай колебания свободной балки с упругоподвешенной сосредоточенной массой. Под формой колебаний, соответствующей частоте  $\omega_n$ , в данном случае понимают функцию  $\varphi_n(x)$ , характеризующую распределение поперечных перемещений оси балки по ее длине, и величину  $\eta_n$ , характеризующую перемещение сосредоточенной массы относительно оси балки.

Условие ортогональности форм колебаний  $[\varphi_n(x) + \eta_n]$  и  $[\varphi_m(x) + \eta_m]$ , соответствующих частотам  $\omega_n$  и  $\omega_m$ , можно представить в виде

$$\int_0^l m(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x) dx + m_h[\varphi_n(h) + \eta_n][\varphi_m(h) + \eta_m] = 0, \quad n \neq m, \quad (6.2.44)$$

где  $m_h$  - упругоподвешанная сосредоточенная масса в сечении  $x=h$ . Формула Рэлея для определения частоты свободных колебаний в этом случае имеет вид

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^l EJ(\varphi''_n)^2 dx + c\eta_n^2}{\int_0^l m(x)\varphi_n^2 dx + m_h[\varphi_n(h) + \eta_n]^2}, \quad (6.2.45)$$

где  $c$  - коэффициент жесткости пружины, на которой подвешена масса  $m_h$ .

#### 6.2.4. ВЫНУЖДЕННЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ НЕДИССИПАТИВНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ

Наиболее простыми для решения, но вместе с тем важными для практики являются задачи на установившиеся колебания под действием внешних сил, изменяющихся по гармоническому закону. Решению задачи, как правило, предшествует определение частот и форм свободных колебаний, после чего нахождение вынужденных колебаний мало чем отличается от решения задач с сосредоточенными параметрами. Однако в случае воздействия на упругую систему сосредоточенной внешней силы можно найти вынужденные установившиеся колебания и без разложения их в ряд по формам свободных колебаний. Фаза вынужденных колебаний равна нулю, если колебания совершаются до резонанса ( $p < \omega$ ), вынужденные колебания отстают по фазе на  $\pi$  от внешней силы, если колебания происходят после резонанса ( $p > \omega$ ).

**Вынужденные продольные колебания стержня.** Для наглядности рассмотрим вначале стержень постоянного поперечного сечения. Пусть один конец стержня закреплен неподвижно, ко второму приложена внешняя сила, изменяющаяся по гармоническому закону с частотой  $p$ ,  $P(t) = P_0 e^{ipt}$ . Отнеся внешнюю силу к граничному условию, решение получим без разложения в ряд по формам свободных колебаний. Полагая  $u(x, t) = \varphi(x) e^{ipt}$ , будем иметь

$$\varphi''(x) + \frac{p^2}{a_0^2} \varphi(x) = 0 \quad \left( a_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \right);$$

$$\varphi(0) = 0, \quad EF\varphi'(l) = P_0.$$

(6.2.46)

Решение задачи можно представить в виде

$$\varphi(x) = P_0 \frac{a_0 \sin(px / a_0)}{p \cos(pl / a_0)}, \quad (6.2.47)$$

которое можно назвать формой вынужденных колебаний с масштабом  $P_0$ . Решение исходной задачи будет

$$u(x, t) = P_0 \frac{a_0 \sin(px / a_0)}{p \cos(pl / a_0)} e^{ipt}. \quad (6.2.48)$$

В соответствии с формулой Эйлера  $e^{ipt} = \cos pt + i \sin pt$  в (6.2.48) вместо  $e^{ipt}$  можно взять  $\cos pt$  или  $\sin pt$ .

Решение (6.2.47) справедливо для всех  $p$ , кроме

$$p = \omega_n = \frac{2n - 1}{2} \frac{a_0 \pi}{l},$$

где  $\omega_n$  есть частота  $n$ -го тона свободных колебаний стержня, определяемая из уравнения

$$\cos \frac{\omega l}{a_0} = 0.$$

По аналогичной схеме решают задачу о вынужденных поперечных колебаниях стержня под действием сосредоточенной силы или изгибающего момента на его конце.

**Метод начального параметра в случае неоднородного стержня.** Схема метода та же, что и для свободных колебаний, за исключением использования граничного условия на правом конце участка. Здесь частота колебаний  $p$  известна, и условие на правом конце стержня в случае продольных колебаний  $EF\varphi'(l) = P_0$  используется для определения оставшейся произвольной постоянной. Задачу решают за один прогон; при больших  $p$  возможно накопление ошибок [26].

Для поперечных колебаний стержня две произвольные постоянные находят из условий на левом конце первого участка, а две оставшиеся произвольные постоянные определяют из граничных условий на правом конце стержня, например, если на незакрепленном конце стержня приложена внешняя поперечная сила, то

$$(EJ\varphi''(l))' = -R_0; EJ\varphi''(l) = 0.$$

**Разложение вынужденных колебаний в ряд по формам свободных колебаний** является наиболее общим методом решения задач о вынужденных колебаниях систем с распределенными параметрами. Схему метода поясним на примере решения уравнения (6.2.5).

Искомое решение представляют в виде ряда по формам свободных колебаний стержня  $\varphi_n(x)$ , удовлетворяющих условиям ортогональности (6.2.40) и (6.2.41):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) s_n(t), \quad (6.2.49)$$

где  $s_n(t)$  - искомая обобщенная координата.

Распределенную вынужденную силу  $q(x, t)$  представляют в виде

$$q(x, t) = q(x)q(t); \quad (6.2.50)$$

здесь  $q(x)$  характеризует распределение  $q(x, t)$  по длине стержня, а  $q(t)$  зависит от времени.

В уравнении (6.2.5)  $u(x, t)$  и  $q(x, t)$  заменяют выражениями (6.2.49) и (6.2.50):

$$\left( EF \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x) s_n(t) \right)' + \rho F \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \ddot{s}_n(t) = q(x)q(t). \quad (6.2.51)$$

Умножают последовательно (6.2.51) на  $\varphi_n(x)$  и интегрируют по длине стержня

$$\begin{aligned} & - \int_0^l \varphi_n(x) \left( EF \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x) s_n(t) \right)' dx + \\ & + \int_0^l \varphi_n(x) m(x) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \ddot{s}_n(t) dx = \\ & = \int_0^l \varphi_n(x) q(x) q(t) dx, \end{aligned} \quad (6.2.52)$$

причем здесь принято  $m(x) = \rho F$ .

С учетом ортогональности форм получаем

$$\ddot{s}_n + \omega_n^2 s_n = a_n q(t), \quad n = 1, 2, \dots, \infty, \quad (6.2.53)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \frac{c_n}{m_n}; \quad c_n = \int_0^l EF (\varphi_n'(x))^2 dx; \\ m_n &= \int_0^l m(x) \varphi_n^2(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{m_n} \int_0^l q(x) \varphi_n(x) dx, \end{aligned} \quad (6.2.54)$$

причем  $m_n$  - приведенная масса;  $c_n$  - приведенная жесткость;  $a_n$  - приведенная сила.

Вместо уравнения в частных производных (6.2.5) или дифференциального уравнения в обыкновенных производных по координате  $x$  (6.2.46) здесь получили сумму обыкновенных дифференциальных уравнений (6.2.53) по переменной  $t$  для определения обобщенных координат  $s_n(t)$ . Постоянные коэффициенты уравнений (6.2.53) определяют по известным формам свободных колебаний. При гармоническом изменении внешней силы с частотой  $p$  ( $q(t) = \cos pt$ ) уравнения (6.2.53) не имеют решения, если  $p$  будет равно одному из значений частоты свободных колебаний  $\omega_n$ .

Схема решения задачи о вынужденных поперечных колебаниях стержня аналитична.

**Вынужденные поперечные колебания балки, вызванные движением опор** (рис. 6.2.1). Здесь внешние силы неизвестны, задано кинематическое возбуждение: прямая линия, соединяющая опоры  $A$  и  $B$ , в неподвижной системе координат  $xOy$  движется по закону  $y_0(t) + y_1(t)(x - a)$ , причем функции  $y_0(t)$  и  $y_1(t)$  известны.



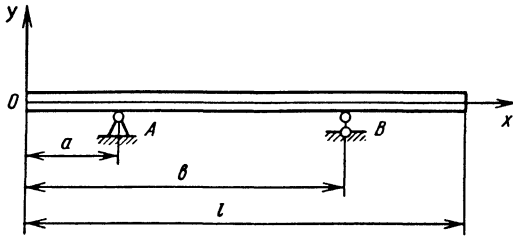


Рис. 6.2.1. Схема балки на двух опорах

Схема решения. Перемещение любого сечения балки в направлении оси  $Oy$  будет

$$y(x, t) = y_0(t) + y_1(t)(x - a) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) q_n(t). \tag{6.2.55}$$

Выражения кинетической и потенциальной энергии деформации стержня:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \left[ \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx;$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left[ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx.$$

Применив уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} = Q_n, \quad L = T - \Pi, \tag{6.2.56}$$

получают дифференциальное уравнение для искомой обобщенной координаты  $q_n$ :

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -a_{0n} \ddot{y}_0(t) - a_{1n} \ddot{y}_1(t), \tag{6.2.57}$$

где

$$a_{0n} = \frac{1}{m_n} \int_0^l m(x) \varphi_n(x) dx,$$

$$a_{1n} = \frac{1}{m_n} \int_0^l m(x) \varphi_n(x) (x - a) dx.$$

Если  $y_0(t) = y_0 \sin pt$ ,  $y_1(t) = y_1 \sin pt$ , то обобщенная координата установившихся изгибных колебаний

$$q_n = (a_{0n} y_0 + a_{1n} y_1) \frac{z_n^2}{1 - z_n^2} \sin pt, \quad z_n^2 = \frac{p^2}{\omega_n^2}. \tag{6.2.58}$$

Максимальное ускорение в любом поперечном сечении

$$\ddot{y}_{\max}(x) = p^2 [y_0 + y_1(x - a) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n (a_{0n} y_0 + a_{1n} y_1) \frac{z_n^2}{1 - z_n^2}].$$

Теперь не составляет труда определить силы, действующие на опоры  $A$  и  $B$ .

**Вычисление обобщенных сил.** Вынужденные колебания представляются разложенными по формам свободных колебаний. Тогда обобщенная сила  $Q_n$  для (6.2.56) может быть найдена как частная производная по обобщенной координате  $q_n(t)$  от суммы работ всех внешних сил на возможных перемещениях системы. Согласно рис. 6.2.2

$$Q_n(t) = -q_1(t) \int_0^l p(x) \varphi_n dx - q_2(t) P \varphi_n(x_2) + q_3(t) M \varphi_n'(x_3) - q_4(t) \int_0^l M(x) \varphi_n'(x) dx. \tag{6.2.59}$$

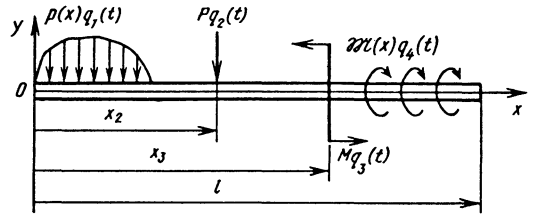


Рис. 6.2.2. Схема нагружения балки внешними силами

Если внешняя сила  $p(x, y)q(t)$  действует на прямоугольную пластину, обобщенная сила

$$Q_n(t) = q(t) \int_0^a \int_0^b p(x, y) w(x, y) dx dy. \tag{6.2.60}$$

**6.2.5. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИССИПАТИВНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ**

Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем может происходить по многим причинам, среди которых можно указать три наиболее распространенные: 1) потери энергии в окружающую среду от взаимодействия упругой системы с этой средой (“внешнее трение”); 2) потери энергии, обусловленные внутренними процессами в материале при колебаниях (“внутреннее трение”); 3) потери, связанные с трением в опорах, шарнирах, заклепочных, болтовых соединениях и др. (“конструкционное трение”).

Определение характера и коэффициентов демпфирования представляет довольно сложную задачу вследствие разнообразия и взаимосвязанности различных факторов, обуславливающих поглощение энергии в материале и соединениях, и в зависимости от конструкторско-технологических причин и условий эксплуатации. Коэффициенты демпфирования определяют, как правило, экспериментально, подробнее см. [55, 66]. Здесь мы отметим особенности решения задач о вынужденных колебаниях в случаях, когда рассеяние энергии пропорционально первой степени скорости. Примем вязкоупругую модель материала - модель Фойгта - Кельвина:

$$\sigma = E \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right).$$

К аналогичным результатам в уравнениях для обобщенных координат приводит модель движения упругого тела в вязкой жидкости  $F_{тр} = h \frac{\partial u}{\partial t}$ .

Дифференциальные уравнения продольных и поперечных колебаний стержня при наличии вязкого сопротивления

$$-EF \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right) + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(x, t);$$

$$EJ \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \right) + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t)$$

(6.2.61)

допускают разделение переменных.

Например, при  $q(x, t)=0$  в случае поперечных колебаний будем иметь

$$EJ\varphi^{IV} - k^4\varphi = 0; \quad \rho F\ddot{q} + k^4\eta\dot{q} + k^4q = 0.$$

(6.2.62)

Когда имеется внешнее сопротивление, пропорциональное скорости, дифференциальные уравнения в частных производных

$$-EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h \frac{\partial u}{\partial t} + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0;$$

(6.2.63)

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + h \frac{\partial w}{\partial t} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

также допускают разделение переменных:

$$EJ\varphi^{IV} - k^4\varphi = 0; \quad \rho F\ddot{q} + k^4h\dot{q} + k^4q = 0,$$

(6.2.64)

и обыкновенные дифференциальные уравнения для определения форм и частот свободных колебаний имеют тот же вид, что и для упругих систем без трения.

**Вынужденные колебания при разложении их в ряд по формам свободных колебаний.** Решение задачи проходит гладко в случае гипотезы Фойг-

та - Кельвина, и возникает некоторая неувязка в случае внешнего вязкого сопротивления  $h \partial u / \partial t$ ,  $h \partial w / \partial t$  вследствие того, что формы свободных колебаний ортогональны с весом  $m(x)=\rho F$  и неортогональны с весом  $h$ . Поэтому уравнения для обобщенных координат, строго говоря, не разделяются. В инженерных расчетах такой погрешностью часто пренебрегают.

Дифференциальное уравнение для обобщенной координаты  $q_n(t)$  при  $q(x, t)=q(x)e^{ipt}$  будет иметь вид

$$\ddot{q}_n + 2\varepsilon_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = a_n e^{ipt}. \quad (6.2.65)$$

Вынужденные колебания

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n q_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \frac{a_n e^{i(pt-\alpha_n)}}{\sqrt{(\omega_n^2 - p^2)^2 + 4\varepsilon_n^2 p^2}},$$

(6.2.66)

где сдвиг по фазе  $\text{tg}\alpha_n = 2\varepsilon_n p / (\omega_n^2 - p^2)$  для каждого тона колебаний имеет свое значение.

**Метод прогонки с определением форм вынужденных колебаний** характеризуется наличием комплексных коэффициентов в дифференциальном уравнении для определения форм вынужденных колебаний. Например, для продольных колебаний в случае вынуждающей силы на конце стержня  $(x=l)q(x, t)=Pe^{ipt}$  имеем

$$-EF(1 + i\eta p)\varphi''(x, p) - p^2 \rho F\varphi(x, p) = 0$$

(6.2.67)

при  $\varphi'(0, p) = 0$ ,  $\varphi'(l, p)EF(1 + i\eta p) = P_0$ , и поэтому форма вынужденных колебаний представляется в любом поперечном сечении стержня комплексным числом

$$\varphi(x, p) = U + iV = A(x, p)e^{i\alpha(x, p)}; \quad (6.2.68)$$

сдвиг по фазе находят с помощью формулы

$$\text{tg}\alpha = V / U. \quad (6.2.69)$$

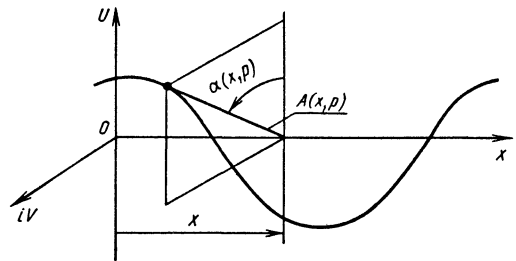


Рис. 6.2.3. Схема комплексной формы вынужденных колебаний

Форма вынужденных колебаний  $\varphi(x, p)$  в координатах  $x, U, V$  является пространственной кривой (рис. 6.2.3). Чем выше частота  $p$  вынуж-

денных колебаний, тем на больший угол повернется вектор  $A(x, p)$  вокруг оси  $Ox$  при движении начала вектора вдоль этой оси ( $0 \leq x \leq l$ ). Модуль  $A(x, p)$  вектора характеризует амплитуду, а угол  $\alpha(x, p)$  - сдвиг фаз вынужденных колебаний. Подробнее о методе прогонки см. [45, 46].

### Глава 6.3

## КОЛЕБАНИЯ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 6.3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Колебания аэрогидроупругих систем имеют большую актуальность в авиационной и ракетной технике. Типичным примером является флаттер крыла самолета. Разработана теория упругих колебаний таких сложных конструкций, как самолет, ракета. Полет в воздушной среде, колебания жидкого топлива в баках, мощные источники энергии, установленные на упругих основаниях, наличие замкнутых систем автоматического управления могут приводить к возникновению опасных нарастающих колебаний.

Здесь рассмотрены основы гидромеханических колебаний применительно к задачам о колебаниях жидкости в баке и трубе. Они входят составной частью не только в динамику самолетов и ракет, но и могут служить базой в решении задач динамики транспортирования жидкости как в емкостях, так и по трубам, динамики в нефтехимических производствах, динамики гидродвигов.

В 1885 г. Н. Е. Жуковский [36] рассмотрел общий случай движения твердого тела с полостью, заполненной идеальной жидкостью, и показал, что если полость заполнена несжимаемой жидкостью целиком, то никаких колебаний жидкости не возникает и под действием внешних сил такая система движется как твердое тело, масса которого равна массе твердого тела с жидкостью, а момент инерции меньше момента инерции твердого тела с "затвердевшей" жидкостью. Различие моментов инерции объясняется тем, что стенки полости не могут принудить жидкость вращаться, как твердое тело. Это различие зависит от формы полости и от расположения оси вращения по отношению к этой полости. Колебания жидкости внутри бака возникают, когда она имеет свободную поверхность.

Для выражения колебаний жидкости будем использовать переменные Эйлера, которые характеризуют состояние жидкости (скорость, давление) в заданной точке пространства с координатами  $x, y, z$  в различные моменты времени. Иначе говоря, векторные и скалярные элементы движения рассматриваются как функции четырех аргументов:  $x, y, z, t$ .

**Уравнение Лапласа.** Движение несжимаемой жидкости в любой точке занимаемого ею объема должно удовлетворять уравнению неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (6.3.1)$$

которое для безвихревого (потенциального) движения можно преобразовать к уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (6.3.2)$$

где  $\Phi$  - потенциал абсолютных скоростей жидкости, с помощью которого проекции скорости жидкости на координатные оси вычисляются по формулам

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (6.3.3)$$

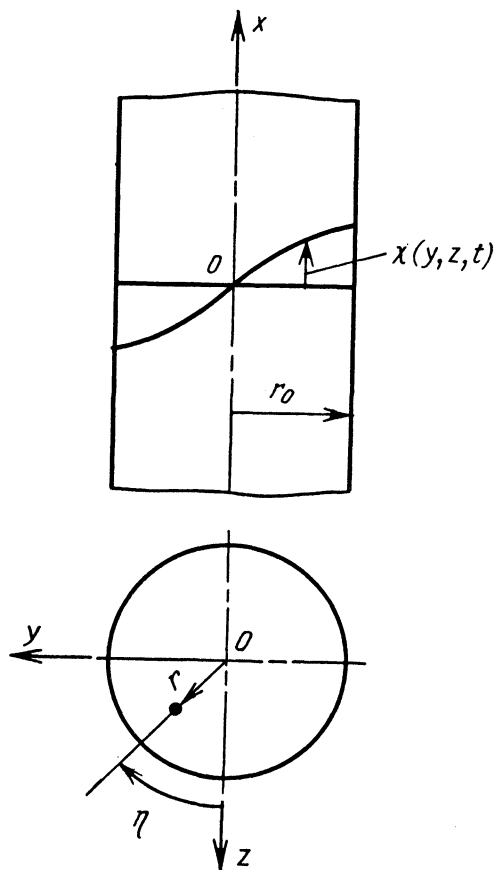


Рис. 6.3.1. Система координат

Если бак цилиндрический, то решение удобно проводить не в прямоугольных, а в цилиндрических координатах. Располагая ось  $x$  вдоль оси бака (рис. 6.3.1) и вводя вместо пере-

менных  $y$  и  $z$  переменные  $r$  и  $\eta$  ( $y=r \sin \eta$ ,  $z=r \cos \eta$ ), получим уравнение Лапласа в цилиндрических координатах

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0. \quad (6.3.4)$$

Давление  $p$  жидкости в любой точке объема, занятого жидкостью, можно определить из следующего равенства:

$$\frac{p - p_0}{\rho} = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \right) - g^* x,$$

где  $p_0$  - давление газов над жидкостью;  $v$  - скорость жидкости;  $\rho$  - плотность жидкости;  $g^*$  - ускорение свободного падения;  $x$  - координата в направлении оси  $ox$ , когда ось  $ox$  направлена вертикально вверх от свободной поверхности;  $-g^*x$  выражает гидростатическое давление.

При малых скоростях колебаний жидкости

$$\frac{p - p_0}{\rho} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - g^* x. \quad (6.3.5)$$

Крайевые и начальные условия на смоченной поверхности  $S^*$  могут быть выражены, исходя из равенства нормальных скоростей жидкости и стенки бака

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = v_n^*, \quad (6.3.6)$$

где  $v_n^*$  - скорость граничной поверхности в направлении нормали к этой поверхности.

Граничное условие на свободной поверхности:  $p=p_0$  или

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{x=\chi} + g^* \chi = 0,$$

где  $\chi=\chi(y, z, t)$  - отклонение свободной поверхности от невозмущенного положения, при котором  $\chi(y, z, t)=0$ . При малых колебаниях производные  $\partial \Phi / \partial t$  и  $\partial \Phi / \partial x$  можно взять на невозмущенной свободной поверхности, т.е. при  $x=0$ , вместо  $x=\chi$ . Тогда граничное условие на свободной поверхности получим в виде

$$\int_0^t \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x=0} dt = - \frac{1}{g^*} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{x=0}. \quad (6.3.7)$$

Функция  $\Phi$  в общем случае должна удовлетворять еще начальным условиям, которые необходимы для определения произвольных постоянных решения однородного уравнения (6.3.2). Применительно к машиностроительным конструкциям нас будут интересовать в первую очередь вынужденные колебания, определяемые частным решением дифференциального уравне-

ния с правой частью. Начальные условия для таких задач не имеют значения.

Таким образом, задача о вынужденных колебаниях идеальной несжимаемой жидкости в баке сводится к определению потенциальной функции  $\Phi(x, y, z, t)$ , удовлетворяющей уравнению Лапласа (6.3.2) и граничным условиям (6.3.6) и (6.3.7). Если функция  $\Phi$  найдена, то найдено движение и давление жидкости.

**6.3.2. ПЛОСКИЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖЕСТКОГО БАКА С ЖИДКОСТЬЮ, ИМЕЮЩЕЙ СВОБОДНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ**

**Потенциал абсолютных скоростей жидкости в круговом цилиндрическом баке**, движение которого в механической системе задано кинематически (рис. 6.3.2): поступательным перемещением  $y_c=y_c(t)$  вдоль оси  $y$  и угловым поворота  $\vartheta=\vartheta(t)$  вокруг полюса  $C$ .

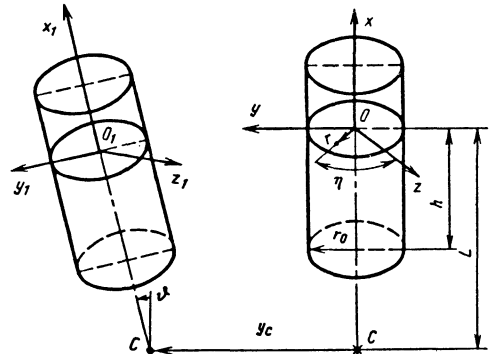


Рис. 6.3.2. Координаты плоского поперечного движения бака

Граничными условиями на стенках бака будут

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_r^* = \left[ \dot{y}_c + \dot{\vartheta}(L+x) \right] \sin \eta \text{ при } r=r_0; \quad (6.3.8)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = v_x^* = -\dot{\vartheta} r \sin \eta \text{ при } x=-h, \quad (6.3.9)$$

где  $r_0$  - радиус бака;  $h$  - расстояние от невозмущенной свободной поверхности до дна бака.

На свободной поверхности жидкости выполняется граничное условие (6.3.7).

Потенциал абсолютных скоростей  $\Phi$  для сформулированной задачи определяют методом разделения переменных.

Требуется найти такие координатные функции, которые бы удовлетворяли дифференциальному уравнению (6.3.4) во всем объеме жидкости и граничным условиям (6.3.7) - (6.3.9) на свободной поверхности и смачиваемых стенках бака. Такие функции можно подобрать только для простых форм баков. Для бака со свободной

поверхностью жидкости комбинацию координатных функций целесообразно подбирать, используя потенциал Н. Е. Жуковского [36]. Для этого потенциал абсолютных скоростей представляют в виде двух частей

$$\Phi = \psi(x, r, \eta, t) + \varphi(x, r, \eta, t),$$

каждая из которых должна быть решением уравнения Лапласа (6.3.4) и, кроме того, функция  $\psi$  ("потенциал Жуковского") должна удовлетворять граничным условиям на смачиваемых стенках и допускать некоторый произвол на свободной поверхности, функция  $\varphi$  должна иметь нулевые граничные условия на смачиваемых стенках и совместно с  $\psi$  удовлетворять граничным условиям на свободной поверхности.

Для кругового цилиндрического бака такими функциями будут [45]

$$\psi = \sin \eta \left\{ \left[ 2r_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(r)}{\left(\zeta_n^2 - 1\right)} X_{\psi_n} + r(L+x) \right] \dot{\vartheta} + r \dot{y}_c \right\}; \quad (6.3.10)$$

$$\varphi = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(r)}{\left(\zeta_n^2 - 1\right)} X_{\varphi_n} \lambda_n(t). \quad (6.3.11)$$

Из условия на свободной поверхности (6.3.7) получаем дифференциальное уравнение для определения произвольной пока функции  $\lambda_n(t)$

$$\ddot{\lambda}_n + \omega_n^2 \lambda_n = -L_n \ddot{\vartheta} - \ddot{y}_c + g^* \vartheta \quad (n=1, 2, \dots). \quad (6.3.12)$$

В (6.3.10) - (6.3.12) приняты обозначения:

$$R_n(r) = J_1 \left( \zeta_n \frac{r}{r_0} \right) - \text{функция Бесселя первого}$$

рода и первого порядка с корнями уравнения  $dR(r)/dr=0$ ;  $\zeta_1=k_1r_0=1,8412$ ;  $\zeta_2=k_2r_0=5,3315$ ;  $\zeta_3=k_3r_0=8,5363$ ;  $\zeta_4=k_4r_0=11,7060$ ; ... Она характеризует движение жидкости в радиальном направлении;

$$X_{\psi_n} = -(2r_0 / \zeta_n) \operatorname{sh} \left[ \frac{\zeta_n}{r_0} \left( \frac{h}{2} + x \right) \right] / \operatorname{ch} \left( \zeta_n \frac{h}{2r_0} \right); \quad (6.3.13)$$

$$X_{\varphi_n} = \operatorname{ch} \left( \zeta_n \frac{h+x}{r_0} \right) / \operatorname{ch} \left( \zeta_n \frac{h}{r_0} \right) \quad (6.3.14)$$

характеризуют движение жидкости в направлении продольной оси  $Ox$ ;

$$L_n = L \left[ 1 - \frac{2r_0}{\zeta_n L} \operatorname{th} \left( \zeta_n \frac{h}{2r_0} \right) \right] - \quad (6.3.15)$$

расстояние от центра вращения  $C$  до некоторой точки на оси бака, находящейся ниже свободной поверхности жидкости;  $L$  - расстояние от точки  $C$  до свободной поверхности жидкости;  $\lambda_n(t)$  - функция, через которую выражаются колебания жидкости внутри бака. Частота свободных колебаний жидкости в баке

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g^* \zeta_n}{r_0} \operatorname{th} \left( \zeta_n \frac{h}{r_0} \right)} \quad (6.3.16)$$

при  $h \geq r_0$  не зависит от глубины  $h$  и пропорциональна  $\sqrt{g^* \zeta_n / r_0}$ . Чем больше ускорение земного тяготения  $g^*$  и меньше радиус бака  $r_0$ , тем больше  $\omega_n$  для каждого  $n$  (номера тона колебаний).

Физический смысл параметра  $\lambda_n(t)$  можно установить из рассмотрения отклонений свободной поверхности в направлении оси цилиндра, которое в неподвижной системе координат будет

$$\chi(r, \eta, t) \Big|_{x=0} = \int_0^t \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial x} \Big|_{x=0} dt.$$

Так как  $\int_0^t \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} dt = \vartheta_r \sin \eta$  есть плоскость

$y_1 O_1 z_1$ , перпендикулярная к оси наклоненного цилиндра, то

$$\chi_\lambda = \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} dt = 2 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(r)}{\left(\zeta_n^2 - 1\right) \zeta_n} \operatorname{th} \left( \zeta_n \frac{h}{r_0} \right) \lambda_n(t)$$

есть отклонение свободной поверхности от плоскости  $y_1 O_1 z_1$ . Оно пропорционально  $\lambda_n(t)$ . Если  $h/r_0 \gg 1$ , то

$$\chi_{\lambda_1} \left( r_0, \frac{\pi}{2}, t \right) = 1,54 \lambda_1(t);$$

$$\chi_{\lambda_2} \left( r_0, \frac{\pi}{2}, t \right) = 0,39 \lambda_2(t).$$

Уравнение (6.3.12) можно считать уравнением вынужденных колебаний жидкости относительно стенок бака. Распределение этих колебаний по глубине определяет функция  $X_{\varphi_n}$  по радиусу

$R_n(r) = J_1(\zeta_n r / r_0)$ . Для первых трех тонов колебаний форма свободной поверхности в плоскости  $O_1 x_1 y_1$  показана на рис. 6.3.3. Скорость частиц жидкости у стенки бака характеризуется функцией

$$v(r_0, x, t) = \sin \eta \frac{\zeta_n}{(\zeta_n^2 - 1)} \frac{\operatorname{sh} \left( \zeta_n \frac{h+x}{r_0} \right)}{\operatorname{ch} \left( \zeta_n \frac{h}{r_0} \right)} \dot{\lambda}_n(t),$$

по мере удаления от свободной поверхности в глубину бака она убывает.

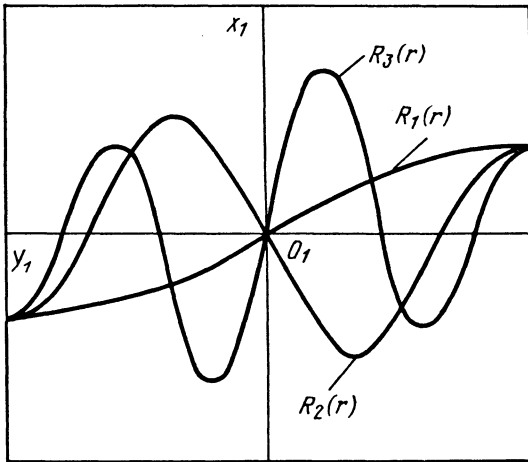


Рис. 6.3.3. Формы поперечных колебаний свободной поверхности жидкости в диаметральной плоскости кругового бака

**Главный вектор и главный момент гидростатических и гидродинамических сил.** Если потенциал  $\Phi$  известен, то по формуле (6.3.5) можно найти давление в любой точке объема жидкости, а затем перейти к интегральным величинам - главному вектору сил  $F$ , действующих со стороны жидкости на бак, и главному моменту этих сил  $M$  относительно какого-либо центра. Проекцию главного вектора  $F_y$  на ось  $Oy$  и момента  $M_c$  относительно оси, проходящей через точку  $C$  и параллельной  $Oz$ , вычислим с точностью до величин первого порядка малости. В соответствии со структурой формулы (6.3.5), выражений (6.3.10), (6.3.11), выполнив интегрирование по всей смоченной поверхности и проведя преобразование, получим

$$F_y = -m \left[ \left( L - \frac{h}{2} \right) \ddot{\vartheta} + \ddot{y}_c \right] - \sum_{n=1}^{\infty} m_n \ddot{\lambda}_n(t), \tag{6.3.17}$$

где  $m$  - масса всей жидкости;  $m_n$  - приведенная масса колеблющейся жидкости, соответствующая координате  $\lambda_n$ ,

$$m_n = \pi r_0^3 \rho \frac{2 \operatorname{th} \left( \zeta_n \frac{h}{r_0} \right)}{\zeta_n (\zeta_n^2 - 1)}; \tag{6.3.18}$$

$$M_c = - \left( I + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \right) \ddot{\vartheta} - m(L - h/2) \ddot{y}_c -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} m_n L_n \ddot{\lambda}_n + g * \sum_{n=1}^{\infty} m_n \lambda_n + mg * (L - h/2) \vartheta; \tag{6.3.19}$$

здесь  $I$  - момент инерции массы всей жидкости относительно оси, проходящей через точку  $C$  и параллельной  $Oz$ , если считать жидкость "затвердевшей" и свободную поверхность совпадающей с плоскостью  $O_1 y_1 z_1$ ;

$$I = \pi r_0^2 h \rho \left( L^2 - Lh + h^2 / 3 - r_0^2 / 4 \right);$$

$I_n$  - уменьшение момента инерции жидкости ( $I_n < 0$ ) вследствие того, что вращение жидкости отличается от вращения твердого тела:

$$I_n = \pi r_0^5 \rho \left[ - \frac{h}{r_0} \frac{8}{\zeta_n^2 (\zeta_n^2 - 1)} + \frac{16}{\zeta_n^3 (\zeta_n^3 - 1)} \operatorname{th} \left( \zeta_n \frac{h}{2r_0} \right) \right]; \tag{6.3.20}$$

$$I_n = \frac{r_0}{\zeta_n \operatorname{th} \left( \zeta_n \frac{h}{r_0} \right)} - \tag{6.3.21}$$

некоторая длина, которую, как будет показано ниже, можно интерпретировать как длину приведенного математического маятника.

Если жидкость заполняет бак полностью, сила  $F_y$  и момент сил  $M_c$  имеют значения, соответствующие решению Н. Е. Жуковского [36]. При наличии свободной поверхности возникают колебания жидкости внутри бака, вследствие которых изменяются и сила  $F_y$ , и момент  $M_c$ .

**Потенциал абсолютных скоростей жидкости в баке в форме прямоугольного параллелепипеда.** Пусть бак, имеющий размеры поперечного сечения  $2a$  и  $2b$ , заполнен жидкостью на глубину  $h$ , дно бака плоское, продольная ось вертикальна. Начало неподвижной прямоугольной системы координат расположим в центре невозмущенной свободной поверхности, ось  $Ox$  направлена вертикально вверх, ось  $Oy$  - параллельно стенке

бака длиной  $2a$ , ось  $Oz$  направлена так, чтобы система координат была правой. Бак совершает малые колебания в направлении оси  $Oy$  по закону  $y_c = y_c(t)$ .

Граничные условия для движения жидкости на стенках бака будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= v^*_y = \dot{y}_c \quad \text{при } y = \pm a; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= v^*_z = 0 \quad \text{при } z = \pm b; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= v^*_x = 0 \quad \text{при } x = -h. \end{aligned} \quad (6.3.22)$$

На свободной поверхности жидкости выполняется граничное условие (6.3.7).

Потенциал абсолютных скоростей жидкости

$$\Phi = y\dot{y}_c + \varphi(x, y, z, t);$$

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n y / a) \frac{\text{ch} k_n \frac{h+x}{a}}{\text{ch} k_n \frac{h}{a}} \lambda_n(t); \quad (6.3.23)$$

$$\ddot{\lambda}_n + \omega_n^2 \lambda_n = -\ddot{y}_c,$$

где  $k_n$  - корни уравнения  $\cos k_n a = 0$ ;  $k_n = (2n-1) \times \pi/2$ ;  $\lambda_n(t)$  - координата колебаний жидкости внутри бака;  $\omega_n$  - частота свободных колебаний жидкости в баке,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g^* k_n}{a} \text{th} \left( k_n \frac{h}{a} \right)}. \quad (6.3.24)$$

**Уравнения возмущенного движения бака с жидкостью.** Рассмотрим поперечные движения, за обобщенные координаты для бака примем  $y_c(t)$  - отклонение некоторого центра  $C$ , принадлежащего оси бака, и  $\vartheta(t)$  - угол поворота вокруг этого центра в плоскости движения  $xOy$  (см. рис.6.3.2).

Полагаем, что действующие на бак внешние силы приводятся к поперечной силе  $P_y(t)$ , направленной параллельно оси  $Oy$ , и к паре сил с моментом  $M_c(t)$  относительно оси, проходящей через точку  $C$  и параллельной  $Oz$ . Дифференциальные уравнения для координат  $y_c$  и  $\vartheta$  составляем, пользуясь законами теоретической механики для твердого тела, добавляя к заданным внешним силам  $P_y(t)$  и  $M_c(t)$  силу  $F_y$  и момент  $M_c$ , действующие со стороны жидкости на бак, которые по отношению к баку также являются внешними. Определенные выше сила

$F_y$  и момент  $M_c$  совпадают по направлению с  $P_y(t)$  и  $M_c(t)$ .

Полагая центр масс стенок бака совпадающим с центром масс невозмущенного объема жидкости в баке, получим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения бака с жидкостью в плоскости  $Oxy$ :

$$\begin{aligned} (m_0 + m) \ddot{y}_c + (m_0 + m) \left( L - \frac{h}{2} \right) \ddot{\vartheta} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \ddot{\lambda}_n = P_y(t); \\ \left( I_0 + I + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \right) \ddot{\vartheta} - (m_0 + m) g^* \left( L - \frac{h}{2} \right) \vartheta + \\ + (m_0 + m) \left( L - \frac{h}{2} \right) \ddot{y}_c + \sum_{n=1}^{\infty} m_n L_n \ddot{\lambda}_n - \\ - g^* \sum_{n=1}^{\infty} m_n \lambda_n = M_c(t); \end{aligned} \quad (6.3.25)$$

$$\ddot{\lambda}_n + \omega_n^2 \lambda_n = -L_n \ddot{\vartheta} - \ddot{y}_c + g^* \vartheta,$$

где  $m_0$  - масса стенок бака;  $I_0$  - момент инерции стенок бака относительно оси, проходящей через центр  $C$  и параллельной оси  $Oz$ .

**Механическая модель колебаний жидкости в баке.** При поперечных колебаниях бака колебания жидкости внутри него пропорциональны координате  $\lambda_n(t)$ . Дифференциальное уравнение для  $\lambda_n$  (6.3.12) есть уравнение вынужденных колебаний осциллятора, правая часть которого выражает кинематическое возбуждение от стенок бака. Это дает возможность при решении задач динамики твердого тела с полостью, частично заполненной жидкостью, колебания жидкости внутри бака заменить колебаниями математических маятников; каждому тону колебаний жидкости должен соответствовать свой маятник. Масса, длина и положение точки его подвеса должны быть выбраны такими, чтобы поперечная сила и ее момент от колебаний маятника были такими же, как и от колебаний жидкости.

Для прямого кругового цилиндрического бака сила  $F_y(\lambda_n)$  и момент  $M_c(\lambda_n)$  относительно оси, проходящей через центр  $C$  и параллельной оси  $Oz$ , от распределенных по смачиваемой поверхности бака сил на основании (6.3.17) - (6.3.19), равны

$$F_y(\lambda_n) = -m_n \ddot{\lambda}_n; \quad M_c(\lambda_n) = -m_n L_n \ddot{\lambda}_n + g^* m_n \lambda_n$$

где

$$m_n = 2\pi r_0^3 \rho \frac{\text{th}\left(\zeta_n \frac{h}{r_0}\right)}{\zeta_n (\zeta_n^2 - 1)}.$$

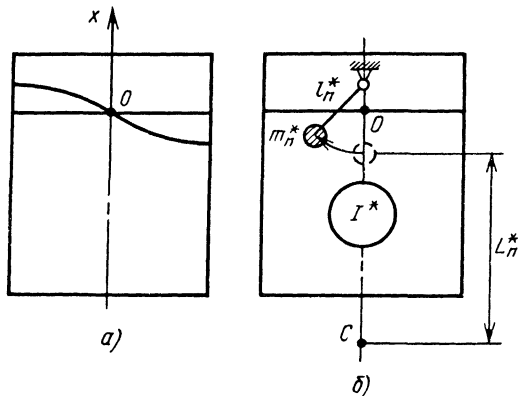


Рис. 6.3.4. Механическая модель колебаний жидкости в баке

Колебания математического маятника, имеющего массу  $m_n^*$ , длину  $l_n^*$  и подвешенного на оси цилиндра на расстоянии  $(L_n^* + l_n^*)$  от точки  $C$  (рис. 6.3.4), при поперечных движениях цилиндра будут выражаться таким же дифференциальным уравнением, как дифференциальное уравнение (6.3.12) для  $\lambda_n$ ; математический маятник во время колебаний будет действовать на цилиндр, вызывая поперечную силу  $F_y(\lambda_n)$  и момент  $\mathcal{M}_c(\lambda_n)$  относительно точки  $C$ , если его параметры удовлетворяют условиям:

$$l_n^* = l_n = \frac{r_0}{\zeta_n \text{th}\left(\zeta_n \frac{h}{r_0}\right)};$$

$$m_n^* = m_n = \pi r_0^3 \rho \frac{2 \text{th}\left(\zeta_n \frac{h}{r_0}\right)}{\zeta_n (\zeta_n^2 - 1)};$$

$$L_n^* = L_n = L \left[ 1 - \frac{2r_0}{\zeta_n L} \text{th}\left(\zeta_n \frac{h}{2r_0}\right) \right].$$

Чтобы жидкость в баке считать “затвердевшей”, т.е. заменить твердым телом, необходимо уменьшить ее момент инерции, не уменьшая массу. Для этого в центре масс затвер-

девшей жидкости выделяют сферу с моментом инерции относительно центральной оси (6.3.20):

$$I^* = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \pi r_0^5 \rho \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{h}{r_0} \frac{8}{\zeta_n^2 (\zeta_n^2 - 1)} + \frac{16}{\zeta_n^3 (\zeta_n^2 - 1)} \text{th}\left(\zeta_n \frac{h}{2r_0}\right) \right] \right].$$

Тогда момент инерции твердого тела совместно с маятниками, “закрепленными” в невозмущенном положении на продольной оси бака, должен быть равен  $I - I^*$ .

Выделенная сфера, находясь без трения в наружной сфере-оболочке, не будет участвовать во вращении цилиндра. В этом - один из результатов решения Н. Е. Жуковского [36].

Таким образом, в рамках поставленной задачи механическая модель колебаний жидкости в баке представляет собой твердое тело с подвешенными на его оси математическими маятниками. Масса твердого тела совместно с массами маятников равна массе жидкости, момент инерции твердого тела совместно с маятниками, закрепленными на его оси, меньше момента инерции “затвердевшей” жидкости.

**Частота свободных колебаний бака, частично заполненного жидкостью в прямых горизонтальных направляющих.** Если принять в расчет только один тон колебаний жидкости, то дифференциальные уравнения на основании (6.3.25) будут

$$m \ddot{y}_c + m_n \ddot{\lambda}_n = 0; \quad \ddot{\lambda}_n + \omega_n^2 \lambda_n = -\ddot{y}_c, \quad (6.3.26)$$

где  $m$  - масса цилиндра с жидкостью;  $m_n$  - приведенная масса жидкости (масса маятника).

Частота свободных колебаний системы бак-жидкость

$$\omega_n^* = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - m_n/m}} \quad (6.3.27)$$

всегда больше частоты свободных колебаний жидкости в неподвижном баке. Для первого тона колебаний эта разница заметна. Соотношение (6.3.27) удобно получить или иллюстрировать на маятниковой модели.

### 6.3.3. ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ

Метод целесообразно применять для решения задач в случаях, когда бак имеет более сложную форму, чем круговой цилиндр или прямоугольный параллелепипед, он реализуется с применением ЭВМ.

Бак, частично заполненный идеальной жидкостью, представляет собой консервативную систему, к которой применим принцип Гамиль-



тона - Остроградского. Интеграл действия по Гамильтону

$$J = \int_0^t L dt,$$

где  $L = T - \Pi$  - функция Лагранжа;  $T$ ,  $\Pi$  - кинетическая и потенциальная энергия жидкости. Согласно принципу Гамильтона для действительных движений интеграл действия принимает стационарное значение, т.е. вариация  $\delta J = 0$ .

Интеграл действия по Гамильтону  $J$  на постоянный множитель  $\pi r/2\omega$  отличается от функционала

$$F(\Phi) = g^* \int_V (\nabla\Phi)^2 dV - \omega^2 \int_{S_0} \Phi^2 dS, \quad (6.3.28)$$

где  $\omega$  - частота свободных колебаний;  $V$ ,  $S_0$  - объем, занимаемый жидкостью в невозмущенном состоянии, и площадь ее свободной поверхности;  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$  - оператор Гамильтона.

Задача о свободных колебаниях жидкости в объеме  $V$  сводится к вариационной задаче для функционала (6.3.28). Для ее решения удобно воспользоваться методом Ритца. Идея метода заключается в следующем.

Выбираем систему координатных функций  $\varphi_n$ , полную в объеме  $V$ , и приближенное решение задачи ищем в виде конечной суммы

$$\Phi = \sum_{n=1}^k a_n \varphi_n.$$

Самым сложным в вариационном принципе является выбор системы координатных функций  $\varphi_n(x, y, z)$ . Нужен определенный опыт. От удачного или неудачного выбора зависит точность результата при учете ограниченного числа тонов колебаний. Например, в качестве функции  $\varphi_n$  можно брать известные решения уравнения Лапласа для простого объема, охватывающего объем жидкости исследуемого бака. В частности, такой областью может быть прямой круговой цилиндр.

Если сумму  $\Phi$  подставить в функционал, то он превратится в функцию  $k$  переменных

$$F(a_1, \dots, a_k) = g^* \sum_{n,m=1}^k p_{nm} a_n a_m - \omega^2 \sum_{n,m=1}^k q_{nm} a_n a_m.$$

Из условия экстремума функции  $F(a_1, \dots, a_k)$  получим  $k$  однородных уравнений для определения неизвестных  $a_1, \dots, a_k$ :

$$g^* \sum_{m=1}^k p_{nm} a_m - \omega^2 \sum_{m=1}^k q_{nm} a_m = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, k). \quad (6.3.29)$$

Для нетривиального решения определитель системы должен быть равен нулю

$$\left| g^* p_{nm} - \omega^2 q_{nm} \right|_{n,m=1}^k = 0. \quad (6.3.30)$$

Из решения этого уравнения можно определить  $k$  частот свободных колебаний жидкости. Каждой  $\omega_n$  соответствует решение (6.3.29), которое дает  $n$ -ую форму свободных колебаний жидкости. При  $k \rightarrow \infty$  решение будет стремиться к точному.

Приведем результаты численных решений, полученных при помощи вариационного метода, например, для сферического бака [58]. Параметры маятниковой системы в этой работе выражены через некоторые безразмерные величины  $\tilde{\omega}_n$ ,  $v_n$ ,  $v_{0n}$  и  $p_n$  следующим образом:

$$\omega_n^2 = \tilde{\omega}_n^2 \frac{g}{r_0}; \quad m_n^* = \rho r_0^3 \frac{v_n^2}{p_n}; \quad l_n^* = r_0 \frac{v_{0n}}{v_n},$$

где  $l_n^*$  - расстояние от точки подвеса маятника до некоторой характерной точки  $O$  полости.

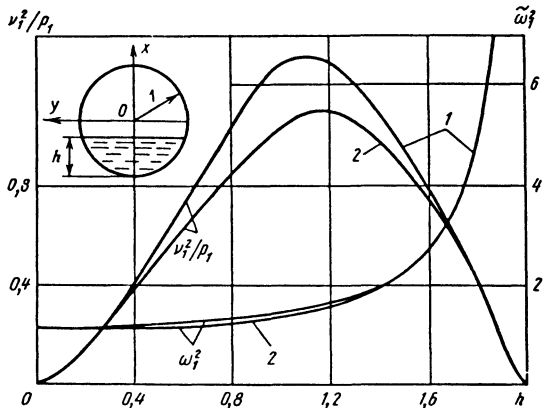


Рис. 6.3.5. Графики  $\frac{v_1^2}{p_1}(h)$  и  $\tilde{\omega}_1^2(h)$  для сферического бака

На рис. 6.3.5 показаны результаты расчетов для сферического бака. Кривые 1 соответствуют значениям, полученным с использованием сферических функций Лежандра, кривые 2 - значениям, полученным с использованием функций Бесселя. Результаты расчетов для других форм баков можно найти в работе [58].

**6.3.4. КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО БАКА С НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ**

**Постановка задачи.** Жидкость и упругая оболочка бака образуют единую колебательную систему. Дифференциальные уравнения колебаний оболочки можно представить в виде

$$L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X;$$

$$L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = Y;$$

$$L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z.$$

Здесь  $L_{11}, L_{12}, \dots$  - некоторые дифференциальные операторы;  $u, v, w$  - проекции вектора полного перемещения оболочки на оси координат соответственно  $x, y, z$ ;  $\rho_0, h_0$  - плотность материала и толщина оболочки;  $X, Y, Z$  - проекции на оси координат вектора внешних распределенных сил, действующих на оболочку.

Давление жидкости  $p_S$  на смачиваемую поверхность  $S$ , а также давление газов в баке включаются в распределенные силы  $X, Y, Z$  как внешние.

Таким образом, решения уравнений (6.3.2) и (6.3.31) при установившихся колебаниях должны удовлетворять совместным граничным условиям на смачиваемой поверхности

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_S = \frac{\partial w_n}{\partial t}, \tag{6.3.32}$$

где  $w$  - перемещение оболочки по нормали к поверхности и, кроме того, решение (6.3.31) должно удовлетворять геометрическим или силовым условиям на некоторых контурах, а решение (6.3.2) - условию на свободной поверхности (6.3.5). Трудности решения задачи заключаются в удовлетворении условия совместности колебаний (6.3.32), поскольку потенциал  $\Phi$  и перемещение  $w_n$  в общем случае выражаются наборами различных координатных функций. С методами решения можно ознакомиться в [25, 39, 53].

**Определение основной частоты свободных колебаний методом Рэлея.** Потенциальную энергию системы упругий бак - несжимаемая жидкость выразим через коэффициент приведенной жесткости  $\kappa_{пр}$

$$\Pi = \frac{1}{2} \kappa_{пр} \dot{\rho}^2(t), \tag{6.3.33}$$

а кинетическую энергию - через коэффициент приведенной массы  $m_{пр}$

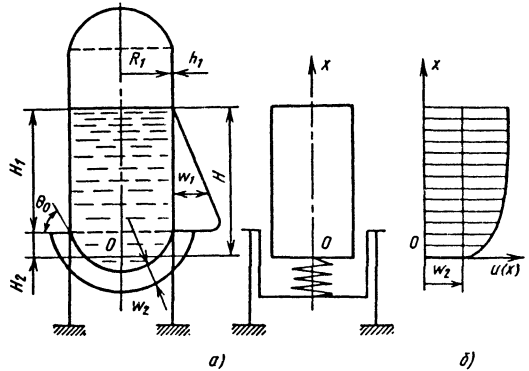
$$T = \frac{1}{2} m_{пр} \dot{\rho}^2(t) = \frac{1}{2} m_{пр} \omega^2 q^2(t). \tag{6.3.34}$$

На основании (6.2.32)

$$\omega^2 = \frac{\kappa_{пр}}{m_{пр}}. \tag{6.3.35}$$

Для вычисления  $\kappa_{пр}$  и  $m_{пр}$  выбираем формы колебаний оболочки и жидкости, близкие к предполагаемой форме колебаний основного тона. Для оболочки примем форму ее статического прогиба.

Метод проиллюстрируем на примере продольных осесимметричных колебаний кругового цилиндрического бака с пологим сферическим дном (рис. 6.3.6).



**Рис. 6.3.6. Схема упругих перемещений столба жидкости в баке**

Максимальная величина потенциальной энергии обечайки и дна бака, соответствующая деформациям от гидростатического давления жидкости с удельным весом  $\gamma$ ,

$$\Pi_{\max} = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3; \quad 2\Pi_{\max} = \kappa_{пр} \rho$$

где потенциальная энергия обечайки

$$\Pi_1 = \frac{\pi \gamma^2 R_1^3 H_1^3}{3 E h_1}; \tag{6.3.36}$$

потенциальная энергия дна бака, находящегося под действием постоянного давления  $\gamma H$ ,

$$\Pi_2 = \frac{\pi R_2^3 \gamma^2 H^2 H_2' (1 - \mu)}{2 E h_2} \tag{6.3.37}$$

где  $H_2'$  - высота сферического сегмента.

Потенциальная энергия силового кольца, установленного в месте соединения обечайки с дном бака,

$$\Pi_3 = \frac{\pi R_1^5 \gamma^2 H^2}{4 E F_k} \text{ctg}^2 \theta_0, \tag{6.3.38}$$

где  $F_k$  - площадь поперечного сечения кольца.

Максимальную величину кинетической энергии жидкости определим в предположении,

что в радиальном направлении она мала по сравнению с энергией ее движения вдоль оси цилиндра и скорость частиц жидкости в направлении оси цилиндра не зависит от радиуса. Форма колебаний жидкости вдоль оси цилиндра  $u(x)$  представлена на рис. 6.3.6. Непротекаемый разрыв перемещений  $w_1$  и  $w_2$  в месте соединения обечайки бака с дном бака объясняется тем, что указанные перемещения определены без учета краевого эффекта. Функция  $u(x)$  состоит из двух частей:  $w_2$  - перемещения вместе с дном бака и  $w_1$  - перемещения, вызываемого увеличением диаметра обечайки:

$$u_x = w_2 + \frac{\gamma x \left( H - \frac{x}{2} \right)}{E_{\text{пп}}}, \quad E_{\text{пп}} = E \frac{h_1}{2R_1}. \quad (6.3.39)$$

Тогда

$$T_{\text{max}} = \frac{1}{2} \int_0^H \frac{\pi R_1^2 \gamma}{g} \omega^2 u_x^2 dx = \frac{1}{2} m_{\text{пп}} \omega^2, \quad (6.3.40)$$

где

$$m_{\text{пп}} = \frac{\pi R_1^2 \gamma H}{g} \left( w_2^2 + \frac{2w_2 \gamma H^2}{3E_{\text{пп}}} + \frac{2\gamma^2 H^4}{15E_{\text{пп}}} \right). \quad (6.3.41)$$

**Вынужденные продольные колебания** гидромеханической системы, включающей упругие баки с жидкостью, удобно анализировать, заменив бак с жидкостью механическим аналогом - твердым телом с упругоподвешенными на продольной оси бака сосредоточенными массами (см. рис. 6.3.6). Каждый осциллятор соответствует одному тону колебаний упругой оболочки с жидкостью. Пружина должна передавать осевую силу на стенки бака в том сечении, в котором передается через днище вес жидкости. Нормировка для масс  $m_n$  осцилляторов (автоматически и для  $k_n$ , поскольку  $\omega_n$  известны) должна быть такой, чтобы сумма масс всех осцилляторов равнялась массе жидкости в баке

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n = m.$$

При учете только  $k$  тонов колебаний принимаем для  $n > k$  все  $k_n = \infty$ .

Подробнее об этом см. [45].

### 6.3.5. ОДНОМЕРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ЖЕСТКОЙ ПРЯМОЙ ТРУБЕ

**Уравнения колебаний.** В случае длинной трубы (с диаметром, малым по сравнению с длиной) и низких частот колебаний (длина волны велика по сравнению с диаметром трубы), а также малого внутреннего трения в жидкости можно считать, что в каждой точке поперечного

сечения потока скорость и давление одинаковые, поток жидкости одномерный.

Линеаризованные динамическое уравнение возмущенного движения жидкости в трубе и уравнение неразрывности можно представить в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad (6.3.42)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v_0 \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (6.3.43)$$

где  $\rho_0$ ,  $v_0$  - плотность и скорость жидкости в невозмущенном потоке (считаем их постоянными по длине трубы);  $v = v(x, t)$ ,  $p = p(x, t)$ ,  $\rho = \rho(x, t)$  - малые возмущения скорости, давления и плотности жидкости.

Уравнения (6.3.42) и (6.3.43) можно представить в безразмерном виде и объединить в одно уравнение

$$\left( 1 - M^2 \right) \frac{\partial^2 \tilde{v}(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - 2M \frac{\partial^2 \tilde{v}(\xi, \tau)}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{\partial^2 \tilde{v}(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = 0, \quad (6.3.44)$$

в котором безразмерные величины

$$M = \frac{v_0}{a_0}; \quad \tau = \frac{a_0}{l} t; \quad \xi = \frac{x}{l}; \quad \tilde{v}(\xi, \tau) = \frac{v}{a_0}, \quad (6.3.45)$$

где  $l$  - длина трубы;  $a_0$  - скорость звука в невозмущенном потоке.

Соотношение между давлением и скоростью

$$\tilde{p}(\xi, \tau) = -M \tilde{v}(\xi, \tau) - \int \frac{\partial \tilde{v}(\xi, \tau)}{\partial \tau} d\xi. \quad (6.3.46)$$

**Граничные и начальные условия.** Решение уравнения (6.3.44) с учетом (6.3.46) должно удовлетворять граничным и начальным условиям. Для стационарных колебаний, которые определяются частным решением дифференциального уравнения, начальные условия не имеют значения. В простейших случаях граничные условия будут следующими:

$$\text{для открытого конца трубы } \tilde{p}(\xi, \tau) = 0; \quad (6.3.47)$$

$$\text{для закрытого конца трубы } \tilde{v}(\xi, \tau) = 0. \quad (6.3.48)$$

Открытый и закрытый концы трубы следует понимать в акустическом смысле: при  $p_0 = \text{const } \tilde{p}(\xi, \tau) = 0$ , при  $v = \text{const } \tilde{v}(\xi, \tau) = 0$ .

При наличии сопротивления, местной податливости граничным условием может быть

$$\tilde{p}(\xi, \tau) / \tilde{v}(\xi, \tau) = Z = M\psi + i\alpha \quad (6.3.49)$$

или

$$\tilde{v}(\xi, \tau) / \tilde{p}(\xi, \tau) = Z^*. \quad (6.3.50)$$

Комплексное число  $Z$  (комплексное сопротивление) обычно называют граничным импедансом, причем  $M\psi$  - коэффициент активного сопротивления;  $\alpha$  - коэффициент реактивного сопротивления;  $Z^*$  - комплексная проводимость.

**Свободные колебания сжимаемой жидкости в прямой трубе.** К уравнению (6.3.44) применим метод Фурье

$$\tilde{v}(\xi, \tau) = \tilde{v}(\xi)e^{i\tau}; \tilde{p}(\xi, \tau) = \tilde{p}(\xi)e^{i\tau}, \quad (6.3.51)$$

где  $s$  - безразмерная частота колебаний.

Полагая, кроме того,  $\tilde{v}(\xi) = Ce^{k\xi}$ , найдем

$$k_1 = \frac{is}{1-M}; k_2 = -\frac{is}{1+M}. \quad (6.3.52)$$

Учитывая дополнительно (6.3.46), получим уравнения форм колебаний скорости  $\tilde{v}(\xi)$  и давления  $\tilde{p}(\xi)$ :

$$\tilde{v}(\xi) = C_1 e^{k_1 \xi} + C_2 e^{k_2 \xi}; \quad (6.3.53)$$

$$\tilde{p}(\xi) = C_2 e^{k_2 \xi} - C_1 e^{k_1 \xi}.$$

На концах трубы

$$\tilde{v}(0) = C_1 + C_2; \tilde{v}(l) = C_1 e^{k_1 l} + C_2 e^{k_2 l}; \quad (6.3.54)$$

$$\tilde{p}(0) = C_2 - C_1; \tilde{p}(l) = C_2 e^{k_2 l} - C_1 e^{k_1 l}.$$

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  могут быть определены из граничных условий.

**Пример:**  $\tilde{p}(0) = 0, \tilde{v}(l) = 0$ . Подставляя эти условия в (6.3.54), получим характеристическое уравнение в виде

$$e^{k_1 - k_2} = 1. \quad (6.3.55)$$

Частота свободных колебаний, вообще говоря, является комплексным числом, поэтому положим

$$s = i\nu + \Omega, \quad (6.3.56)$$

где  $\nu$  и  $\Omega$  - вещественные числа.

С учетом (6.3.52), (6.3.56) получим

$$k_1 - k_2 = -\frac{2\nu}{1-M^2} + i\frac{2\Omega}{1-M^2}.$$

Запишем (6.3.55) в тригонометрической форме, приравняв нулю отдельно вещественную и мнимую его части:

$$\exp\left(\frac{-2\nu}{1-M^2}\right) \cos\frac{2\Omega}{1-M^2} = -1;$$

$$\exp\left(\frac{-2\nu}{1-M^2}\right) \sin\frac{2\Omega}{1-M^2} = 0.$$

Поскольку  $\exp\left(\frac{-2\nu}{1-M^2}\right) > 0$ , находим

$$\nu = 0, \frac{2\Omega_n}{1-M^2} = (2n-1)\pi \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Частота свободных колебаний

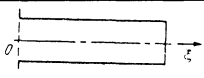
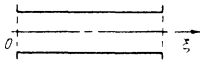
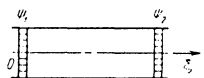
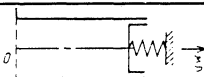
$$\Omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}(1-M^2) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Размерная частота

$$\omega_n = \Omega_n \frac{a_0}{l}.$$

При наличии сопротивлений  $\nu > 0$  колебания будут затухающими. Некоторые результаты для других граничных условий приведены в табл. 6.3.1.

6.3.1. Граничные условия и безразмерные частоты свободных колебаний сжимаемой жидкости в прямой трубе

Схема, граничные условия	Коэффициент затухания $\nu$ , частота свободных колебаний $\Omega$
 $\tilde{p}(0) = 0; \tilde{v}(l) = 0$	$\nu = 0; \Omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}(1-M^2)$
 $\tilde{p}(0) = 0; \tilde{p}(l) = 0$	$\nu = 0; \Omega_n = n\pi(1-M^2)$
 $\tilde{p}(0) = -M\tilde{\psi}_1\tilde{v}(0); \tilde{p}_1(1) = M\tilde{\psi}_2\tilde{v}(1)$	$\nu = \frac{1-M^2}{2} \ln \frac{(1+\tilde{\psi}_1 M)(1+\tilde{\psi}_2 M)}{(1-\tilde{\psi}_1 M)(1-\tilde{\psi}_2 M)}$ ; $\Omega_n = n\pi(1-M^2)$
 $\tilde{p}(0) = 0; \tilde{v}(1) = i\alpha_2^* \tilde{p}(1)$ , где $\alpha_2^*$ - коэффициент реактивной проводимости	$\nu = 0; \text{tg } \Omega = \frac{1}{\Omega \alpha_2^*}$

**Бегущие волны** (кроме рассмотренных стоячих волн) характеризуют движение по трубе акустических импульсов  $\tilde{u}_1(\xi, \tau)$  и  $\tilde{u}_2(\xi, \tau)$  [14]:

$$\tilde{u}_1(\xi, \tau) = \frac{1}{2} [\tilde{v}(\xi, \tau) + \tilde{p}(\xi, \tau)]; \quad (6.3.57)$$

$$u_2(\xi, \tau) = \frac{1}{2} [\tilde{v}(\xi, \tau) - \tilde{p}(\xi, \tau)].$$

Из (6.3.42), (6.3.43) можно получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tau} + (1+M) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi} &= 0; \\ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tau} + (1-M) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned} \quad (6.3.58)$$

Применив для решения (6.3.58) метод Даламбера, представим

$$\tilde{u}_1(\xi, \tau) = F_1[\xi - (1+M)\tau];$$

$$\tilde{u}_2(\xi, \tau) = F_2[\xi - (M-1)\tau],$$

где  $F_1, F_2$  - произвольные дифференциальные функции.

При соотношении

$$\xi - (1+M)\tau = \xi_1 = \text{const}$$

функция  $\tilde{u}_1(\xi, \tau) = F_1(\xi_1)$  - мгновенная "фотография" волны. Если в момент  $\tau=0$  "гребень" волны  $\tilde{u}_1(\xi, \tau)$  имел координату  $\xi_1$ , то он будет перемещаться по закону

$$\xi = \xi_1 + (1+M)\tau;$$

аналогично для гребня  $\tilde{u}_2(\xi, \tau)$

$$\xi = \xi_2 + (M-1)\tau.$$

Движения волны  $\tilde{u}_1$  и волны  $\tilde{u}_2$  без изменения их формы происходят в положительном направлении  $\xi$  со скоростями соответственно  $(1+M)$  и  $(M-1)$  или  $\tilde{u}_1$  - по потоку со скоростью  $1+M$ ,  $\tilde{u}_2$  - против потока со скоростью  $(1-M)$ .

Граничные условия для функций  $\tilde{u}_1$  и  $\tilde{u}_2$  следующие. Для открытого конца трубы  $\tilde{p} = 0$ , тогда из (6.3.57)  $\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 = 0$  или  $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$ ; бегущая волна от открытого конца "отражается" для движения в обратном направлении с тем же знаком. Для закрытого конца трубы  $\tilde{v} = 0$ ,  $\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 = 0$ ,  $\tilde{u}_1 = -\tilde{u}_2$ , бегущая волна "отражается" с обратным знаком. Если на конце трубы имеется "активное" сопротивление с коэффициентом  $M\tilde{\psi}_2$ , то на этом конце  $\tilde{p}_2 = \tilde{\psi}_2 M\tilde{v}_2$ . Из (6.3.57) найдем

$$\tilde{u}_2 = \frac{1 - \tilde{\psi}_2 M}{1 + \tilde{\psi}_2 M} \tilde{u}_1.$$

При  $\tilde{\psi}_2 M < 1$  интенсивность отраженной волны уменьшается, затухание колебаний увеличивается с увеличением  $\tilde{\psi}_2 M$ .

**Вынужденные колебания.** Из формул (6.3.54) получим соотношения между параметрами потока  $\tilde{v}(1)$ ,  $\tilde{p}(1)$  в конце трубы и параметрами потока  $\tilde{v}(1)$ ,  $\tilde{p}(1)$  в начале трубы. При  $M \neq 0$  получим

$$\begin{aligned} \tilde{v}(1) &= \tilde{v}(0) \text{ch}k + \tilde{p}(0) \text{sh}k; \\ \tilde{p}(1) &= \tilde{v}(0) \text{sh}k + \tilde{p}(0) \text{ch}k, \end{aligned} \quad (6.3.59)$$

где  $k = k_2 = is$ .

Определим вынужденные колебания давления и скорости на выходе из трубы, вызванные колебаниями давления на входе в трубу. Примем, что на входе в трубу и на выходе из трубы имеются соответственно комплексное сопротивление  $Z(0)$  и комплексная проводимость  $Z^*(1)$ . Тогда

$$\tilde{p}^* = \tilde{p}(0) Z(0) \tilde{v}(0); \quad (6.3.60)$$

$$\tilde{v}(1) = Z^*(1) \tilde{p}(1), \quad (6.3.61)$$

где  $\tilde{p}^*$  - возмущение давления перед входом в трубу.

Исключив из (6.3.59) - (6.3.61)  $\tilde{v}(0)$ , получим

$$\tilde{p}(1) = \tilde{p}^* \frac{1}{(1 + Z(0)Z^*(1)) \text{cos} s + [Z(0) + Z^*(1)] \text{sin} s}, \quad (6.3.62)$$

где  $s$  - частота вынужденных колебаний.

Подставив  $\tilde{p}(1)$  из (6.3.62) в (6.3.61), получим  $\tilde{v}(1)$ .

### 6.3.6. КОЛЕБАНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОЙ УПРУГОЙ ТРУБЕ

#### Учет упругости трубы в одномерной задаче.

Результаты решения одномерной задачи (6.3.5) можно распространить на движение потока в упругой трубе; вследствие упругости трубы поток получает как бы большую сжимаемость в осевом направлении. Если считать трубу состоящей из ряда колец, подвергающихся растяжению-сжатию, то модуль упругости столба жидкости  $E_1$ , обусловленный упругостью стенок трубы,

$$E_1 = E \frac{h}{2r_0},$$

где  $E$  - модуль упругости материала трубы;  $h$ ,  $r_0$  - толщина и радиус трубы.

Эквивалентный (с учетом упругости трубы) модуль сжатия жидкости

$$E_3 = \frac{E_1 E_{ж}}{E_1 + E_{ж}} = E_{ж} \frac{1}{1 + \frac{E_{ж}}{E} \frac{2r_0}{h}}, \quad (6.3.63)$$

где  $E_{ж}$  - модуль сжатия жидкости.

Эквивалентная скорость звука в жидкости в упругой трубе  $a_3 = \sqrt{E_3 / \rho}$  будет меньше скорости звука в жидкости  $a_0$  в жесткой трубе:

$$a_3 = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \alpha_t^2}}; \quad \alpha_t^2 = \frac{2\rho_0 a_0^2 r_0}{hE}. \quad (6.3.64)$$

Формула (6.3.64) носит название формулы Н. Е. Жуковского.

Скорость звука можно значительно уменьшить впрыском в жидкость пузырьков газа.

С увеличением отношения радиуса трубы к длине, точнее к длине упругой волны, одномерная постановка задачи может оказаться грубой.

**Двумерная задача.** Рассматриваются малые осесимметричные колебания жидкости и стенок трубы; труба - тонкостенная безмоментная цилиндрическая оболочка круглого поперечного сечения.

Безразмерные параметры:

$$\eta = \frac{r}{r_0}; \quad \alpha = \frac{\rho^*}{\rho_0}; \quad \tilde{h} = \frac{h}{r_0}; \quad \beta = \frac{r_0}{l}; \quad \gamma^2 = \frac{E}{\rho_0 a_0^2};$$

$$\tilde{w}(\xi, \tau) = \frac{w(x, t)}{r_0}; \quad \tilde{p}(\xi, \tau) \Big|_{\eta=1} = \frac{p(r_0, x, t)}{a_0^2 \rho_0}; \quad (6.3.65)$$

здесь  $\rho^*$  - плотность материала трубы;  $\rho_0$ ,  $a_0$  - плотность невозмущенного столба жидкости и скорость звука в нем;  $l$  - длина трубы;  $w(x, t)$  - радиальные осесимметричные перемещения стенки трубы;  $p(r, x, t)$  - динамическое давление жидкости в трубе.

Система дифференциальных уравнений: для оболочки трубы

$$\alpha \tilde{h} \beta^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} + \gamma^2 \tilde{h} \tilde{w}(\xi, \tau) = \tilde{p}(\xi, \tau) \Big|_{\eta=1}; \quad (6.3.66)$$

для жидкости

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \beta^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} \right) = 0. \quad (6.3.67)$$

Давление жидкости

$$\tilde{p}(\eta, \xi, \tau) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}. \quad (6.3.68)$$

Граничные условия:

на стенках трубы

$$\beta^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau} = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \quad \text{при } \eta=1; \quad (6.3.69)$$

на концах трубы: открытом  $\partial \Phi / \partial \tau = 0$ , закрытом  $\partial \Phi / \partial \xi = 0$ .

Решение уравнений (6.3.66), (6.3.67) находим в виде

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} i \Omega_n D_n R_n(\eta) X_n(\xi) e^{i \Omega_n \tau}; \quad (6.3.70)$$

$$\tilde{w} = \frac{1}{\beta^2} \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi) e^{i \Omega_n \tau} \quad (6.3.71)$$

Из (6.3.67) с учетом (6.3.70) получаем

$$\frac{d^2 X_n(\xi)}{d\xi^2} + \alpha_n^2 X_n(\xi) = 0; \quad (6.3.72)$$

$$\frac{d^2 R_n(\eta)}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dR_n(\eta)}{d\eta} + \mu_n^2 R_n(\eta) = 0, \quad (6.3.73)$$

где

$$\mu_n^2 = \beta^2 \Omega_n^2 \sigma_n; \quad \sigma_n = 1 - \frac{\alpha_n^2}{\Omega_n^2}. \quad (6.3.74)$$

Из (6.3.73) находим  $R_n(\eta) = J_0(\mu_n \eta)$ , из (6.3.69), (6.3.70) и (6.3.71)  $D_n = 1 / J_0'(\mu_n)$ . Из (6.3.66) имеем

$$\left[ \alpha \tilde{h} + \frac{J_0(\mu_n)}{J_0'(\mu_n)} \right] \Omega_n^2 = \frac{\gamma^2 \tilde{h}}{\beta^2} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (6.3.75)$$

При  $\Omega_n^2 < \gamma^2 / \alpha \beta^2$  из (6.3.75) заключаем, что корни  $\mu_n$  функций Бесселя должны быть мнимыми; из (6.3.74) найдем, что  $\sigma_n < 0$ ,  $\alpha_n^2 > 0$ . Из (6.3.72) и граничных условий на концах трубы получим

$$X_n(\xi) = \sin \alpha_n \xi.$$

Например, для трубы, открытой с одного конца,

$$\alpha_n = \frac{(2n-1)}{2} \pi \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Коэффициенты  $\mu_n$  являются корнями уравнения (6.3.75). Заменим в нем  $\Omega_n^2$  из (6.3.74):

$$\Omega_n^2 = \frac{\mu_n^2}{\beta^2} + \alpha_n^2. \quad (6.3.76)$$

Получим

$$J_0(\mu_n) \left( \mu_n^2 + \beta^2 \alpha_n^2 \right) = J_0'(\mu_n) \left[ \gamma^2 \tilde{h} - \alpha \tilde{h} \left( \mu_n^2 + \beta^2 \alpha_n^2 \right) \right]; \quad (6.3.77)$$

Каждому  $\alpha_n$  соответствует одно  $\mu_n$ . Зная  $\mu_n$ , по (6.3.76) находим  $\Omega_n$  и размерную частоту

$$\omega_n = \Omega_n \frac{a_0}{l}. \quad (6.3.78)$$

**Сравнение эквивалентных скоростей звука жидкости в одномерной и двумерной задачах.** Частоту свободных колебаний (6.3.78) с учетом (6.3.76) представим в виде

$$\omega_n = \alpha_n \frac{a_0}{l} \sqrt{1 + \frac{\mu_n^2}{\beta^2 \alpha_n^2}}$$

Назовем эквивалентной скоростью звука, соответствующую  $n$ -му тону колебаний, величи- ну

$$a_{эп} = a_0 \sqrt{1 + \alpha_{тп}^2}; \quad \alpha_{тп}^2 = \mu_n^2 / (\beta^2 \alpha_n^2). \quad (6.3.79)$$

Поскольку  $\mu_n^2 < 1$ , то  $\alpha_{тп}^2 < 1$  и  $a_{эп} < a_0$ .

**Пример.**  $\varkappa=2,8$ ;  $\tilde{h}=0,05$ ;  $\beta=0,05$ ;  $\gamma=6$ ;  $l=20$  м. В одномерной постановке по формулам (6.3.64)  $\alpha_r^2=1,11$ ;  $a_3=0,69a_0$ .

В двумерной постановке для трубы, закры- той с одного конца, длина волны первого тона колебаний равна  $4l$ , десятого тона  $0,21l$ , или  $4,2r_0$ ,  $\alpha_n=(2n-1)\pi/2$ , при  $n=1, 5, 10, 20$  будем иметь соответственно  $\alpha_{r1}^2 = -0,525$ ,  $\alpha_{r5}^2 = -0,54$ ;  $\alpha_{r10}^2 = -0,575$ ;  $\alpha_{r20}^2 = -0,652$ .

Тогда

$$\alpha_{31} = 0,690a_0; \quad a_{35} = 0,68a_0; \quad a_{310} = 0,65a_0; \\ a_{320} = 0,59a_0.$$

Из сравнения численных результатов сле- дует, что эквивалентная скорость звука  $a_{эп}$ , вы- численная с учетом радиальных колебаний жид- кости, в рассмотренном примере до пятого тона колебаний мало отличается от  $a_3$ , вычисленной по формуле Н. Е. Жуковского.

### Глава 6.4

## АВТОКОЛЕБАНИЯ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 6.4.1. ОСОБЕННОСТИ АВТОКОЛЕБАНИЙ [4, 85, 88]

Автоколебательные системы имеют источ- ник энергии, они принципиально нелинейны и неконсервативны. Это обуславливает возмож- ность существования стационарных колебаний, что в рамках представлений о фазовой плоскости означает наличие предельных циклов - замкну- тых фазовых траекторий. Принципиальная схема простейшей автоколебательной системы (рис. 6.4.1) включает три минимально необходимые составные части: колебательную систему, источ- ник энергии, причем неколебательного свойства, и обратную связь, которая управляет поступле- нием энергии от источника в колебательную систему.

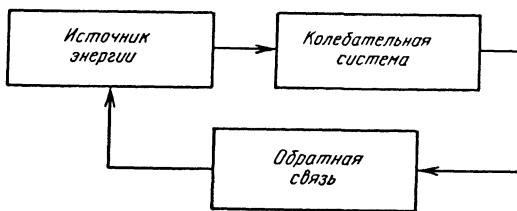


Рис. 6.4.1. Принципиальная схема автоколебательной системы

Простейшая автоколебательная система (рис. 6.4.2) - маятник на вращающемся валу с падающей характеристикой момента сил трения. Здесь колебательная система - маятник, источ- ник энергии - вращающийся с постоянной ско- ростью вал, обратная связь - характеристика трения, которая обуславливает отбор энергии от вала за каждый период колебаний.

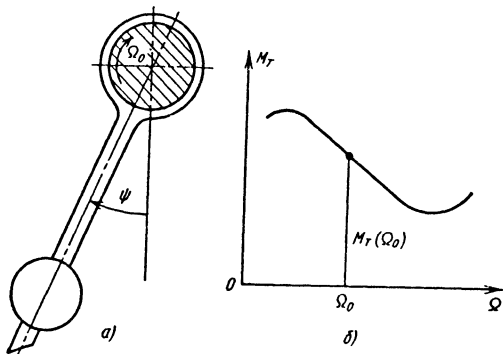


Рис. 6.4.2. Маятниковая автоколебательная система

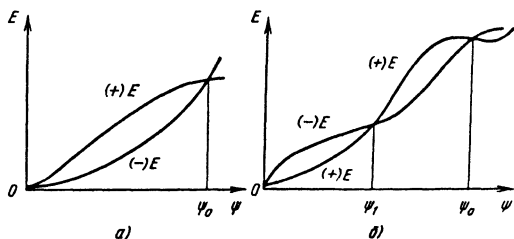
Линеаризованное относительно  $\Omega_0$  уравне- ние колебаний маятника с применением подста- новки  $\psi_1 = \psi + \frac{M_T(\Omega_0)}{mga\omega^2}$ , где  $\Omega_0 = \text{const}$  - угло- ная скорость вращения вала;  $M_T(\Omega_0)/mga\omega^2 = \text{const}$  приводится к виду

$$\ddot{\psi} + 2n\dot{\psi} + \omega^2 \psi = 0. \quad (6.4.1)$$

По величине коэффициента при первой производной  $n = [h + dM_T/d\Omega]/2I$ , где  $\Omega = \Omega_0 - \dot{\psi}$ , можно сделать заключение об ус- тойчивости колебаний. При  $dM_T/d\Omega > 0$  коле- бания будут затухающими, маятник теряет энергию; если  $dM_T/d\Omega < 0$ , при этом  $|dM_T/d\Omega| > h$ , колебания будут нарастающими, маятник приобретает энергию, система неустой- чива.

С нарастанием амплитуд на некоторой части периода колебаний (см. рис. 6.4.2, б) может быть  $dM_T/d\Omega > 0$ , нарастание амплитуд замедлится и при некотором значении  $\Omega^*$ , соответствующем  $\dot{\psi}^*$ , установятся стационарные колебания с амплитудой  $\psi_0^*$  - автоколебания. Процесс развития колебаний во времени можно трактовать так: вначале неустойчивость, затем вследствие нелинейности ограничение амплитуд и установление автоколебаний.

Амплитуда и частота автоколебаний могут быть найдены только из решения нелинейного уравнения. Для систем, у которых небольшие нелинейности упругой характеристики, малый приток энергии и малое ее рассеяние за период колебаний, форма колебаний близка к гармонической, частота автоколебаний близка к частоте свободных колебаний. Такие колебательные системы называют системами осцилляторного типа, в физике их называют томпсоновскими автоколебательными системами.



**Рис. 6.4.3. Энергетические соотношения при автоколебаниях:** (+)E - энергия, поступающая в систему за период колебаний; (-)E - энергия, теряемая системой

Установление стационарных режимов, их устойчивость удобно проиллюстрировать с помощью энергетических соотношений (рис. 6.4.3). Для стационарных автоколебаний справедлив энергетический баланс системы  $\int_0^T E(t)dt = 0$  ( $T$  -

период колебаний), при этом в течение одной части периода происходит пополнение колебательной энергии, в течение другой его части - уменьшение энергии. На рис. 6.4.3, а колебания с амплитудой  $\psi_0$  - устойчивые, стационарные; такие колебательные системы способны к самовозбуждению, поскольку положение  $\psi=0$  неустойчиво. На рис. 6.4.3, б положение  $\psi=0$  устойчиво, колебания с амплитудами  $\psi < \psi_1$  - затухающие,  $\psi_1 < \psi < \psi_0$  - нарастающие, колебания с амплитудой  $\psi_0$  - устойчивые стационарные (автоколебания); для возбуждения автоколебаний здесь нужен "толчок"  $\psi > \psi_1$ , такая система ус-

тойчива "в малом", но неустойчива "в большом", ее называют системой с жестким возбуждением.

В сложных автоколебательных системах отдельные части системы совершают автоколебания с разными амплитудами, но с одной частотой.

Начальная фаза автоколебаний произвольна, поскольку произволен момент самовозбуждения и установление стационарного режима колебаний.

Дифференциальное уравнение автоколебательной системы с одной степенью свободы с нелинейной упругой характеристикой и нелинейной характеристикой поступления и рассеяния энергии имеет вид

$$\ddot{x} + \left( n + \beta x + \gamma x^2 \right) \dot{x} + \left( \omega_0^2 + \alpha x^2 \right) x = 0. \quad (6.4.2)$$

Для оценки устойчивости линеаризованной системы важное значение имеет коэффициент  $n$ , называемый коэффициентом регенерации. Он показывает соотношение между вложением и потерями энергии в колебательной системе. Если удовлетворяется требование  $\alpha \ll 1$ ,  $n \ll 1$ ,  $\beta \ll 1$ ,  $\gamma \ll 1$ , то к решению (6.4.2) для определения режимов автоколебаний применим метод медленно меняющихся амплитуд [2, 4, 1, 5].

Для простейших уравнений вида

$$\ddot{x} + \psi_0(x, \dot{x}) + \omega_0^2 x = 0$$

заменой  $\tau = \omega_0 t$ ,  $\dot{x} = y$  получаем уравнение фазовой траектории

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{[x + \psi(x, y)]}{y},$$

которая в случае автоколебаний должна быть замкнутой и устойчивой, т.е. к ней должны сходиться все фазовые траектории в близкой ее окрестности.

Автоколебательные системы имеют большое распространение: двигатели внутреннего сгорания и поршневые паровые машины, анкерные часовые механизмы, радиоприемные и радиопередающие устройства, смычковые и духовые музыкальные инструменты - все они нуждаются в совершенствовании автоколебаний.

Существуют потенциально автоколебательные системы, для которых рабочий режим не автоколебательный, но в них могут возникать автоколебания, например, самолеты и управляемые ракеты (флаттер), автомобили (шумми), регуляторы, ламповые усилители и др. Для них автоколебания вредны, опасны; здесь задача конструкторов - не допускать их возникновения, т.е. не допускать неустойчивости рабочего режима. Поэтому для потенциально автоколебательных систем требуется по линеаризованным уравнениям решать задачу об устойчивости движения, для чего в зависимости от степени дифференциальных уравнений применяют различные



критерии, например, алгебраический Рауса-Гурвица, частотный и др.

Флаттер модели крыла можно представить схематически как колебания в системе с двумя степенями свободы, причем каждая парциальная система не может возбудиться; только наличие связи между системами делает ее автоколебательной. Флаттер крыла самолета недопустим. Поэтому практически очень важно определить только условия самовозбуждения, из которых найти изменения параметров, исключающих возможность самовозбуждения.

На рис. 6.4.4, а показана схема поперечного сечения жесткого профиля крыла, закрепленного на двух пружинах с разными жесткостями  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  и подверженного действию набегающего потока воздуха со скоростью  $v$ . При поперечном перемещении крыла пружины с разной жесткостью обеспечивают в общем случае изгиб крыла совместно с его кручением.

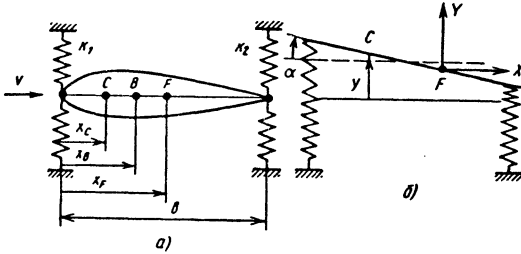


Рис. 6.4.4. Модель для исследования флаттера крыла

Система распределенных по поверхности крыла аэродинамических сил приводится к главному вектору  $R$ , приложенному в фокусе  $F$  и представленному в виде подъемной силы  $Y$  и силы лобового сопротивления  $X$ . Для малых колебаний в потоке идеального газа в определенной области частот с достаточной степенью приближения

$$Y = qSc_y^{(\alpha)}\alpha; X = qSc_x,$$

где  $q = \rho v^2/2$  - скоростной напор;  $\rho$  - плотность воздуха;  $S$  - площадь крыла;  $c_y^{(\alpha)}, c_x$  - коэффициенты подъемной силы и силы лобового сопротивления;  $\alpha$  - угол поворота крыла - угол атаки. Зависимости силы  $Y$  от скоростей поперечного перемещения крыла  $\dot{y}$  и  $\dot{\alpha}$  здесь для простоты во внимание не принимаются. Коэффициенты  $c_y^{(\alpha)}, c_x$ , а также положение фокуса  $F$  считаются известными.

Уравнения малых изгибно-крутильных колебаний крыла (рис. 6.4.4, б) имеют вид

$$\ddot{y} + c_{11}y + c_{12}\alpha = 0; \ddot{\alpha} + c_{21}y + c_{22}\alpha = 0; \tag{6.4.3}$$

здесь  $y$  - перемещение центра масс крыла (точки  $C$ );

$$c_{11} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{m}; c_{12} = \frac{1}{m}[\kappa_1 x_C - \kappa_2(b - x_C) - qSc_y^{(\alpha)}];$$

$$c_{21} = \frac{1}{I}[\kappa_1 x_C - \kappa_2(b - x_C)];$$

$$c_{22} = \frac{1}{I}[\kappa_1 x_C^2 + \kappa_2(b - x_C)^2 - (x_F - x_C)qS(c_y^{(\alpha)} + c_x)]; \tag{6.4.4}$$

$m$  - масса крыла;  $I$  - момент инерции крыла относительно оси, проходящей через его центр масс;  $b$  - длина хорды крыла;  $x_C$  - координата центра масс крыла, отсчитываемая от ее передней кромки;  $x_F$  - координата аэродинамического фокуса.

Нетривиальное решение уравнений (6.4.3)

$$y = Ae^{i\omega t}; \alpha = Be^{i\omega t} \tag{6.4.5}$$

будет существовать, если определитель системы (6.4.3) равен нулю:

$$\omega^4 - \omega^2(c_{11} + c_{22}) + (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) = 0. \tag{6.4.6}$$

Квадраты частот колебаний

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{c_{11} + c_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2 - (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})} \tag{6.4.7}$$

зависят не только от жесткостей крыла на изгиб и кручение, но и от скорости набегающего потока (см. коэффициенты  $c_{12}$  и  $c_{22}$ ).

Если скорость потока  $v=0$ , система консервативна,

$$0 < (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) < \frac{1}{4}(c_{11} + c_{22})^2, \tag{6.4.8}$$

квадраты частот вещественные и положительные:  $\omega_1^2 > 0, \omega_2^2 > 0$ . после некоторого возмущения возникают изгибно-крутильные бигармонические колебания крыла, которые при наличии сопротивления будут затухающими. Система устойчива.

При наличии скорости  $v > 0$  изменяются значения коэффициентов  $c_{12}$  и  $c_{22}$  и, как следует из (6.4.7), возможны три случая:

1.  $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 0; \omega_1^2 = c_{11} + c_{22}, \omega_2^2 = 0$ . Аэродинамические силы уменьшают жесткость крыла на кручение (см. коэффициент  $c_{22}$ ). Скорость, при которой  $\omega_2^2 = 0$ , называют критической скоростью дивергенции. Крыло не способно сопротивляться закручиванию, возникает аэроупругая статическая неустойчивость, называемая в данном случае дивергенцией.

$$2. (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) > \frac{1}{4}(c_{11} + c_{22})^2. \quad (6.4.9)$$

Значения  $\omega_1^2, \omega_2^2$  являются комплексно-сопряженными, движение носит колебательный характер, но одно из слагаемых решения (6.4.5) безгранично возрастает. Это состояние называют флаттером. Скорость потока, при которой неравенство (6.4.9) становится равенством, называют критической скоростью флаттера. При малейшем увеличении этой скорости наступает флаттер.

3. Выполняется условие (6.4.8) при всех скоростях полета. Именно этому условию отвечают параметры крыла любого летающего самолета. При равенстве слева возникает дивергенция, при равенстве справа - флаттер.

Если неравенство справа (6.4.8) преобразовать к виду

$$(c_{11} - c_{22})^2 + 4c_{12}c_{21} > 0,$$

где

$$c_{12}c_{21} = \frac{1}{mI} \left\{ [\kappa_1 x_C - \kappa_2 (b - x_C)]^2 - qSc_y^{(\alpha)} [\kappa_1 x_C - \kappa_2 (b - x_C)] \right\},$$

то всегда  $c_{12}c_{21} > 0$ , если  $\kappa_1 x_C < \kappa_2 (b - x_C)$ .

Следовательно, для обеспечения противофлаттерной устойчивости надо центр масс приближать к передней кромке крыла и увеличивать жесткость  $\kappa_2$  по сравнению с  $\kappa_1$ . Другими словами, центр масс должен быть впереди центра жесткости (центром жесткости называют точку, обладающую тем свойством, что приложенная в ней вертикальная сила не вызывает поворотов поперечного сечения). Практически важно исследовать зависимость  $v_k$  или  $q_k$  от парциальных частот  $\omega_{изг} = \sqrt{c_{11}}$  и  $\omega_{кр} = \sqrt{c_{22}}$ , от положения оси жесткости  $x_B$  и от положения центра масс  $x_C$ . Эти исследования показывают, какими путями можно поднять критическую скорость флаттера.

#### 6.4.2. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ [85]

В отличие от осцилляторных систем, в которых колебания почти гармонические, в релаксационных системах автоколебания настолько сильно отличаются от гармонических, что имеют вид почти "разрывных" колебаний. Поэтому релаксационными (почти "разрывными") называют такие автоколебания, при которых имеет место скачкообразное изменение во времени некоторых колеблющихся величин. Примером может служить контур из RC элементов с источником энергии. Если в такой системе выполнены условия самовозбуждения, то форма генерируемых колебаний, как правило, далека от сину-

соидальной, а период колебаний зависит от времени релаксации. При разрыве обратной связи колебания в таких системах затухают аperiодически.

Примерами механических релаксационных автоколебательных систем являются механизмы ударного действия: пневматические молотки, паровые или воздушные молоты. В них нет обмена энергией между массой и пружиной, как в системах осцилляторного типа, здесь нет пружины, энергию запасает только масса и полностью ее отдает при ударе. Период колебаний складывается из времени подъема молота и времени его рабочего хода с ударом.

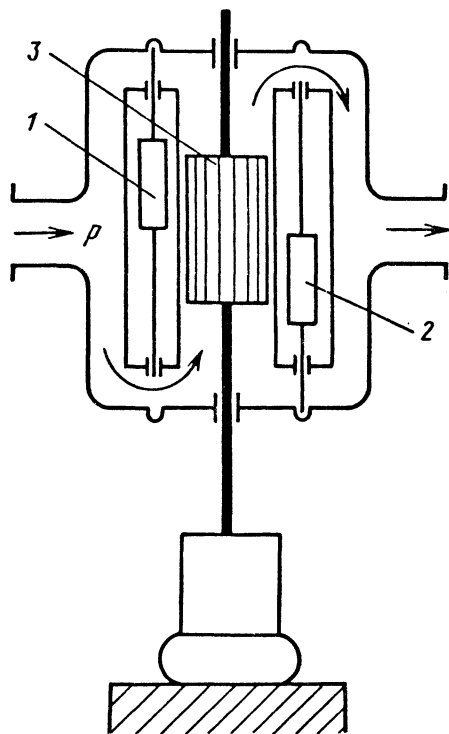


Рис. 6.4.5. Схема паровоздушного молота

Схема паровоздушного молота показана на рис. 6.4.5. Задвижки 1, 2, перекрывающие впускные и выпускные каналы, работают в противофазе, их движения связаны с движением поршня 3. При движении поршня вверх задвижка 1 занимает верхнее положение, 2 - нижнее; при движении поршня вниз - наоборот.

#### 6.4.3. ПОВЕДЕНИЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРИ ВНЕШНЕМ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

В зависимости от вида нелинейной характеристики автоколебательной системы, уровня внешнего гармонического воздействия, соотно-

шения частоты внешнего воздействия и частоты колебаний автоколебательной системы будут наблюдаться различные эффекты. Запишем линеаризованное уравнение [более простое, чем (6.4.2)] для выявления принципиальной стороны вопроса в виде

$$\ddot{x} + (2\varepsilon - \mu)\dot{x} + \omega_0^2 x = \lambda \sin pt. \quad (6.4.10)$$

При  $2\varepsilon > \mu$  система недовозбуждена, но затухание частично скомпенсировано положительной обратной связью (коэффициент  $\mu$ ). Самовозбуждения автоколебаний нет, вследствие регенерации происходит усиление внешнего воздействия на частоте  $p$ , резонансные кривые имеют такую же форму, как  $\chi$  и в системе с нелинейной характеристикой.

Если регенерация переходит в самовозбуждение ( $\mu > 2\varepsilon$ ), то наряду с вынужденными колебаниями на частоте  $p$  в системе появляются автоколебания на частоте  $\omega \approx \omega_0$ . При малых значениях  $\lambda$  и малых коэффициентах расстройки  $\xi = 1 - \omega_0^2/p^2$  возникает синхронный режим, когда система совершает колебания с одной частотой - частотой внешнего воздействия  $p$ . Вследствие нелинейного взаимодействия в такой системе могут возникать как биения, т.е. колебания с частотой  $\Omega = |p - \omega_0|$ , так и комбинационные составляющие с частотами вида  $|kp \pm m\omega_0|$ , где  $k, m$  - целые числа. На рис. 6.4.6 схематически показаны области биений и синхронизма для системы с мягким возбуждением;  $A$  - амплитуда, штриховые линии - амплитуда вынужденных колебаний, штрихпунктир - амплитуда автоколебаний.

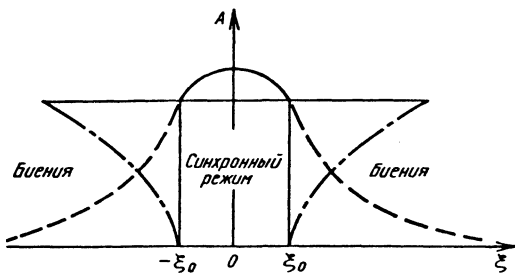


Рис. 6.4.6. Схематическое изображение изменения амплитуд автоколебаний при синхронизации

Более подробно о гармоническом воздействии см. в [56].

#### 6.4.4. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Термин “запаздывание” предполагает, что в системе причина возникает в момент  $t$ , а вызванное ею действие сил вследствие конечной

скорости передачи информации появляется с запазданием на время  $\Delta t = \tau$ . Математически учет подобного идеального запаздывания выражается тем, что время  $t$  в выражении для силы заменяется временем  $(t - \tau)$ . Большую роль играет запаздывание в акустических системах из-за относительно небольшой скорости распространения звука в газообразных, жидких и твердых средах.

Всякое запаздывание  $\tau$  для гармонических колебаний может быть записано в виде некоторого фазового сдвига  $\omega(t - \tau) = \omega t - \omega\tau = (\omega t - \theta)$ , тригонометрическая форма представления колебаний  $x = A \sin(\omega t - \theta)$  - в комплексном виде

$$x = Ae^{-i(\omega t - \theta)}$$

Принципиальная возможность возникновения неустойчивости движения, а затем в силу нелинейности и автоколебаний, в колебательной системе с одной степенью свободы при наличии запаздывания может быть сравнительно просто обнаружена применением частотного критерия устойчивости [71]: если разомкнутая цепь устойчива или нейтральна, то для устойчивости соответствующей замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой цепи не охватывала точку с координатами  $(-1, i0)$ .

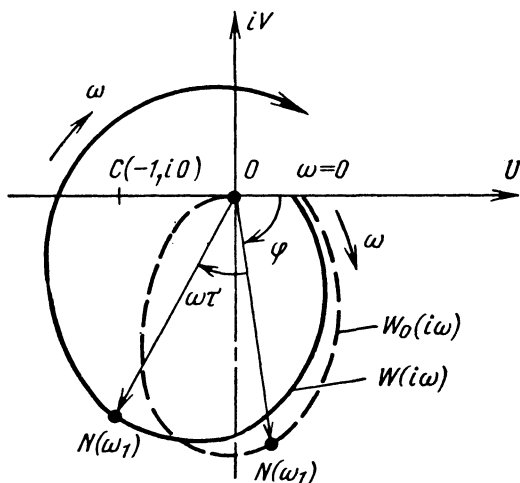


Рис. 6.4.7. Амплитудно-фазовая частотная характеристика системы с запаздыванием

Дифференциальному уравнению разомкнутой цепи при наличии запаздывания

$$\ddot{x}_2 + 2\varepsilon\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = Bx_1 e^{-i\tau\omega} \quad (6.4.11)$$

соответствует амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ)

$$W(i\omega) = \frac{x_2(i\omega)}{x_1(i\omega)} = \frac{Be^{-i\tau\omega}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\epsilon\omega} = W_0(i\omega)e^{-i\tau\omega},$$

отличающаяся от АФЧХ обычной линейной цепи  $W_0(i\omega)$  наличием запаздывания на угол  $\theta = \tau\omega$ . На комплексной плоскости  $U(\omega), iV(\omega) W_0(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega)$  показана на рис. 6.4.7. При наличии запаздывания для построения  $W(i\omega)$  каждую точку характеристики  $W_0(i\omega)$  надо сдвинуть по окружности по часовой стрелке на угол  $\theta = \tau\omega$ , где  $\omega$  - значение частоты в данной точке характеристики. Например, для  $W_0(i\omega)$  при частоте колебаний  $\omega_1$  амплитуда колебаний  $ON(\omega_1)$ , сдвиг по фазе (запаздывание)  $\varphi = \arctg 2\epsilon\omega_1 / (\omega_0^2 - \omega_1^2)$ ; для цепи с запаздыванием амплитуда колебаний имеет то же значение  $ON(\omega_1)$ , но запаздывание составляет уже  $\varphi + \tau\omega_1$ . Характеристика  $W_0(i\omega)$  не охватывает точку  $C(-1, i0)$ , характеристика  $W(i\omega)$  эту точку охватывает, что свидетельствует о неустойчивости замкнутой системы с запаздыванием. Если величина запаздывания  $\tau$  такая, что при резонансной частоте  $\tau\omega \approx \pi/2$ , то система при  $\epsilon > 0$  будет всегда неустойчивой.

**6.4.5. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ [92]**

Параметрическим называют такое возбуждение колебательной системы, при котором сила непосредственно не вызывает колебания, но она изменяет один или несколько параметров системы во времени, поэтому коэффициенты дифференциального уравнения системы зависят от времени. Колебания, имеющие место в системе при этих условиях, называют параметрическими, они могут быть затухающими и нарастающими во времени. Особый интерес представляют нарастающие колебания. Характерным примером является вращение тяжелого диска, насаженного на вал прямоугольного поперечного сечения, у которого жесткость на изгиб в двух взаимно перпендикулярных направлениях имеет максимальное и минимальное значения. Обозначив  $\omega_B$  - угловую скорость вращения вала,  $b = \Delta c / c_0$  - коэффициент глубины модуляции параметра, дифференциальное уравнение колебаний диска в одной плоскости представим в виде

$$\ddot{y} + 2\epsilon\dot{y} + \omega_0^2(1 + b \sin 2\omega_B t)y = 0, \quad (6.4.12)$$

где  $2\omega_B t$  под знаком синуса потому, что за один оборот вала его жесткость дважды достигает наибольшего и дважды наименьшего значения.

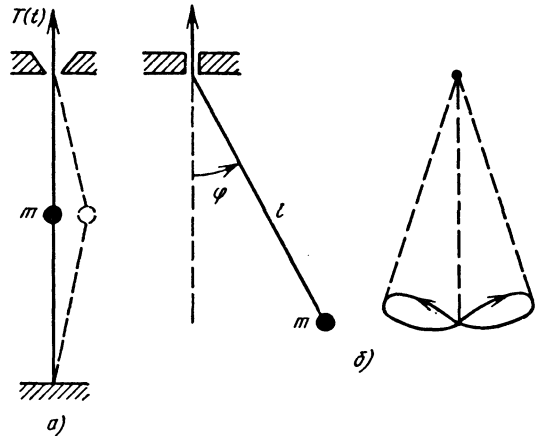
Работа упругих сил, совершаемая за цикл,

$$\int Fdy = - \int cydy,$$

где  $y = y_0 \sin \omega_B t$ ;  $c = c_0 + \Delta c \sin 2\omega_B t$ , является положительной. Для системы (6.4.12) всякие могущие быть малые колебания с собственной частотой  $\omega_0$  при достаточном коэффициенте  $b$  глубины модуляции возрастают до больших амплитуд, если вал вращается как с полной критической скоростью ( $\omega_B = 2\omega_0$ ), так и со скоростью, равной ее половине.

Приведем еще два примера параметрического возбуждения колебаний.

Упругая нить (струна), несущая массу  $m$  на середине своей длины, имеет переменное натяжение  $T = T_0 + \Delta T \sin pt$ , изменяющееся с частотой  $p$  от  $T_0 + \Delta T$  до  $T_0 - \Delta T$  (рис. 6.4.8, а). Если мы будем усиливать натяжение, когда масса движется к центру, и ослаблять при движении от центра, то достигнем нарастания колебаний.



**Рис. 6.4.8. Схема параметрического возбуждения колебаний**

Схема раскачивания качелей может быть представлена математическим маятником, длина которого может принудительно изменяться (рис. 6.4.8, б). Для того чтобы колебания могли возрасти до большой величины при изменении длины с частотой  $p = \omega_0 = \sqrt{g/l}$ , необходимо тянуть нить вверх в середине размаха и опускать вниз при крайних положениях, вследствие чего грузик будет описывать фигуру наподобие восьмерки. Так как натяжение нити больше при малых углах  $\varphi$  и меньше в крайних положениях, то указанными изменениями длины нити мы закачиваем в систему энергию, которая идет на раскачку маятника.

В случаях со струной и маятником параметр натяжения нити изменялся дважды за период возбуждаемых колебаний. Однако можно изменять параметр один раз за период, два раза за три периода или, вообще, при выполнении условия  $p=2\omega_0/n$ , где  $n=1, 2, 3, \dots$  - частота изменения параметра;  $\omega_0$  - частота возбуждаемых колебаний. Энерговложение в возбуждаемую систему будет тем меньше, чем больше  $n$ . Эти свойства характерны для параметрически возбуждаемых систем. Параметрическое возбуждение колебаний принято называть также параметрическим резонансом.

**Поперечные колебания однородной балки под действием продольной сжимающей силы.**

Уравнение колебаний, когда

$$P(t) = P_0 + P_1 \cos pt \text{ и } p \ll \frac{\pi}{l} \sqrt{EF/m}, \text{ имеет}$$

вид (6.2.10)

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + (P_0 + P_1 \cos pt) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \tag{6.4.13}$$

При граничных условиях

$$y|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0$$

решением (6.4.13) будет

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{6.4.14}$$

После подстановки (6.4.14) в (6.4.13) получим дифференциальное уравнение колебаний в обыкновенных производных - дифференциальное уравнение параметрических колебаний

$$\ddot{y}_n(t) + \omega_n^2 (a_n - b_n \cos pt) y_n(t) = 0, \tag{6.4.15}$$

где

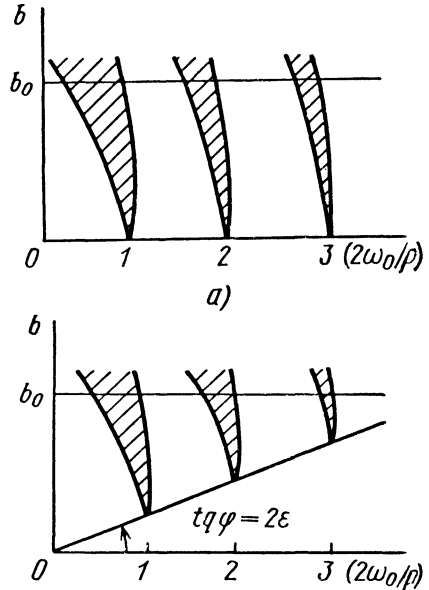
$$\omega_n^2 = \frac{EJ}{m} \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4; \quad a_n = 1 - \frac{P_0}{P_3};$$

$$P_3 = \frac{EJn^2 \pi^2}{l^2}; \quad b_n = \frac{P_1}{P_3}.$$

Внешнее воздействие сжимает балку, оно не направлено на создание поперечных колебаний и его нет в правой части уравнения (6.4.13), как это имеет место при вынужденных колебаниях. Оно воздействует на систему, вызывая по определенному закону изменение параметра системы, в данном примере коэффициента при  $y_n(t)$ , характеризующего упругость балки.

При случайно возникающих поперечных колебаниях сближаются концы балки, продольная сила  $P_1$  на этих перемещениях совершает

положительную работу, которая идет на развитие колебаний; при  $p=2\omega_n$  наступает параметрический резонанс.



**Рис. 6.4.9.** Области параметрического возбуждения для системы: а - без затухания; б - с затуханием

Уравнение типа (6.4.12)

$$\ddot{y} + 2\epsilon \dot{y} + \omega_0^2 (1 + b \cos pt) y = 0$$

называют уравнением Матье, теория его хорошо разработана. Области возбуждения колебаний зависят от соотношения  $2\omega_0/p$ , коэффициента глубины модуляции  $b$  и коэффициента затухания  $\epsilon$ , они показаны на рис. 6.4.9 заштрихованными. Более подробно о параметрическом возбуждении см. [56, 92].

## Глава 6.5

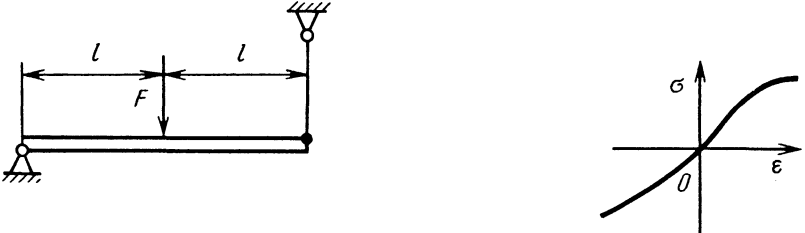
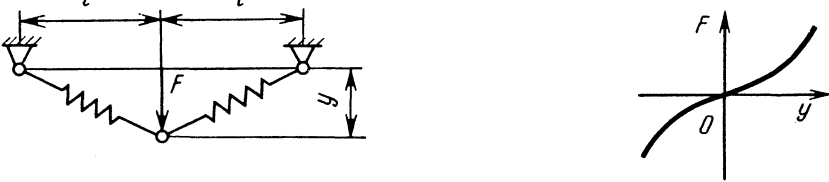

### НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В МАШИНАХ

#### 6.5.1. ТИПЫ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

*Нелинейными колебаниями* называют колебания систем (в частности, механических), свойства которых описываются нелинейными зависимостями. Соответственно этому дифференциальные уравнения движения таких систем нелинейны; нелинейными также называют и сами эти системы [15, 21, 24, 81, 90].

Выделяют три типа нелинейностей (табл. 6.5.1):

6.5.1. Типы нелинейностей

Нелинейность	Пример системы и ее упругая характеристика
Физическая	<p>Жесткая балка; вертикальный стержень из упругопластического материала</p>  <p>(<math>\sigma = F / (2A)</math> - нормальное напряжение в сечениях вертикального стержня; <math>\varepsilon</math> - деформация, <math>A</math> - площадь поперечного сечения стержня)</p>
Геометрическая	<p>Система двух упругих пружин с первоначально горизонтальными осями</p>  <p>(<math>l</math> - первоначальная длина каждой из пружин; <math>y</math> - вертикальное перемещение точки приложения силы <math>F</math>)</p>
Конструктивная	<p>Упругий цилиндр на горизонтальной плоскости</p>  <p>(<math>y</math> - вертикальное перемещение точки <math>O</math>)</p>

*физическая нелинейность:* нелинейность упругих свойств материала, т.е. соотношений между напряжениями и деформациями; нелинейность вязких свойств материала, т.е. соотношений между напряжениями и скоростями деформации; нелинейность фрикционных свойств системы, т.е. соотношений между силами трения и скоростями;

*геометрическая нелинейность:* нелинейность соотношений между силами и перемещениями, обусловленная заметными изменениями конфигурации системы, т.е. относительно большими перемещениями, даже при сохранении линейной связи между напряжениями и деформациями;

*конструктивная нелинейность:* нелинейность, обусловленная наличием односторонних связей, зазоров, предварительных натягов и другими факторами.

В нелинейных системах обнаруживаются специфические нелинейные эффекты, невозможные в линейных системах: неизохронность

свободных колебаний, т.е. зависимость частоты свободных колебаний от амплитуды; неоднозначность зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы; возникновение супер- и субгармонических колебаний; возможность существования автоколебательных режимов, захватывание, затягивание, самосинхронизация, хаотизация колебаний [21].

Перечисленные и родственные им эффекты возникают даже в системах с одной степенью свободы\*, когда дифференциальные уравнения относительно обобщенной координаты  $q$  можно привести к виду

$$a\ddot{q} + F_*(q, \dot{q}) = 0 \quad (6.5.1)$$

- для автономных систем;

$$a\ddot{q} + F_*(q, \dot{q}) = Q(t) \quad (6.5.2)$$

\* Системы с большим числом степеней свободы рассмотрены в п. 6.5.6.

- для неавтономных систем, где  $a$  - инерционный коэффициент;  $F_*(q, \dot{q})$  - нелинейная функция обобщенной координаты и обобщенной скорости;  $Q(t)$  - вынуждающая сила.

Часто зависимость  $F_*(q, \dot{q})$  можно представить в виде суммы

$$F_*(q, \dot{q}) = F(q) + R(\dot{q}), \quad (6.5.3)$$

где  $F(q)$  - упругая характеристика обобщенной позиционной (как правило, восстанавливающей) силы, иногда эту зависимость называют также характеристикой жесткости системы;  $R(\dot{q})$  - характеристика трения, т.е. взятая с обратным знаком зависимость силы трения от обобщенной скорости. (Здесь и ниже термин "трение" следует понимать в обобщенном смысле, как явление диссипации (рассеяния) энергии.)

6.5.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИЛ

Нелинейность системы может быть обусловлена нелинейностью лишь одного из слагаемых, входящих в (6.5.3).

Примеры систем с нелинейными позиционными силами приведены в табл 6.5.2. Здесь же приведены графики нелинейных упругих характеристик и их аналитическое описание. Нелинейные упругие характеристики классифицируют следующим образом: 1) гладкие и с переломами; 2) непрерывные и разрывные; 3) симметричные и несимметричные; 4) жесткие и мягкие [67,81].

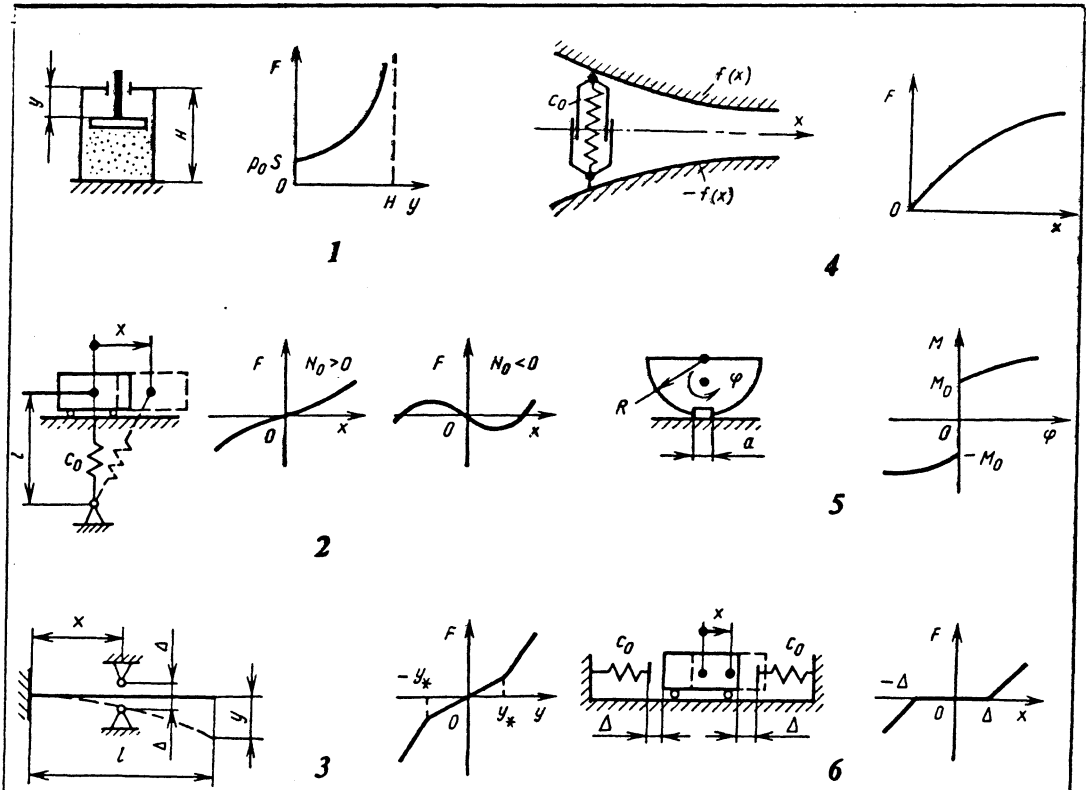
Упругую характеристику называют симметричной (см. табл. 6.5.2, схемы 2, 3, 5, 6), если для нее справедливо равенство  $F(q) = -F(-q)$ .

Упругую характеристику называют жесткой (см. табл. 6.5.2, схемы 1-3, 6), если с возрастанием координаты  $q$  производная  $dF/dq$  увеличивается при  $q > 0$  (или уменьшается при  $q < 0$ ), при этом  $qd^2F/(dq)^2 > 0$ ; в противном случае, когда  $qd^2F/(dq)^2 < 0$ , характеристику называют мягкой (см. табл. 6.5.2, схемы 4, 5).

Для того чтобы систему с натягом (см. табл. 6.5.2, схема 5) вывести из состояния равновесия, нужно приложить отличную от нуля силу.

Для систем с зазорами (см. табл. 6.5.2, схема 6) существует интервал изменения обобщенной координаты, в котором  $F(q) = 0$ .

6.5.2. Примеры систем с нелинейными позиционными силами



Продолжение табл. 6.5.2.

Схема механической системы*	Упругая характеристика **
1. Пневматический цилиндр	$1. F = \frac{p_0 S}{1 - y/H} \quad (y > 0), \text{ где } p_0 - \text{давление газа при } y=0;$ <p><math>S</math> - площадь поршня</p>
2. Тело, прижатое пружиной к плоскости	$2. F = N_0 x/l + (c_0 - N_0/l)x^3 / (2l^2),$ <p>где <math>N_0</math> - усилие предварительного натяга; <math>c_0</math> - коэффициент жесткости пружины; при <math>N_0 \rightarrow 0</math> <math>F = c_0 x^3 / (2l^2)</math>, при больших значениях <math>N_0</math> <math>F \approx N_0 x/l</math></p>
3. Консольная балка с промежуточными опорами; между балкой и опорами зазор $\Delta$	$3. y_* = \frac{2l^3 \Delta}{a^3 \left(3 \frac{l}{a} - 1\right)};$ $F = \begin{cases} \frac{6EJ \left[2y + \left(3 \frac{l}{a} - 1\right)\Delta\right]}{l^3 \left[4 - \left(\frac{a}{l}\right)^3 \left(3 \frac{l}{a} - 1\right)\right]}, & y < -y_*; \\ 3EJy/l^3, & -y_* < y < y_*; \\ \frac{6EJ \left[2y - \left(3 \frac{l}{a} - 1\right)\Delta\right]}{l^3 \left[4 - \left(\frac{a}{l}\right)^3 \left(3 \frac{l}{a} - 1\right)\right]}, & y > y_* \end{cases}$
4. Упругий поршень в суживающемся канале $c_0$ - коэффициент жесткости пружины	$4. F = 4c_0 \int_0^x (f')^2 dx$
5. Тяжелый полуцилиндр с малой продольной канавкой (система с натягом)	$5. M_0 \approx \frac{1}{2} mga;$ $M = \begin{cases} M_0 + \frac{4R}{3\pi} mg \sin \varphi, & 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}; \\ -M_0 + \frac{4R}{3\pi} mg \sin \varphi, & -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0 \end{cases}$
6. Груз, расположенный с зазорами между двух упругих элементов $\Delta$ - зазор; $c_0$ - коэффициент жесткости одной пружины	$6. F = \begin{cases} c_0(x + \Delta), & x < -\Delta; \\ 0, & -\Delta \leq x \leq \Delta; \\ c_0(x - \Delta), & x > \Delta \end{cases}$

\* Сплошные линии соответствуют положениям системы в равновесном состоянии.

\*\* Эти характеристики однозначно определяют значения обобщенной силы по заданным значениям координаты независимо от направления движения (деформирования). Примеры систем, в которых восстанавливающая сила зависит от направления деформирования, приведены в табл. 6.5.4.



В линейных системах, когда  $F(q)=cq$ , производная  $dF/dq=c$  представляет собой коэффициент жесткости. В нелинейных системах понятие коэффициента жесткости как постоянной величины не существует, так как производная  $dF/dq$  переменная, но иногда имеет смысл трактовать ее как местный (локальный) коэффициент жесткости.

Например, если к штоку цилиндра в схеме 1 табл. 6.5.2 приложена статическая сила  $F_{ст} > p_0 S$ , то поршень опустится на величину  $y_{ст} = H(1 - (p_0 S)/F_{ст})$  и состояние равновесия определится точкой  $A$  на рис. 6.5.1. Если далее при колебаниях происходят лишь малые отклонения от этого состояния, то восстанавливающую силу можно вычислять через местный коэффициент жесткости  $c_* = (dF/dy)_{y=y_{ст}}$ , определяющий наклон касательной к точке  $A$ . В таких случаях речь идет о линейных колебаниях и

нелинейность проявляется при выборе значения  $c_*$ .

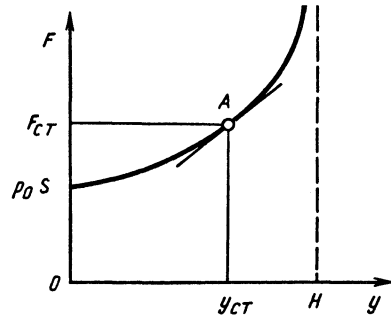


Рис. 6.5.1. Упругая характеристика пневматического цилиндра

Другой возможной причиной нелинейных колебаний в машинах является нелинейное трение [10, 66]. Некоторые примеры нелинейных характеристик трения приведены в табл. 6.5.3.

6.5.3. Примеры нелинейных характеристик трения

Трение	Силовая характеристика трения*	
1. Степенное	$R = b \dot{q} ^{n-1} \dot{q}$	
2. Кулоново	$R = b \frac{\dot{q}}{ \dot{q} }$ (см. схему 1 при $n=0$ )	
3. Линейное и кулоново	$R = b \frac{\dot{q}}{ \dot{q} } + b_1 \dot{q}$	
4. Разрывное некулоново	$R = b \frac{\dot{q}}{ \dot{q} } - b_1 \dot{q} + b_3 \dot{q}^3$	

\*  $b, b_1, b_3$  - положительные постоянные.

Если справедливо неравенство  $R(\dot{q})\dot{q} > 0$ , то силы трения совершают отрицательную работу и вызывают рассеяние механической энергии в системе; такие силы называют *диссипативными*. Если же  $R(\dot{q})\dot{q} < 0$ , то силы трения совершают положительную работу и вызывают приток механической энергии в систему; такие силы иногда называют силами *отрицательного трения*.

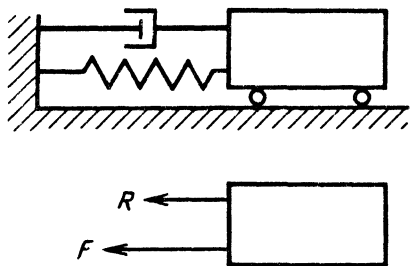


Рис. 6.5.2. Система с одной степенью свободы

При циклическом деформировании механических систем иногда пользуются *силовой характеристикой* - зависимостью суммы позиционной силы и силы трения  $P = F + R$  от обобщенной координаты  $q$ . На плоскости  $P, q$  эта характеристика представляет собой *петлю гистерезиса*. Площадь, ограниченная этой петлей, равна работе сил трения за один период движения и является основной количественной мерой рассеивания энергии при колебаниях. Некоторые примеры силовых характеристик для системы с одной степенью свободы (рис. 6.5.2) приведены на рис. 6.5.3.

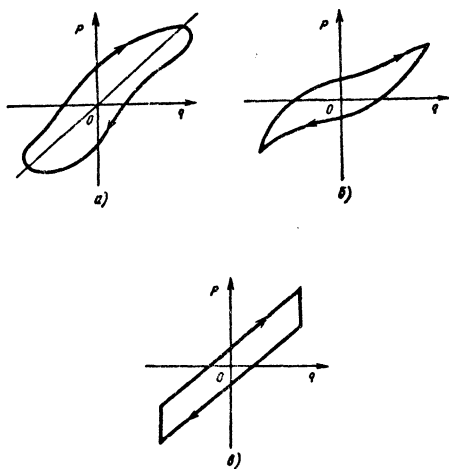


Рис. 6.5.3. Примеры силовых характеристик для системы с одной степенью свободы

Для диссипативной системы с линейной восстанавливающей силой осевая (*скелетная*) линия петли гистерезиса представляет собой прямую, проходящую через начало координат (рис. 6.5.3, а). При нелинейной восстанавливающей силе скелетная линия петли гистерезиса - криволинейна (рис. 6.5.3, б). Если при заданной амплитуде изменяется частота колебаний, то осевая линия петли остается неизменной, но расстояние между ветвями и ограниченная ими площадь, как правило, изменяется, причем законы этих изменений зависят от характеристики трения; исключениями служат случаи кулонова трения (рис. 6.5.3, в), а также внутреннего трения в материале, когда гистерезисная петля не меняется при изменениях частоты колебаний [66].

К нелинейным силам *смешанной природы* относят силы, зависящие от обобщенных координат и обобщенных скоростей, но которые нельзя представить в виде суммы слагаемых, зависящих раздельно только от обобщенных координат или только от обобщенных скоростей. Иногда силы смешанной природы удается представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от обобщенных координат, а другая - только от обобщенных скоростей:

$F_* = F(q)R(\dot{q})$  - такие силы называют *позиционными силами трения*. Частные случаи позиционных сил трения:

$$F_* = -\lambda\dot{q}(1 - q^2) \text{ - модель Ван-дер-Поля;}$$

$$F_* = -\lambda\dot{q}(1 - q^2 + \alpha q^4) \text{ - усложненная модель Ван-дер-Поля;}$$

$$F_* = b\dot{q}\text{sign}(q - \delta) \text{ - модель позиционного вязкого трения (знак коэффициента трения совпадает со знаком разности } q - \delta);$$

здесь  $b, \lambda, \alpha, \delta$  - положительные постоянные.

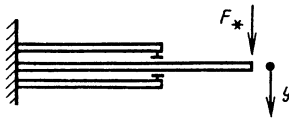
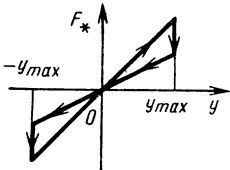
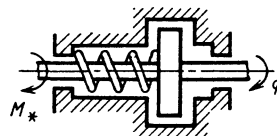
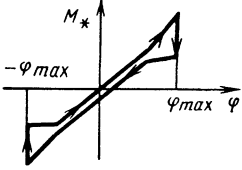
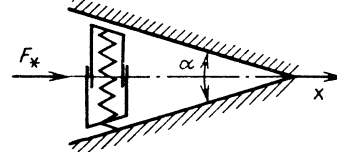
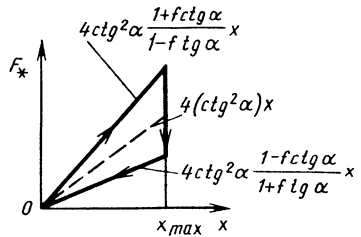
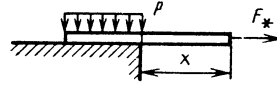
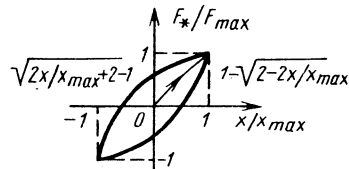
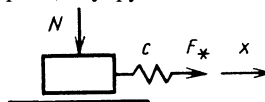
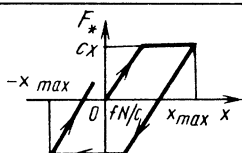

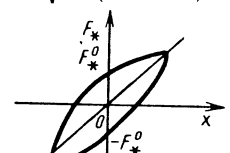
В некоторых системах (табл. 6.5.4) трение описывается законом Амонтона-Кулона, но коэффициент трения зависит от положения системы.

### 6.5.3. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНОЙ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ СИЛОЙ

Свободные колебания систем с нелинейной восстанавливающей силой обладают свойством периодичности, но в отличие от линейных систем они *неизохронны*, т.е. период колебаний зависит от начальных условий. Такие колебания в системах без трения можно представить как сумму гармонических составляющих (гармоник):

$$q(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.5.4)$$

6.5.4. Примеры систем с позиционным кулоновым трением

Система	График силовой характеристики
<p>Система балок, связанных опорами скольжения. Сила кулонова трения в опорах зависит от усилия прижатия, которое определяется координатой <math>y</math>.</p> 	
<p>Диск, закрепленный на винтовой пружине. При поворотах вследствие закручивания пружины сила прижатия диска к опорным поверхностям и соответственно момент силы кулонова трения меняется.</p> 	
<p>Упругий поршень, входящий с трением в сужающийся канал. Сила кулонова трения зависит от смещения поршня вдоль канала.</p> 	 <p><math>f</math> - коэффициент трения</p>
<p>Упругая полоса, прижатая постоянным давлением <math>p</math> к шероховатой поверхности. Сила кулонова трения зависит от ( — ) длины ( — ) участка ( — ) проскальзывания (<math>x_{пик} = F_{*пик}^2 / (2fpEA)</math>, <math>EA</math> - жесткость полосы при растяжении).</p> 	
<p>Упругоспластическая система. Сила кулонова трения зависит от деформации упругого элемента.</p> 	
<p>Стержень, материал которого обладает внутренним трением. Сила внутреннего трения зависит от деформации стержня и знака скорости.</p> 	<p>Простейшая форма описания ветвей характеристики</p> $F_* = cx + F_*^0 \sqrt{1 - (x/x_{max})^2} \dot{x} /  \dot{x} $ 

где  $A_0$  - среднее значение координаты (равное нулю в системах с симметричной упругой характеристикой);  $A_n$  и  $B_n$  - амплитуды соответствующих гармонических составляющих;  $\omega$  - основная частота свободных колебаний.

Дифференциальное уравнение движения систем без трения имеет вид

$$a\ddot{q} + F(q) = 0, \quad (6.5.5)$$

где  $a$  - инерционный коэффициент.

Точное решение уравнения (6.5.5) приводит к формулам для основной частоты колебаний: для симметричной характеристики

$$\omega = \frac{\pi}{\sqrt{2a}} \left[ \int_0^A \frac{dq}{\sqrt{\int_q^A F(q) dq}} \right]^{-1};$$

для несимметричной характеристики

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{2}{a}} \left[ \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} \frac{dq}{\sqrt{\int_q^{q_{\max}} F(q) dq}} \right]^{-1},$$

где  $A$  - наибольшее отклонение системы с симметричной упругой характеристикой от положения равновесия;  $q_{\max}$  и  $q_{\min}$  - значения координаты  $q$  в крайних положениях системы с несимметричной упругой характеристикой. При заданном значении  $q_{\max}$  величина  $q_{\min}$  определяется соотношением

$$\int_{q_{\min}}^{q_{\max}} F(q) dq = 0.$$

В табл.6.5.5 приведены графики связи  $\omega$  и  $A$  для некоторых типов упругих характеристик.

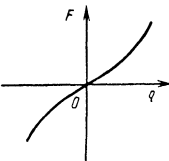
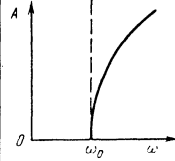
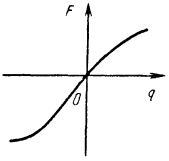
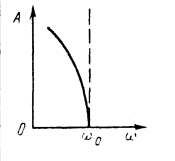
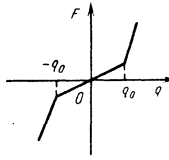
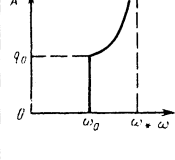
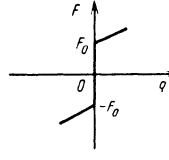
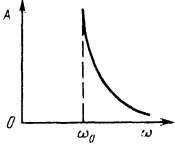
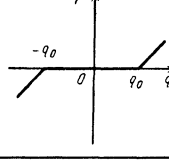
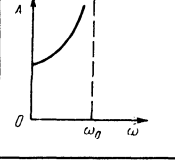
В частном случае, когда  $F(q) = \gamma |q|^{2(n-1)} q$  ( $\gamma$  и  $n$  - положительные постоянные), основная частота свободных колебаний

$$\omega = I(n) \sqrt{\gamma / a A^{n-1}}, \quad (6.5.6)$$

где  $I(n) = \sqrt{\pi} \Gamma(1/2n + 1/2) / \Gamma(1/2n)$ ,  $\Gamma(\dots)$  - гамма-функция; значения  $I(n)$  приведены ниже:

$n \dots \dots$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
$I(n) \dots$	1,111	1,000	0,9149	0,8472	0,7923

6.5.5. Примеры зависимости  $A(\omega)$

Упругая характеристика	График зависимости	Примечания
<p><b>Жесткая</b></p> 		$\omega_0 = \left( \frac{dF}{dq} \right)_{q=0}$
<p><b>Мягкая</b></p> 		$\omega_0 = \left( \frac{dF}{dq} \right)_{q=0}$
<p><b>Кусочно-линейная</b></p> 		$\omega_0 = \left( \frac{dF}{dq} \right)_{q=0}$ $\omega_* = \left( \frac{dF}{dq} \right)_{q>q_0}$
<p><b>С натягом</b></p> 		$\omega_0 = \left( \frac{dF}{dq} \right)_{q>0}$
<p><b>С зазором</b></p> 		$\omega_0 = \left( \frac{dF}{dq} \right)_{q>q_0}$

Наряду с точными формулами можно пользоваться более простыми, приближенными выражениями для основной частоты свободных колебаний; ниже приведены такие выражения для случая симметричной упругой характеристики: по простейшему способу

$$\omega = \sqrt{F(A) / (aA)}; \quad (6.5.7)$$

по способу прямой линеаризации

$$\omega = \sqrt{\frac{5}{aA^5} \int_0^A F(q) q^3 dq}; \quad (6.5.8)$$

по методу Ван-дер-Поля

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\pi a A} \int_0^{2\pi} F(A \cos \psi) \cos \psi d\psi}. \quad (6.5.9)$$

Приближенное, но более полное описание свободных колебаний в виде суммы гармонических составляющих (6.5.4) можно получить, используя известные численные или аналитические методы анализа нелинейных систем [24, 81, 90].

Например, следуя методу гармонического баланса, решение (6.5.4) подставляют в левую часть дифференциального уравнения (6.5.5). Получаемая при этом периодическая функция времени

$$K(t) = -\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) + \frac{1}{a} F \left[ A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \right] \equiv 0, \\ n = 1, 2, \dots$$

Для того чтобы функция  $K(t)$  тождественно обращалась в нуль при произвольном числе слагаемых ряда (6.5.4), необходимо, чтобы равнялись нулю все коэффициенты ее разложения в ряд Фурье. Это требование приводит к серии неравенств:

$$\int_0^{2\pi/\omega} F(q(t)) dt = 0; \quad (6.5.10)$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi/\omega} F(q(t)) \cos \omega t dt;$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi/\omega} F(q(t)) \sin \omega t dt;$$

$$A_n = \frac{1}{\pi a \omega n^2} \int_0^{2\pi/\omega} F(q(t)) \cos n\omega t dt;$$

$$B_n = \frac{1}{\pi a \omega n^2} \int_0^{2\pi/\omega} F(q(t)) \sin n\omega t dt.$$

Здесь  $q(t)$  представляют в виде ряда (6.5.4). Из полученной бесконечной системы нелинейных уравнений определяют значения коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$ .

В простейшем (одночастотном) приближении в (6.5.4) ограничиваются выражением

$$q = A_0 + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t.$$

Для системы с симметричной характеристикой  $A_0=0$ ; кроме того, при надлежащем выборе начального отчета времени  $B_1=0$ , т.е.  $q = A_1 \cos \omega t$ . Значение  $A_1$  находят из второго уравнения (6.5.10), которое в этом случае дает тот же результат, что и формула (6.5.9) для основной частоты свободных колебаний, полученной по методу Ван-дер-Поля.

При уточненном расчете в (6.5.4) удерживают несколько первых гармоник.

**Пример 1.** Определить основную частоту свободных колебаний системы, упругая характеристика которой задана в виде

$$F = cq + \gamma_1 q^3, \quad (6.5.11)$$

где  $c$  и  $\gamma_1$  - постоянные коэффициенты.

Результаты определения основной частоты по приведенным выше формулам:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + 0,7177\gamma A^2} \quad \text{по формуле (6.5.7);}$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \gamma A^2} \quad \text{по формуле (6.5.8);}$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + 0,7183\gamma A^2} \quad \text{по формуле (6.5.9);}$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + 0,75\gamma A^2} \quad \text{по формуле (6.5.10),}$$

где  $\omega_0 = \sqrt{c/a}$ ,  $\gamma = \gamma_1/c$ .

**Пример 2.** Найти двухчастотное описание свободных колебаний системы, заданной в примере 1.

Вследствие симметрии упругой характеристики  $A_0=A_2=B_2=A_4=B_4=\dots=0$  и выражение (6.5.4) при двухчастотном описании можно записать в виде

$$q = A_1 \cos \omega t + A_3 \cos 3\omega t,$$

где также учтено, что при надлежащем выборе начала отсчета времени  $B_1=B_3=0$ .

Подставляя это выражение в (6.5.11) и интегрируя в соответствии с (6.5.10), получим

$$A_1 = \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \left( A_1 + \frac{3}{4} \gamma A_1^3 + \frac{3}{4} A_1^2 A_3 \right);$$

$$A_3 = \left( \frac{\omega_0}{3\omega} \right)^2 \left( \frac{1}{4} \gamma A_1^3 + A_3 + \frac{3}{2} \gamma A_1^2 A_3 \right),$$

$$\omega_0 = \sqrt{c/a}, \quad \gamma = \gamma_1/c$$

(6.5.12)

(в этих выражениях в силу предполагаемой относительной малости  $A_3$  опущены слагаемые, содержащие  $A_3^2$  и  $A_3^3$ ).

Из первого уравнения (6.5.12) приближенно

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 + 0,75\gamma A_1^2)$$

Тогда из второго уравнения (6.5.12) следует

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{\gamma A_1^2}{32 + 21\gamma A_1^2}$$

Величина  $\gamma A_1^2 = \gamma_1 A_1^3 / (c A_1)$  представляет собой отношение нелинейной части восстанавливающей силы при отклонении  $A_1$  к линейной и характеризует меру нелинейности системы. Зависимость  $A_3/A_1$  от  $\gamma A_1^2$  приведена на рис. 6.5.4.

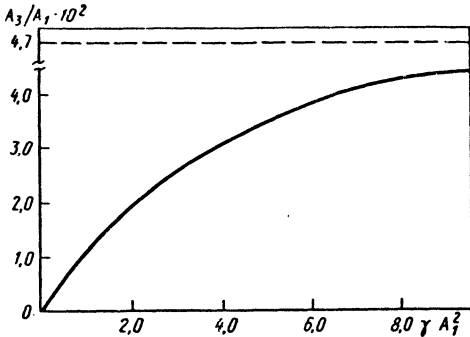


Рис. 6.5.4. Зависимость отношения амплитуд составляющих гармоник при двухчастотных свободных колебаниях от параметра нелинейности системы

**6.5.4. СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМ ТРЕНИЕМ ПРИ ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ**

Трение пропорционально  $n$ -й степени скорости (см. табл. 6.5.3, схема 1). Дифференциальное уравнение движения

$$a\ddot{q} + b|\dot{q}|^{n-1}\dot{q} + cq = 0.$$

Приближенное решение обычно строят по методу энергетического баланса: работу силы сопротивления за один цикл колебаний

$$\psi = -b \int_0^T |\dot{q}|^{n+1} dt \quad (6.5.13)$$

приравнивают к приращению потенциальной энергии за этот же цикл

$$\Delta\Pi \approx c A T \frac{dA}{dt}, \quad (6.5.14)$$

где  $A=A(t)$  - уравнение огибающей кривой затухающих колебаний.

Если принять приближенно, что  $q \approx A(t) \cos \omega_0 t$ , где  $\omega_0 \approx \sqrt{c/a}$ , то из равенства (6.5.13) и (6.5.14) следует дифференциальное уравнение для огибающей

$$\frac{dA}{dt} = - \frac{2b\omega_0^{n+1} I_*(n) A^n}{\pi c}, \quad (6.5.15)$$

где  $I_*(n) = 2^{n-2} n \Gamma^2(n/2) / [(n+1)\Gamma(n)]$ ; значения интеграла  $I_*(n)$  приведены ниже:

$n \dots\dots 1$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$I(n) \dots\dots 1,000$	0,875	0,785	0,718	0,667	0,624	0,589
$n \dots\dots 3,5$	4,0	4,5	5,0			
$I(n) \dots\dots 0,559$	0,533	0,511	0,491			

Из (6.5.15) после интегрирования следует уравнение для огибающей кривой затуханий свободных колебаний  $A=A(t)$  при различных значениях  $n \neq 1$  (табл. 6.5.6).

**6.5.6. Законы затуханий свободных колебаний при нелинейном трении**

$n$	Нелинейно-вязкое трение $R = -b \dot{q} ^{n-1}\dot{q}$	Частотно-независимое трение $\psi = -\alpha A^{n+1}$
$n \neq 1$	$A = \frac{A_0}{n-1 \sqrt{1 + \frac{2b(n-1)\omega_0^{n+1} I_*(n) A_0^{n-1}}{\pi c} t}}$	$A = \frac{A_0}{n-1 \sqrt{1 + \frac{\alpha(n-1)\omega_0 A_0^{n-1}}{2\pi c} t}}$
$n = 0$	$A = A_0 - \frac{2b\omega_0}{\pi c} t$ (кулоново трение)	$A = A_0 - \frac{\alpha\omega_0}{2\pi c} t$
$n = 2$	$A = \frac{A_0}{1 + 4b\omega_0^3 A_0 t / (3\pi c)}$ (квадратичное трение)	$A = \frac{A_0}{1 + \alpha\omega_0 t / (2\pi c)}$

Логарифмический декремент колебаний  $\delta = 4b\omega_0^n I_*(n) A^{n-1} / c$  зависит от амплитуды, т.е. меняется в процессе движения.

**Частотно-независимое трение.** Так называют трение, количественные характеристики которого не зависят от скорости  $\dot{q}$ , а определяются значениями наибольших отклонений  $A$  (кулоново трение; внутреннее трение в конструкционных материалах). При этом рассеиваемая за один цикл колебаний энергия  $\psi$  не зависит от частоты колебаний и определяется амплитудой  $A$ ; обычно эту зависимость принимают в виде

$$\psi = -\alpha A^{n+1}, \quad \alpha = \text{const.} \quad (6.5.16)$$

Из равенств (6.5.16) и (6.5.14) следует дифференциальное уравнение для огибающей затухающих колебаний

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\alpha\omega_0 A^n}{2\pi c}. \quad (6.5.17)$$

Из (6.5.17) после интегрирования получают уравнение огибающей  $A=A(t)$ ; это уравнение и его частные случаи приведены в табл. 6.5.6.

В табл. 6.5.6 постоянная  $A_0$  соответствует начальному значению ординаты огибающей.

Иногда при анализе вынужденных колебаний нелинейную характеристику трения заменяют эквивалентной в энергетическом отношении характеристикой линейно-вязкого трения  $b_*\dot{q}$ ; коэффициент  $b_*$  определяют из условия равенства работ, совершаемых обеими силами за период вынужденных колебаний  $2\pi/p$  ( $p$  - частота вынужденных колебаний). Если принять приближенно закон вынужденных колебаний  $q = A \cos pt$ , то коэффициент

$$b_* = -\frac{2}{\pi A} \int_0^{\pi} R(-Ap \sin pt) \sin ptdt. \quad (6.5.18)$$

Значения  $b_*$  для некоторых частных случаев силы трения приведены в табл. 6.5.7.

6.5.7. Значения эквивалентных коэффициентов линейно-вязкого трения

Нелинейная характеристика	Коэффициент эквивалентного трения
Степенное трение $R = -b \dot{q} ^{n-1}\dot{q}$	$b_* = 4b(Ap)^{n-1} I_*(n) / \pi$ (значения $I_*(n)$ см. на с. 369)
Кулоново трение ( $n=0$ ) $R = -b \frac{\dot{q}}{ \dot{q} }$	$b_* = \frac{4b}{\pi Ap}$
Квадратичное трение ( $n=2$ ) $R = -b \dot{q} \dot{q}$	$b_* = \frac{8bAp}{3\pi}$
Частотно-независимое трение, работа $\psi = -\alpha A^{n+1}$	$b_* = -\frac{\alpha A^{n-1}}{\pi p}$

### 6.5.5. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

**Системы с нелинейной восстанавливающей силой.** При действии гармонической вынуждающей силы  $Q = Q_0 \sin pt$  в системе с нелинейной восстанавливающей силой возникают периодические (но не гармонические) колебания, которые можно представить в виде суммы гармоник. Частота первой из них (основной гармоники) равна заданной частоте  $p$ . Гармоники с частотами  $2p, 3p, \dots$  называют *супергармониками*.

Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы с нелинейной упругой характеристикой при линейной трении описываются дифференциальным уравнением вида

$$a\ddot{q} + b_*\dot{q} + F(q) = Q_0 \sin pt,$$

где  $b_*$  - эквивалентный коэффициент линейно-вязкого трения; в частном случае  $b_* = 0$ .

Амплитуда основной гармоники приближенно определяется соотношением

$$A_1 = \frac{Q_0}{a \sqrt{\left[ p^2 - \omega^2(A_1) \right]^2 + 4n^2 \omega^2(A_1)}}, \quad n = \frac{b_*}{2a},$$

где зависимость  $\omega(A_1)$  соответствует решению задачи о свободных колебаниях (см. п. 6.5.3).

В отличие от линейных систем при нелинейных колебаниях зависимость амплитуды  $A_1$  от частоты  $p$ , как правило, неоднозначна и определяется типом нелинейной упругой характеристики  $F(q)$ .

Пример АЧХ системы с жесткой упругой характеристикой (см. табл. 6.5.5) и линейным трением приведен на рис. 6.5.5, а (см. сплошную линию). Штрихпунктирной линией показана скелетная кривая, определяющая связь амплитуды  $A_1$  свободных колебаний той же системы с их основной частотой  $\omega$  (см. табл. 6.5.5).

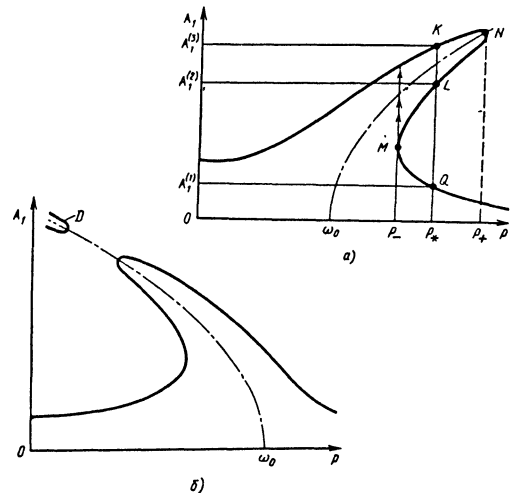


Рис. 6.5.5. Амплитудно-частотная характеристика системы с упругой характеристикой: а - мягкой; б - жесткой

В диапазоне частот возбуждения  $p_- < p < p_+$  амплитуда  $A_1$  определяется неоднозначно. Например, при  $p = p_*$  амплитуда  $A_1$  имеет три значения  $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, A_1^{(3)}$ . В подобных случаях многозначности решения часть формально найденных режимов неустойчива и поэтому физически не реализуется. Так, на рис. 6.5.5, *a* неустойчивы все режимы, определяемые участком  $MN$ , в частности, режим, соответствующий точке  $L$ ; режимы, соответствующие точкам  $K$  и  $Q$ , - устойчивы.

Для контроля того или иного стационарного режима вынужденных колебаний рассматривают свойства возмущенного движения, близкого к исследуемому невозмущенному. Если возмущенное движение с течением времени приближается к невозмущенному (или, по крайней мере, не удаляется от него), то последнее признают *устойчивым* (в противоположном случае - неустойчивым). В нелинейных системах дифференциальное уравнение для вариации координаты линейно и имеет вид уравнения Матье. Для суждения об устойчивости пользуются диаграммой Айнса-Стретта.

В условиях монотонного изменения частоты возбуждения при определенных значениях  $p$  происходят скачкообразные изменения амплитуды. На рис. 6.5.5 скачки происходят при  $p = p_+$  (если частота возрастает) и при  $p = p_-$  (если частота уменьшается) - см. стрелки.

С увеличением демпфирования диапазон неустойчивых режимов, т.е. область неоднозначности решения, уменьшается и может полностью исчезнуть.

На рис. 6.5.5, *b* дан пример АЧХ системы с мягкой упругой характеристикой. В АЧХ таких систем могут быть изолированные участки (кривая  $D$ ), нижняя часть которых соответствует неустойчивым режимам. Для возбуждения колебаний с амплитудами, соответствующими устойчивой верхней ветви кривой  $D$ , требуется достаточно сильное возмущение основного режима движения (толчок, удар).

Под действием гармонической вынуждающей силы, кроме основных колебаний с частотой возбуждения  $p$  и супергармонических колебаний, в системе с нелинейной упругой характеристикой могут также происходить *субгармонические* колебания с частотами  $p/n$  ( $n$  - целое число). Эти колебания могут возникать при относительно больших частотах возбуждения, причем их амплитуды могут превосходить амплитуды первой гармоники. Наличие и интенсивность субгармонических колебаний зависят от параметров демпфирования; так, для рассматриваемой системы при увеличении  $b_*$  амплитуды субгармонических колебаний уменьшаются и при некотором значении  $b_*$  полностью исчезают.

Для случаев, когда амплитуда вынуждающей силы пропорциональна квадрату частоты

возбуждения (инерционное возбуждение), вид АЧХ в принципе не изменится и соответствует рис. 6.5.5. Единственное отличие состоит в том, что изолированные участки АЧХ становятся возможными в системах с жесткой упругой характеристикой, а в системе с мягкой упругой характеристикой такие участки невозможны.

**Системы с нелинейным трением и линейной упругой характеристикой.** Амплитуды вынужденных колебаний приближенно определяют так же, как для систем с линейно-вязким трением. Эквивалентный коэффициент линейного трения определяют по формуле (6.5.18) и табл. 6.5.7. Расчетные формулы, определяющие амплитуду вынужденных колебаний при нелинейном трении, приведены ниже:

1. Нелинейно-вязкое трение:  
амплитуда

$$A = \frac{Q_0}{c} \left[ \left( 1 - \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)^2 + (b_*(A)p/c)^2 \right]^{-\frac{1}{2}};$$

резонансная амплитуда  $A = \frac{1}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\pi Q_0}{4b_*(A)I_*(n)}}$

(значения  $I_*(n)$  см. на с. 369).

2. Частотно-независимое трение:  
амплитуда

$$A = \frac{Q_0}{c} \left[ \left( 1 - \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left( \frac{\alpha A^{n-1}}{\pi c} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}};$$

резонансная амплитуда  $A = \sqrt{\frac{\pi Q_0}{\alpha}}$ .

**6.5.6. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОПОДВЕШЕННЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ**

В отличие от рассмотренных выше систем с одной степенью свободы в нелинейных системах с несколькими степенями свободы возможно перераспределение энергии колебаний между координатами, когда твердое тело даже при направленном возбуждении будет совершать сложные пространственные движения. Последние получили название *пространственных колебаний* [27].

Движение твердого тела характеризуется шестью обобщенными координатами  $X_i$ , определяющими положение центра масс и углы Эйлера. В общем случае эти переменные и их производные связаны в уравнениях движения нелинейными соотношениями, обусловленными описанными выше типами нелинейности (см. табл. 6.5.1). Предполагая нелинейные члены малыми, можно представить уравнения движения в квазинормальной форме [27]:



$$\ddot{x}_i + \omega_{0i}^2 x_i = \mu F_i(x_1, x_2, \dots, x_6, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_6) + Q_i(t), \quad (6.5.19)$$

где  $\mu$  - малый параметр.

Такая структура уравнений позволяет целенаправленно изучать пространственные колебания, вызванные перекачкой энергии между координатами  $x_i$ . Их качественный характер будет выражен наиболее четко, если в уравнениях (6.5.19) вместо шести вынуждающих сил  $Q_i(t)$  рассматривать только одну, например  $Q_6 = Q_0 \sin pt$  ( $Q_i=0$  при  $i \neq 6$ ).

Анализ структуры квазилинейных уравнений движения твердого тела (6.5.19) показывает, что существование нелинейных резонансных состояний возможно при следующих соотношениях частот:

$$\omega_{0i} \approx p/2; \quad \omega_{0i} \approx 2p; \quad (6.5.20)$$

$$\omega_{0i} + \omega_{0k} \approx p; \quad \omega_{0i} - \omega_{0k} \approx p; \quad (6.5.21)$$

$$\omega_{0i} \approx 2\omega_{0k}; \quad \omega_{0i} + \omega_{0k} \approx \omega_{0r}; \quad (6.5.22)$$

$$\omega_{0i} \approx p; \quad \omega_{0i} \approx 3p; \quad 3\omega_{0i} \approx p; \quad (6.5.23)$$

$$\omega_{0i} + 2\omega_{0k} \approx p; \quad \omega_{0i} - 2\omega_{0k} \approx p;$$

$$2\omega_{0i} - \omega_{0k} \approx p; \quad \omega_{0i} + \omega_{0k} \approx 2p;$$

$$\omega_{0i} - \omega_{0k} \approx 2p; \quad \omega_{0i} + \omega_{0k} + \omega_{0r} \approx p;$$

$$\omega_{0i} - \omega_{0k} - \omega_{0r} \approx p; \quad \omega_{0i} + \omega_{0k} - \omega_{0r} \approx p; \quad (6.5.24)$$

$$\omega_{0i} \approx \omega_{0k}; \quad \omega_{0i} \approx 3\omega_{0k}; \quad (6.5.25)$$

$$\omega_{0i} + \omega_{0k} \approx 2\omega_{0r}; \quad \omega_{0i} - \omega_{0k} \approx 2\omega_{0r}$$

( $i, k, r = 1, 2, \dots, 6; i \neq k \neq r$ ).

В формировании резонансов типа (6.5.20) и (6.5.21) определяющая роль принадлежит нелинейным членам второго порядка, резонансы типов (6.5.22) - (6.5.25) определяются нелинейными членами третьего порядка относительно обобщенных координат. Резонансы типа (6.5.20), (6.5.21), (6.5.23), (6.5.24) обусловлены выполнением некоторых соотношений между собственными частотами системы  $\omega_{0i}, \omega_{0k}, \omega_{0r}$  и частотой внешнего возмущения  $p$ , их называют *внешними резонансами*. Резонансы типа (6.5.22) и (6.5.25) обусловлены выполнением некоторых соотношений между собственными частотами  $\omega_{0i}, \omega_{0k}, \omega_{0r}$ , их относят к *внутренним резонансам*.

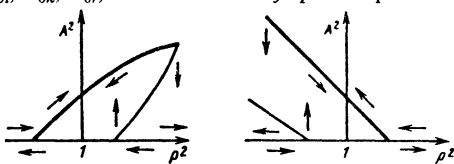


Рис. 6.5.6. Резонансные кривые при периодических пространственных колебаниях твердых тел

Внешние резонансы подразделяют на *простые* (6.5.21), (6.5.23) и *комбинационные* (6.5.21), (6.5.24). В первом случае реализуются периодические режимы пространственных колебаний твердых тел; вид резонансных кривых показан на рис. 6.5.6. Устойчивые режимы стационарных колебаний соответствуют жирным линиям, изменение амплитуды колебаний при квазистационарном увеличении или уменьшении частоты возбуждения показано стрелками.

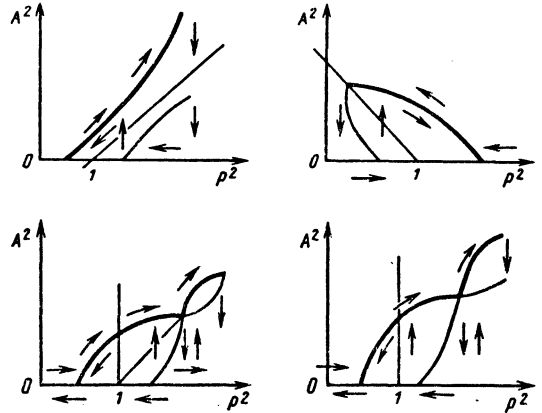


Рис. 6.5.7. Резонансные кривые при почти периодических пространственных колебаниях твердого тела

При комбинационном резонансе твердое тело совершает трехмерные почти периодические пространственные колебания (рис. 6.5.7).

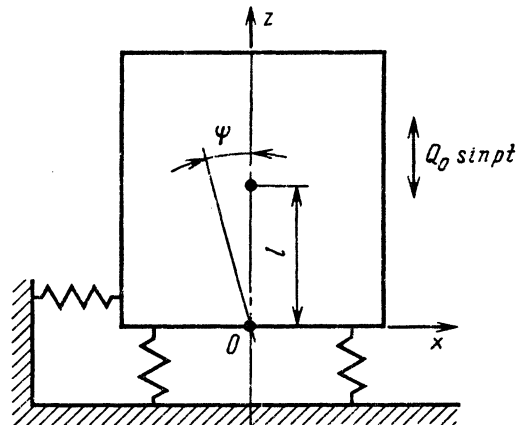


Рис. 6.5.8. Одномассовая система с тремя степенями свободы

**Пример 3.** Рассмотрим плоские колебания твердого тела массой  $m$  под действием гармонической силы  $Q_0 \sin pt$  (рис. 6.5.8). Система имеет три степени свободы, ее движение без учета диссипативных сил описывается следующими уравнениями:

$$m\ddot{z} + c_z z = Q_0 \sin pt;$$

$$m\ddot{x} + m\ddot{\psi} + c_x x = 0;$$

$$I_0 \ddot{\psi} + (c_\psi - ml\ddot{z})\psi = 0,$$

где  $c_z, c_x, c_\psi$  - коэффициенты жесткости в направлении осей координат  $z, x, \psi$ ;  $I_0$  - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр жесткости системы. Первое уравнение характеризует вынужденные вертикальные колебания массы  $m$ . Подставив его решение  $z = A \sin pt$  в два последних уравнения, получим систему параметрических уравнений для горизонтально-вращательных колебаний твердого тела. Параметрический коэффициент зависит от вертикального смещения центра масс относительно центра жесткости  $O$ . В рассматриваемой системе плоские периодические колебания возбуждаются в главной и побочной областях простых резонансов

$$p = \frac{\omega_{0j}}{n} \left( 2 \pm \frac{F c_\psi \psi_j}{2} \right);$$

$$j = 1, 2; n = 1, 2, 3, \dots; F = mlA.$$

Плоские почти периодические колебания возбуждаются в главной и побочных областях комбинационных резонансов

$$p = \frac{1}{n} \left( \omega_{01} + \omega_{02} \pm \frac{1}{2} F c_\psi \psi_1 \psi_2 \sqrt{\omega_{01} \omega_{02}} \right);$$

здесь  $\psi_j$  - компоненты собственного вектора;  $\omega_{0j} = 1/\lambda_j$ ;

$$\lambda_j = \frac{1}{2} \left[ \frac{m}{c_x} + \frac{I}{c_\psi} \pm \sqrt{\left( \frac{m}{c_x} + \frac{I}{c_\psi} \right)^2 - 4 \left( \frac{m I m^2 l^2}{c_x c_\psi c_x c_\psi} \right)} \right]$$

**6.5.7. ВЫНУЖДЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ РОТОРОВ**

Динамические явления в роторных системах носят, как правило, линейный характер, что проявляется, в частности, в пропорциональности амплитуд колебаний с частотой вращения ротора величине его неуравновешенности. В тех случаях, когда проявляются нелинейные эффекты, они имеют в основном тот же характер, что и для большинства механических систем (искажение формы амплитудной кривой, "затягивание" и "срыв" колебаний при разгоне и выбеге, субгармонические режимы) [30, 41, 51, 84]. Вместе с тем роторные системы имеют и некоторые особенности, обусловленные вращением ротора и увеличением вследствие этого вдвое числа степеней свободы по сравнению с аналогичными стержневыми системами. Ниже рассмотрены особенности вынужденных нелинейных колебаний роторов в случаях, когда вся

нелинейность системы сосредоточена в опорных устройствах роторов\*.

**Ротор на подшипниках с большими зазорами.** В некоторых случаях, например, при значительных износах зазоры в подшипниках являются большими и соизмеримыми с величиной неуравновешенности ротора\*\*. Зазоры как нелинейные элементы вносят существенные особенности в динамику роторных систем, приводя к возникновению субгармонических колебаний, к непропорциональности амплитуд колебаний величине неуравновешенности и к зависимости режимов движения от соотношения между величинами зазора и неуравновешенности.

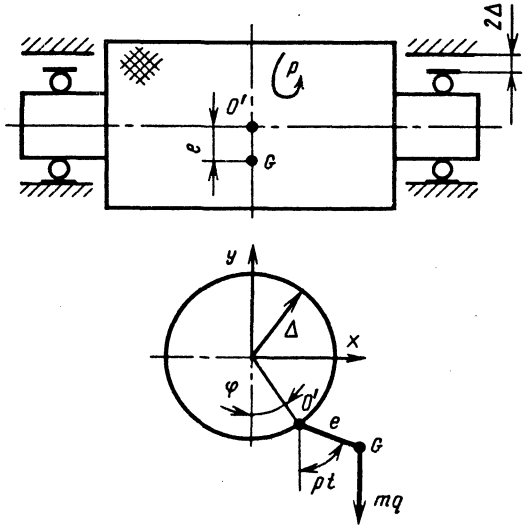


Рис. 6.5.9. Симметричный жесткий неуравновешенный ротор, установленный на двух опорах с зазорами

Для симметричного жесткого тяжелого неуравновешенного ротора на двух опорах с большими зазорами (рис. 6.5.9) уравнение движения при поступательных перемещениях имеет вид [68]

$$m\Delta\ddot{\phi} + mg \sin \phi + mep^2 \sin(\phi - pt) + b\Delta\dot{\phi} = 0,$$

где  $m$  - масса ротора;  $\Delta$  - радиальный зазор в подшипниках;  $\phi$  - угол, отсчитываемый от нижней вертикали в направлении вращения;  $e$  - неуравновешенность ротора;  $p$  - угловая скорость вращения ротора;  $b$  - коэффициент сил вязкого сопротивления.

\* Такие нелинейные явления в роторах, как автоколебания вследствие действия циркуляционных сил и параметрические колебания, обусловленные анизотропными свойствами роторов, когда нелинейности выступают не как причины особых эффектов, а лишь как факторы, ограничивающие колебания после потери устойчивости, рассмотрены в гл. 7.

\*\* Под неуравновешенностью ротора здесь подразумевается эксцентриситет неуравновешенного ротора.

В зависимости от параметров системы возможны два стационарных режима движения:

1) маятниковые колебания, описываемые в первом приближении зависимостью

$$\varphi = A \cos pt + B \sin pt,$$

когда ротор совершает колебания вокруг нижнего положения равновесия;

2) ротационные движения (колебания) в соответствии с зависимостью

$$\varphi = pt + A \cos pt + B \sin pt,$$

когда ротор обкатывается по корпусу с частотой вращения.

Определяющими в существовании того или иного режима будут отношение  $\chi = \Delta/e$  и силы демпфирования, характеризуемые величиной

$\delta = \frac{b}{\omega_1 m}$ , где  $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\Delta}}$  - собственная частота маятниковых колебаний.

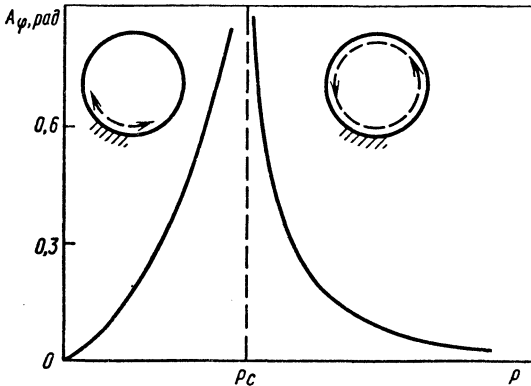


Рис. 6.5.10. Амплитудная кривая для жесткого ротора при малых зазорах в опорах и большой неуровненности

При малых значениях  $\chi$  (малый зазор, большая неуровненность) амплитудная зависимость для угла  $A_\varphi = \sqrt{A^2 + B^2}$  имеет вид, изображенный на рис. 6.5.10, где через  $p_c$  обозначена скорость, разделяющая режимы маятниковых и ротационных колебаний. Эта скорость определяется условием  $mp_c^2 e = mg$ , характеризующим равенство центробежных сил от неуровненности силам тяжести. При  $p \gg p_c$  переменные составляющие в ротационном движении малы и ротор обкатывается практически равномерно. Характер режимов и смена их практически не зависят от уровня сил демпфирования.

При больших значениях  $\chi$  (большой зазор, малая неуровненность) развиваются преимущественно маятниковые колебания (рис. 6.5.11). Вблизи частоты вращения  $p = \omega_1$  имеют место резонансные колебания с формой кривой,

характеризующей "мягкую" нелинейность в системе (штриховой линией показаны здесь и далее неустойчивые части кривых). При скоростях вращения, близких к  $p = n\omega_1$  ( $n=2, 3, \dots$ ), возникают субгармонические колебания порядка  $1/n$ , существование которых зависит от уровня сил демпфирования и начальных условий. При очень малом демпфировании в системе ( $\delta < 10^{-2}$ ) при  $p > \omega_1$  также возможны ротационные колебания как с основной частотой  $p$ , так и с дробной частотой  $p/n$ .

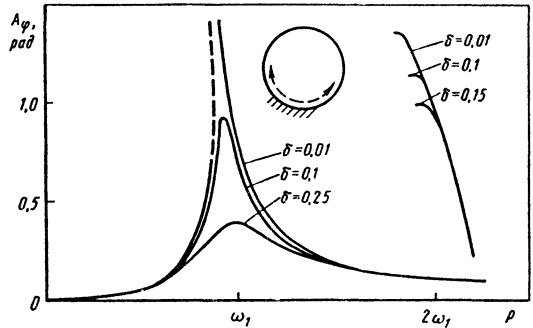


Рис. 6.5.11. Амплитудные кривые для жесткого ротора при больших зазорах в опорах и малой неуровненности

В более общем случае неуровненности ротора наряду с поступательной возможна поворотная форма его движения. При большой неуровненности (или при малых зазорах) возникает ротационное движение в форме конической прецессии, когда концы ротора движутся в противофазе. При малой неуровненности (больших зазорах) возникают маятниковые колебания с другой (по сравнению с поступательными движениями) формой движения, при которых ось вращения остается практически горизонтальной, а концы ротора перемещаются в противофазе. Центр тяжести при таком движении перемещается по вертикали с частотой  $2p$ . Резонансные колебания наступают при скорости, близкой ко второй собственной частоте маятниковых колебаний:

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{ml^2 g}{I \Delta} \right)^{1/2},$$

где  $I$  - экваториальный момент инерции относительно центральных осей, причем, если ротор по форме близок к цилиндру, между собственными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  имеет место соотношение

$$\omega_2 = \sqrt{3}\omega_1.$$

Гироскопический эффект ротора не оказывает влияния на эти маятниковые колебания.

Как и в случае поступательных движений, с увеличением скорости вращения при  $p = n\omega_2$

( $n=2, 3, \dots$ ) наступают субгармонические колебания порядка  $1/n$ .

В случаях, когда ротор гибкий и его собственная частота соизмерима с собственной частотой маятниковых колебаний, диапазон существования субгармонических колебаний расширяется и при большой неуравновешенности обнаруживаются субгармоники порядка  $1/2$  даже в районе основного резонанса гибкого ротора.

**Ротор на подшипниках качения.** В наиболее распространенных опорах роторов - в подшипниках качения - имеет место нелинейная зависимость между контактной деформацией и нагрузкой. Кроме того, всегда существующие радиальные зазоры в самих подшипниках также влияют на общую нелинейность системы.

Для стандартных подшипников со сферическими телами качения между радиальной нагрузкой и деформацией существует зависимость, установленная на основании контактной теории Герца,

$$W=9,81hf^{3/2},$$

где  $W$  - нагрузка, Н;  $f$  - деформация, см;  $h$  - коэффициент, определяемый по формуле

$$h = 10^9 a^{-3/2} z d_{ш}^{1/2} \cos \gamma,$$

где  $a$  - коэффициент, зависящий от типа подшипника ( $a=280$  для радиального и радиально-упорного подшипника);  $z$  - число шариков;  $d_{ш}$  - диаметр шариков, см;  $\gamma$  - угол контакта тел качения.

При оценке влияния подшипников качения на собственные частоты колебаний роторов иногда используют величину "жесткости" подшипника при статической нагрузке  $W=W_0$

$$c_{ш} = \frac{dW}{df} \Big|_{W=W_0} = \frac{3}{2} h^{2/3} W_0^{1/3}.$$

Эта величина позволяет достоверно определять собственные частоты в направлении действия статической нагрузки, однако эта жесткость не полностью отражает динамические процессы, возникающие при вращении ротора на подшипниках качения, так как существенное влияние оказывают зазоры в подшипниках и силы демпфирования.

Уравнения движения симметричного тяжелого неуравновешенного гибкого ротора на подшипниках качения записывают в виде [20]

$$m_1 \ddot{x}_1 + c(x_1 - x_2) = m_1 e p^2 \cos pt;$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + c(y_1 - y_2) = m_1 e p^2 \sin pt - m_1 g;$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + \frac{1}{2} c(x_2 - x_1) + P_x = 0;$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + \frac{1}{2} c(y_2 - y_1) + P_y = -m_2 g,$$

где  $m_1, m_2$  - массы диска и опоры;  $x_1, y_1; x_2, y_2$  - перемещения соответственно диска ротора и его опор;  $c$  - жесткость вала;  $P_x, P_y$  - силы, возникающие в подшипниках качения и равные

$$P_x = -h \left( \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - \Delta \right)^{3/2} \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} -$$

$$- b_1 \dot{x}_2 - b_2 \dot{x}_2 x_2^2;$$

$$P_y = -h \left( \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - \Delta \right)^{3/2} \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} -$$

$$- b_1 \dot{y}_2 - b_2 \dot{y}_2 y_2^2;$$

здесь  $\Delta$  - радиальный зазор в подшипниках;  $b_1$  - коэффициент сил линейного, а  $b_2$  - коэффициент сил нелинейного трения.

Наиболее существенное влияние на динамику системы оказывают безразмерные параметры

$$\theta = \frac{m_1 g}{ce}; \quad \nu = \frac{h\sqrt{e}}{c}; \quad \chi = \frac{\Delta}{e}.$$

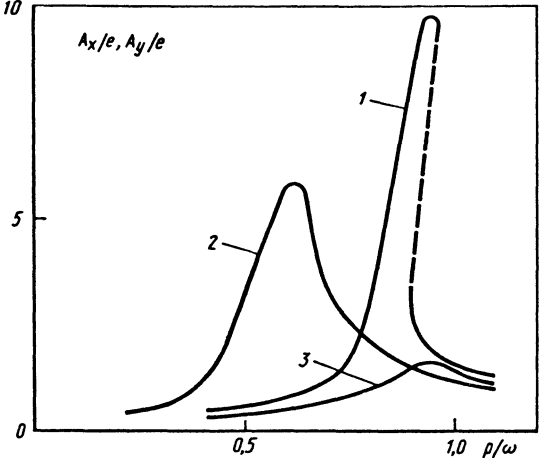


Рис. 6.5.12. Амплитудные кривые для гибкого ротора на подшипниках качения при малых зазорах и большой неуравновешенности

При большой неуравновешенности и небольших зазорах ( $\theta=10, \nu=1, \chi=1$ ) амплитудная кривая 1 (рис. 6.5.12) имеет вид, характерный для "жесткой" нелинейности. Податливость подшипников незначительно снижает критическую скорость ротора на абсолютно жестких опорах  $\omega = \sqrt{c/m_1}$ . Колебания в горизонтальном и вертикальном направлении практически одинаковы. Когда неуравновешенность мала, а зазо-

ры в подшипниках велики ( $\theta=10$ ,  $\nu=0,1$ ,  $\chi=5$ ), критические скорости четко раздваиваются по горизонтальному (кривая 2) и вертикальному (кривая 3) направлениям.

На рис. 6.5.13 показаны кривые для очень малых значений параметра  $\theta$  (например, для ротора с вертикальной осью вращения,  $\theta=0$ ). Кривые 1, 2, 3 характеризуют малый зазор ( $\chi=0,1$ ) при различных значениях параметра неуровненности ( $1-\nu=0,1$ ;  $2-\nu=0,25$ ;  $3-\nu=1,0$ ), а уменьшением параметра  $\nu$  резонансные пики значительно смещаются в сторону меньших скоростей.

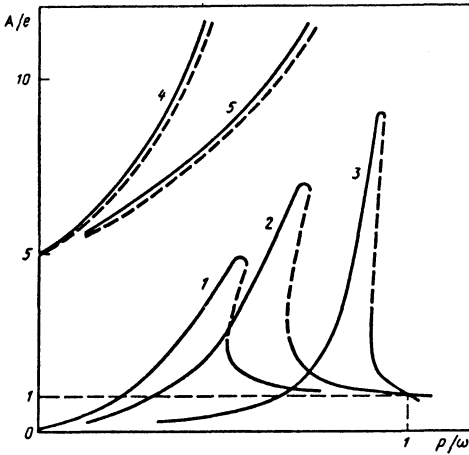


Рис. 6.5.13. Амплитудные кривые для гибкого ротора с вертикальной осью вращения с малым зазором и различными значениями неуровненности

Кривые 4, 5 соответствуют большим зазорам ( $\chi=5$ ) и очень малым значениям коэффициентов сил демпфирования ( $4-\nu=0,1$ ;  $5-\nu=0,25$ ). Ветви амплитудных кривых сближаются и исчезают ветви, соответствующие обратному ходу. С увеличением демпфирования амплитудные кривые, характеризующие периодические решения, исчезают, т.е. при больших зазорах в подшипниках качения у роторов с вертикальной осью вращения могут вообще отсутствовать критические скорости в обычном понимании этого слова.

Расчеты показали, что только вязкое линейное трение не ограничивает амплитуды при резонансах (в отличие от линейных систем), что косвенно подтверждает существование в реальных системах нелинейного трения.

Для высокоскоростных роторных систем с подшипниками качения при скоростях вращения, превышающих в 2 раза и более первую критическую скорость, возникают субгармонические колебания порядков  $1/2$ ,  $1/3$  ..., обусловленные совместным действием нелинейной жесткости подшипников и зазоров в них.

**Ротор на опорах специального типа.** В практике машиностроения для уменьшения резонансных колебаний в высокоскоростных машинах применяют упругие опоры с сухим трением, с предварительным натягом и др., а также ограничители колебаний [20, 30]. Начиная применять специальные электромагнитные опоры с системой автоматического регулирования. Указанные опоры имеют, как правило, нелинейные характеристики, что приводит к возникновению нелинейных колебаний и эффектов.

**Гибкий ротор с ограничителем деформаций.** Для уменьшения колебаний вблизи критических скоростей применяют ограничители деформаций, устанавливаемые между вращающимся неуравновешенным ротором и неподвижным корпусом с некоторым радиальным зазором и вступающие в действие при больших перемещениях ротора (рис. 6.5.14). При наличии ограничителя, делающего систему нелинейной, вид амплитудных кривых существенно изменяется и появляются различные режимы, зависящие от величины зазора, скорости вращения и уровня сил демпфирования.

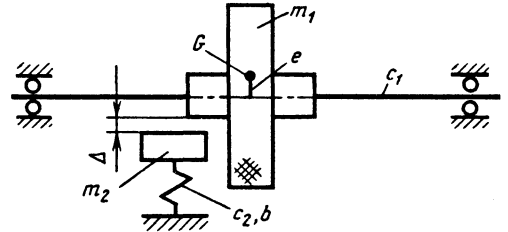


Рис. 6.5.14. Гибкий ротор с ограничителем деформаций

Характерная амплитудная кривая (рис. 6.5.15) построена при значении параметров  $\Delta/e=5$ ;  $\delta=b_1/(\omega m_1)=0,26$ ;  $m_1/m_2=0,1$ ;  $c_2/c_1=10$ ;  $\omega = \sqrt{c_1 / m_1}$ .

На рис. 6.5.15 можно выделить три возможных режима: I - ротор движется, не касаясь ограничителя; II - ротор движется вместе с ограничителем как единое целое; III - виброударный режим, когда в одни моменты времени ротор и ограничитель движутся вместе, а в другие - по отдельности.

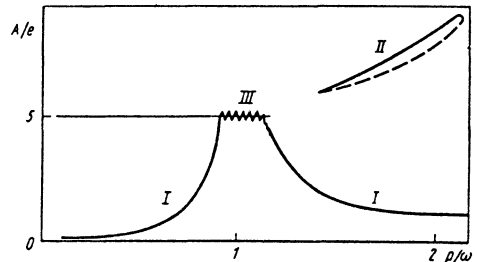


Рис. 6.5.15. Амплитудная кривая для гибкого ротора с ограничителем деформаций

Режим III является примером того, как при гармоническом возбуждении от неуравновешенности возникают негармонические и даже непериодические режимы движения.

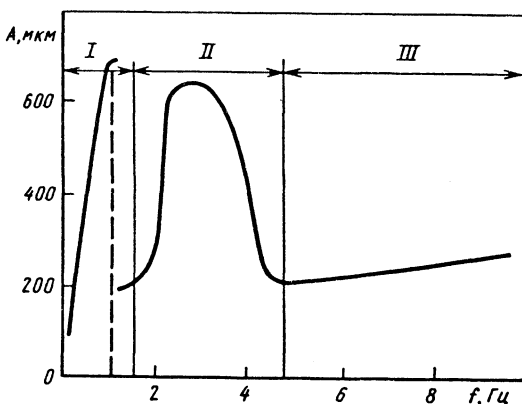


Рис. 6.5.16. Экспериментальная амплитудная кривая для шарового ротора на электромагнитном подвесе

**Шаровой ротор в электромагнитном подвесе** [69]. В процессе экспериментальных исследований с шаровым ротором был выявлен ряд нелинейных эффектов, в частности таких, как существование широкого диапазона субгармонических колебаний, независимость при определенных условиях амплитуд колебаний от массовой неуравновешенности ротора и др. На экспериментальной амплитудной кривой (рис. 6.5.16) выделяются три зоны. В зонах I и III имеют место колебания с частотой, равной частоте вращения, причем в зоне I при частоте  $f=1$  Гц имеет место резонанс, при котором амплитуды колебаний шара достигают значений, близких к величине зазора между ротором и статором. В зоне II наряду с колебаниями с частотой вращения наблюдались интенсивные субгармонические колебания порядков  $1/2$ ,  $1/3$  и  $1/4$ . В ряде пусков субгармонические колебания занимали всю зону, однако в ряде пусков эти колебания вообще не возникали. Указанные явления можно объяснить, если обратиться к анализу уравнений движения ротора на электромагнитном подвесе. В случае, когда регулятор имеет характеристику с "зоной нечувствительности", а ротор в условиях Земли приводится во вращение асинхронным двигателем, колебания шарового ротора в горизонтальной плоскости описываются уравнением (в одном из двух возможных направлений)

$$m\ddot{x} - cx + dx^3 - Kx^5 + b_1\dot{x} + b_2\dot{x}x^2 = m\epsilon p^2 \cos pt + W,$$

где  $c, d, K$  - коэффициенты, подобранные так, чтобы результирующая восстанавливающая сила

достоверно описывала "отрицательную" жесткость электромагнитного поля приводного двигателя и управляющую силу электромагнитного подвеса;  $e$  - действующая неуравновешенность, обусловленная несовпадением центра инерции и магнитного центра шара с центром его шаровой поверхности;  $W$  - постоянная нагрузка, обусловленная, например, несовпадением оси подвеса и оси статора двигателя.

Расчетные амплитудные кривые (рис. 6.5.17) подтверждают существование широких диапазонов скоростей, где возможны субгармонические колебания. При этом ветви субгармоник различных порядков ( $1/2$ ;  $1/3$ ;  $1/4$  и  $1/5$ ) перекрывают одна другую, что, видимо, и создает отмеченные в экспериментах сплошные области субгармонических колебаний.

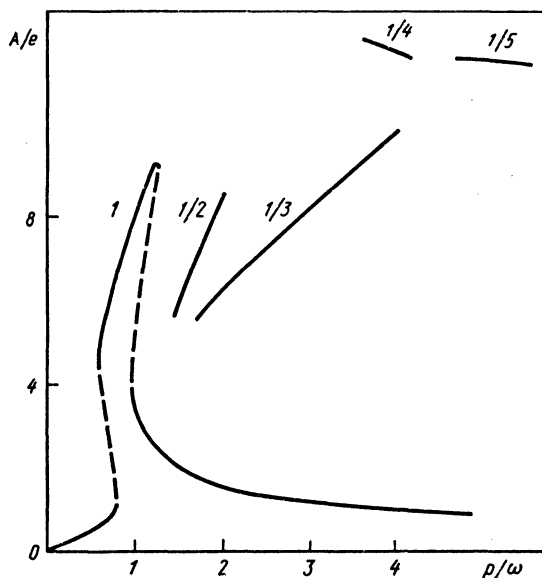


Рис. 6.5.17. Расчетные амплитудные кривые для шарового ротора на электромагнитном подвесе

Наблюдавшаяся в эксперименте независимость амплитуд колебаний от величины неуравновешенности ротора, равной расстоянию от центра поверхности ротора до центра его тяжести, нашла свое объяснение в существовании в магнитном подвесе магнитного момента трения, аналогичного по действию моменту от сил сухого трения, не позволяющего центру тяжести занять свое положение на вертикали, проходящей через ось вращения ротора.

### 6.5.8. ФРИКЦИОННЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ

Фрикционными называют автоколебания, обусловленные нелинейностью сил трения. Такие колебания могут возникать в устройствах

подачи металлорежущих станков, фрикционных муфтах сцепления и других устройствах, как правило, при малых относительных скоростях скольжения [15, 20]. Две модельные схемы систем, в которых возможны фрикционные автоколебания, показаны на рис. 6.5.18, а, б.

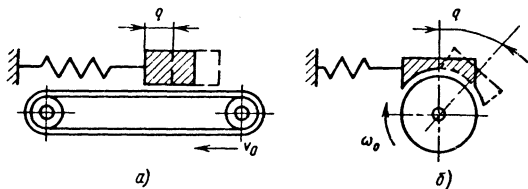


Рис. 6.5.18. Автоколебательные системы с нелинейным трением

Сплошными линиями показаны положения груза при недеформированной упругой связи, штриховыми линиями - отклонения от этих положений. Состояния равновесия соответствуют статические смещения  $q_0 = R_0/c$ , где  $R_0$  - сила трения при неподвижном грузе, обусловленная скольжением груза по ленте или барабане с относительной скоростью  $v_0$ ;  $c$  - коэффициент жесткости пружины. Устойчивость (неустойчивость) состояния равновесия зависит от положения точки  $[v_0, R_0]$  на характеристике трения - если эта точка расположена на восходящем участке характеристики (см. точку 1 на рис. 6.5.19), то состояние равновесия устойчиво, так как после его малого возмущения возникает дополнительная сила трения, направленная противоположно скорости  $\dot{q}$  груза.

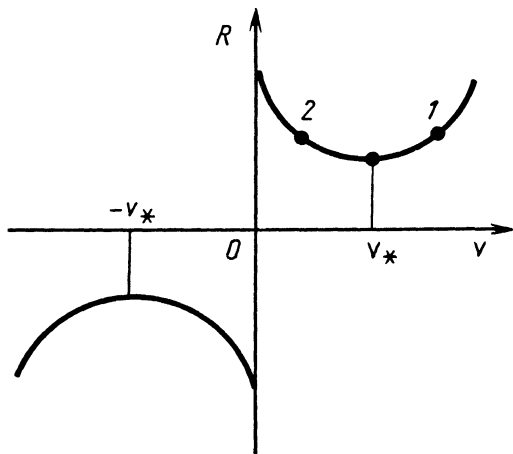


Рис. 6.5.19. Нелинейная характеристика трения

Если точка  $[v_0, R_0]$  расположена на падающем участке характеристики (см. точку 2 на рис. 6.5.19), состояние равновесия неустойчиво, так как возникающее после возмущения прираще-

ние силы трения совпадает по направлению со скоростью  $\dot{q}$ . Для этих случаев дифференциальные уравнения малых возмущенных движений имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{для случая 1 } a\ddot{q} + b\dot{q} + cq &= 0, \\ \text{для случая 2 } a\ddot{q} - b\dot{q} + cq &= 0. \end{aligned}$$

В этих уравнениях отклонения  $q$  отсчитывают от состояния равновесия; коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  - постоянные. В случае 2 вследствие неустойчивости состояния равновесия, обусловленной "отрицательным" трением, после любого сколь угодно малого возмущения состояния равновесия возникают постепенно разрастающиеся колебания. При достаточно больших колебаниях вместо линейного описания силы трения нужно пользоваться нелинейным описанием и исходить, например, из уравнения

$$a\ddot{q} - b_1\dot{q} + b_3\dot{q}^3 + cq = 0 \quad (6.5.26)$$

(уравнение Рэлея). Демпфирующее влияние кубического слагаемого  $b_3\dot{q}^3$ , пренебрежимо малое в начале процесса, с увеличением отклонений постепенно возрастает и движение стремится к некоторому установившемуся режиму, в котором дестабилизирующее влияние слагаемого  $-b_1\dot{q}$  будет в среднем компенсироваться демпфирующим влиянием слагаемого  $b_3\dot{q}^3$ . На фазовой плоскости  $q, \dot{q}$  фазовые траектории имеют вид, показанный на рис. 6.5.20 - любая фазовая траектория неограниченно приближается к предельному циклу (см. замкнутую кривую).

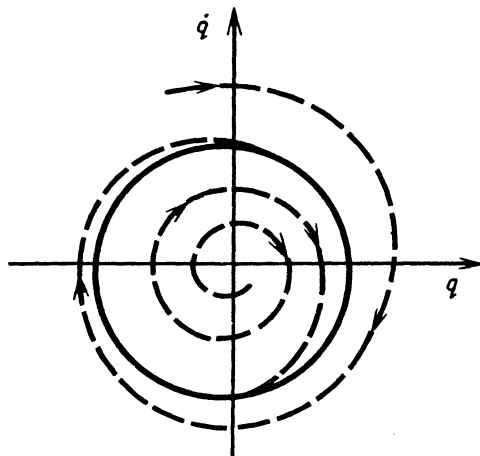


Рис. 6.5.20. Фазовая траектория при фрикционных автоколебаниях

В принципе тот же характер имеют свойства системы с позиционным трением, когда уравнение возмущенного движения имеет вид

$$a\ddot{q} - b(1 - q^2)\dot{q} + cq = 0 \quad (6.5.27)$$

(уравнение Ван-дер-Поля).

В случае, показанном на рис. 6.5.20, начало координат представляет собой неустойчивую особую точку типа “неустойчивый фокус” и вся фазовая плоскость является областью притяжения к предельному циклу. Одна из главных особенностей установившихся автоколебаний состоит в независимости их периода и размахов от начальных условий.

Если силы трения в среднем малы по сравнению с силами упругости и инерции, то для определения амплитуды установившихся автоколебаний можно воспользоваться энергетическим методом, приравняв нулю работу, совершаемую нелинейной силой трения за один период (при этом обычно принимают, что период можно принять в виде  $2\pi\sqrt{c/a}$ , как если бы система была консервативной). Таким образом, для уравнения (6.5.26) получится

$$A_{с\tau} = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\frac{b_1}{3b_3}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}},$$

а для уравнения (6.5.27)  $A_{с\tau} = 2$ .

Часто в практических расчетах нелинейную силу трения записывают в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точки с координатой  $[v_0, R_0]$ , характеризующей состояние равновесия:

$$R = R_0 - R'_0 \dot{q} + \frac{1}{2} R''_0 \dot{q}^2 - \frac{1}{6} R'''_0 \dot{q}^3, \quad (6.5.28)$$

штрихами обозначены производные силы трения в точке  $[v_0, R_0]$ .

В этом случае амплитуда стационарных автоколебаний

$$A_{с\tau} \approx \frac{2}{\omega_0} \sqrt{-\frac{2R'_0}{R''_0}}.$$

**Пример 4.** Определить амплитуду установившихся автоколебаний для случая, когда характеристика трения описывается зависимостью

$$R = 3R_* \left[ 1 - \frac{v_{с\kappa}}{v_*} + \left( \frac{v_{с\kappa}}{v_*} \right)^3 \right],$$

$R_*$  и  $v_*$  - координаты точки минимума характеристики трения (см. рис. 6.5.19). Вычислив производные

$$\left. \frac{\partial R}{\partial v} \right|_{v_0} = \frac{3R_*}{v_*} \left( \frac{v_0^2}{v_*^2} - 1 \right), \quad \left. \frac{\partial^3 R}{\partial v^3} \right|_{v_0} = \frac{6R_*}{v_*^3},$$

получим

$$A_{с\tau} = \frac{2v_*}{\omega_0} \sqrt{1 - \left( \frac{v_0}{v_*} \right)^2}.$$

Амплитуда скорости колебаний

$$\dot{q}_{с\tau} = 2v_* \sqrt{1 - \left( \frac{v_0}{v_*} \right)^2}.$$

При  $v_0 > v_*$  автоколебания невозможны.

При  $v_0 < 0,9v_*$  амплитуда скорости автоколебаний  $\dot{q}_{с\tau} \rightarrow v_0$  и  $v = v_0 - \dot{q}_{с\tau} \rightarrow 0$ ; это делает недопустимым представление решения в виде гармонического закона.

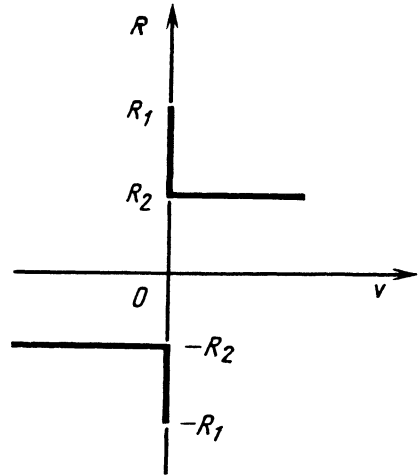


Рис. 6.5.21. Упрощенная характеристика трения:

$R_1$  - предельная сила трения покоя;  
 $R_2$  - сила трения движения ( $R_2 < R_1$ )

Иногда вместо характеристики, представленной на рис. 6.5.19, пользуются предельно упрощенной характеристикой, изображенной на рис. 6.5.21. Если принять в расчет такую характеристику, то с помощью метода припасовывания можно точно найти период и размахи автоколебаний.

**Пример 5.** Найти период и размахи автоколебаний груза, который скользит по горизонтальной шероховатой плоскости под действием силы упругости пружины, свободному концу которой задано движение с постоянной скоростью  $v_0$  (рис. 6.5.22).

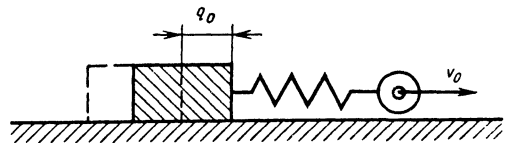


Рис. 6.5.22. Твердое тело, скользящее по шероховатой горизонтальной плоскости под действием силы упругости пружины



В данном случае возможно равномерное скольжение груза со скоростью ведущего звена  $v_0$ . При этом пружина растянута постоянной силой  $P$ , равной силе трения  $R_2$ . Однако этот режим неустойчив и около него неизбежно возникают автоколебания. Если скорость  $v_0$  мала, то какое-либо случайное препятствие может оказаться достаточным для остановки груза. Тогда ведущее звено, продолжая движение вправо, будет растягивать пружину до тех пор, пока сила растяжения не достигнет предельного значения  $R_1$ . После этого произойдет срыв груза, причем сила трения мгновенно уменьшится до значения  $R_2$ . Если начать отсчет времени с этого момента, то последующее движение будет описываться дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 v_0 t + (R_1 - R_2) / m,$$

где  $x$  - перемещение;  $\omega_0^2 = c / m$ ;  $c$  - коэффициент жесткости пружины;  $m$  - масса груза. Решение этого уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям, имеет вид

$$x = v_0 t - \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{R_1 - R_2}{c} (1 - \cos \omega_0 t).$$

При этом скорость груза меняется по закону

$$\dot{x} = v_0 (1 - \cos \omega_0 t) + \frac{\omega_0}{c} (R_1 - R_2) \sin \omega_0 t$$

и в некоторый момент времени  $t_1$  вновь обращается в нуль. Значение  $t_1$  определяется из выражений

$$\sin \omega_0 t_1 = -\frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}; \quad \cos \omega_0 t_1 = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2},$$

где  $\alpha = \frac{\omega_0 (R_1 - R_2)}{c v_0}$ .

Модули полученных выражений всегда меньше единицы, так что  $t_1$  вещественно и остановка груза неизбежна. Далее можно найти путь, пройденный грузом до момента остановки:

$$x_1 = v_0 t_1 + 2\alpha v_0 / \omega_0.$$

Длительность остановки груза  $t_2$  найдется из условия, что сила растяжения пружины должна вновь достигнуть значения  $R_1$ .

Период автоколебаний определяется выражением  $T_1 = t_1 + t_2$ .

При релаксационных автоколебаниях, когда закон движения системы значительно отличается от синусоидального, могут наблюдаться разрывы, которые, например, обнаруживаются в системах со значительной силой трения.

**Пример 6.** Найти размах и период релаксационных автоколебаний системы, изображенной на рис. 6.5.18, а, в случае, когда характеристика трения задана в виде (6.5.28).

Весь автоколебательный цикл состоит из двух этапов: движения груза с постоянной скоростью  $v_0$  вправо совместно с лентой и движения груза с убывающей скоростью влево. Максимальное отклонение груза вправо от положения равновесия  $q_{\max} = R_1 / c$ , а минимальное отклонение влево  $q_{\min} = R_2 / c$ . Размах автоколебаний (рис. 6.5.23, а) определяется разностью

$$|q_{\max}| - |q_{\min}| = (R_1 - R_2) / c.$$

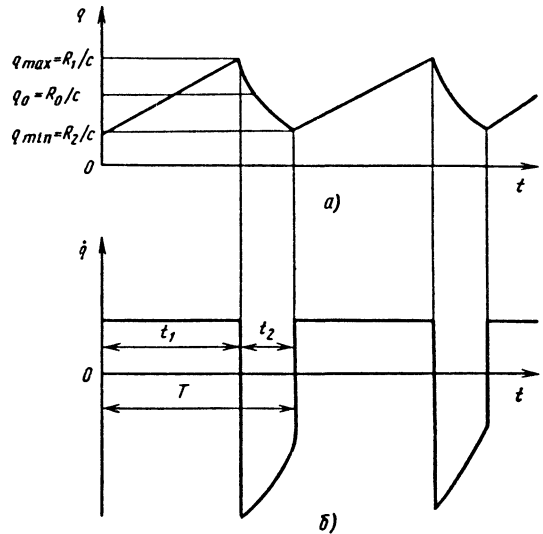


Рис. 6.5.23. Графики перемещения (а) и скорости (б) груза при его релаксационных автоколебаниях

Длительность первого этапа движения  $t_1 = (R_1 - R_2) / (c v_0)$  - закон равномерного движения.

Длительность второго этапа движения определяется из равенства

$$\frac{dR}{d\dot{q}} = c \dot{q} \frac{dt}{d\dot{q}} \quad (\text{так как } c\dot{q} = R(v)),$$

откуда

$$t_2 = \frac{1}{c} \int_{\dot{q}_1}^{\dot{q}_2} \frac{R' \dot{q}}{\dot{q}} d\dot{q}.$$

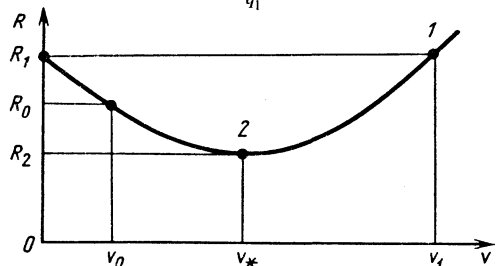


Рис. 6.5.24. График нелинейной силы трения

Нижний предел интегрирования соответствует изображающей точке 1 (рис. 6.5.24), для которой  $\dot{q}_1 = v_0 - v_1$ , а верхний предел - точке 2, для которой  $\dot{q}_2 = v_0 - v_*$ . Суммарная длительность одного цикла автоколебаний  $T = t_1 + t_2$ . Графики движения  $q = q(t)$  и скорости  $\dot{q} = \dot{q}(t)$  представлены на рис. 6.5.23, а, б.

6.5.9. ВИБРОУДАРНЫЕ СИСТЕМЫ

Виброударной называют механическую систему, колебания которой сопровождаются систематическими соударениями ее элементов [5, 6, 44]. Динамические процессы, сопровождающие функционирование виброударной системы, называют виброударными. Виброударные процессы характеризуются резкими изменениями упругих и диссипативных сил, происходящими при контактах соударяющихся элементов. Поэтому виброударные системы относят к классу сильно нелинейных систем.

Виброударные процессы лежат в основе многих технологий - эти процессы используются в машинах для погружения свай, трамбования грунта, дробления материалов, уплотнения бетонных и литейных смесей, в разнообразных конструкциях отбойных и клепальных молотков, ручного механизированного инструмента и других машин. Вместе с тем, возникшая как паразитные, виброударные процессы сопровождают работу практически любой машины, искажают законы движения, способствуют преждевременному износу и разрушению элементов конструкций.

При исследовании виброударных систем (ВУС) задают модели подсистем, несущих соударяющиеся элементы, и выбирают гипотезу о характере ударного взаимодействия [6].

Модели подсистем строят обычными для теории колебаний способами, например, заданием дифференциальных уравнений движения или соответствующих динамических податливостей подсистем [5, 6, 27].

**Гипотезы удара.** Выбор гипотезы удара определяется физическим содержанием задачи и зависит, в частности, от соотношения продолжительности соударения и времени между соударениями элементов. Наиболее распространены две группы гипотез.

Стереомеханическая теория удара [6, 60] полностью исключает рассмотрение процесса формирования силы удара ввиду его малой продолжительности и дает оценку результирующих кинематических характеристик соударяющихся тел с помощью общих теорем механики. В рамках стереомеханической теории удар характеризуется импульсом

$$I = \int_0^{\tau} f_n(t) dt$$

нормальной силы  $f_n(t)$ , возникающей в зоне контакта соударяющихся тел за время  $\tau$  их взаимодействия, удар предполагается мгновенным ( $\tau \rightarrow 0$ ), а потери энергии при ударе оценивают с помощью коэффициента восстановления  $R$  относительной нормальной скорости соударяющихся тел. Так, например, при центральном ударе двух тел, поступательно движущихся со скоростями  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$ , мгновенное изменение их относительной скорости  $\dot{x} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$  описывается отношением

$$\dot{x}(t_k + 0) = -R\dot{x}(t_k - 0),$$

где  $t_k$  - момент соударения.

Изменение относительной скорости происходит в результате действия импульса силы удара

$$I = m(1 + R)\dot{x}(t_k - 0),$$

где  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  - приведенная масса соударяющихся тел;  $m_1, m_2$  - массы тел. При этом предполагают, что координаты тел за время удара не изменяются.

При описании нецентрального удара обычно считают, что касательный импульс

$$I_{\tau} = \begin{cases} -vI \text{sign} \dot{y}_- & \text{при } |\dot{y}_-| \geq vI / m; \\ -m\dot{y}_- & \text{при } |\dot{y}_-| \leq vI / m, \end{cases}$$

где  $\dot{y}_-$  - скорость относительного скольжения в точке контакта в начале соударения;  $v$  - коэффициент ударного трения, который часто принимают равным коэффициенту трения при статическом нагружении. Неравенство в приведенном соотношении следует из того, что скорость скольжения в процессе удара изменяется, но не меняет своего направления.

При использовании стереомеханической теории условия удара вводят в динамическую модель виброударной системы в виде самостоятельных конечных соотношений типа, приведенных выше, либо включают в уравнение движения в виде соответствующих силовых характеристик, записываемых при помощи сингулярных обобщенных функций. В последнем случае сила удара

$$\Phi[x(t), \dot{x}(t)] \Big|_{t=t_k} = I\delta(t - t_k), \quad (6.5.29)$$

где  $\delta(t)$  - функция Дирака [5, 6].

Другая группа гипотез основана на введении нелинейных динамических характеристик ударной пары, дающих зависимость силы удара от координат и скоростей соударяющихся элементов. Эти характеристики учитывают деформацию элементов и позволяют описать процесс соударения [5, 6, 33].

Как правило, динамическая характеристика может быть представлена в виде

$$\Phi(x, \dot{x}) = \lambda\Phi_1(x) + \Phi_2(x, \dot{x}), \quad (6.5.30)$$

где  $\Phi_1, \Phi_2$  - функции, описывающие упругую и диссипативную составляющие характеристики силы удара;  $\lambda \gg 1$  - большой параметр, определяющий, в частности, малость времени соударения.

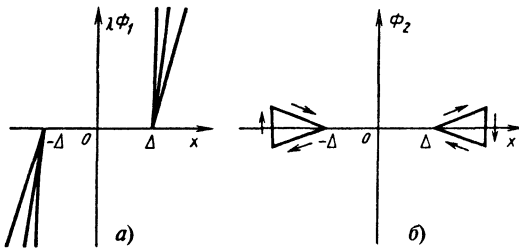


Рис. 6.5.25. Графики упругой составляющей характеристики силы удара

Функции  $\Phi_1, \Phi_2$  имеют обычно пороговый вид. На рис. 6.5.25, а даны графики функции  $\Phi_1(x)$  в случае двустороннего симметричного ограничителя, контакт с которым возникает при  $|x| = \Delta$ . На рис. 6.5.25, б показана зависимость

$$\Phi_2(x, \dot{x}) = \alpha \Phi_1(x) \text{sign} \dot{x}$$

(стрелками показано направление нагружения). При выполнении ряда допущений в случае, когда  $\lambda \rightarrow \infty$ , представление (6.5.30) становится равносильно (6.5.29).

**Модели виброударных систем.** Схемы ВУС [3, 5, 6, 60, 91] различной структуры приведены на рис. 6.5.26. Здесь не показаны источники возбуждения колебаний, которые могут иметь различную природу [6, 33].

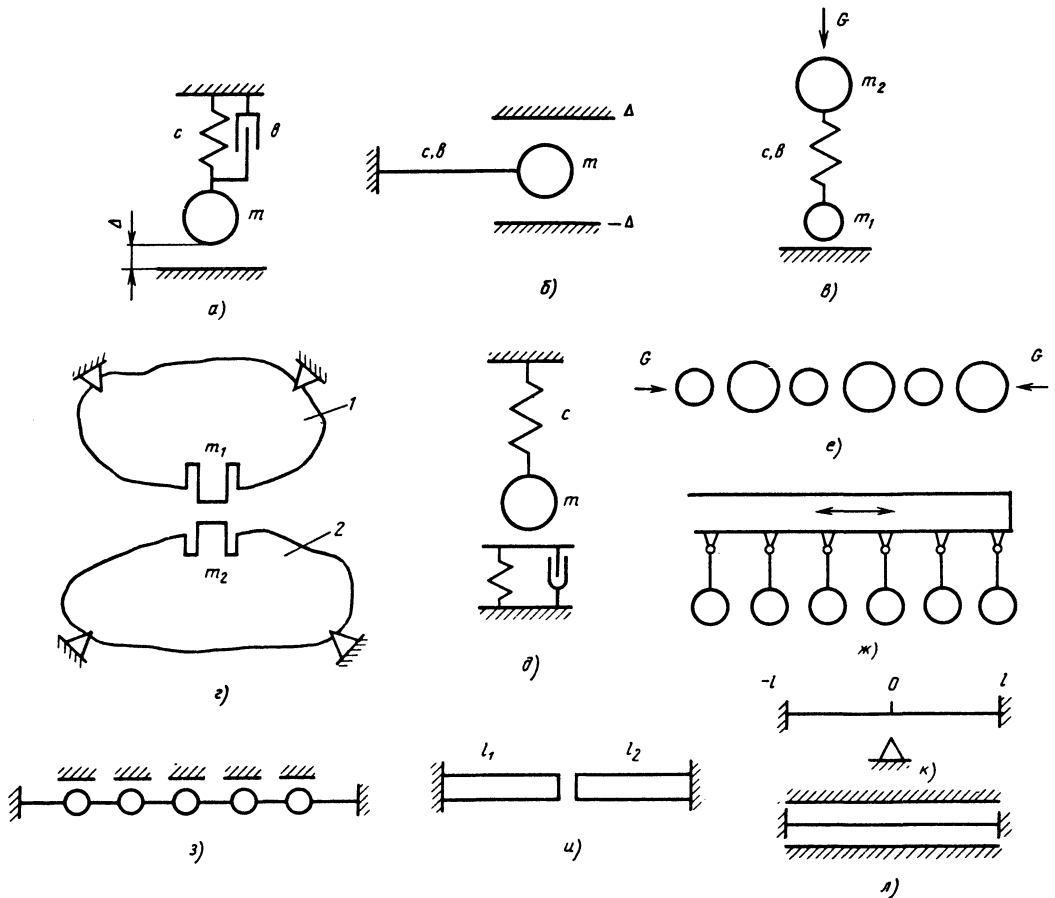


Рис. 6.5.26. Виброударные системы различной структуры

Осцилляторы с одно- и двусторонними ограничителями установлены с зазором  $\Delta$  относительно равновесного положения ударной массы  $m$  (рис. 6.5.26, а, б). (Отрицательная величина  $\Delta$  отвечает системе с предварительным натягом.)

Модель ВУС, в которой предварительный натяг между ударником  $m_1$  и ограничителем создается статической силой  $G$ , приложенной к массе  $m_2$ , приведена на рис. 6.5.26, в. При колебаниях вся система может смещаться вдоль оси. На рис.

6.5.26, *г* условно изображена модель системы с большим числом степеней свободы и одной ударной парой. Модель (рис. 6.5.26, *д*), представляющая собой осциллятор, взаимодействующий с упругим ограничителем, используют при необходимости отыскания силы удара. На рис. 6.5.26, *е*, *ж* представлены ВУС с *последовательными ударными парами*. Системы типа показанной на рис. 6.5.26, *з* называют ВУС с *параллельными ударными парами*.

В ряде случаев, например, при исследовании высокочастотных устройств необходимо рассматривать модели ВУС с распределенными параметрами. На рис. 6.5.26, *и* показаны два продольно колеблющихся стержня, соударяющихся своими торцами. На рис. 6.5.26, *к*, *л* показаны поперечно колеблющиеся натянутые струны или балки, взаимодействующие с точечным или протяженным ограничителем.

Уравнения движения ВУС, применяемые для расчетов, имеют операторную (частотную) или дифференциальную (временную) формы. Рассмотрим общую модель (рис. 6.5.26, *з*) в предположении, что взаимодействующие подсистемы (1 и 2) - линейны и внешние силы  $Q_1(t)$ ,  $Q_2(t)$  приведены с помощью систем операторов динамических податливостей к контактирующим точкам  $x_1$  и  $x_2$ . Запишем уравнения движения этих точек

$$x_j(t) = L_j(\tilde{p}) \left\{ Q_j(t) + (-1)^j \Phi[x(t), \dot{x}(t)] \right\}, j = 1, 2, \dots, \quad (6.5.31)$$

где  $L_j(\tilde{p})$  - операторы динамических податливостей в точках контакта;  $x = x_1 - x_2$ ; характеристика  $\Phi$  дается формулой типа (6.5.29) или (6.5.30). Вычитая из первого уравнения (6.5.31) второе, находим

$$x(t) = x^*(t) - L(\tilde{p})\Phi(x, \dot{x}); \quad (6.5.32)$$

где  $x^*(t)$  - изменение относительной координаты  $x$  в пренебрежении ударами. После нахождения  $x(t)$  из (6.5.31) определяют  $x_j(t)$ .

При рассмотрении систем с одной степенью свободы (см. рис. 6.5.26, *а*, *б*, *д*)  $x_j = x$  - абсолютная координата;

$$L(\tilde{p}) = \left( m\tilde{p}^2 + b\tilde{p} + c \right)^{-1}, \quad (6.5.33)$$

где  $m$  - масса ударника;  $b$  - коэффициент сопротивления;  $c$  - жесткость подвеса. Для установившихся процессов вместо (6.5.32) можно воспользоваться уравнением движения в интегральной форме

$$x(t) = x^*(t) - \int_{-\infty}^t h(t-s)\Phi[x(s), \dot{x}(s)]ds, \quad (6.5.34)$$

где  $h(t)$  - функция Грина (импульсная переходная функция), отвечающая оператору  $L(\tilde{p})$ .

Для систем с  $N > 1$  ударными парами уравнения движения содержат  $N$  сильно нелинейных характеристик ударного взаимодействия или эквивалентных им конечных соотношений. Предполагая, например, периодичность структуры системы с параллельными ударными парами (см. рис. 6.5.26, *з*) и полагая  $m_k = m$ ,  $c_k = c$ , в пренебрежении силами вязкого трения имеем

$$m\ddot{x}_1 + c(2x_1 - x_2) = Q_1(t);$$

$$m\ddot{x}_N + c(2x_N - x_{N-1}) = Q_N(t);$$

$$m\ddot{x}_k + c(2x_k - x_{k+1} - x_{k-1}) = Q_k(t),$$

$$k \neq 1, N; \quad x_k(t_k) = \Delta_k;$$

$$x_k(t_k + 0) = -R\dot{x}_k(t_k - 0),$$

где  $x_k$  - координаты тел;  $N$  - их число;  $Q_k(t)$  - вынуждающие силы.

Для ВУС с распределенным ударным элементом (см. рис. 6.5.26, *и*) имеем в случае, когда в контакте участвует абсолютно гибкая нить и взаимодействие абсолютно упругое:

$$\rho u_{tt} - Tu_{xx} + bu_t + \Phi(u) = p_*(x, t),$$

где  $u$  - искомое перемещение ( $u(\pm l, t) = 0$ );  $\rho$  и  $T$  - погонная масса и натяжение нити;  $b$  - коэффициент вязкого трения;  $p_*(x, t)$  - плотность вынуждающей силы. Плотность силы удара при принятии ряда предположений имеет вид

$$\Phi[u(x, t)]_{t=t_\alpha(x)} = -I(x)\delta[t - t_\alpha(x)];$$

$$I(x) = 2\rho|u_t(x, t_\alpha - 0)|,$$

где  $\alpha$ -е взаимодействие происходит с верхним ограничителем;  $u[x, t_\alpha(x)] = \Delta$ .

Уравнения движения виброударных систем могут содержать также нелинейности других типов. Для системы с одной степенью свободы, на которую действует сила  $\mu G(x, \dot{x}, t)$  ( $\mu$  - малый параметр), имеем

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx + \Phi(x, \dot{x}) = \mu G(x, \dot{x}, t).$$

Методы расчета ВУС базируются на численных и аналитических методах нелинейной механики, однако имеют свои особенности, связанные со спецификой нелинейных сил [6].

Временные методы [2, 3, 6, 15] основаны на приспособивании (сшивании) решений дифференциальных уравнений на "безударных" участках движения, исходя из условия удара. При этом математическая модель ВУС имеет вид, подобный (6.5.34). Рассмотрим, для примера, задачу Коши для системы с одной степенью свободы:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t); \quad x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = v_0; \quad x(t_\alpha) = \Delta;$$

$$\dot{x}(t_\alpha + 0) = -R\dot{x}(t_\alpha - 0) < 0; \quad x(t) \leq \Delta.$$

Пусть до реализации в последнем соотношении равенства решение  $x=x_1(x_0, v_0, t)$  и  $x(t_1)=\Delta$ . Принимая этот момент за начальный, добавим сюда второе начальное условие  $v_1 \equiv \dot{x}_1(t_1) = -R x_1(x_0, v_0, t_1 - 0)$ . Далее получаем решение на втором участке "безударного" движения:  $x=x_2(\Delta, v_1, t)$  и т.д.

При условии, что между ударами система линейна, а внешняя сила периодична, метод приспособывания позволяет дать аналитическое описание периодических виброударных процессов в системах с  $N$  степенями свободы. Общее решение соответствующей линейной задачи легко выписывается и содержит  $2N$  произвольных постоянных:  $x_k=x_k(C_1, \dots, C_{2N}, t)$ , ( $k = \overline{1, N}$ ).

Это  $2N$ -параметрическое семейство функций подчиняется условиям, регламентирующим состояние системы при достижении какой-либо из координат уровня ограничителя, и условиям периодичности. После решения системы  $2N$  нелинейных алгебраических уравнений получаем значения  $C_j=C_{0j}$  ( $j = \overline{1, 2N}$ ), отвечающие искомому режиму, который должен еще анализироваться на выполнение геометрических условий (типа  $x_k \leq \Delta$ ) и устойчивость. Эффективная проверка выполнимости геометрических условий осуществима, как правило, численно. Анализ устойчивости проводится методом конечных разностей. Найденным значениям величин  $C_{0j}$  дают приращения  $\delta C_{0j}^0$  и, исходя из структуры системы, получают информацию о накоплении возмущений от удара к удару. Для  $i$ -го соударения получают величины  $\delta C_{0j}^i$ . Если для всех  $j$  при  $i \rightarrow \infty$   $\delta C_{0j}^i \rightarrow 0$ , периодическое движение асимптотически устойчиво.

Временные методы позволяют получать точные решения сильно нелинейных задач. Они базируются на классическом в теории колебаний методе точечных отображений [2, 63]. При их посредстве были заложены основы теории виброударных систем. Однако временные методы имеют существенные недостатки, в частности, в практическом плане они слабо приспособлены для анализа виброударных систем с большим числом степеней свободы, при учете в уравнении "безударного" движения "обычных" нелинейных факторов, при принятии более реалистических, нежели стереомеханическая, теорий удара.

Частотные методы [6, 33] основаны на использовании процедур, связанных с эквивалентной линеаризацией уравнений движения ВУС. В зависимости от специфики задач применяют методики гармонического баланса, гармонической линеаризации, линеаризации по функциям распределения, статистической линеа-

ризации. Рассмотрим процедуру гармонической линеаризации для системы общего вида (6.5.32).

Предположим, что силовое воздействие, приведенное к точке контакта подсистемы  $l$  (см. рис. 6.5.26,  $\varepsilon$ ),  $Q(t) = Q_0 + Q_1 \cos pt$ . Тогда в (6.5.31)

$$x^*(t) = A^* + a^* \cos(pt - \psi), \quad \text{где}$$

$A^* = L(0)Q_0$ ;  $a^* = |L(ip)Q_1|$ ;  $\psi = \arg[L(ip)]$ . Для отыскания периодического виброударного процесса предполагаем, что его первая гармоника преобладает над остальными:

$x(t) = A + x^0(t) = A + a \cos(pt - \psi)$ . В соответствии с методом гармонической линеаризации нелинейную характеристику представляем в виде

$$F(x, \dot{x}) \approx f(A, a) + \kappa(A, a)x^0 + \beta(A, a)\dot{x}^0, \quad (6.5.35)$$

где коэффициенты гармонической линеаризации определяются формулами

$$f(A, a) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \Phi[x(\tau), \dot{x}(\tau)] d\tau \quad (\tau = p\tau);$$

$$\kappa(A, a) = (\pi a)^{-1} \int_0^{2\pi} \Phi[x(\tau), \dot{x}(\tau)] \cos \tau d\tau;$$

$$\beta(A, a) = (\pi a p)^{-1} \int_0^{2\pi} \Phi[x(\tau), \dot{x}(\tau)] \sin \tau d\tau.$$

После подстановки (6.5.35) в уравнение (6.5.32) получим равенства, связывающие постоянные составляющие, амплитуды и фазы искомого виброударного процесса:

$$A = A^* - L(0)f(A, a);$$

$$a = Q_1 / |W(ip, A, a)|;$$

$$\sin \varphi = (a/Q_1) \operatorname{Im}[W(ip, A, a)]; \quad (6.5.36)$$

$$\cos \varphi = (a/Q_1) \operatorname{Re}[W(ip, A, a)],$$

где  $W(ip, A, a) = L^{-1}(ip) + \kappa(A, a) + ip\beta(A, a)$  - динамическая жесткость линеаризованной виброударной системы.

Для оценки устойчивости стационарного режима, отвечающего значению  $a=a^0$ , применяя энергетическое условие, в соответствии с которым для устойчивого процесса необходимо выполнение неравенства

$$\left[ \operatorname{Re} W \left( \operatorname{Re} W + a \frac{\partial \operatorname{Re} W}{\partial a} \right) + \operatorname{Im} W \left( \operatorname{Im} W + a \frac{\partial \operatorname{Im} W}{\partial a} \right) \right]_{a=a^0} > 0. \quad (6.5.37)$$

Приведем значения коэффициентов линеаризации для некоторых динамических характеристик ударных пар.

Для симметричных ( $A=0$ ) упругодиссипативных ограничителей (рис. 6.5.27, а) с характеристикой вида (6.5.30)  $f=0$ ;

$$\kappa(a) = \frac{2c_0}{\pi} \arccos \frac{\Delta}{a} - \frac{\Delta}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{a}\right)^2}; \quad (6.5.38)$$

$$\beta(a) = \frac{2c_0 \alpha}{\pi p} \left(1 - \frac{\Delta}{a}\right)^2,$$

где  $c_0$  - жесткость ограничителя.

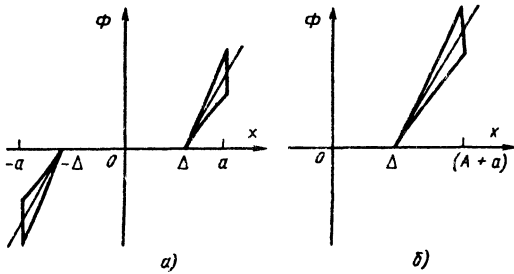


Рис. 6.5.27. Динамическая характеристика ударной пары с упругодиссипативными ограничителями

Для одностороннего упругодиссипативного ограничителя (рис. 6.5.27, б)

$$f(A, a) = \frac{c_0 a}{\pi} \left( \sqrt{1 - \alpha^2} - \alpha \arccos \alpha \right);$$

$$\kappa(A, a) = \frac{c_0}{\pi} \left( \arccos \alpha - \alpha \sqrt{1 - \alpha^2} \right);$$

$$\beta(A, a) = \frac{c_0 \alpha}{\pi p} (1 - \alpha)^2,$$

где  $\alpha = (\Delta - A) / a$ .

Из первых двух равенств (6.5.38) с помощью приближенной процедуры можно исключить величину  $A$  и аппроксимировать коэффициент линеаризации выражением

$$\kappa(a) = \frac{2f}{a + f / c_0}. \quad (6.5.39)$$

При использовании стереомеханической теории удара ( $c_0 \rightarrow \infty$ ) выражения для коэффициентов линеаризации имеют вид

$$\kappa(a) = \frac{2f}{a}; \quad \beta(a) = 2\pi \frac{1 - R}{1 + R} \frac{f^2}{ma^2 p^3}.$$

Для системы с предварительным зазором (натягом) из (6.5.39) и первого уравнения (6.5.36) при  $A^*=0$  имеем

$$\kappa(a) = 2L^{-1}(0) \left(1 - \frac{\Delta}{a}\right). \quad (6.5.40)$$

В качестве примера приведем выражение для амплитудно-частотной характеристики ВУС (см. рис. 6.5.26, а), полученной из второго уравнения (6.5.36) после подстановки коэффициента (6.5.40) и динамической податливости (6.5.33) при отсутствии диссипации энергии ( $b=0$ ,  $R=1$ ):

$$a = \frac{2\Delta \pm \delta}{3 - (p / \omega_0)^2}; \quad \delta = \frac{Q_1}{c}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (6.5.41)$$

Область существования виброударного процесса определяется из условий  $a \geq \Delta$  при  $\Delta > 0$  и  $a > 0$  при  $\Delta \leq 0$ . Условие устойчивости (6.5.37) принимает вид

$$a > \frac{2\Delta}{3 - (p / \omega_0)^2}. \quad (6.5.42)$$

Методы частотного анализа позволили существенно продвинуть теорию ВУС. На их основе удалось отказаться от эталонных моделей, которыми приходится оперировать, используя временные методы, и перейти к более полным и реалистичным моделям ВУС. Таким образом, удалось, в частности, разработать теорию авторезонансных машин виброударного действия [33]. Однако, хотя для ряда принципиальных задач (например, настройка ВУС на резонансный режим) знание основного тона достаточно, тем не менее частотные методы не дают полной информации о значениях динамических нагрузок в ударных парах, о структуре сложных типов виброударных процессов и ряда других динамических эффектов, получить которые можно только, оперируя полными наборами гармонических составляющих широкополосных процессов.

Частотно-временные методы основаны на представлении законов движения периодических виброударных процессов через так называемые периодические функции Грина линейных систем [5, 6, 9]. По своему характеру они, в известной мере, объединяют оба описанных подхода, почему и получили такое наименование. Рассмотрим общее уравнение движения (6.5.32) и эквивалентное ему (для установившихся режимов) интегральное уравнение (6.5.33). Воспользовавшись стереомеханической теорией, предположим, что в системе установился  $T$ -периодический виброударный процесс с  $\nu$  соударениями за период. В соответствии с (6.5.29)

$$\Phi(x, \dot{x}) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu} I_{\nu} \delta(t - t_{\nu} - qT). \quad (6.5.43)$$

Предположив, для определенности, что период линейных колебаний  $x^*(t)$  также равен  $T$ , и внося (6.5.43) в (6.5.34), найдем представление искомого виброударного процесса

$$x(t) = x^*(t) - \sum_{k=1}^{\nu} I_{\nu} \chi(t - t_{\nu}), \quad (6.5.44)$$

где периодическая функция Грина (ПФГ)

$$\chi(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} h(t - qT) = T^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} L(inp) \exp(inpt),$$

$$p = 2\pi T^{-1}. \quad (6.5.45)$$

Представление (6.5.44) определяется только оператором взаимодействующих подсистем и может быть построено, исходя из натурных измерений [91]. Для определения неизвестных импульсов  $I_{\nu}$  и моментов удара  $t_{\nu}$  имеем следующую из условий удара систему алгебраических уравнений:

$$\Delta = x^*(t_j) - \sum_{k=1}^{\nu} I_k \chi(t_j - t_k),$$

$$j = 1, 2, \dots, \nu; \quad \nu = 1, 2, \dots;$$

$$I_j = \left[ \dot{x}^*(t_j) - \sum_{k=1}^{\nu} I_k \dot{\chi}(t_j - t_k - 0) \right] (1 + R)m. \quad (6.5.46)$$

В практически важнейшем случае синусоидальной внешней силы и одного соударения за период движения, совместив удар с началом отсчета времени, вместо (6.5.44) получим [6]

$$x(t) = a^* \cos(pt + \varphi) - I\chi(t); \quad (6.5.47)$$

$$I_{1,2} = \frac{-\Delta\chi(0) \pm \sqrt{a^{*2} \chi(0) - q^2 (\Delta^2 - a^{*2})}}{\chi^2(0) + q^2 p^{-2}}; \quad (6.5.48)$$

$$pa^* \sin \varphi = -I_{1,2}q; \quad a^* \cos \varphi = \Delta + I_{1,2}\chi(0);$$

$$q = \chi(0) + [(1 + R)m]^{-1}. \quad (6.5.49)$$

Для исследования устойчивости может быть применен метод составления уравнений вариаций в обобщенных функциях [74]. В практических расчетах используют энергетическое условие неустойчивости, позволяющее сразу выявить заведомо неустойчивые режимы. Если стационарный режим с одним соударением за период имеет параметры  $I_0$  и  $\varphi_0$ , то для неустойчивого движения

$$\left[ \frac{\partial E}{\partial I} + \frac{\partial E}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial I} \right]_{\substack{I=I_0 \\ \varphi=\varphi_0}} > 0,$$

где  $E(I, \varphi) = E_1(I, \varphi) - E_2(I, \varphi)$ , а  $E_{1,2}(I, \varphi)$  - работы сил возбуждения и диссипации на этом движении. В частности, для режима (6.5.47) - (6.5.49) заведомо неустойчивому движению отвечает знак минус перед радикалом, входящим в формулу (6.5.48).

Аналогичная методика строится для систем с симметричными двусторонними ограничителями. Здесь режимы движения определяются симметричными ПФГ

$$\chi^*(t) = 2T^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} L[i(2k+1)p] \exp[i(2k+1)pt]. \quad (6.5.50)$$

Соотношения (6.5.44), (6.5.46) - (6.5.49) дают точные решения. Однако в отличие от временных методов существенно расширяется допускаемый класс моделей подсистем ВУС. С ростом размерности системы число алгебраических уравнений, определяющих параметры виброударного процесса, не возрастает. Вычислительные преимущества частотно-временных методов основаны на том, что ПФГ (6.5.45) и (6.5.50) находят без обращения к общим решениям соответствующих линейных задач, но полностью определяются частотными характеристиками. Сведения о ПФГ приведены в [5, 74, 91]. Разработаны методики, позволяющие записывать ПФГ не в виде бесконечных рядов (6.5.45), (6.5.50), а в конечной форме на интервалах периодичности.

Расчетные схемы частотно-временных методов позволяют также получать приближенные представления резонансных виброударных процессов, анализировать переходные процессы, задачи с малыми дополнительными нелинейностями, случайные колебания, переходить к моделям с мгновенными соударениями. При этом получающиеся приближенные решения содержат полные наборы гармонических составляющих процессов и более информативны, чем решения, получаемые при посредстве частотных методов. Однако при усложнении моделей получить легко интерпретируемые аналитические соотношения можно только при посредстве частотных методов.

Частотно-временные методы позволили разработать теорию параметрических ВУС; решить задачи о нахождении динамических нагрузок в ударных парах, содержащихся в системах сложной структуры; описать механизм прохождения виброударных процессов через вибропроводящие конструкции различных типов с одиночными и множественными разрывами. С их помощью заложены основы теории виброударных систем с распределенными ударными элементами (см. рис. 6.5.26, л).

Метод негладких преобразований и [37] основан на использовании специальной замены переменной, "уничтожающей" в исходной модели сингулярные обобщенные функции. Пусть динамика системы с одной степенью свободы определяется соотношениями  $\dot{y} = F(t, y, \dot{y})(y > 0)$ ;  $\dot{y}_+ = y_-(y = 0)$ . Рассмотрим замену переменной:  $y = |x|, \dot{y} = \dot{x} \text{sign} x$ . При этом

$\dot{y}_- = -\dot{x}, \dot{y}_+ = \dot{x}$  и отношение  $\dot{y}_+ \dot{y}_-^{-1}$  в точности удовлетворяет условию удара. Таким образом, задача сводится к уравнению движения  $\ddot{x} = F[t, |x|, \dot{x} \text{sign} x] \text{sign} x$ , которое содержит

лишь разрывы первого рода и может анализироваться методами современной нелинейной механики. Подобный метод применим и для случая двусторонних ограничителей, а также для систем большей размерности.

**Режимы движения ВУС** отличаются большим разнообразием - от весьма упорядоченных периодических режимов с одним соударением за период движения до стохастических. Отметим некоторые из них.

**Комбинационные, суб- и суперпериодические режимы.** При реализации определенных начальных условий  $T$  - периодическая внешняя сила  $Q(t) = \sum Q_k \cos(kpt + \varphi_k)$  вызывает установление комбинационного виброударного процесса периода  $T_1 = qt^{-1}T$ , где  $q$  и  $l$  - взаимно простые числа. При  $l=1$  получаем субпериодические колебания типа  $1:q$ ; при  $q=1$  - суперпериодические типа  $l:1$ . Определенным образом, меняя значения величины  $l$ , можно переходить от режимов одного типа к другому. Этот переход сопровождается бифуркацией (ветвлением) существовавшего ранее периодического режима. При этом устойчивый виброударный процесс может возникнуть из процесса ранее неустойчивого [6]. Указанные режимы регистрировались экспериментально.

**Режимы с дребезгом и квазипластический удар** [60]. Исследование ряда моделей ВУС с применением стереомеханической теории удара показывает, что некоторые режимы движения характеризуются возникновением нескольких соударений за период движения - дребезгом (в представлении (6.5.44)  $v > 1$  и возможен случай  $v \rightarrow \infty$ ). Дребезг, в частности, сопровождается переходными виброударными процессами. В случае  $v \rightarrow \infty$  возникает ситуация, при которой за конечное время происходит бесконечное число повторно затухающих соударений. При этом  $R \neq 0$ . Данное явление называют *квазипластическим ударом*. Простейшим примером квазипластического удара служит ряд затухающих подскоков шарика, упавшего на плоскую поверхность с некоторой начальной высо-

ты. Квазипластический удар - результат идеализации, вносимой стереомеханической теорией, применение которой допустимо, пока время соударения много меньше интервала между последовательными ударами.

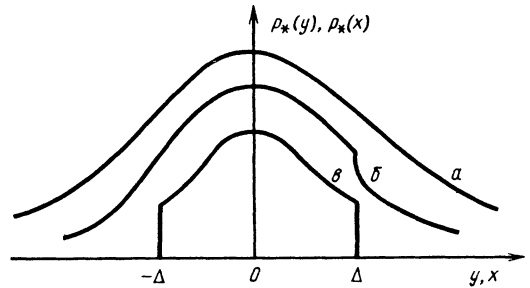


Рис. 6.5.28. Графики одномерных плотностей вероятности случайного виброударного процесса

Случайные виброударные процессы [6], устанавливающиеся в условиях нормального случайного возбуждения, имеют распределения, существенно отличающиеся от нормальных. На рис. 6.5.28 показаны построенные в разных масштабах графики одномерных плотностей вероятности случайного виброударного процесса, реализующегося в системе с одной степенью свободы (см. рис. 6.5.26, б) в предположении, что удар абсолютно упругий, а возбуждение -  $\delta$ -коррелированный случайный процесс типа белого шума. Кривая  $\alpha$  соответствует нормальному распределению  $p_*(y)$  скорости случайного процесса  $\{x(t); \dot{x}(t) \equiv y(t)\}$ ;

$\beta$  - распределению  $p_*(x)$  в случае немгновенного упругого удара;  $\epsilon$  - распределению  $p_*(x)$  в случае двустороннего симметричного абсолютно жесткого ограничителя. Для систем со многими ударными парами (типа рис. 6.5.26, з) относительная частота выходов соударяющихся тел на ограничители подчиняется правилу: наиболее часто могут наблюдаться конфигурации системы, отвечающие минимально возможному значению потенциальной энергии.

Стохастизация режимов движения виброударных систем отмечается практически в каждой модели при некоторых значениях ее параметров. Классическими ВУС, в которых происходит стохастизация, являются билиарды [6]. Известна экспериментальная реализация стохастических режимов в автоколебательной виброударной системе, называемой маятником Неймарка [64].

Самоорганизация режимов движения отмечается в виброударных системах со многими ударными парами и распределенными ударными элементами [60]. Наряду с движениями, имеющими весьма сложную структуру, при некоторых значениях параметров возникают устойчивые периодические режимы, сопровождающиеся



одновременными соударениями в большом числе ударных пар. Подобные же режимы движения происходят и при соударениях, например, гибких нитей с прямыми жесткими ограничителями. В этом случае в удар вовлекаются одновременно целые участки нитей (режимы типа "хлопка"). В ВУС с большим числом сосредоточенных ударных пар возможно появление режимов движения *пульсонного* (солитонного) типа, когда все тела, входящие в систему, практически покоятся, а лишь одно совершает интенсивные периодические колебания с соударениями. При реализации данных "организованных" режимов виброударная система ведет себя во многом подобно системе с одной степенью свободы.

**Нелинейные эффекты.** Виброударные взаимодействия приводят к появлению специфических нелинейных явлений: неизохронности, затягиванию по частоте и амплитуде, жесткому запуску. Эти эффекты можно пояснить на примере простых моделей с одной степенью свободы [2, 3, 6, 10, 44].

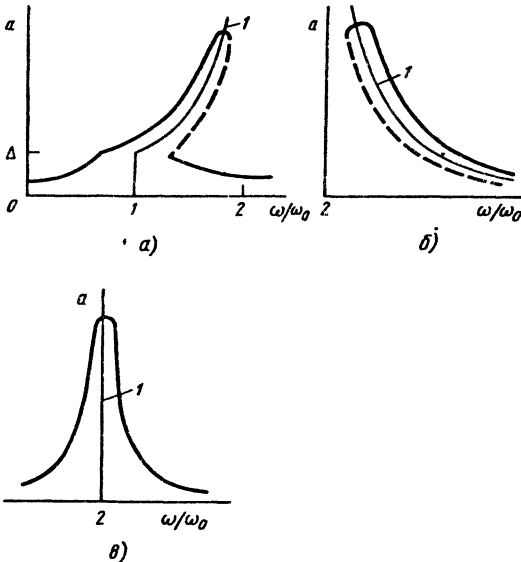


Рис. 6.5.29. Амплитудно-частотные характеристики для ВУС с односторонним ограничителем

*Неизохронность* свободных колебаний проявляется в том, что частота свободных колебаний ВУС зависит от полной энергии системы и, следовательно, от амплитуды колебаний ударника. В системе с односторонним ограничителем (см. рис. 6.5.26, а) амплитуда (полуразмах)  $a$  свободных колебаний связана с частотой  $\omega$  свободных колебаний зависимостью

$$a = \frac{1}{2} \Delta [1 - \sec(\pi\omega / \omega_0)], \quad (6.5.51)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{c/m}$  - собственная частота линейной системы. Из условий  $a \geq 0$  при  $\Delta > 0$  и  $a > 0$  при  $\Delta \leq 0$  следует, что колебания с соударениями возможны в частотных диапазонах  $\omega_0 \leq \omega < 2\omega_0$  при  $\Delta > 0$ ;  $\omega = 2\omega_0$  при  $\Delta = 0$ ;  $\omega > 2\omega_0$  при  $\Delta < 0$ . Графики зависимости (6.5.51) показаны на рис. 6.5.29 тонкими линиями 1 (скелетные кривые).

Система с предварительным зазором (рис. 6.5.29, а) жестко анизохронна, система с натягом (рис. 6.5.29, б) мягко анизохронна, а система с нулевым зазором (рис. 6.5.29, в) изохронна. Зависимость (6.5.51) получена с помощью метода припасовывания (временной метод). Аналогичную зависимость можно получить из решения (6.5.41), полученного приближенным (частотным) методом, при  $Q_1 = 0$ .

Система с симметричными ограничителями имеет жесткий анизохронизм, причем частоты свободных колебаний  $\omega > \omega_0$ , а амплитуды  $a = \Delta$  (рис. 6.5.30).

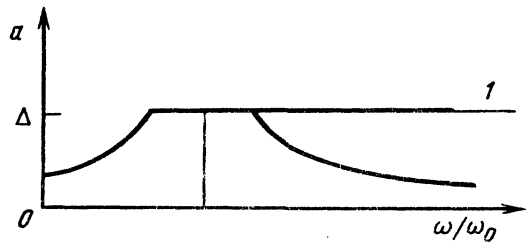


Рис. 6.5.30. Амплитудно-частотные характеристики для ВУС с симметричными ограничителями

Двузначность амплитудно-частотных характеристик ВУС обусловлена их анизохронизмом. Двузначность возможна только в областях существования скелетных кривых, разделяющих ветви амплитудно-частотных характеристик. В системе с односторонним ограничителем двузначность может проявиться при вынуждающей силе  $Q_1 < 2|\Delta|c$  (см. рис. 6.5.29, а, б). Из сравнения (6.5.41) и (6.5.42) следует, что нижние ветви, показанные штриховыми линиями, соответствуют неустойчивым режимам и не реализуются. В системе с симметричными ограничителями обе ветви сливаются со скелетной кривой  $a = \Delta$ , а соответствующие им режимы отличаются фазой и скоростью соударения. В ВУС без диссипации ( $b=0$ ,  $R=1$ ) ветви резонансных кривых неограниченно продолжают вдоль скелетных.

*Затягивание по частоте* заключается в том, что выход на интенсивные виброударные режимы в областях двузначности выполняется увеличением частоты возбуждения для систем с жестким анизохронизмом (см. рис. 6.5.29, а; 6.5.30) и уменьшением частоты для систем с мягким анизохронизмом (см. рис. 6.5.29, б).

*Затягивание по амплитуде* позволяет изменять амплитуду виброударного процесса изменением зазора (натяга).

Срыв колебаний происходит на границах областей двузначности. В системах с зазором при увеличении частоты после срыва виброударного процесса устанавливаются линейные колебания с малой амплитудой, а при уменьшении частоты происходит срыв с линейной ветви на виброударную. В системах с натягом после срыва виброударного процесса колебания прекращаются.

Возникновение виброударного процесса при возбуждении системы с постоянной частотой, лежащей в области двузначности, например, в упругих элементах, так и при ударных взаимодействиях элементов ударных пар. Вязкая диссипация характеризуется коэффициентом сопротивления  $b$ , ударная - коэффициентом восстановления  $R$ . Диссипация энергии ограничивает максимальные амплитуды колебаний и оказывает влияние на резонансные частоты, причем это влияние различно для систем с разной структурой.

**Влияние диссипативных факторов.** В ВУС диссипация энергии происходит как в результате действия сил вязкого сопротивления, например, в упругих элементах, так и при ударных взаимодействиях элементов ударных пар. Вязкая диссипация характеризуется коэффициентом сопротивления  $b$ , ударная - коэффициентом восстановления  $R$ . Диссипация энергии ограничивает максимальные амплитуды колебаний и оказывает влияние на резонансные частоты, причем это влияние различно для систем с разной структурой.

Частоты  $\omega_p$  режимов с максимальными амплитудами системы с односторонним ограничителем определяются выражениями: для системы с ударной диссипацией ( $b=0$ )

$$\frac{\omega_p}{\omega_0} = \sqrt{\frac{3\delta + 4B\Delta + \sqrt{(9\delta + 16B\Delta)\delta}}{2(\delta + 2B\Delta)}}; \quad (6.5.52)$$

для системы с вязкой диссипацией ( $R=1$ )

$$\frac{\omega_p}{\omega_0} = \frac{-n\Delta + \sqrt{(n\Delta)^2 + 3\delta^2}}{\delta}, \quad (6.5.53)$$

где  $\delta = Q_1 / c$ ;  $n = b / \sqrt{mc}$ ;  $B = \frac{\pi(1-R)}{2(1+R)}$ .

Из (6.5.52) и (6.5.53) следует, что вязкая диссипация ограничивает предельный зазор  $\Delta = \delta / n = Q_1 / b\omega_0$ , достигаемый при частоте  $\omega_p = \omega_0$ , но не ограничивает натяг  $\Delta \rightarrow \infty$  при  $\omega_p \rightarrow \infty$ . Ударная диссипация, наоборот, не ограничивает зазор  $\Delta \rightarrow \infty$  при  $\omega_p \rightarrow \omega_0$ , но ограничивает натяг  $\Delta = -\delta / 2B = -(1-R)\delta / \pi(1+R)$ , при котором  $\omega_p \rightarrow \infty$ .

Описанные динамические эффекты проявляются и в ВУС с более сложной структурой, имеющих большое число степеней свободы и

элементы с распределенной массой и упругостью.

### 6.5.10. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЗБУДИТЕЛЯ КОЛЕБАНИЙ С КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ

Движения возбудителя колебаний и колебательной системы взаимозависимы и должны определяться совместно.

Если создаваемые возбудителем силы можно считать не зависящими от возбуждаемых ими колебаний, то решению задачи о вынужденных колебаниях должно предшествовать определение вынуждающих сил (см. п. 6.5.5). Однако такое разделение исходной задачи на две всегда приближенное и не всегда допустимое\*.

Для задач, в которых учитывается взаимодействие возбудителя с колебательной системой, употребляются названия "задачи о колебаниях систем с ограниченным возбуждением" и "задачи о возбуждении механических колебаний", а возбудитель колебаний называют также источником возбуждения, источником энергии или вибратором [51].

Возбудители колебаний классифицируют по характеру физических процессов, вследствие которых возникают силы, вызывающие колебания.

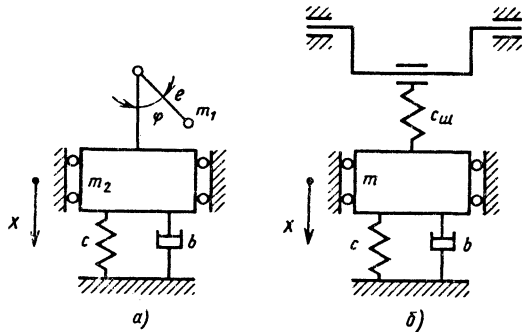


Рис. 6.5.31. Схемы колебательных систем

1. Инерционные (дебалансные) и кривошипно-шатунные возбудители с упругим шатуном (рис. 6.5.31). Возбудитель состоит из двигателя и неуравновешенного ротора (рис. 6.5.31, а) или кривошипа с пружиной (упругим шатуном) (рис. 6.5.31, б), колебательная система представляет собой поступательно движущееся твердое тело на упруговязкой опоре. При вращении двигателя изменяется во времени проекция центробежной силы или силы упругости шатуна на ось  $x$ , что вызывает колебания тела. Вместе с телом колеблется неуравновешенный ротор,

\* Для задания вынуждающей силы, не зависящей от колебаний возбуждаемой системы, в схему управления вибровозбудителем включают различные системы с обратной связью, поддерживающие требуемое значение силы.

вследствие чего возникает переменный во времени момент, действующий на вал двигателя наряду с движущим моментом и моментом сил сопротивления вращению. Дополнительный переменный момент, вызванный колебаниями тела, действует также на вал двигателя, т.е. вращение двигателя с неуравновешенным ротором или кривошипом оказывается зависящим от того, каковы колебания колебательной системы. Иначе говоря, возбудитель взаимодействует с колебательной системой.

2. Гидравлические и пневматические возбудители. Переменные во времени силы, действующие на колебательную систему, создаются вследствие изменяющегося во времени давления жидкости или газа, действующих, например, на поршень, связанный с колебательной системой. Само же давление зависит от перемещений колеблющегося поршня. Это обуславливает взаимодействие гидравлического или пневматического возбудителя с колебательной системой.

3. Электромагнитные возбудители. Силы, возбуждающие колебания колебательной системы создаются путем изменения во времени магнитного поля, действующего на ферромагнитное тело (якорь), связанное с колебательной системой. Взаимодействие обусловлено изменением индуктивности контура с током, создающим поле, и вследствие этого дополнительным изменением тока и поля при колебаниях якоря.

4. Электродинамические возбудители. В этом случае с колебательной системой соединяется проводник с током, помещенный во внешнее магнитное поле. Переменные во времени силы, действующие на проводник и, следовательно, на колебательную систему, создаются путем изменения внешнего поля или тока в проводнике. При колебаниях изменяется коэффициент взаимной индукции между контурами тока в проводнике, связанном с колебательной системой, и тока, создающего внешнее поле. Это вызывает дополнительное изменение токов и магнитного поля, чем обусловлено взаимодействие возбудителя с колебательной системой.

5. Электростатические возбудители. С колебательной системой соединяется пластина конденсатора, заряд которого меняется во времени. Электростатические силы, действующие на пластину, вызывают ее колебания вместе со всей колебательной системой. Взаимодействие обусловлено изменением емкости конденсатора при колебаниях и возникающим вследствие этого дополнительным изменением заряда и сил.

6. Магнитоэлектрические, электроэлектрические и пьезовозбудители. Переменные во времени силы создаются в результате изменения размеров некоторых твердых тел, соединенных с колебательной системой и помещенных в магнитное или электрическое поле. Взаимодействие обусловлено возникновением дополнительного поля при колебаниях этих тел.

Применительно к возбудителям пп. 3-6 следует говорить не об определении движения возбудителя, а об определении описывающих его электромагнитных и механических процессов.

Возбудители, относящиеся к одному из указанных типов, могут отличаться динамическими схемами, конструктивными особенностями и т.д. Поэтому могут существенно отличаться их математические модели и, соответственно, методы исследования взаимодействия. Кроме того, каждый возбудитель может использоваться для возбуждения колебаний различных колебательных систем. Отсюда следует, что задачи о взаимодействии возбудителей с колебательной системой составляют обширный раздел прикладной теории колебаний. Определение колебаний, возбуждаемых одним и тем же возбудителем в разных линейных колебательных системах, можно упростить, представив решение задачи о взаимодействии через гармонические коэффициенты влияния колебательной системы.

**Пример 7.** Уравнения движения системы, изображенной на рис. 6.5.31, а, имеют вид

$$\begin{aligned} m_1 e^2 \ddot{\varphi} &= L(\dot{\varphi}) - H(\dot{\varphi}) + m_1 e \ddot{x} \sin \varphi; \\ m_2 \ddot{x} + b\dot{x} + cx &= m_1 e \left( \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi \right), \end{aligned} \quad (6.5.54)$$

где  $L$ ,  $H$  - соответственно вращающий момент двигателя и момент сопротивления вращению, которые во многих технических важных случаях можно считать заданными функциями угловой скорости  $\dot{\varphi}$ ; во втором уравнении опущен несущественный далее член, содержащий  $\ddot{x}$ . Воздействие колебательной системы на возбудитель описывается дополнительным (по сравнению с тем, когда колебания отсутствуют) моментом  $m_1 e \ddot{x} \sin \varphi$ , приложенным к валу двигателя.

В технических устройствах отношение  $m_1/m_2$  - малая величина; малы также перемещения  $x$  по сравнению с эксцентриситетом  $e$ . Это позволяет применить метод Пуанкаре или другие асимптотические методы теории нелинейных колебаний [2, 15, 17]. Наиболее прост так называемый нерезонансный случай, когда члены  $m_2 \ddot{x}$  и  $b\dot{x}$  одного порядка. Практически часто оказывается, что члены  $L(\dot{\varphi})$ ,  $H(\dot{\varphi})$ ,  $m_1 e \ddot{x} \sin \varphi$  тоже одного порядка. При этом для стационарных движений метод Пуанкаре в первом приближении дает

$$\varphi = pt + \alpha, \quad x = A \cos(pt + \alpha - \psi),$$

где  $p$  - частота вращения двигателя;  $\alpha$  - произвольная постоянная, значение которой практически несущественно, а амплитуда колебаний  $A$  и фазовый сдвиг  $\psi$  определяются соотношениями

$$A = \frac{m_1 e p^2}{\sqrt{(c - m_2 p^2)^2 + b^2 p^2}}; \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{b}{c - m_2 p^2}.$$

Частоту  $p$  находят из уравнения

$$L(p) - S(p) = 0, \quad (6.5.55)$$

$$\text{где } S(p) = H(p) + \frac{1}{2} b p A^2,$$

слагаемое  $\frac{1}{2} b p A^2$  называют *вибрационным моментом*.

Вследствие этого частота стационарных движений может существенно отличаться от частоты вращения при отсутствии колебаний, стационарных режимов может быть несколько - по числу решений уравнения (6.5.55) и среди них возможны неустойчивые. Все эти физические эффекты обусловлены взаимодействием возбудителя с колебательной системой.

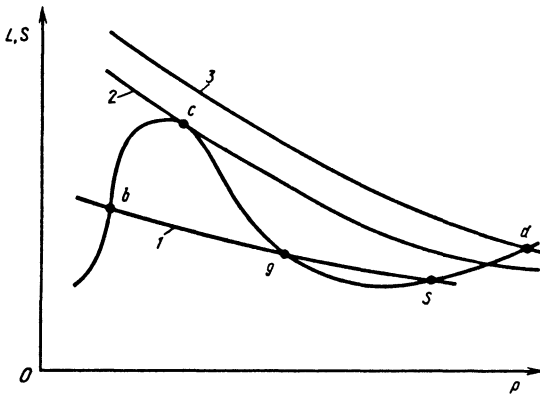


Рис. 6.5.32. Зависимости  $L(p)$  и  $S(p)$

Интересны изменения характеристик стационарного режима при изменении зависимости  $L(p)$ . Пусть вначале  $L(p)$  изображается кривой 1 (рис. 6.5.32). После пуска двигателя установится стационарный режим с частотой, соответствующей точке  $b$ . Этот режим устойчив; неустойчив режим, отвечающий точке  $g$ . Пусть при квазистатическом изменении параметров двигателя кривая  $L(p)$  переходит в кривую 2. Частота при этом будет изменяться до значения, соответствующего "вершине"  $c$  кривой  $S(p)$ .

Если пик кривой  $S(p)$  достаточно острый, то такое изменение частоты будет малозаметно (двигатель "застревает" вблизи резонанса), но существенно возрастает амплитуда колебаний  $A$ . При дальнейшем подъеме кривой  $L(p)$  в положение 3 произойдет "срыв" колебаний: двигатель разгонится до частоты, отвечающей точке  $d$ , а амплитуда колебаний значительно уменьшится.

Совокупность описанных явлений: "застревание" двигателя вблизи резонанса, возрастание амплитуды колебаний без заметного изменения частоты при увеличении вращающего момента и "срыв" колебаний, сопровождающийся значительным увеличением частоты и умень-

шением амплитуды, принято называть эффектом Зоммерфельда [51].

Если в задачах о взаимодействии возбудителя с колебательной системой не рассматривать механические силы, являющиеся заданными функциями времени, то допустимо считать заданными во времени немеханические воздействия на систему. Тогда уравнения движения становятся неавтономными.

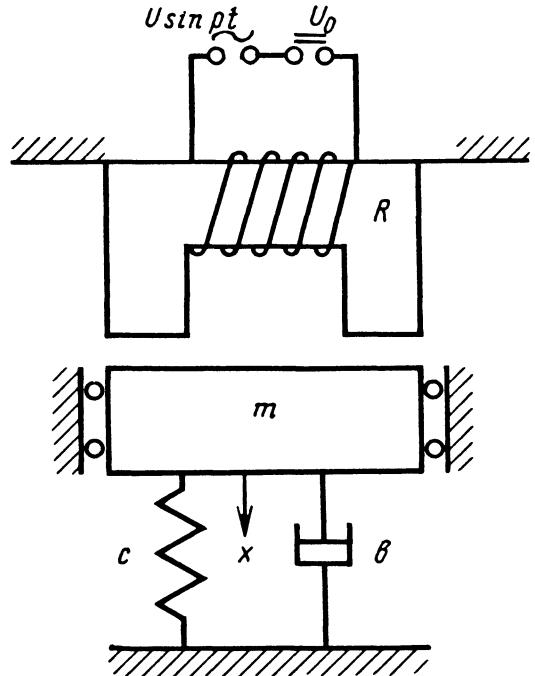


Рис. 6.5.33. Система с электромагнитным возбудителем

**Пример 8.** Колебания в системе с электромагнитным возбудителем (рис. 6.5.33) описываются уравнениями

$$\dot{\Phi} + Ri = U \sin pt + U_0; \quad (6.5.56)$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = -f\Phi^2, \quad f = 1/z^2 \mu_0 S,$$

где  $\Phi$  - магнитный поток через обмотку;  $z$  - число ее витков;  $\mu_0$  - магнитная проницаемость воздуха;  $S$  - площадь сечения сердечника. Ток  $i$  в (6.5.56) считается функцией  $\Phi$ ,  $x$

$$i = \frac{1}{z^2} \left[ R_c + \frac{2}{\mu_0 S} (h + x) \right] \Phi, \quad (6.5.57)$$

где  $R_c$  - магнитное сопротивление стали;  $h$  - расстояние между якорем и сердечником при недеформированной пружине. Коэффициент при  $\Phi$  в (6.5.57), обратно пропорциональный индуктивности электрической цепи, зависит от

перемещения  $x$ . Это обуславливает связь электромагнитных и механических явлений, т.е. взаимодействие электромагнитного возбудителя с колебательной системой.

Обычно члены  $Ri$ ,  $U_0$  в (6.5.56) малы по сравнению с  $U$  и максимальным значением  $\Phi$ . Это позволяет применить метод Пуанкаре или другие асимптотические методы. Периодические режимы в первом приближении метода Пуанкаре определяются соотношениями

$$\Phi = \alpha - \frac{U}{p} \cos pt;$$

$$x = -A_0 + A_1 \cos(pt - \psi_1) - A_2 \cos(2pt - \psi_2),$$

где

$$A_0 = f\kappa_0 \left( \alpha^2 + \frac{U^2}{2p^2} \right); \quad A_1 = 2\alpha f\kappa_1 \frac{U}{p};$$

$$A_2 = f\kappa_2 \frac{U^2}{2p^2};$$

$$\kappa_0 = \frac{1}{c}; \quad \kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{(c - mp^2)^2 + b^2 p^2}};$$

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{bp}{c - mp^2}.$$

Выражения для  $\kappa_2$ ,  $\psi_2$  получают из выражений для  $\kappa_1$ ,  $\psi_1$  заменой  $p$  на  $2p$ .

Постоянную составляющую магнитного потока  $\alpha$  находят из уравнения

$$\alpha(l - q\alpha^2) - d = 0, \quad (6.5.58)$$

где

$$l = R_c + \frac{2h}{\mu_0 S} - \frac{U^2 f\kappa_0}{\mu_0 S p^2} - \frac{2U^2 f\kappa_1 \cos \psi_1}{\mu_0 S p^2};$$

$$q = \frac{2f\kappa_0}{\mu_0 S}; \quad d = \frac{U_0 z^2}{R}.$$

причем устойчивый режим отвечает наименьшему по модулю корню.

Коэффициенты  $l$ ,  $q$  и величина  $\alpha$  зависят от параметров колебательной системы  $c$ ,  $m$  и  $b$ . От тех же параметров зависит создаваемая электромагнитом вынуждающая сила. Следовательно, электромагнитный возбудитель не является ис-

точником заданной вынуждающей силы - эта сила формируется в процессе его взаимодействия с колебательной системой. Вследствие взаимодействия колебания могут терять устойчивость при изменении параметров, что проявляется в виде стука якоря о сердечник, колебания с некоторыми амплитудами оказываются нереализуемыми; эти нелинейные эффекты следует учитывать при расчете вибрационных устройств.

В электрической цепи (см. рис. 6.5.33) через источники переменной и постоянной ЭДС проходят постоянная и переменная составляющие тока  $i$ . Чтобы этого избежать, применяют более сложные схемы электромагнитов. Но во всех случаях необходимо учитывать эффекты, обусловленные взаимодействием.

В отличие от систем с инерционными возбудителями в системах с электромагнитными возбудителями частота периодического режима задана. В таких случаях удобно использовать величину, количественно характеризующую взаимодействие и называемую коэффициентом взаимодействия. Обычно наиболее интересна амплитуда первой гармоники  $A_1$ . Тогда коэффициент взаимодействия  $\kappa_a$  определяется отношением  $\kappa_a = Q_1 / Q_{1*}$ , где  $Q_1$ ,  $Q_{1*}$  - амплитуда первой гармоники, создаваемой возбудителем вынуждающей силы, вычисленные соответственно с учетом и без учета взаимодействия. Для электромагнитного возбудителя  $Q = f\Phi^2$  и

$$Q_1 = 2\alpha fU / p; \quad Q_{1*} = 2\alpha_* fU / p;$$

$$\alpha_* = \frac{d}{R_c + 2h / \mu_0 S}; \quad \kappa_a = \alpha / \alpha_*,$$

где  $\alpha_*$  - корень уравнения (6.5.58) при  $\kappa_0 = \kappa_1 = 0$ , т.е. найденный в предположении, что якорь жестко закреплен на расстоянии  $h$  от сердечника.

В неавтономных задачах о взаимодействии возбудителя с линейной колебательной системой коэффициент взаимодействия используется аналогично тому, как в теории вынужденных колебаний используется коэффициент динамичности. Например, выражению для амплитуды вынужденных колебаний  $A_1 = \kappa_d \delta_c$ , где  $\kappa_d$  - коэффициент динамичности;  $\delta_c$  - статическое перемещение под действием силы, равной амплитуде вынуждающей силы, аналогично выражение  $A_1 = \kappa_a \kappa_d \delta_c^*$ , где  $\delta_c^*$  - статическое перемещение под действием силы  $Q_{1*}$ . Однако понятие о коэффициенте взаимодействия неприменимо к режимам, которые возможны в системах, где проявляется взаимодействие, и невозможны при его отсутствии, т.е. при жестко закрепленной колебательной системе.

Глава 6.6

СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В реальных условиях на любые объекты наряду с детерминистскими силами действуют и случайные силы - силы, изменение во времени которых неизвестно. Случайные составляющие сил приводят к тому, что динамические процессы, вызванные этими силами, например колебания, развиваются непредсказуемым образом. На рис. 6.6.1 показан старт ракеты с наклонной направляющей [77]. Вследствие случайных технологических и газодинамических эксцентриситетов тяга  $\vec{R}$  направлена не по оси ракеты, что приводит к появлению двух случайных возмущений  $N_0 = |\vec{R}|\alpha_0$  и  $M_0 = |\vec{R}|e_0$ , где  $N_0, M_0$  - соответственно случайная сила и случайный момент;  $\alpha_0$  - случайный угловой эксцентриситет;  $e_0$  - случайный линейный эксцентриситет.

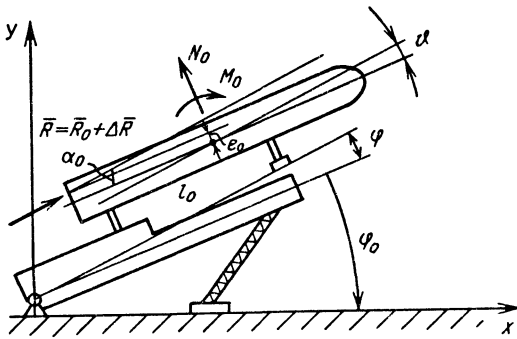


Рис.6.6.1. Старт ракеты с наклонной направляющей

Кроме технологических случайных эксцентриситетов, которые во времени не изменяются, возможны и газодинамические эксцентриситеты тяги  $\alpha$  и  $e$ , вызванные неравномерным горением заряда и неосесимметричным истечением газа. В этом случае дополнительно к  $N_0$  и  $M_0$  появятся  $N$  и  $M$ , зависящие от  $t$  ( $\alpha$  и  $e$  - случайные функции времени). Разброс температуры заряда приведет при прочих равных условиях к разбросу тяги по модулю, т.е. появится еще одно случайное возмущение  $\Delta R(t)$ . В результате действия случайных возмущений возникнут случайные колебания системы ракета-направляющая, и в момент потери контакта с направляющей ракета будет иметь как линейные  $\Delta x, \Delta y$ , так и угловые  $\Delta \varphi$  (и их первые производные) случайные отклонения от расчетных значений. Автоматина, которая движется по дороге со случайными неровностями, подвергается случайным колебаниям и случайным инерционным нагрузкам. Такие примеры можно продолжить.

Случайные колебания представляют собой раздел статистической механики, который посвящен применению вероятностных методов при исследовании задач динамики механических систем. Одной из основных является задача определения вероятностных характеристик (или законов распределения) "выхода" при известных вероятностных характеристиках "входа". Она содержит ряд частных задач, к которым относят случайные стационарные и нестационарные колебания линейных и нелинейных систем как с конечным числом степеней свободы, так и систем с распределенными параметрами.

6.6.1. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ [18, 19]

Случайной функцией  $X(t)$  называют функцию, реализации которой  $X_j(t)$  случайны, но каждая реализация есть неслучайная функция времени  $t$  (рис. 6.6.2). Случайную функцию  $X(t)$ , зависящую от времени, называют случайным процессом, а зависящую как от времени, так и от координат  $X(t, x, y, z)$ , называют пространственно-временным процессом.

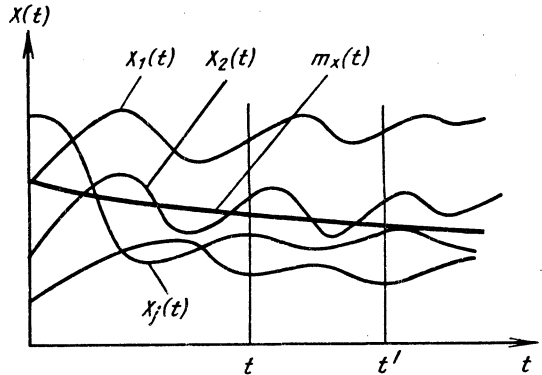


Рис. 6.6.2. Реализация  $X_j(t)$  случайной функции  $X(t)$

Математическим ожиданием (средним значением) случайной величины называют сумму произведений всех возможных ее значений на вероятности этих значений

$$m_x = M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (6.6.1)$$

где  $x_i$  - возможные значения случайной величины  $X$ ;  $p_i$  - вероятности появления этих значений. Для непрерывной случайной величины  $X$  математическое ожидание

$$m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (6.6.2)$$

где  $f(x)$  - плотность распределения случайной величины  $X$ . Приняты следующие обозначения для математического ожидания:  $m_x, M[X], \langle X \rangle$ .

Центрированной случайной величиной  $\dot{X}$ , соответствующей случайной величине  $X$ , называют отклонение случайной величины  $X$  от ее математического ожидания

$$\dot{X} = \bar{X} - m_x.$$

Дисперсией  $D_x$  случайной величины  $X$  называют математическое ожидание квадрата центрированной величины

$$D_x = M\left[\dot{X}^2\right] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i. \quad (6.6.3)$$

Для непрерывной случайной величины дисперсия равна

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx. \quad (6.6.4)$$

При каждом фиксированном значении времени ( $t_1, t_2, \dots, t_j, \dots$ ) случайная функция  $X(t)$  превращается в случайную величину. Для ряда реализаций, например, при  $t = t_k$ , получаем систему случайных величин  $X_j(t_k)$ , которую называют сечением случайной функции. Сечение случайной функции (случайные величины  $X_j(t_k)$ ) характеризуются математическим ожиданием  $m_x(t_k)$  (6.6.1) и дисперсией  $D_x(t_k)$  (6.6.3). Введенные неслучайные характеристики для сечения случайной функции  $X(t)$ ,  $m_x(t_k)$  и  $D_x(t_k)$  справедливы для любого момента времени  $t$ , поэтому индекс "к" в обозначении момента времени  $t$  можно опустить. В отличие от числовых характеристик случайных величин, представляющих собой числа, характеристики случайных функций представляют собой функции, зависящие, например, от времени.

Математическим ожиданием случайной функции  $X(t)$  называют неслучайную функцию  $m_x(t)$ , которая при каждом значении аргумента  $t$  равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайной функции

$$m_x(t) = M[X(t)]. \quad (6.6.5)$$

График изменения математического ожидания  $m_x(t)$  показан на рис. 6.6.2 жирной линией.

Дисперсией случайного процесса  $X(t)$  называют неслучайную функцию  $D_x(t)$ , значение которой для каждого  $t$  равно дисперсии соответствующего сечения случайного процесса

$$D_x(t) = M\left[\dot{X}^2(t)\right]. \quad (6.6.6)$$

Среднее квадратическое отклонение  $\sigma_x(t)$  связано с дисперсией соотношением [18]

$$D_x(t) = \sigma_x^2(t). \quad (6.6.7)$$

Корреляционным моментом системы двух случайных величин  $X$  и  $Y$  называют математическое ожидание произведения центрированных случайных величин

$$K_{xy} = M\left[\dot{X}, \dot{Y}\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij}, \quad (6.6.8)$$

где  $p_{ij}$  - вероятность совместного появления  $x_i$  и  $y_j$ . Для непрерывных случайных величин

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy, \quad (6.6.9)$$

где  $f(x, y)$  - совместный закон распределения случайных величин  $X$  и  $Y$ .

Если рассмотреть два сечения случайного процесса при  $t$  и  $t'$  (см. рис. 6.6.2), то получаем две системы случайных величин  $X_j(t)$ ,  $X_j(t')$ .

Так как эти системы случайных величин относятся к реализациям одного и того же случайного процесса, они должны быть взаимосвязаны. Для оценки этой связи используют числовую характеристику системы двух случайных величин - корреляционный момент (6.6.9)

$$K_x(t, t') = M\left[\dot{X}(t)\dot{X}(t')\right]. \quad (6.6.10)$$

Корреляционной функцией случайного процесса  $X(t)$  называют неслучайную функцию  $K_x(t, t')$  от двух аргументов, которая при каждой паре значений  $t$  и  $t'$  равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайного процесса. Из (6.6.10) при  $t = t'$  следует:

$$K_x(t, t) = M\left[\dot{X}^2(t)\right] = D_x(t). \quad (6.6.11)$$

Корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов, т.е.

$$K_x(t, t') = K_x(t', t). \quad (6.6.12)$$

Если имеется два случайных процесса  $X(t)$  и  $Y(t)$ , то кроме неслучайных функций ( $m_x(t)$ ,  $m_y(t)$ ,  $K_x(t, t')$  и  $K_y(t, t')$ ), характеризующих каждый из этих процессов, можно аналогично корреляционным функциям  $K_x$  и  $K_y$  (которые иногда называют автокорреляционными функциями) получить неслучайную функцию, устанавливающую степень взаимозависимости между различными сечениями этих процессов:

$$K_{xy} = M \left[ \dot{X}(t) \dot{Y}(t') \right], \quad (6.6.13)$$

которую называют взаимной корреляционной функцией [72]. Система двух случайных функций, аналогично системе двух случайных величин, характеризуется корреляционной матрицей

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx}(t, t') & K_{xy}(t, t') \\ K_{yx}(t, t') & K_{yy}(t, t') \end{bmatrix}$$

где элементы главной диагонали есть автокорреляционные функции. Для системы  $n$  случайных функций  $X_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) имеем корреляционную матрицу

$$K = \begin{bmatrix} K_{x_1x_1} & K_{x_1x_2} & \dots & K_{x_1x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{x_nx_1} & \dots & \dots & K_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

**Числовые характеристики комплексных случайных функций.** Рассмотрим комплексные случайные функции  $X(t), Y(t)$ :

$$X(t) = X_1(t) + iX_2(t); Y(t) = Y_1(t) + iY_2(t). \quad (6.6.14)$$

Математические ожидания  $X(t)$  и  $Y(t)$  соответственно

$$m_x = m_{x_1} + im_{x_2}; \quad m_y = m_{y_1} + im_{y_2}. \quad (6.6.15)$$

Взаимно корреляционная функция комплексных функций

$$K_{xy} = M \left[ \dot{X}(t) \dot{Y}^*(t') \right], \quad (6.6.16)$$

где  $\dot{Y}^*$  - сопряженная комплексная функция. В более подробной записи

$$K_{xy} = K_{x_1y_1} + K_{x_2y_2} + i(K_{x_2y_1} - K_{x_1y_2}).$$

Взаимно корреляционная функция (6.6.16) в частном случае при  $t = t'$  и  $X=Y$  есть дисперсия случайной комплексной функции  $X$ , которая должна быть положительной, что выполняется, если берется произведение комплексной функции и ее сопряженной функции

$$D_x(t) = M \left[ \dot{X}(t) \dot{X}^*(t) \right] = M \left[ \dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2 \right]. \quad (6.6.17)$$

**Стационарным случайным процессом** называют случайный процесс, у которого математическое ожидание и дисперсия постоянны, а корреляционная функция зависит от интервала времени  $\tau = t - t'$  между сечениями случайного процесса

$$K_x(t' - t) = K_x(\tau). \quad (6.6.18)$$

Дисперсия стационарного процесса

$$D_x = K_x(t' - t) \Big|_{t'=t} = K_x(0). \quad (6.6.19)$$

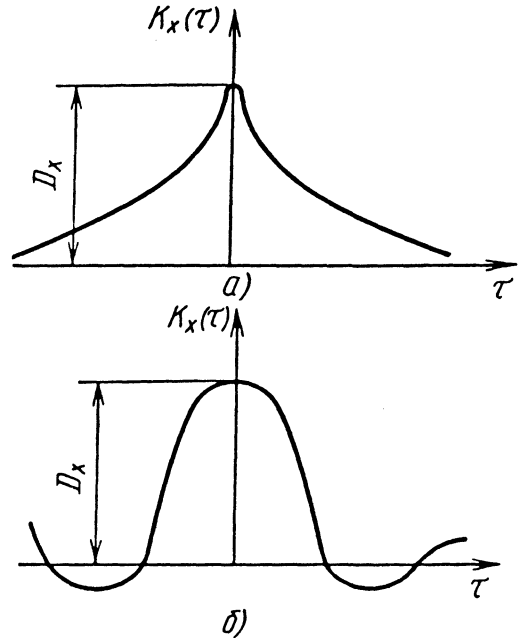


Рис. 6.6.3. Графики корреляционной функции

На основании свойства симметрии (6.6.12) корреляционная функция стационарного случайного процесса удовлетворяет условию

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau),$$

т.е. является четной функцией. На рис. 6.6.3 приведены графики изменения  $K_x(\tau)$  для двух наиболее часто используемых в прикладных задачах корреляционных функций:

$$K_x = D_x e^{-\alpha|\tau|}, \quad (\alpha > 0);$$

$$K_x = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \quad (\alpha > 0).$$

Нормированной корреляционной функцией называют функцию

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sigma_x(t)\sigma_x(t')}. \quad (6.6.20)$$

Стационарный случайный процесс, у которого корреляционная функция пропорциональна дельта-функции Дирака, называют белым шумом:

$$K_x(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau), \quad (6.6.21)$$

где  $S_0$  - постоянный множитель;  $\delta(\tau)$  - дельта-функция Дирака.



Стационарные случайные процессы, для которых можно по одной реализации установить вероятностные характеристики, называют эргодическими стационарными случайными процессами. Для таких процессов среднее значение функции по времени (на достаточно большом интервале наблюдения) приближенно равно среднему значению по множеству наблюдений, т.е. [18]

$$m_x \approx \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt. \quad (6.6.22)$$

Выражение для корреляционной функции имеет вид

$$K_x \approx \frac{1}{T} \int_0^T \dot{X}(t) \dot{X}(t + \tau) dt. \quad (6.6.23)$$

Достаточным условием эргодичности случайной стационарной функции (по отношению к математическому ожиданию) является условие

$$K_x(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty.$$

Если для двух стационарных случайных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  взаимная корреляционная функция  $K_{xy}(t_1, t_2)$  зависит только от разности моментов времени ( $\tau = t_2 - t_1$ ), то такие стационарные процессы называют стационарно связанными. Для стационарно связанных случайных процессов имеет место условие

$$K_{xy}(\tau) = K_{xy}(-\tau).$$

Спектральная плотность  $S_x(\omega)$  характеризует распределение дисперсии случайной стационарной функции по частотам. Спектральная плотность  $S_x(\omega)$  связана с корреляционной функцией  $K_x(\tau)$  соотношением [18] (преобразованием Фурье корреляционной функции)

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (6.6.24)$$

Функция  $S_x(\omega)$  удовлетворяет условию  $S_x(\omega) > 0$ , так как характеризует распределение дисперсии, которая положительна. В соответствии со свойствами преобразования Фурье из (6.6.24) следует

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (6.6.25)$$

Соотношения (6.6.24) и (6.6.25) называют формулами Хинчина-Винера. Они устанавливают связь между представлением случайного процесса во временной области (с помощью корреляционной функции  $K_x(\tau)$ ) и в частотной области (с помощью спектральной плотности  $S_x(\omega)$ ). Функции  $K_x(\tau)$  и  $S_x(\omega)$  есть четные функции, поэтому

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau; \quad (6.6.26)$$

$$K_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (6.6.27)$$

Дисперсия случайной стационарной функции

$$D_x = K_x(0) = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (6.6.28)$$

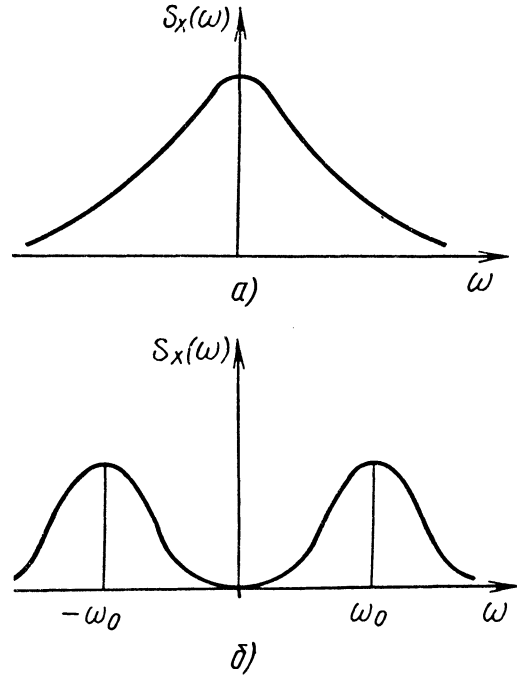


Рис. 6.6.4. Графики спектральных плотностей, соответствующие: а - рис. 6.6.3, а; б - рис. 6.6.3, б

На рис. 6.6.4, а, б приведены графики спектральных плотностей.

В частном случае, когда спектральная плотность постоянна  $S_x = s_0 = \text{const}$ ,

$$K_x(\tau) = s_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega = 2\pi s_0 \delta(\tau);$$

$$\left\{ \delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega \right\}. \quad (6.6.29)$$

Корреляционная функция (6.6.29) соответствует стационарному случайному процессу типа белого шума. Для системы двух стационарно связанных случайных функций  $X(t)$ ,  $Y(t)$  аналогично (6.6.24), (6.6.25) имеем

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega; \quad (6.6.30)$$

$$S_{xy} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (6.6.31)$$

где  $S_{xy}(\omega)$  - взаимная спектральная плотность. Если  $X(t)$  и  $Y(t)$  являются случайными коррелируемыми функциями типа белого шума,  $S_{xy} = \text{const}$ , то  $K_{xy}(\tau) = 2\pi s_{xy} \delta(\tau)$ .

**Линейные преобразования случайных функций.** С помощью линейных операторов  $L$

$$Y(t) = L(X(t)) \quad (6.6.32)$$

устанавливается связь между вероятностными характеристиками случайной функции  $X(t)$  и случайной функции  $Y(t)$ .

Вход и выход связаны соотношением

$$Y(t) = \varphi(t)X(t),$$

где  $\varphi(t)$  - неслучайная функция.

Математическое ожидание выхода

$$m_y(t) = M[\varphi X] = \varphi(t)M[X] = \varphi(t)m_x(t).$$

Корреляционная функция выхода

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M\left[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')\right] = \\ &= \varphi(t)\varphi(t')K_x(t, t'). \end{aligned}$$

В случае, если вход  $X$  и выход  $Y$  - случайные векторы, связанные линейным преобразованием вида

$$\bar{Y} = K(t)\bar{X}(t),$$

где  $K(t)$  - матрица ( $n \times n$ ), элементами которой являются неслучайные функции  $k_{ij}(t)$ , то математические ожидания и корреляционные функции компонент вектора  $\bar{Y}$  будут

$$m_{y_i}(t) = M\left[\sum_{i=1}^n k_{ij}x_j\right] = \sum_{i=1}^n k_{ji}m_{x_i}; \quad (6.6.33)$$

$$\begin{aligned} K_{y_i y_j}(t, t') &= M\left[\overset{\circ}{Y}_i \overset{\circ}{Y}_j\right] = \\ &= \sum_{v=1}^n \sum_{k=1}^n k_{ik}(t)k_{jv}(t')K_{x_k x_v}(t, t'). \end{aligned} \quad (6.6.34)$$

Приведенные выражения для вероятностных характеристик компонент вектора  $\bar{Y}$ , линейно связанных с компонентами вектора  $\bar{X}$ , используют, например, при исследовании свободных случайных колебаний.

**Интеграл от случайной функции  $X(t)$ ,** имеющей математическое ожидание  $m_x(t)$  и корреляционную функцию  $K_x(t, t')$ ,

$$Y(t) = \int_0^t X(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Математическое ожидание выхода

$$m_y(t) = M\left[\int_0^t X d\varepsilon\right] = \int_0^t M[X] d\varepsilon = \int_0^t m_x d\varepsilon.$$

Здесь принято, что операции осреднения  $M$  и интегрирования  $\int$  перестановочны, т.е.

$$M \int = \int M.$$

Корреляционная функция выхода

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M\left[\int_0^t \overset{\circ}{X}(\varepsilon) d\varepsilon \int_0^{t'} \overset{\circ}{X}(\varepsilon') d\varepsilon'\right] = \\ &= M\left[\int_0^t \int_0^{t'} \overset{\circ}{X}(\varepsilon)\overset{\circ}{X}(\varepsilon') d\varepsilon d\varepsilon'\right]. \end{aligned}$$

С использованием условия перестановочности операций осреднения и интегрирования

$$K_y(t, t') = \int_0^t \int_0^{t'} K_x(\varepsilon, \varepsilon') d\varepsilon d\varepsilon'. \quad (6.6.35)$$

**Пример 1.** Определить  $m_y(t)$  и  $D_y(t)$ , если

$$m_x = at, \quad K_x = D_x e^{-\alpha(t+t')}.$$

$$1) \quad m_y = \int_0^t a\varepsilon d\varepsilon = a \frac{t^2}{2};$$

$$\begin{aligned} 2) \quad K_y(t, t') &= \int_0^t \int_0^{t'} D_x e^{-\alpha(\varepsilon+\varepsilon')} a\varepsilon d\varepsilon' = \\ &= \frac{D_x}{\alpha^2} \left( e^{-\alpha(t+t')} - e^{-\alpha t'} - e^{-\alpha t} + 1 \right). \end{aligned}$$

Полагая  $t = t'$ , находим

$$D_y(t) = \frac{D_x}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t})^2.$$

Если случайная функция входа  $X_1(t) = \varphi(t)X(t)$ , где  $\varphi(t)$  - неслучайная функция, то вероятностные характеристики выхода

$$m_y = \int_0^t \varphi(\varepsilon) m_x(\varepsilon) d\varepsilon;$$

$$K_y(t, t') = \int_0^t \int_0^{t'} \varphi(\varepsilon)\varphi(\varepsilon') K_x(\varepsilon, \varepsilon') d\varepsilon d\varepsilon'. \quad (6.6.36)$$

Соотношения (6.6.36) играют основную роль в теории колебаний линейных систем. Эти результаты можно обобщить на случай, когда "вход" и "выход" являются  $n$ -мерными векторами, т.е.

$$\bar{Y}(t) = \int_0^t K(t, \varepsilon) \bar{X}(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (6.6.37)$$

где  $K(t, \varepsilon)$  - матрица ( $n \times n$ ), элементами которой являются неслучайные функции. В этом случае математические ожидания компонент вектора  $\bar{Y}$  и корреляционные функции имеют вид

$$m_{y_i}(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^t k_{ji}(t, \varepsilon) m_{x_j}(\varepsilon) d\varepsilon;$$

$$K_{y_i y_j}(t, t') = \sum_{\rho=1}^n \sum_{\nu=1}^n \int_0^t \int_0^{t'} k_{i\rho}(t, \varepsilon) k_{\nu j}(t', \varepsilon') \times$$

$$\times K_{x_\rho x_\nu}(\varepsilon, \varepsilon') d\varepsilon d\varepsilon'. \quad (6.6.38)$$

Соотношения (6.6.38) используют при исследовании вынужденных случайных колебаний линейных систем.

*Производная от случайной функции*

$$\bar{Y}(t) = \frac{dX(t)}{dt}.$$

Математическое ожидание

$$m_y(t) = M \left[ \frac{dX}{dt} \right] = \frac{dM[X]}{dt} = \frac{dm_x}{dt}.$$

Корреляционная функция

$$K_y(t, t') = M \left[ \frac{d\dot{X}}{dt} \frac{d\dot{X}}{dt'} \right] =$$

$$= M \left[ \frac{\partial^2 \dot{X}(t) \dot{X}(t')}{\partial t \partial t'} \right] = \frac{\partial^2 M[\dot{X}(t) \dot{X}(t')]}{\partial t \partial t'} =$$

$$= \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \partial t'}. \quad (6.6.39)$$

**Пример 2.** Определить  $m_y(t)$  и  $D_y(t)$ , если

$$m_x = at, \quad K_x = D_x e^{-\alpha(t+t')}.$$

Получим

$$m_y(t) = \frac{dm_x}{dt} = a;$$

$$K_y(t, t') = D_x \frac{\partial^2 e^{-\alpha(t+t')}}{\partial t \partial t'} = D_x \alpha^2 e^{-\alpha(t+t')}.$$

## 6.6.2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

**Свободные случайные колебания.** Уравнение свободных колебаний системы с конечным числом степеней свободы

$$A\ddot{Y} + B\dot{Y} + CY = 0, \quad (6.6.40)$$

где  $A, B, C$  - постоянные матрицы размерности ( $n \times n$ ) соответственно инерционная, диссипативная и "упругая";  $\bar{Y}$  - вектор состояния системы. Уравнение (6.6.40) можно записать в виде системы двух векторных уравнений первого порядка

$$\dot{\bar{Z}}_1 + A_1^{-1} B \bar{Z}_1 + A_1^{-1} C \bar{Z}_2 = 0; \quad \dot{\bar{Z}}_2 - \bar{Z}_1 = 0,$$

или

$$\dot{\bar{Z}} + A \bar{Z} = 0, \quad (6.6.41)$$

где

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_1 \\ \bar{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y} \\ Y \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} A_1^{-1} B & A_1^{-1} C \\ -E & 0 \end{bmatrix};$$

$E$  - единичная матрица.

Решение уравнения (6.6.41) имеет вид

$$\bar{Z} = K(t) \bar{Z}_0, \quad (6.6.42)$$

где  $K(t)$  - фундаментальная матрица решений однородного уравнения (6.6.41);  $\bar{Z}_0$  - случайный вектор.

Вероятностные характеристики компонент вектора  $\bar{Z}_0$  (математические ожидания  $m_{z_{0j}}$  и взаимно корреляционные моменты) известны. Соотношение (6.6.42) аналогично ранее рассмотренному линейному преобразованию случайных функций (6.6.32), поэтому, воспользовавшись выражениями (6.6.33) и (6.6.34), находим

$$m_{z_j} = \sum_{i=1}^n k_{ij}(t) m_{z_{0i}} \quad (j = 1, 2, \dots, n);$$

$$K_{z_{0i} z_{0j}} = \sum_{\rho=1}^n \sum_{\nu=1}^n k_{i\rho}(t) k_{\nu j}(t) K_{z_{0\rho} z_{0\nu}}. \quad (6.6.43)$$

**Пример 3.** Сосредоточенная точечная масса  $m$  находится на консольном стержне постоянного сечения (рис. 6.6.5). На массу действует случайный импульс силы  $\bar{J}$ , имеющий нормальное распределение [31] с известными вероятностными характеристиками  $m_y$  и  $\sigma_y$ . Требуется опре-

делить изменение во времени максимального нормального напряжения в сечении стержня в начале координат.

После окончания действия импульса силы возникнут свободные колебания, которые описываются уравнением

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + \omega_0^2 y = 0.$$

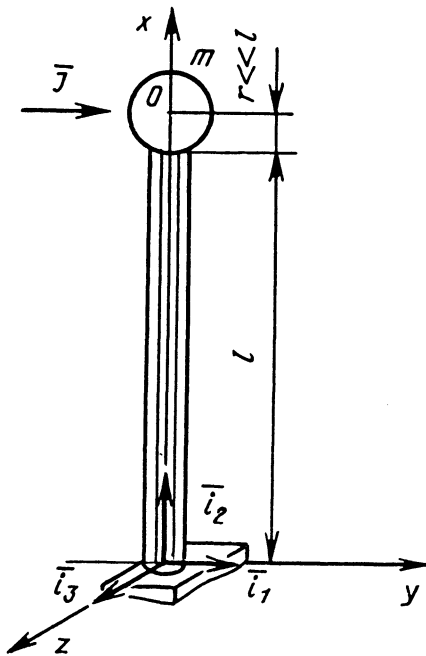


Рис. 6.6.5. Схема действия случайного импульса  $I$  на массу  $m$

Решение этого уравнения:

$$y = e^{-\varepsilon t} (c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t)$$

$$\left( \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2} \right).$$

Отсчет времени берем после окончания действия импульса силы, при  $t=0$  имеем

$$y(0) = y_0 = 0; \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0 = \frac{|\bar{J}|}{m},$$

поэтому

$$y = \frac{|\bar{J}|}{\omega_1 m} e^{-\varepsilon t} \cos \omega_1 t.$$

Математическое ожидание  $m_y$ , корреляционная функция  $K_y(t, t')$  и дисперсия  $D_y$  будут:

$$m_y = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\omega_1 m} \cos \omega_1 t m_J;$$

$$K_y = D_y \left( \frac{1}{\omega_1 m} \right)^2 e^{-\varepsilon(t+t')} \cos \omega_1 t \cos \omega_1 t';$$

$$D_y = \frac{D_J}{(\omega_1 m)^2} e^{-2\varepsilon t} \cos^2 \omega_1 t.$$

Принимая, что случайное отклонение  $y$  имеет нормальное распределение, и используя правило трех сигм, получаем

$$\begin{aligned} \max y &= m_y + 3\sigma_y = \\ &= \frac{e^{-\varepsilon t}}{\omega_1 m} \cos \omega_1 t (m_J + 3\sigma_J). \end{aligned}$$

Максимальное нормальное напряжение в заделке

$$\sigma = \frac{3EJ_z}{W_z l^2} \frac{e^{-\varepsilon t}}{\omega_1 m} \cos \omega_1 t (m_J + 3\sigma_J).$$

Можно определить момент времени  $t^*$ , когда  $\sigma$  достигнет максимального значения, из условия  $(d\sigma/dt) = 0$  или  $\operatorname{tg} \omega_1 t = -\varepsilon/\omega_1$ .

**Вынужденные случайные колебания.** Уравнение вынужденных колебаний систем с конечным числом степеней свободы

$$L(Y) = A_1 \ddot{Y} + B \dot{Y} + C Y = D_1 \bar{f}, \quad (6.6.44)$$

где  $A_1, B, C, D_1$  - матрицы, элементы которых могут быть как постоянными числами, так и функциями времени;  $\bar{f}$  - случайный вектор, вероятностные характеристики компонент  $f_j$  которого  $m_{f_j}(t)$  и  $K_{f_j f_j}(t, t')$  известны.

Размерность вектора  $\bar{f}$  не обязательно должна быть равна размерности вектора  $\bar{Y}$ . Число действующих на систему внешних возмущений может быть как меньше, так и больше числа степеней свободы системы, поэтому матрица  $D_1$  в общем случае прямоугольная, а не квадратная.

Показанный на рис. 6.6.1 разновременный старт ракеты описывается системой двух уравнений второго порядка (две степени свободы - угол  $\varphi$  для направляющей и угол  $\vartheta$  для оси ракеты) с переменными во времени коэффициентами, т.е. уравнением типа (6.6.44). Элементы матриц, входящих в уравнение (6.6.44), зависят от времени вследствие изменения массы ракеты и смещения ракеты по направляющей. Если случайной составляющей изменения массы за время движения ракеты по направляющей можно пренебречь, то оператор  $L$  и матрица  $D_1$  детерминистские. Если учитывать случайное изменение массы ракеты, то оператор  $L$  стохастический, так как коэффициенты, входящие в оператор  $L$ , случайны. Компоненты вектора  $\bar{f}$  для данного

примера есть технологические и газодинамические эксцентриситеты тяги ( $\varepsilon_0, \varepsilon, \alpha_0, \alpha$ ) и разброс тяги по модулю  $\Delta R$  [77].

Уравнение (6.6.44) можно представить в виде уравнения первого порядка вида

$$\dot{\bar{Z}} + A(t)\bar{Z} = D\bar{F}, \quad (6.6.45)$$

где

$$\bar{Z} = \begin{pmatrix} \dot{Y} \\ \bar{Y} \end{pmatrix}^T = (\bar{Z}_1, \bar{Z}_2)^T; \quad \bar{F} = (\bar{f}, 0)^T;$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1^{-1}B & A_1^{-1}C \\ -E & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} A_1^{-1}D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Нестационарные случайные колебания имеют место, если:

1) элементы матриц  $A_1, B, C$  зависят от времени; 2) элементы матриц  $A_1, B, C$  постоянны, но время процесса ограничено и система не успевает выйти на установившийся стационарный режим колебаний.

При нулевых начальных условиях решение уравнения (6.6.45) имеет вид

$$\bar{Z} = \int_0^t G(t, \varepsilon) D(\varepsilon) \bar{F}(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (6.6.46)$$

где

$$G(t, \varepsilon) = K(t) K^{-1}(\varepsilon).$$

Матрица  $K(t)$  удовлетворяет однородному уравнению

$$\dot{K} + A(t)K = 0. \quad (6.6.47)$$

Если время процесса известно ( $t=t_k$ ), то матрицу  $G(t, \varepsilon)$  можно получить, решая уравнение, сопряженное с (6.6.48), т.е.

$$\dot{G}^T(t_k, \varepsilon) - A^T G^T(t_k, \varepsilon) = 0, \quad (6.6.48)$$

где  $G^T, A^T$  - транспонированные матрицы.

Вероятностные характеристики решения (6.6.46) при известных вероятностных характеристиках входа (компонент вектора  $\bar{F}$ )  $m_{F_k}$  и  $K_{F_k F_v}$ , например, для случая, когда число компонент  $m$  вектора  $\bar{F}$  меньше числа компонент ( $2n$ ) вектора состояния системы  $\bar{Z}$ , определяют следующим образом.

Математические ожидания компонент вектора состояния системы  $\bar{Z}$

$$m_{z_j} = \sum_{k=1}^m \int_0^t p_{jk}(t, \varepsilon) m_{F_k}(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (6.6.49)$$

где  $p_{jk}$  - элементы матрицы  $P=G(t, \varepsilon)D(\varepsilon)$ .

Первые  $n$  компонент ( $j=1, 2, \dots, n$ ) есть первые производные обобщенных координат, характери-

зующих положение системы в пространстве, остальные ( $j=(n+1), \dots, 2n$ ) есть обобщенные координаты.

Взаимно корреляционные ( $j \neq i$ ) и корреляционные ( $j=i$ ) функции компонент  $z_j$  вектора  $\bar{Z}$

$$K_{z_j z_i} = \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^m \int_0^t \int_0^{t'} p_{jk}(t, \varepsilon) p_{iv}(t', \varepsilon') K_{F_k F_v} d\varepsilon d\varepsilon';$$

$$K_{z_j z_j} = \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^m \int_0^t \int_0^{t'} p_{jk}(t, \varepsilon) p_{ik}(t', \varepsilon') K_{F_k F_v} d\varepsilon d\varepsilon'. \quad (6.6.50)$$

Дисперсии компонент  $Z_j$  вектора  $\bar{Z}$

$$D_{z_i} = K_{z_i z_i}(t, t') \Big|_{t=t'}.$$

Частные случаи: 1) компоненты вектора  $\bar{F}$  являются некоррелированными случайными функциями, т.е.  $K_{F_k F_v} = 0$  при  $v \neq k$ ,

$$K_{z_j z_j} = \sum_{k=1}^m \int_0^t \int_0^{t'} p_{jk}(t, \varepsilon) p_{ik}(t', \varepsilon') K_{F_k F_k} d\varepsilon d\varepsilon';$$

2) компоненты вектора  $\bar{F}$  есть случайные числа

$$m_{F_k} = \text{const}; \quad K_{F_k F_v} = \text{const};$$

$$m_{z_j} = \sum_{k=1}^m m_{F_k} \int_0^t p_{jk} d\varepsilon;$$

$$K_{z_j z_i} = \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^m K_{F_k F_v} \int_0^t \int_0^{t'} p_{jk}(t, \varepsilon) p_{iv}(t', \varepsilon') d\varepsilon d\varepsilon';$$

3) компоненты вектора  $\bar{F}$  являются случайными функциями типа белого шума (6.6.29)

$$K_{F_k F_v} = S_{kv} \delta(\varepsilon - \varepsilon');$$

$$K_{z_j z_i} = \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^m S_{kv} \int_0^t p_{jk}(t, \varepsilon) p_{iv}(t', \varepsilon) d\varepsilon;$$

4) компоненты вектора  $\bar{F}$  являются некоррелируемыми случайными функциями типа белого шума ( $S_{kv}=0$  при  $k \neq v$ )

$$K_{z_j z_i} = \sum_{k=1}^m S_{kk} \int_0^t p_{jk}(t, \varepsilon) p_{ik}(t', \varepsilon) d\varepsilon.$$

Стационарные случайные колебания возможны в устойчивых системах с постоянными параметрами при действии стационарных случайных возмущений. Под устойчивой системой следует понимать линейную систему, у которой корни характеристического уравнения имеют

отрицательные действительные части. Так как компоненты вектора  $\bar{f}$  есть стационарные и стационарно связанные случайные функции, то их можно представить в виде интеграла Фурье:

$$\dot{f}_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{j0}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \dot{f}_j = f_j - m_{f_j},$$

или в векторной форме записи

$$\dot{\bar{f}} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.6.51)$$

Решение уравнения (6.6.44) ищется в такой же форме

$$\bar{Y} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{Y}_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.6.52)$$

Подставив (6.6.51) и (6.6.52) в уравнение (6.6.44), получим

$$\bar{Y}_0(\omega) = W(i\omega) \bar{f}_0(\omega). \quad (6.6.53)$$

Матрица  $W(i\omega)$ , элементами которой являются передаточные функции (или динамические податливости),

$$W(i\omega) = \left[ -\omega^2 A_1 + i\omega B + C \right]^{-1} D_1.$$

В скалярной форме ( $m \leq n$ )

$$y_j = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^m w_{jk}(i\omega) f_{0k}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (6.6.54)$$

где  $w_{jk}(i\omega)$  - элементы матрицы  $W(i\omega)$ , которые являются комплексными числами, т.е.

$$w_{jk}(i\omega) = w_{jk}^{(1)}(\omega) + i w_{jk}^{(2)}(\omega).$$

Переходя к скалярной форме записи, из (6.6.52) получаем выражения для взаимных корреляционных комплексных функций соотношения (6.6.16):

$$K_{y_j y_i} = M \left[ \dot{y}_j(t) \dot{y}_i^*(t') \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M \left[ y_{0j} y_{0i}^* \right] e^{i(\omega t - \omega' t')} d\omega d\omega'. \quad (6.6.55)$$

Из (6.6.54) получаем еще одно выражение для  $K_{y_j y_i}$ :

$$K_{y_j y_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^m w_{jk} w_{iv}^* e^{i(\omega t - \omega' t')} \times M \left[ f_{0k} f_{0v}^* \right] d\omega d\omega'. \quad (6.6.56)$$

Для того чтобы компоненты  $y_j$  вектора  $\bar{Y}$  были стационарными и стационарно связанными, необходимо выполнение условий

$$M \left[ y_{0j} y_{0i}^* \right] e^{i(\omega t - \omega' t')} = S_{y_j y_i}(\omega) \delta(\omega - \omega'); \\ M \left[ f_{0k} f_{0v}^* \right] e^{i(\omega t - \omega' t')} = S_{f_k f_v}(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (6.6.57)$$

Приравняв правые части выражений (6.6.55) и (6.6.56) и проинтегрировав по  $\omega'$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ S_{y_j y_i}(\omega) - \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^m w_{jk} w_{iv}^* S_{f_k f_v}(\omega) \right] e^{i\omega t} d\omega = 0, \quad (6.6.58)$$

получаем выражения для взаимных спектральных плотностей

$$S_{y_j y_i}(\omega) = \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^m w_{jk} w_{iv}^* S_{f_k f_v}(\omega). \quad (6.6.59)$$

Спектральные плотности компонент  $y_j (j=i)$

$$S_{y_j} = \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^m w_{jk} w_{ik}^* S_{f_k f_v}. \quad (6.6.60)$$

В частном случае, когда

$$S_{f_k f_v} = \begin{cases} 0 & k \neq v; \\ S_{f_k} & k = v, \end{cases} \quad (6.6.61)$$

получаем

$$S_{y_j y_i} = \sum_{k=1}^m w_{jk} w_{ik}^* S_{f_k}; \\ S_{y_j} = \sum_{k=1}^m |w_{jk}|^2 S_{f_k}.$$

Дисперсии компонент вектора  $\bar{Z}$  при  $S_{f_k f_v} \neq 0$

$$D_{y_j} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^m w_{jk} w_{jv}^* S_{f_k f_v} d\omega. \quad (6.6.62)$$

Для частного случая (6.6.61)

$$D_{y_j} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^m |w_{jk}|^2 S_{f_k} d\omega. \quad (6.6.63)$$

Выражения для взаимных спектральных плотностей первых двух производных компонент  $y_j$ :

$$S_{\dot{y}_j \dot{y}_i} = \omega^2 S_{y_j y_i}; \quad S_{\dot{y}_j \dot{y}_i} = \omega^4 S_{y_j y_i}.$$

Выражения для дисперсий первых двух производных компонент (для общего случая, когда  $S_{f_k f_v} \neq 0$  при  $v \neq k$ ):

$$D\dot{y}_j = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^m \sum_{\nu=1}^m w_{j\kappa} w_{j\nu}^* \omega^2 S_{f_{\kappa} f_{\nu}} d\omega; \quad (6.6.64)$$

$$D\ddot{y}_j = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^m \sum_{\nu=1}^m w_{j\kappa} w_{j\nu}^* \omega^4 S_{f_{\kappa} f_{\nu}} d\omega.$$

Для случая, когда  $S_{f_{\kappa} f_{\nu}} = 0$  при  $\kappa \neq \nu$ :

$$D\dot{y}_j = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^m |w_{j\kappa}|^2 \omega^2 S_{f_{\kappa}} d\omega; \quad (6.6.65)$$

$$D\ddot{y}_j = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^m |w_{j\kappa}|^2 \omega^4 S_{f_{\kappa}} d\omega.$$

Выражения для дисперсий (6.6.63) и (6.6.65) можно привести к виду

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(i\omega) d\omega}{A_n(i\omega) A_n(-i\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(i\omega) d\omega}{|A_n(i\omega)|^2}, \quad (6.6.66)$$

где

$$A_n(i\omega) = a_0 (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \dots + a_n;$$

$$G(i\omega) = b_0 (i\omega)^{2n-2} + b_1 (i\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}.$$

Таблицы интегралов (6.6.66) приведены в ряде монографий [72, 76]. Например, для  $n=2$  и  $n=3$  имеем

$$J_2 = \frac{-b_0 + \frac{a_0 b_1}{a_2}}{2a_0 a_1}; \quad J_3 = \frac{-a_2 b_0 + a_0 b_1 - \frac{a_0 a_1 b_2}{a_3}}{2a_0 (a_0 a_3 - a_1 a_2)}.$$

При численном определении дисперсий (когда таблицей интегралов (6.6.66) воспользоваться нельзя) бесконечные пределы интегрирования заменяют конечными  $(-\omega_0, \omega_0)$ , числовое значение  $\omega_0$  зависит от требуемой точности результата.

Принимая, что компоненты вектора  $\bar{Y}$  и их первые две производные имеют нормальный закон распределения, можно ориентировочно определить интервал практически возможных (максимальных) значений  $y_j, \dot{y}_j$  и  $\ddot{y}_j$  ("правило трех сигм"), которые используют в практических расчетах:

$$\begin{aligned} \max y_j &= m_{y_j} + 3\sigma_{y_j}; & \max \dot{y}_j &= m_{\dot{y}_j} + 3\sigma_{\dot{y}_j}; \\ \max \ddot{y}_j &= m_{\ddot{y}_j} + 3\sigma_{\ddot{y}_j}. \end{aligned} \quad (6.6.67)$$

**Пример 4.** На точечную массу  $m$  стержня постоянного сечения (рис. 6.6.6) действует стационарная случайная сила  $f_1$  с нулевым матема-

тическим ожиданием и с известной спектральной плотностью  $S_{f_1} = 2\alpha D_{f_1} / (\alpha^2 + \omega^2)$ . Тре-

буется определить максимально возможное смещение массы  $m$  и максимально возможное нормальное напряжение в балке (в сечении  $\kappa$ ). Уравнение вынужденных колебаний массы

$$m\ddot{y}_1 + \alpha\dot{y}_1 + c_1 y_1 = f_1; \quad c_1 = \frac{3EJ_x (l_1 + l_2)}{l_1^2 l_2^2}.$$

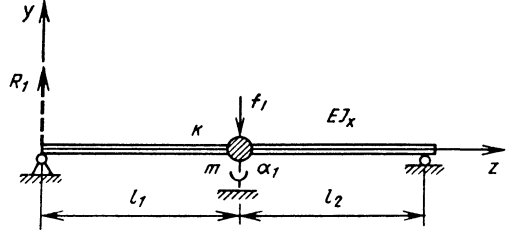


Рис. 6.6.6. Схема действия случайной силы  $f_1$  на массу  $m$

Передаточная функция  $W(i\omega)$ , спектральная плотность  $S_{y_1}$  и дисперсия  $D_{y_1}$  будут:

$$W(i\omega) = \frac{1}{m(i\omega)^2 + \alpha_1 i\omega + c_1};$$

$$S_{y_1} = |W|^2 \frac{2\alpha D_{f_1}}{(\alpha^2 + \omega^2)} = \frac{2\alpha D_{f_1}}{|m(i\omega)^3 + (\alpha_1 + \alpha m)(i\omega)^2 + (c_1 + \alpha_1 \alpha)i\omega + c_1 \alpha|^2};$$

$$D_{y_1} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{y_1} \omega d\omega = 2\alpha D_{f_1} \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{|m(i\omega)^3 + (\alpha_1 + \alpha m)(i\omega)^2 + (c_1 + \alpha_1 \alpha)i\omega + c_1 \alpha|^2}.$$

В данном примере  $G(i\omega)$  не зависит от  $i\omega$ . Воспользовавшись таблицами интегралов для  $J_3$ , находим

$$D_{y_1} = J_3 = \frac{2\pi D_{f_1} (\alpha_1 + \alpha m)}{(m\alpha_1 \alpha^2 + c_1 \alpha + \alpha_1^2 \alpha)}.$$

Воспользовавшись правилом трех сигм, получаем

$$\max y_1 = 3\sigma_{y_1}.$$

Изгибающий момент в сечении  $\kappa$

$$M_k = R_1 l_2.$$

Обозначив полную силу, действующую на массу  $m$ , через  $P$ , получим выражения для амплитуды вертикального смещения массы  $m$  и момента  $M_k$ :

$$y_1 = \delta_{11} P; M_k = \frac{P l_1 l_2}{(l_1 + l_2)}; \delta_{11} = \frac{1}{c_1}.$$

Так как максимальное нормальное напряжение в сечении  $\kappa$

$$\sigma = M_\kappa / W_x,$$

то после преобразований получаем

$$\sigma = \frac{3EJ_x}{W_x l_1 l_2} y_1.$$

Спектральная плотность напряжений  $\sigma$

$$S_\sigma(\omega) = \left( \frac{3EJ_x}{W_x l_1 l_2} \right)^2 S_{y_1}.$$

Дисперсия напряжения

$$D_\sigma = \left( \frac{3EJ_x}{W_x l_1 l_2} \right)^2 D_{y_1}.$$

Максимально возможное нормальное напряжение в сечении  $\kappa$

$$\max \sigma = 3 \left( \frac{3EJ_x}{W_x l_1 l_2} \right) \sigma_{y_1}.$$

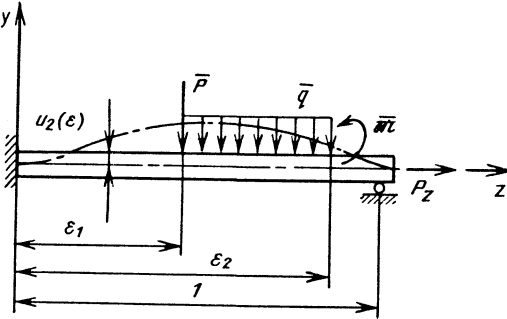


Рис. 6.6.7. Схема действия случайных сил на стержень

**Случайные колебания систем с распределёнными параметрами.** Прямолинейный стержень постоянного сечения нагружен случайными сосредоточенной силой  $P$ , моментом  $M$  и случайной распределённой нагрузкой  $g$  (рис. 6.6.7). Уравнение малых изгибных колебаний стержня в плоскости чертежа в безразмерной форме записи с учетом силы вязкого сопротивления и инерции вращения имеет вид [76]

$$L(u_2) = \frac{\partial^4 u_2}{\partial \varepsilon^4} - J_{33} \frac{\partial^4 u_2}{\partial \tau^2 \partial \varepsilon^2} - P_z \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} + \alpha \frac{\partial u_2}{\partial \tau} = f, \quad (6.6.68)$$

где

$$f = g [H(\varepsilon - \varepsilon_1) - H(\varepsilon - \varepsilon_2)] + P\delta(\varepsilon - \varepsilon_1) - M\delta'(\varepsilon - \varepsilon_2).$$

В более общем случае, когда рассматриваются колебания пластин и оболочек, уравнение малых колебаний имеет вид

$$L(\bar{u}) = \bar{f},$$

где  $\bar{u}$  - вектор перемещений точек срединной поверхности пластины или оболочки;  $\bar{f}$  - вектор, зависящий от случайных нагрузок.

Задача исследования случайных колебаний систем с распределёнными параметрами состоит в определении вероятностных характеристик вектора  $\bar{u}$  и его производных по координатам и времени.

Ограничимся изложением алгоритма решения сформулированной задачи, рассмотрев уравнение (6.6.68). Решение уравнения (6.6.68) ищем в виде ряда

$$u_2 = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\varepsilon) y_j(\tau), \quad (6.6.69)$$

где  $\varphi_j(\varepsilon)$  - функции, удовлетворяющие крайевым условиям задачи. В качестве таких функций могут быть взяты собственные функции более простого уравнения свободных колебаний стержня (пластины, оболочки), но с теми же крайевыми условиями. Например, для приближенного решения уравнения (6.6.68) функции  $\varphi_j(\varepsilon)$  можно определить из уравнения свободных изгибных колебаний стержня

$$L(u_2) = \frac{\partial^4 u_2}{\partial \varepsilon^4} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} = 0. \quad (6.6.70)$$

Для крайевых условий, показанных на рис. 6.6.7, собственные функции уравнения (6.6.70) [20]

$$\varphi_j(\varepsilon) = K_2(\lambda_j, \varepsilon) - \frac{K_4(\lambda_j, 1)}{K_2(\lambda_j, 1)} K_3(\lambda_j, \varepsilon),$$

где  $K_j$  - функции Крылова;  $\lambda_j$  - безразмерная частота.

В соответствии с принципом возможных перемещений из (6.6.68) с учетом (6.6.69) получаем систему уравнений

$$\int_0^1 L \left[ \sum_{j=1}^n \varphi_j(\varepsilon) y_j(\tau) \right] \varphi_k(\varepsilon) d\varepsilon = 0 \quad (\kappa=1,2,\dots,n),$$

или



$$\sum_{j=1}^n (a_{ij}\ddot{y}_j + b_{ij}\dot{y}_j + c_{ij}y_j) = d_i f \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В векторной форме записи

$$A_1\ddot{\bar{Y}} + B\dot{\bar{Y}} + C\bar{Y} = D_1\bar{f}. \quad (6.6.71)$$

Уравнение (6.6.71) аналогично уравнению (6.6.44), метод решения которого изложен в предыдущем разделе.

## Глава 6.7

### УДАР

#### 6.7.1. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕОРИИ МЕХАНИЧЕСКОГО УДАРА

Ударные явления часто встречаются в технике, причем в одних случаях они причиняют вред, нарушают нормальные условия эксплуатации и даже могут привести к авариям (соударения в плохо изготовленных или изношенных кинематических парах с зазорами, удары при столкновениях транспортных средств с препятствиями, гидравлический удар при быстром перекрытии трубопроводов), а в других случаях целенаправленно используются в различных технологических операциях (дробление хрупких тел, ковка, штамповка и обрубка металлов, забивка шпунтов и свай и др.). С кинематической стороны для ударных явлений характерны резкие изменения скоростей точек механической системы, а с динамической стороны - возникновение и затем исчезновение весьма больших сил.

При постановке соответствующих задач механики формулируют общие представления о характере развивающихся при ударе сил (их сосредоточенность или распределенность в пространстве, конечная или нулевая длительность во времени), а также выбирают разумные модельные описания свойств тел, входящих в состав рассматриваемой механической системы (абсолютная жесткость, упругость, пластичность, вязкость, безынерционность отдельных элементов и т.д.).

**Ударные силы.** Развивающиеся при ударе силы, как правило, заранее неизвестны (в частности, силы, возникающие при столкновениях твердых тел) и вместе с соответствующими кинематическими эффектами их определяют путем решения соответствующих задач механики. Однако в некоторых случаях ударные силы можно считать заданными функциями времени (например, давление взрывной волны на инженерные сооружения).

Независимо от этих возможных различий изменение ударных сил происходит в общих чертах так, как это показано на рис. 6.7.1, а: сначала сила быстро возрастает от нуля до наибольшего значения, а затем также за короткое

время падает до нуля. На рис. 6.7.1, б схематически показано изменение силы, возникающей при соударении твердых тел; здесь типично, что длительность этапа возрастания силы больше длительности этапа ее убывания.

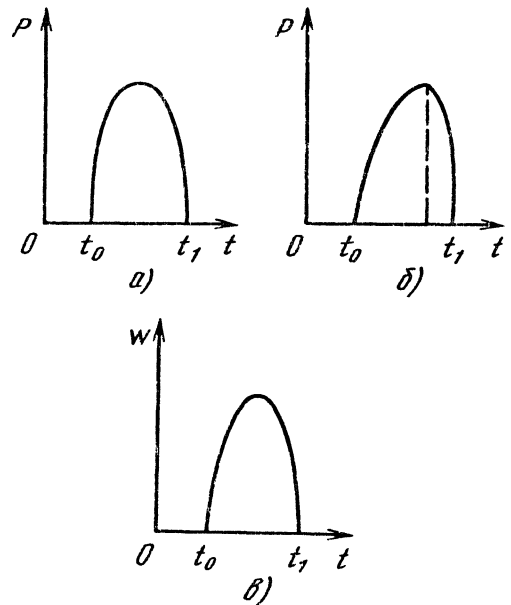


Рис. 6.7.1. Графики изменения ударных сил и ускорений

Во многих случаях удар характеризуется не столько законом изменения силы во времени  $P(t)$ , сколько ударным импульсом

$$S = \int_{t_0}^{t_1} P(t) dt \quad (6.7.1)$$

( $t_0$  и  $t_1$  - время начала и конца удара). Выражение (6.7.1) можно представить в виде  $S = P_{cp}(t_1 - t_0)$ , где  $P_{cp}$  - среднее значение силы во время удара.

В теории удара часто рассматривают предельный случай, считая, что длительность удара  $\Delta t = t_1 - t_0$  стремится к нулю, значение  $P_{cp}$  - к бесконечности, тогда как их произведение остается неизменным и конечным. В этом случае  $S$  называют **мгновенным ударным импульсом**, или просто **мгновенным импульсом** (иногда для этого понятия в литературе пользуются термином "ударная сила", который более уместен для возникающих при ударе сил конечной величины и конечной длительности). Предположение о мгновенной длительности акта удара влечет за собой представление о бесконечно больших ускорениях и соответственно о мгновенном (разрывном) изменении скоростей.

Мгновенный импульс  $S$ , приложенный к механической системе в момент  $t_0$ , можно вводить в уравнения механики наряду с другими силами в виде

$$P(t) = S\delta(t - t_0),$$

где  $\delta$  - дельта-функция Дирака. Иногда ударные силы и мгновенные ударные импульсы естественно считать не сосредоточенными, а некоторым образом, распределенными по объему.

В некоторых областях техники удар принято описывать "кинематическим" образом. Так, например, контейнер может испытывать действие "импульса ускорения" - кратковременное сотрясение, заданное в виде зависимости ускорения от времени (рис. 6.7.1,  $\vartheta$ ), и нужно определить изменения состояния тел, которые закреплены в контейнере. Обычно так ставится задача при исследованиях ударостойкости аппаратуры и оборудования, установленных на движущихся объектах, которые подвержены сотрясениям. В этих случаях исследуют относительное движение тел по отношению к контейнеру, вводя в рассмотрение переносную и кориолисову силы инерции, сводят анализ к задаче о действии ударных сил.

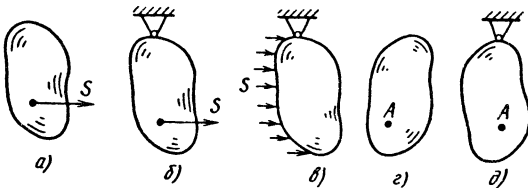


Рис. 6.7.2. Схемы закрепления тел при ударе

**Модель абсолютно твердого тела.** В ряде случаев эта модель в принципе неприменима, так как без дополнительных гипотез не позволяет получить замкнутую систему уравнений. Этой моделью иногда можно пользоваться применительно к свободным или частично закрепленным твердым телам, если заданы ударные силы или если при заданном движении таких тел происходит внезапная остановка какой-либо точки. Для различно закрепленных твердых тел эти случаи показаны на рис. 6.7.2:  $a, б, в$  - приложение заданной ударной силы  $P(t)$  или мгновенного импульса  $S$ ;  $г, д$  - внезапная остановка точки тела, движение которого перед ударом было задано векторами  $v$  (скорость произвольно выбранного полюса  $O$ ) и  $\omega$  (угловая скорость тела в

полусвязанной системе отсчета с началом в точке  $O$ ); останавливаемая точка обозначена буквой  $A$ .

Решение некоторых задач с помощью модели абсолютно твердого тела см. п. 6.7.2.

Без привлечения дополнительных гипотез рассматриваемая модель не позволяет описать соударение твердых тел или удар твердого тела о твердую преграду (число уравнений механики оказывается меньшим числа искомых величин). Для решения таких задач часто используют допущение о том, что относительная скорость соударяющихся точек после удара пропорциональна относительной скорости этих точек перед ударом; при этом принимают, что коэффициент пропорциональности (*коэффициент восстановления скорости, коэффициент восстановления*) зависит только от материалов соударяющихся тел. Такое допущение (*гипотеза Ньютона*) позволяет замкнуть систему уравнений; в неявной форме (и не очень точно) оно отражает местные деформации и потери механической энергии при ударе. Об использовании гипотезы Ньютона см. п. 6.7.3.

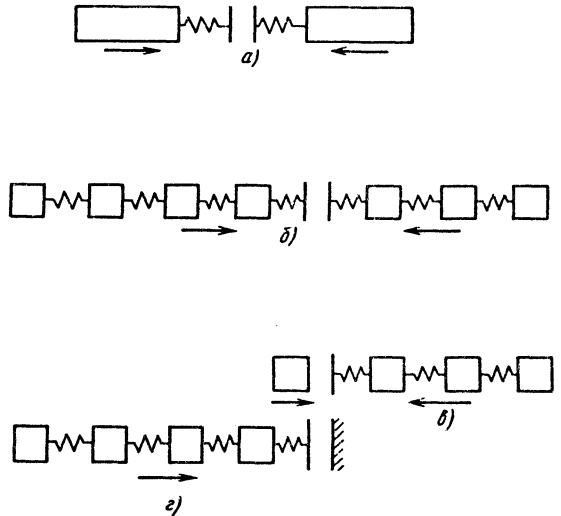


Рис. 6.7.3. Модели твердых тел с безынерционными связями

**Модель абсолютно твердого тела с безынерционными деформируемыми связями.** В различных задачах связям приписывают свойства упругости, пластичности, вязкости. Случай соударения твердых тел с упругими связями показан на рис. 6.7.3,  $a$ . Типы однокомпонентных и многокомпонентных связей приведены в табл. 6.7.1.

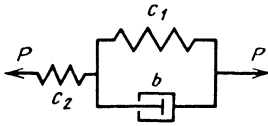

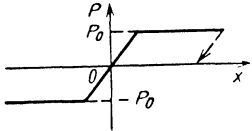
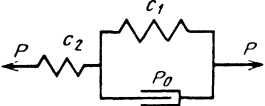
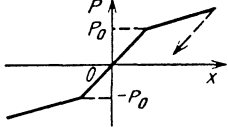
6.7.1. Модели деформируемых элементов

Модель	Символическое изображение	Характеристика модели
1	2	3
<b>Однокомпонентные</b>		
Упругая линейная		$P = cx$
Упругая нелинейная		$P = P(x)$
Вязкая линейная		$P = b\dot{x}$
Вязкая нелинейная		$P = P(\dot{x})$
Жесткопластическая без упрочнения		$P = P_0 \text{sign} \dot{x}$

Многокомпонентные

Вязкоупругая (модель Кельвина-Фохта)		$P = cx + b\dot{x}$
Жесткопластическая с упрочнением		
Упруговязкая (модель Максвелла)		$\frac{b}{c} \ddot{P} + P = b\dot{x}$

Продолжение таблицы 6.7.1

1	2	3
Стандартная вязкоупругая		$\frac{b}{c_1 + c_2} \dot{P} + P = \frac{bc_2}{c_1 + c_2} \dot{x} + \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} x$
Упругопластическая с упрочнением		
Упругопластическая с упрочнением		

**Многомассовые дискретные модели с безынерционными деформируемыми связями.** Примеры таких моделей показаны на рис. 6.7.3, б, в, г. Характеристики связей соответствуют указанным в табл. 6.7.1.

**Модели с распределенными параметрами.** В этих моделях учитывают распределенность инерционных и деформационных свойств по всему объему тел, участвующих в ударе.

$I_x, I_y, I_z$  - главные центральные моменты инерции.

6.7.2. ДЕЙСТВИЕ УДАРА НА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЕ ТЕЛО

**Удар по свободному телу.** Кинематический результат приложения заданного мгновенного импульса к свободному твердому телу определяется конечными приращениями скорости центра масс тела  $\Delta v_c$  и угловой скорости тела  $\Delta \omega$ . Проекции этих приращений на связанные с телом главные центральные оси (за время удара ориентация системы осей в пространстве не меняется):

$$\begin{aligned} \Delta v_{cx} &= S_x / m, \quad \Delta v_{cy} = S_y / m, \quad \Delta v_{cz} = S_z / m; \\ \Delta \omega_x &= (S_z y_M - S_y z_M) / I_x, \\ \Delta \omega_y &= (S_x z_M - S_z x_M) / I_y, \\ \Delta \omega_z &= (S_y x_M - S_x y_M) / I_z, \end{aligned} \tag{6.7.2}$$

где  $S_x, S_y, S_z$  - проекции импульса на координатные оси;  $m$  - масса тела;  $x_M, y_M, z_M$  - координаты точки приложения импульса;

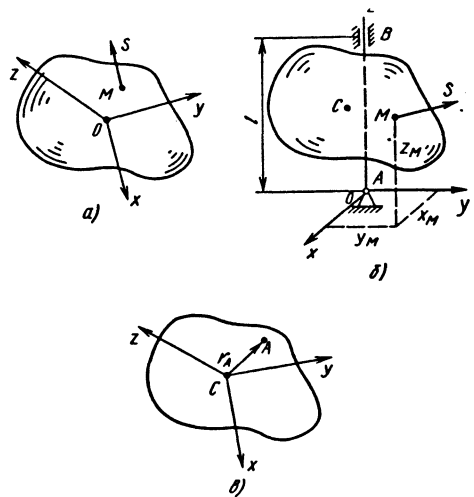


Рис. 6.7.4. Схемы удара

**Удар по телу с неподвижной точкой** (рис. 6.7.4, а). При ударе проекции приращения угловой скорости  $\Delta \omega$  относительно неподвижной точки  $O$  определяются теми же выражениями (6.7.2), где  $x_M, y_M, z_M$  - координаты точки приложения импульса в системе осей с началом

в точке  $O$ ;  $I_x, I_y, I_z$  - главные моменты инерции для закрепленной точки. Для определения импульса реакции связи в закрепленной точке служит выражение

$$\mathbf{S}_0 = m\Delta\omega \times \mathbf{r}_c - \mathbf{S},$$

в котором  $\mathbf{r}_c$  - радиус-вектор центра масс с началом в закрепленной точке;  $\mathbf{S}$  - заданный внешний импульс.

**Удар по телу с неподвижной осью** (рис. 6.7.4, б). Если ось  $Oz$  совмещена с осью вращения, ось  $Ox$  проходит через точку приложения мгновенного импульса  $S$ , то приращения угловой скорости  $\Delta\omega_z$  и пять проекций импульсов реакций опор  $S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Az}, S_{Bx}, S_{By}$  определяются из уравнений:

$$I_z \Delta\omega_z = x_M S_y;$$

$$-I_{xz} \Delta\omega_z = a S_{Ay} - b S_{By};$$

$$-I_{yz} \Delta\omega_z = -a S_{Ax} + b S_{Bx} - x_M S_z;$$

$$-m x_c \Delta\omega_z = S_x + S_{Ax} + S_{Bx};$$

$$m x_c \Delta\omega_z = S_y + S_{Ay} + S_{By}; \quad S_z + S_{Az} = 0,$$

в которых  $x_c, y_c$  - координаты центра масс тела  $C$ .

Если линия действия внешнего импульса пересекает ось  $Oz$ , то угловая скорость тела при ударе не меняется и действие удара выражается только в появлении импульсов опорных реакций.

Ударные реакции опорных связей равны нулю, если: 1) внешний импульс перпендикулярен плоскости, содержащей ось вращения и центр масс тела; 2) ось  $Oz$  - главная ось инерции тела в точке  $O$ ; 3) точка приложения импульса отстоит от оси  $Oz$  на расстояние  $x_M = I_z / (m x_c)$ . При этом точку  $M$  называют центром удара.

**Внезапная остановка точки первоначально движущегося твердого тела.** На рис. 6.7.4, в обозначено:  $C$  - центр масс тела;  $A$  - внезапно останавливаемая точка. Пусть  $\omega_{x-}, \omega_{y-}, \omega_{z-}$  и  $v_{cx-}, v_{cy-}, v_{cz-}$  - проекции угловой скорости центра масс перед ударом. Искомыми являются проекции угловой скорости после удара  $\omega_{x+}, \omega_{y+}, \omega_{z+}$  и проекции импульса реакции наложенной в точке  $A$  связи  $S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Az}$ . Для их определения служат уравнения:

$$-m(\omega_{y+} z_A - \omega_{z+} y_A + v_{cx-}) = S_{Ax};$$

$$-m(\omega_{z+} x_A - \omega_{x+} z_A + v_{cy-}) = S_{Ay};$$

$$-m(\omega_{x+} y_A - \omega_{y+} x_A + v_{cz-}) = S_{Az};$$

$$I_x(\omega_{x+} - \omega_{x-}) = S_{Az} y_A - S_{Ay} z_A;$$

$$I_y(\omega_{y+} - \omega_{y-}) = S_{Ax} z_A - S_{Az} x_A;$$

$$I_z(\omega_{z+} - \omega_{z-}) = S_{Ay} x_A - S_{Ax} y_A.$$

### 6.7.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О СОУДАРЕНИЯХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ КОЭФФИЦИЕНТА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

При прямом ударе (когда импульс взаимодействия перпендикулярен общей касательной плоскости в точке контакта, т. е. совпадает по направлению с линией удара) для замыкания системы уравнений можно пользоваться гипотезой Ньютона:

$$v_{A+} - v_{B+} = -k(v_{A-} - v_{B-}),$$

где  $v_{A-}, v_{B-}$  - проекции на линию удара скоростей точек контакта тел перед ударом;  $v_{A+}, v_{B+}$  - проекции на линию удара скоростей тех же точек после удара;  $k$  - коэффициент восстановления скорости (коэффициент восстановления). Принимают (грубо приближенно), что  $k$  не зависит от скорости соударения и определяется только материалами соударяющихся тел. Значения  $k$  устанавливают экспериментально, например, при сбрасывании тел на массивную горизонтальную плиту. Если  $h_0$  - начальная высота падения,  $h_1$  - высота, на которую поднимается тело после отскока от плиты, то

$$k = \sqrt{h_1/h_0}.$$

При скоростях соударения порядка 1 м/с можно принимать следующие значения коэффициента восстановления:

стальные шары . . . . .	0,56
стальной шарик по стальной плите . . . . .	0,7-0,8
стальной шарик по свинцовой плите . . . . .	0,2-0,3
стальной шарик по латунной плите . . . . .	0,45-0,55

Если процесс соударения разделить на два этапа - этап нагрузки, когда  $dP/dt > 0$  (см. рис. 6.7.1, б - левее штриховой вертикали), и этап разгрузки, когда  $dP/dt < 0$  (на том же рисунке - правее штриховой вертикали), то  $k = S_2/S_1$ , где  $S_1$  и  $S_2$  - импульсы, соответствующие обоим этапам. Удар называют упругим, если  $k=1$ , и абсолютно неупругим, если  $k=0$ .

При прямом ударе двух тел, когда их центры масс располагаются на одной прямой с точкой ударного контакта, послеударные скорости определяются выражениями:

$$v_{A+} = \left[ (m_A - k m_B) v_{A-} + m_B (1 + k) v_{B-} \right] / (m_A + m_B);$$

$$v_{B+} = \left[ m_A (1 + k) v_{A-} + (m_B - k m_A) v_{B-} \right] / (m_A + m_B).$$

Понятие коэффициента восстановления может быть использовано для оценки эффективности технологических операций, основанных на действии удара.

При операцииковки за меру эффективности удара можно принять отношение потерянной кинетической энергии молота к ее первоначальному значению

$$\eta = (1 - k^2)m / (1 + m),$$

где  $m = m_B / m_A$ ;  $m_B$  - масса молота и связанных с ним подвижных частей;  $m_A$  - масса болванки и шабота.

При забивке свай за меру эффективности иногда принимают отношение кинетической энергии, получаемой сваем при ударе, к кинетической энергии падающих частей. Это приводит к выражению

$$\eta = (1 + k^2)m / (1 + m)^2,$$

в котором  $m$  - отношение массы падающих частей к массе сваи. Эти оценки следует считать сугубо условными.

Формальное использование гипотезы Ньютона и понятия о коэффициенте восстановления в некоторых случаях приводит к представлению о бесконечно-ударных процессах. Если, например, тело падает с высоты  $h_0$  на горизонтальную плоскость, то после первого отскока произойдет второе падение и т.д. После  $n$ -го падения высота отскока  $h_n = k^{2n}h_0$ , а длительность цикла между  $n$ -м и  $(n+1)$ -м ударами  $t_n = 2k^n t_0$ , где  $t_0$  - время первого падения. Общее число соударений неограниченно, но общая продолжительность процесса конечна и определяется выражением  $T = t_0(1 + k)/(1 - k)$ . По истечении этого времени тело останется в покое на плоскости, так что подобные случаи иногда называют *квази-пластическим* ударом.

Если направление ударного импульса отклоняется от линии удара, то удар называют косым.

В случаях косоуго удар часто пользуются *гипотезой Рауса*, согласно которой касательная составляющая импульса  $S_\tau$  удовлетворяет соотношению  $S_\tau \leq fS_n$ , в котором  $f$  - динамический коэффициент трения;  $S_n$  - нормальная составляющая импульса. Знак неравенства относится к случаям, когда касательный импульс мал и не происходит взаимного проскальзывания соударяющихся тел.

Иногда касательное взаимодействие описывают с помощью другой гипотезы: изменение относительной касательной скорости соударяющихся тел пропорционально доударному значению этой скорости (см. [67]).

6.7.4. СОУДАРИНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ЛИНЕЙНЫМИ АМОРТИЗАТОРАМИ

Для схем, показанных на рис. 6.7.5, наибольшая сила сжатия амортизатора определяется выражением

$$N_{max} = \gamma v \sqrt{mc}$$

( $v$  - скорость груза перед ударом;  $m$  - масса груза;  $c$  - коэффициент жесткости упругого элемента), в котором коэффициент  $\gamma$  зависит от параметра  $\alpha$ :

для схемы *a*  $\alpha = b / (2\sqrt{mc})$ ;

для схемы *b*  $\alpha = \sqrt{mc} / 2b$ ,

где  $b$  - коэффициент вязкости. Значения  $\gamma$  см. в табл. 6.7.2.

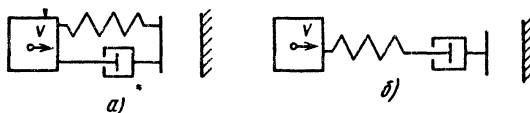


Рис. 6.7.5. Схема соударения твердых тел с линейными амортизаторами

6.7.2. Значения коэффициента  $\gamma$

$\alpha$	См. рис. 6.7.5, <i>a</i>	См. рис. 6.7.5, <i>b</i>
0,00	1,000	1,000
0,10	0,880	0,863
0,20	0,821	0,756
0,30	0,813	0,672
0,40	0,864	0,603
0,50	1,000	0,546
0,60	1,200	0,499
0,70	1,400	0,459
0,80	1,600	0,424
0,90	1,800	0,394
1,00	2,000	0,368

При резкой остановке железнодорожных платформ, а также вагонов, автомашин возможно смещение (и даже опрокидывание) грузов, установленных без специальных креплений. В этих случаях условие несмещения груза по платформе имеет вид

$$v_0 < fg/k,$$

где  $v_0$  - скорость платформы перед ударом;  $f$  - коэффициент трения.

6.7.5. НЕЛИНЕЙНАЯ УПРУГАЯ МОДЕЛЬ ГЕРЦА

Для учета местных деформаций в зоне ударного контакта двух тел связь между силой взаимодействия  $P$  и сближением центров масс  $u$  имеет вид

$$P = Ku^{3/2},$$

соответствующий условиям статического нагружения. Коэффициент  $K$  зависит от свойств мате-

риалов соударяющихся тел и кривизны их поверхностей в зоне контакта:

$$K = 1,333E_*R_*^{1/2},$$

где  $1/R_* = 1/R_1 + 1/R_2$ ;

$$1/E_* = \left(1 - \mu_1^2\right) / E_1 + \left(1 - \mu_2^2\right) / E_2;$$

здесь  $R_1, R_2$  - радиусы кривизн поверхностей;  $E_1, E_2$  - модули упругости;  $\mu_1, \mu_2$  - коэффициенты Пуассона.

Продолжительность удара

$$\tau = 3,213 \left[ m^2 / (vK^2) \right]^{1/5}; 1/m = 1/m_1 + 1/m_2,$$

где  $v$  - относительная скорость тел перед соударением;  $m_1$  и  $m_2$  - массы тел.

Наибольшее сближение тел

$$u_{\max} = 1,093 \left( mv^2 / K \right)^{2/5}.$$

Наибольшая сжимающая сила

$$N_{\max} = 1,143K^{2/5} \left( mv^2 \right)^{3/5}.$$

Моделью Герца можно пользоваться при условии, что развивающееся при ударе приведенное (эквивалентное) напряжение не превосходит предела текучести  $\sigma_T$ , т.е. когда выполняется условие

$$v < 10,3 \left[ R^3 \sigma_T^5 / (mE_*^4) \right]^{1/2}.$$

6.7.6. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

**Модификация модели Герца.** Если при ударе приведенное напряжение превосходит предел текучести, упругая характеристика имеет вид, показанный на рис. 6.7.6. На первом этапе удара, когда  $dP/dt > 0$ ,

$$P = au^s.$$

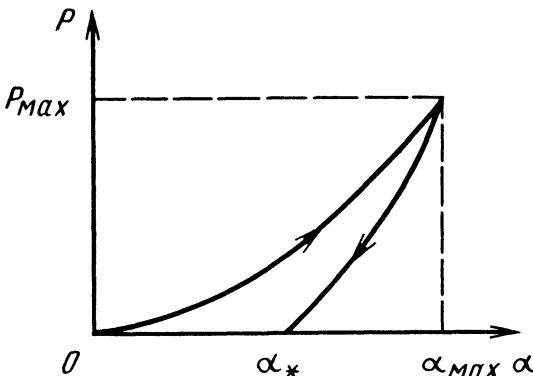


Рис. 6.7.6. Нелинейная упругая характеристика

Параметры  $a$  и  $s$  зависят от свойств материалов и геометрии зон контакта перед ударом, причем  $1 < s < 1,5$  (значения  $a$  и  $s$  см. в [11]).

На втором этапе, когда  $dP/dt < 0$  (разгрузка),

$$P = K(u - u_*)^{3/2}.$$

Наибольшее сближение тел

$$u_{\max} = \left[ mv^2 (s + 1) / (2a) \right]^{1/(s+1)}.$$

Сближение тел в конце ударного контакта

$$u_* = u_{\max} - \left( au_{\max}^s / K \right)^{2/3}.$$

Наибольшая сила

$$P_{\max} = \left[ mv^2 (s + 1) a^{1/5} / 2 \right]^{5/(s+1)}.$$

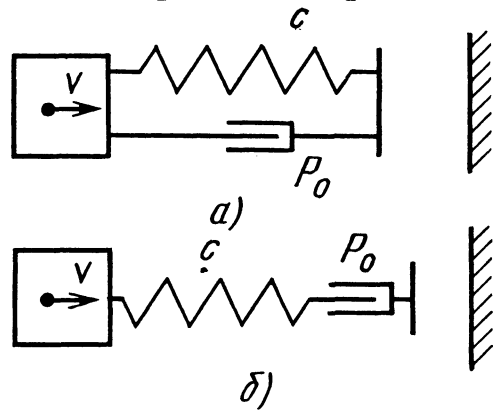


Рис. 6.7.7. Твердое тело с упругопластическим амортизатором

**Удар б преграду твердого тела с упругопластическим амортизатором** (рис. 6.7.7). Введем обозначения:  $P_0$  - предельная сила сухого трения;  $c$  - коэффициент жесткости упругого элемента;  $\bar{v} = \sqrt{mc}v/P_0$  - безразмерная скорость тела перед ударом. Для модели с параллельным соединением элементов в амортизаторе (рис. 6.7.7, а):

наибольшее перемещение тела

$$u_{\max} = P_0 \left( \sqrt{1 + \bar{v}^2} - 1 \right) / c;$$

наибольшая сила

$$P_{\max} = P_0 \sqrt{1 + \bar{v}^2};$$

продолжительность удара при  $\bar{v} > 3$

$$\tau = \left( \arctg \bar{v} + \pi/2 \right) \sqrt{m/c}$$

(при  $\bar{v} < 3$  тело не отделяется от преграды,  $\tau \rightarrow \infty$ ).

Для модели с последовательным соединением элементов (рис. 6.7.7, б): наибольшее перемещение тела

$$u_{\max} = \begin{cases} v\sqrt{m/c} & \text{при } \bar{v} \leq 1; \\ v\sqrt{m/c}(1/2\bar{v} + \bar{v}/2) & \text{при } \bar{v} > 1; \end{cases}$$

наибольшая сила

$$P_{\max} = \begin{cases} v\sqrt{m/c} & \text{при } \bar{v} \leq 1; \\ P_0 & \text{при } \bar{v} > 1; \end{cases}$$

продолжительность удара

$$\tau = \begin{cases} \pi\sqrt{m/c} & \text{при } \bar{v} \leq 1; \\ \left[ \frac{\pi}{2} + \sqrt{\bar{v}^2 - 1} + \arcsin v^{-1} \right] \sqrt{m/c} & \text{при } \bar{v} \geq 1. \end{cases}$$

6.7.7. ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Моделирование стержней в виде систем с распределенными параметрами приводит к более точному описанию ударных явлений, чем моделирование в виде дискретных систем. При встрече торца стержня с преградой (рис. 6.7.8, а) вдоль стержня от преграды распространяется волна деформаций (волна напряжений), причем скорость движения фронта волны зависит только от материала стержня.  $c = \sqrt{E/\rho}$ , где  $E$ ,  $\rho$  - модуль упругости и плотность материала стержня.

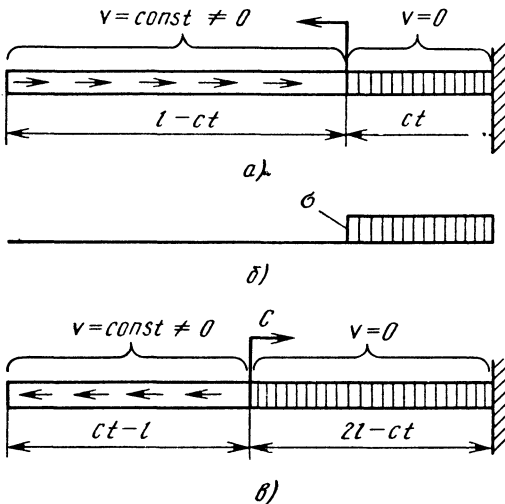


Рис. 6.7.8. Схема удара упругого стержня о преграду:

$$a - \text{при } 0 < t < \frac{l}{c}; \quad b - \text{при } \frac{l}{c} < t < \frac{2l}{c}$$

во всех сечениях этой части стержня нормальные напряжения определяются выражением

$$\sigma = v\sqrt{\rho E},$$

где  $v$  - скорость стержня перед ударом.

Распределение напряжений в сечениях показано на рис. 6.7.8, б. При этом оставшая часть стержня длиной  $l-ct$  продолжает движение со скоростью  $v$  и в ней напряжения отсутствуют.

При  $t=l/c$  волна напряжений достигает второго конца стержня; в этот момент скорость всех частиц равна нулю и стержень сжат на всей длине. При  $t>l/c$  происходит постепенная разгрузка сечений - распространяется встречная волна растяжения и разгруженные элементы стержня приобретают скорости  $v$ , но в направлении, противоположном начальному (рис. 6.7.8, в). При  $t=2l/c$  стержень полностью разгружен, все его частицы имеют скорости  $v$ , направленные от преграды, - происходит отскок. Длительность акта удара  $2l/c$ . Подобные явления распространения волн деформаций происходят и при продольном соударении двух стержней; но если длины стержней  $l_1$  и  $l_2$  различны ( $l_1 < l_2$ ), то отскок происходит в момент  $t=2l_1/c$ , после чего первый стержень длиной  $l_1$  станет двигаться, будучи недеформированным, а при последующем свободном движении второго стержня вдоль него будут пробегать волны растяжения и сжатия до тех пор, пока энергия колебательного движения не рассеется вследствие внутренних потерь.

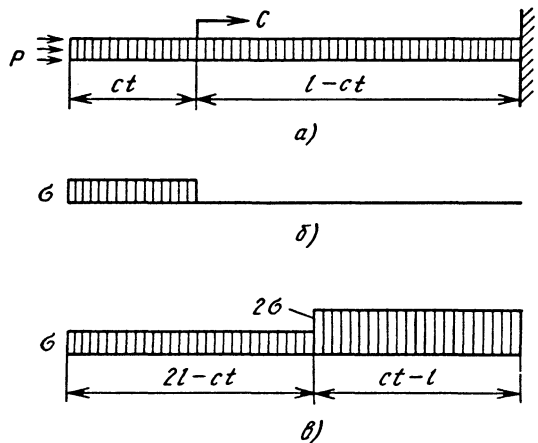


Рис. 6.7.9. Схема удара по упругому стержню:

$$a - \text{при } 0 < t < \frac{l}{c}; \quad b - \text{при } \frac{l}{c} < t < \frac{2l}{c}$$

Если встреча торца с неподвижной преградой произошла в момент  $t=0$ , то при  $t>0$  часть стержня длиной  $ct$  оказывается остановленной;

Аналогичные явления происходят при внезапном нагружении торца стержня заданной силой. Для случая, показанного на рис. 6.7.9, а



( $P=0$  при  $t \leq 0$ ,  $P=\text{const}$  при  $t > 0$ ), на первом этапе  $t < l/c$  волна сжатия распространяется от нагруженного торца к заделке со скоростью  $c$  (рис. 6.7.9, б). При  $t > l/c$  от заделки отражается волна сжатия и напряжения в сечениях удваиваются. Распределение напряжений по длине показано на рис. 6.7.9, в.

### 6.7.8. УДАР СТЕРЖНЕЙ О ДЕФОРМИРУЕМЫЕ ОСНОВАНИЯ

Механическое поведение многих конструкций моделируется как удар о преграду (деформируемое основание) простейших конструктивных элементов типа стержней и оболочек.

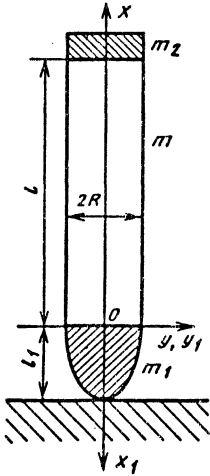


Рис. 6.7.10. Схема удара стержня о деформируемое основание

**Волновые процессы в упругих стержнях постоянного сечения при вертикальном ударе.** Цилиндрический стержень (рис. 6.7.10) массой  $m$  и длиной  $l$ , имеющий на верхнем торце жесткое тело массой  $m_2$ , а на нижнем - жесткое тело вращения массой  $m_1$ , летит со скоростью  $v_0$  и ударяется о деформируемое основание (полупространство). Введем две системы координат: подвижную  $xu$ , жестко связанную с телом  $m_1$ , и неподвижную  $x_1u_1$ , связанную с преградой. Тогда уравнение продольных колебаний стержня (в рамках технической теории) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d^2 w}{dt^2} \quad (0 < x < l), \quad (6.7.3)$$

где  $u(x, t)$  - упругое смещение стержня;  $a$  - скорость распространения продольной волны в стержне;  $w(t)$  - перемещение тела  $m_1$  (масса стержня здесь не учитывается). К уравнению (6.7.3) необходимо присоединить начальные и

краевые условия (за  $t=0$  принимаем момент контакта тела  $m_1$  с основанием):

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (0 < x < l); \quad u|_{x=0} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=l} - \frac{d^2 w}{dt^2} = -\frac{EA}{m_2} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l}, \quad (6.7.4)$$

где  $E$  - модуль упругости материала стержня;  $A$  - площадь поперечного сечения.

Динамическое условие совместности для жесткой массы  $m_1$  и стержня будет описываться уравнением

$$m_1 \frac{d^2 \omega}{dt^2} = m_1 g - EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} - F;$$

$$\omega|_{t=0} = 0; \quad \frac{d\omega}{dt} \Big|_{t=0} = v_0, \quad (6.7.5)$$

где  $F=F(t)$  - реакция деформируемого основания (результатирующая сила сопротивления);  $g$  - ускорение свободного падения.

Решение уравнения (6.7.3) в этом случае может быть получено операционным методом, и оно представляет собой ряд по полиномам Лагера [1]. Приведем значения  $u(x, t)$  и  $u'(x, t)$  (напряжений) в характерных точках стержня для начальных этапов взаимодействия. При  $x^0 = 0$   $U(0, \tau) = 0$ , а  $U'(0, \tau)$  принимает следующие значения:

$$U'(0, \tau) = f_2(\tau) \quad (0 \leq \tau < 2); \quad (6.7.6)$$

$$U'(0, \tau) = f_2(\tau) - 2f_2(\tau - 2) +$$

$$+ 4 \int_0^{\tau} f_2(\tau - \tau_1) e^{-\omega(\tau_1 - 2)} d\tau_1 \quad (2 \leq \tau < 4);$$

$$f_2(\tau) = \frac{dW}{d\tau} - V_0; \quad W = \frac{w}{l}; \quad V_0 = \frac{v_0}{a};$$

$$U = \frac{u}{l}; \quad \omega = \frac{m_1}{m_2}; \quad x^0 = \frac{x}{l}; \quad \tau = \frac{at}{l}.$$

Влияние массы  $m_2$  на напряжение в точке  $x^0=0$  сказывается только после  $\tau > 2$ , когда упругая волна пройдет путь от одного конца стержня до другого и вернется обратно.

В сечении с координатой  $x^0=1$  (где расположена масса  $m_2$ ) имеем

$$U(1, \tau) = -f_1(\tau), \quad U'(1, \tau) = 0 \quad (0 \leq \tau < 1);$$

$$U(1, \tau) = -f_1(\tau) + 2\omega e^{-\omega\tau} \int_0^{\tau-1} f_1(\tau_1) e^{\omega(\tau_1+1)} d\tau_1;$$

$$U'(1, \tau) = 2e^{-\omega\tau} \int_0^{\tau-1} \dot{W}(\tau_1) e^{\omega(\tau_1+1)} d\tau_1$$

$$(1 \leq \tau < 3); f_1(\tau) = V_0 \tau - W. \tag{6.7.7}$$

Если конец стержня при  $x^0=1$  свободен ( $\omega = \infty$ ), то

$$U(x^0, \tau) = -f_1(\tau) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_1 \times \\ \times \left[ \tau - (2n + x^0) \right] H \left[ \tau - (2n + x^0) \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_1 \left[ \tau - (2n - x^0) \right] H \left[ \tau - (2n - x^0) \right]; \tag{6.7.8}$$

$$U'(x^0, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ f_2 \left[ \tau - (2n + x^0) \right] \times \right. \\ \times H \left[ \tau - (2n + x^0) \right] - f_2 \left[ \tau - [2(n+1) - x^0] \right] \times \\ \left. \times H \left[ \tau - [2(n+1) - x^0] \right] \right\}.$$

Таким образом, переходной процесс в стержне определяется законом движения тела  $m_1$ , который находят из решения уравнения (6.7.5). Способы интегрирования уравнения (6.7.5) зависят от вида функции  $F(t)$ .

**Модели деформируемых оснований.** В ряде случаев силу сопротивления приближенно можно выразить в явной форме через перемещения и скорость внедряющегося жесткого тела  $m_1$ , а также его геометрию:  $F(t) = F[w(t), \dot{w}(t)]$  [1, 10]. Эти результаты получены на основании элементарных теорий удара и экспериментальных данных. В общем случае функцию  $F(t)$  находят из решения смешанной динамической контактной задачи механики сплошных сред с подвижными границами для полупространства. Аналитические решения для жидкости и грунтов приведены в [4, 11].

При погружении в жидкость во многих случаях, когда скорость движения жидкости существенно меньше скорости звука и различные точки поверхности тела  $m_1$  не вступают одновременно в контакт с жидкостью, можно при

определении  $F(t)$  использовать модель идеальной несжимаемой жидкости ( $v_0 < 100$  м/с для  $m_1$  сферической формы). Если  $m_1$  является телом вращения, то для начальных этапов погружения, аппроксимируя смоченную поверхность тела плоским расширяющимся диском радиуса  $b(t)$ , из решения уравнения Лапласа для жидкости следует

$$F = 4\rho b^2 \left[ \frac{b^3}{3} \frac{dw}{dt} + \frac{w}{\varepsilon} \right]; \quad \frac{db}{dt} = \frac{w}{\varepsilon}, \tag{6.7.9}$$

где  $\rho$  - плотность жидкости;  $\varepsilon(t)$  - функция Вагнера, которая учитывает эффект встречного движения жидкости.

Результаты определения  $\varepsilon$  сведены в табл. 6.7.3. Параметрические исследования о влиянии различных факторов на переходные процессы в упругих стержнях при ударе о воду, грунт и лед приведены в [1, 4].

6.7.3 Функция Вагнера  $\varepsilon$  для тел вращения

Форма тела $m_1$	$\varepsilon(t)$
Шар радиуса $R$ , $v = \frac{b}{R}$	$\varepsilon = \frac{1+v^2}{4v^2} \ln \left  \frac{1+v}{1-v} \right  - \frac{1}{2v};$ $\varepsilon \approx v(0,23v + 0,63) \quad (0 \leq v \leq 0,6)$
Эллипсоид вращения $v = \frac{b}{R}$	$\varepsilon = \kappa \left( \frac{1+v^2}{4v^2} \ln \left  \frac{1+v}{1-v} \right  - \frac{1}{2v} \right);$ $\kappa = \frac{l_1}{R}; \quad l_1, R - \text{размеры полуосей эллипсоида}$
Конус	$\varepsilon = \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \beta \quad (\beta \leq 30^\circ)$ $\beta - \text{угол между образующей конуса и свободной поверхностью жидкости}$
Параболоид вращения	$\varepsilon = \frac{2b}{3l_2}; \quad l_2 - \text{фокальный параметр}$

6.7.9. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР

Гидравлическим ударом называют совокупность явлений, возникающих в жидкости при резком изменении скоростей ее частиц, в частности, при быстром перекрытии выходного отверстия движущейся по трубопроводу жидкости, а также при быстром сбросе давления.

Изменения давлений и скоростей в жидкости ее частиц существенно зависят от упругих свойств жидкости и материала стенок трубопровода. Если  $E_0$  - объемный модуль упругости жидкости (для воды  $E_0=2 \cdot 10^3$  МПа),  $E$  - модуль нормальной упругости материала, из которого изготовлен трубопровод,  $R$  - радиус сечения трубопровода,  $h$  - толщина его стенки, то величину

$$E_* = E_0 [1 + 2E_0 R / (Eh)]^{-1}$$

называют приведенным объемным модулем упругости жидкости.

Если гидравлический удар в трубопроводе происходит вследствие внезапного перекрытия выходного отверстия, то вдоль трубопровода от задвижки будет распространяться волна давления, причем скорость ее распространения

$$c = \sqrt{E_* / \rho},$$

где  $\rho$  - плотность жидкости.

Приращение давления определяется формулой Жуковского

$$\Delta p = \rho c v,$$

в которой  $v$  - скорость частиц жидкости до гидравлического удара.

#### 6.7.10. ПОПЕРЕЧНЫЙ УДАР ПО УПРУГОЙ БАЛКЕ

При анализе ударного взаимодействия балки и падающего на нее груза учитывают как общие деформации балки, так и местные деформации в зоне контакта. Силу ударного взаимодействия в случае, когда груз падает посередине двухопорной шарнирно опертой балки, определяют из интегрального уравнения

$$v t + \frac{g t^2}{2} - \frac{1}{M} \int_0^t \int_0^t P(\tau) d\tau dt_1 = \left(\frac{P}{K}\right)^{2/3} + \frac{2}{m l} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{\kappa_n} \int_0^t P(\tau) \sin \kappa_n (t - \tau) d\tau,$$

в котором  $v$  - скорость груза в момент первого контакта с балкой;  $M$  - масса груза;  $(P/K)^{2/3}$  - слагаемое, выражающее местные деформации, соответствующие модели Герца (см. п. 6.7.5);  $m$  - погонная масса балки;  $l$  - длина балки;  $\kappa_n = (n\pi/l)^2 (EJ/m)^{1/2}$  - собственные частоты балки при изгибных колебаниях;  $EJ$  - изгибная жесткость сечения балки.

Для решения уравнения могут быть использованы различные численные процедуры, основанные на разделении времени на малые интервалы  $\Delta t$  и вычислении результатов шаг за шагом. Наиболее целесообразно принять, что

сила  $P$  постоянна в течение каждого малого интервала времени. В первом интервале при вычислении обоих входящих в уравнение интегралов можно принять  $P_1=0$ . Тогда для конца этого интервала сразу получит ся

$P_2 = K(v\Delta t)^{3/2}$ . Принимая это значение неизменным при вычислении интегралов для второго интервала, можно найти  $P_3$  и т.д.

#### 6.7.11. УДАРОЗАЩИТНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Расчетная модель ударозащитной системы простейшего вида (рис. 6.7.11) включает источник возмущения  $I$  и объект защиты  $O$ , взаимодействующие между собой через амортизирующее устройство ( $AУ$ ), условно изображенное на рис. 6.7.11 в виде параллельно включенных пружины и демпфера. В случае силового возмущения источником служит машина с приложенным к ней внешним воздействием  $F(t)$ , объектом - основание; при кинематическом возмущении источником служит основание, движущееся по заданному закону  $\xi(t)$ , объектом защиты - машина. Дифференциальное уравнение движения системы в обоих случаях имеет вид

$$\ddot{x} + r(x, \dot{x}) = \sigma(t), \quad (6.7.10)$$

где  $x$  - смещение машины относительно основания;  $r(x, \dot{x}) = m^{-1} R(x, \dot{x})$  - приведенная характеристика  $AУ$ ;  $m$  - масса машины;  $R(x, \dot{x})$  - реакция  $AУ$ ;  $\sigma(t) = m^{-1} F(t)$  - для силового воздействия,  $\sigma(t) = -\ddot{\xi}(t)$  - для воздействия кинематического типа.

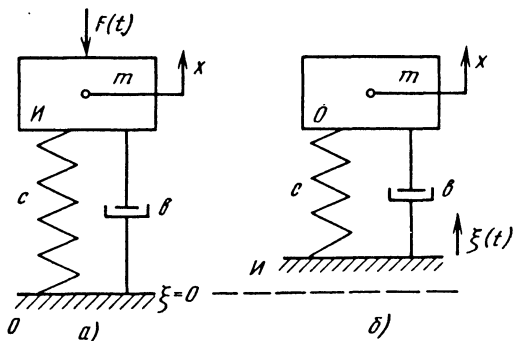


Рис. 6.7.11. Модель простейшей виброзащитной системы при ударе: а - силового возмущение; б - кинематическое возмущение

Задача ударозащиты состоит в подборе характеристики амортизирующего крепления,

обеспечивающего требуемую степень защиты объекта, т.е. снижение абсолютного ускорения  $w = \ddot{x} + \ddot{\xi}$  машины, либо снижение усилия  $R(x, \dot{x})$ , передающегося на основание. Как следует из (6.7.10), величины  $w$  и  $m^{-1}R$  в каждый момент времени совпадают.

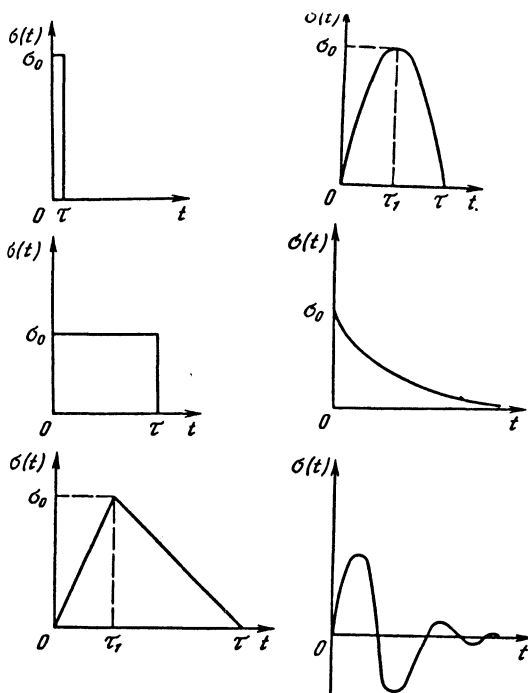


Рис. 6.7.12. Типовые графики ударных воздействий

Типовые ударные воздействия  $\sigma(t)$  представлены на рис. 6.7.12. При расчете на удар часто пользуются силовыми ударными характеристиками виброизоляторов, представляющими линейную аппроксимацию нелинейной функции  $R = R(x, \dot{x})$  в виде

$$R(x, \dot{x}) = c_*x, \tag{6.7.11}$$

где  $c_*$  носит название ударной жесткости. Силовые ударные характеристики виброизоляторов некоторых типов приведены в табл. 6.7.4.

Целью расчета на удар является определение максимальных значений переменных  $x$  и  $w$  (смещения и абсолютного ускорения объекта) при кинематическом воздействии или силу  $R$ , передаваемую на объект защиты, при силовом воздействии, причем максимальное значение  $\tilde{w}$  модуля ускорения  $|w|$  совпадает, как это следует из (6.7.10), с максимальным по модулю значением приведенной реакции  $r(x, \dot{x}) = m^{-1}R(x, \dot{x})$ .

6.7.4. Силовые ударные характеристики виброизоляторов

Тип виброизолятора	Амплитуда ударного импульса по оси x, см	Длительность ударного импульса, с	Ускорение виброизолированного объекта при ударе с предельной амплитудой м/с <sup>2</sup>
АП, АЧ	150	0,0005	70-150
	75	0,001	
	50	0,0015	
	37	0,002	
	15	0,005	
	7,5	0,010	
АН	5	0,020	60-130
	3	0,025	
	50	0,0015	
	35	0,002	
АР	12	0,005	90
	6	0,010	
	3	0,020	
	50	0,001	
АД	30	0,002	5-15
	5	0,10	
	3	0,25	
	50	0,0005	
	30	0,001	
	20	0,0015	
АФД	12	0,002	-
	6	0,005	
	3	0,010	
	10	0,010	
АПН	10	0,005	40
	13	0,010	

При линейной аппроксимации (6.7.11) частное решение (6.7.10), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, можно представить в виде

$$x(t) = \omega_*^{-1} \int_0^t \sigma(\theta) \sin \omega_*(t - \theta) d\theta, \tag{6.7.12}$$

причем  $\omega_*^2 = cm^{-1}$ . Если ввести в рассмотрение комплексный текущий спектр  $F(t, i\omega)$  воздействия  $\sigma(t)$  по формуле

$$F(t, i\omega) = \int_0^t \sigma(\theta) \exp(i\omega\theta) d\theta, \tag{6.7.13}$$

то решению (6.7.12) можно придать вид  $x(t) = \omega_*^{-1} \rho(t, \omega_*) \sin[\omega_*t - \Psi(t, \omega_*)]$ , (6.7.14) т.е. рассматривать  $x(t)$  как модулированный по амплитуде процесс  $\sin[\omega_*t - \Psi(t, \omega_*)]$ , где  $\rho(t, \omega_*)$  играет роль огибающей; здесь

$$\rho(t, \omega_*) = |F(t, i\omega_*)| = \sqrt{A^2 + B^2};$$

$$\Psi(t, \omega_*) = BA^{-1}; \quad (6.7.15)$$

$$A(t, \omega_*) = \int_0^t \sigma(\theta) \cos \omega_* \theta d\theta;$$

$$B(t, \omega_*) = \int_0^t \sigma(\theta) \sin \omega_* \theta d\theta.$$

Из (6.7.14) и (6.7.15) получаются оценки для

$$\tilde{x} \leq \omega_*^{-1} \max_t \rho(t, \omega_*);$$

$$\tilde{w} \leq \omega_* \max_t \rho(t, \omega_*); \quad \tilde{R} = m\tilde{w}. \quad (6.7.16)$$

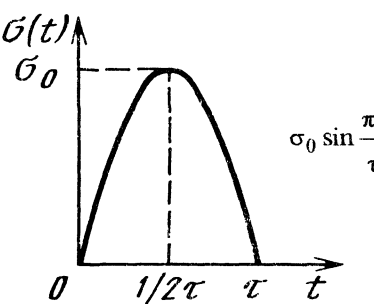
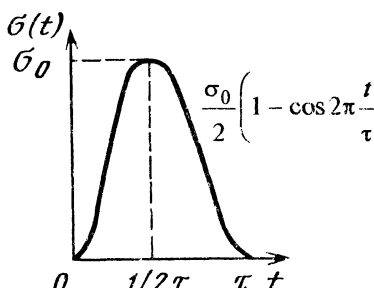
Рассмотрим случай удара конечной длительности  $\tau$ . Пусть  $t_*$  - момент достижения наибольшего отклонения  $x(t)$ . Если  $x(t_*)$  есть одновременно первый максимум  $x(t)$ , причем  $t_* > \tau$ , то удар называют коротким. При этом оценки (6.7.16) превращаются в равенства

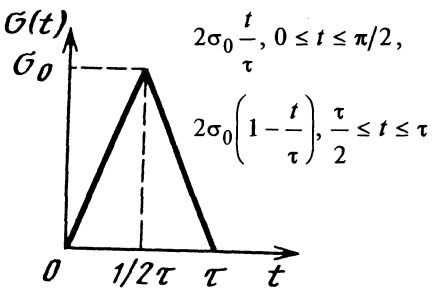
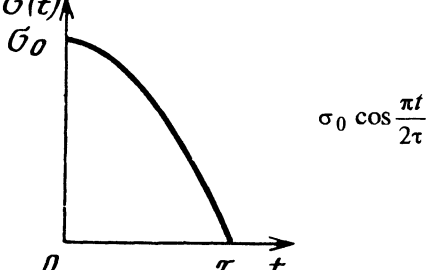
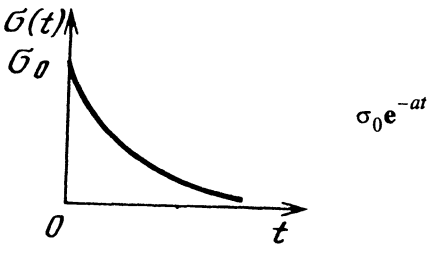
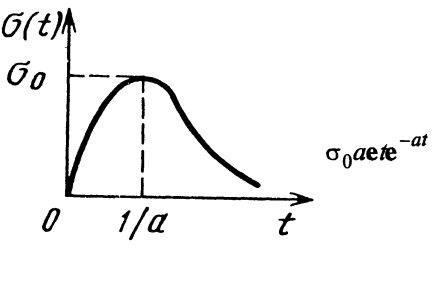
$$\tilde{x} = \omega_*^{-1} \rho(\tau, \omega_*); \quad \tilde{w} = \omega_* \rho(\tau, \omega_*);$$

$$\tilde{R} = m\omega_* \rho(\tau, \omega_*). \quad (6.7.17)$$

Если же  $t_* < \tau$ , удар называют длительным. Формулы для  $w(\tau)$ , соответствующие типовым ударным воздействиям  $\sigma(t)$ , приведены в табл. 6.7.5.

6.7.5. Ускорение виброизолированного объекта при ударе

$\sigma(t)$	$x$
	$\frac{\sigma_0}{1 - \frac{\pi^2}{\omega_*^2 \tau^2}} \left( \sin \frac{\pi t_*}{\tau} - \frac{\pi}{\omega_* \tau} \sin \omega_* t_* \right), \quad t_* < \tau;$ $2\sigma_0' \frac{\frac{\pi}{\omega_* \tau}}{\frac{\pi^2}{\omega_*^2 \tau^2} - 1} \cos \frac{\omega_* \tau}{2}$
	$\frac{\sigma_0}{1 - \frac{\pi^2}{\omega_*^2 \tau^2}} \left[ 1 - \cos \omega_* t - \frac{\tau^2 \omega_*^2}{4\pi^2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi t_*}{\tau} \right) \right], \quad t_* < \tau;$ $\frac{\sigma_0}{1 - \frac{\pi^2}{\omega_*^2 \tau^2}} \sin \frac{\omega_* \tau}{2}$

$\sigma(t)$	$x$
 <p> <math>2\sigma_0 \frac{t}{\tau}, 0 \leq t \leq \tau/2,</math>  <math>2\sigma_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right), \frac{\tau}{2} \leq t \leq \tau</math> </p>	$2\sigma_0 \left( \frac{t_*}{\tau} - \frac{\sin \omega_* t_*}{\omega_* \tau} \right), 0 \leq t_* \leq \tau/2;$ $2\sigma_0 \left\{ 1 - \frac{t_*}{\tau} - \left[ \frac{\sin \omega_* t_*}{\omega_* \tau} - \frac{2 \sin \omega_* (t_* - \tau/2)}{\omega_* \tau} \right] \right\}, \tau/2 \leq t_* \leq \tau;$ $2\sigma_0 \frac{\sin^2 \frac{\omega_* \tau}{4}}{\frac{\omega_* \tau}{4}}$
 <p> <math>\sigma_0 \cos \frac{\pi t}{2\tau}</math> </p>	$\frac{\sigma_0}{\omega_*^2} \frac{\pi^2}{(2\tau)^2} \left( \cos \frac{\pi t_*}{2\tau} - \omega_* t_* \right), t_* < \tau;$ $\frac{2\sigma_0 \omega_* \tau}{\left( \frac{2\omega_* \tau}{\pi} \right)^2 - 1} \sqrt{1 + \left( \frac{2\omega_* \tau}{\pi} \right)^2} - 2 \frac{\omega_* \tau}{\pi} \sin \omega_* \tau$
 <p> <math>\sigma_0 e^{-at}</math> </p>	$\frac{a}{\omega_*} \frac{\sin \omega_* t_* - \cos \omega_* t_* + e^{-at_*}}{1 + \frac{a^2}{\omega_*^2}}$
 <p> <math>\sigma_0 a e t e^{-at}</math> </p>	$\sigma_0 \frac{ae}{\left(1 + \frac{a^2}{\omega_*^2}\right)^2} \left\{ \left[ \frac{2a}{\omega_*} + \left(1 + \frac{a^2}{\omega_*^2}\right) \omega_* t_* \right] e^{-at_*} - \frac{2a}{\omega_*} \cos \omega_* t_* - \left(1 - \frac{a^2}{\omega_*^2}\right) \sin \omega_* t_* \right\}$

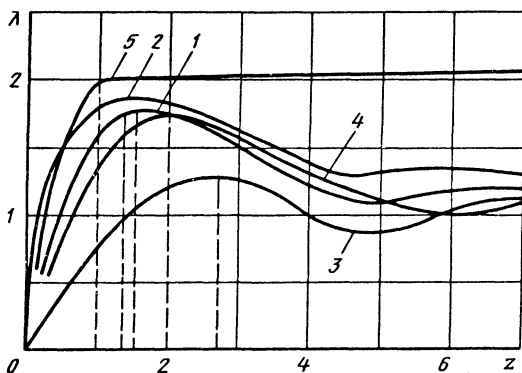


Рис. 6.7.13. Ударные спектры линейно недемпфированного осциллятора при импульсах различной формы:

- 1 - полусинусоидальном; 2 - экспоненциальном; 3 - треугольном с вертикальным срезом; 4 - синусоидальном; 5 - прямоугольном

На рис. 6.7.13 приведены ударные спектры модели, показанной на рис. 6.7.11 при  $b=0$ , представляющие зависимость коэффициента динамичности  $\lambda = \sigma_0^{-1} \omega_*^2 \tilde{x}$  системы от безразмерной частоты  $z = 2\pi^{-1} t \omega_*$  ( $t$  - длительность;  $\sigma_0$  - пиковое значение импульса) при различных формах импульса. Графики, представленные на рис. 6.7.14, позволяют оценить влияние демпфирования на ударный спектр системы для частного вида воздействия - импульса в виде полуволны синусоиды.

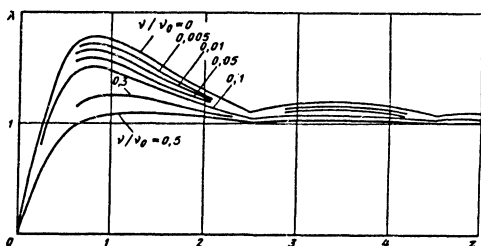


Рис. 6.7.14. Ударный спектр линейно демпфированного осциллятора,  $v/v_0$  - отношение коэффициента демпфирования к критическому значению

Для ударных воздействий, имеющих вид односторонних импульсов с единственным максимумом  $\sigma_0$ , полезной может быть оценка А.Н. Крыловым [10] максимального отклонения  $\Delta x$

амортизированной массы (см. рис. 6.7.11 при  $b=0$ ) от квазистатического смещения  $x_0(t) = c_*^{-1} F(t) = \omega_*^2 \sigma(t)$ :

$$\max_t |\Delta x| \leq \omega_*^2 \Delta \sigma, \quad (6.7.18)$$

где  $\Delta x = x(t) - x_0(t)$ ;  $\Delta \sigma = \pi \omega_*^{-1} (\dot{\sigma})_{\max}$  - наибольшее возможное приращение функции  $\sigma(t)$  за полупериод  $\pi \omega_*^{-1}$  собственных колебаний массы. Оценку (6.7.18) применяют при исследовании влияния длительных ударов.

Кратко рассмотрим вопрос о колебаниях нелинейной системы при ударе. В отличие от стационарных режимов, где даже малая нелинейность характеристики  $r(x, \dot{x})$  может вызвать специфические нелинейные эффекты - субгармонический резонанс, явление скачка, автоколебания, ударные воздействия (во всяком случае, если они относятся к типу коротких) к возникновению подобных эффектов не ведут. Поэтому отличие поведения нелинейной системы при коротком ударе по сравнению с линейной носит лишь количественный характер. Так, например, при коротком ударе, как это следует из (6.7.15),  $\max_t \rho(t, \omega_*) = \rho(t, \omega_*) = S_0$ , где  $S_0$  - площадь ударного импульса  $\sigma(t)$ ; иными словами, величины  $\tilde{x}, \tilde{w}, \tilde{R}$  линейной системы слабо зависят от формы или длительности ударного импульса и их можно определять из однородного линейного уравнения, соответствующего (6.7.10), при начальных условиях  $x(0)=0$ ;  $\dot{x}(0) = S_0$ . Аналогичный подход к нелинейной системе дает уравнение

$$\int_0^{\tilde{x}} r(x) dx = S_0^2 / 2. \quad (6.7.19)$$

Результаты расчета  $\tilde{x}$  для различных видов нелинейности силовой ударной характеристики приведены в табл. 6.7.5.

Решение (6.7.19) можно осуществить графически, в особенности если в виде графика задана сама характеристика  $r=r(x)$ , причем  $r(x)$ , вообще говоря, должно входить описание упругих свойств упоров или ограничителей хода.

Если удар является длительным и односторонним ( $\sigma(t) \geq 0$  или  $\sigma(t) \leq 0$ ,  $0 \leq t \leq \tau$ ), более корректной оказывается его аппроксимация в виде прямоугольного импульса той же длительности и площади. В этом случае движение объекта во время удара описывается уравнением  $\ddot{x} + r(x) = \sigma_0$ ;  $x(0) = 0$ ;  $\dot{x}(0) = 0$ , (6.7.20)

решение которого соответствует свободным нелинейным колебаниям около положения  $x=x_{ст}$ , где  $r(x_{ст})=\sigma_0$ , непрерывно переходящие в свободные колебания относительно равновесного положения  $x=0$ , максимальное значение  $x_{max}$  при этом удовлетворяет уравнению

$$\sigma_0 x_{max} = \int_0^{x_{max}} r(x) dx, \quad (6.7.21)$$

также легко разрешаемому графически, если графически задана нелинейная характеристика  $r=r(x)$ .

Отклонение  $x_{max}$  будет совпадать с  $\tilde{x}$ , если момент  $t_*$ , вычисляемый из уравнения  $x(t_*) = x_{max}$ , не превышает  $\tau$ . В противном случае  $\tilde{x}$  определяется в результате рассмотрения движения объекта при  $t > \tau$ ; при этом целесообразно провести линеаризацию уравнения (6.7.20), основанную на гармонической аппроксимации при  $0 \leq t \leq \tau$  процесса  $x(t)$  в виде [11]

$$x = a(1 - \cos \omega t), \quad (6.7.22)$$

где амплитуду  $a$  определяют из соотношения  $r_0(a) = a$ , а функции  $\omega = \omega(a)$  и  $r_0 = r_0(a)$  представляют коэффициенты линеаризации нелинейной характеристики  $r(x)$ :

$$r_0 = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} r[a(1 - \cos \psi)] d\psi; \quad (6.7.23)$$

$$\omega^2 = -(2\pi a)^{-1} \int_0^{2\pi} r[a(1 - \cos \psi)] \cos \psi d\psi$$

в интервале  $0 \leq t \leq \tau$ , где она представляется в виде

$$r(x) = r_0 + \omega^2 x. \quad (6.7.24)$$

В рассматриваемом приближении величина  $\tilde{x}$  при длительном ударе равна  $2a$ , причем момент  $t_*$  согласно (6.7.22) равен  $\pi\omega^{-1}$ ; таким образом, при  $\omega\tau > \pi$  удар оказывается длительным, а при  $\omega\tau < \pi$  - коротким. В этом последнем случае

$$\tilde{x} = a(1 - \cos \omega t_*) - \sigma_0 \omega^{-2} [1 - \cos(\omega t_* - \tau)], \quad (6.7.25)$$

где  $\omega t_*$  - наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg} \omega t_* = - \frac{\sin \omega \tau}{a \omega^2 \sigma_0^{-1} - \cos \omega \tau}. \quad (6.7.26)$$

#### 6.7.12. УДАР В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЕ ВИБРОЗАЩИТЫ

Рассмотрим пространственное движение системы источник - амортизирующее устройство (АУ) - объект, считая источник и объект твердыми телами, а АУ - состоящим из  $N$  безынерционных произвольно расположенных и произвольно ориентированных виброизоляторов. Обычно расстояния между виброизоляторами существенно превышают их собственные габаритные размеры; поэтому относительные угловые перемещения источника и объекта можно считать малыми и ограничиться представлением полной динамической реакции  $\bar{R}_j$  каждого из виброизоляторов ( $j=1, 2, \dots, N$ ,  $N$  - число виброизоляторов) в виде трех составляющих  $R_{jw}, R_{jv}, R_{ju}$ , где  $w$  - продольная, а  $v$  и  $u$  - боковые оси жесткости рассматриваемого виброизолятора. Кроме того, будем считать реакцию  $R_{jw}$ , зависящей только от переменных  $\delta_{jw}$  и  $\dot{\delta}_{jw}$ , где  $\delta_{jw}$  - проекция на ось  $w$  вектора  $\delta_j$  линейной деформации  $j$ -го виброизолятора;  $\dot{\delta}_{jw}$  - проекция на ту же ось вектора скорости деформации  $\dot{\delta}_j$ ; аналогичного рода предложения сделаем в отношении  $R_{jv}$  и  $R_{ju}$ . Таким образом, АУ можно считать состоящим из  $3N$  элементарных одноосных виброизоляторов.

Введем три системы отсчета: неподвижную  $OXYZ$ , подвижную  $O'X'Y'Z'$ , жестко связанную с несущим телом, и подвижную  $G\Theta HZ$ , жестко связанную с несомым телом, причем оси  $\Theta, H$  и  $Z$  будут его главными центральными осями инерции. В исходном положении все три системы будем считать совпадающими.

При кинематическом возмущении считаем заданными функциями времени обобщенные координаты несущего тела (источника), в качестве которых примем абсолютные координаты  $x_0, y_0, z_0$ , точки  $O'$  и абсолютные угловые координаты  $\psi', \theta', \varphi'$ ; указанные координаты образуют вектор  $q'$ .

В качестве обобщенных координат системы возьмем относительные линейные координаты  $x_G, y_G, z_G$  точки  $G$  и углы  $\psi, \theta, \varphi$ , выбранные тем же способом, что и  $\psi', \theta', \varphi'$ . Вследствие



предполагаемой малости угловых перемещений источника и объекта угловые координаты можно считать углами поворота вокруг осей, связанных с этими телами. Обозначая через  $\mathbf{q}$  вектор обобщенных координат объекта, запишем дифференциальные уравнения его движения относительно источника в виде

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} - \mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}'(t), \quad (6.7.27)$$

где  $\mathbf{Q}$  - вектор обобщенных реакций виброизоляторов  $AJ$ ;  $\mathbf{A}$  - матрица инерции объекта,  $\mathbf{A} = \text{diag}\{m, m, m, I_\xi, I_\zeta, I_\eta\}$ ;  $m$  - масса;  $I_\xi, I_\eta, I_\zeta$  - главные моменты инерции объекта; вектор  $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}'$  можно трактовать как вектор обобщенных сил инерции. В случае силового возмущения уравнения движения системы сохраняют вид (6.7.27) при условии, что  $\ddot{\mathbf{q}}'$  будет вектором абсолютных обобщенных координат несомого тела (источника), а вектор обобщенных сил инерции заменен вектором обобщенных возмущающих сил, приложенных к объекту.

Аналитическое исследование уравнения (6.7.27) существенно упрощается, если число  $N'$  деформируемых виброизоляторов не превышает шести и если существует возможность варьирования расположением их точек крепления к источнику и объекту. В самом деле, выбирая в качестве обобщенных координат текущие деформации  $\delta_j$  упомянутых виброизоляторов, можно преобразовать систему (6.7.27) к виду

$$(\mathbf{D}^{-1})^T \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \ddot{\delta} + \mathbf{R} = -(\mathbf{D}^{-1})^T \mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}}'(t), \quad (6.7.28)$$

где  $\mathbf{D}$  - матрица линейного преобразования переменных  $\mathbf{q}$  в переменные  $\delta$  [при малых колебаниях элементы матрицы  $\mathbf{D}$  постоянны и зависят лишь от координат точек крепления  $\xi_j, \eta_j, \zeta_j$  ( $j=1, 2, \dots, N'$ ) виброизоляторов к несомому телу и направляющих косинусов  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  их осей жесткости];  $\delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N'}\}$ ;  $\mathbf{R}$  - вектор обобщенных реакций подвеса ( $\mathbf{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_{N'}\}$ );  $\mathbf{T}$  - знак транспонирования матрицы. Надлежащим выбором параметров  $\xi_j, \eta_j, \zeta_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  можно привести матрицу  $(\mathbf{D}^{-1})^T \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1}$  к диагональному (квазидиагональному) виду, что будет соответствовать полному (частичному) разделению движений системы по координатам  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N'}$ , описываемых скалярными уравнениями типа

$$m_j \ddot{\delta}_j + R_j (\delta_j, \delta_j) = n_j \sigma_j(t), \quad (6.7.29)$$

где  $m_j, n_j$  - постоянные;  $\sigma_j(t)$  - заданная функция времени, представляющая обобщенное ударное возмущение по координате  $\delta_j$ . В случаях слабых ударов, когда деформации виброизоляторов не выходят за пределы линейности их силовых ударных характеристик, поведение виброзащитной системы может изучаться на основе линейной модели. В этом случае вектор  $\mathbf{Q}_R$  допускает представление

$$\mathbf{Q}_R = -\mathbf{C} \cdot \mathbf{q}. \quad (6.7.30)$$

При кинематическом возмущении уравнение (6.7.27) приобретает вид

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{q} = -\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}'(t). \quad (6.7.31)$$

При силовом воздействии уравнение (6.7.31) сохраняет вид, если считать  $\mathbf{q}$  вектором абсолютных обобщенных координат, а правую часть заменить вектором обобщенных возмущающих ударных сил  $\mathbf{Q}(t)$ .

Интегрирование уравнения (6.7.31) выполняется известными методами [1, 4]. Например, частное решение этого уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям, можно представить в виде

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^t \mathbf{H}(t - \theta) \ddot{\mathbf{q}}'(\theta) d\theta, \quad (6.7.32)$$

где  $\mathbf{H}(t)$  - весовая матрица системы с элементами  $h_{ik}(t)$  ( $i, k=1, 2, \dots, N' \leq 6$ ), причем элемент  $h_{ik}(t)$  представляет реакцию системы по координате  $q_i$  на единичный обобщенный импульс, соответствующий координате  $q_k$ .

Исследование движения системы при ударе упрощается и в том случае, если возможен переход к ее главным координатам [1, 4]  $v_1, v_2, \dots, v_{N'}$ . Этот переход связан с построением матрицы  $\mathbf{G}$  линейного преобразования

$$\mathbf{v} = \mathbf{G} \mathbf{q}, \quad (6.7.33)$$

при котором уравнение (6.7.31), записанное в координатах  $v_1, v_2, \dots, v_{N'}$ , образующих вектор  $\mathbf{v}$ , распадается на независимые уравнения

$$\ddot{v}_s + \omega_s^2 v_s = f_s(t), \quad (6.7.34)$$

проанализированные выше. Однако нахождение матрицы  $\mathbf{G}$  не проще построения весовой матрицы системы. После определения  $\mathbf{q}(t)$  нетрудно

найти вектор  $\mathbf{a}$  обобщенных абсолютных ускорений объекта; согласно (6.7.27) имеем

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{q}} + \ddot{\mathbf{q}}' = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}_* \mathbf{q}, \quad (6.7.35)$$

откуда найдутся и абсолютные ускорения любых фиксированных точек объекта, что представляет интерес в случае кинематического возмущения. При силовом воздействии из (6.7.27) находим вектор  $\mathbf{Q}$  обобщенных реакций виброизоляторов

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{C}_* \mathbf{q}(t), \quad (6.7.36)$$

что позволяет оценить силовое воздействие на несущее тело (объект защиты).

**Пример.** Найдем движение объекта массы  $m$ , виброизолированного по схеме табл. 6.7.1, вызванное вертикальным сотрясением основания, по закону

$$\ddot{z}_0(t) = \begin{cases} \sigma_0, & 0 < t < \tau; \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$$

Выражения для кинетической  $T$  и потенциальной  $\Pi$  энергии системы имеют вид

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{y}_C^2 C + \dot{z}_C^2 + \rho_\xi^2 \dot{\psi}^2);$$

$$\Pi = \frac{1}{2} [c_3 y_C^2 + c_1 (z_C - a\psi)^2 + c_2 (z_C + b\psi)^2],$$

откуда

$$\mathbf{A} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_\xi^2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C}_* = \begin{pmatrix} c_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & -c_1 a + c_2 b \\ 0 & -c_1 a + c_2 b & c_1 a^2 + c_2 b^2 \end{pmatrix}.$$

Дифференциальные уравнения движения системы принимают вид

$$\begin{cases} \ddot{y}_C + \lambda^2 y_C = 0; \\ \ddot{z}_C + \lambda_1^2 z_C + \lambda_{12} \psi = -\ddot{z}_0(t); \\ \ddot{\psi} + \lambda_2^2 \psi + \lambda_{21} z_C = 0, \end{cases} \quad (*)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{c_3}{m}; \quad \lambda_1^2 = \frac{c_1 + c_2}{m}; \quad \lambda_2^2 = \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{m \rho_\xi^2};$$

$$\lambda_{12} = \frac{-c_1 a + c_2 b}{m}; \quad \lambda_{21} = \frac{\lambda_{12}}{\rho_\xi^2}; \quad \rho_\xi^2 = \frac{I_\xi}{m}.$$

При  $h=0$  связанными будут лишь колебания по координатам  $z$  и  $\psi$ ; колебания по  $y_C$  выделяются отдельно и не возбуждаются по крайней мере для принятой линейной модели [27]. Для нахождения  $z_C(t)$  и  $\psi(t)$  построим весовую матрицу

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{zz} & h_{\psi z} \\ h_{z\psi} & h_{\psi\psi} \end{pmatrix}.$$

Для этого следует найти частные решения второго и третьего уравнений системы (\*) при начальных условиях  $z_C=0$ ,  $\dot{z}_C=1$ ;  $\psi=0$ ,  $\dot{\psi}=0$  и  $z_C=0$ ,  $\dot{z}_C=0$ ;  $\psi=0$ ,  $\dot{\psi}=1$ .

В результате получим

$$h_{zz} = (\beta_2 - \beta_1)^{-1} \left[ \beta_2 \omega_{01}^{-1} \sin \omega_{01} t - \beta_1 \omega_{02}^{-1} \sin \omega_{02} t \right];$$

$$h_{\psi z} = \beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1)^{-1} \left[ \omega_{01}^{-1} \sin \omega_{01} t - \omega_{02}^{-1} \sin \omega_{02} t \right];$$

$$h_{\psi\psi} = (\beta_1 - \beta_2)^{-1} \left[ \omega_{01}^{-1} \sin \omega_{01} t - \omega_{02}^{-1} \sin \omega_{02} t \right];$$

$$h_{z\psi} = (\beta_1 - \beta_2)^{-1} \left[ \beta_1 \omega_{01}^{-1} \sin \omega_{01} t - \beta_2 \omega_{02}^{-1} \sin \omega_{02} t \right],$$

где

$$\omega_{01,02}^2 = \frac{1}{2} \left[ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \mp \sqrt{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 + 4\lambda_{12}\lambda_{21}} \right];$$

$$\beta_i = \pm \frac{\lambda_1^2 - \omega_{0i}^2}{\lambda_{12}} \quad (i = 1, 2).$$

Поскольку возмущение действует лишь по координате  $z_C$ , имеем

$$z_C(t) = \int_0^t h_{zz}(t-\theta) \dot{z}_0(\theta) d\theta;$$

$$\psi = \int_0^t h_{\psi z}(t-\theta) \dot{z}_0(\theta) d\theta.$$

Внося  $h_{ik}(t)$  в эти выражения, получим окончательно при  $0 < t < \tau$ :

$$\left\{ \begin{aligned} z_C &= \sigma_0 (\beta_2 - \beta_1)^{-1} \left[ \beta_2 \omega_{01}^{-2} (1 - \cos \omega_{01} t) - \right. \\ &\quad \left. - \beta_1 \omega_{02}^{-2} (1 - \cos \omega_{02} t) \right]; \\ \psi &= \sigma_0 \beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1)^{-1} \left[ \omega_{01}^{-2} (1 - \cos \omega_{01} t) - \right. \\ &\quad \left. - \omega_{02}^{-2} (1 - \cos \omega_{02} t) \right]. \end{aligned} \right.$$

При  $t > \tau$  начнутся свободные колебания.

## Глава 6.8

### ПРИНЦИПЫ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ МАШИН

#### 6.8.1. МАШИНА КАК ИСТОЧНИК ВНЕШНЕЙ ВИБРОАКТИВНОСТИ

Функционирование всякой машины технологического, транспортного, энергетического, строительного или иного типа связано с механическим движением ее подвижных частей - валов, поршней, звеньев приводных или исполнительных механизмов, рабочих органов и т.п.

С кинестатической точки зрения движение этих элементов сопровождается возникновением сил инерции, трактуемых как внешние (по отношению к машине в целом) переменные силы, непосредственно передающиеся сначала на связи, ограничивающие перемещения подвижных элементов (опоры валов, направляющие ползунов), затем на корпус (станину, стойку) и далее на фундамент (раму, панель, опорную или поддерживающую конструкцию).

Указанные переменные силы обуславливают виброактивность работающей машины. С количественной стороны виброактивность характеризуется амплитудным и спектральным составом переменных сил, а также их локализацией в теле машины. Различают случаи, когда виброактивность машины является побочным фактором, простекающим из-за невозможности полной балансировки или уравновешивания сил инерции подвижных звеньев. Мероприятия по снижению виброактивности машины в этом случае называют борьбой с вибрацией в источнике. В других случаях виброактивность машины непосредственно связана с осуществлением соответствующего технологического процесса, как это имеет место, например, в виброконтейнерах, вибропогрузателях, грохотах, отбойных молотках, виброплощадках и прочих машинах вибрационного типа. Рабочие органы этих машин должны совершать колебательные движения или создавать переменные силы с параметрами, обеспечивающими эффективность рабочего про-

цесса. Ясно, что вопрос о борьбе с вибрацией в источнике здесь не стоит.

Однако в обоих случаях имеет важное значение другая задача - виброизоляция источника внешней виброактивности, имеющая своей общей целью устранение или во всяком случае снижение динамических составляющих сил, передающихся от машины к фундаменту.

#### 6.8.2. ПРИНЦИПЫ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ

Установленная на фундаменте машина с неуравновешенными инерционными силами передает на фундамент в точках крепления с ним динамические силы, содержащие постоянные и переменные составляющие. Первые из них определяются весом машины; вторые возникают из-за наличия переменных компонентов возмущающих сил.

Может оказаться, что интенсивность сил, воспринимаемых фундаментом, не превышает некоторого допустимого уровня. Такая ситуация характерна для динамически малоактивных машин, проблема виброизоляции которых, следовательно, не возникает. Более интересен, однако, противоположный случай, когда защита фундамента необходима. Практически эта задача решается установкой источника возмущений - машины - на объект защиты - фундамент - с помощью виброизоляторов - упругих или упругодемпфированных элементов. "Ослабляя" (по сравнению с жестким креплением) связь между источником и объектом, виброизолирующий подвес, представляющий собой всю совокупность виброизоляторов, преобразует динамическую модель машина - фундамент в модель машина - подвес - фундамент (или источник - подвес - объект) и тем самым изменяет переменные силы, возникающие в местах крепления источника и объекта. Задача виброизоляции (виброзащиты) состоит здесь в нахождении динамических и геометрических характеристик подвеса, обеспечивающих заданную степень снижения уровня переменных сил, передаваемых подвесом на фундамент. Решение этой задачи существующим образом зависит от динамических характеристик элементов модели виброзащиты - источника, подвеса, объекта, а также от характеристик внешнего возмущения и требований к защите.

Динамические модели элементов расчетной модели сами зависят от спектрального состава внешнего воздействия. В простейшем случае, когда, например, масса объекта существенно превышает массу источника, можно пренебречь перемещением объекта, считая его, таким образом, неподвижным; в свою очередь масса виброизоляторов, как правило, пренебрежимо мала по сравнению с массой источника. Тогда при поступательном прямолинейном движении источника на упругом недемпфированном подвесе приходим к простейшей одномерной линейной модели (рис. 6.8.1).

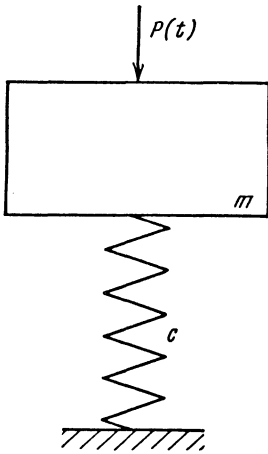


Рис. 6.8.1. Простейшая расчетная модель виброизолированной машины

Обозначая через  $m$  массу источника, через  $c$  - жесткость подвеса и рассматривая случай гармонического внешнего воздействия  $P(t) = P_0 \sin \omega t$ , получим следующее выражение для амплитудного значения переменной составляющей силы в подвесе

$$R_0 = \frac{P_0 \omega^2}{|1 - \omega^2 / \omega_0^2|}, \quad (6.8.1)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$  - собственная частота системы машина - подвес. При этом постоянная составляющая силы, передающейся на фундамент, равна весу машины  $G$ ; соответствующая статическая осадка подвеса

$$\delta_{ст} = G/c. \quad (6.8.2)$$

Как следует из (6.8.1), выбором достаточно малого значения жесткости  $c$  можно сделать амплитуду  $R_0$  переменной части силы, передающейся на фундамент, как угодно малой. В этом и состоит принцип мягкой подвески, широко используемый в практике виброизоляции, в частности и для более сложных расчетных моделей, когда необходим учет инерционных и упруго-демпфирующих свойств как самой машины, так и фундамента. Вместе с тем слишком мягкий подвес, как это следует из (6.8.2), приводит к весьма большим статическим деформациям виброизоляторов и, вообще говоря, может вызвать неустойчивость равновесного положения машины на фундаменте. Поэтому на практике выбор параметров подвеса осуществляется на основе компромисса между принципом мягкой подвески и условиями жесткой фиксации машины на основании.

6.8.3. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ УПРУГОГО ПОДВЕСА

Целью статического расчета упругого подвеса является вычисление статических реакций виброизоляторов при заданных его свойствах (жесткостные характеристики виброизоляторов, ориентировка осей и расположение точек их крепления к машине и фундаменту) и вычисление деформаций отдельных виброизоляторов для последующего определения статических перемещений машины относительно фундамента или коррекции параметров подвеса в целом.

В простейших случаях статические реакции  $R_j^{(0)}$  виброизоляторов вычисляют непосредственно из уравнений статики, которые можно записать в виде [22]

$$\begin{aligned} \sum R_j^{(0)} \alpha_j + F_x &= 0; \quad \sum R_j^{(0)} \beta_j + F_y = 0; \\ \sum R_j^{(0)} \gamma_j + F_z &= 0; \\ \sum R_j^{(0)} (\eta_j \gamma_j - \zeta_j \beta_j) + M_x &= 0; \\ \sum R_j^{(0)} (\zeta_j \alpha_j - \xi_j \gamma_j) + M_y &= 0; \\ \sum R_j^{(0)} (\xi_j \beta_j - \eta_j \alpha_j) + M_z &= 0, \end{aligned} \quad (6.8.3)$$

где  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  - направляющие косинусы оси  $j$ -го виброизолятора;  $\xi_j, \eta_j, \zeta_j$  - координаты точки крепления  $j$ -го виброизолятора к машине;  $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$  - проекции на оси  $OXYZ$  главного вектора и главного момента сил, образующих статическую нагрузку;  $OXYZ$  - неподвижная система осей, совпадающая с системой  $C\equiv HZ$  главных центральных осей инерции машины в ее равновесном положении. Суммирование в (6.8.3) осуществляется в пределах  $j=1, 2, \dots, 3N$ , где  $N$  - число виброизоляторов, причем каждый реальный виброизолятор представляется в виде трех одномерных взаимно ортогональных элементарных.

В случае однонаправленного подвеса (оси виброизоляторов параллельны статической нагрузке  $G$  - весу машины, плоскость  $OXY$  горизонтальна) уравнения статики машины получаются из (6.8.1) при

$$F_x = F_y = 0; \quad F_z = -G; \quad M_x = M_y = M_z = 0;$$

$$\alpha_j = \beta_j = 0; \quad R_j^{(0)} \gamma_j = R_{jz}^{(0)} \quad (6.8.4)$$

и имеют вид

$$\sum R_{jz}^{(0)} - G = 0; \quad \sum R_{jz}^{(0)} \eta_j = 0;$$

$$\sum R_{jz}^{(0)} \xi_j = 0. \quad (6.8.5)$$

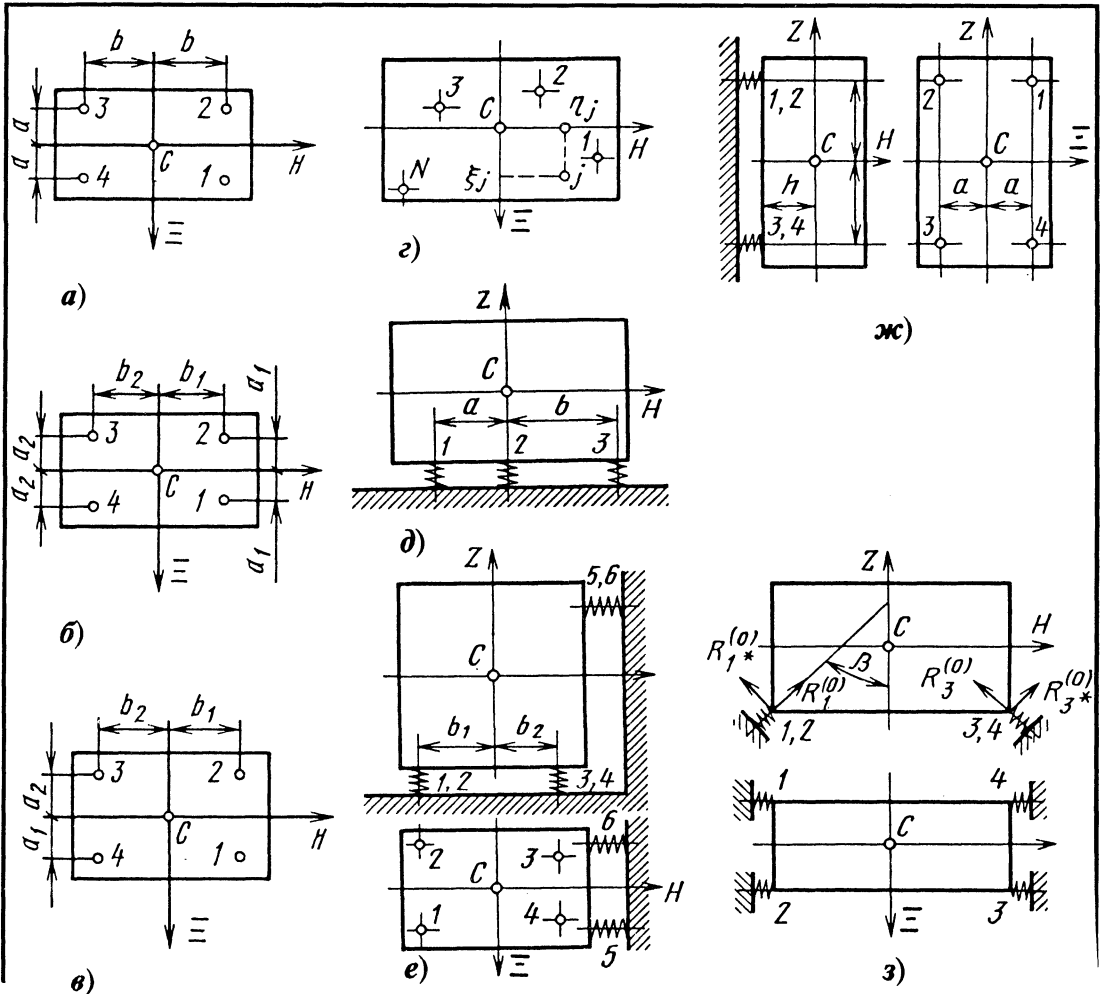
В практике виброизоляции массивных машин число виброизоляторов подвеса зачастую оказывается большим, чем число уравнений статики, так что задача определения реакций оказывается статически неопределимой. В этом случае уравнения статики машины обычно дополняют не противоречащими им условиями распределения статической нагрузки, необходимыми для однозначного определения всех реакций. Полученные таким образом значения  $R_j^{(0)}$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ) называют расчетными статическими реакциями.

Возникает, однако, вопрос, каким образом обеспечить реализацию (выдержать) расчетной статической реакции и одновременно исключить перекося машины относительно фундамента в ее расчетном (установочном) положении. Эта задача решается следующим образом.

Требование отсутствия перекосов имеет чисто геометрический характер и записывается в виде условий

$h_j = l_j - \delta_j + \Delta_j$ , где  $h_j$  - расстояние между точками крепления  $j$ -го элементарного виброизолятора в установочном положении машины;  $l_j$  - расстояние между опорными площадками этого виброизолятора в его недеформированном состоянии;  $\delta_j = R_j^{(0)} c_j^{-1}$  - деформация сжатия элемента жесткости  $c_j$  от расчетной статической нагрузки  $R_j^{(0)}$ ;  $\Delta_j$  - толщина компенсирующей прокладки, подкладываемой под одну из опорных плоскостей  $j$ -го виброизолятора.

6.8.1. Типовые схемы подвесов



Продолжение табл. 6.8.1

Расположение точек крепления	Дополнительные условия распределения нагрузки	Расчетные статические реакции	Толщина выравнивающих прокладок
Схема а	$R_1^{(0)} = R_2^{(0)} = R_3^{(0)} = R_4^{(0)}$	$R_1^{(0)} = R_2^{(0)} = R_3^{(0)} = R_4^{(0)} = \frac{P}{4}$	$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$
Схема б	$R_1^{(0)} = R_2^{(0)};$ $R_3^{(0)} = R_4^{(0)}$	$R_1^{(0)} = R_2^{(0)} = P \frac{b_2}{2(b_1 + b_2)};$ $R_3^{(0)} = R_4^{(0)} = P \frac{b_1}{2(b_1 + b_2)}.$	$\Delta_1 = \Delta_2 = \frac{R_1^{(0)}}{c_1} - \frac{R_3^{(0)}}{c_3} + l_3 - l_1;$ $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$
Схема в	$R_1^{(0)} a_1 b_1 - R_2^{(0)} a_2 b_1 + R_3^{(0)} a_2 b_2 - R_4^{(0)} a_1 b_2 = 0$	$R_1^{(0)} = P \frac{a_2 b_2}{d}; R_2^{(0)} = P \frac{a_1 b_2}{d};$ $R_3^{(0)} = P \frac{a_1 b_1}{d}; R_4^{(0)} = P \frac{a_2 b_1}{d};$ $d = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$	$\Delta_1 = 0;$ $\Delta_2 = \frac{R_2^{(0)}}{c_2} - \frac{R_1^{(0)}}{c_1} + l_1 - l_2;$ $\Delta_3 = \frac{R_3^{(0)}}{c_3} - \frac{R_1^{(0)}}{c_1} + l_1 - l_3;$ $\Delta_4 = \frac{R_4^{(0)}}{c_4} - \frac{R_1^{(0)}}{c_1} + l_1 - l_4$
Схема з	$\sum_{j=1}^N \xi_j = 0;$ $\sum_{j=1}^N \eta_j = 0$	$R_1^{(0)} = R_2^{(0)} = \dots = R_N^{(0)} = \frac{P}{N}$	$\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_N = 0$

Продолжение табл. 6.8.1

Расположение точек крепления	Дополнительные условия распределения нагрузки	Расчетные статические реакции	Толщина выравнивающих прокладок
Схема д	$R_2^{(0)} = \alpha P; 0 < \alpha < 1$	$R_1^{(0)} = (1 - \alpha)P \frac{b}{a + b};$ $R_2^{(0)} = \alpha P;$ $R_3^{(0)} = (1 - \alpha)P \frac{a}{a + b}$	$\Delta_1 = 0;$ $\Delta_2 = l_1 - l_2 - \left( \frac{R_1^{(0)}}{c_1} - \frac{R_2^{(0)}}{c_2} \right);$ $\Delta_3 = l_1 - l_3 - \left( \frac{R_1^{(0)}}{c_1} - \frac{R_3^{(0)}}{c_3} \right)$
Схема е	$R_{1\zeta}^{(0)} = R_{2\zeta}^{(0)};$ $R_{3\zeta}^{(0)} = R_{4\zeta}^{(0)} = R;$ $R_{5\zeta}^{(0)} = R_{6\zeta}^{(0)} = \alpha R;$ $R_{i\zeta}^{(0)} = R_{i\eta}^{(0)} = 0$ $(i = 1, 2, \dots, 6)$	$R_{1\zeta}^{(0)} = R_{2\zeta}^{(0)} = P \frac{b_2 + \alpha e}{d};$ $R_{3\zeta}^{(0)} = R_{4\zeta}^{(0)} = P \frac{b_1}{d};$ $R_{5\zeta}^{(0)} = R_{6\zeta}^{(0)} = P \frac{\alpha b_1}{d};$ $d = 2[b_1 + b_2 + \alpha(b_1 + e)]$	$\Delta_1 = \Delta_2 = 0;$ $\Delta_3 = \Delta_4 = l_1 - l_3 - \left( \frac{R_{1\zeta}^{(0)}}{c_1} - \frac{R_{3\zeta}^{(0)}}{c_3} \right);$ $\Delta_{5\zeta} = \Delta_{6\zeta} = \frac{R_{5\zeta}^{(0)}}{c_{5\zeta}}$ <p>(<math>c_{5\zeta}</math> - поперечная жесткость виброизолятора 5)</p>
Схема ж	$R_{1\xi}^{(0)} = R_{2\xi}^{(0)}; R_{3\xi}^{(0)} = R_{4\xi}^{(0)};$ $R_{1\zeta}^{(0)} = R_{2\zeta}^{(0)} = R_{3\zeta}^{(0)} = R_{4\zeta}^{(0)};$ $R_{1\eta}^{(0)} = R_{2\eta}^{(0)} =$ $= R_{3\eta}^{(0)} = R_{4\eta}^{(0)} = 0$	$R_{1\zeta}^{(0)} = R_{2\zeta}^{(0)} = R_{3\zeta}^{(0)} =$ $= R_{4\zeta}^{(0)} = \frac{P}{4};$ $R_{1\xi}^{(0)} = R_{2\xi}^{(0)} = \frac{Ph}{4b};$ $R_{3\xi}^{(0)} = R_{4\xi}^{(0)} = -\frac{Ph}{4b}$	$\Delta_1 = \Delta_2 = 0;$ $\Delta_3 = \Delta_4 = \frac{Ph}{2bc_3}$

Продолжение табл. 6.8.1

Расположение точек крепления	Дополнительные условия распределения нагрузки	Расчетные статические реакции	Толщина выравнивающих прокладок
Схема з	$R_{1*}^{(0)} = R_{2*}^{(0)} =$ $= R_{3*}^{(0)} = R_{4*}^{(0)};$ $R_1^{(0)} = R_2^{(0)} =$ $= R_3^{(0)} = R_4^{(0)}$	$R_{1*}^{(0)} = R_{2*}^{(0)} =$ $= R_{3*}^{(0)} = R_{4*}^{(0)} = \frac{P}{4} \sin \beta;$ $R_1^{(0)} = R_2^{(0)} =$ $= R_3^{(0)} = R_4^{(0)} = \frac{P}{4} \cos \beta$	$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$

В табл. 6.8.1 приведены типовые схемы подвесов с различным расположением точек крепления виброизоляторов и дополнительными условиями распределения нагрузки. В качестве статической нагрузки принят вес подвешенного тела, приложенный в центре тяжести  $S$ . Приведены расчетные значения статических реакций и толщины выравнивающих прокладок, обеспечивающих отсутствие перекосов.

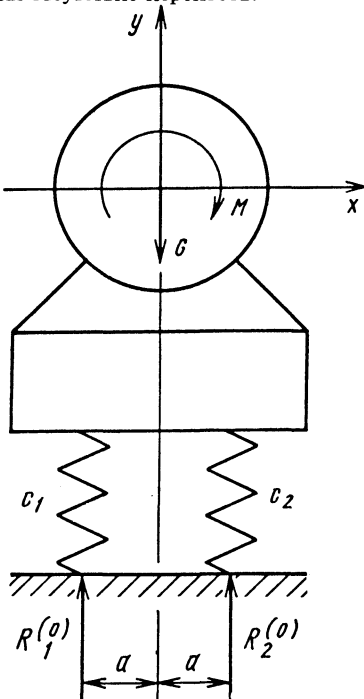


Рис. 6.8.2. Модель виброизолированного электродвигателя

**Пример 1.** Уравнения статики электродвигателя, установленного на виброизоляторах по схеме, представленной на рис. 6.8.2, имеют вид

$$R_1^{(0)} + R_2^{(0)} - G = 0; R_1^{(0)} a + M - R_2^{(0)} a = 0,$$

где  $G$  - вес двигателя;  $M$  - реактивный момент статора в рабочем режиме.

Требования к подвесу сформулированы в виде

$$a_1 = a_2 = a; c_1 = c_2 = c;$$

$$R_1^{(0)} > 0; R_2^{(0)} > 0; h_1 = h_2;$$

последнее из этих равенств выражает условие отсутствия перекоса в рабочем режиме.

Задача статически определима. Из уравнений статики следует

$$R_1^{(0)} = 1/2(G - M/a); R_2^{(0)} = 1/2(G + M/a).$$

Требование  $R_1^{(0)} > 0, R_2^{(0)} > 0$  выполняется при условии  $a > M/G$ . При этом возникает перекося на угол  $\psi = M/2a^2c$ , который может быть устранен с помощью прокладки под виброизолятор ( $c_2$ ) толщиной  $\Delta_2 = M/ac$ .

**Пример 2.** В уравнения статики машины, виброизолированной по схеме табл. 6.8.1,

$$R_1^{(0)} + R_2^{(0)} + R_3^{(0)} + R_4^{(0)} - G = 0;$$

$$-R_1^{(0)} b_1 - R_2^{(0)} b_1 + R_3^{(0)} b_2 + R_4^{(0)} b_2 = 0;$$

$$-R_1^{(0)} a_1 + R_2^{(0)} a_1 + R_3^{(0)} a_2 - R_4^{(0)} a_2 = 0$$



входят четыре неизвестные реакции. Подвес статически неопределим.

В качестве дополнительного условия распределения статической нагрузки примем требование  $R_1^{(0)} = R_2^{(0)}$ , не противоречащее уравнениям статики.

Расчетные статические нагрузки всех четырех виброизоляторов будут определяться формулами

$$R_1^{(0)} = R_2^{(0)} = \frac{b_2}{2(b_1 + b_2)} G;$$

$$R_3^{(0)} = R_4^{(0)} = \frac{b_1}{2(b_1 + b_2)} G.$$

Для исключения перекоса под виброизоляторы требуются прокладки толщиной

$$\Delta_1 = \Delta_2 = R_1^{(0)} / c_1 - R_3^{(0)} / c_3 + l_3 - l_1.$$

В частности, при использовании виброизоляторов одного типоразмера

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \frac{G(b_2 - b_1)}{2c(b_1 + b_2)}.$$

#### 6.8.4. КОЛЕБАНИЯ МАШИНЫ НА ВИБРОИЗОЛЯТОРАХ

Динамический расчет виброизолированной машины обычно проводят при следующих предположениях:

- 1) машину считают абсолютно твердым телом;
- 2) каждый виброизолятор представляют со-

вокупностью трех взаимно ортогональных упруговязких безынерционных элементов, работающих на растяжение-сжатие. При этом реакцию  $R_j$   $j$ -го элемента представляют в виде

$R_j = c_j \delta_j + b_j \dot{\delta}_j$ , где  $\delta_j$  - его деформация;  $\dot{\delta}_j$  - скорость деформации;  $c_j, b_j$  - коэффициенты

динамической жесткости и демпфирования;  $j=1, 2, \dots, 3N$ ;  $N$  - число виброизоляторов подвеса;

3) колебания системы малы.

Цель расчета - вычисление собственных частот системы и амплитуд вынужденных колебаний отдельных точек машины и реакций виброизоляторов.

Если в качестве обобщенных координат взять малые перемещения  $q_1 = x_C, q_2 = y_C, q_3 = z_C$  центра масс  $C$  машины и ее малые углы поворота  $q_4 = \psi, q_5 = \theta, q_6 = \phi$  вокруг главных центральных осей инерции  $C\Xi, C\eta, CZ$ , то дифференциальное уравнение собственных колебаний можно будет записать в виде

$$A\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (6.8.6)$$

где  $\mathbf{A} = \text{diag}\{a_{jj}\} = \text{diag}\{m, m, m, I_\xi, I_\eta, I_z\}$  - диагональная матрица инерции;  $\mathbf{C} = \{c_{ik}\}$  - симметричная матрица жесткости подвеса ( $i, k=1, 2, \dots, 6$ ). Значения  $c_{ik}$  подсчитывают по формулам, указанным ниже,  $\mathbf{q} = \{q_j\}$  - вектор обобщенных координат.

Разыскивая частное решение (6.8.6) в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}e^{i\omega_0 t},$$

т.е. предполагая, что каждая из обобщенных координат изменяется по гармоническому закону с частотой  $\omega_0$ , приходим к частотному уравнению

$$\Delta(\omega_0^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - m\omega_0^2 & c_{21} & c_{31} & c_{41} & c_{51} & c_{61} \\ c_{12} & c_{22} - m\omega_0^2 & c_{32} & c_{42} & c_{52} & c_{62} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} - m\omega_0^2 & c_{43} & c_{53} & c_{63} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} - I_\xi\omega_0^2 & c_{54} & c_{64} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} - I_\eta\omega_0^2 & c_{65} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} - I_z\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0.$$

В формуле (6.8.7)

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \sum c_j \alpha_j^2; \\
 c_{22} &= \sum c_j \beta_j^2; \\
 c_{33} &= \sum c_j \gamma_j^2; \\
 c_{44} &= \sum c_j (\eta_j^2 \gamma_j^2 + \zeta_j^2 \beta_j^2); \\
 c_{55} &= \sum c_j (\zeta_j^2 \alpha_j^2 + \xi_j^2 \gamma_j^2); \\
 c_{66} &= \sum c_j (\xi_j^2 \beta_j^2 + \eta_j^2 \alpha_j^2); \\
 c_{12} &= \sum c_j \alpha_j \beta_j; \\
 c_{13} &= \sum c_j \gamma_j \alpha_j; \\
 c_{23} &= \sum c_j \beta_j \gamma_j; \\
 c_{14} &= \sum c_j \alpha_j (\eta_j \gamma_j - \zeta_j \beta_j); \\
 c_{24} &= \sum c_j \beta_j (\eta_j \gamma_j - \zeta_j \beta_j); \\
 c_{34} &= \sum c_j \gamma_j (\eta_j \gamma_j - \zeta_j \beta_j); \\
 c_{15} &= \sum c_j \alpha_j (\zeta_j \alpha_j - \xi_j \gamma_j); \\
 c_{25} &= \sum c_j \beta_j (\zeta_j \alpha_j - \xi_j \gamma_j); \\
 c_{35} &= \sum c_j \gamma_j (\zeta_j \alpha_j - \xi_j \gamma_j); \\
 c_{16} &= \sum c_j \alpha_j (\xi_j \beta_j - \eta_j \alpha_j); \\
 c_{26} &= \sum c_j \beta_j (\xi_j \beta_j - \eta_j \alpha_j); \\
 c_{36} &= \sum c_j \gamma_j (\xi_j \beta_j - \eta_j \alpha_j); \\
 c_{45} &= \sum c_j (\eta_j \gamma_j - \zeta_j \beta_j) (\zeta_j \alpha_j - \xi_j \gamma_j); \\
 c_{46} &= \sum c_j (\xi_j \beta_j - \eta_j \alpha_j) (\eta_j \gamma_j - \zeta_j \beta_j); \\
 c_{56} &= \sum c_j (\zeta_j \alpha_j - \xi_j \gamma_j) (\xi_j \beta_j - \eta_j \alpha_j).
 \end{aligned}$$

(6.8.8)

В формулах (6.8.3) суммирование по  $j$  осуществляется от  $j=1$  до  $j=3N$ . В случае однонаправленного подвеса выражения для коэффициентов  $c_{ik}$  упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \sum c_{jx}; \\
 c_{22} &= \sum c_{jy}; \\
 c_{33} &= \sum c_{jz}; \\
 c_{44} &= \sum (c_{jx} \eta_j^2 + c_{jy} \zeta_j^2); \\
 c_{55} &= \sum (c_{jx} \zeta_j^2 + c_{jz} \xi_j^2); \\
 c_{66} &= \sum (c_{jy} \xi_j^2 + c_{jz} \eta_j^2); \\
 c_{24} &= -\sum c_{jy} \xi_j; \\
 c_{34} &= \sum c_{jz} \eta_j; \\
 c_{15} &= \sum c_{jx} \xi_j; \\
 c_{35} &= -\sum c_{jz} \xi_j; \\
 c_{16} &= -\sum c_{jx} \eta_j; \\
 c_{26} &= \sum c_{jy} \xi_j; \\
 c_{45} &= -\sum c_{jz} \xi_j \eta_j; \\
 c_{46} &= -\sum c_{jy} \xi_j \xi_j; \\
 c_{56} &= -\sum c_{jx} \eta_j \zeta_j; \\
 c_{12} &= c_{13} = c_{14} = c_{23} = c_{25} = c_{36} = 0.
 \end{aligned}$$

(6.8.9)

Здесь  $c_{jx}$ ,  $c_{jy}$ ,  $c_{jz}$  - главные жесткости  $j$ -го виброизолятора в направлении неподвижных осей  $OXYZ$ , совпадающих с осями  $C\Xi\Omega Z$  в положении равновесия; поэтому суммирование в (6.8.9) проводится по  $j$  от  $j=1$  до  $j=N$ .

В общем случае уравнение (6.8.6) оказывается полным уравнением шестой степени относительно  $\omega_0^2$ . Корни  $\omega_{0i}^2$  этого уравнения положительны, их вычисляют методами, изложенными в курсах теории колебаний (см., например

[4]). Однако в частных случаях левая часть (6.7.6) может распадаться на произведение нескольких определителей меньшего порядка, что соответствует разделению собственных колебаний на независимые группы по нескольким связанным координатам. Условием подобного разделения служит обращение в ноль тех или иных недиагональных элементов  $c_{ik}$  частотного определителя, что может иметь место вследствие симметричности расположения виброизоляторов, реализации дополнительных условий распределения статической нагрузки, а также и по другим причинам. Необходимые условия разделения колебаний на одно-, двух- и трехсвязные приведены ниже:

$$\text{при } [q_k], \quad (k = 1, 2, \dots, 6), \\ c_{kr} = 0 \quad (r \neq k);$$

$$\text{при } [q_k, q_l], \quad (k, l = 1, 2, \dots, 6), \\ c_{kr} = 0; \\ c_{lr} = 0; \quad (r \neq k, r \neq l);$$

$$\text{при } [q_k, q_l, q_n], \quad (k, l, n = 1, 2, \dots, 6), \\ c_{kr} = 0; \\ c_{lr} = 0; \quad (r \neq k, r \neq l, r \neq n). \\ c_{nr} = 0.$$

Условия полного или частичного разделения колебаний машины на однонаправленном подвесе приведены в табл. 6.8.2.

6.8.2. Условия разделения колебаний

Плоскости симметрии системы	Группы разделяющихся обобщенных координат	Коэффициент матрицы жесткости								
		$c_{15}$	$c_{16}$	$c_{24}$	$c_{26}$	$c_{34}$	$c_{35}$	$c_{45}$	$c_{56}$	$c_{46}$
$XOY$	$[x_C, y_C, \varphi] [z_C, \psi, \theta]$	0	+	0	+	+	+	+	0	0
$YOZ$	$[y_C, \psi, z_C] [x_C, \theta, \varphi]$	+	+	+	0	+	0	0	+	0
$ZOX$	$[x_C, \theta, z_C] [y_C, \psi, \varphi]$	+	0	+	+	0	+	0	0	+
$XOY, YOZ$	$[y_C], [\theta], [x_C, \varphi], [z_C, \psi]$	0	+	0	0	+	0	0	0	0
$YOZ, ZOX$	$[z_C], [\varphi], [x_C, \theta], [y_C, \psi]$	+	0	+	0	0	0	0	0	0
$XOY, ZOX$	$[x_C], [\psi], [y_C, \varphi], [z_C, \theta]$	0	0	0	+	0	+	0	0	0
$XOY, YOZ, ZOX$	$[x_C], [y_C], [z_C], [\psi], [\theta], [\varphi]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Принятые обозначения:  $0 - c_{ij} = 0$ ;  $+$  -  $c_{ij} \neq 0$ .

В случае вынужденных колебаний, вызванных внешним воздействием гармонического типа, дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{F}e^{i\omega t}, \quad (6.8.10)$$

где  $\mathbf{B} = \{b_{ik}\}$ ;  $ik = 1, 2, \dots, 6$  - симметричная матрица демпфирования, элементы которой  $b_{ik}$  подсчитывают по формулам, аналогичным (6.8.8), с заменой  $c_j$  на  $b_j$ ;

$\mathbf{F} = \{F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z\}$  - вектор обобщенных сил, причем  $F_x, F_y, F_z$  - проекции главного вектора внешних сил на оси  $OXYZ$ ;  $M_x, M_y, M_z$  - проекции главного момента этих сил относительно упомянутых осей.

Частное решение уравнения (6.8.10), описывающее вынужденные колебания машины,

задается в виде  $\mathbf{q} = \mathbf{A}e^{i\omega t}$ , где  $\mathbf{A} = \{A_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) - вектор комплексных амплитуд  $A_x, A_y, A_z, A_\psi, A_\theta, A_\varphi$  колебаний по координатам  $x_C, y_C, z_C, \psi, \theta, \varphi$ . Подстановка этого решения в (6.8.10) приводит к системе линейных уравнений:

$$\begin{aligned} & (c_{11} + i\omega b_{11} - m\omega^2)A_x + (c_{15} + i\omega b_{15})A_\theta + \\ & + (c_{16} + i\omega b_{16})A_\varphi = F_x; \\ & (c_{22} + i\omega b_{22} - m\omega^2)A_y + (c_{24} + i\omega b_{24})A_\psi + \\ & + (c_{26} + i\omega b_{26})A_\varphi = F_y; \\ & (c_{33} + i\omega b_{33} - m\omega^2)A_z + (c_{34} + i\omega b_{34})A_\psi + \\ & + (c_{35} + i\omega b_{35})A_\theta = F_z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &(c_{42} + i\omega b_{42})A_y + (c_{43} + i\omega b_{43})A_z + \\
 &+ (c_{44} + i\omega b_{44} - I_\xi \omega^2)A_\psi + (c_{45} + i\omega b_{45})A_\theta + \\
 &+ (c_{46} + i\omega b_{46})A_\phi = M_x; \\
 &(c_{51} + i\omega b_{51})A_x + (c_{53} + i\omega b_{53})A_z + \\
 &+ (c_{54} + i\omega b_{54})A_\psi + (c_{55} + i\omega b_{55} - I_y \omega^2)A_\theta + \\
 &+ (c_{56} + i\omega b_{56})A_\phi = M_y; \\
 &(c_{61} + i\omega b_{61})A_x + (c_{62} + i\omega b_{62})A_y + \\
 &+ (c_{64} + i\omega b_{64})A_\psi + (c_{65} + i\omega b_{65})A_\theta + \\
 &+ (c_{66} + i\omega b_{66} - I_\zeta \omega^2)A_\phi = M_z.
 \end{aligned} \tag{6.8.11}$$

Решение системы (6.8.11) можно записать с помощью формулы Крамера

$$A_j = \frac{\Delta_j(i\omega)}{\Delta(i\omega)}, \tag{6.8.12}$$

где  $\Delta(i\omega)$  - определитель системы (6.8.11);  $\Delta_j(i\omega)$  - определитель, полученный из  $\Delta(i\omega)$  заменой  $j$ -го столбца столбцом свободных членов  $F = \{F_k\}$ .

В случае дорезонансных (зарезонансных) колебаний, когда частота вынуждающих сил в  $\sqrt{2}$  раза меньше (больше) наименьшей (наибольшей) из собственных частот, влиянием сопротивления можно пренебречь, т.е. положить в (6.8.11)  $b_{ik} = 0$  ( $i, k = 1, 2, \dots, 6$ ). Наоборот, при колебаниях вблизи резонанса амплитуды вынужденных колебаний оказываются существенно зависящими от уровня демпфирования.

Демпфирование является причиной связности вынужденных колебаний даже в тех случаях, когда для соответствующих собственных колебаний условия разделения выполнены. Исключение составляет ситуация, когда для каждого из элементарных виброизоляторов сохраняется одно и то же отношение коэффициента жесткости к коэффициенту демпфирования; этот частный случай реализуется для виброизоляторов, внутреннее трение в материале которых описывается гипотезой Е. С. Сорокина [79].

При найденных  $A_k$  комплексные амплитуды  $U_j$  и  $R_j$  деформации и реакции  $j$ -го виброизолятора вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 U_j = &\alpha_j(A_x + A_0 \zeta_j - A_\psi \eta_j) + \\
 &+ \beta_j(A_y + A_\phi \xi_j - A_\psi \eta_j) + \\
 &+ \gamma_j(A_z + A_\psi \eta_j - A_0 \xi_j);
 \end{aligned} \tag{6.8.13}$$

$$R_j = (c_j + i\omega b_j)U_j. \tag{6.8.14}$$

**Пример 3.** Вычислим комплексные амплитуды  $A_k$  и  $A_l$  при двухсвязных колебаниях по координатам  $q_k$  и  $q_l$ .

Вынужденные колебания по координатам  $q_k$  и  $q_l$  будут независимыми от колебаний по остальным координатам, если независимы соответствующие собственные колебания и если, кроме того, выполняются условия  $b_{kr} = b_{lr} = 0$  ( $r \neq k, r \neq l; r, k, l = 1, 2, \dots, 6$ ).

При этом

$$\begin{aligned}
 A_k = &\left[ (c_{ll} - a_{ll} \omega^2 + i\omega b_{ll}) a_{kk} F_k - \right. \\
 &\left. - (c_{kl} + i\omega b_{kl}) a_{ll} F_l \right] \Delta^{-1}; \\
 A_l = &\left[ (c_{kk} - a_{kk} \omega^2 + i\omega b_{kk}) a_{ll} F_l - \right. \\
 &\left. - (c_{kl} + i\omega b_{kl}) a_{kk} F_k \right] \Delta^{-1}; \\
 \Delta = &(c_{kk} - a_{kk} \omega^2 + i\omega b_{kk}) (c_{ll} - a_{ll} \omega^2 + i\omega b_{ll}) - \\
 &- (c_{kl} + i\omega b_{kl})^2.
 \end{aligned}$$

### 6.8.5. МЕТОДЫ ЗВУКОИЗОЛЯЦИИ МАШИН

Виброактивная машина возбуждает, как правило, достаточно широкий спектр вибраций, захватывающий, в частности, и звуковой диапазон частот; вибрации звуковых частот называют шумом или звуком.

Различают два типа такого рода вибраций: структурный шумоволновой процесс, распространяющийся по конструкциям, непосредственно связанным с источником вибраций, - валопроводам, трубопроводам, фундаменту, и воздушный шум, обусловленный излучением колебательной энергии вибрирующих частей машины или связанных с нею конструкций в окружающую их воздушную среду; воздушный шум может иметь также и аэродинамическое происхождение и порождаться турбулентным характером течения воздушного потока на всасывающих или в нагнетательных и выхлопных трактах газотурбинных установок, систем охлаж-

дения и вентиляции, при работе компрессоров, насосов и других механизмов.

Совокупность мер, направленных на снижение шума машин или уровней шума в машинных залах, отсеках и других помещениях, называют звукоизоляцией.

Методы борьбы с шумом - те же, что и в задачах виброизоляции: это помимо борьбы с шумом в источнике звукоизоляция и звукопоглощение.

Мероприятия по звукоизоляции машины в части снижения структурного шума совпадают с мероприятиями по ее виброизоляции, причем наибольший эффект наблюдается при использовании резинометаллических виброизоляторов, резиновый массив которых хорошо поглощает звуковую вибрацию.

Наиболее эффективным методом звукоизоляции машины служит применение звукоизолирующих кожухов (оболочек), окружающих машину полностью или частично. Эффективность звукоизолирующих конструкций оценивают коэффициентом проницаемости  $\tau$  (отношение звуковой энергии за и перед конструкцией); величину  $\tau = \tau^{-1}$  называют звукоизолирующей способностью конструкции. В акустических расчетах шумности помещений используют также выраженный в децибелах коэффициент звукоизоляции  $R = 10 \lg \tau$  [80].

Эффективность звукоизоляции может быть существенно повышена применением звукопоглощающих покрытий: такие покрытия демпфируют вибрации элементов поверхности машин и связанных с ним конструкций и одновременно обладают выраженной поглощающей способностью по отношению к падающим звуковым волнам воздушного шума; тем самым звукопоглощающие покрытия снижают уровни как структурного, так и воздушного шума.

Слой толщиной  $s$  звукопоглощающего материала с коэффициентом затухания  $\beta$ , нанесенный на звукоизолирующую конструкцию, повышает коэффициент ее звукоизоляции на величину  $\Delta R$ , где

$$\Delta R = 8,7 \lg \beta s,$$

если только  $\beta s > 1$  (размерность  $\beta \left[ L^{-1} \right]$ ); при  $\beta s < 1$  покрытие не дает дополнительного звукоизолирующего эффекта.

Эффективность звукоизолирующего кожуха, образующего замкнутую конструкцию, подсчитывают по приближенной формуле [43]

$$\Delta L = R_k + 10 \lg (S_{\text{ис т}} / S_k),$$

где  $R_k$  - коэффициент звукоизоляции стенки конструкции;  $S_{\text{ис т}}$  - площадь излучающей поверхности машины;  $S_k$  - площадь поверхности конструкции. Для повышения эффективности кожуха его поверхность покрывают звукопоглощающим покрытием - сплошным или перфорированным; особое внимание уделяют при этом

уплотнению отверстий, через которые в подкапотное пространство проходят, например, трубы, кабели.

Для звукоизоляции турбин, компрессоров, двигателей внутреннего сгорания, вентиляторов применяют глушители шума - активные (трубчатые, пластинчатые) или камерные; те и другие могут выполняться с облицовкой их внутренней поверхности звукопоглотителями.

#### 6.8.6. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВИБРОЗАЩИТНЫХ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ ПОДВИЖНЫЕ МАССЫ

Целью виброизоляции (см. п. 6.8.2) является снижение переменной составляющей силового воздействия машины на фундамент по сравнению со случаем, когда виброизоляция не предусмотрена и машина жестко крепится к фундаменту. При более общем взгляде на проблему можно трактовать виброизоляцию как средство целенаправленного изменения структуры и характеристик вибрационного поля модели машина - подвес - фундамент сравнительно со структурой и теми же характеристиками вибрационного поля модели машина - фундамент при неизменном внешнем воздействии. При этом характеристики преобразованного поля будут зависеть от параметров подвеса, например, в случае его безынерционности - от параметров, описывающих его жесткости и диссипативные свойства. Степень этой зависимости можно повысить введением дополнительных подвижных масс в расчетные модели машины, фундамента или самого подвеса. В результате возникают модели двух, трех и т.д. каскадной виброзащиты, виброизоляторов с промежуточной массой или систем с динамическими гасителями (см. п. 6.1.5).

**Пример 4.** Рассмотрим двухмассную модель виброзащитной системы (рис. 6.8.3). Эта модель может описывать самые разнообразные ситуации, например, систему двухкаскадной виброзащиты машины массы  $m$  (рис. 6.8.3, а); виброизолированную нежесткую машину с массами  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 6.8.3, б); виброизолированную машину  $m_1$  на нежестком фундаменте (масса  $m_2$  входит в модель фундамента) (рис. 6.8.3, в); виброзащитную систему с промежуточной массой  $m_2$  в виброизоляторе (рис. 6.8.3, г); модель виброизолированной машины  $m_2$  с динамическим гасителем массы  $m_1$  (если считать силу  $P_0 e^{i\omega t}$  приложенной к массе  $m_2$ ) (рис. 6.8.3, д) и т.д. Проанализируем, в частности, эффект введения промежуточной массы  $m_2$  в недемпфированный виброизолятор жесткости  $c$  с точки зрения изменения амплитуды переменной силы  $R$ , передаваемой на абсолютно-жесткое основание; машина считается абсолютно твердым телом массы  $m_1$ , подверженной воздействию гармонической силы  $P_0 e^{i\omega t}$ . Расчетная схема изображена на рис. 6.8.4.

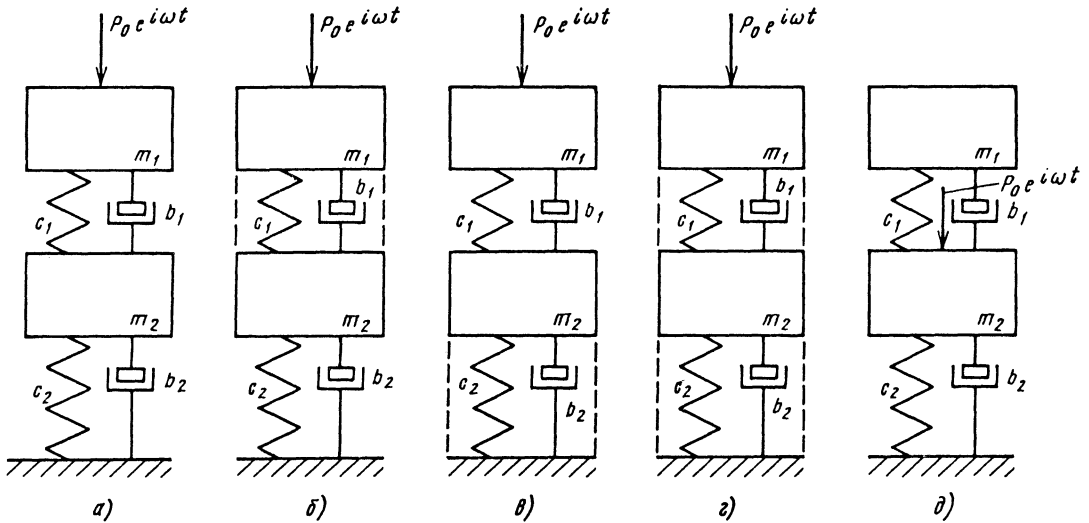


Рис. 6.8.3. Двухмассные модели виброзащитных систем

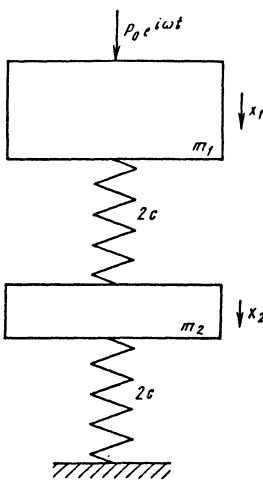


Рис. 6.8.4. Расчетная модель системы виброзащиты с промежуточной массой в виброизоляторе

Обозначая через  $x_1$  и  $x_2$  абсолютные координаты машины и промежуточной массы, запишем уравнения динамики системы в виде

$$m_1 \ddot{x}_1 = P_0 e^{i\omega t} + 2c(x_2 - x_1);$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -2c(x_2 - x_1) - 2cx_2. \quad (6.8.15)$$

Отсюда получим амплитуду  $R$  силы, передаваемой на основание:

$$R = 4c^2 P_0 \left| \left( 2c - m_1 \omega^2 \right) \left( 4c - m_2 \omega^2 \right) - 4c^2 \right|^{-1}. \quad (6.8.16)$$

При  $m_2=0$  амплитуда  $R_0$  этой силы

$$R_0 = P_0 c \left| c - m_1 \omega^2 \right|^{-1}.$$

На частотах

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{c}{m_1} \left[ 1 + \frac{2}{\mu} \mp \sqrt{1 + \frac{4}{\mu}} \right], \quad \left( \mu = \frac{m_2}{m_1} \right),$$

имеет место резонанс ( $R \rightarrow \infty$ ).

$$\text{При } \omega = \omega_*, \text{ где } \omega_*^2 = \frac{c}{m_1} \left( 1 + \frac{2}{\mu} \right),$$

сила  $R$  имеет локальный минимум

$$R_* = 4P_0 \mu^{-1} \left( 1 + 4\mu^{-2} \right).$$

При  $m_2=0$  система имеет единственный резонанс при  $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_1}}$ . Зависимости

$R = R(\omega^2)$  для  $m_2 \neq 0$  и  $m_2 = 0$  представлены на рис. 6.8.5 соответственно сплошными и штриховыми линиями.

## 6.8.3. К расчету эффективности двухмассных систем виброизоляции

Схема	$\alpha_{12}(\omega)$	$\alpha_{22}(\omega)$
	$\alpha_{12}^{(1)} \left( \alpha_{11}^{(2)} - m' \omega^2 \alpha_{12}^{(2)} \right) + \alpha_{12}^{(2)} \alpha_{22}^{(1)}$	$\alpha_{12}^{(1)} \left( \alpha_{21}^{(2)} - m' \omega^2 \alpha_{22}^{(2)} \right) + \alpha_{22}^{(2)} \alpha_{22}^{(1)}$
	$\frac{1}{c_1 + i\omega b_1} + \frac{1}{c_2 + i\omega b_2} - \frac{m' \omega^2}{(c_1 + i\omega b_1)(c_2 + i\omega b_2)}$	$1 - \frac{m' \omega^2}{c_1 + i\omega b_1}$
	$\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2 + i\omega b_2} - \frac{m' \omega^2}{c_1(c_2 + i\omega b_2)}$	$1 - \frac{m' \omega^2}{c_1}$
	$\frac{1}{c_1 + i\omega b_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{m' \omega^2}{(c_1 + i\omega b_1)c_2}$	$1 - \frac{m' \omega^2}{c_1 + i\omega b_1}$
	$\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{m' \omega^2}{c_1 c_2}$	$1 - \frac{m' \omega^2}{c_1}$

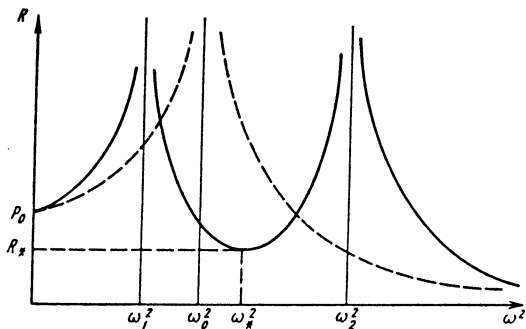


Рис. 6.8.5. Зависимость силы, передаваемой на фундамент, от квадрата частоты возмущения

В табл. 6.8.3 представлены варианты двухмассных моделей виброизолированной машины и соответствующие значения комплексных амплитуд сил, передаваемых на жесткое неподвижное основание, которые вычисляются по формуле

$$R = P_0 \left| \alpha_{22} - m_1 \omega^2 \alpha_{12} \right|^{-1}.$$

## 6.8.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК УПРУГОЙ МАШИНЫ

При изучении свободных колебаний машины на виброизоляторах, выбранных на основе принципа мягкой подвески, первые собственные частоты системы мало зависят от упругих

свойств самой машины, так что последняя могла рассматриваться как твердое тело.

В задаче о вынужденных колебаниях может оказаться, что частоты вынужденных колебаний близки к собственным частотам виброизолированной жесткой машины, и тогда приходится вводить дополнительные степени свободы.

Пусть при заданном вибрационном воздействии частоты  $\omega$  расчетная модель системы имеет  $n$  степеней свободы, причем превышает число степеней свободы виброизолированной машины, рассматриваемой как твердое тело. Обозначим через  $\mathbf{q}$   $n$ -мерный вектор обобщенных координат, через  $\mathbf{F}$  -  $s$ -мерный вектор возмущающих сил ( $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 e^{i\omega t}$ ),  $\mathbf{F}_0$  -  $s$ -мерный

вектор комплексных амплитуд,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  -  $n \times n$ -матрицы инерции, демпфирования и упругости системы. Тогда в случае малых колебаний приходим к уравнению динамики системы

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{Q}_0 e^{i\omega t}, \quad (6.8.17)$$

где  $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{G}\mathbf{F}_0$  -  $n$ -мерный вектор обобщенных возмущающих сил;  $\mathbf{G}$  - постоянная  $n \times s$ -матрица с элементами, зависящими от точек приложения этих сил и ориентировки линий их действия. Для вычисления матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  необходимо задать схему машины и упругие, и демпфирующие характеристики как машины, так и виброизоляторов подвеса.

Непосредственно из (6.8.17) найдем вектор комплексных амплитуд  $\mathbf{q}_0$  обобщенных координат

$$\mathbf{q}_0 = \left( \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A} + i\omega \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{Q}_0; \quad (6.8.18)$$

здесь  $\left( \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A} + i\omega \mathbf{B} \right)^{-1}$  -  $n \times n$ -матрица обобщенных динамических податливостей системы.

С помощью (6.8.18) можно найти связь между  $r$ -мерным вектором  $\mathbf{u}$  комплексных амплитуд проекций перемещений фиксированных точек машины на некоторые заданные направления и вектором проекций возмущающих сил на другие фиксированные направления

$$\mathbf{u} = \mathbf{D} \left( \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A} + i\omega \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{G}\mathbf{F}_0, \quad (6.8.19)$$

где  $\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{q}_0$ ;  $\mathbf{D}$  -  $n \times n$ -матрица с коэффициентами, зависящими от положений упомянутых точек и направлений осей, на которые проектируются эти перемещения. Матрицу

$\mathbf{D} \left( \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A} + i\omega \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{G}$  называют матрицей динамических податливостей системы между точками приложения сил и точками измерения перемещений (с учетом направлений их проектирования).

Если  $\mathbf{u}$  - столбец перемещений точек крепления виброизоляторов к машине в проекциях на оси элементарных виброизоляторов, то мож-

но получить  $3N$ -мерный вектор  $\mathbf{R}_0$  комплексных амплитуд реакций виброизоляторов, причем для  $j$ -го элемента с жесткостью  $c_j$  и коэффициентом демпфирования  $b_j$  будем иметь

$$R_j = (c_j + i\omega b_j) u_j.$$

При этом предполагается, что машина через виброизоляторы опирается на жесткое неподвижное основание. В реальных случаях, когда построение расчетной модели машины может вызвать затруднения, т.е. когда определение матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  расчетным путем невозможно, элементы  $e_{ik}$  ( $i=1, 2, \dots, r$ ;  $k=1, 2, \dots, s$ ) матрицы  $\mathbf{D} \left( \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A} + i\omega \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{G}$  могут быть определены экспериментально.

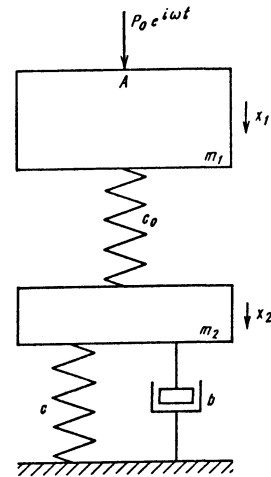


Рис. 6.8.6. Расчетная модель двухмассной системы с упругодемпфированным виброизолятором

**Пример 5.** Вычислим динамическую податливость в точке  $A$  упругой машины с двухмассной моделью, если она установлена на жесткое основание через упругодемпфированный виброизолятор (рис. 6.8.6).

Уравнения динамики системы имеют вид

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= P + c_0(x_2 - x_1); \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -c_0(x_2 - x_1) - cx_2 - b\dot{x}_2. \end{aligned}$$

При  $P = P_0 e^{i\omega t}$  получаем систему уравнений для комплексных амплитуд  $A_1$  и  $A_2$  смещений масс  $m_1$  и  $m_2$ :

$$(c_0 - m_1 \omega^2) A_1 - c_0 A_2 = P_0;$$

$$-c_0 A_1 + (c + c_0 - m_2 \omega^2 + i\omega b) A_2 = 0.$$

Решая эту систему, получим выражение для комплексной динамической податливости  $e_{AA}$  точки приложения силовой нагрузки



$$e_{AA} = \frac{A_1}{P_0} = \frac{c + c_0 - m_2 \omega^2 + i\omega b}{(c_0 - m_1 \omega^2) \times \sqrt{(c + c_0 - m_2 \omega^2 + i\omega b) - c_0^2}}$$

Выражения динамических податливостей и динамических жесткостей некоторых одномерных систем приведены в [23].

### 6.8.8. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ

Под эффективностью подвеса понимают специальным образом вводимую меру сравнения вибрационных полей виброизолированной и невиброизолированной машины. Такая мера может относиться к самым различным характеристикам вибрационного поля машины - виброперемещениям, виброскоростям, виброускорениям, вибронпряжениям. В частности, в задачах виброизоляции машин речь может идти о силовом воздействии на фундамент до и после введения виброизоляции.

Рассмотрим простейшую одномассную систему виброизоляции, когда на машину массы  $m$  действует гармоническая сила  $P_0 e^{i\omega t}$  частоты  $\omega$ . В отсутствие виброизоляции эта сила полностью передается на фундамент; при установке машины на виброизолятор с коэффициентом жесткости  $c$  и демпфирования  $b$  комплексная амплитуда воздействия на фундамент

$$R_0 = P_0 (c + i\omega b) \left[ (c - m\omega^2) + i\omega b \right]^{-1}. \quad (6.8.20)$$

В качестве меры эффективности  $k_R$  виброизоляции возьмем отношение модулей сил, передаваемых на фундамент после и до виброизоляции:

$$k_R = \frac{|R_0|}{P_0} = \frac{\sqrt{1 + 4v^2 z^2}}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4v^2 z^2}}, \quad (6.8.21)$$

где  $z = \omega \sqrt{mc}^{-1}$  - коэффициент расстройки, т.е. отношение частоты возмущающей силы к собственной частоте виброизолированной машины;  $v = b(2m\omega)^{-1}$  - безразмерный коэффициент демпфирования. Зависимость  $k_R$  от  $z$  при различных значениях  $v$  показана на рис. 6.8.7. Условием эффективности виброизоляции является  $k_R < 1$ .

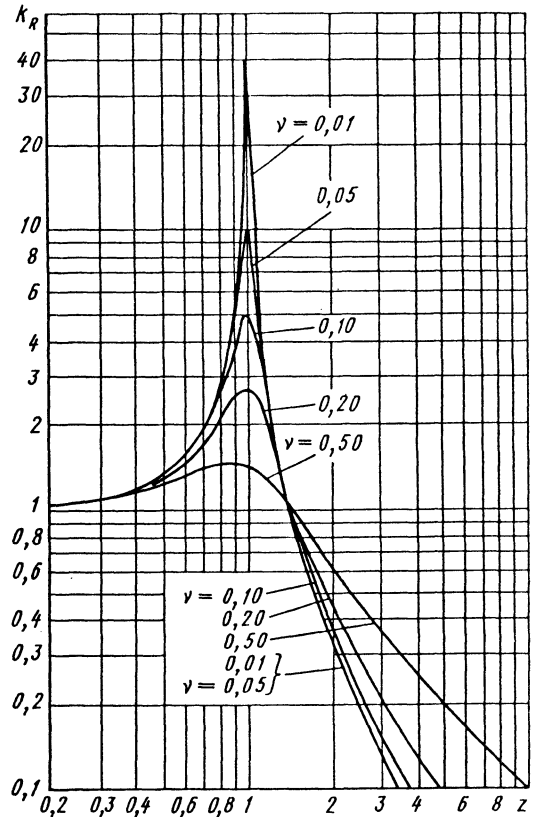


Рис. 6.8.7. Зависимость критерия эффективности виброизоляции  $k_R$  от коэффициента расстройки

### 6.8.9. РАСЧЕТ ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМ

Расчет одномерных систем виброизоляции удобно выполнять с помощью метода матриц переноса. При использовании этого метода одномерную систему делят нормальными к ее оси сечениями на  $n$  частей, которым присваивают номера от 1 до  $n+1$ . Вибрационное состояние  $j$ -го участка характеризуется абсолютными перемещениями  $x_j$  и  $x_{j+1}$  его граничных сечений и силами  $P_j$  и  $P_{j+1}$  в этих сечениях. Положительные направления  $x_j$ ,  $x_{j+1}$ ,  $P_j$  и  $P_{j+1}$  изображены на рис. 6.8.8.

Вследствие нелинейности системы величины  $x_j$ ,  $x_{j+1}$ ,  $P_j$  и  $P_{j+1}$  связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= \alpha_{11}^{(j)} x_j + \alpha_{12}^{(j)} P_j; \\ P_{j+1} &= \alpha_{21}^{(j)} x_j + \alpha_{22}^{(j)} P_j, \end{aligned} \quad (6.8.22)$$

которые можно представить в матричной форме

$$\xi_{j+1} = \mathbf{S}^{(j)} \xi_j,$$

где

$$\xi_j = \begin{pmatrix} x_j \\ P_j \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S}^{(j)} = \mathbf{S}_{j,j+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(j)} & \alpha_{12}^{(j)} \\ \alpha_{21}^{(j)} & \alpha_{22}^{(j)} \end{pmatrix}. \quad (6.8.23)$$

извлечению, выполненному в порядке, противоположном следованию участков:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(n)} \mathbf{S}^{(n-1)} \dots \mathbf{S}^{(2)} \mathbf{S}^{(1)}. \quad (6.8.24)$$

Матрицу  $\mathbf{S}^{(j)}$  называют матрицей переноса участка  $j$  от сечения  $j$  к сечению  $j+1$ . В случае вибрационного процесса с частотой  $\omega$   $x_j, x_{j+1}, P_j, P_{j+1}$  можно считать комплексными амплитудами соответствующих величин; элементы матрицы  $\mathbf{S}^{(j)}$  будут функциями частоты  $\omega$ . Матрицы переноса участков простейшего вида приведены в табл. 6.8.4. Легко проверить, что определители матриц переноса участков равны единице. Матрица переноса  $\mathbf{S}$  участка, образованного последовательным соединением  $n$  участков с матрицами переноса  $\mathbf{S}^{(1)}, \mathbf{S}^{(2)}, \dots, \mathbf{S}^{(n)}$ , равна их про-

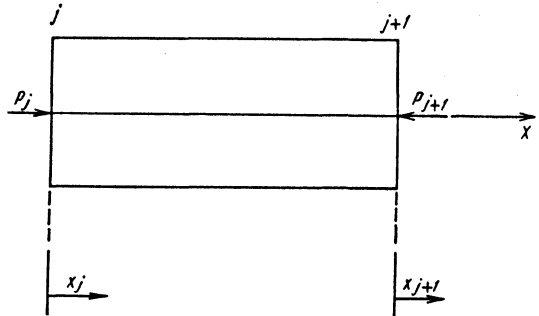


Рис. 6.8.8. Расчетная модель участка одномерной системы виброзащиты

6.8.4. Матрицы переноса элементов виброизолирующих устройств

Участок	Схема участка	Матрица переноса
Жесткая невесомая вставка		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Сосредоточенная масса $m$		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{pmatrix}$
Линейный упругий элемент жесткости $c$		$\begin{pmatrix} 1 & c^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Вязкий демпфер с коэффициентом демпфирования $b$		$\begin{pmatrix} 1 & (i\omega b)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Безынерционный упругодемпфированный виброизолятор		$\begin{pmatrix} 1 & (c + i\omega b)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Если сложный участок составлен из элементов, представленных в табл. 6.8.4, то  $|\mathbf{S}|=1$ . Элементы  $\alpha_{jk}$  матрицы  $\mathbf{S}$  для участка, составленного из  $n$  параллельно соединенных участков, вычисляются по формулам

$$\alpha_{11} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2};$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{\lambda_2};$$

$$\alpha_{21} = \frac{\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2^2}{\lambda_2};$$

$$\alpha_{22} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2},$$

где

$$\lambda_1 = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_{11}^k}{\alpha_{12}^k};$$

$$\lambda_2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_{12}^k};$$

$$\lambda_3 = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_{22}^k}{\alpha_{12}^k}.$$

**Пример 6.** Составим матрицу переноса двух последовательно соединенных виброизоляторов с коэффициентами жесткости  $c_1$  и  $c_2$  и коэффициентами демпфирования  $b_1$  и  $b_2$ . Имеем согласно (6.8.24)

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & e_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e_1 + e_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$e_j = (c_j + i\omega b_j)^{-1}, \quad j = 1, 2.$$

Можно показать, что каждый из коэффициентов  $c_3$  и  $b_3$  эквивалентного виброизолятора зависит от всех четырех параметров  $c_1, c_2, b_1, b_2$ , а также от частоты  $\omega$ .

**Пример 7.** Составим матрицу переноса двух параллельно соединенных виброизоляторов, рассмотренных в примере 6.

Имеем для этого случая

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = (c_1 + c_2) + i\omega(b_1 + b_2).$$

Тогда  $\alpha_{11} = 1$ ;  $\alpha_{12} = [(c_1 + c_2) + i\omega(b_1 + b_2)]^{-1}$ ;

$\alpha_{21} = 0$ ;  $\alpha_{22} = 1$ .

Таким образом, при параллельном соединении коэффициенты жесткости и демпфирования эквивалентного виброизолятора представляются суммой соответственно жесткостей и коэффициентов демпфирования соединяемых виброизоляторов.

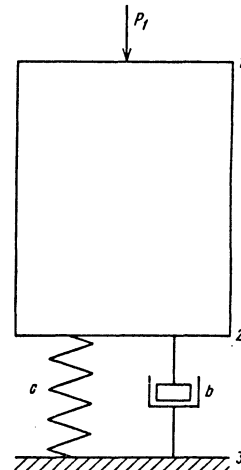


Рис. 6.8.9. Расчетная модель виброизолированной упругой машины

**Пример 8.** Определим силовое воздействие на жесткий фундамент виброизолированной нежесткой машины (рис. 6.8.9).

Пусть  $S_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$  - матрица переноса машины между ее граничными сечениями 1 и 2; матрица переноса  $S_{23}$  виброизолятора известна:  $S_{23} = \begin{pmatrix} 1 & (c + i\omega b)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; матрица переноса

участка 1-3

$$S_{13} = S_{23}S_{12} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{21}(c + i\omega b)^{-1} & \alpha_{12} + \alpha_{22}(c + i\omega b)^{-1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, выражения для комплексных амплитуд смещения  $\xi_3$  сечения 3 и силы  $P_3$  в этом сечении будут

$$\xi_3 = \left[ \alpha_{11} + \alpha_{21}(c + i\omega b)^{-1} \right] \xi_1 + \left[ \alpha_{12} + \alpha_{22}(c + i\omega b)^{-1} \right] P_1; \quad (6.8.25)$$

$$P_3 = \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}P_1. \quad (6.8.26)$$

Вследствие очевидного граничного условия  $\xi_3 = 0$  находим из (6.8.25) связь между  $P_1$  и  $\xi_1$ :

$$\xi_1 = - \frac{\alpha_{12} + \alpha_{22}(c + i\omega b)^{-1}}{\alpha_{11} + \alpha_{21}(c + i\omega b)^{-1}} P_1. \quad (6.8.27)$$

Внося (6.8.27) в (6.8.26), получим комплексную амплитуду искомого воздействия

$$P_3 = \left[ \alpha_{22} - \alpha_{21} \frac{\alpha_{12}(c + i\omega b) + \alpha_{22}}{\alpha_{11}(c + i\omega b) + \alpha_{21}} \right] P_1 = \frac{c + i\omega b}{\alpha_{11}(c + i\omega b) + \alpha_{21}} P_1. \quad (6.8.28)$$

В отсутствие виброизоляции ( $c \rightarrow \infty$ ;  $b \rightarrow \infty$ )

$$\text{значение } P_3 = P_1(\alpha_{11})^{-1}.$$

Критерий эффективности виброизоляции по передаваемой силе

$$k_R = \frac{|P_3|}{|P_{30}|} = \frac{\alpha_{11}(c + i\omega b)}{\alpha_{11}(c + i\omega b) + \alpha_{21}}.$$

Условие эффективности  $k_R < 1$  виброизоляции имеет вид

$$\left| 1 + \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}(c + i\omega b)^{-1} \right| > 1. \quad (6.8.29)$$

Как это следует из (6.8.25) при  $c \rightarrow \infty$  и  $b \rightarrow \infty$ , т.е. при установке машины на

фундамент без виброизоляции, отношение  $\alpha_{21}/\alpha_{11}$  представляет взятую со знаком минус динамическую податливость  $e_{12}(i\omega)$  машины между сечениями 1 и 2, поэтому условие (6.8.29) можно записать в виде

$$\left| 1 - e_{12}(i\omega)(c + i\omega b)^{-1} \right| > 1,$$

где величина  $e_{12}(i\omega)$  может быть определена экспериментально.

### Глава 6.9

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ МАШИН

### 6.9.1. НЕЛИНЕЙНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИБРОИЗОЛИРУЮЩИХ СИСТЕМ

В предыдущей главе виброизолирующие подвесы машин рассматривались как системы с линейными характеристиками. Однако в ряде случаев в системах виброизоляции могут происходить явления, для адекватного описания и исследования которых требуется использование нелинейных моделей. Часто такие нелинейные эффекты проявляются в форме колебаний большой амплитуды, при которых виброизолирующие свойства системы нарушаются.

Нелинейность реальных виброизолирующих систем обуславливается следующими факторами.

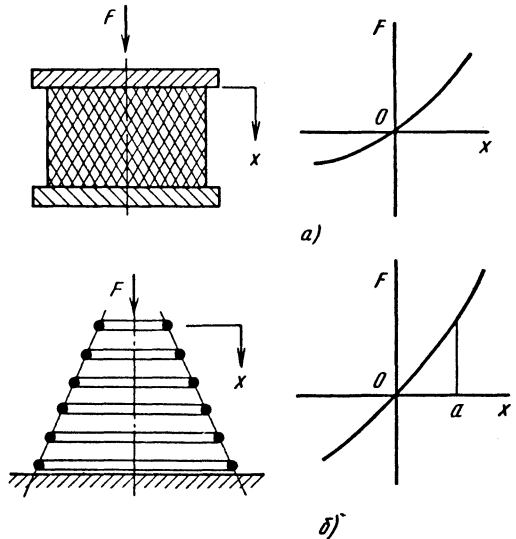


Рис. 6.9.1. Виброизоляторы с нелинейными характеристиками

**Нелинейность упругих характеристик виброизоляторов.** Нелинейность может быть вызвана как свойствами материала, из которого изготовлены упругие элементы, так и их конструктив-

ными особенностями. Нелинейными свойствами обладают, например, упругие элементы, изготовленные из резины и работающие на сжатие или на сдвиг; жесткость таких элементов, как правило, возрастает с увеличением деформации (рис. 6.9.1, а). Нелинейными характеристиками обладают конические пружины, жесткость которых также возрастает с увеличением нагрузки вследствие посадки витков на плоскость (рис. 6.9.1, б). Такие упругие элементы часто используют в опорах машин для обеспечения так называемой "равночастотности": увеличение массы установленной на них машины приводит к увеличению статической деформации, а следовательно, и жесткости опор; при этом отношение жесткости к массе, характеризующее собственную частоту системы, остается приблизительно постоянным.

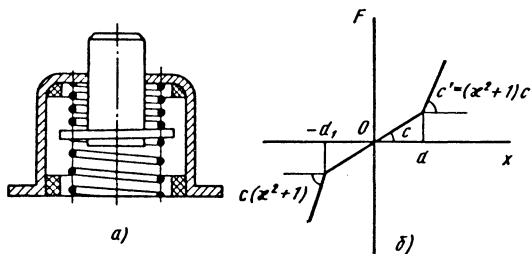


Рис. 6.9.2. Виброизолятор с упругими упорами

**Наличие ограничительных упоров.** Из-за ограниченности размеров виброизолятора ограниченной является и область линейности его упругих элементов. При увеличении деформации происходит соприкосновение подвижного элемента виброизолятора с его корпусом или со специальными ограничительными упругими упорами (рис. 6.9.2, а); при этом упругая характеристика приобретает форму, показанную на рис. 6.9.2, б. Перемещение  $2\Delta = d + d_1$  называют *свободным ходом* виброизолятора. Наличие упругих упоров часто становится причиной возникновения периодических колебаний машины, сопровождающихся соударениями подвижного элемента с упорами. На этих режимах движения, близких по своему характеру к виброударным, условия эффективности виброизоляции нарушаются: более того могут возникать воздействия, существенно превышающие по амплитуде вынуждающую силу.

**Динамическое взаимодействие колебательной системы с двигателем и с вращающимися звеньями механизмов.** Колебания корпуса машины, установленной на виброизолирующих опорах, воздействуют на движение ротора двигателя и других вращающихся звеньев, являющихся источником возмущений, вызывающих эти колебания. При этом машина становится нелинейной системой, а ее колебания на подвесе приобретают автоколебательный характер.

**Нелинейные диссипативные свойства виброизоляторов.** Типичным примером нелинейной диссипативной силы является сухое (Кулоново) трение. Демпферы сухого трения используют в некоторых конструкциях виброизоляторов, приобретающих при этом особые нелинейные свойства.

## 6.9.2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ВИБРОИЗОЛИРОВАННОЙ МАШИНЕ

Простейшая модель машины, установленной на виброизоляторе с нелинейными упругими элементами, показана на рис. 6.9.3. Здесь предполагается, что воздействие, вызывающее колебания, является гармоническим, силовым (рис. 6.9.3, а) или кинематическим (рис. 6.9.3, б). Считая, что диссипативная сила  $H$  пропорциональна скорости деформации упругого элемента  $\dot{x}$ , и отсчитывая деформацию  $x$  от положения статического равновесия, получаем уравнение движения в следующей форме:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + F(x) = G_0 \cos \omega t, \quad (6.9.1)$$

где  $m$  - масса машины;  $F(x)$  - нелинейная упругая характеристика виброизолятора;  $G_0 = Q_0$  - в случае силового и  $G_0 = m\xi_0\omega^2$  - в случае кинематического воздействия.

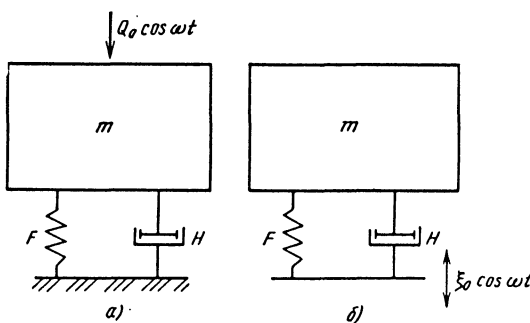


Рис. 6.9.3. Схемы виброзатяжных систем с одной степенью свободы

Обозначив  $b/m = 2n$ ,  $F(x)/m = f(x)$ ,  $G_0/m = g_0$ , приведем уравнение (6.9.1) к виду

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + f(x) = g_0(\omega) \cos \omega t. \quad (6.9.2)$$

Многочисленные исследования показывают, что в системе (6.9.2), как правило, устанавливаются периодические колебания с периодом  $T = 2\pi s/\omega$ , где  $s$  - целое число. При  $s=1$  вынужденные колебания называют основными, а при  $s>1$  - субгармоническими порядка  $s$ .

**Основные вынужденные колебания в линейной системе.** Основные вынужденные колебания обычно оказываются близкими к гармоническим (амплитуды высших гармоник периодического

решения являются малыми) и могут в первом приближении определяться в форме

$$x \approx a_0 + a \cos(\omega t + \varphi), \quad (6.9.3)$$

где  $a_0, a$  и  $\varphi$  - постоянные, определяемые из уравнений [48]

$$\int_0^{2\pi} f(a_0 + a \cos \psi) d\psi = f_0(a_0, a) = 0; \quad (6.9.4)$$

$$a = \frac{g_0(\omega)}{\sqrt{[\lambda^2(a) - \omega^2]^2 + 4n^2 \omega^2}}; \quad (6.9.5)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2n\omega}{\lambda^2(a) - \omega^2}, \quad (6.9.6)$$

где функция  $\lambda(a)$  выражает зависимость свободных колебаний массы  $m$  на упругом элементе с характеристикой  $F(x)$  от амплитуды  $a$ :

$$\lambda^2(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f[a_0(a) + a \cos \psi] \cos \psi d\psi. \quad (6.9.7)$$

Определив зависимость  $a_0(a)$  и подставив ее в (6.9.7), можно построить график зависимости  $a(\lambda)$ , который называют скелетной кривой системы (рис. 6.9.4). Ординаты точек пересечения этой линии с графиком зависимости

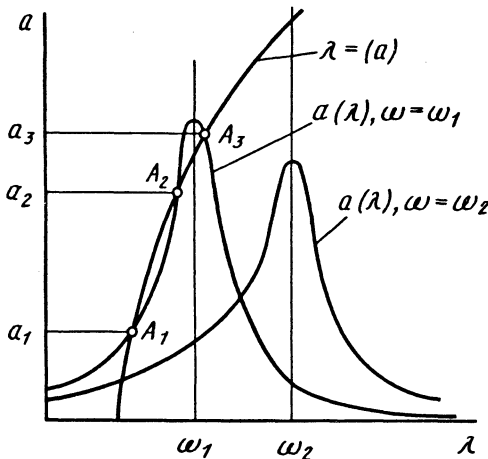


Рис. 6.9.4. Зависимость  $a(\lambda)$

$$a(\lambda) = \frac{g_0(\omega)}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} \quad (6.9.8)$$

определяют значения амплитуд основных вынужденных колебаний, возможных в рассматриваемой системе. Характерной особенностью не-

линейной системы является возможность существования при фиксированной частоте ( $\omega = \omega_1$  на рис. 6.9.4) и амплитуде возмущения нескольких точек пересечения кривых (6.9.7) и (6.9.8), которым соответствуют несколько возможных решений уравнения (6.9.3). Наименьшему значению амплитуды ( $a_1$ ) соответствует решение, при котором обеспечивается выполнение условий виброизоляции, другие решения ( $a_2, a_3$ ) соответствуют резонансным колебаниям большой амплитуды, при которых условия виброизоляции нарушаются. Возникновение в системе того или иного периодического режима зависит от начальных условий, которые в реальной системе носят случайный характер. В результате случайного толчка или удара система может перейти от одного периодического режима к другому. Для эффективной виброизоляции машины должна быть исключена возможность возникновения колебаний большой амплитуды (резонансных режимов) при всех возможных значениях  $\omega$ .

Определив периодическое решение уравнения (6.9.2), можно найти коэффициент виброизоляции  $k_R$ , равный отношению амплитуды силы, приложенной к машине, к амплитуде силы, действующей на основание (в случае защиты основания от динамических воздействий), или отношению амплитуды абсолютного ускорения машины к амплитуде ускорения основания (в случае защиты машины от кинематического воздействия):

$$k_R = \frac{\sqrt{\lambda^2(a) + 4n^2 \omega^2}}{\sqrt{[\lambda^2(a) - \omega^2]^2 + 4n^2 \omega^2}}. \quad (6.9.9)$$

Виброизоляция эффективна, если  $k_R < 1$ , что выполняется при

$$\omega > \sqrt{2} \lambda(a). \quad (6.9.10)$$

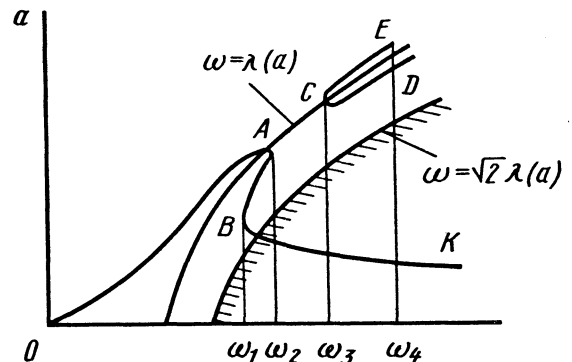


Рис. 6.9.5. Резонансные кривые для нелинейного виброизолятора

Определив значения амплитуды  $a$  из уравнения (6.9.5) при различных значениях  $\omega$ , можно построить резонансную кривую системы  $a(\omega)$ , форма которой зависит от вида функций  $f(x)$  и  $g_0(\omega)$ . Одна из возможных форм этой кривой показана на рис. 6.9.5. Точки  $A, B, C$ , в которых резонансная кривая имеет вертикальную касательную (эти точки близки к точкам пересечения резонансной кривой  $a(\omega)$  со скелетной  $\omega = \lambda(a)$ ), разделяют эту кривую на несколько участков, соответствующих  $\omega < \omega_1$ ;  $\omega_1 \leq \omega < \omega_2$ ;  $\omega_2 \leq \omega < \omega_3$ ;  $\omega \geq \omega_3$ . Как показано в [48], участки  $AB$  и  $CD$  соответствуют неустойчивым, а следовательно, и нереализуемым режимам. На рис. 6.9.5 построена также линия  $\omega = \sqrt{2}\lambda(a)$ . Условия виброизоляции выполняются только при колебаниях, соответствующих точкам резонансной кривой, лежащим правее этой линии.

При  $\omega < \omega_1$  в системе возможен только один режим, при котором условие виброизоляции не выполняется. При  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  в системе возможны два устойчивых периодических режима; один из них соответствует резонансным колебаниям большой амплитуды. При  $\omega_2 \leq \omega < \omega_3$  в системе возможен только один режим, для которого условие виброизоляции выполняется. При  $\omega \geq \omega_3$  вновь возможны два режима, один из которых - резонансный.

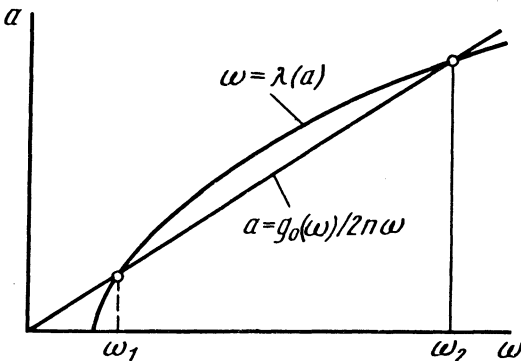


Рис. 6.9.6. К определению формы резонансной кривой

Для проверки отсутствия резонансных режимов в рассматриваемой системе необходимо построить скелетную кривую  $\omega = \lambda(a)$  и определить точки пересечения ее с линией предельных амплитуд

$$a_{\text{нр}} = \frac{g_0(\omega)}{2n\omega}, \quad (6.9.11)$$

Резонансные режимы возможны при тех значениях  $\omega$ , для которых точки линии (6.9.11) лежат выше скелетной кривой (на рис. 6.9.6 это - участки  $\omega < \omega_1$  и  $\omega > \omega_2$ ).

В системах с линейными упругими элементами и ограничительными упорами (см. рис. 6.9.2) опасность возбуждения резонансных режимов устраняется двумя способами:

1) увеличением области линейности виброизолятора, т.е. его свободного хода. Безопасное расстояние  $d$  от положения статического равновесия до ограничительных упоров в системе с симметрично расположенными упорами определяется из условия

$$d > \left( \frac{g_0\omega}{2n\omega} \right), \quad (6.9.12)$$

которое должно выполняться при всех значениях  $\omega$ , возможных для рассматриваемой системы. При выполнении условия (6.9.12) резонансные колебания не могут возникнуть при любой жесткости упоров;

2) увеличением коэффициента сопротивления  $n$ ; при заданном расстоянии  $d$  до ограничительных упоров величина  $n$  должна удовлетворять условию

$$n > \left( \frac{g_0(\omega)}{2d\omega} \right)_{\text{max}}. \quad (6.9.13)$$

**Пример.** Силовое воздействие на машину массы  $m=1000$  кг создается вращающимся ротором с неуравновешенным статическим моментом  $\mu$ . Угловая скорость ротора  $\omega$  может изменяться в диапазоне  $0 < \omega \leq 50\pi$  с<sup>-1</sup>; при этом  $g_0(\omega) = \mu\omega^2/m$ . Виброизоляция должна обеспечиваться в диапазоне  $20\pi$  с<sup>-1</sup>  $\leq \omega \leq 50\pi$  с<sup>-1</sup>, причем коэффициент виброизоляции должен быть не более 0,25. Определить параметры виброизолятора с линейным упругим элементом и ограничительными упорами.

1. Выбор жесткости линейного элемента. Из условия

$$k_R = \left| 1 - \omega^2/k^2 \right|^{-1} \leq 0,25$$

определяем квадрат собственной частоты системы

$$k^2 = 0,2\omega_{\text{min}}^2 = 0,2 \cdot 400\pi^2 = 790 \text{ с}^{-2},$$

отсюда  $c = mk^2 = 7,9 \cdot 10^5$  Н/м.

2. Определение безопасного расстояния до ограничительных упоров. Примем отношение  $n/k$ , характерное для виброизолятора, не снабженного специальными демпфирующими устройствами:  $n/k=0,1$ ; тогда  $n=0,1k=2,8$  с<sup>-1</sup>. Из соотношения (6.9.12) получаем

$$d > \left( \frac{\mu \omega^2}{2m\omega} \right)_{\max} = \frac{\mu \omega_{\max}}{2nm} = 28,05 \frac{\mu}{m} \text{ (м)}.$$

Результаты расчета свидетельствуют о том, что для получения приемлемых габаритов виброзащитной системы величина  $\mu/m$  должна быть достаточно малой, т.е. точность статической балансировки ротора должна быть высокой. Так, например, при  $d \leq 0,05 \text{ м}$  получаем  $\mu/m \leq 0,001 \text{ м}$ . Безопасное расстояние до ограничительных упоров может во много раз превосходить максимальную амплитуду колебаний в линейной системе. В рассмотренном примере резонансная амплитуда ( $\omega = k$ ) составит

$$a_{\text{рез}} = g_0(k)/(2nk) = 5\mu/m = 0,009 \text{ м},$$

что в 5,5 раза меньше, чем допустимое значение  $d$ . Из этого, в частности, следует, что при разбеге машины от состояния покоя до максимальной угловой скорости система виброизоляции может пройти через зону резонанса без ударов об ограничительные упоры при расстоянии  $d=0,01 \text{ м}$ ; однако при этом (рис. 6.9.7) на любой частоте возмущения, превышающей  $\omega_*$ , могут возникнуть колебания, сопровождающиеся ударами об упоры.

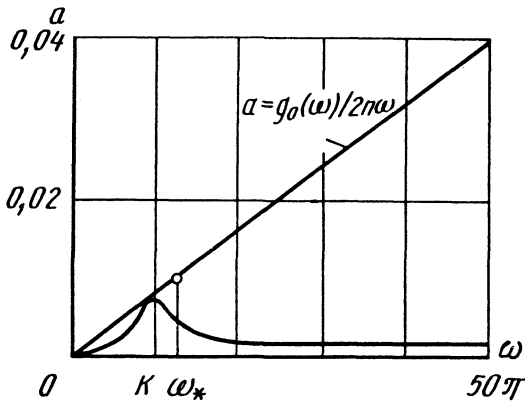


Рис. 6.9.7. К определению безопасного расстояния до упругих упоров

**Субгармонические резонансы в системе с нелинейным упругим элементом.** Субгармонические колебания порядка  $s$ , возникающие в системе (6.9.2), как правило, носят резонансный характер и оказываются близкими к свободным колебаниям консервативной системы

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \tag{6.9.14}$$

имеющим период  $T = 2\pi s/\omega$ . Возникновение резонансных колебаний при частотах возмущения, в  $s$  раз превышающих собственную частоту

линейной системы, является недопустимым; поэтому субгармонические колебания в виброзащитной системе должны подавляться.

Для получения условий подавления субгармонических резонансов при действии возмущения частоты  $\omega$  необходимо найти коэффициенты Фурье  $u_m$  периодического решения уравнения (6.9.14), имеющего частоту  $\lambda = \omega/s$ ,

$$x = \sum_{m=0}^{\infty} u_m \cos m\lambda t.$$

В системе с симметрично расположенными упорами

$$u_m = \frac{4\Delta (\alpha^2 - 1) (\cos m\nu t \text{tg}\tau - m\nu \sin m\nu t)}{\pi (m^2\nu^2 - 1) (m^2\nu^2 - \alpha^2) \text{tg}\tau}, \tag{6.9.15}$$

где  $\Delta$  - расстояние от положения статического равновесия системы до упоров;  $\alpha^2 = c'/c$  - отношение суммы жесткостей основного упругого элемента и упора к жесткости основного элемента;  $\nu = \omega/(sk) = \lambda/k$  - отношение частоты решения к собственной частоте линейной системы;  $\tau$  - фаза в момент удара об упор, определяемая из уравнения

$$\text{tg}\tau \text{tg}\left(\frac{\pi}{2\nu} - \tau\right) = \alpha. \tag{6.9.16}$$

Решения этого уравнения для некоторых значений  $\nu$  и  $\alpha$  могут быть получены из графиков (рис. 6.9.8).

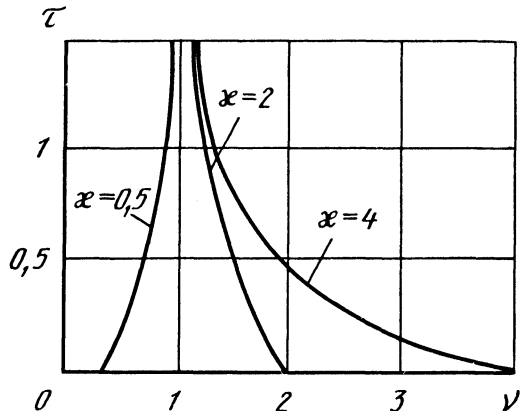


Рис. 6.9.8. К определению амплитуды свободных колебаний виброизолятора с упругими упорами

В системе с жесткими упорами, координаты которых  $x = \Delta$  и  $x = -\Delta_1$ , могут возникать свободные колебания с ударами об один из упоров или об оба упора. При  $\cos \pi/\nu \geq -\Delta_1/\Delta$  происходит удар только о первый упор; при  $\cos \pi/\nu \geq -\Delta/\Delta_1$  - только о второй. При выполнении обоих неравенств возникают удары об оба



упора. Соответствующие области существования показаны на рис. 6.9.9, где  $\delta = \Delta_1/\Delta$ . При ударе только о первый упор

$$u_m = (-1)^m \frac{2\Delta v}{\pi(m^2 v^2 - 1)} \operatorname{tg} \frac{\pi}{v}. \quad (6.9.17)$$

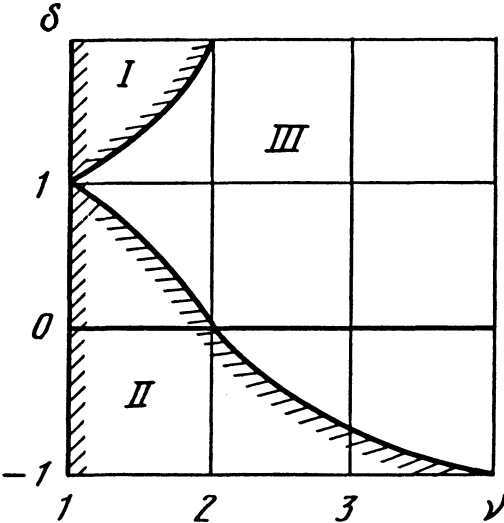


Рис. 6.9.9. Области соударений с нижним (II), верхним (I) и обоими упорами (III)

При ударе только о второй упор

$$u_m = \frac{2v\Delta_1}{\pi(m^2 v^2 - 1)} \operatorname{tg} \frac{\pi}{v}. \quad (6.9.18)$$

При ударе об оба упора

$$u_m = \frac{2v(\Delta - \Delta_1)}{\pi(1 - m^2 v^2)} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2v} \quad \text{при четном } m;$$

$$u_m = \frac{2v(\Delta + \Delta_1)}{\pi(1 - m^2 v^2)} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2v} \quad \text{при нечетном } m. \quad (6.9.19)$$

Условие подавления субгармонических колебаний порядка  $s$  при вязком трении записывается в виде

$$2n\omega u_1^2 > s^2 |u_s| g_0(\omega),$$

где  $n$  - коэффициент диссипации.

**Нелинейные колебания упругой машины.** Рассмотрим колебания упругой машины на виброизоляторе с нелинейным упругим элементом и вязким демпфером при гармонической вынуждающей силе. Пусть  $e(j\omega)$  - комплексная динамическая податливость упругой машины в точке крепления виброизолятора. Уравнение движения может быть записано в виде

$$e^{-1}(p)x + b\dot{x} + F(x) = G_0(\omega) \cos \omega t, \quad (6.9.20)$$

где  $e(p)$  - оператор динамической податливости [47].

Приближенное решение этого уравнения, имеющее период  $T = 2\pi/\omega$ , можно искать в форме (6.9.3). При этом  $a_0$  и  $a$  связаны между собой условием (6.9.4). Для амплитуды колебаний получается следующее выражение:

$$a = \frac{G_0(\omega)}{\sqrt{[q(a) + \mu(\omega)]^2 + [b\omega + v(\omega)]^2}}, \quad (6.9.21)$$

где

$$\mu(\omega) = \operatorname{Re} e^{-1}(j\omega); \quad v(\omega) = \operatorname{Im} e^{-1}(j\omega);$$

$$q(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F[a_0(a) + a \cos \psi] \cos \psi d\psi. \quad (6.9.22)$$

Зависимость  $\lambda(a)$ , заданная уравнением

$$q(a) + \mu(\lambda) = 0, \quad (6.9.23)$$

определяет в неявной форме модифицированную скелетную кривую системы  $\lambda(a)$ . Если  $\omega = \lambda(a)$ , то зависимость

$$a(\omega) = \frac{G_0(\omega)}{b\omega + v(\omega)} \quad (6.9.24)$$

определяет на плоскости  $(a, \omega)$  линию предельных амплитуд. Определив точки пересечения линий  $\omega = \lambda(a)$  и (6.9.24), можно судить о возможности возникновения резонансных колебаний. Такие колебания возможны для тех значений  $\omega$ , при которых модифицированная скелетная кривая лежит выше предельных амплитуд. Для виброизолятора с линейным упругим элементом безопасное расстояние до ограничительных упоров определяется формулой

$$d \geq \left[ \frac{G_0(\omega)}{b\omega + v(\omega)} \right]_{\max}. \quad (6.9.25)$$

Полученные выражения сохраняют силу и для кинематического возмущения, если в них положить  $G_0(\omega) = \xi_0 [\mu^2(\omega) + v^2(\omega)]^{1/2}$ , где  $\xi_0$  - амплитуда гармонических колебаний основания.

**6.9.3. ЭФФЕКТ ЗОММЕРФЕЛЬДА ПРИ РАЗБЕГЕ ВИБРОИЗОЛИРОВАННОЙ МАШИНЫ**

В роторных машинах основным источником вибрационных возмущений являются обычно инерционные силы, вызванные статической неуравновешенностью роторов. В рабочих режимах угловые скорости роторов существенно пре-

восходят собственные частоты виброизолирующего подвеса, что и предопределяет его эффективность. Однако при разбеге и выбеге машины система проходит через область резонанса. При этом возникают интенсивные колебания корпуса машины, сопровождающиеся диссипацией энергии в виброизоляторах. Единственным источником энергии в системе является двигатель; поэтому диссипация энергии приводит к увеличению нагрузки на привод. В результате мощность двигателя может оказаться недостаточной для преодоления при разбеге области резонансных колебаний; машина “застревает” на резонансных оборотах и не может выйти в нормальный установившийся режим. Это явление принято называть эффектом Зоммерфельда [51].

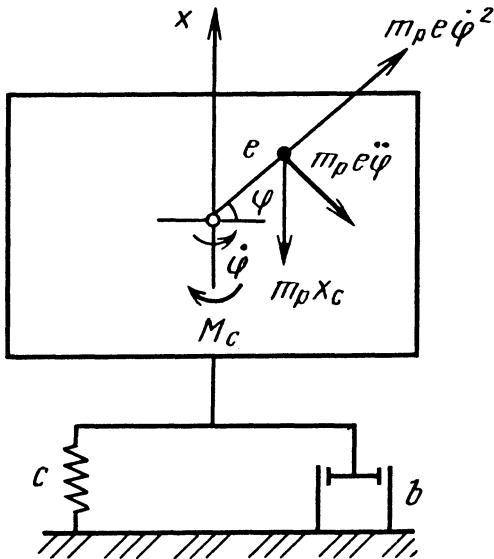


Рис. 6.9.10. Схема машины с неуравновешенным ротором на упругом основании

Для исследования этого эффекта рассмотрим виброизолированную однороторную машину массы  $m$  (рис. 6.9.10); предполагается, что ротор имеет массу  $m_p$ , его центр масс смещен относительно оси вращения на  $e$ ; угол поворота ротора обозначим через  $\varphi$ . Свойства двигателя определяются его рабочей характеристикой, выражающей зависимость движущего момента от угловой скорости:

$$M_d = M_d(\dot{\varphi}). \quad (6.9.26)$$

Введя переносные и относительные силы инерции и составляя уравнения кинестатики для системы с двумя обобщенными координатами  $u$  и  $\varphi$ , получаем

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = m_p e \left( -\ddot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right); \quad (6.9.27)$$

$$J_p \ddot{\varphi} - M_d(\dot{\varphi}) + M_c(\varphi) = -m_p e \ddot{x} \cos \varphi, \quad (6.9.28)$$

где  $J_p$  — момент инерции ротора относительно оси вращения;  $M_c(\varphi)$  — момент сил сопротивления, действующих на ротор.

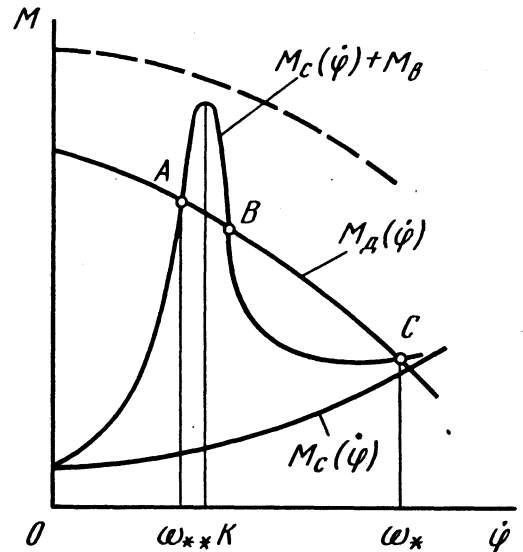


Рис. 6.9.11. К условиям возникновения эффекта Зоммерфельда

Систему уравнений (6.9.27) и (6.9.28) можно решать методом последовательных приближений. Предположим сначала, что  $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$ ;  $\ddot{\varphi} = 0$ , т.е. по существу пренебрежем воздействием момента переносной силы инерции ротора  $m_p \ddot{x} e \cos \varphi$  на закон его вращения. Подставляя  $\varphi = \omega t$  в правую часть уравнения (6.9.27), найдем его решение в форме

$$x = a \sin(\omega t + \gamma), \quad (6.9.29)$$

где

$$a = \frac{m_p e \omega^2}{\sqrt{(c - m\omega^2)^2 + b^2 \omega^2}}; \quad \sin \gamma = -\frac{b\omega}{\sqrt{(c - m\omega^2)^2 + b^2 \omega^2}}. \quad (6.9.30)$$

Подставив (6.9.29) в правую часть уравнения (6.9.27), получим

$$J_p \ddot{\varphi} - M_d(\dot{\varphi}) + M_c(\varphi) = \frac{1}{2} m_p e a \omega^2 [\sin \gamma + \sin(2\omega t + \gamma)]. \quad (6.9.31)$$

Таким образом, колебания корпуса машины

приводят к воздействию на двигатель дополнительного постоянного момента, называемого вибрационным моментом:

$$M_B = -\frac{1}{2} m_p e a \omega^2 \sin \gamma = -\frac{1}{2} b a^2 \omega^2 = -\frac{1}{2} \frac{b m_p^2 e^2 \omega^5}{(c - m \omega^2)^2 + b^2 \omega^2}. \quad (6.9.32)$$

На рис. 6.9.11 показаны графики кривых  $M_d(\dot{\varphi})$  и  $M_c(\dot{\varphi}) + M_B(\dot{\varphi})$ . Абсциссы точек пересечения соответствующих графиков определяют возможные значения  $\omega$  в установившемся режиме. Значение  $\omega_*$  соответствует тому установившемуся режиму, при котором обеспечивается нормальный рабочий процесс и нормальная виброизоляция машины. Наряду с ним может существовать устойчивый режим, соответствующий точке *A* (точке *B* соответствует неустойчивый процесс); в этом случае, дойдя до значения  $\dot{\varphi} = \omega_*$ , угловая скорость машины не будет увеличиваться. При этом машина “застрянет” в области резонанса системы.

Чтобы исключить возможность возникновения эффекта Зоммерфельда, необходимо обеспечить выполнение условия

$$M_d(k) > M_c(k) + M_B(k) = M_c(k) + \frac{1}{2} \frac{m_p^2 e^2 k^3}{b}, \quad (6.9.33)$$

где  $k = \sqrt{c/m}$  — собственная частота системы виброизоляции. Это достигается либо увеличением движущего момента (соответствующая рабочая характеристика показана на рис. 6.9.11 штриховой линией), либо увеличением коэффициента сопротивления  $b$ , либо уменьшением статической неуравновешенности ротора ( $m_p e$ ).

увеличивают шум в передачах. Для защиты передаточных механизмов от динамических воздействий используют упругие муфты, в сущности являющиеся виброизоляторами крутильных колебаний. Упругие муфты обеспечивают также компенсацию перекосов и несоосности соединяемых валов, однако здесь эти функции упругих муфт не рассматриваются.

#### 6.10.1. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРУГИХ МУФТ

Конструкции упругих муфт, используемых в машиностроении, подробно рассмотрены в [70]; там же приведены значения параметров некоторых конструкций муфт, серийно выпускаемых промышленностью. Обычно упругая муфта состоит из полу муфт *1* и *2* (рис. 6.10.1), соединенных с двумя соосными валами и связанных между собой упругими элементами *3*.

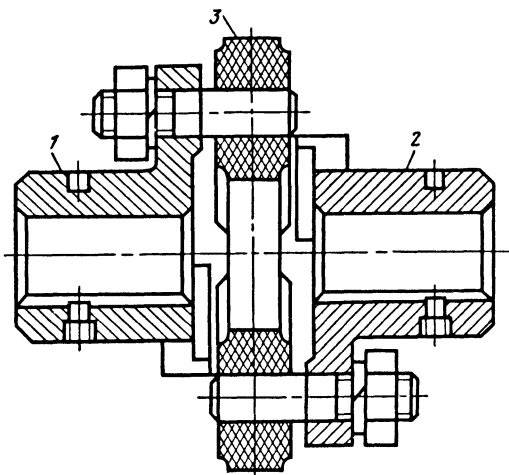


Рис. 6.10.1. Конструкция упругой муфты

Механическими характеристиками упругой муфты являются: а) номинальный крутящий момент  $M_n$ , передаваемый муфтой; б) упругая характеристика, определяющая зависимость крутящего момента  $M_y$ , возникающего в упругом элементе, от относительного углового смещения полу муфт  $\theta$ ; в) демпфирующая характеристика, определяющая зависимость момента диссипативных сил  $M_d$  от параметров, характеризующих деформацию  $\theta$  и ее скорость  $\dot{\theta}$ .

Упругая характеристика муфты  $M_y(\theta)$  обычно является нелинейной вследствие нелинейных свойств материалов, из которых изготовляют упругие элементы (например резины), их конструктивных особенностей, а также из-за наличия ограничителей углового смещения полу муфт. При малых колебаниях вблизи положе-

### Глава 6.10

## ВИБРОИЗОЛЯЦИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Передачными называют механизмы, передающие вращение от источников энергии (двигателей) к исполнительным механизмам и рабочим органам машин. Эти механизмы подвергаются динамическим воздействиям, переменным во времени. Динамические воздействия вызываются как переменными рабочими нагрузками, связанными с выполнением рабочих процессов, так и переменными инерционными силами. Они снижают прочность и долговечность передаточных механизмов, приводят к деформациям упругих звеньев (валов, зубчатых колес),

ния статического равновесия характеристика может быть линеаризована. Коэффициент линеаризации  $c = dM_y(\theta_{CT})/d\theta$  называют жесткостью муфты. С увеличением статической деформации  $\theta_{CT}$  жесткость муфты обычно возрастает.

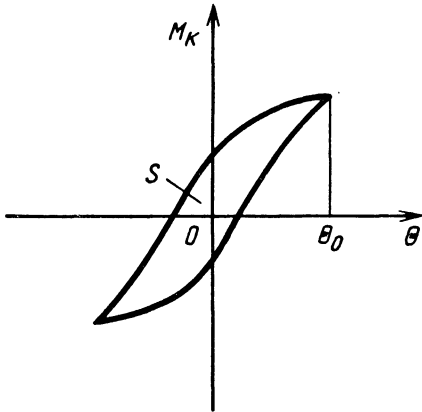


Рис. 6.10.2. Петля гистерезиса для упругой муфты

Диссипативный момент  $M_d$  при малых колебаниях может считаться пропорциональным скорости деформации  $\dot{\theta}$ ; при этом полный крутящий момент  $M_K$ , возникающий при деформации муфты, имеет вид

$$M_K = c\theta + b\dot{\theta}. \quad (6.10.1)$$

Коэффициент сопротивления  $b$  не является постоянным для данной муфты; обычно его величина зависит как от амплитуды, так и от частоты колебательного процесса  $\theta(t)$ . Она определяется в большинстве случаев экспериментальным путем. Для этого при изменении деформации по гармоническому закону  $\theta = \theta_{CT} + \theta_0 \sin \omega t$  измеряют площадь  $S$  петли гистерезиса (рис. 6.10.2), описывающей зависимость  $M_K(\theta)$  при нагрузке ( $\dot{\theta} > 0$ ) и разгрузке ( $\dot{\theta} < 0$ ) упругого элемента. Коэффициент  $b$  определяют по формуле

$$b = S / \pi \omega \theta_0^2. \quad (6.10.2)$$

Диссипативные свойства муфты часто характеризуются коэффициентом рассеяния  $\delta$ , равным отношению площади петли гистерезиса к максимальному значению потенциальной энергии деформации  $\Pi_{max} = 0,5c\theta_0^2$ . Связь  $\delta$  с параметрами  $b, c, \omega$  определяется формулой

$$\delta = S / \Pi_{max} = 2\pi b \omega / c. \quad (6.10.3)$$

В ряде случаев величина  $\delta$  может быть принята, при малых колебаниях, не зависящей от частоты

колебательного процесса; при этом коэффициент сопротивления  $b$  оказывается обратно пропорционален частоте  $\omega$ .

### 6.10.2. ЭФФЕКТИВНОСТЬ УПРУГОЙ МУФТЫ В МАШИНЕ С ИДЕАЛЬНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ

Идеальным называют роторный двигатель, закон движения которого  $\varphi(t)$  не зависит от приложенной к нему нагрузки  $M_d$  и определяется только законом изменения входного параметра (например, электрического напряжения). Предположение об идеальности двигателя является корректным в тех случаях, когда двигатель имеет большую мощность, незначительная часть которой используется рассматриваемым механизмом, или когда крутизна рабочей характеристики двигателя  $s = dM_d/d\dot{\varphi}$  очень велика.

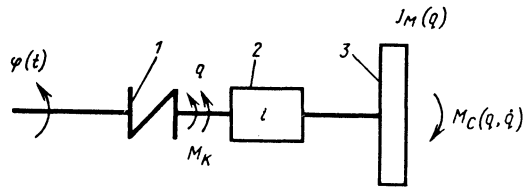


Рис. 6.10.3. Расчетная модель системы с идеальным двигателем: 1 - упругая муфта; 2 - передаточный механизм; 3 - исполнительный механизм

Если в машине с идеальным двигателем все звенья исполнительного и передаточного механизмов могут считаться абсолютно твердыми телами, а упругая муфта является безынерционным звеном, соединяющим идеальный двигатель с передаточным механизмом, система может быть описана динамической моделью, показанной на рис. 6.10.3. Здесь угол поворота входного вала передаточного механизма обозначен через  $q$ ;  $i$  - передаточное отношение. Очевидно, что  $q = \varphi + \theta$ , где  $\theta$  - угловая деформация упругого элемента муфты. Момент  $M_K$ , возникающий в муфте, определяется выражением (6.10.1). Через  $J_M(q)$  обозначен момент инерции исполнительного механизма, приведенный к входному валу муфты; в цикловой машине  $J_M(q)$  - периодическая функция с периодом  $2\pi i$ . Приведенный момент сил сопротивления  $M_C(q, \dot{q})$  также является периодической функцией от  $q$  с тем же периодом. Функции  $J_M(q)$  и  $M_C(q, \dot{q})$  удобно представить в форме

$$J_M(q) = J_{M0} + \tilde{J}(q); \quad (6.10.4)$$

$$M_C(q, \dot{q}) = M_{C0}(\dot{q}) + \tilde{M}_C(q, \dot{q}), \quad (6.10.5)$$

где

$$J_{M0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi i} J_M(q) dq;$$

$$M_{c0}(\dot{q}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi i} M_c(q, \dot{q}) dq$$

- средние за период значения этих функций (средний момент инерции и средний момент сил сопротивления).

Уравнение движения машины при сделанных предположениях имеет вид [49]

$$J_M(q)\ddot{q} + \frac{1}{2} J'_M(q)\dot{q}^2 = M_K - M_c(q, \dot{q}) = -b(\dot{q} - \dot{\varphi}) - c(q - \varphi) - M_c(q, \dot{q}). \quad (6.10.6)$$

**Установившееся движение машины.** При установившемся движении цикловой машины ротор идеального двигателя вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$ ; при этом  $\varphi = \omega_0 t$ ;  $\dot{\varphi} = \omega_0$ . Записав уравнение (6.10.6) в виде

$$J_{M0}\ddot{q} + b\dot{\theta} + c\theta - M_{c0}(\dot{q}) = -\tilde{J}_M(q)\ddot{q} - \frac{1}{2} \tilde{J}'_M(q)\dot{q}^2 + \tilde{M}_c(q, \dot{q}) \quad (6.10.7)$$

и учитывая, что при малых  $\theta$  и  $\dot{\theta}$

$$M_{c0}(\dot{q}) = M_{c0}(\omega_0) + v\dot{\theta},$$

где  $v = dM_{c0}(\omega_0)/d\dot{q}$  - крутизна характеристики среднего момента сил сопротивления, приходим к уравнению

$$J_{M0}\ddot{\theta} + (b+v)\dot{\theta} + c\theta + M_{c0}(\omega_0) = -\tilde{J}_M(q)\ddot{q} - \frac{1}{2} \tilde{J}'_M(q)\dot{q}^2 + \tilde{M}_c(q, \dot{q}). \quad (6.10.8)$$

Это уравнение может решаться методом последовательных приближений. В первом приближении можно в правую его часть подставить  $q = \omega_0 t$ , а решение искать в форме  $\theta = \theta_{cT} + \tilde{\theta}(t)$ , где  $\theta_{cT}$  - статическая деформация, вызванная средним моментом сил сопротивления  $M_{c0}(\omega_0)$ . Для определения  $\theta_{cT}$  и  $\tilde{\theta}(t)$  получаем уравнения

$$c\theta_{cT} + M_{c0}(\omega_0) = 0; \quad (6.10.9)$$

$$J_{M0}\ddot{\tilde{\theta}} + (b+v)\dot{\tilde{\theta}} + c\tilde{\theta} = L(t), \quad (6.10.10)$$

где

$$L(t) = -\frac{1}{2} \tilde{J}'_M(\omega_0 t)\omega_0^2 + \tilde{M}_c(\omega_0 t, \omega_0)$$

- возмущающий момент, являющийся периодической функцией времени с периодом  $T = 2\pi i/\omega_0 = 2\pi/\eta$ , где  $\eta = \omega_0/i$  - угловая скорость входного вала исполнительного механизма, совершающего один оборот за период  $T$ . Раскладывая  $L(t)$  в ряд Фурье, получаем

$$L(t) = \sum_{l=1}^{\infty} L_l \cos(\eta t + \alpha_l), \quad (6.10.11)$$

где  $L_l$  и  $\alpha_l$  - амплитуда и фаза  $l$ -й гармоники. В установившемся режиме

$$\theta_{cT} = -M_{c0}(\omega_0)/c; \quad (6.10.12)$$

$$\tilde{\theta} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{L_l \cos(\eta t + \alpha_l + \beta_l)}{\sqrt{(c - J_{M0} l^2 \eta^2)^2 + (b+v)^2 l^2 \eta^2}}, \quad (6.10.13)$$

где

$$\beta_l = \arg[c - J_{M0} l^2 \eta^2 - (b+v)\eta j] \quad (j = \sqrt{-1}).$$

Отсюда можно определить момент  $M_K$ , передаваемый муфтой и действующий на входное звено передаточного механизма:

$$M_K = c(\theta_{cT} + \tilde{\theta}) + b\dot{\theta} = -M_{c0}(\omega_0) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sqrt{c^2 + b^2 l^2 \eta^2} L_l \cos(\eta t + \alpha_l + \beta_l + \gamma_l)}{\sqrt{(c - J_{M0} l^2 \eta^2)^2 + (b+v)^2 l^2 \eta^2}}, \quad (6.10.14)$$

где  $\gamma_l = \arg(c + b\eta j)$ .

При жестком соединении ротора двигателя с входным валом передаточного механизма на последний действовал бы момент  $M_K^* = L(t)$ . Отсюда получаем выражение для коэффициента виброизоляции при частоте возмущения  $\eta = k_0 z$ :

$$k_M = \frac{M_{Kl}}{M_{Kl}^*} = \frac{M_{Kl}}{L_l} = \frac{\sqrt{c^2 + b^2 k_0^2 z^2}}{\sqrt{(c - J_{M0} k_0^2 z^2)^2 + (b+v)^2 k_0^2 z^2}} = \sqrt{\frac{1 + 4v^2 z^2}{(1 - z^2)^2 + 4v_*^2 z^2}}, \quad (6.10.15)$$

где  $k_0 = \sqrt{c/J_{M0}}$ ;  $2v = b/(J_{M0} k_0)$ ;  $2v_* =$

$= (b + v)/(J_{M0}k_0)$ . Если  $v=0$ , то  $v = v_*$  и выражение (6.10.15) совпадает с (6.8.21). Поскольку  $v_* \geq v$ , условие эффективности

$$k_M < 1, \tag{6.10.16}$$

безусловно, выполняется при  $z > \sqrt{2}$ , т.е. упругая муфта защищает передаточный механизм от всех гармоник возмущающего момента  $L(t)$ , частоты которых превышают  $\sqrt{2c/J_{M0}}$ .

Пусть  $\omega_{0 \min}$  - минимальная угловая скорость установившегося движения машины (в диапазоне ее рабочих скоростей). Условие виброизоляции (6.10.16) будет выполнено для всех гармоник возмущения, если

$$c < J_{M0}\omega_{0 \min}^2 / (2i^2). \tag{6.10.17}$$

При  $z > \sqrt{2}$  эффективность виброизоляции увеличивается ( $k_M$  уменьшается) с ростом частоты вибрационного воздействия; она возрастает также при уменьшении коэффициента сопротивления  $b$  и увеличении крутизны характеристики среднего момента сил сопротивления.

Следуя условию (6.10.17), нужно уменьшать жесткость упругой муфты; однако при этом растет ее статическая деформация  $\theta_{CT}$ . Поэтому условие эффективности выполнимо лишь в том случае, если во всем диапазоне возможных значений угловой скорости двигателя  $\omega_{0 \min} \leq \omega_0 \leq \omega_{0 \max}$  удовлетворяется неравенство

$$2M_{c0}(\omega_0)i^2 / (J_{M0}\omega_0^2) < \theta_{CT \text{ доп}} \tag{6.10.18}$$

где  $\theta_{CT \text{ доп}}$  - допустимая величина статической деформации муфты. Нелинейность упругой характеристики и наличие ограничительных упоров приводят к опасности возникновения нелинейных эффектов, рассмотренных в гл. 6.9. Методы их устранения те же, что и в виброизоляторах, установленных в опорах машины.

При совпадении частоты одной из гармоник возмущения с  $k_0$  могут возникать резонансные колебания линейной системы. Если  $k_0 = \omega_0/i$ , резонанс называют основным; при  $k_0 = l\omega_0/i$  - кратным порядка  $l$ . Наиболее опасным является обычно основной резонанс, через который машина проходит в процессе разбега и выбега. Для уменьшения амплитуд колебаний машины при проходе через резонанс необходимо увеличивать диссипативные силы, возникающие в упругой муфте; помогает также увеличение мощности двигателя, что приводит к уменьшению времени прохода резонансной зоны при разбеге.

**Параметрический резонанс в системе с идеальным двигателем.** Более полное исследование уравнения (6.10.7) показывает, что в системе при

определенных условиях могут возникать параметрические колебания, опасные для машины (см. гл. 6.4). Для получения условий подавления возможных в системе параметрических колебаний необходимо определить амплитуды гармоник периодической функции

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2 \tilde{J}_M}{dq^2} [\omega_0 t + \theta_{CT} + \tilde{\theta}(t)] \omega_0^2 - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \tilde{M}_c}{\partial q} [\omega_0 t + \theta_{CT} + \tilde{\theta}(t); \omega_0 + \dot{\tilde{\theta}}(t)] \right\} - \\ & - \frac{1}{J_{M0}} \tilde{J}_M [\omega_0 t + \theta_{CT} + \tilde{\theta}(t)], \tag{6.10.19} \end{aligned}$$

подставив в нее  $\theta_{CT}$  и  $\tilde{\theta}(t)$  из (6.10.12) и (6.10.13). Разложим функцию  $\Phi(t)$ , имеющую период  $T = 2\pi/\eta$ , в ряд Фурье:

$$\Phi(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_l \cos(l\eta t + \varepsilon_l).$$

Тогда условия устойчивости рассматриваемого установившегося движения, гарантирующие отсутствие параметрического резонанса, запишутся в виде [49]

$$\begin{aligned} n_0^2 > - \left( k_0^2 + 0,25l^2\eta^2 \right) + \\ + \sqrt{l^2 k_0^2 \eta^2 + 0,25k_0^4 \Phi_l^2}, \quad (l = 1, 2, \dots) \tag{6.10.20} \end{aligned}$$

где  $n_0 = (b + v)/2J_{M0}$ ;  $k_0^2 = c/J_{M0}$ .

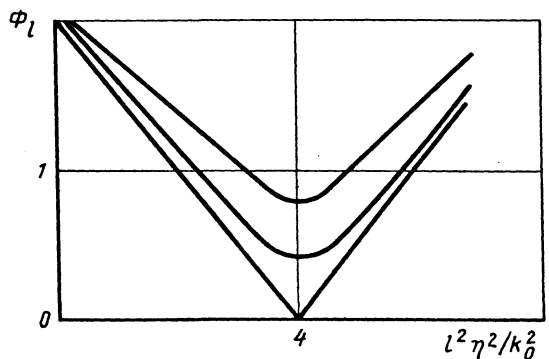


Рис. 6.10.4. Области параметрического резонанса

Опасность нарушения условий (6.10.20) возникает при значениях  $\eta$ , близких к  $2k_0/l$ . Диапазон значений  $\eta$ , при которых нарушается  $l$ -е условие (6.10.20), образуют  $l$ -ю область неустойчивости. На рис. 6.10.4 построены границы областей неустойчивости на плоскости парамет-

ров  $(l^2 \eta^2 k_0^{-2}, \Phi_l)$ , соответствующие различным значениям  $n_0$ . Области неустойчивости располагаются выше построенных линий.

**Исследование переходных процессов.** Рассмотрим колебания, возникающие в упругой муфте при разбеге машины. Предположим, что закон движения ротора  $\varphi(t)$  является заданным; это соответствует предположению об идеальности характеристики двигателя. При исследовании разбега обычно можно пренебречь переменными компонентами  $\tilde{J}_M(q)$  и  $\tilde{M}_C(q, \dot{q})$ , в этом случае уравнение движения принимает следующую форму:

$$J_{M0} \ddot{\theta} + b \dot{\theta} + c \theta = -J_{M0} \ddot{\varphi}(t) - M_{C0} [\dot{\varphi}(t) + \dot{\theta}]. \quad (6.10.21)$$

Рассмотрим разбег машины при отсутствии сил сопротивления ( $M_{C0} \equiv 0$ ). Уравнение (6.10.21) запишем в виде

$$\ddot{\theta} + 2n \dot{\theta} + k_0^2 \theta = -\ddot{\varphi}(t), \quad (6.10.22)$$

где  $2n = b/J_{M0}$ . Решение уравнения (6.10.22), соответствующее начальным условиям

$$t = 0; \theta = 0; \dot{\theta} = 0, \quad (6.10.23)$$

можно искать в форме

$$\theta = -\ddot{\varphi}(t)/k_0^2 + \psi, \quad (6.10.24)$$

выделяя в нем квазистатическую составляющую  $\theta_{кст} = -\ddot{\varphi}/k_0^2$ . Подставляя (6.10.24) в (6.10.22), получаем

$$\ddot{\psi} + 2n \dot{\psi} + k_0^2 \psi = \left[ \varphi^{IV}(t) + 2n \ddot{\varphi}(t) \right] / k_0^2. \quad (6.10.25)$$

При этом начальные условия (6.10.23) дают

$$\psi(0) = \ddot{\varphi}(0)/k_0^2; \quad \dot{\psi}(0) = \ddot{\varphi}'(0)/k_0^2. \quad (6.10.26)$$

Амплитуды колебаний, возникающих в упругой муфте при разбеге, существенно зависят от плавности закона изменения углового ускорения двигателя  $\ddot{\varphi}(t)$ . Скачкообразные изменения ускорения приводят к появлению колебаний большой амплитуды. Так, например, при разбеге с постоянным угловым ускорением ротора

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \varepsilon_0 & \text{при } 0 \leq t \leq t_p; \\ \ddot{\varphi} &= 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > t_p, \end{aligned} \right\} \quad (6.10.27)$$

где  $t_p = \omega_0/\varepsilon_0$  - время разбега машины, получаем

$$\theta = -\frac{\varepsilon_0}{k_0^2} + \frac{\varepsilon_0 \sin(k_1 t + \alpha) e^{-nt}}{k_0 k_1} \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_p; \quad (6.10.28)$$

$$\theta = -\frac{\varepsilon_0 e^{-n(t-t_p)} \sin[k_1(t-t_p) + \alpha]}{k_0 k_1} \quad \text{при } t > t_p, \quad (6.10.29)$$

где  $k_1 = (k_0^2 - n^2)^{1/2}$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = k_1/n$ . Характер изменения деформации муфты показан на рис. 6.10.5, а.

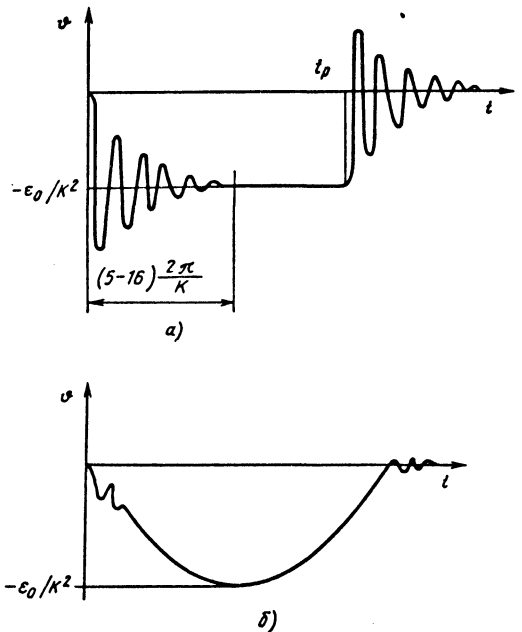


Рис. 6.10.5. Графики переходных процессов в системе с упругой муфтой.

Подставляя (6.10.28) и (6.10.29) в (6.10.1), определяем момент, возникающий в муфте при разбеге:

$$M_K = J_{M0} \varepsilon_0 \left[ 1 + \frac{k_0}{k_1} e^{-nt} \sin(k_1 t - \alpha) \right] \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_p; \quad (6.10.30)$$

$$M_K = -J_{M0} \varepsilon_0 \frac{k_0}{k_1} e^{-n(t-t_p)} \sin[k_1(t-t_p) - \alpha] \quad \text{при } t > t_p. \quad (6.10.31)$$

Если при разбеге  $\ddot{\varphi}(t)$  изменяется плавно и при этом  $\ddot{\varphi}(0) = \ddot{\varphi}(t_p) = 0$ , амплитуды колеба-

ний, возникающих в упругой муфте, уменьшаются. Так, например, если

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \varepsilon_0 \sin(\pi t/t_p) & \text{при } 0 < t \leq t_p; \\ \ddot{\varphi} &= 0 & \text{при } t > t_p, \end{aligned} \right\} \quad (6.10.32)$$

уравнение (6.10.25) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} + 2n\dot{\psi} + k_0^2\psi &= \varepsilon_0 \left[ -\pi^2 t_p^{-1} \sin(\pi t_1/t_p) + \right. \\ &+ \left. 2\pi n \cos(\pi t/t_p) \right] k_0^{-2} t_p^{-1}. \end{aligned} \quad (6.10.33)$$

Время разбега обычно существенно превосходит период свободных колебаний системы. При этом правая часть в уравнении (6.10.33) оказывается малой величиной по сравнению с  $\ddot{\varphi}(t)$ ; пренебрегая ею, получаем

$$\theta \approx -\frac{\varepsilon_0}{k_0^2} \sin \frac{\pi t}{t_p} + \frac{\pi \varepsilon_0}{k_0^2 t_p k_1} e^{-nt} \sin k_1 t, \quad (0 \leq t \leq t_p). \quad (6.10.34)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} M_K &= -J_{M0} \varepsilon_0 \left[ \sqrt{1 + \frac{4n^2 \pi^2}{t_p^2 k_0^4}} \sin \left( \frac{\pi t}{t_p} + \beta \right) - \right. \\ &- \left. \frac{\pi}{t_p k_1} \sqrt{1 + \frac{8n^2}{k_1^2}} e^{-nt} \sin(k_1 t - \gamma) \right], \end{aligned} \quad (6.10.35)$$

где

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2\pi n}{t_p k_0^2} \left( 1 + \frac{4n^2 \pi^2}{t_p^2 k_0^4} \right)^{-1/2}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{2nk_1}{\sqrt{k_0^2 + 2n^2}}.$$

Сравнивая (6.10.35) и (6.10.30), легко заметить, что при синусоидальном законе изменения ускорения максимальная амплитуда колебаний момента с частотой  $k$  меньше в  $2k_0 t_p / \pi^2$  раз, чем при постоянном ускорении (рис. 6.10.5, б).

Вообще при плавном разгоне в первом приближении можно принимать, что  $M_K \approx -J_{M0} \ddot{\varphi}(t)$ . Если разбег машины происходит при действии постоянного момента сил сопротивления и в уравнении (6.10.21)  $M_{C0} = M_0 = \text{const}$ , то максимальная амплитуда колебаний, возникающих в муфте, увеличивается приблизительно на  $M_0/c$ . В первом приближении крутящий момент при плавном законе изменения можно определить по формуле

$$M_K \approx -J_{M0} \ddot{\varphi}(t) - M_0 \left( 1 - e^{-nt} \sin k_1 t \right). \quad (6.10.36)$$

### 6.10.3. ЭФФЕКТИВНОСТЬ УПРУГОЙ МУФТЫ В ДВУХМАСНОЙ СИСТЕМЕ

При учете статической характеристики роторного двигателя в форме (6.9.26) машина, содержащая упругую муфту, должна рассматриваться как двухмассная система (рис. 6.10.6), уравнения движения которой имеют вид

$$\left. \begin{aligned} J_d \ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + c\varphi - b\dot{q} - cq &= M_d(\varphi); \\ J_m(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} J'_m(q) \dot{q}^2 &= \\ = -b\dot{q} - cq + b\dot{\varphi} + c\varphi - M_c(q, \dot{q}). \end{aligned} \right\} \quad (6.10.37)$$

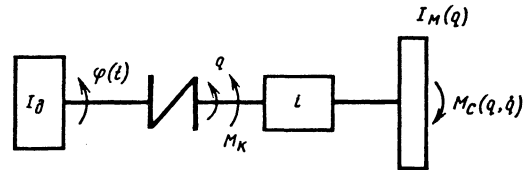


Рис. 6.10.6. Расчетная модель двухмассной системы

При исследовании установившегося движения можно искать решение этой системы уравнений в форме

$$\varphi = \omega_0 t + x; \quad q = \omega_0 t + y, \quad (6.10.38)$$

где  $x$  и  $y$  - неизвестные функции времени. Линеаризуя  $M_d(\varphi)$  в окрестности  $\dot{\varphi} = \omega_0$ , а также исходя из предположений, сформулированных в п. 6.10.2, можно привести уравнения (6.10.37) к виду

$$\left. \begin{aligned} J_d \ddot{x} + (b+s)\dot{x} + cx - b\dot{y} - cy &= 0; \\ -b\dot{x} - cx + J_{M0} \ddot{y} + (b+v)\dot{y} + cy &= \\ = L(t + \theta_{CT}/\omega_0), \end{aligned} \right\} \quad (6.10.39)$$

где  $s = dM_d(\omega_0)/d\dot{\varphi}$ ;  $v = dM_{C0}(\omega_0)/d\dot{q}$ , среднюю угловую скорость  $\omega_0$  и статическую составляющую деформации муфты  $\theta_{CT}$  определяем из уравнений

$$\theta_{CT} = -\frac{M_d(\omega_0)}{c} = -\frac{M_{C0}(\omega_0)}{c}, \quad (6.10.40)$$

а возмущающий момент может быть представлен в форме, аналогичной (6.10.11):

$$L(t + \theta_{CT}/\omega_0) = \sum_{l=1}^{\infty} L_l \cos(h_l t + \alpha_l), \quad (6.10.41)$$

где  $\alpha_l = \alpha_l + \theta_{CT}/\omega_0$ .

Решая систему уравнений (6.10.39), получаем



$$\theta = q - \varphi = \theta_{сТ} + y - x = \theta_{сТ} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\xi_l^2 + J_d^2 l^2 \eta^2} L_l \cos(\eta t + \alpha_l + \xi_l)}{\left[ c - J_d l^2 \eta^2 + (b + s) j \eta \right]} \dots \rightarrow \dots \rightarrow \frac{\dots}{\left[ c - J_{м0} l^2 \eta^2 + (b + v) j \eta \right] - (c + b \eta j)^2}, \quad (6.10.42)$$

где

$$\xi_l = \arg \frac{s j - J_d \eta}{\left[ c - J_d l^2 \eta^2 + (b + s) j \eta \right]} \times \dots \rightarrow \dots \rightarrow \frac{\dots}{\left[ c - J_{м0} l^2 \eta^2 + (b + v) j \eta \right] - (c + b \eta j)^2}.$$

При проведении расчетов упругих муфт, работающих в зарезонансной области, т.е. при  $\eta > \sqrt{2} k_0$ , можно обычно считать, что  $b = v = 0$ . Тогда выражение (6.10.42) упрощается:

$$\theta = \theta_{сТ} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sqrt{s^2 + J_d^2 l^2 \eta^2} \times \dots \rightarrow \dots \rightarrow \frac{L_l \cos(\eta t + \alpha_l + \xi_l)}{\left[ l^2 \eta^2 + s^2 (c - J_{м0} l^2 \eta^2)^2 \right]}, \quad (6.10.43)$$

где

$$\xi_l = \arg \frac{s j - J_d \eta}{\left( c - J_d l^2 \eta^2 + s \eta j \right) \left( c - J_{м0} l^2 \eta^2 \right) - c^2}.$$

В выражении для момента  $M_k$  остается при этом только упругая составляющая  $M_k = M_y = c\theta$ . Условия эффективности упругой муфты при действии возмущения, имеющего частоту  $\omega$ , принимают при этом следующий вид:

$$k_m = \frac{\sqrt{1 + \tau_d^2 \omega^2}}{\sqrt{\tau_m^2 \omega^2 \left( 1 - k^{-2} \omega^2 \right)^2 + \left( 1 - k_0^{-2} \omega^2 \right)^2}} < 1, \quad (6.10.44)$$

где  $\tau_d = J_d / s$  - механическая постоянная времени двигателя;  $\tau_m = (J_{м0} + J_d) / s$  - механиче-

ская постоянная времени машины;  $k^2 = c(J_d + J_{м0}) / (J_d J_{м0})$  - квадрат собственной частоты двухмассной системы;  $k_0^2 = c / J_{м0}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов О. Д., Манжосов В. К., Еремьянц В. Э. Удар: распространение волн деформаций в ударных системах. М.: Наука, 1985. 356 с.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
3. Астахов В. К. К динамике осциллятора, ударяющегося об ограничитель // Машиноведение. 1971. N 2. С. 3-6.
4. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 776 с.
5. Бабицкий В. И., Крупенин В. Л. Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985. 320 с.
6. Бабицкий В. И. Теория виброударных систем. М.: Наука, 1978. 352 с.
7. Беляковский Н. Г. Конструктивная амортизация механизмов, приборов и аппаратуры на судах. Л.: Судостроение, 1965. 524 с.
8. Беспрозрачная И. М., Соколов А. Г., Фокин Г. М. Воздействие ветра на высокие сплошностенчатые сооружения. М.: Стройиздат, 1976. 184 с.
9. Бидерман В. Л. Прикладная теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1972. 416 с.
10. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
11. Бобров А. В. Взаимодействие упругих стержней и оболочек с преградами // Статика и динамика тонкостенных конструкций. М.: Изд-во МГУ, 1980. С. 113-135.
12. Богоряд И. Б. Динамика вязкой жидкости со свободной поверхностью. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1980. 102 с.
13. Болотин В. В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 480 с.
14. Булгаков Б. В. Колебания. М.: Гостехиздат, 1954. 891 с.
15. Бутенин И. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев П. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 256 с.
16. Введение в механику сплошных сред / Под ред. К. Ф. Черных. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1984. 277 с.
17. Введение в аэроупругость / Под ред. С. М. Белоцерковского. М.: Наука, 1980. 383 с.
18. Вентцель Б. С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1964. 575 с.
19. Вентцель Б. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988. 480 с.

20. **Вибрация** в технике: Справочник. Т. 1. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
21. **Вибрация** в технике: Справочник. Т. 2. М.: Машиностроение, 1979. 351 с.
22. **Вибрация** в технике: Справочник. Т. 4. М.: Машиностроение, 1981. 510 с.
23. **Вибрация** в технике: Справочник. Т. 6. М.: Машиностроение, 1981. 454 с.
24. **Вульфсон И. И., Коловский М. З.** Нелинейные задачи динамики машин. Л.: Машиностроение, 1968. 286 с.
25. **Галкин М. С.** Теория колебаний упругих тел с деформируемыми полостями, частично заполненными сжимаемой жидкостью // Уч. записки ЦАГИ, 1977. С. 90-96.
26. **Галкин М. С.** О решении задачи Коши для одного уравнения // ПММ. т. XX, вып. 2. 1956. С. 271-278.
27. **Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О.** Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976. 431 с.
28. **Гольдсмит В.** Удар. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
29. **Голубков Ю. В., Ефремов А. К., Федосов А. А.** Инженерные методы исследования ударных процессов. М.: Машиностроение, 1989. 320 с.
30. **Григорьев Н. В.** Нелинейные колебания элементов машин и сооружений. М.: Машгиз, 1961. 382 с.
31. **Гусев А. С., Светлицкий В. А.** Расчет конструкций при случайных воздействиях. М.: Машиностроение, 1984. 240 с.
32. **Джонсон К.** Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
33. **Динамика машин и управление машинами / В. И. Асташев и др.** М.: Машиностроение, 1968. 240 с.
34. **Динамика ракет / Под ред. В. П. Мишина.** М.: Машиностроение, 1990. 463 с.
35. **Динамика удара / Дж. А. Зукас, Т. Николас, Х. Ф. Свифт и др.** М.: Мир, 1985. 296 с.
36. **Жуковский Н. Е.** О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной каплевой жидкостью. Собр. соч. Т. 2. М.-Л.: ГНТИ, 1931. 130 с.
37. **Журавлев В. Ф., Климов Д. М.** Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
38. **Заславский Г. М.** Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 320 с.
39. **Ильгамов М. А.** Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 187 с.
40. **Ильинский В. С.** Защита аппаратов от динамических воздействий. М.: Энергия, 1970. 320 с.
41. **Кельзон А. С., Журавлев Ю. Н., Январев Н. В.** Расчет и конструирование роторных машин. Л.: Машиностроение, 1977. 288 с.
42. **Кильчевский Н. А.** Динамическое контактное сжатие. Удар. Киев: Наукова Думка, 1976. 320 с.
43. **Клюкин И. И.** Борьба с шумом и звуковой вибрацией на судах. Л.: Судостроение, 1971. 416 с.
44. **Кобринский А. А., Кобринский А. Е.** Виброударные системы. М.: Наука, 1973. 519 с.
45. **Колесников К. С.** Динамика ракет. М.: Машиностроение, 1980. 376 с.
46. **Колесников К. С., Сухов В. Н.** Упругий летательный аппарат как объект автоматического управления. М.: Машиностроение, 1974. 267 с.
47. **Коловский М. З.** Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 316 с.
48. **Коловский М. З.** Нелинейная теория виброзащитных систем. М.: Наука, 1966. 318 с.
49. **Колесников М. З.** Динамика машин. Л.: Машиностроение, 1989. 263 с.
50. **Колебания элементов аксиально-поршневых гидромашин / Под ред. К. В. Фролова.** М.: Машиностроение, 1973. 279 с.
51. **Кононенко В. О.** Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 254 с.
52. **Коренев Б. Г., Резников Л. М.** Динамические гасители колебаний. М.: Наука, 1988. 303 с.
53. **Луковский И. А., Тропенко В. А., Усюкин В. И.** Взаимодействие тонкостенных упругих элементов с жидкостью в подвижных полостях. Киев: Наукова Думка, 1989. 240 с.
54. **Ляпунов В. Т., Никифоров А. С.** Виброизоляция в судовых конструкциях. Л.: Судостроение, 1975.
55. **Матвеев В. В.** Демпфирование колебаний деформируемых тел. Киев: Наукова Думка, 1985. 263 с.
56. **Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н.** Основы теории колебаний. М.: Наука, 1978. 392 с.
57. **Микишев Г. Н.** Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
58. **Микишев Г. Н., Рабинович Б. И.** Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М.: Машиностроение, 1971. 563 с.
59. **Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.** Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
60. **Нагаев Р. Ф.** Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1985. 200 с.
61. **Найденко О. К., Петров П. П.** Амортизация судовых двигателей и механизмов. Л.: Судпромгиз, 1962. 288 с.
62. **Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А.** Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М.: Машиностроение, 1977. 208 с.

63. **Неймарк Ю. И.** Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. 471 с.
64. **Неймарк Ю. И., Ланда П. С.** Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
65. **Пановко Я. Г.** Введение в теорию механического удара. М.: Машиностроение, 1977. 220 с.
66. **Пановко Я. Г.** Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 247 с.
67. **Пановко Я. Г.** Основы прикладной теории колебаний и удара. М.: Машиностроение, 1976. 320 с.
68. **Позняк Э. Л., Гладышева Т. Н.** Маятниковые и ротационные колебания жесткого неуравновешенного тяжелого ротора в подшипниках с зазорами // Вибротехника, 1990. № 3 (63). С. 50-59.
69. **Позняк Э. Л., Чесноков С. А.** Экспериментальные и расчетные исследования шарового ряда в электромагнитном подвесе // Труды ВНИИЭМ. Т. 68. М., 1981. С. 71-82.
70. **Поляков В. С., Барбаш И. Д., Ряховский О. А.** Справочник по муфтам. Л.: Машиностроение, 1974. 348 с.
71. **Попов Е. П.** Динамика систем автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1954. 798 с.
72. **Прочность. Устойчивость. Колебания:** справочник. Т. 3. / Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 567 с.
73. **Пугачев В. С.** Введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1968. 368 с.
74. **Розенвассер Е. М.** Периодические нестационарные системы управления. М.: Наука, 1973. 512 с.
75. **Сагомонян А. Я.** Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 300 с.
76. **Светлицкий В. А.** Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 277 с.
77. **Светлицкий В. А.** Случайные колебания механических систем. М.: Машиностроение, 1975. 215 с.
78. **Светлицкий В. А.** Динамика старта летательных аппаратов. М.: Наука, 1986. 280 с.
79. **Сорокин Е. С.** К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Гостройиздат, 1960. 132 с.
80. **Справочник по судовой акустике.** Л.: Судостроение, 1978. 504 с.
81. **Стокер Дж.** Нелинейные колебания в механических системах. М.: ИЛ, 1952. 254 с.
82. **Стрелков С. П.** Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. 437 с.
83. **Тимошенко С. П.** Колебания в инженерном деле: Пер. с англ. М.: Наука, 1967. 444 с.
84. **Тондл А.** Динамика роторов турбоагрегатов. Л.: Энергия, 1971. 387 с.
85. **Тондл А.** Автоколебания механических систем. М.: Мир, 1979. 429 с.
86. **Феодосьев В. И.** Сопrotивление материалов. М.: ГИФМЛ, 1962. 536 с.
87. **Халфман Р.** Динамика: Пер. с англ. М.: Наука, 1972. 568 с.
88. **Харкевич А. А.** Автоколебания. М.: Гостехиздат, 1953. 170 с.
89. **Харрис С. М., Крид Ч. И.** Справочник по ударным нагрузкам. Л.: Судостроение, 1980. 358 с.
90. **Хаяси Т.** Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1966. 432 с.
91. **Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний / А. М. Веприк и др.** Л.: Машиностроение, 1979. 78 с.
92. **Якубович В. А., Старжинский В. М.** Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
93. **Grybos R.,** Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych. Warszawa, 1969. 450 с.

## Раздел 7

# УСТОЙЧИВОСТЬ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### Глава 7.1

#### ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

##### 7.1.1. УСТОЙЧИВОСТЬ

Устойчивость - термин, широко применяемый в математике, естествознании, технике и обыденной жизни. Толковый словарь Даля определяет слово "устойчивый" как "стойкий, крепкий, твердый, не шаткий". Термин "устойчивость" встречается уже в работах Эйлера по продольному изгибу стержней, переведенных на русский язык. Лагранж, Пуассон и другие математики прошлого широко использовали термин "устойчивость" применительно к задачам о движении небесных тел. Теория регулятора Уатта, разработанная Максвеллом и Вышнеградским, была в сущности первым применением понятия устойчивости в машиноведении и отправной точкой для создания теории автоматического регулирования (позднее - более общей теории автоматического управления). Р. Беллман характеризовал устойчивость как "сильно перегруженный термин с неустановившимся определением". Однако большинство трактовок этого понятия связано с определением устойчивости по Ляпунову и его дальнейшими обобщениями. Это полностью относится и к устойчивости механических систем [6].

Устойчивость есть свойство движения (в частном случае - равновесия), понимаемого в широком, общенаучном смысле слова. Рассмотрим механическую, электрическую, термодинамическую, биологическую и т.п. системы. Допустим, что известно движение этой системы, осуществляемое при определенном сочетании параметров системы и окружающей среды. Назовем это движение невозмущенным. Теперь представим себе, что эти параметры (все или их часть) получили небольшие изменения. Движение системы при этом также изменится. Возникает вопрос о том, насколько велики будут эти изменения, т.е. насколько возмущенное движение будет отличаться от невозмущенного движения. Если малые воздействия вызывают малые отклонения от невозмущенного движения, то возмущенные движения более или менее плотно группируются около невозмущенного движения. В этом случае невозмущенное движение называют *устойчивым*. Если же малые воздействия вызывают большие отклонения системы от невозмущенного движения, то движение называют *неустойчивым*. Таким

образом, устойчивость есть свойство системы мало отклоняться от невозмущенного движения при малых возмущающих воздействиях.

Понятие устойчивости имеет фундаментальное значение. И в природе, и в активной человеческой деятельности сколько-нибудь длительно могут быть использованы лишь устойчивые явления и процессы. Неустойчивые движения могут наблюдаться только непродолжительное время. Таким образом, понятие устойчивости оказывается тесно связанным с понятием осуществимости, реализуемости.

Вопросам устойчивости принадлежит большое место в инженерных расчетах. Идеализированная машина или конструкция, проектируемая инженером, отличается от реального объекта. Это отличие обусловлено многочисленными более или менее мелкими отклонениями от проекта, дефектами и несовершенствами. Инженеру необходима уверенность в том, что, несмотря на наличие этих отклонений, реальный объект будет работать примерно так же, как и соответствующая расчетная модель. При отсутствии такой уверенности проектирование утратило бы смысл. Нетрудно видеть, что именно здесь используется концепция устойчивости. Равновесие или движение проектируемого технического объекта будет устойчиво, если малые несовершенства и дефекты, малые отклонения от расчетной схемы вызовут малые отклонения от идеализированных условий работы. Если же малые несовершенства вызовут несопоставимо большие отклонения, то равновесие (движение) будет неустойчивым. Конструктор или проектировщик должен выбрать параметры объекта таким образом, чтобы при всех возможных комбинациях нагрузок его равновесие (движение) оставалось устойчивым по отношению ко всем видам возмущений, которые могут встретиться, и, более того, чтобы обеспечивался определенный запас устойчивости.

Устойчивость поведения технических объектов, в частности, машин и систем машин тесно связана с понятием надежности, т.е. свойством объекта сохранять в заданных пределах значения всех параметров, которые характеризуют его способность к выполнению возложенных функций. Аналогично можно говорить об устойчивости технологических процессов, устойчивости систем технического обслуживания и т.п.

Отметим четыре элемента, которые входят в определение устойчивости. Во-первых, это указание на невозмущенное движение

(равновесие), устойчивость которого исследуется. Нельзя говорить об “устойчивости системы” вообще, можно говорить лишь об устойчивости определенного движения (равновесия) этой системы. Во-вторых, определение устойчивости должно содержать указание на то, по отношению к каким параметрам движения исследуется устойчивость. Движение может быть устойчивым по отношению к одной группе параметров и неустойчивым по отношению к другой. Третьим элементом определения является указание на класс возмущающих воздействий, вызывающих отклонения от невозмущенного движения. Четвертый элемент - указание на интервал времени, в течение которого требуется близость невозмущенного и возмущенного движений.

Перечисленные требования относятся к понятию устойчивости по Ляпунову и его различным обобщениям (устойчивость при постоянно действующих возмущениях, устойчивость по отношению к части переменных, равномерная устойчивость и т.п. [30, 46]). Различают также устойчивость по Лагранжу как свойство системы оставаться в ограниченной области фазового пространства, устойчивость по Пуассону как свойство системы возвращаться сколь угодно близко к начальному состоянию и др. Особо следует выделить введенное А. А. Андроновым понятие структурной устойчивости (“грубости” или “робастности”). Под структурной устойчивостью понимают способность системы сохранять качественный характер поведения при малых изменениях параметров системы. Очевидно, что требование структурной устойчивости также имеет большое значение для машиностроения: грамотно запроектированные машины, безусловно, должны обладать структурной устойчивостью. В последние годы категории устойчивости и родственные им понятия получили широкое распространение в теоретической и вычислительной математике. В частности, говорят об устойчивых разностных схемах, устойчивых алгоритмах и т.п. Так называемые “теория катастроф” и “теория странных аттракторов” также находятся в тесной связи с теорией устойчивости в широком смысле.

В дальнейшем изложении мы, как правило, следуем определению устойчивости по Ляпунову и родственным определениям.

### 7.1.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для определенности будем рассматривать системы, поведение которых во времени  $t$  описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Представим уравнение движения системы в матрично-векторной форме

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}). \quad (7.1.1)$$

Здесь  $N$ -мерная вектор-функция  $\mathbf{u}(t)$  характеризует состояние системы в каждый момент времени на некотором отрезке  $I = [t_0, t_1]$ , где  $t_0$  -

начальный момент времени, например,  $t_0 = 0$ . Обычно полагают  $t_1 \rightarrow \infty$ . В противном случае говорят об устойчивости на конечном отрезке времени. Область возможных значений  $\mathbf{u}(t)$  есть фазовое пространство  $D \subset \mathcal{R}^N$ . Будем называть  $\mathbf{u}(t)$  фазовым вектором. В правой части уравнения (7.1.1) стоит  $N$ -мерная вектор-функция времени  $t$ , фазового вектора  $\mathbf{u}(t)$  и числового вектора  $\boldsymbol{\beta}$ , включающего те параметры системы и (или) внешних воздействий, которые по условиям задачи могут изменяться. Пусть размерность вектора  $\boldsymbol{\beta}$  равна  $r$ , так что функция  $\mathbf{F}$  осуществляет преобразование  $I \times \mathcal{R}^N \times \mathcal{R}^r \rightarrow \mathcal{R}^N$ . На свойства функции  $\mathbf{F}$  накладываются некоторые ограничения, например, условие непрерывной дифференцируемости по всем аргументам. Эти ограничения могут быть частично ослаблены, например, заменены условиями существования при любом  $t \in I$  и единственности решения задачи Коши.

Для механической системы с  $n$  степенями свободы уравнения движения относительно обобщенных координат  $q_1(t), \dots, q_n(t)$  могут быть записаны в виде

$$A\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\beta}), \quad (7.1.2)$$

где  $n$ -мерная вектор-функция  $\mathbf{q}(t)$  составлена из обобщенных координат;  $\mathbf{A}$  - матрица инерционных коэффициентов размерностью  $n \times n$ , так что левая часть уравнения содержит взятые с противоположным знаком обобщенные даламберовы силы инерции. Обобщенные силы, образующие  $n$ -мерный вектор  $\mathbf{Q}$ , зависят от явного времени  $t$ , обобщенных координат  $q_j$  и обобщенных скоростей  $\dot{q}_j$ , а также от вектора параметров  $\boldsymbol{\beta}$ . Полагая в уравнениях (7.1.2)  $q_j = u_j$ ,  $\dot{q}_j = u_{n+j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , приходим к уравнениям (7.1.1) с размерностью фазового пространства  $N = 2n$ . Если рассматриваемый объект включает систему автоматического управления или правые части зависят от старших производных (например, от  $q_j^{III}$ ), то размерность фазового пространства будет иной, в частности, может оказаться нечетной.

**Пример 1.** Возьмем уравнение линейной автономной механической системы с  $n$  степенями свободы

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (7.1.3)$$

где  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  - матрицы размерностью  $n \times n$  с постоянными действительными коэффициентами.

Вводя фазовый вектор  $\mathbf{u}^T = (\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T)$ , приведем (7.1.3) к виду (7.1.1):

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{G}\mathbf{u}. \quad (7.1.4)$$

Матрица  $\mathbf{G}$  имеет вид

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (7.1.5)$$

Пусть поставлена задача об устойчивости движения системы, которому отвечает решение уравнения (7.1.1) с начальным условием  $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \in D$ . Назовем это движение *невозмущенным*. Ему соответствует некоторая траектория  $\mathbf{u}(t)$  в расширенном фазовом пространстве  $D \times I$  (пространстве событий). В частном случае равновесия невозмущенному состоянию соответствует точка  $\mathbf{u}_0 \in D$ . Движение, описываемое уравнением (7.1.1) при малых изменениях начальных условий и (или) правых частей, назовем *возмущенным движением*. Будем обозначать возмущенное решение  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ . Близость решений  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$  и  $\mathbf{u}(t)$  будем оценивать по какой-либо норме в пространстве  $D$ , например, по норме, порождаемой евклидовой метрикой:

$$\|\tilde{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{u}(t)\|^2 = \sum_{k=1}^N [\tilde{u}_k(t) - u_k(t)]^2. \quad (7.1.6)$$

Другой пример дает норма

$$\|\tilde{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{u}(t)\| = \max_k |\tilde{u}_k(t) - u_k(t)|. \quad (7.1.7)$$

В некоторых приложениях не требуется малых отклонений по всем фазовым переменным. Так, если поставлено условие траекторной устойчивости (безотносительно к изменению скоростей и, следовательно, временному положению системы по данной траектории), то близость движений оценивается в пространстве конфигураций, т.е. по норме  $\|\tilde{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{q}(t)\|$ . Здесь  $\tilde{\mathbf{q}}(t)$  и  $\mathbf{q}(t)$  - соответственно возмущенное и невозмущенное решения уравнений (7.1.2).

### 7.1.3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ И РОДСТВЕННЫЕ ПОНЯТИЯ

Рассмотрим поведение системы, описываемой уравнением (7.1.1), на полубесконечном отрезке времени  $I = [t_0, \infty)$ .

Невозмущенное движение  $\mathbf{u}(t)$  называют *устойчивым по Ляпунову*, если для любых  $\varepsilon > 0$  и  $t_0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$  такое, что для всех возмущенных движений  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ , удовлетворяющих в начальный момент времени условию

$$\|\tilde{\mathbf{u}}(t_0) - \mathbf{u}(t_0)\| < \delta, \quad (7.1.8)$$

будет выполняться неравенство

$$\|\tilde{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{u}(t)\| < \varepsilon \quad (7.1.9)$$

для всех моментов времени  $t \geq t_0$ . Здесь  $\|\cdot\|$  - какая-либо из норм в фазовом пространстве  $D$ .

Другими словами, невозмущенное движение  $\mathbf{u}(t)$  устойчиво, если оно неограниченно продолжаемо вправо и возмущенные движения  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ , достаточно близкие к нему в начальный момент времени  $t_0$ , не выходят из  $\varepsilon$ -трубки, окружающей движение (рис. 7.1.1, а).

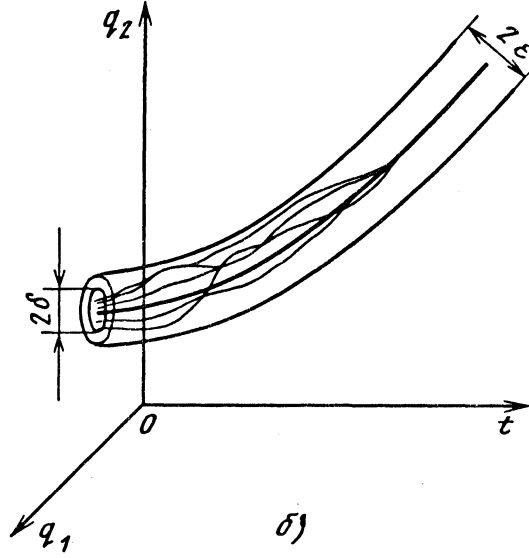
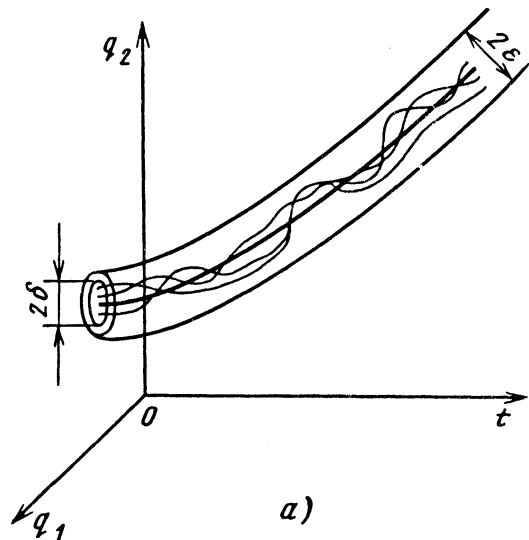


Рис. 7.1.1. К определению устойчивости: а - устойчивость по Ляпунову; б - асимптотическая устойчивость

Невозмущенное движение  $\mathbf{u}(t)$  называют *неустойчивым по Ляпунову*, если существуют некоторые  $\varepsilon > 0$  и  $t_0$  такие, что для любого  $\delta > 0$  существует хотя бы одно возмущенное движение  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$  и такой момент времени  $t_\delta > t_0$ , что выполняются неравенства

$$\|\tilde{\mathbf{u}}(t_0) - \mathbf{u}(t_0)\| < \delta; \quad \|\tilde{\mathbf{u}}(t_\delta) - \mathbf{u}(t_\delta)\| \geq \varepsilon. \quad (7.1.10)$$

Невозмущенное движение  $\mathbf{u}(t)$  называют *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и все возмущенные движения  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ , удовлетворяющие условию  $\|\tilde{\mathbf{u}}(t_0) - \mathbf{u}(t_0)\| < \Delta(t_0)$ , обладают таким свойством, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{u}(t)\| = 0. \quad (7.1.11)$$

Таким образом, асимптотическая устойчивость включает в себя как устойчивость по Ляпунову, т.е. малость отклонений от невозмущенного движения при любых  $t > t_0$ , так и асимптотическое приближение всех возмущенных движений к невозмущенному при  $t \rightarrow \infty$  (рис. 7.1.1, б).

Приведем определения еще нескольких понятий, близких к понятию асимптотической устойчивости. Асимптотическую устойчивость называют *равномерной относительно  $t_0$* , если соотношение (7.1.11) выполняется равномерно относительно  $t_0$ . Движение  $\mathbf{u}(t)$  называют *равномерно асимптотически устойчивым* по отношению к начальным условиям, если в (7.1.11) выполняется равномерность предела по начальным условиям  $\tilde{\mathbf{u}}(t_0)$ . Для автономных систем асимптотическая устойчивость будет всегда равномерной относительно начальных данных. Невозмущенное движение  $\mathbf{u}(t)$  называют *асимптотически устойчивым в целом*, если оно устойчиво и свойство (7.1.11) выполняется для движений  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ , определяемых любыми начальными данными.

Представив возмущенное движение в виде

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{x}(t), \quad (7.1.12)$$

запишем уравнения (7.1.1) относительно отклонений  $\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{u}(t)$ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \beta). \quad (7.1.13)$$

Здесь  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \beta) = \mathbf{F}[t, \mathbf{u}(t) + \mathbf{x}(t), \beta] - \mathbf{F}[t, \mathbf{u}(t), \beta]$ .

Для невозмущенных движений при  $t \geq t_0$  имеем  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}, \beta) = \mathbf{0}$ . Правые части системы (7.1.13) зависят от невозмущенного движения  $\mathbf{u}(t)$ . Систему уравнений (7.1.13) называют *дифференциальными уравнениями возмущенного движения*. Эти уравнения удобны в том смысле, что позволяют условно трактовать невозмущенное движение как состояние равновесия и таким образом упростить некоторые формулировки. В

самом деле, как невозмущенному движению  $\mathbf{u}(t)$ , так и невозмущенному равновесию  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$  соответствует нулевое решение (положение равновесия)  $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{0}$  системы (7.1.13).

Переформулируем определения устойчивости в терминах уравнений возмущенного движения (7.1.13). Положение равновесия  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  называют *устойчивым по Ляпунову*, если для любых  $\varepsilon > 0$  и  $t_0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$  такое, что для всех решений  $\mathbf{x}(t)$ , удовлетворяющих в начальный момент времени неравенству  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$ , следует неравенство  $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ , справедливое для всех  $t \geq t_0$ . Если, кроме того, всякое решение  $\mathbf{x}(t)$  системы (7.1.13), начальные данные которого удовлетворяют условию  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \Delta(t_0)$ , обладает свойством  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$ , то положение равновесия называют *асимптотически устойчивым*.

Сделаем следующее замечание относительно начального момента времени  $t_0$ . Если невозмущенное движение  $\mathbf{u}(t)$  устойчиво по Ляпунову для какого-нибудь фиксированного  $t_0$ , то оно будет устойчивым по Ляпунову для любого  $t'_0 > t_0$ . Поэтому можно ограничиться проверкой устойчивости и асимптотической устойчивости лишь для некоторого заданного момента  $t_0$ .

До сих пор рассматривалась устойчивость по отношению к начальным возмущениям. Многие практические задачи приводят к анализу устойчивости движения по отношению к дополнительным воздействиям, например, возмущающим силам, появляющимся в процессе движения. Обычно можно считать, что эти воздействия достаточно малы, а для невозмущенного движения равны нулю. В этом случае говорят об устойчивости (неустойчивости) по отношению к постоянно действующим возмущениям. Термин не вполне улачен, поскольку возмущения могут изменяться во времени, в частности, исчезать на некоторых участках фазовых траекторий.

Сформулируем понятие устойчивости при постоянно действующих возмущениях в терминах отклонений. Вместо уравнений (7.1.13) имеем

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \beta) + \mathbf{r}(t, \mathbf{x}), \quad (7.1.14)$$

где  $\mathbf{r}(t, \mathbf{x})$  - возмущения правых частей уравнений (7.1.13), так что  $\mathbf{r}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

Положение равновесия  $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{0}$  системы (7.1.13) называют *устойчивым при постоянно*

действующих возмущениях  $\mathbf{r}(t, \mathbf{x})$ , если для любых  $\varepsilon > 0$  и  $t_0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$  такое, что при  $\|\mathbf{r}(t, \mathbf{x})\| < \delta$  все решения системы (7.1.14), удовлетворяющие условию  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$ , определены на интервале  $[t_0, \infty)$  и  $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$  при  $t \geq t_0$ .

Доказано, что если положение равновесия  $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{0}$  системы (7.1.13) устойчиво в достаточно сильном смысле по отношению к возмущению начальных условий, то оно устойчиво и при постоянно действующих возмущениях [30]. Например, если положение равновесия равномерно асимптотически устойчиво, то это положение равновесия устойчиво относительно малых постоянно действующих возмущений.

Существенное обобщение классического понятия устойчивости по Ляпунову требуется для задач, в которых нельзя игнорировать случайную природу начальных отклонений и возмущений, действующих во время движения. Эти обобщения будут рассмотрены в п. 7.9.6.

#### 7.1.4. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Механические системы, как правило, обладают нелинейными свойствами. В прикладных расчетах, полагая отклонения от невозмущенного движения (равновесия) достаточно малыми, вкладом нелинейных факторов обычно пренебрегают, что сильно упрощает как аналитические выкладки, так и численные расчеты. Принцип суперпозиции, справедливый для линейных систем, позволяет анализировать отдельно влияние разных факторов и оценивать их результирующий эффект путем сложения частных решений. Этот путь кажется естественным и при анализе устойчивости, тем более что при этом анализе возмущения, как правило, малы по определению. Отбрасывание нелинейных членов (при условии их аналитичности в окрестности невозмущенного движения) представляется интуитивно оправданным. Однако строгий анализ показывает, что это можно делать далеко не всегда. Ответ на вопрос о том, при каких условиях допустимо линеаризировать уравнения возмущенного движения, дает теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Рассмотрим систему уравнений возмущенного движения вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \quad (7.1.15)$$

Здесь  $\mathbf{G}$  - матрица с постоянными коэффициентами. Функция  $\mathbf{f}: I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  непрерывна в некоторой области  $\|\mathbf{x}\| \leq c$ ,  $t \geq t_0$  и удовлетворяет при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  условию

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| / \|\mathbf{x}\| \rightarrow 0 \quad (7.1.16)$$

равномерно по  $t$ . Очевидно, что  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  является решением системы (7.1.15).

Наряду с уравнениями (7.1.15) рассмотрим систему уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}\mathbf{x}, \quad (7.1.17)$$

которая получается из (7.1.15) после отбрасывания нелинейных членов. Эти уравнения называют *уравнениями первого приближения или уравнениями в вариациях* (по Пуанкаре). Возникает вопрос об условиях, при которых устойчивому решению  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  системы (7.1.17) соответствует устойчивое решение системы (7.1.15). То, что ответ на этот вопрос нетривиален, видно из следующего примера.

**Пример 2.** Рассмотрим систему двух уравнений

$$\dot{x}_1 = -\beta_1 x_2 + \beta_2 x_1^3; \quad (7.1.18)$$

$$\dot{x}_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2^3,$$

где  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  - параметры. Эта система имеет решение  $x_1 = x_2 = 0$ , которое примем за невозмущенное. В качестве функции Ляпунова возьмем евклидову норму  $\|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ . Вычислим производную от квадрата этой нормы

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\|^2 = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2.$$

Вдоль траекторий системы в силу (7.1.18) имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\|^2 = \beta_2 (x_1^4 + x_2^4). \quad (7.1.19)$$

Если  $\beta_2 > 0$ , то правая часть будет положительной и, следовательно,  $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Решение  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  будет неустойчивым по Ляпунову. Если  $\beta_2 < 0$ , то это решение асимптотически устойчиво. В линейном приближении правые части уравнений не зависят от параметра  $\beta_2$ , а матрица  $\mathbf{G}$  имеет чисто мнимые характеристические показатели  $\lambda_{1,2} = \pm i\beta_1$ . Нулевое решение линейной системы устойчиво по Ляпунову. Следовательно, суждение об устойчивости решений нелинейной системы по уравнениям первого приближения не всегда приводит к верным выводам.

Имеют место следующие утверждения.

Если все собственные значения постоянной матрицы  $\mathbf{G}$  имеют отрицательные действительные части и если функция  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  удовлетворяет условию (7.1.16), то положение равновесия  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  системы (7.1.15) асимптотически устойчиво.

Если хотя бы одно собственное значение матрицы  $\mathbf{G}$  имеет положительную действительную часть, то положение равновесия  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  нелинейной системы (7.1.15) неустойчиво по Ляпунову.

Случай, когда матрица  $\mathbf{G}$  имеет чисто мнимые собственные значения, называют *сомни-*



тельным (критическим) по Ляпунову. Уравнения первого приближения не позволяют судить об устойчивости положения равновесия нелинейной системы. Требуется рассмотрение членов более высокого порядка. В рассмотренном выше примере как раз имеет место сомнительный случай.

Сформулированные выше утверждения относятся к случаю, когда линейное приближение приводит к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. Это типично для задач об устойчивости состояний равновесия или стационарного движения. В общем случае матрица  $G$  уравнений первого приближения зависит от  $t$ . При этом нельзя утверждать, что из асимптотической устойчивости решений уравнений первого приближения следует устойчивость решений нелинейной системы. Ляпунов выделил класс так называемых "правильных" систем, для которых справедлив аналог теоремы об устойчивости по первому приближению. Среди этих систем - системы с переменными коэффициентами, которые являются ограниченными периодическими функциями времени с одинаковым вещественным периодом.

### 7.1.5. УСТОЙЧИВОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Расчетными моделями конструкций, машин и их компонентов часто служат системы, имеющие континуальное множество степеней свободы. Таковы деформируемые тела - стержни, стержневые системы, пластины, оболочки из упругих, упругопластических и других материалов (исключение составляют расчетные схемы с сосредоточенными массами). Таковы многие системы, взаимодействующие с газом или жидкостью, гидравлические и пневматические системы, рабочие органы которых рассматриваются с позиций механики жидкостей и газов.

Распространение теории Ляпунова на распределение (континуальные) системы стало возможным после того, как она была сформулирована в терминах функционального анализа. Это позволило обобщить на весьма широкий класс метрических пространств многие понятия, теоремы и методы, данные Ляпуновым и его последователями для конечномерного евклидова пространства.

Приведем основные определения [21], опуская при этом некоторые математические тонкости. Для простоты ограничимся случаем, когда движение описывается одной функцией  $u(x, t)$  координаты  $x$  и времени  $t$ . Рассмотрим множество движений, удовлетворяющих граничным условиям, условиям непрерывности и начальному условию  $u(x, 0) = \varphi(x)$ . Обозначим элементы этого множества через  $U = U(\varphi, t)$  и введем метрическое расстояние между элементами множества, обозначаемое через  $\rho(U_1, U_2)$ . Пусть

невозмущенному движению  $U_0$  соответствует начальное условие  $u(x, 0) = \varphi_0(x)$ . Невозмущенное движение  $U_0$  называют устойчивым по отношению к метрике  $\rho$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta > 0$ , что из условия  $\rho(\varphi, \varphi_0) < \delta$  следует  $\rho[U(\varphi, t), U_0] < \varepsilon$  для любых  $t > 0$ . В противном случае движение называют неустойчивым. Если невозмущенное движение  $U_0$  устойчиво и, кроме того,  $\rho[U(\varphi, t), U_0] \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , то его называют асимптотически устойчивым.

Выбор метрик зависит от типа задачи и требований, которые накладываются на невозмущенное движение из соображений физического и технического характера. Требование локальной близости функций и их производных приводит к метрикам типа

$$\rho_1 = \sup_x |u - v|; \quad \rho_2 = \sup_x |u - v| + \sup_x |u_{,t} - v_{,t}|;$$

$$\rho_3 = \sup_x |u - v| + \sup_x |u_{,t} - v_{,t}| + \sup_x |u_{,x} - v_{,x}|,$$

где индексы после запятой обозначают дифференцирование по соответствующим аргументам. Другую группу образуют метрики, соответствующие близости в "среднем":

$$\rho_4 = \left[ \int_0^l (u - v)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\rho_5 = \left\{ \int_0^l \left[ (u - v)^2 + (u_{,t} - v_{,t})^2 \right] dx \right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$\rho_6 = \left\{ \int_0^l \left[ (u - v)^2 + (u_{,t} - v_{,t})^2 + (u_{,x} - v_{,x})^2 \right] dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где  $[0, l]$  - область изменения координаты  $x$ .

В приложениях обычно требуется не только устойчивость по перемещениям и скоростям, но и по напряжениям и деформациям. К тому же в сплошной среде малость начальных перемещений и скоростей не означает малости начальной энергии системы и не исключает "всплесков" перемещений и скоростей при  $t > 0$ . Поэтому важное место принадлежит метрикам энергетического типа.

**Пример 3.** Уравнение возмущенного движения тонкого упругого стержня, нагруженного сжимающей продольной силой  $N$ , при малых отклонениях от прямолинейной формы равновесия  $w \equiv 0$  имеет вид

$$EJw_{,xxxx} + mw_{,tt} + 2m\epsilon w_{,t} + Nw_{,xx} = 0. \quad (7.1.20)$$

Здесь  $w(x,t)$  - прогиб оси стержня;  $x$  - координата, отсчитываемая вдоль длины стержня  $l$ ;  $EJ$  - жесткость сечения стержня при изгибе;  $m$  - масса стержня, отнесенная к единице длины;  $\epsilon$  - положительный числовой параметр. Член  $2m\epsilon w_{,t}$  в уравнении (7.1.20) учитывает демпфирование, которое при определенных ограничениях на другие параметры обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения. Для суждения о близости возмущенных движений к невозмущенному используем метрику  $\rho_7 = V^{1/2}$ , где

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EJw_{,xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l mw_{,t}^2 dx. \quad (7.1.21)$$

Очевидно, функция  $V$  имеет смысл полной механической энергии системы без учета вклада от силы  $N$ .

Строгие методы теории устойчивости движения могут быть распространены на распределенные системы. При этом, например, вместо функций Ляпунова вводят функционалы Ляпунова, производные от которых по времени в силу уравнений движения обладают определенными свойствами. По этим свойствам судят об устойчивости (неустойчивости) невозмущенного движения. Если модель распределенной системы линейна или если для выводов об устойчивости используют уравнения первого приближения (уравнения в вариациях), то анализ устойчивости приводит к некоторым обобщенным задачам о собственных значениях.

Покажем порядок составления линеаризованных уравнений применительно к задачам об устойчивости форм движения упругого тела [4]. При этом будем исходить из уравнений нелинейной теории упругости в форме, предложенной В. В. Новожиловым. Рассмотрим невозмущенное движение упругого тела, характеризуемое вектором перемещений  $u_j$ , тензором напряжений  $\sigma_{jk}$ , векторами объемных и поверхностных сил  $X_j$  и  $p_j$ . Невозмущенное движение в прямоугольных декартовых координатах  $x_1, x_2, x_3$  описывается уравнениями

$$\left[ \sigma_{ik} (\delta_{jl} + u_{j,l}) \right]_{,k} + X_j - \rho u_{j,tt} = 0, \quad (7.1.22)$$

где  $\rho$  - плотность материала. Здесь и в дальнейшем использовано правило суммирования по немым индексам. На нагруженной части поверхности тела должны выполняться условия

$$\sigma_{ik} (\delta_{jl} + u_{j,l}) n_k = p_j \quad (7.1.23)$$

( $n_k$  - вектор нормали к поверхности тела). Дадим телу некоторые малые отклонения от невозмущенного движения и проследим за тем, как эти отклонения меняются со временем. Компоненты возмущенного движения (будем обозна-

чать их значком  $\tilde{\phantom{x}}$ , а отклонения - черточкой сверху) имеют вид

$$\tilde{u}_j = u_j + \mu \bar{u}_j; \quad \tilde{\sigma}_{jk} = \sigma_{jk} + \mu \bar{\sigma}_{jk}; \quad (7.1.24)$$

$$\tilde{X}_j = X_j + \mu \bar{X}_j; \quad \tilde{p}_j = p_j + \mu \bar{p}_j$$

(возмущения объемных и поверхностных сил в общем случае зависят от времени  $t$ ;  $\mu$  - малый параметр). Подставляя (7.1.24) в (7.1.22) и (7.1.23) и используя малость отклонений, получим после линеаризации уравнения

$$\left[ \bar{\sigma}_{ik} (\delta_{jl} + u_{j,l}) + \sigma_{ki} \bar{u}_{j,l} \right]_{,k} + \bar{X}_j - \rho \bar{u}_{j,tt} = 0 \quad (7.1.25)$$

и граничные условия на нагруженной поверхности

$$\left[ \bar{\sigma}_{ki} (\delta_{jl} + u_{j,l}) + \sigma_{ki} \bar{u}_{j,l} \right] n_k = \bar{p}_j. \quad (7.1.26)$$

При этом  $\bar{\sigma}_{jk} = \lambda_{jklm} \bar{u}_{l,m}$ , где  $\lambda_{jklm}$  - тензор упругих постоянных, соответствующий невозмущенному напряженному состоянию.

При анализе устойчивости деформируемых систем обычно используют приближенные уравнения теории тонких стержней, пластин и оболочек.

**Пример 4.** Используем данные примера 3, полагая, что все коэффициенты уравнения (7.1.20) - постоянные. Возмущенные движения ищем в классе  $w(x,t) = W(x) \exp(\lambda t)$ , где  $W(x)$  - функции координаты;  $\lambda$  - в общем случае комплексные числа (характеристические показатели). В результате подстановки в уравнение (7.1.20) получаем

$$EJW^{IV} + m\lambda^2 W + 2m\epsilon\lambda W + NW'' = 0. \quad (7.1.27)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение нужно решать при граничных условиях, вытекающих из граничных условий исходного уравнения (7.1.20). Так, если концы стержня  $x=0$  и  $x=l$  шарнирно оперты, то на концах  $W=W''=0$ . Уравнение (7.1.27) совместно с этими условиями образует обобщенную задачу о собственных значениях относительно характеристических показателей  $\lambda$ . Решение  $w(x,t) \neq 0$  уравнения (7.1.20) асимптотически устойчиво, если все характеристические показатели  $\lambda$  лежат в левой полуплоскости комплексного переменного.

В практических расчетах сложных распределенных систем широко применяют вариационные и разностные, а также родственные им методы, например методы конечных или граничных элементов. В результате распределенная система аппроксимируется системой с конечным числом степеней свободы. Хотя это число может оказаться весьма большим, к таким системам полностью применима классическая теория устойчивости движения. Численные методы анализа устойчивости применительно к системам высокой размерности освещены в гл. 7.4.

## Глава 7.2

## УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

## 7.2.1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

Линейные модели широко используют при расчетах и проектировании технических объектов. В условиях применимости теоремы об устойчивости по первому приближению анализ устойчивости линейной системы позволяет делать выводы об устойчивости соответствующей нелинейной системы.

Предположим, что поведение объекта во времени описывается линейной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{G}(t)\mathbf{u} + \mathbf{p}(t), \quad (7.2.1)$$

где  $\mathbf{G}(t)$  - матрица-функция размерностью  $N \times N$ ;  $\mathbf{u}$  - фазовый вектор размерностью  $N$ ;  $\mathbf{p}(t)$  - заданная вектор-функция той же размерности. Будем полагать  $\mathbf{p}(t)$  и  $\mathbf{G}(t)$  непрерывными функциями  $t$ . Рассмотрим соответствующую однородную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(t)\mathbf{x}. \quad (7.2.2)$$

Для линейных дифференциальных систем справедлив принцип суперпозиции. В отличие от нелинейных систем решения линейных систем либо все одновременно устойчивы по Ляпунову, либо неустойчивы. В зависимости от этого линейную систему (7.2.1) называют либо устойчивой, либо вполне неустойчивой. Приведем ряд часто используемых теорем.

Для устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений (7.2.1) при любом  $\mathbf{p}(t)$  необходимо и достаточно, чтобы было устойчиво тривиальное решение  $\mathbf{x}(t) \equiv 0$  соответствующей однородной системы (7.2.2).

Как следствие, отсюда вытекает, что линейная система устойчива, когда устойчиво хотя бы одно решение этой системы, и вполне неустойчива, если неустойчиво некоторое ее решение. В теореме  $\mathbf{p}(t)$  может быть любым, в том числе и нулевым.

Линейную дифференциальную систему уравнений (7.2.1) называют асимптотически устойчивой, если все ее решения асимптотически устойчивы. Имеет место соответствующая теорема.

Линейная система дифференциальных уравнений (7.2.1) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда тривиальное решение  $\mathbf{x}(t) \equiv 0$  однородной системы (7.2.2) асимптотически устойчиво при  $t \rightarrow \infty$ .

Из вышеприведенного следует, что с позиций устойчивости достаточно ограничиться изучением лишь однородных систем (7.2.2). Связь устойчивости и ограниченности устанавливается теоремой.

Линейная однородная система дифференциальных уравнений (7.2.2) устойчива по Ляпунову

тогда и только тогда, когда любое решение  $\mathbf{x}(t)$  этой системы ограничено при  $t_0 \leq t < \infty$ .

Если неоднородная линейная система дифференциальных уравнений (7.2.1) устойчива, то все решения могут быть как ограничены, так и не ограничены при  $t \rightarrow \infty$ .

**Пример 1.** Скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{u} = -\beta u + \beta t + 1$$

допускает при  $t \geq 0$  неограниченное решение  $u_0(t) = t$ . Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(t) = t + u(0) \exp(-\beta t).$$

Устойчивость решения  $u_0(t) = t$  зависит от знака параметра  $\beta$ . Если  $\beta > 0$ , то это решение, очевидно, асимптотически устойчиво. При  $\beta = 0$  оно устойчиво по Ляпунову, а при  $\beta < 0$  неустойчиво. Во всех трех случаях решения уравнения не ограничены при  $t \rightarrow \infty$  (рис. 7.2.1).

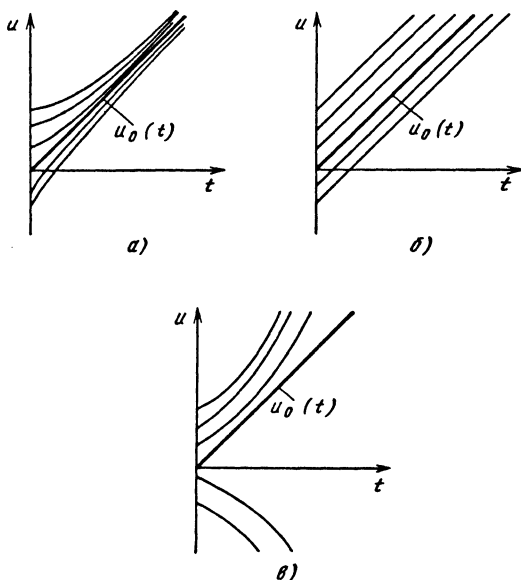


Рис. 7.2.1. Зависимость поведения возмущенных движений от параметра  $\beta$ :  
а -  $\beta > 0$ ; б -  $\beta = 0$ ; в -  $\beta < 0$

Линейная однородная дифференциальная система уравнений (7.2.2) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все ее решения  $\mathbf{x}(t)$  удовлетворяют условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0.$$

Для нелинейной системы дифференциальных уравнений стремление к нулю всех решений не является достаточным условием устойчивости ее нулевого (тривиального) решения.

7.2.2. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Для линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, имеющих вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}\mathbf{x}, \quad (7.2.3)$$

где  $\mathbf{G}$  - постоянная матрица, общее решение уравнения (7.2.3) можно записать в форме

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{G}t)\mathbf{x}(t_0). \quad (7.2.4)$$

Структура матрицы  $\exp(\mathbf{G}t)$ , а следовательно, и общего решения  $\mathbf{x}(t)$  полностью определяется свойствами характеристических показателей  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ , т.е. корней характеристического уравнения

$$p(\lambda) \equiv \det(\mathbf{G} - \lambda\mathbf{E}) = 0. \quad (7.2.5)$$

Если собственные значения  $\lambda_j$  матрицы  $\mathbf{G}$  попарно различны или если кратным собственным значениям отвечают простые элементарные делители, то матрица  $\mathbf{G}$  подобна диагональной матрице с собственными значениями на диагонали. Поэтому элементы матрицы  $\exp(\mathbf{G}t)$  представляют собой линейные комбинации членов  $\exp(\lambda_j t)$ .

В том случае, когда  $\mathbf{G}$  имеет кратные собственные значения и им отвечают кратные элементарные делители, матрица  $\mathbf{G}$  приводима к нормальной жордановой форме. Элементы матрицы  $\exp(\mathbf{G}t)$  содержат квазимногочлены от  $t$  с показателями  $\lambda_j$ . При этом решения системы (7.2.3) имеют вид

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^k \exp(\lambda_j t) \mathbf{P}_j(t) \mathbf{x}(t_0), \quad k \leq N. \quad (7.2.6)$$

Здесь элементы матриц  $\mathbf{P}_j(t)$  - многочлены, степень которых строго меньше кратности собственных значений  $\lambda_j$ .

Положение равновесия  $\mathbf{x}(t) \equiv 0$  линейной системы (7.2.3) с постоянной матрицей  $\mathbf{G}$  устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда действительные части характеристических показателей  $\lambda_j$  неположительны, т.е.  $\text{Re } \lambda_j \leq 0$  ( $j = 1, \dots, N$ ), а характеристическим показателям с нулевыми действительными частями соответствуют простые элементарные делители.

Положение равновесия  $\mathbf{x}(t) \equiv 0$  линейной системы (7.2.3) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все характеристические показатели  $\lambda_j$  имеют отрицательные действительные части, т.е.  $\text{Re } \lambda_j < 0$  ( $j = 1, \dots, N$ ).

**Пример 2.** Возьмем линейную автономную механическую систему с  $N$  степенями свободы с

уравнениями движения (7.1.3). Характеристическое уравнение получим непосредственной подстановкой в уравнения (7.1.3) решений в форме  $q_k = C_k \exp(\lambda t)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Тогда вместо (7.2.5) имеем

$$p(\lambda) \equiv \det(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C}). \quad (7.2.7)$$

Положение равновесия  $q_1 = 0, \dots, q_n = 0$  этой системы асимптотически устойчиво, если все корни  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$  уравнения (7.2.7) лежат в открытой левой полуплоскости, и неустойчиво, если хотя бы один корень находится в открытой правой полуплоскости. Если среди корней есть кратные чисто мнимые, то в общем случае необходим анализ элементарных делителей матрицы  $\mathbf{G}$ , определяемой согласно (7.1.5). Анализ упрощается, если матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  симметричны. Тогда и при кратных характеристических показателях все элементарные делители матрицы  $\mathbf{G}$  простые. При действительных коэффициентах уравнений (7.1.3) все характеристические показатели - попарно комплексно сопряженные. Пример размещения их на комплексной плоскости в случае асимптотической устойчивости, устойчивости по Ляпунову и неустойчивости показан на рис. 7.2.2. При этом принято  $n=3, N=6$ .

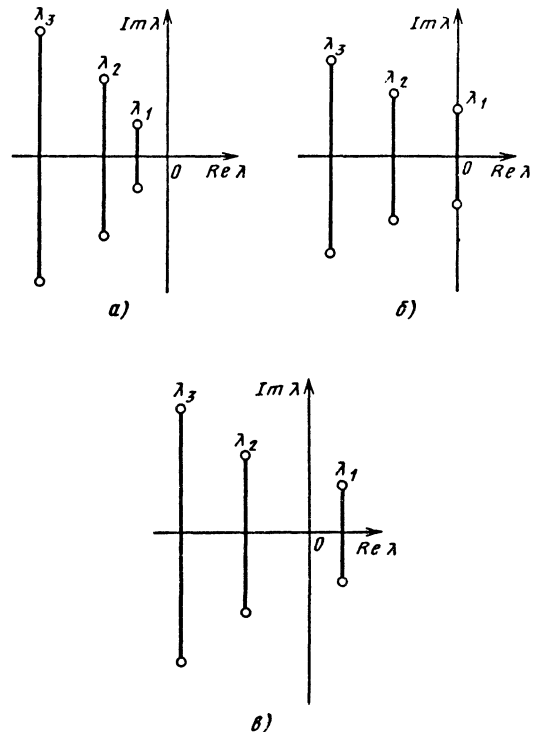


Рис. 7.2.2. Расположение характеристических показателей на комплексной плоскости:  
 а - асимптотическая устойчивость;  
 б - устойчивость по Ляпунову; в - неустойчивость

Приведем некоторые утверждения об устойчивости линейных систем вида

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{G} + \mathbf{H}(t)]\mathbf{x}, \quad (7.2.8)$$

где  $\mathbf{G}$  - постоянная матрица, а  $\mathbf{H}(t)$  - непрерывная матрица возмущений того же порядка и в определенном смысле малая при  $t \rightarrow \infty$ .

Пусть линейная система с постоянной матрицей  $\mathbf{G}$  асимптотически устойчива. Таковой является и система (7.2.8), если матрица  $\mathbf{H}(t)$  удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} \|\mathbf{H}(t)\| dt < \infty.$$

Если в последнем утверждении ослабить условие на матрицу  $\mathbf{H}(t)$ , заменив его требованием  $\|\mathbf{H}(t)\| < \text{const}$  для достаточно больших  $t$ , то система (7.2.8) будет асимптотически устойчивой. Такое условие будет очевидно выполняться, если  $\mathbf{H}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

### 7.2.3. КРИТЕРИЙ РАУСА-ГУРВИЦА И РОДСТВЕННЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ

Анализ расположения корней характеристического уравнения (7.2.5) на комплексной плоскости составляет чисто алгебраическую задачу. Для разворачивания характеристического определителя существует ряд оригинальных методов. К их числу следует отнести метод Крылова, метод Данилевского, метод Фаддеева и др. [52, 54]. С использованием этих методов средства вычислительной техники позволяют непосредственно находить коэффициенты характеристических полиномов сколь угодно высокой степени с наперед заданной точностью. Остаются весьма полезными критерии, которые могли бы давать ответ о размещении корней на комплексной плоскости, не прибегая к решению полной задачи о собственных значениях. К таким критериям относят критерий асимптотической устойчивости Рауса-Гурвица и родственные алгебраические критерии.

Пусть полином  $n$ -й степени от неизвестного  $\lambda$  записан по убывающим степеням

$$p(\lambda) = p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n. \quad (7.2.9)$$

Здесь  $p_k$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) - числовые коэффициенты, причем  $p_0 \neq 0$ . Задача состоит в том, чтобы указать условия на коэффициенты полинома, при выполнении которых корни  $p(\lambda)$  лежат в открытой левой полуплоскости  $\text{Re } \lambda < 0$ .

**Полиномы с действительными коэффициентами.** Без ограничения общности можно считать  $p_0 > 0$ . Для того чтобы действительные части корней полинома (7.2.9) были отрицательными, необходимо, чтобы все его коэффициенты имели одинаковые знаки. Поскольку согласно предположению  $p_0 > 0$ , то  $p_k > 0$  ( $k=1, \dots, n$ ).

Для полинома второй степени  $p_0 \lambda^2 + p_1 \lambda + p_2$  условия  $p_0 > 0, p_1 > 0, p_2 > 0$  являются и достаточными. При  $n > 2$  из положительности коэффициентов полинома в общем случае не вытекает, что его корни расположены в левой полуплоскости.

**Пример 3.** Все коэффициенты полинома  $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 30$  положительные. Однако среди его корней  $\lambda_1 = -3; \lambda_2 = 1 + 3i$  и  $\lambda_3 = 1 - 3i$  два корня лежат в правой полуплоскости.

Критерий Рауса-Гурвица для полиномов с действительными коэффициентами состоит в следующем. Из коэффициентов полинома (7.2.9) составим матрицу

$$\mathbf{H}_n = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_5 & \dots & p_{2n-1} \\ p_0 & p_2 & p_4 & \dots & p_{2n-2} \\ 0 & p_1 & p_3 & \dots & p_{2n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad (7.2.10)$$

по такому правилу: в левом верхнем углу поместим коэффициент  $p_1$ ; далее матрицу заполняем так, чтобы индексы коэффициентов в строках увеличивались на два, а в столбцах - уменьшались на единицу; при этом вместо коэффициентов, индексы которых меньше нуля или больше  $n$ , ставим нули.

Для того чтобы корни полинома (7.2.9), у которого  $p_0 > 0$ , имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры его матрицы Гурвица  $\mathbf{H}_n$ :

$$\Delta_1 = p_1 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ p_0 & p_2 \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = p_n \Delta_{n-1}. \quad (7.2.11)$$

Условия (7.2.11) можно заменить равносильными условиями, включающими требование положительности всех коэффициентов полинома (7.2.9). В результате получаем такие условия устойчивости для полиномов:

первой степени:

$$p_0 > 0, p_1 > 0;$$

второй степени:

$$p_0 > 0, p_1 > 0, p_2 > 0;$$

третьей степени:

$$p_0 > 0, p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0$$

$$p_1 p_2 - p_0 p_3 > 0;$$

четвертой степени:

$$p_0 > 0, p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0, p_4 > 0$$

$$p_1(p_2p_3 - p_1p_4) - p_0p_3^2 > 0;$$

пятой степени:

$$p_0 > 0, p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0, p_4 > 0, p_5 > 0;$$

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_3 & p_5 & 0 \\ p_0 & p_2 & p_4 & 0 \\ 0 & p_1 & p_3 & p_5 \\ 0 & p_0 & p_2 & p_4 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ p_0 & p_2 \end{vmatrix} > 0;$$

шестой степени:

$$p_0 > 0, p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0, p_4 > 0,$$

$$p_5 > 0, p_6 > 0;$$

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_3 & p_5 & 0 & 0 \\ p_0 & p_2 & p_4 & p_6 & 0 \\ 0 & p_1 & p_3 & p_5 & 0 \\ 0 & p_0 & p_2 & p_4 & p_6 \\ 0 & 0 & p_1 & p_3 & p_5 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} p_1 & p_3 & p_5 \\ p_0 & p_2 & p_4 \\ 0 & p_1 & p_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Имеются стандартные программы, осуществляющие формирование матрицы (7.2.10) и проверку условий Рауса-Гурвица при любых значениях  $n$ .

**Полиномы с комплексными коэффициентами.** Предположим, что коэффициенты  $p_k$  полинома (7.2.9) - комплексные числа. Положим в (7.2.9)  $\lambda = i\omega$ . Отделив действительную и мнимую части, представим результат в виде

$$P(\omega) \equiv p(i\omega) = (a_0 + ib_0)\omega^n + (a_1 + ib_1)\omega^{n-1} + \dots$$

$$+ \dots + (a_{n-1} + ib_{n-1})\omega + (a_n + ib_n), \quad (7.2.12)$$

где  $a_k, b_k$  - действительные числа ( $k=0, 1, \dots, n$ ).

Составим из действительных и мнимых частей коэффициентов полинома (7.2.12) матрицу размерностью  $2n \times 2n$ :

$$\mathbf{H}_{2n} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix} \\ \dots \\ \begin{matrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix} \end{pmatrix} \quad (7.2.13)$$

Элементы этой матрицы, расположенные вне блоков, равны нулю.

Число корней полинома  $p(\lambda)$ , имеющих отрицательные действительные части, равно числу перемен знака в ряду

$$1, \Delta_2, \Delta_4, \dots, \Delta_{2n-2}, \Delta_{2n}, \quad (7.2.14)$$

где  $\Delta_{2k}$  - главные диагональные миноры четного порядка матрицы (7.2.13).

**Пример 4.** Для полинома  $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 30$ , рассмотренного в предыдущем примере, при  $\lambda = i\omega$  имеем  $P(\omega) = -i\omega^3 - \omega^2 + 4i\omega + 30$ . Для него матрица (7.2.13) принимает вид

$$\mathbf{H}_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 30 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 30 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычисляя главные диагональные миноры четного порядка, устанавливаем:  $\Delta_2 < 0, \Delta_4 < 0, \Delta_6 < 0$ . В ряду (7.2.14) имеется одна перемена знака, и, следовательно, полином  $p(\lambda)$  имеет один корень в левой полуплоскости.

Для того чтобы все корни полинома  $n$ -й степени имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы в ряду (7.2.14) было ровно  $n$  перемен знака. Это возможно тогда и только тогда, если  $\text{sign} \Delta_{2k} = \text{sign}(-1)^k$ . Другими словами, должно быть  $\Delta_2 < 0$ , а знаки последующих миноров должны чередоваться. Поменяем местами строки в каждом из блоков матрицы  $\mathbf{H}_{2n}$ . В результате получим матрицу

$$\mathbf{H}'_{2n} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix} \\ \dots \\ \begin{matrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix} \end{pmatrix} \quad (7.2.15)$$

с положительными главными диагональными минорами  $\Delta'_{2k}$ . В итоге приходим к следующему критерию.

Для того чтобы все корни полинома  $p(\lambda)$  с комплексными коэффициентами лежали в левой полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы главные диагональные миноры четного порядка  $\Delta'_{2k}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) матрицы (7.2.15) были положительны.

**Пример 5.** Для полинома  $p(\lambda)$  второй степени с действительными коэффициентами полином  $P(\omega)$  имеет вид  $P(\omega) \equiv p(i\omega) = -p_0\omega^2 + ip_1\omega + p_2$ , а матрица (7.2.15)

$$\mathbf{H}_4 = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ -p_0 & 0 & p_2 \\ 0 & p_1 & 0 \\ -p_0 & 0 & p_2 \end{pmatrix}$$

Условия  $\Delta'_2 = p_0 p_1 > 0$ ,  $\Delta'_4 = p_0 p_1^2 p_2 > 0$  выполняются, если коэффициенты  $p_k$  имеют одинаковые знаки.

Если корни полинома  $p(\lambda)$  расположены в левой полуплоскости, то корни полинома  $P(\omega) \equiv p(i\omega)$  расположены в верхней полуплоскости  $\text{Im } \omega > 0$ .

Для того чтобы корни полинома  $P(\omega)$  (7.2.12) имели положительные мнимые части, необходимо и достаточно, чтобы главные диагональные миноры четного порядка  $\Delta'_{2k}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) матрицы (7.2.15) были положительны.

Критерий асимптотической устойчивости для полиномов с вещественными коэффициентами был предложен Гурвицем (1895 г.). Несколько ранее (1877 г.) Раусом был предложен алгоритм проверки устойчивости, сводящийся к заполнению некоторой таблицы в результате выполнения ряда операций над коэффициентами полинома. Этот критерий менее удобен, поскольку требует дополнительных вычислений для получения таблиц. Формально критерий Гурвица можно получить из критерия Рауса. Поэтому критерий Гурвица справедливо называют критерием Рауса-Гурвица. Если выполнено необходимое условие - положительность определителей  $\Delta_k$  с четными индексами следует положительность определителей  $\Delta_k$  с нечетными индексами (и наоборот). Этот факт был обнаружен П. Лънараром и Р. Шипаром (1914 г.) и позволяет сократить число проверяемых условий. Модифицированный критерий Рауса-Гурвица иногда называют критерием Лънарара-Шипара. Обобщенные критерия Гурвица на полиномы с комплексными коэффициентами было дано Н. Г. Чеботаревым и Н. Н. Мейманом (1949 г.).

#### 7.2.4. КРИТЕРИЙ ЗУБОВА

В задачах устойчивости линейных систем с конечным числом степеней свободы характеристический полином непосредственно впервые появляется в форме  $\det(\mathbf{G} - \lambda \mathbf{E})$ . Представляют интерес критерии, не требующие вычисления коэффициентов характеристического полинома. Идея критерия Зубова [22] состоит в отображении рассматриваемой области  $S_\lambda$  комплексного переменного  $\lambda$  на внутренность единичного круга  $|\rho| < 1$  комплексного переменного  $\rho$ . При этом исходная матрица  $\mathbf{G}$  отображается в некоторую матрицу  $\mathbf{\Gamma}$ , собственные значения которой равны  $\rho_j$ . Для того чтобы все  $\rho_j$  удовлетворяли условию  $|\rho_j| < 1$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\mathbf{\Gamma}^k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Таким образом, реализация критерия Зубова состоит в отыскании преобразования  $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{\Gamma}$  и вычислении степеней матрицы  $\mathbf{\Gamma}^2, \mathbf{\Gamma}^4, \mathbf{\Gamma}^8, \dots$  с оценкой сходимости к нулевой матрице по какой-либо легко вычисляемой норме.

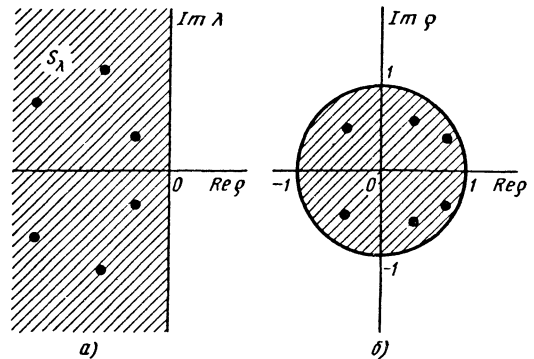


Рис. 7.2.3. Область асимптотической устойчивости на плоскости  $\lambda$  и  $\rho$

Условие асимптотической устойчивости имеет вид  $\lambda_j \in S_\lambda$ , где  $S_\lambda = \{\lambda: \text{Re } \lambda < 0\}$  - левая полуплоскость переменного  $\lambda$  (рис. 7.2.3, а). Дробно-линейное преобразование

$$\rho = 1 + 2(\lambda - 1)^{-1} \quad (7.2.16)$$

взаимно однозначно отображает  $S_\lambda$  на единичный круг (рис. 7.2.3, б). Соответствующее ему преобразование матрицы имеет вид

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{E} + 2(\mathbf{G} - \mathbf{E})^{-1}. \quad (7.2.17)$$

При проектировании систем автоматического управления иногда возникает требование асимптотической устойчивости с определенным запасом или требованием по ограничению колебательности в контуре системы управления. Так

возникают области  $S_\lambda(\alpha) = \{\lambda: \text{Re } \lambda < \alpha\}$  и  $S_\lambda(\alpha, \beta) = \{\lambda: \text{Re } \lambda < \alpha, |\text{Im } \lambda| < \beta\}$ , показанные на рис. 7.2.4. Область  $S_\lambda(\alpha)$  отображается на единичный круг посредством функции  $\rho = 1 + 2(\lambda - 1 - \alpha)^{-1}$ , а соответствующая ему формула преобразования матриц имеет вид

$$\Gamma = \mathbf{E} + 2[\mathbf{G} - (1 + \alpha)\mathbf{E}]^{-1}. \quad (7.2.18)$$

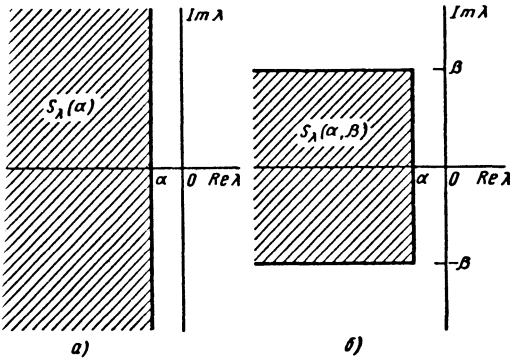


Рис. 7.2.4. Области асимптотической устойчивости с запасом (а) и с ограничением по колебательности (б)

Чтобы собственные значения матрицы  $\mathbf{G}$  лежали внутри  $S_\lambda(\alpha, \beta)$ , необходимо и достаточно, чтобы они принадлежали одновременно трем полуплоскостям:  $\text{Re } \lambda < \alpha$ ,  $\text{Im } \lambda < \beta$ ,  $\text{Im } \lambda > -\beta$ . Каждая из этих полуплоскостей отображается на единичный круг при помощи формул соответственно  $\rho = 1 + 2(\lambda - 1 - \alpha)^{-1}$ ,  $\rho = 1 + 2(-i\lambda - 1 - \beta)^{-1}$ ,  $\rho = 1 + 2(i\lambda - 1 - \beta)^{-1}$ . Чтобы собственные числа матрицы  $\mathbf{G}$  располагались внутри области  $S_\lambda(\alpha, \beta)$ , необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись соотношения  $\Gamma^k \rightarrow 0$ ,  $\Gamma_1^k \rightarrow 0$ ,  $\Gamma_2^k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , где

$$\Gamma_1 = \mathbf{E} + 2[-i\mathbf{G} - (1 + \beta)\mathbf{E}]^{-1};$$

$$\Gamma_2 = \mathbf{E} + 2[i\mathbf{G} - (1 + \beta)\mathbf{E}]^{-1}.$$

Критерий Зубова может оказаться эффективным только при достаточно высоких размерностях матрицы  $\mathbf{G}$ . Некоторые рекомендации относительно численной реализации критерия приведены в гл. 7.4.

7.2.5. КРИТЕРИЙ КОПИ-МИХАЙЛОВА-НАЙКВИСТА

Под этим названием объединены так называемые частотные критерии устойчивости, получившие широкое распространение при анализе устойчивости систем автоматического управления. Эти критерии основаны на графоаналитическом анализе частотных характеристик систем и по существу представляют собой подходящую интерпретацию принципа аргумента Коши из теории функций комплексного переменного.

Рассмотрим полином  $p(\lambda)$  (7.2.9) с вещественными коэффициентами. Кривую  $z = p(i\omega)$ , где  $0 \leq \omega < \infty$ , называют *годографом Михайлова*. В силу выполнения необходимых условий имеем  $p(0) = p_n > 0$  и поэтому годограф начинается в точке положительной полуоси  $\text{Re } z > 0$ . Каждой точке годографа можно поставить в соответствие вектор  $\mathbf{z}$ , выходящий из начала координат плоскости комплексного переменного  $z$ . При изменении параметра  $\omega$  вектор  $\mathbf{z}$  будет каким-то образом поворачиваться. Критерий, предложенный А. В. Михайловым (1938 г.), состоит в следующем.

Для того чтобы все корни полинома (7.2.9) с вещественными коэффициентами располагались в левой полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы вектор  $\mathbf{z} = p(i\omega)$  при изменении  $\omega$  от нуля до  $\infty$  повернулся, нигде не обращаясь в нуль, против часовой стрелки на угол  $n\pi/2$ , где  $n$  - степень полинома.

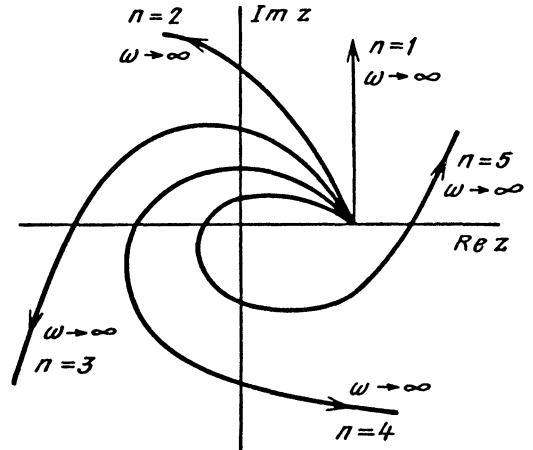


Рис. 7.2.5. Устойчивые годографы для полиномов степени n

Таким образом, годограф полинома, имеющего корни в левой полуплоскости, начинается в точке  $p_n > 0$  положительной полуоси  $\text{Re } z > 0$ ,



при  $\omega \rightarrow \infty$  последовательно пересекает полуоси  $\text{Im } z > 0, \text{Re } z < 0, \text{Im } z < 0, \dots$  и уходит на бесконечность в  $n$ -м квадранте. На рис. 7.2.5 показаны устойчивые годографы для полиномов до пятой степени включительно. Нарушение последовательности прохождения квадрантов или их числа означает неустойчивость системы.

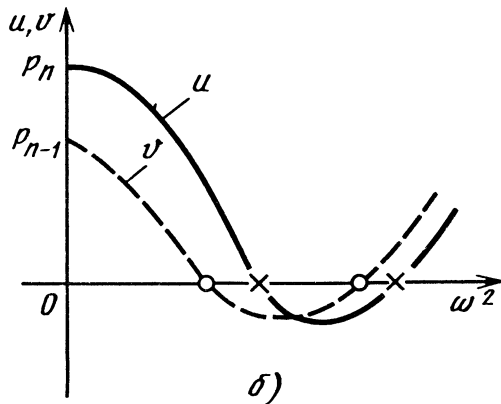
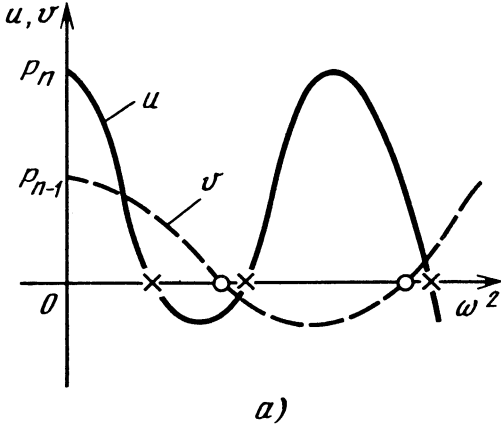


Рис. 7.2.6. Графики полиномов  $u(\omega^2)$  и  $v(\omega^2)$ :  
а - для устойчивого годографа;  
б - для неустойчивого годографа

Эквивалентную формулировку этого критерия получают, разделяя действительную и мнимую части выражения  $p(i\omega) = u(\omega^2) + iv(\omega^2)$ .

Здесь  $u(\omega^2)$  - полином степени  $n/2$  при четном  $n$  или  $(n-1)/2$  при нечетном  $n$ ;  $v(\omega^2)$  - полином степени  $(n/2) - 1$  при четном  $n$  или  $(n-1)/2$  при нечетном  $n$ . В точках пересечения годографа мнимой оси  $\text{Im } z$  должно выполняться

$u(\omega^2) = 0$ , а в точках пересечения действительной оси  $v(\omega^2) = 0$ . Для устойчивых годографов, очевидно, соответствующие этим уравнениям корни  $\omega_j^2$  должны перемежаться и общее их число должно быть равным  $n$ . Из того факта, что устойчивый годограф начинается в точке  $p_n > 0$  вещественной полуоси, вытекает условие  $v'(0) > 0$ . На рис. 7.2.6 приведены графики функций  $u(\omega^2)$  и  $v(\omega^2)$  для устойчивой и неустойчивой системы.

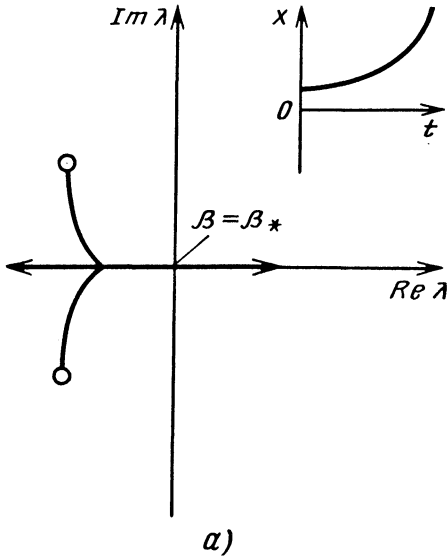
Частотный критерий устойчивости Г. Найквиста (1932 г.) ориентирован на приложения к анализу устойчивости линейных систем автоматического управления. Этот критерий позволяет сделать вывод об устойчивости замкнутой системы по виду амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы. Популярен также в инженерной практике подход, основанный на использовании логарифмических частотных характеристик разомкнутой системы.

#### 7.2.6. ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ

Пусть уравнения возмущенного движения зависят от  $r$  параметров  $\beta_1, \dots, \beta_r$ . В пространстве параметров выделим область, в каждой точке которой имеет место устойчивость невозмущенного движения. Эту область будем называть областью устойчивости; ее границы отвечают критические соотношения между параметрами  $\beta_1, \dots, \beta_r$ . В частном случае, когда  $r=1$ , причем значения  $\beta$  заданы на положительной полуоси, говорят о критическом значении параметра  $\beta_*$ . Обычно значение  $\beta=0$  находится в области устойчивости. Таким образом, отрезок  $[0, \beta_*)$  отвечает области устойчивости, а область неустойчивости занимает оставшуюся часть полуоси  $(\beta_*, \infty)$ . Если параметр  $\beta$  может принимать любые действительные значения, причем при  $\beta=0$  имеет место устойчивость, то возможна неустойчивость как при положительном, так и отрицательном значении  $\beta$ . В этом случае область устойчивости  $\beta_*^- < \beta < \beta_*^+$  задают двумя критическими значениями параметра  $\beta_*^-$  и  $\beta_*^+$ .

В зависимости от свойств возмущенных движений область неустойчивости разбивается на подобласти. Это разбиение производят в зависимости от поведения корней уравнения (7.2.9) - характеристических показателей  $\lambda$  при пересечении границы области устойчивости. Типичные ситуации показаны на рис. 7.2.7. При  $\beta=0$  все характеристические показатели находятся в ле-

вой полуплоскости. При  $\beta = \beta^*$  один из показателей обращается в нуль, а при дальнейшем росте  $\beta$  переходит на правую полуплоскость, оставаясь чисто действительным (рис. 7.2.7, а). При этом среди решений уравнения возмущенного движения появляется решение, монотонно возрастающее во времени. Потеря устойчивости носит неколебательный характер. Соответствующую часть области неустойчивости называют областью статической неустойчивости или областью дивергенции по аналогии с задачами устойчивости в аэроупругости (см. гл. 7.8).



Если хотя бы один из характеристических показателей покидает левую полуплоскость, пересекая мнимую ось в точке, отличной от начала координат, то среди решений уравнений возмущенного движения появляются решения колебательного типа с амплитудой, монотонно возрастающей во времени. Потеря устойчивости носит колебательный характер (рис. 7.2.7, б). Область колебательной (динамической) неустойчивости называют также областью флаттера. Возможны также ситуации, когда в правой полуплоскости имеются как чисто действительные, так и комплексные характеристические показатели. Тогда потеря устойчивости носит смешанный характер.

Один из методов отыскания границы области устойчивости состоит в отображении мнимой оси плоскости характеристических показателей на пространство параметров. Подставим в характеристическое уравнение (7.2.9)  $\lambda = i\omega$ , где  $\omega$  - действительный параметр. Тогда образ мнимой оси принимает вид  $p(i\omega) = 0$ . Это уравнение эквивалентно системе двух уравнений с действительными коэффициентами

$$\text{Re } p(i\omega) = 0, \text{Im } p(i\omega) = 0. \quad (7.2.19)$$

Если из уравнений (7.2.19) исключить  $\omega$ , то получим уравнение некоторой поверхности в пространстве параметров. Часть этой поверхности ограничивает область устойчивости. Предложены способы [12, 43], позволяющие выделить среди этой поверхности те части, которые отвечают границе области устойчивости. Если заранее известно, что начальная точка в пространстве параметров (например, начало координат) принадлежит области устойчивости, то граница этой области определяется либо уравнением  $\Delta_{n-1} = 0$ , либо  $p_n = 0$ . Здесь  $\Delta_{n-1}$  - предпоследний определитель Гурвица (7.2.11),  $p_n$  - свободный член полинома (7.2.9). Условие  $\Delta_{n-1} = 0$  дает границу колебательной неустойчивости, условие  $p_n = 0$  - границу дивергенции.

В теории автоматического управления описанный метод называют методом *D*-разбиений. Очевидно, что этот метод применим к более широкому классу линейных систем, чем системы, описываемые уравнениями (7.2.9). Так, он пригоден и в том случае, когда уравнение относительно характеристических показателей имеет вид, отличный от полинома. Типичный пример - линейные системы с запаздыванием, а также распределенные системы с параметрами, не зависящими от времени. Для многих систем из этих классов удается получить уравнение типа  $p(\lambda) = 0$ , левая часть которого - трансцендентная функция. Тогда левые части уравнений (7.2.19) тоже будут трансцендентными функциями  $\omega$ .

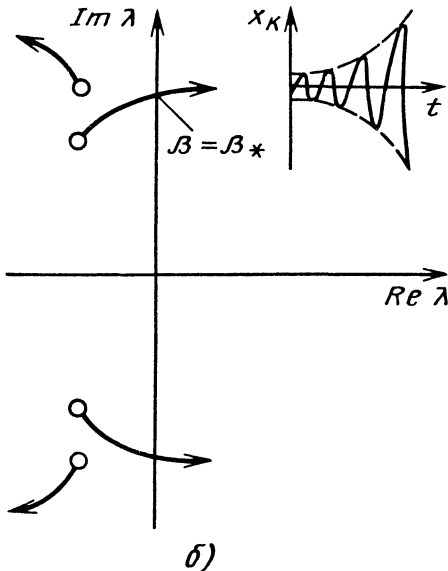


Рис. 7.2.7. Изменение расположения характеристических показателей при возрастании параметра  $\beta$

### 7.2.7. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть в уравнениях возмущенного движения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(t)\mathbf{x}; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (7.2.20)$$

матрица  $\mathbf{G}(t)$  - непрерывная и периодическая с периодом  $T$ ,  $\mathbf{G}(t+T) = \mathbf{G}(t)$ . Совокупность  $n$  частных линейно независимых решений системы (7.2.20) образует фундаментальную матрицу решений  $\mathbf{X}(t)$ . Столбцами ее являются указанные решения, и поэтому она удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{G}(t)\mathbf{X}. \quad (7.2.21)$$

Матрицу  $\mathbf{X}(t)$ , которая удовлетворяет начальному условию  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$ , называют фундаментальной матрицей Коши или матрицантом. Решение начальной задачи (7.2.20) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{x}_0.$$

Матрица  $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t+T)$  в силу периодичности матрицы  $\mathbf{G}(t)$  также удовлетворяет уравнению (7.2.21) и, кроме того, начальному условию  $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{X}(T)$ . В силу теоремы единственности решения начальной задачи имеем

$$\mathbf{X}(t+T) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(T). \quad (7.2.22)$$

Значение матрицанта в конце первого периода, т.е. матрицу  $\mathbf{X}(T) = \mathbf{R}$ , называют *матрицей оператора перехода* (*матрицей монодромии*). Так как матрица  $\mathbf{R}$  всегда невырожденная, то существует постоянная матрица  $\mathbf{H}$ , такая, что

$$\mathbf{R} = \exp(\mathbf{H}T). \quad (7.2.23)$$

Определим матрицу  $\Phi(t)$  соотношением

$$\Phi(t) = \mathbf{X}(t)\exp(-\mathbf{H}t). \quad (7.2.24)$$

Как видно,  $\Phi(t)$  непрерывно дифференцируемая и, как вытекает из (7.2.22), периодическая с периодом  $T$ . Теперь из (7.2.24) имеем представление для матрицанта периодической системы уравнений (7.2.20)

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\exp(\mathbf{H}t), \quad (7.2.25)$$

где  $\Phi(t)$  - периодическая матрица,  $\Phi(0) = \mathbf{E}$ , а  $\mathbf{H}$  - постоянная матрица. Формула (7.2.25) - центральная в теории Флоке-Ляпунова [63].

Решение начальной задачи (7.2.20) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\exp(\mathbf{H}t)\mathbf{x}_0. \quad (7.2.26)$$

Матрица  $\tilde{\mathbf{X}}(t)$ , полученная из фундаментальной матрицы Коши  $\mathbf{X}(t)$  умножением справа на любую невырожденную матрицу  $\mathbf{C}$ , также будет фундаментальным матричным решением уравнения (7.2.21) и  $\tilde{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{X}}(0)$ . Матрица оператора перехода  $\tilde{\mathbf{R}}$ , соответствующая матрице  $\tilde{\mathbf{X}}(t)$ , будет подобна  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{x}(t+T) = \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{x}_0$ ,  $\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{X}}^{-1}(0)\mathbf{R}\tilde{\mathbf{X}}(0)$ . Если же пере-

ход на один период осуществляется с момента времени  $t_0 \neq 0$ , то  $\mathbf{x}(t+T) = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{x}(t_0)$ ,

$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{R}\mathbf{X}(t_0)$  и  $\hat{\mathbf{R}}$  опять подобна матрице  $\mathbf{R}$ . Подобные матрицы, как известно, имеют одинаковые собственные значения. Собственные значения матрицы монодромии  $\rho_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) - корни уравнения

$$\det(\mathbf{R} - \rho\mathbf{E}) = 0 \quad (7.2.27)$$

называют *мультипликаторами*.

Так как  $\det \mathbf{R} \neq 0$ , то  $\rho_j \neq 0$ . Пусть  $h_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) - собственные значения матрицы  $\mathbf{H}$  (характеристические показатели). Тогда из (7.2.24) следуют соотношения

$$h_j = \frac{1}{T} \ln \rho_j = \frac{1}{T} (\ln |\rho_j| + i \arg \rho_j) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.2.28)$$

Для всякого мультипликатора  $\rho$  найдется хотя бы одно нетривиальное решение системы (7.2.20), обладающее свойством

$$\mathbf{x}(t+T) = \rho\mathbf{x}(t). \quad (7.2.29)$$

В частности, мультипликатору  $\rho=1$  отвечает периодическое решение с периодом  $T$ , мультипликатору  $\rho=-1$  - решение с периодом  $2T$  ( $T$ - и  $2T$ -периодические решения).

Исходя из выражения (7.2.25), легко установить структуру решений периодической системы уравнений (7.2.20). Если характеристические показатели  $h_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) различные, то матрица  $\mathbf{H}$  подобна диагональной матрице с  $h_j$  на главной диагонали. В этом случае существует фундаментальная система, образованная решениями

$$\mathbf{x}_j(t) = \exp(h_j t) \varphi_j(t) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (7.2.30)$$

где  $\varphi_j(t)$  -  $T$ -периодические непрерывно дифференцируемые функции, а  $h_j$  выражается через  $\rho_j$  формулами (7.2.28).

Если среди мультипликаторов  $\rho_j$ , а следовательно, среди показателей  $h_j$  имеются кратные, то структура решений зависит от свойств элементарных делителей матрицы  $\mathbf{R}$ . При простых элементарных делителях решения, соответствующие кратному собственному значению, по-прежнему можно взять в виде (7.2.30). При этом каждому собственному значению кратности  $r$  отвечает  $r$  решений типа (7.2.30) с независимыми периодическими функциями  $\varphi_j(t)$ . Если же кратному собственному значению  $h_j$  соответствует блок нормальной формы Жордана размерностью  $r$ , то соответствующие ему решения имеют вид

$$\mathbf{x}_k(t) = \exp(h_j t) \frac{d^{r-k}}{dt^{r-k}} \varphi_j(t) \quad (k = 1, \dots, r), \quad (7.2.31)$$

где  $\varphi_j(t)$  - полиномы от  $t$  степени  $r-1$  с  $T$ -периодическими коэффициентами. В результате приходим к следующим условиям устойчивости.

Положение равновесия  $\mathbf{x}(t) \equiv 0$  периодической системы (7.2.20) устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда все мультипликаторы  $\rho_j$  лежат в единичном круге  $|\rho| \leq 1$ , причем мультипликаторы, лежащие на граничной окружности  $|\rho| = 1$ , имеют простые элементарные делители, если их рассматривать как собственные значения матрицы монодромии  $\mathbf{R}$ .

Положение равновесия  $\mathbf{x}(t) \equiv 0$  периодической системы асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все мультипликаторы  $\rho_j$  лежат внутри единичного круга  $|\rho| < 1$ .

Типичные случаи расположения мультипликаторов на комплексной плоскости представлены на рис. 7.2.8.

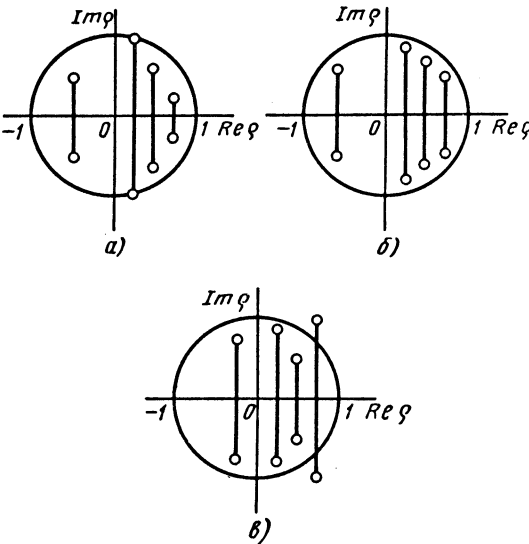


Рис. 7.2.8. Типичные случаи расположения мультипликаторов на комплексной плоскости: а - устойчивость по Ляпунову; б - асимптотическая устойчивость; в - неустойчивость

Применительно к конкретным физическим и техническим объектам неустойчивость невозмущенных движений обычно может быть истолкована как параметрическое возбуждение колебаний (и наоборот). Причиной параметрических колебаний обычно являются периодически изменяющиеся параметры жесткости и инерционности. Например, при установившемся вращении вала, жесткость опор которого зависит от направления реакций, эффективная жесткость системы - периодическая функция времени; в кривошипно-шатунном механизме периодически изменяется приведенная масса, т.е. инерционная характеристика. Исследование устойчивости

периодических движений в нелинейных системах, как правило, также приводит к линейным дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами [3].

Уравнения параметрических колебаний линейных систем с конечным числом степеней свободы в общем случае могут быть представлены в виде

$$\mathbf{A}(t)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(t)\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (7.2.32)$$

где  $\mathbf{q}(t)$  - вектор обобщенных координат;  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$ ,  $\mathbf{C}(t)$  - квадратные матрицы, элементы которых - действительные функции времени. Матрица  $\mathbf{A}(t)$  при всех  $t$  является положительно определенной. На матрицы  $\mathbf{B}(t)$  и  $\mathbf{C}(t)$  это ограничение не накладывает.

Вводя вектор фазовых переменных  $\mathbf{x}$ , запишем уравнение (7.2.32) в форме (7.2.20). При этом  $\mathbf{G}(t)$  - матрица размерностью  $2n \times 2n$ :

$$\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (7.2.33)$$

Пусть коэффициенты уравнений (7.2.32) - непрерывные периодические функции времени с одинаковым периодом  $T$ . Тогда  $\mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t)$ ;  $\mathbf{B}(t+T) = \mathbf{B}(t)$ ;  $\mathbf{C}(t+T) = \mathbf{C}(t)$ . Соответствующую этому периоду частоту  $\omega = 2\pi/T$  называют частотой параметрического возбуждения, или частотой возбуждения.

В случае одночастотного параметрического возбуждения внешнее воздействие может быть задано с точностью до двух параметров: частоты возбуждения  $\omega$  и коэффициента возбуждения  $\mu$ , который характеризует интенсивность параметрического возбуждения (глубину модуляции параметров). Например, в уравнении (7.2.32)

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mu\mathbf{A}_1(t); \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu\mathbf{B}_1(t);$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \mu\mathbf{C}_1(t),$$

где  $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0$  - симметричные положительно определенные матрицы с постоянными элементами;  $\mathbf{A}_1(t), \mathbf{B}_1(t)$  и  $\mathbf{C}_1(t)$  - гармонические с периодом  $T = 2\pi/\omega$  матрицы достаточно произвольной структуры. Диссипацию будем считать достаточно малой. Для этого класса параметрических систем область неустойчивости на плоскости  $\mu, \omega$  имеет ряд клиньев, заостряющихся в сторону малых  $\mu$ . Клинья примыкают к оси частот вблизи значений  $\omega$ , находящихся в некоторых соотношениях с собственными частотами соответствующей консервативной системы, т.е. положительными корнями  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  уравнения  $\det(\mathbf{C}_0 - \omega^2\mathbf{A}_0)$ . Именно эти частотные соотношения соответствуют параметрическим резонансам [3].

Параметрические резонансы, возникающие вблизи частот

$$\omega = \frac{2\omega_k}{p} \quad \left( \begin{array}{l} k = 1, \dots, n; \\ p = 1, 2, \dots \end{array} \right), \quad (7.2.34)$$

называют *простыми*. В механических системах, для которых уравнение (7.2.32) распадается на независимые уравнения, описывающие изменение каждой обобщенной координаты в отдельности, возможны только простые резонансы.

Параметрические резонансы, возникающие вблизи частот

$$\omega = \frac{|\omega_j \pm \omega_k|}{p} \quad \left( \begin{array}{l} j, k = 1, \dots, n; \\ p = 1, 2, \dots; j \neq k \end{array} \right), \quad (7.2.35)$$

называют *комбинационными*. Эти резонансы, обусловленные попарным взаимодействием форм колебаний, возможны только в системах, совершающих связанные колебания. В зависимости от знака в правой части формулы (7.2.35) различают комбинационные резонансы *суммарного типа* (суммарные резонансы) и комбинационные резонансы *разностного типа* (разностные резонансы).

В зависимости от значения целых чисел  $p$  в соотношениях (7.2.34) и (7.2.35) различают главные (при  $p=1$ ) и побочные (при  $p=2$ ) резонансы. Число  $p$  называют порядком резонанса.

В случае полигармонического параметрического возбуждения периодические коэффициенты в уравнении (7.2.32) представим в виде рядов:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \mathbf{A}_0 + \mu \sum_{k=-M}^{k=M} \alpha_k e^{i\theta_k t}; \\ \mathbf{B}(t) &= \mathbf{B}_0 + \mu \sum_{k=-M}^{k=M} \beta_k e^{i\theta_k t}; \\ \mathbf{C}(t) &= \mathbf{C}_0 + \mu \sum_{k=-M}^{k=M} \gamma_k e^{i\theta_k t}. \end{aligned} \quad (7.2.36)$$

Здесь  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$  - комплексные коэффициенты, причем  $\alpha_{-k} = \bar{\alpha}_k, \beta_{-k} = \bar{\beta}_k, \gamma_{-k} = \bar{\gamma}_k$ ;  $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0$  - симметричные положительно определенные матрицы с постоянными элементами;  $\theta_{-k} = -\theta_k$ . Положительные числа  $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_M$  называют парциальными частотами параметрического воздействия. Пусть эти частоты находятся в простом кратном отношении  $\theta_k = r_k \theta_1 / s_k$ , где  $r_k$  и  $s_k$  - положительные целые несократимые числа. Коэффициенты  $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t)$  будут периодическими с периодом  $T = 2\pi s / \theta_1$  и частотой  $\omega = \theta_1 / s$ , где  $s$  - наименьшее общее кратное чисел  $s_1, s_2, \dots, s_M$ .

При полигармоническом параметрическом возбуждении возможно существование двух типов резонансов. Во-первых, это резонансы, отвечающие парциальному воздействию отдельных составляющих в разложении (7.2.36). Соответствующие частотные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \theta_k &= \frac{2\omega_j}{p_k} \quad \left( \begin{array}{l} j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, M \\ p_k = 1, 2, \dots \end{array} \right); \\ \theta_k &= \frac{|\omega_j \pm \omega_m|}{p_k} \quad \left( \begin{array}{l} j, m = 1, \dots, n; j \neq m \\ k = 1, \dots, M; p_k = 1, 2, \dots \end{array} \right). \end{aligned} \quad (7.2.37)$$

Эти резонансы называют парциальными. Остальные резонансы, для которых  $p_k$  в соотношениях (7.2.37) не кратно ни одному из целых чисел, называют коллективными. При  $p_k > s$  соответствующие точки принадлежат тому же отрезку частотной оси, что и парциальные резонансы. Поэтому наибольший интерес вызывают коллективные резонансы, для которых  $p_k < s$ . Если выразить соответствующие частотные отношения через основную частоту  $\theta_1$ , то получим для этих резонансов

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{2\omega_j s}{p} \quad (j = 1, \dots, n; p = 1, 2, \dots); \\ \theta_1 &= \frac{|\omega_j \pm \omega_k| s}{p} \quad (j, k = 1, \dots, n; j \neq k; p = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (7.2.38)$$

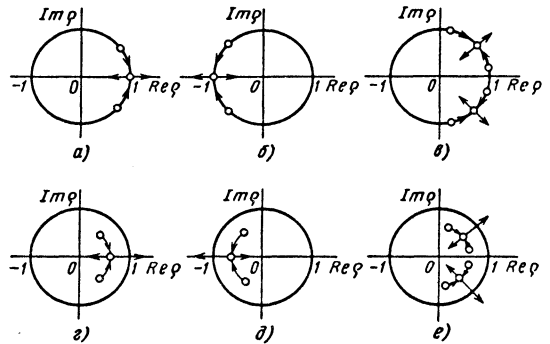


Рис. 7.2.9. Положения мультипликаторов при пересечении границы области устойчивости

Уравнение (7.2.20) можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\mathbf{H}(t)\mathbf{x}. \quad (7.2.39)$$

Здесь  $\mathbf{H}(t)$  - симметричная матрица-функция;  $\mathbf{J}$  - матрица вида

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

( $E_n$  - единичная матрица размерности  $n \times n$ ). Уравнения (7.2.39) в компонентах имеют ту же структуру, что канонические уравнения Гамильтона в аналитической механике. Системы уравнений, приводимые к виду (7.2.39), а также соответствующие механические системы называют каноническими.

Неустойчивость, отвечающая простым резонансам, обусловлена выходом мультипликаторов из единичного круга через значения  $\rho = \pm 1$ . Неустойчивость при комбинационных резонансах связана с выходом мультипликаторов из единичного круга через точки, отличные от  $\rho = \pm 1$ . Это показано на рис. 7.2.9, где случаи  $a - \nu$  отвечают гамильтоновым системам. В области устойчивости все мультипликаторы находятся на единичной окружности. При переходе в область неустойчивости, соответствующую простому резонансу, мультипликаторы становятся кратными. При  $\rho = 1$  одно из решений на границе будет  $T$ -периодическим, при  $\rho = -1$  оно будет  $2T$ -периодическим. Границам комбинационных резонансов отвечают почти периодические решения. Графики  $\varepsilon - \nu$  (рис. 7.2.9) построены для системы с диссипацией. При устойчивости все мультипликаторы лежат в открытом единичном круге, а на границе области один мультипликатор или пара комплексно-сопряженных мультипликаторов попадают на единичную окружность.

## Глава 7.3

### УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ

#### 7.3.1. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Задачи об устойчивости состояний равновесия занимают одно из центральных мест в теории устойчивости механических систем. К этому классу принадлежит большинство задач об устойчивости элементов конструкций и машин, нагруженных квазистатическими силами. Кроме того, многие задачи устойчивости движения также приводятся к задачам об устойчивости состояний равновесия. Так, стационарное движение системы при силах, не зависящих от времени, может быть представлено в виде некоторого относительного равновесия. В других случаях нестационарностью невозмущенного движения допустимо пренебречь. Например, рассматривая устойчивость прямолинейной формы упругих стержней, нагруженных продольными силами - периодическими функциями времени, обычно пренебрегают продольными колебаниями от действия этих сил [3]. Задача об устойчивости движения в результате сводится к родственной задаче об устойчивости равновесия.

Рассмотрим простейший класс задач об устойчивости равновесия. Пусть механическая система - консервативная. В классической меха-

нике - это система с голономными стационарными связями при действии одних потенциальных сил. Для деформируемых систем требуется наличие потенциала не только внешних, но и внутренних сил. Материал этих систем должен быть идеально упругим (линейно или нелинейно). Для определенности рассмотрим вначале систему с конечным числом степеней свободы. Обозначим обобщенные координаты  $q_1, \dots, q_n$ , обобщенные силы  $Q_1, \dots, Q_n$ ; соответствующие векторы обозначим  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{Q}$ . Для консервативных систем существует функция  $\Pi(\mathbf{q})$ , такая, что

$$Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (7.3.1)$$

или, короче,  $\mathbf{Q} = -\text{grad} \Pi(\mathbf{q})$ . Функция  $\Pi(\mathbf{q})$  есть потенциальная энергия системы. В положении равновесия

$$Q_1 = \dots = Q_n = 0. \quad (7.3.2)$$

Без ограничения общности можно принять, что этому положению отвечают значения  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ ,  $\Pi(\mathbf{0}) = 0$ . Условие равновесия (7.3.2) с учетом (7.3.1) принимает вид

$$\mathbf{Q} = -\text{grad} \Pi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (7.3.3)$$

Рассмотрим движения системы в окрестности положения равновесия. Эти движения описываются уравнениями

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \text{grad} \Pi(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (7.3.4)$$

с положительно определенной матрицей  $\mathbf{A}$ . Предположим, что в некоторой окрестности начала координат потенциальная энергия системы положительно определенная. Тогда полная энергия  $E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} + \Pi(\mathbf{q})$  будет положи-

тельно определенной в некоторой окрестности точки фазовых переменных  $\mathbf{x} = \{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\} \in \mathcal{R}^{2n}$ , причем  $E(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ . Функция  $E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  удовлетворяет всем требованиям нормы и поэтому можно принять ее в качестве нормы в фазовом пространстве, положив  $\|\mathbf{x}(t)\| = E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . Для консервативной системы справедлив закон сохранения энергии (интеграл энергии уравнений движения)  $E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) = \text{const}$ , где  $\mathbf{q}_0$  и  $\dot{\mathbf{q}}_0$  - значения фазовых переменных при  $t = t_0$ .

Таким образом, для любого  $\varepsilon > 0$  можно принять, например,  $\delta(\varepsilon, t_0) = \varepsilon$ . Тогда для всех движений  $\mathbf{q}(t)$ , удовлетворяющих неравенству  $\|\mathbf{x}_0(t_0)\| = E(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) < \delta$ , при всех  $t \geq t_0$  будет выполняться неравенство  $\|\mathbf{x}(t)\| = E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) < \varepsilon$ . Это означает, что положение равновесия устойчиво по Ляпунову, что приводит к теореме Лагранжа:

Если потенциальная энергия системы имеет в положении равновесия изолированный минимум, то это положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

тальному равновесию. Четвертая производная в точке  $\theta=0$  равна единице. Следовательно,  $\Pi(\theta)$  при  $\beta=1$  имеет минимум в положении равновесия и по теореме Лагранжа оно устойчиво.

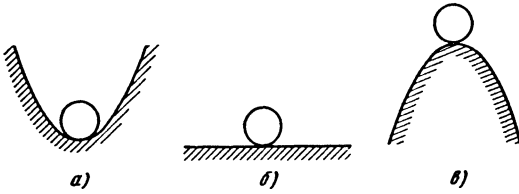


Рис. 7.3.1. Иллюстрация к теореме Лагранжа об устойчивости консервативных систем

На рис. 7.3.1 приведена простейшая иллюстрация к теореме Лагранжа - тяжелый цилиндр на гладкой цилиндрической поверхности. Система по предположению имеет одну степень свободы. В случае *a* равновесие устойчиво, в случае *v* - неустойчиво. Случай *б* отвечает нейтральному равновесию - переходному от устойчивого к неустойчивому. Нейтральное равновесие может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Так, если поверхность - плоскость, то это состояние неустойчиво: при сообщении цилиндру сколь угодно малой начальной скорости он удалится сколь угодно далеко от начального положения. Если поверхность - вогнутая, но вогнутость порождается членами четвертого или более высокого порядка относительно  $q$ , то нейтральное равновесие - устойчивое. Поясним это на менее элементарном примере.

**Пример 1.** Рассмотрим равновесие абсолютно твердого стержня длиной  $l$ , сжатого "мертвой" силой  $P$ . Стержень удерживается в окрестности вертикального положения спиральной пружиной с коэффициентом жесткости  $c$  (рис. 7.3.2).

Потенциальную энергию при отклонениях стержня от вертикального положения  $\theta=0$  с точностью до постоянного множителя представим в форме

$$\Pi(\theta) = \frac{1}{2} \theta^2 - \beta(1 - \cos \theta),$$

где  $\beta = Pl/c$  - безразмерный параметр. Эта функция одной переменной будет иметь изолированный минимум в точке  $\theta=0$ , если

$$\frac{d^2 \Pi(0)}{d\theta^2} = (1 - \beta \cos \theta)|_{\theta=0} = 1 - \beta > 0.$$

Таким образом, вертикальное положение равновесия стержня будет устойчиво, если  $\beta < \beta^* = 1$ . Если  $\beta = 1$ , то вторая и третья производные в точке  $\theta=0$  обращаются в нуль. Это отвечает ней-

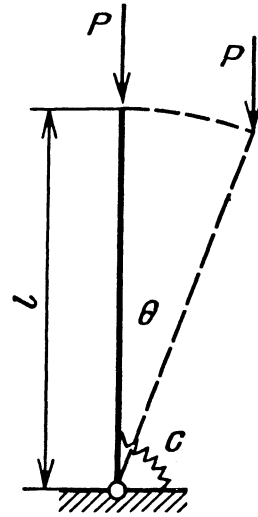


Рис. 7.3.2. Модель механической системы с одной степенью свободы

Обычно для суждения об устойчивости равновесия достаточно удержать в разложении функции  $\Pi(q)$  квадратичные члены:

$$\Pi(q) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} q_j q_k + \dots \quad (7.3.5)$$

Коэффициенты квадратичной формы образуют матрицу размерности  $n \times n$  (матрицу Гессе):

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n \partial q_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n^2} \end{pmatrix} \quad (7.3.6)$$

Равновесие будет устойчивым, если матрица (7.3.6) - положительно определенная. Выполнение этого условия нетрудно проверить, применяя критерий Коши - Сильвестра. Для систем с одной степенью свободы условие устойчивости имеет вид

$$\frac{d^2 \Pi}{dq^2} > 0. \quad (7.3.7)$$

7.3.2. ТОЧКИ ВЕТВЛЕНИЯ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ

Пусть консервативная система с  $n$  степенями свободы зависит от  $r$  параметров, так что ее потенциальная энергия задана в виде  $\Pi(\mathbf{q}, \beta)$ , где  $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^n$ ,  $\beta \in \mathcal{R}^r$ . Функцию  $\Pi(\mathbf{q}, \beta)$  будем предполагать достаточно гладкой по всем аргументам. Рассмотрим множество форм равновесия, удовлетворяющих условию  $\text{grad } \Pi(\mathbf{q}, \beta) = 0$  при непрерывном изменении параметров  $\beta_1, \dots, \beta_r$ . Кроме устойчивых форм, возможны различные типы неустойчивых форм. Примеры для системы с двумя степенями свободы приведены на рис. 7.3.3.

7.3.3. Если  $\Pi = q_1^2 + q_2^2$ , то при  $q_1 = q_2 = 0$  имеем изолированный минимум, при  $\Pi = -(q_1^2 + q_2^2)$  - изолированный максимум, при  $\Pi = q_1^2 - q_2^2$  - седло. Можно указать и другие типы стационарных точек. Например, при  $\Pi = q_1^3 - 3q_1q_2^2$  имеем так называемое "обезьянье седло", при  $\Pi = q_1^2 - q_2^2$  - желоб, при  $\Pi = q_1^2q_2^2$  - скрещенные желоба. При непрерывном изменении параметров системы тип равновесия может измениться; например, изолированный минимум потенциальной энергии сменяется седловой точкой и далее изолированным максимумом. В точках смены формы равновесия появляются новые формы. Это явление называют ветвлением (бифуркацией) форм равновесия. Теория бифуркаций играет важную роль в анализе послекритического поведения механических систем.

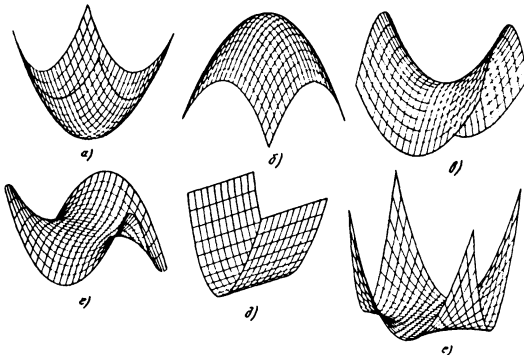


Рис. 7.3.3. Примеры стационарных точек функции потенциальной энергии консервативной системы с двумя степенями свободы: а - минимум; б - максимум; в - седло; г - "обезьянье седло"; д - желоб; е - скрещенные желоба

Типичные диаграммы ветвления для случая  $n=r=1$  представлены на рис. 7.3.4. В случае а имеем точку ветвления при  $\beta = \beta_*$ ,  $q = q_*$ . Если при  $\beta = 0$  равновесие системы было устойчивым, то оно останется таковым до точки ветвления. Затем начальная ветвь равновесия становится неустойчивой (она обозначена далее штриховой линией). При дальнейшем росте параметра  $\beta$  осуществляются устойчивые формы равновесия,

принадлежащие присоединившейся ветви. В случае б смена форм равновесия происходит в точках  $\beta = \beta_*$ ,  $q = q_*$  и  $\beta = \beta_{**}$ ,  $q = q_{**}$ . В окрестности этих точек также имеется два состояния равновесия: одно из них устойчиво, другое неустойчиво. Эти точки называют предельными. При возрастании параметра  $\beta$  до значения  $\beta = \beta_*$  система скачком переходит в новое состояние устойчивого равновесия. При дальнейшем увеличении  $\beta$  система проходит ряд устойчивых состояний, двигаясь по новой ветви. При обратном изменении параметра система проходит по верхней устойчивой ветви до точки  $\beta = \beta_{**}$ ,  $q = q_{**}$ , где происходит скачок на другую устойчивую ветвь. Таким образом, имеет место явление гистерезиса по отношению к изменению параметра  $\beta$ .

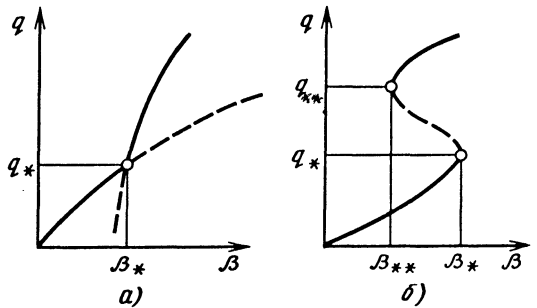


Рис. 7.3.4. Смена состояний равновесия системы с одной степенью свободы

Два других случая показаны на рис. 7.3.5, где точки бифуркации одновременно являются предельными. В случае а при  $\beta > \beta_*$  осуществляется одна из устойчивых форм равновесия, в случае б в окрестности точки ветвления вообще нет устойчивых форм.

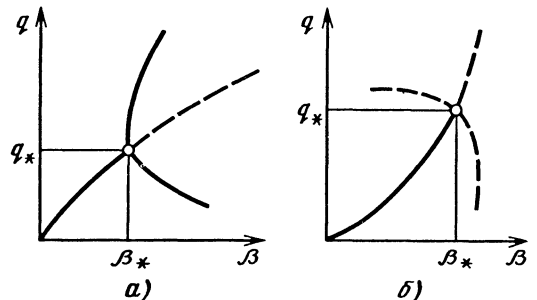


Рис. 7.3.5. Комбинация точек бифуркации с предельными точками

**Пример 2.** Рассмотрим так называемую ферму Мизеса - систему из двух стержней, нагруженную силой  $P$  (рис. 7.3.6). Пусть начальный угол наклона стержней  $\theta_0$ , начальная длина  $l$ . Упругая податливость стержней при сжатии



характеризуется коэффициентом жесткости  $c$ , так что сжимающие усилия в стержнях связаны с их укорочением зависимостью  $N=c\Delta l$ . Под действием силы  $P$  угол наклона стержней принимает значение  $\theta$ . Примем  $\theta$  за обобщенную координату,  $P$  - за параметр системы.

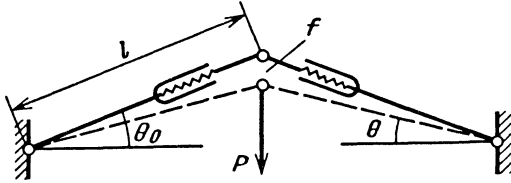


Рис. 7.3.6. Ферма Мизеса

Из геометрических соображений найдем, что укорочение стержней  $\Delta l$  и прогиб фермы  $f$  определяются выражениями

$$\Delta l = l - (\cos \theta_0 / \cos \theta)l; f = l(\sin \theta_0 - \cos \theta_0 \operatorname{tg} \theta).$$

Отсюда найдем потенциальную энергию системы

$$\Pi = \frac{1}{2} cl^2 (1 - \cos \theta_0 / \cos \theta)^2 - Pl(\sin \theta_0 - \cos \theta_0 \operatorname{tg} \theta).$$

В состояниях равновесия  $\partial \Pi / \partial \theta = 0$ . Отсюда получим соотношение между силой  $P$  и равновесным значением  $\theta$ :

$$P = cl(\cos \theta - \cos \theta_0) \operatorname{tg} \theta. \quad (7.3.8)$$

Чтобы выделить устойчивые состояния равновесия, необходимо рассмотреть знак второй производной  $\partial^2 \Pi / \partial \theta^2$ . При  $P=0$  равновесие, очевидно, устойчиво. Следовательно, достаточно найти ближайшие к началу координат предельные точки. Для этого имеем условие

$$\frac{dP(\theta)}{d\theta} = 0, \quad (7.3.9)$$

где  $P(\theta)$  - равновесное значение силы при заданном значении  $\theta$ .

Задача упрощается, если ограничиться случаем  $\theta_0 \ll 1, \theta \ll 1$ , т.е. рассматривать достаточно пологие фермы. Тогда формула (7.3.8) упрощается следующим образом:  $P = cl\theta(\theta_0^2 - \theta^2)$ , а условие (7.3.9) дает критические значения угла  $\theta_*$  и силы  $P_*$ :

$$\theta_* = \pm \frac{\theta_0}{\sqrt{3}}; P_* = \frac{4\sqrt{3}cl\theta_0^3}{9}. \quad (7.3.10)$$

На рис. 7.3.7 представлена зависимость угла  $\theta$  от параметра нагрузки  $\beta = P/cl$ . Устойчивым состоянием равновесия отвечают сплошные, неустойчивым - штриховые линии. При дости-

жении состояний предельных точек с координатами (7.3.10) происходит "прошелкивание" фермы. В зависимости от направления изменения нагрузки возможны "прошелкивания" как в прямом, так и обратном направлениях.

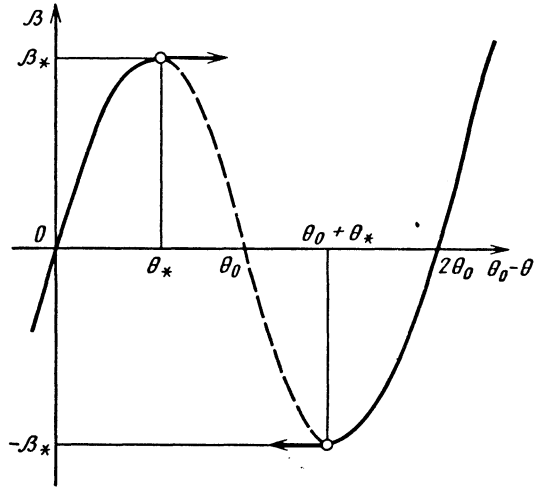


Рис. 7.3.7. Диаграмма состояний равновесия фермы Мизеса

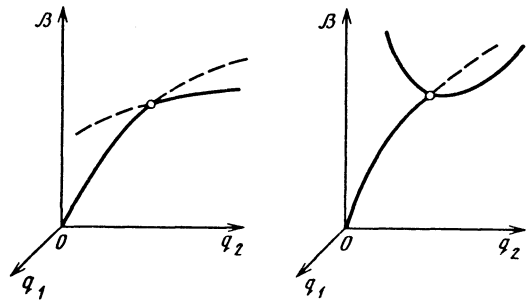


Рис. 7.3.8. Ветвление состояний равновесия системы с двумя степенями свободы

Теория бифуркаций допускает обобщение на произвольные размерности  $n$  и  $r$ . На рис. 7.3.8 показаны типичные диаграммы для случая  $n=2, \beta=1$ . Теория бифуркаций берет начало от классических работ Пуанкаре и А. А. Андронова по теории нелинейных колебаний. В последние годы она получила развитие как чисто математическая теория ("ростков" функций, "катастроф" и т.д.). Изложение математической теории бифуркаций можно найти в [24]. Там же содержится критическое обсуждение "теории катастроф".

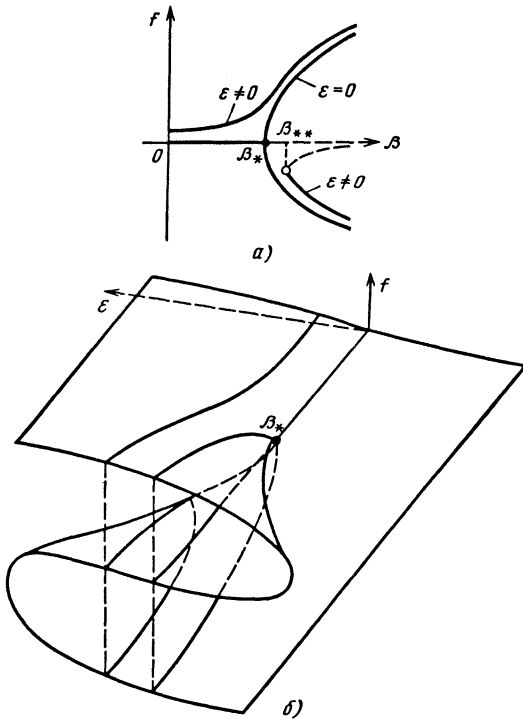


Рис. 7.3.9. Зависимость прогиба  $f$  от параметра нагрузки  $\beta$  и начального отклонения  $\varepsilon$  (а) и интерпретация ветвления форм равновесия в "теории катастроф" (б)

Для прикладной теории устойчивости механических систем эти теории не добавляют существенно нового (кроме терминологии) к известным фактам. В этом можно убедиться, например, по приложениям этой теории к строительной механике из книги [17]. На рис. 7.3.9, а приведена известная зависимость характерного прогиба  $f$  упругого стержня или его модели (рис. 7.3.2) от параметра нагрузки  $\beta$  и начального возмущения  $\varepsilon = f_0$ . На рис. 7.3.9, б показана диаграмма "катастрофы типа сборки", которая по существу представляет собой трехмерную интерпретацию зависимости между  $f$ ,  $\beta$  и  $\varepsilon$  для положений равновесия.

### 7.3.3. ВЛИЯНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Как и в п.7.3.1, будем рассматривать положение равновесия механической системы с голономными стационарными связями при действии только консервативных позиционных сил. Возникает вопрос, как может измениться характер положения равновесия при добавлении обобщенных сил, пропорциональных обобщен-

ным скоростям. Приведенные ниже утверждения связаны с именами Кельвина и Тета [59]. В дополнение к уравнениям (7.3.4) рассмотрим уравнения возмущенного движения вида

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \text{grad}\Pi(\mathbf{q}) + \varepsilon_1 \mathbf{B}_1 \dot{\mathbf{q}} + \varepsilon_2 \mathbf{B}_2 \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (7.3.11)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  - параметры;  $\mathbf{B}_1$  - симметричная матрица диссипативных сил;  $\mathbf{B}_2$  - антисимметричная матрица гироскопических сил. Если матрица  $\mathbf{B}_1$  - положительно определенная, то мощность диссипативных сил при любых движениях  $\mathbf{q}(t)$  будет положительной. В этом случае диссипативные силы обладают *полной диссипацией*. В противном случае говорят о *неполной диссипации*. Мощность гироскопических сил на любых действительных движениях равна нулю.

Положение равновесия  $\mathbf{q}=0$  уравнения (7.3.11), устойчивое при одних консервативных позиционных силах, становится асимптотически устойчивым при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией ( $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 = 0$ ) или диссипативных сил с полной диссипацией и гироскопических сил ( $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ ).

Положение равновесия  $\mathbf{q}=0$  системы, устойчивое при одних консервативных позиционных силах, остается устойчивым при добавлении диссипативных сил (не обязательно обладающих полной диссипацией) и (или) гироскопических сил ( $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$  или  $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 > 0$ ).

Положение равновесия  $\mathbf{q}=0$  системы, неустойчивое при одних консервативных позиционных силах, может быть стабилизировано путем добавления гироскопических сил ( $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 > 0$ ) только в том случае, если стационарной точке функции потенциальной энергии  $\Pi(\mathbf{q})$  отвечает четное число отрицательных собственных значений матрицы (7.3.6).

Положение равновесия  $\mathbf{q}=0$  системы, неустойчивое при одних консервативных позиционных силах, не может быть стабилизировано добавлением гироскопических и диссипативных сил ( $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ ), если последние обладают полной диссипацией.

### 7.3.4. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

К этому классу принадлежат все упругие системы с распределенными параметрами (стержни, пластины, оболочки, комбинированные конструкции и т.п.), нагруженные потенциальными силами при условии, что все связи стационарны и голономны (последнее условие в механике конструкций обычно выполняется). Обобщение теоремы Лагранжа об устойчивости на распределенные системы было дано Брайаном, С. П. Тимошенко и другими авторами.

Исследование устойчивости форм равновесия распределенных консервативных систем сводится к анализу функционала потенциальной

энергии  $\Pi$ , равной сумме потенциальной энергии упругой деформации системы и потенциальной энергии внешних нагрузок. В состояниях равновесия должно быть выполнено условие

$$\delta \Pi = 0 \quad (7.3.12)$$

для всех кинематически допустимых вариаций поля перемещений. Условие (7.3.12) эквивалентно уравнениям равновесия упругой системы и совокупности естественных граничных условий. Состояние равновесия устойчиво, если для всех допустимых вариаций

$$\delta^2 \Pi > 0. \quad (7.3.13)$$

Если хотя бы для некоторых вариаций  $\delta^2 \Pi < 0$ , то равновесие неустойчиво. Критические значения параметров нагрузки следует искать среди тех, которые одновременно удовлетворяют условиям  $\delta \Pi = 0$ ,  $\delta^2 \Pi = 0$ .

**Пример 3.** Тонкий прямолинейный упругий стержень длиной  $l$  нагружается продольной силой  $P$ . Невозмущенная форма равновесия стержня - прямолинейная. В качестве кинематически допустимых вариаций поля перемещений возьмем малые поперечные прогибы стержня, заданные функцией  $w(x)$ ,  $x \in [0, l]$ . Потенциальная энергия стержня в возмущенном состоянии может быть представлена в виде

$$\Pi = \text{const} + \frac{1}{2} \int_0^l EJ w_{,xx}^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^l w_{,x}^2 dx,$$

где первый член в правой части включает энергию деформации для невозмущенного состояния, в частности энергию сжатия стержня. Поскольку два других члена образуют квадратичные функционалы относительно функции возмущений  $w(x)$ , то их сумма дает вторую вариацию от потенциальной энергии

$$\delta^2 \Pi = \int_0^l EJ w_{,xx}^2 dx - P \int_0^l w_{,x}^2 dx. \quad (7.3.14)$$

В учебной и технической литературе члены в правой части из (7.3.14) часто интерпретируют как "потенциальную энергию деформации" и "работу внешних сил". Формула

$$P = \left( \int_0^l EJ w_{,xx}^2 dx \right) \left( \int_0^l w_{,x}^2 dx \right)^{-1} \quad (7.3.15)$$

дает для критического параметра  $P_*$  оценку сверху, если сравниваются кинематически допустимые состояния. Эта формула отвечает так называемому методу С. П. Тимошенко.

Пусть стержень имеет постоянное сечение по длине стержня, так что  $EJ = \text{const}$ , а концы стержня шарнирно оперты. Граничные условия  $w = w_{,xx} = 0$  при  $x=0$  и  $x=l$  будут удовлетворены, если положить

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (7.3.16)$$

Подстановка ряда (7.3.16) в формулу (7.3.14) дает

$$\delta^2 \Pi = \frac{1}{2l} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k^4 \pi^4 EJ}{l^2} - k^2 \pi^2 P \right) q_k^2.$$

Условие (7.3.13) будет удовлетворено при  $P < P_*$ , где  $P_*$  - критическая (эйлерова) сила:

$$P_* = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (7.3.17)$$

Подставляя ряд (7.3.16) в правую часть формулы (7.3.15), получим

$$P = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4 \pi^4 EJ}{l^2} q_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \pi^2 q_k^2 \right)^{-1}.$$

Очевидно, что отличный от нуля минимум правой части достигается при  $q_1 \neq 0$ ,  $q_k = 0$ ,  $k=2, \dots$ , что приводит к той же формуле (7.3.17).

Метод анализа устойчивости, основанный на рассмотрении функционала потенциальной энергии, называют *энергетическим*. Наряду с этим в теории устойчивости упругих (вообще - деформируемых) систем широко применяют так называемый *статический метод*. Идея этого метода восходит к работам Эйлера, который определял критическую силу как "силу, требующуюся для самого малого наклона колонны" [6]. Критическая сила (или, в более общем случае, параметр группы сил) определяется как наименьшее значение силы, при котором наряду с невозмущенной формой равновесия появляются смежные, весьма близкие к ней формы равновесия.

**Пример 4.** Возвращаясь к данным примера 3, составим дифференциальное уравнение изгиба стержня при малых отклонениях  $w(x)$  от положения равновесия:

$$EJ w^{IV} - P w'' = 0. \quad (7.3.18)$$

Вместе с однородными граничными условиями уравнение (7.3.18) отвечает некоторой задаче о собственных значениях. Минимальное среди собственных значений  $P_1, P_2, \dots$  является искомой критической силой, а соответствующая собственная функция описывает форму потери устойчивости в окрестности этого критического значения. Для стержня постоянного по длине сечения при шарнирном опирании концов решение задачи дает

$$P_k = \frac{k^2 \pi^2 EJ}{l^2}, \quad w_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

При  $k=1$  приходим к критическому значению продольной силы (7.3.17).

Уравнение (7.3.18) представляет собой уравнение Эйлера для вариационной задачи

$$\delta(\delta^2\Pi)=0, \quad (7.3.19)$$

где  $\delta^2\Pi$  берется согласно формуле (7.3.14). Внешнее варьирование в (7.3.19) проводится в классе возмущенных форм равновесия. Условие (7.3.19) выражает вариационный принцип Треффца.

Метод Эйлера особенно удобен, если допустимо пренебречь перемещениями и деформациями в невозмущенном состоянии, т.е. можно отождествлять невозмущенное состояние системы с недеформированным. Если это условие не выполнено, то необходимо варьировать состояния системы в окрестности напряженно-деформированных состояний, нахождение которых может представить самостоятельную трудность. Многие задачи устойчивости тонких упругих оболочек принадлежат этому классу.

Наиболее общий метод исследования устойчивости распределенных систем - *динамический*. Метод основан на рассмотрении движений системы в окрестности состояний равновесия. Например, дополняя уравнение (7.3.18) инерционным членом и членом, учитывающим демпфирование, придем к уравнению изгибных колебаний стержня в окрестности невозмущенной прямолинейной формы равновесия:

$$m\ddot{w}_{,tt} + 2m\epsilon\dot{w}_{,t} + EJw_{,xxxx} + Pw_{,xx} = 0, \quad (7.3.20)$$

где  $m$  - масса стержня, отнесенная к единице длины;  $\epsilon$  - коэффициент демпфирования. Подстановка  $w(x,t) = W(x)\exp(\lambda t)$  приводит к уравнению

$$EJW^{IV} + PW'' + (m\lambda^2 + 2m\epsilon\lambda)W = 0, \quad (7.3.21)$$

которое вместе с граничными условиями описывает обобщенную задачу о собственных значениях. Собственные значения - характеристические показатели  $\lambda$  - являются корнями некоторого трансцендентного уравнения. Эти корни, вообще, - комплексные. При  $\epsilon > 0$  и  $P < P^*$  все характеристические показатели находятся в левой полуплоскости, так что равновесие  $w=0$  асимптотически устойчиво. При  $\epsilon=0$ ,  $P < P^*$  все характеристические показатели располагаются на мнимой оси, так что имеет место устойчивость по Ляпунову (если исходную задачу с самого начала трактовать как линейную). Неустойчивость в обоих случаях наступает при  $P > P^*$ , когда хотя бы один показатель переходит на правую полуплоскость. Неустойчивость, как нетрудно убедиться, носит неколебательный характер, т.е. отвечает ситуации, показанной на рис. 7.2.7, а.

Для консервативных систем динамический метод дает те же результаты, что и статический и энергетический методы. Это объясняется тем, что неустойчивость таких систем - неколебательная. Если внешние силы неконсервативные, то, точнее, если в системе имеются дополнительные (непотенциальные) источники энергии, то стати-

ческий и энергетический методы вообще не применимы (см. п. 7.3.6).

### 7.3.5. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Пусть консервативная система находится под действием нагрузок, заданных с точностью до  $r$  параметров  $\beta_1, \dots, \beta_r$ . Возникает задача об оценке устойчивости системы по известным критическим значениям нагрузок, отвечающих каждому воздействию в отдельности. Эти критические параметры будем называть парциальными и обозначать  $\beta_k^*$ .

Задача решается достаточно просто, если число степеней свободы конечно, а потенциальная энергия в окрестности невозмущенного равновесия выражается в виде

$$\Pi(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q}) - \sum_{k=1}^r \beta_k W_k(\mathbf{q}), \quad (7.3.22)$$

где  $U(\mathbf{q})$  - определено положительная квадратичная форма;  $W_k(\mathbf{q})$  - неотрицательные квадратичные формы обобщенных координат  $q_1, \dots, q_n$ . Пусть начало координат в пространстве параметров принадлежит области устойчивости, а все параметры по определению неотрицательны. Тогда имеет место следующее утверждение (теорема П. Ф. Папковича): граница области устойчивости не может быть выпуклой в сторону начала координат.

Теорема позволяет находить идущую в запас устойчивости осторожную оценку для границы области устойчивости: в области устойчивости выполняется условие

$$\sum_{k=1}^r \frac{\beta_k}{\beta_k^*} \geq 1. \quad (7.3.23)$$

Соотношение (7.3.23), взятое со знаком равенства, означает, что граница области аппроксимирована гиперплоскостью, которая по осям координат отсекает отрезки, равные парциальным критическим значениям  $\beta_1^*, \dots, \beta_r^*$ . Если квадратичные формы  $W_1(\mathbf{q}), \dots, W_r(\mathbf{q})$  одновременно приводятся к сумме квадратов, то эта гиперплоскость становится точной границей области устойчивости.

Теорема П. Ф. Папковича допускает обобщение на распределенные системы, когда в формуле (7.3.22) вместо квадратичных форм стоят квадратичные функционалы с аналогичными свойствами. Граница области устойчивости может оказаться выпуклой в сторону начала координат, если по условиям задачи необходим учет деформаций и перемещений в невозмущенном состоянии равновесия. Некоторые расчетные и экспериментальные результаты можно найти в [68]. На рис. 7.3.10 показана экспериментальная граница области устойчивости для

пологой упругой арки, нагруженной двумя силами  $P_1$  и  $P_2$ . Граница состоит из двух отрезков, каждый из которых - выпуклый в сторону начала координат. Отрезки отвечают одной из несимметричных форм потери устойчивости, а точка их пересечения - такому сочетанию  $P_1$  и  $P_2$ , при котором равновесие в наибольшей степени сохраняет близость к симметричной форме. Области устойчивости для существенно неконсервативных систем могут иметь сложную конфигурацию и сложное взаимное расположение. Каждая такая задача требует специального анализа (см. п. 7.3.6).

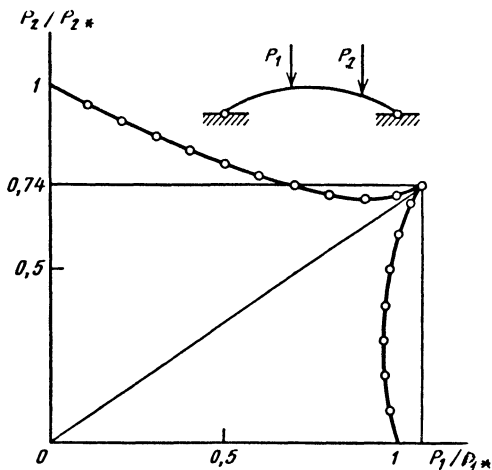


Рис. 7.3.10. Пример невыпуклой границы области устойчивости

### 7.3.6. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Широкий класс неконсервативных механических систем образуют системы, которые нагружены следящими силами, т.е. такими явно не зависящими от времени силами, которые являются неконсервативными вследствие их особого поведения при изменении конфигурации системы. Примером неконсервативной системы служит упругий стержень, заделанный на одном конце и нагруженный на другом конце силой, которая при деформациях стержня сохраняет направление по касательной к изогнутой оси стержня (рис. 7.3.11, а).

Другой пример - аналогичный стержень с жестким диском на конце, причем действующая на диск сила сохраняет свое направление в пространстве независимо от перемещений диска (рис. 7.3.11, б). Неконсервативный характер внешних сил в обоих случаях можно установить, вычисляя их работу на соответствующим образом

выбранном замкнутом пути деформирования [4]. В случае б необходимо иметь в виду, что сила не связана с какой-либо определенной точкой диска, так что работу силы надо выражать через элементарные перемещения точек диска, к которым в данный момент времени приложена сила. Нетрудно видеть, что в обоих случаях силы порождаются дополнительным источником энергии: в случае а это может быть реакция струи от источника, установленного на конце стержня, в случае б - давление струи на диск от внешнего источника.

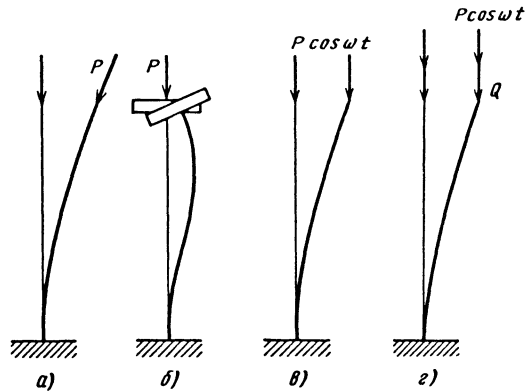


Рис. 7.3.11. Устойчивость прямолинейной формы равновесия при неконсервативном нагружении

К другим неконсервативным задачам устойчивости относят многие задачи аэро- и гидроупругости, а также задачи об устойчивости роторов с учетом внутреннего трения и родственных факторов [4]. Эти задачи освещены в гл. 7.6 и 7.8. Системы, нагруженные силами, явно зависящими от времени, также являются неконсервативными. Таковы задачи, в которых неустойчивость связана с возникновением параметрических резонансов. Прямолинейная форма стержня, нагруженного силой, изменяющейся во времени (рис. 7.3.11, в), может быть отождествлена с равновесием, если пренебречь (ввиду большой жесткости) продольными колебаниями стержня. В результате приходим к задаче об устойчивости прямолинейной формы равновесия при неконсервативной (но явно зависящей от времени) нагрузке.

Статический метод (Эйлера) и энергетический метод к неконсервативным задачам устойчивости, строго говоря, не применимы. Исключение составляют ситуации, когда потеря устойчивости неконсервативной системы имеет неколебательный характер. Так, критическую скорость дивергенции крыла можно определить, используя метод Эйлера; однако для определения критической скорости флаттера необходимо применение динамического метода. Заранее, как правило, не известно, которая из критических скоростей окажется ниже.

**Пример 5.** Непригодность статического метода продемонстрируем на примере консольного стержня, нагруженного следящей силой (см. рис. 7.3.11, *a*). Нетрудно показать, что в окрестности прямолинейной формы вообще не существует изогнутых форм равновесия при любых значениях силы  $P$ . Отсюда следует ошибочный вывод об устойчивости. Этот вывод подтверждается интуитивным представлением, что при отклонениях стержня поперечная составляющая следящей силы стремится вернуть стержень к начальному положению, т.е. стабилизировать прямолинейную форму.

Применяя к этой задаче динамический метод, приходим к уравнению (7.3.20) с граничными условиями  $w=w_{,x}=0$  при  $x=0$  и  $w_{,xx}=w_{,xxx}=0$  при  $x=l$  (в случае "мертвой" силы последнее условие заменяется на  $Pw_{,x}=EJw_{,xxx}$  при  $x=l$ ). После подстановки  $w(x,t)=W(x)\exp(\lambda t)$  приходим к уравнению (7.3.21) с общим решением

$$W(x) = C_1 \sin \frac{r_1 x}{l} + C_2 \cos \frac{r_1 x}{l} + C_3 \operatorname{sh} \frac{r_2 x}{l} + C_4 \operatorname{ch} \frac{r_2 x}{l}, \quad (7.3.24)$$

где  $r_{1,2}$  - корни уравнения  $EJr^4 + Pr^2 + m\lambda^2 + 2m\varepsilon\lambda = 0$ . Эти корни для случая  $\varepsilon=0$  определяются как

$$r_{1,2}^2 = \pm \frac{\beta}{2} + \left[ \left( \frac{\beta}{2} \right)^2 + \mu^2 \right]^{1/2},$$

где использованы обозначения

$$\beta = \frac{Pl^2}{EJ}; \quad \mu = i\lambda l^2 \left( \frac{m}{EJ} \right)^{1/2}.$$

Удовлетворяя граничным условиям для функции  $W(x)$ , получим уравнения относительно постоянных интегрирования в (7.3.24). Эти уравнения - линейные однородные. Определитель системы уравнений должен быть равен нулю, откуда приходим к уравнению относительно параметра  $\mu$ :

$$\beta^2 + 2\mu^2 + \beta\mu \sin r_1 \operatorname{sh} r_2 + 2\mu^2 \cos r_1 \operatorname{ch} r_2 = 0. \quad (7.3.25)$$

Рассмотрим характеристические показатели на верхней полуплоскости (в нижней полуплоскости картина симметричная). Если  $\beta=0$ , то все показатели находятся на мнимой оси. С возрастанием  $\beta$  два наименьших корня сближаются и при некотором  $\beta=\beta_*$  становятся кратными. При дальнейшем увеличении один из показателей переходит на правую полуплоскость. Будем считать, что значение  $\beta_*$  отвечает критической силе  $P_*$ . Численное решение уравнения (7.3.25) дает  $\beta_* \approx 20,05$ , откуда

$$P_* \approx \frac{20,05 EJ}{l^2}. \quad (7.3.26)$$

### 7.3.7. ЭФФЕКТЫ ДЕСТАБИЛИЗАЦИИ РАВНОВЕСИЯ ВСЛЕДСТВИЕ ТРЕНИЯ

Еще в 1952 г. Циглер рассмотрел устойчивость двойного маятника с трением в шарнирах, находящегося под действием следящей силы [4]. Потеря устойчивости равновесия такого маятника происходит по колебательному типу. Вычислив критическое значение следящей силы с учетом трения и устремив затем коэффициенты трения к нулю, Циглер получил критическую силу, меньшую, чем значение, вычисленное без учета трения. Этот результат дал основание говорить о парадоксе дестабилизации вследствие трения и породил обширную литературу, частичный обзор которой можно найти, например, в работе [67].

В большинстве работ этого направления нахождение всех характеристических показателей на мнимой оси квалифицировалось как устойчивость. Критические параметры определялись из условия, что в окрестности их значений хотя бы один из характеристических показателей переходит на правую полуплоскость. Но уравнения линейной теории устойчивости следует рассматривать как результат линеаризации некоторых нелинейных уравнений, описывающих физическую задачу. С точки зрения теории Ляпунова, случай нахождения всех показателей на мнимой оси должен трактоваться как сомнительный, когда линеаризованные уравнения не дают ответа на вопрос об устойчивости. Таким образом, большинство парадоксов дестабилизации вследствие трения являются результатом некорректного применения динамического метода. Чтобы устранить двусмысленность в терминологии, было предложено [66] называть случай, когда все характеристические показатели находятся на мнимой оси, квазистабильностью, а значения параметров, при которых хотя бы один из показателей переходит на правую полуплоскость, - квазикритическими. Термины устойчивость и критические значения сохраняют при этом строгий смысл.

Снижение критических параметров вызывается не столько демпфированием самим по себе, сколько неравномерным распределением демпфирования по формам колебаний [4, 9]. При этом за меру демпфирования принимается диссипация энергии за единицу времени или, что то же самое, отношение характерной мощности диссипации к среднему значению полной энергии при колебаниях по форме, близкой к собственной форме. На рис. 7.3.12 представлена типичная зависимость критического параметра  $\beta_*$  при исчезающе малом трении для системы с двумя степенями свободы. Квазикритическое

значение  $\tilde{\beta}_*$  равно верхнему пределу критических значений при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Здесь  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  - парциальные коэффициенты демпфирования.

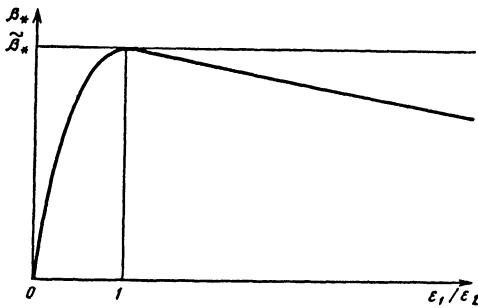


Рис. 7.3.12. Зависимость критического параметра для системы с двумя степенями свободы от отношения парциальных коэффициентов демпфирования

Для широкого класса распределенных систем также было показано [66], что если отрезок  $[0, \beta_*]$  принадлежит области устойчивости, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_*(\varepsilon) \leq \tilde{\beta}_*, \quad (7.3.27)$$

где символ  $\varepsilon \rightarrow 0$  означает стремление к нулю всех диссипативных сил. Знак равенства достигается в случае так называемого "внешнего" трения.

Для нахождения связи между критическими и квазикритическими параметрами необходимо рассмотреть характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda^2, \varepsilon\lambda, \beta) = 0, \quad (7.3.28)$$

связывающее характеристический показатель  $\lambda$ , параметр демпфирования  $\varepsilon$  и параметр нагрузки  $\beta$ . Это уравнение будет алгебраическим для систем с конечным числом степеней свободы и трансцендентным для распределенных систем. При фиксированном  $\beta$  уравнение (7.3.28) определяет неявную функцию  $\lambda(\varepsilon)$ . Чтобы найти связь между  $\lambda$  и  $\varepsilon$ , необходимо построить ветви этой функции вблизи точки  $\beta = \tilde{\beta}_*$ ,  $\lambda = \lambda_*$ ,  $\varepsilon = 0$ . Если точка принадлежит границе области динамической неустойчивости, то уравнение (7.3.28) имеет вблизи нее кратный корень. Разложение функции  $\lambda(\varepsilon)$  в ряд по целым степеням  $\varepsilon$  становится здесь непригодным, поэтому должно быть применено разложение по дробным степеням. Например, пусть  $\lambda = \lambda_* -$  двойной корень. В этом случае

$$\lambda_{1,2}(\varepsilon) = \lambda_* + \left( -\frac{a_1}{a_2} \right)^{1/2} \varepsilon^{1/2} + \dots, \quad (7.3.29)$$

где использованы обозначения

$$a_1 = \lambda_* \frac{\partial \Delta(x, y, \tilde{\beta}_*)}{\partial y} \Big|_{x=\lambda_*^2, y=0};$$

$$a_2 = 2\lambda_*^2 \frac{\partial^2 \Delta(x, y, \tilde{\beta}_*)}{\partial x^2} \Big|_{x=\lambda_*^2, y=0}$$

Наличие или отсутствие псевдодестабилизации при  $\varepsilon \rightarrow 0$  непосредственно усматривается из формул (7.3.28) и (7.3.29). В частности, отсюда вытекает соотношение (7.3.27) со знаком равенства для случая внешнего трения.

Эффект дестабилизации вызывается не столько демпфированием самим по себе, сколько неравномерным распределением диссипации по формам колебаний. О дестабилизации в строгом смысле можно говорить, например, в случае, когда к системе, устойчивой при наличии достаточно малых сил внешнего трения, добавляются диссипативные силы с неравномерным распределением диссипации.

**Пример 6.** В качестве модели распределенной системы с наследственным трением рассмотрим стержень из стандартного линейного вязкоупругого материала, нагруженный "мертвой" силой  $Q$  и следящей силой  $P$  (см. рис. 7.3.11, з). После отделения времени при помощи подстановки  $w(x, t) = w(x) \exp(\lambda t)$  приходим к обобщенной задаче о собственных значениях относительно безразмерного характеристического показателя  $\mu = \lambda / \omega_0$ , параметров нагрузки  $\alpha$  и  $\beta$  и параметров диссипации  $\gamma$  и  $\eta$ :

$$(1 + \eta\mu)W^{IV} + (\alpha + \beta)(1 + \gamma\eta\mu)W'' +$$

$$+(\gamma^2 + \gamma\eta\mu^2)W = 0;$$

$$W = W' = 0 \quad (\xi = 0);$$

$$W'' = W''' + \alpha \frac{1 + \gamma\eta\mu}{1 + \eta\mu} W' = 0 \quad (\xi = 1).$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{Ql^2}{E_\infty J}; \quad \beta = \frac{Pl^2}{E_\infty J}; \quad \eta = \omega_0 \tau;$$

$$\gamma = \frac{E_\infty}{E_0}; \quad \omega_0^2 = \frac{\pi^4}{l^4} \frac{E_0 J}{m},$$

а штрихами обозначено дифференцирование по безразмерной координате  $\xi = x / l$ . При этом  $l$  - длина стержня;  $J$  - момент инерции его сечения;  $m$  - масса, отнесенная к единице длины;  $E_0$  - мгновенный модуль;  $E_\infty$  - длительный модуль;  $\tau$  - время релаксации.

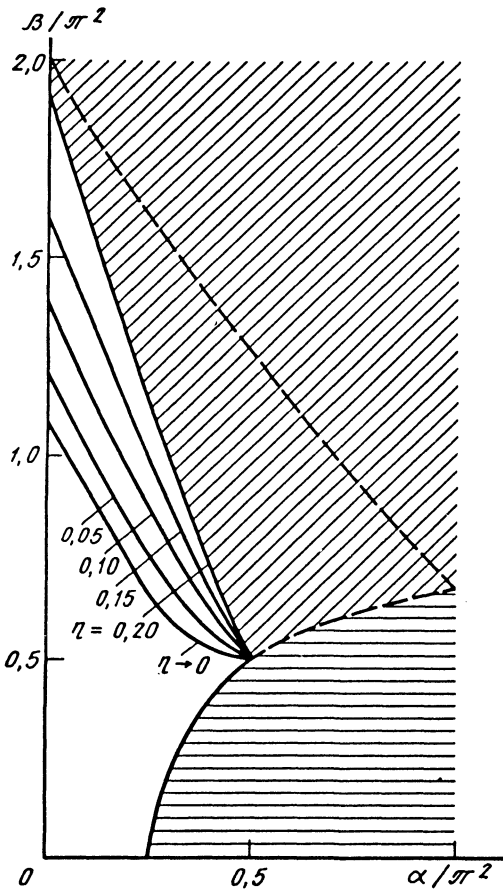


Рис. 7.3.13. Диаграмма устойчивости на плоскости параметров "мертвой" и следящей сил

Диаграмма устойчивости для некоторых численных данных приведена на рис. 7.3.13. Область квазиустойчивости, которую можно также интерпретировать как область устойчивости при исчезающе малом внешнем трении, ограничена штриховой линией. Тонкие линии соответствуют различным значениям параметра  $\eta$ . Значительная часть области квазиустойчивости в действительности принадлежит области неустойчивости.

7.3.8. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ РАВНОВЕСИЯ

Классический пример параметрической стабилизации - обеспечение устойчивости обращенного маятника при помощи периодических движений опоры в направлении силы тяжести. Стабилизация имеет место, если параметры системы попадают в область устойчивости на отрицательной полуплоскости диаграммы

Айнса-Стретта. Для стабилизации требуется выполнение некоторых соотношений между частотой и амплитудой, с которыми колеблется точка опоры маятника. Аналогичное явление следует ожидать для широкого класса систем с конечным числом степеней свободы, находящихся в состоянии неустойчивого равновесия при наличии консервативных и диссипативных сил. В статье [58] обсуждалась возможность параметрической стабилизации прямолинейной формы упругого стержня, который сжат постоянной силой, превышающей эйлерово значение.

Большая часть результатов по теории параметрической стабилизации получена методом усреднения, предполагающим, что возмущенное движение вблизи неустойчивого равновесия может быть представлено в виде суммы "медленных" и "быстрых" движений. При исследовании устойчивости по "быстрым" движениям с одной степенью свободы область стабилизации на плоскости коэффициент параметрического возбуждения - частота возбуждения ограничена и, кроме того, включает такие участки границы, на которых разделение движений невозможно. Применительно к системам с большим числом степеней свободы необходимо, кроме того, учитывать, что параметрическое воздействие, стабилизирующее одни формы, будет дестабилизирующим по отношению к другим формам. Поэтому к выводам, полученным на основе метода усреднения и родственных приближенных приемов, следует относиться осторожно.

В качестве примера рассмотрим задачу о параметрической стабилизации прямолинейной формы упругого опертого по концам стержня, нагруженного постоянной сжимающей силой  $Q$ , превышающей эйлерово значение, и периодической силой  $P \cos \omega t$  (см. рис. 7.3.11, з). Уравнение относительно малых прогибов стержня в общепринятых обозначениях имеет вид

$$m w_{,tt} + 2m \epsilon w_{,t} + EJ w_{,xxxx} + (Q + P \cos \omega t) w_{,xx} = 0, \tag{7.3.30}$$

где учтено внешнее трение с коэффициентом  $\epsilon$ . Граничные условия для прогиба  $w(x, t)$  будут удовлетворены, если искать решение в форме ряда (7.3.16).

Относительно обобщенных координат  $q_k(t)$  получаем совокупность обыкновенных дифференциальных уравнений с периодически коэффициентами, области неустойчивости для которых строятся известными методами [3]. Область неустойчивости решения  $w(x, t) \neq 0$  уравнения (7.3.30) получается суперпозицией областей неустойчивости для отдельных обобщенных координат. На рис. 7.3.14 приведена диаграмма устойчивости для случая  $Q = 1,05 P_E, \gamma = \epsilon / \omega_1 = 0,05$ , где  $P_E$  - эйлерова сила;  $\omega_1$  - основная собственная частота не-



нагруженного стержня. Область стабилизации основной формы ( $k=1$ ) имеет вид клина, ориентированного по биссектрисе. Эта область накрывается рядом областей неустойчивости для других обобщенных координат (чтобы не затемнять чертеж, на диаграмму нанесены области неустойчивости только для случая  $k=2$  и  $k=3$ ).

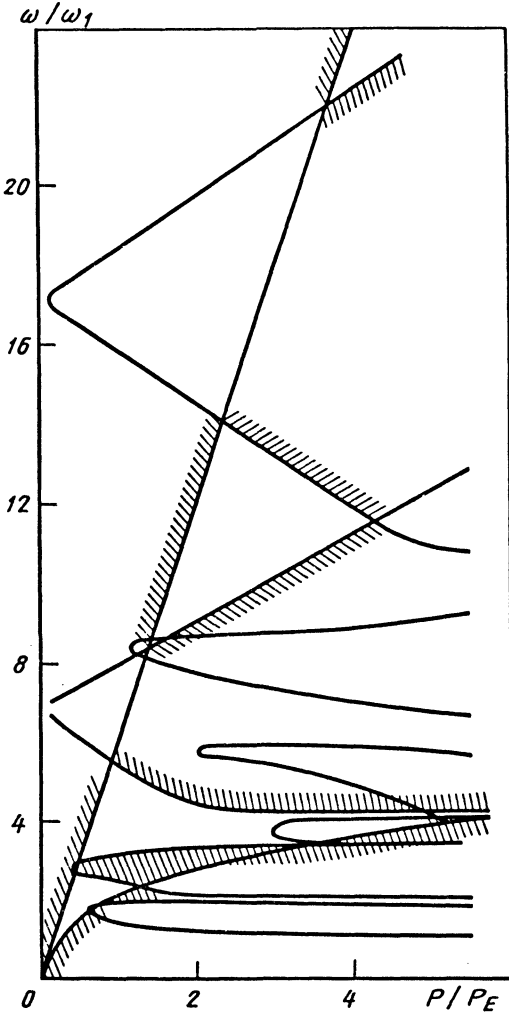


Рис. 7.3.14. Стабилизация неустойчивого равновесия при помощи параметрического воздействия

### 7.3.9. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

Условия устойчивости равновесия консервативных систем с односторонними связями целесообразно сформулировать не в терминах потенциальной энергии, а в терминах виртуаль-

ной работы. Это позволяет распространить некоторые положения теории на неконсервативные (точнее - существенно диссипативные) системы, в частности, на системы с разрушающимися связями.

Принцип виртуальных перемещений для систем с односторонними идеальными связями формулируется следующим образом: система находится в равновесии тогда и только тогда, когда сумма элементарных работ всех внешних и внутренних активных сил на любых малых перемещениях, совместимых с условиями связей, равна нулю или отрицательна:

$$\delta A \leq 0. \quad (7.3.31)$$

При этом знак неравенства отвечает формам равновесия при включенных в действие односторонних связях. Если система строго консервативна, то  $\delta A = -\delta\Pi$ , где  $\Pi$  - потенциальная энергия системы, так что условие равновесия (7.3.31) принимает вид  $\delta\Pi \geq 0$ .

Пусть обобщенные координаты  $q_1, \dots, q_n$  выбраны таким образом, что соотношения односторонности могут быть представлены в виде

$$\delta q_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.3.32)$$

Выделим состояния, для которых на любых виртуальных перемещениях работа всех внешних и внутренних сил строго отрицательна. Будем называть эти состояния *субравновесными*. Состояния, для которых имеются такие виртуальные перемещения  $\delta q_j > 0$  ( $j = 1, \dots, m$ ), при которых  $\delta A = 0$ , а при остальных  $\delta q_j > 0$  выполнено условие  $\delta A < 0$ , будем называть *равновесными* по обобщенным координатам  $q_1, \dots, q_m$ . Состояния, для которых имеется хотя бы одно виртуальное перемещение, такое, что  $\delta A > 0$ , будем называть *неравновесными*.

Субравновесные состояния являются *устойчивыми*: для перехода в любое смежное состояние необходимы дополнительные энергетические затраты, источники которых в системе отсутствуют. Неравновесные состояния по своей природе *неустойчивы*. Равновесные состояния могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Для суждения об их устойчивости возьмем вариацию от виртуальной работы  $\delta A$ , т.е.  $\delta^2 A = \delta(\delta A)$ . Будем называть равновесное состояние устойчивым, если для любых отличных от нуля виртуальных перемещений  $\delta q_j > 0$

выполнено условие  $\delta^2 A < 0$ , и неустойчивым, если среди вариаций найдутся также  $\delta q_j > 0$ ,

что  $\delta^2 A > 0$ . Равновесные состояния, для которых имеются также вариации  $\delta q_j > 0$ , что

$\delta^2 A = 0$ , а при остальных вариациях  $\delta^2 A < 0$ , будем называть *нейтральными*. Нейтральные

состояния могут быть либо критическими, т.е. соответствующими переходу от устойчивого состояния к неустойчивому, либо сомнительными. В последнем случае надо исследовать поведение следующих членов в разложении  $\delta^2 A$  в степенные ряды по  $\delta q_j$ .

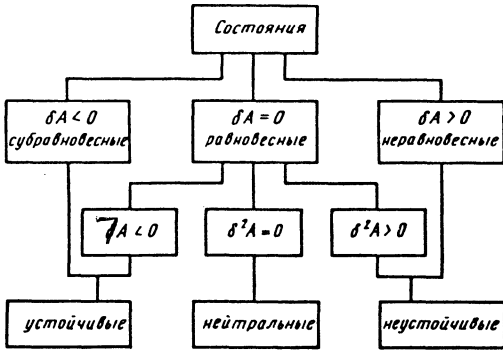


Рис. 7.3.15. Классификация форм равновесия систем с односторонними связями

Данная классификация состояния механических систем с односторонними связями была приведена в работе [10] с приложением к задачам механики усталостного разрушения. Она приведена на рис. 7.3.15, где соотношения  $\delta A = 0$ ,  $\delta A < 0$  и т.д. носят условный характер: их следует понимать в смысле, точно сформулированном в тексте. Особенностью классификации является то, что она приведена с четким разделением по двум признакам: равновесности и устойчивости. Принадлежность к одному из классов первого уровня (субравновесность, равновесность или неравновесность) зависит от знака  $\delta A$ ; принадлежность к одному из классов второго уровня (устойчивость, нейтральность или неустойчивость) зависит от знаков  $\delta A$  и  $\delta^2 A$ .

Пример вышеприведенной классификации показан на рис. 7.3.16. Тяжелое тело, например цилиндр, находится на недеформируемой зубчатой цилиндрической поверхности и удерживается от движения влево при помощи упора - аналога храпового механизма. Условие связи имеет вид  $dq/dt \geq 0$  или, после интегрирования,  $q(t_2) - q(t_1) \geq 0$  при  $t_2 > t_1$ . Таким образом, связь является неголономной. В случае 1 состояние системы субравновесно и, следовательно, устойчиво, в случае 2 оно равновесно и устойчиво. Случай 3 соответствует равновесному нейтральному состоянию, случай 4 - равновесному неустойчивому состоянию. В случае 5 имеем неравновесное и, следовательно, неустойчивое состояние. Данный пример аналогичен иллюстрации к теореме Лагранжа (тяжелый цилиндр на гладкой цилиндрической поверхности - см. рис.

7.3.1). Различие между рис. 7.3.1 и 7.3.16 состоит в том, что в первом случае допускаются вариации  $\delta q$  обоих знаков, во втором - только  $\delta q \geq 0$ .

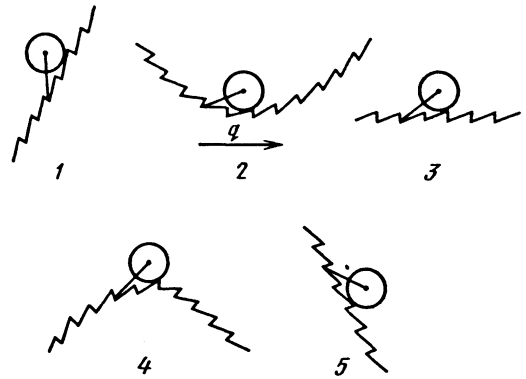


Рис. 7.3.16. Типы состояний системы с односторонней связью

Теория равновесия систем с односторонними связями получила применение в механике разрушения. Трещины в конструкционных материалах обычно являются необратимыми, "незаживающими", причем ограничения на их необратимость могут быть представлены в виде неравенств (7.3.32). Переход к смежным состояниям равновесия, при котором варьируются только параметры трещин, назван в работе [10] *варьированием по Гриффитсу*. Подход, основанный на принципе виртуальных перемещений, позволяет распространить энергетический подход Гриффитса на широкий класс многопараметрических задач хрупкого, вязкого, усталостного, коррозионного и других видов разрушения [11].

**Пример 7.** Для иллюстрации рассмотрим классическую задачу Гриффитса об устойчивости трещин отрыва в неограниченной линейной упругой среде. Длину трещин обозначим  $2l$ , номинальные напряжения  $\sigma_\infty$  (рис. 7.3.17). Рассмотрим задачу в предположении плоской деформации и заданных смещений "на бесконечности". Тогда потенциальная энергия упругой деформации для половины тела выражается формулой

$$U = \text{const} - \frac{\sigma_\infty^2 l^2 (1 - \nu^2)}{2E},$$

где  $\nu$  - коэффициент Пуассона;  $E$  - модуль Юнга. При увеличении размера трещины от  $l$  до  $l + \delta l$  высвобождается энергия  $\delta U$  так, что виртуальная работа внутренних сил  $\delta A_i = -\delta U$ . При продвижении фронта трещины на единицу длины затрачивается энергия, равная  $\gamma$ , так что виртуальная работа при разрушении связи  $\delta A_f = -\gamma \delta l$ . Таким образом, для виртуальной

работы при варьировании по Гриффитсу имеем выражение

$$\delta A = \left( \frac{\sigma_*^2 l (1 - \nu^2)}{E} - \gamma \right) \delta l.$$

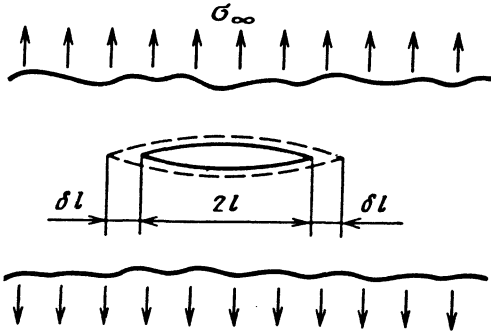


Рис. 7.3.17. Тело с трещиной как система с односторонними связями

Условие  $\delta A = 0$  дает равновесный размер трещины

$$l_* = \frac{\gamma E}{\sigma_\infty^2 (1 - \nu^2)}.$$

Поскольку вторая вариация  $\delta^2 A > 0$  при любых  $\sigma_\infty > 0$ ,  $l > 0$ , то размер трещины  $l_*$  отвечает неустойчивому состоянию. При  $l > l_*$  состояние тела с трещиной становится неравновесным, что соответствует неконтролируемому ускоряющемуся росту трещины - хрупкому разрушению.

## Глава 7.4

### ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ

#### 7.4.1. ПРЯМОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Характеристические показатели линейной системы с постоянными параметрами совпадают с собственными значениями линейного оператора этой системы. Если дискретизация системы выполнена на уровне выбора расчетной схемы или она оказалась результатом применения какого-либо метода к распределенной системе (например, метода конечных элементов, граничных элементов, конечных разностей, Бубнова - Галеркина и др.), то оператор системы будет конечномерным. В принятом базисе этому оператору соответствует некоторая матрица [см. уравнение (7.2.3)]. Свойства этой матрицы зависят от характера внешних воздействий. Напри-

мер, ее собственные значения и собственные векторы будут действительными, если внешние и внутренние силы обладают потенциалами. Структура матрицы (ленточность, блочность, заполненность) в базисе общего положения зависит от выбранного метода дискретизации распределенной системы.

Размерность матрицы  $\mathbf{G}$ , как правило, большая. Для получения собственных значений необходимо применять вычислительные методы линейной алгебры [14, 38, 52, 54]. Особо следует отметить справочник алгоритмов по линейной алгебре [53], пользующийся заслуженной популярностью в прикладных исследованиях. Поскольку не существует алгоритма вычисления собственных значений, эффективного для матриц любого типа, то всякий раз приходится решать проблему выбора алгоритма. Для вычисления комплексных характеристических показателей линейной системы с матрицей  $\mathbf{G}$  произвольной структуры следует применять  $QL$ - и  $QR$ -алгоритмы. При этом эффективность алгоритмов повышается, если предварительно выполнить процедуры масштабирования и приведения матрицы к почти треугольной форме (форме Хессенберга) [53]. Указанные алгоритмы позволяют получать характеристические показатели с машинной точностью, что особенно важно для исследования устойчивости систем, содержащих исчезающе малые параметры, как, например, параметры малых диссипативных сил.

**Пример 1.** В качестве иллюстрации эффективности алгоритмов рассмотрим задачу об устойчивости формы равновесия  $u = v = w = 0$  ортотропной усеченной конической оболочки, обтекаемой изнутри сверхзвуковым потоком газа (рис. 7.4.1, а). Невозможное установившееся течение газа будем трактовать как одномерное. Давление, плотность и температуру газа вычисляем по известным формулам прикладной газовой динамики:

$$p_0(s) = p \left[ 1 + \frac{1}{2} (\alpha - 1) M^2(s) \right];$$

$$\rho_0 = \rho \left[ 1 + \frac{1}{2} (\alpha - 1) M^2(s) \right]^{-1/(\alpha - 1)};$$

$$T_0 = T \left[ 1 + \frac{1}{2} (\alpha - 1) M^2(s) \right]^{-1},$$

где  $M$  - число Маха;  $\alpha$  - показатель адиабаты газа. Через  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  обозначены параметры торможения. Число Маха в сечении  $s$  получается численно как корень уравнения

$$M\varphi_{L_1} \left[ \frac{1}{2}(\alpha + 1) \right]^{(\alpha+1)/[2(\alpha-1)]} - \left[ 1 + \frac{1}{2}(\alpha - 1)M^2 \right]^{(\alpha+1)/[2(\alpha-1)]} = 0,$$

где  $\varphi_{L_1} = \varphi(M_{L_1})$  — выражается через число Маха  $M_{L_1}$  во входном сечении оболочки  $s = L_1$ .

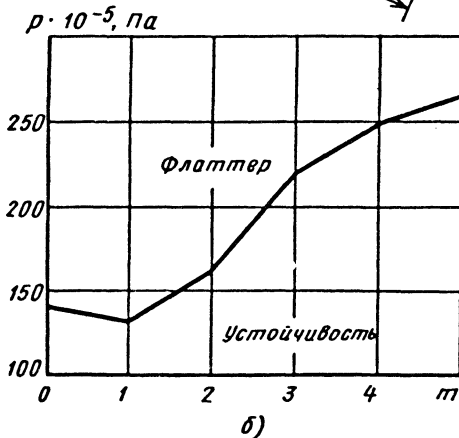
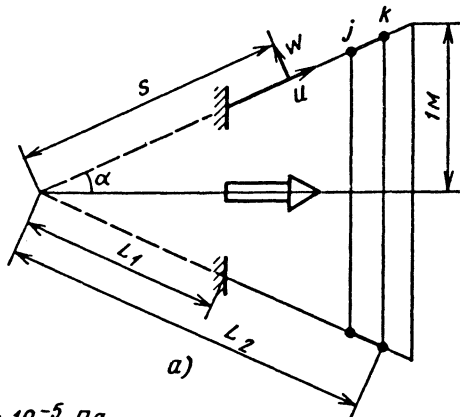


Рис. 7.4.1. Расчетная схема конической оболочки (а) и зависимость критического давления от числа волн в окружном направлении (б)

Избыточное аэродинамическое давление в возмущенном движении оболочки будем вычислять по линейному приближению поршневой теории [4]  $\tilde{p}_0 - p = \rho_0 c_0 (w_{,t} + c_0 M w_{,s})$ , где  $\rho_0, c_0$  — локальные плотность и скорость звука в невозмущенном течении газа. Подставляя их выражения в соответствии с вышеприведенными формулами, имеем  $\tilde{p}_0 - p_0 = F_2(s)w_{,t} + pF_1(s)w_{,s}$ , где  $F_1, F_2$  — выражения, зависящие от локального числа Маха.

Для дискретизации задачи применим метод конечного элемента. Разрешающую систему уравнений можно получить из принципа возможных перемещений:

$$\int_{L_1}^{L_2} \int_0^{2\pi} (\delta U - \delta W - \delta Su - \Theta \delta v - Z \delta w) s \sin \alpha d\theta ds = 0.$$

Здесь  $U$  — поверхностная плотность энергии упругих деформаций, вычисляемая по формулам технической теории конических оболочек;

$$W = 1/2 N_s^0 w_{,s}^2 + 1/2 N_\theta^0 (s^{-1} \sin^{-1} \alpha w_{,\theta})^2 -$$

плотность параметрического функционала, соответствующего безмоментному напряженному состоянию невозмущенной формы равновесия оболочки;  $S = -\rho_M h u_{,tt}$  и  $\Theta = -\rho_M h v_{,tt}$  — плотности сил инерции соответственно в продольном и в окружном направлениях;  $Z = -\rho_M h w_{,tt} - \epsilon \rho_M h w_{,t} - pF_1(s)w_{,s} - F_2(s)w_{,t}$  — плотности нормальных сил инерции, сил “внешнего” трения и аэродинамическое давление;  $\delta u, \delta v, \delta w$  — кинематически допустимые возможные перемещения.

Разобьем оболочку на конические элементы и образуем вектор узловых перемещений элемента

$$\mathbf{q}_{(e)}^T(t) = (q_1, q_2, \dots, q_8)^T = [u_j, v_j, w_j, (w_{,s})_j,$$

$$u_k, v_k, w_k, (w_{,s})_k]$$

где индексы  $j$  и  $k$  соответствуют узлам (см. рис. 7.4.1, а). Для фиксированного момента времени аппроксимируем поле тангенциальных перемещений в направлении образующей полиномами первой степени и функциями  $\cos m\theta$  в окружном направлении. Поле нормальных перемещений аппроксимируем полиномами третьей степени и такими же функциями в окружном направлении. В силу свойства аддитивности интеграла из принципа возможных перемещений следует

$$\sum (e) \delta \mathbf{q}_{(e)}^T [A_{(e)} \ddot{\mathbf{q}}_{(e)} + D_{(e)} \dot{\mathbf{q}}_{(e)} + K_{(e)} \mathbf{q}_{(e)} + p \mathbf{B}_{(e)} \mathbf{q}_{(e)} +$$

$$+ p (\mathbf{B}_{(e)}^{(\sigma_\theta)} - \mathbf{B}_{(e)}^{(\sigma_r)}) \mathbf{q}_{(e)}] \delta \mathbf{q}_{(e)} = 0,$$

где  $A_{(e)}, K_{(e)}, D_{(e)}$  — матрицы инерции, жесткости и диссипативных сил;  $B_{(e)}$  — несимметричная матрица аэродинамических сил;  $B_{(e)}^{(\sigma_\theta)}, B_{(e)}^{(\sigma_r)}$  — параметрические матрицы конечного элемента. Элементы всех этих матриц получаются в результате численного вычисления интегралов. Число

$m$  в окружном направлении является параметром задачи. Вводя вектор глобальных узловых перемещений  $\mathbf{q}$ , из последнего соотношения получим уравнение возмущенного движения

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \varepsilon\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} + \eta\mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} + p\mathbf{B}\mathbf{q} + p\left(\mathbf{V}^{(\sigma_0)} - \mathbf{V}^{(\sigma_r)}\right)\mathbf{q} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}.$$

Здесь глобальные матрицы получаются по обычным для МКЭ правилам формирования из соответствующих матриц для конечного элемента и учтены также граничные условия защемления оболочки по сечению меньшего радиуса. Кроме того, аэродинамическое и другие виды демпфирования аппроксимированы принятым в инженерной практике приемом введения "внешнего" трения, пропорционального матрице инерции системы, и внутреннего трения, пропорционального матрице жесткости системы, с параметрами соответственно  $\varepsilon$  и  $\eta$ . Полагая, как обычно,  $\mathbf{q}(t) = \Phi \exp(\lambda t)$ , приходим к обобщенной проблеме собственных значений

$$\left[ \Lambda^2 + \varepsilon\Lambda + \eta\mathbf{K}\Lambda + p\mathbf{B} + p\left(\mathbf{V}^{(\sigma_0)} - \mathbf{V}^{(\sigma_r)}\right) + \mathbf{K} \right] \Phi = \mathbf{0}.$$

Так же, как и в гл. 7.2, она может быть сведена к стандартной проблеме собственных значений для матрицы  $\mathbf{G}$  удвоенной размерности. В случае  $\eta=0$  задачу можно свести к стандартной проблеме для матрицы той же размерности

$$(\mathbf{G}_1 - \Lambda\mathbf{E})\Psi = \mathbf{0}, \quad \mathbf{G}_1 = \mathbf{A}^{-1} \left[ p\mathbf{B} + p(\mathbf{V}^{(\sigma_0)} - \mathbf{V}^{(\sigma_r)}) + \mathbf{K} \right], \quad \Lambda = -(\lambda^2 + \varepsilon\lambda).$$

При этом условие асимптотической устойчивости  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , выраженное через собственные значения  $\Lambda$ , принимает вид  $|\operatorname{Im} \Lambda| / (|\operatorname{Re} \Lambda|)^{1/2} > \varepsilon$ .

На рис. 7.4.1, б показаны результаты расчетов критического давления при  $\varepsilon=0,01$  для титановой оболочки с такими же геометрическими параметрами, как и в [69]. Оболочка разбивалась на 11 конечных элементов и размер матриц был  $40 \times 40$ . При фиксированном  $m$  критическое давление вычислялось с использованием процедуры дихотомии. Затраты процессорного времени IBM-PC/AT для вычисления всех комплексных собственных значений и собственных векторов при фиксированном значении давления составляли: по LR-алгоритму 1,5 мин и 15 мин по методу понижения нормы матрицы. При этом во втором случае заданная точность не достигалась и выход происходил по числу итераций. Резуль-

таты (см. рис. 7.4.1, б) согласуются с результатами работы [69].

Для распределенных систем, допускающих сведение к крайевым задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение имеет вид  $\Delta(\lambda, \beta) = 0$ , где  $\Delta$  - трансцендентная функция. Отдельные комплексные собственные значения можно вычислить, сведя задачу отыскания корней уравнения к эквивалентной задаче отыскания нулевых минимумов некоторой целевой функции. Например, можно рассматривать функцию  $\Delta_R^2 + \Delta_I^2$ , где  $\Delta_R, \Delta_I$  - действительная и мнимая части левой части характеристического уравнения при фиксированном значении  $\beta$ . Задачу минимизации можно решить одним из численных методов минимизации, например, методом деформируемых многогранников [57]. Выбор подходящего начального приближения осуществляется методом проб с учетом физического содержания задачи. Зависимость собственного значения от параметра можно получить методом продолжения по параметру  $\beta$ . Для этого следует рассматривать  $\lambda(\beta)$  как неявную функцию, определяемую характеристическим уравнением. По формуле дифференцирования неявной функции

$$\frac{d\lambda}{d\beta} = -(\partial\Delta/\partial\beta) / (\partial\Delta/\partial\lambda); \quad \lambda(\beta_0) = \lambda_0$$

имеем задачу Коши относительно действительной и мнимой части характеристического показателя  $\lambda$ . Производные в правой части обычно заменяют разностными соотношениями. Задачи Коши решаются численно методом Рунге - Кутта.

**Пример 2.** Рассмотрим задачу об устойчивости формы равновесия  $w=0$  прямоугольной пластины, шарнирно опертой по трем кромкам и нагруженной следящей нагрузкой  $N$  по свободной кромке (рис. 7.4.2, а). Уравнения возмущенного движения пластины в безразмерной форме и граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} w_{,\xi\xi\xi\xi} + 2\alpha^2 w_{,\xi\xi\eta\eta} + \alpha^4 w_{,\eta\eta\eta\eta} + \beta w_{,\xi\xi} + w_{,\tau\tau} &= 0; \\ w = w_{,\xi\xi} = 0 \quad (\xi = 0); \quad w = w_{,\eta\eta} = 0 \quad (\eta = 0, \eta = \alpha); \\ w_{,\xi\xi} + \nu w_{,\eta\eta} &= 0; \quad w_{,\xi\xi\xi} + (2 - \nu) w_{,\xi\eta\eta} = 0 \quad (\xi = 1); \\ \xi &= x/a; \quad \eta = y/a; \quad \alpha = b/a. \end{aligned}$$

Здесь в качестве характерной длины принято  $a$ , а безразмерное время  $\tau = \omega_0 t$ , где  $\omega_0^{-2} = \rho h a^4 / D$ . Полагая  $w(\xi, \eta, \tau) = X(\xi) \sin \pi \alpha \eta \exp(\lambda \tau)$ , приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$X^{\text{IV}} + (\beta - 2\pi^2/\alpha^2) X^{\text{II}} + (\pi^4/\alpha^4 + \lambda^2) X = 0;$$

$$X = X'' = 0 \quad (\xi = 0); \quad X'' - \nu \frac{\pi^2}{\alpha^2} X = 0;$$

$$X''' - (2 - \nu) \frac{\pi^2}{\alpha^2} X' = 0 \quad (\xi = 1).$$

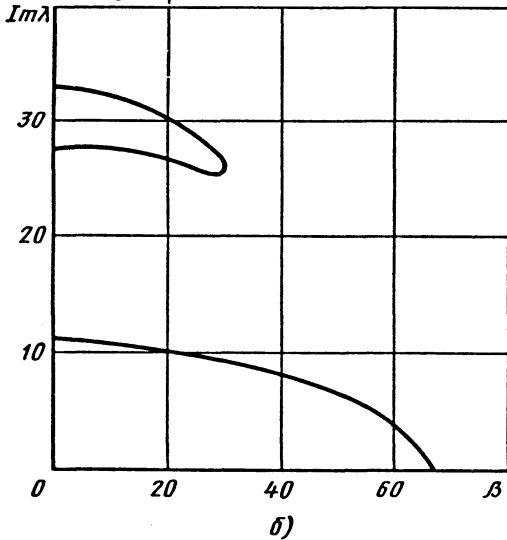
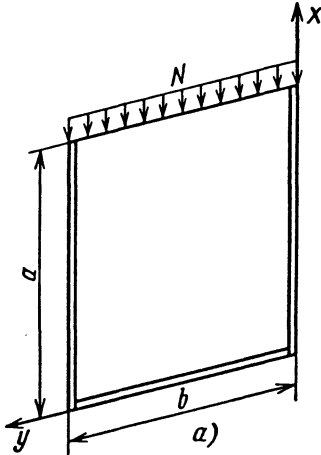


Рис. 7.4.2. Схема приложения следящей нагрузки (а) и поведение мнимых частей характеристических показателей от параметра нагрузки (б)

Поскольку демпфирование не учитывается, то характеристические показатели будут мигрировать по мнимой оси и покинут ее только в точке их кратности. Поэтому можно положить  $\lambda = i\omega$ , где  $\omega$  можно считать положительным, так как характеристические показатели комплексно сопряжены. Характеристическое уравнение задачи имеет вид

$$\Delta(\text{Im } \lambda, \beta) = \left( r_1^2 - \nu \pi^2 / \alpha^2 \right) \left[ r_2^2 - (2 - \nu) \pi^2 / \alpha^2 \right] \times$$

$$\times \text{th } r_1 / r_1 - \left( r_2^2 - \nu \pi^2 / \alpha^2 \right) \left[ r_1^2 - (2 - \nu) \pi^2 / \alpha^2 \right] \times$$

$$\times \text{th } r_2 / r_2 = 0,$$

где

$$r_1^2 = -\beta/2 + \pi^2/\alpha^2 +$$

$$+ \left[ \left( \pi^2/\alpha^2 - \beta/2 \right)^2 - \pi^4/\alpha^4 - \omega^2 \right]^{1/2};$$

$$r_2^2 = -\beta/2 + \pi^2/\alpha^2 -$$

$$- \left[ \left( \pi^2/\alpha^2 - \beta/2 \right)^2 - \pi^4/\alpha^4 - \omega^2 \right]^{1/2}.$$

При  $\beta=0$  мнимые части характеристических показателей совпадают с собственными частотами пластины, которым соответствуют формы колебаний с одной полуволной в направлении оси  $y$ . Результаты решения задач Коши с такими начальными условиями показаны на рис. 7.4.2, б. Первый характеристический показатель обращается в нуль при  $\beta_D=64$ . Этому значению параметра нагрузки отвечает статический тип потери устойчивости (дивергенция). Однако при  $\beta = \tilde{\beta}_{*F} = 26$  происходит слияние ветвей второго и третьего показателей. Это значение является квазикритическим. Для  $\beta > \tilde{\beta}_{*F}$  потеря устойчивости происходит по типу флаттера.

#### 7.4.2. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ЗУБОВА

Выполнение условия асимптотической устойчивости  $\lambda \in S_\lambda \{ \lambda: \text{Re } \lambda < 0 \}$  для матрицы  $G$  проверяют следующим образом. По формуле (7.2.17) строят матрицу  $\Gamma$  и вычисляют последовательность ее степеней

$$\Gamma^2, \Gamma^4, \dots, \Gamma^{2^m}, \dots \quad (7.4.1)$$

Сходимость этой последовательности к нулевой матрице оценивают по норме

$$\|\Gamma\| = \max_{1 \leq j, k \leq n} |\gamma_{jk}| \quad (7.4.2)$$

Достаточное условие асимптотической устойчивости имеет вид

$$\left\| \Gamma^{2^m} \right\| < \frac{1}{n} \quad (7.4.3)$$

для некоторого  $m$ .

**Пример 3.** В качестве тестового примера рассмотрим механическую диссипативную систему с двумя степенями свободы. Уравнения собственных колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} 3\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + 6\epsilon\dot{q}_1 + 2\epsilon\dot{q}_2 + 2q_1 - q_2 &= 0; \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + 2\epsilon\dot{q}_1 + 2\epsilon\dot{q}_2 - q_1 + q_2 &= 0, \end{aligned}$$

где  $\epsilon$  - параметр трения. Характеристические показатели системы равны

$$\lambda_{1-4} = -\epsilon \pm (i/2)(7 \pm 41 - 4\epsilon^2)^{1/2}.$$

Все они расположены на линии, отстоящей от мнимой оси  $\text{Im}\lambda$  на  $|\epsilon|$ . При  $\epsilon > 0$  характеристические показатели расположены в левой полуплоскости, а при  $\epsilon < 0$  - в правой. Матрица  $G$  в данном случае имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5/2 & 1 & -2\epsilon & 0 \\ 3/2 & -2 & 0 & -2\epsilon \end{pmatrix}.$$

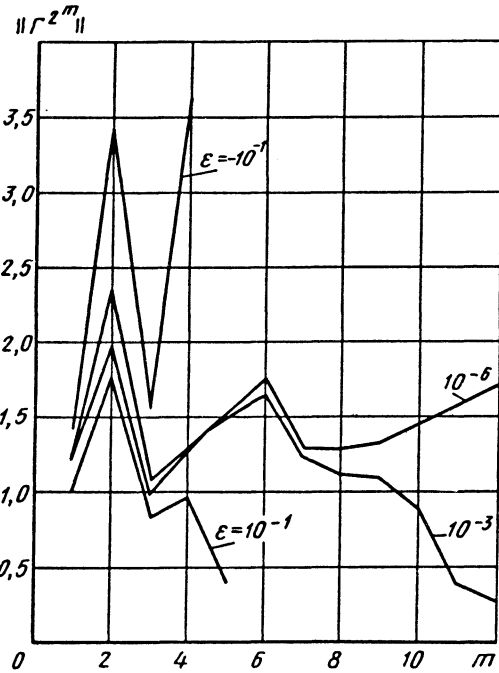


Рис. 7.4.3. Зависимость нормы степеней матрицы от числа  $m$  для различных значений параметра  $\epsilon$

На рис. 7.4.3 показаны зависимости  $\|\Gamma^{2^m}\|$  от

числа  $m$  при различных значениях параметра  $\epsilon$ . На рис. 7.4.4 приведены зависимости этой же нормы вблизи границы устойчивости (см. пример 4). Как видно, норма изменяется немонотонно. Чем ближе точки к границе области неустойчивости, тем “капризнее” ведет себя  $\|\Gamma^{2^m}\|$ .

Тем не менее, как показывают вычислительные эксперименты, можно указать такие значения  $m$ , например  $m^* = 20$ , и такие значения нормы, например  $M = 10^3$ , при которых последующее убывание нормы до значений, меньших единицы, становится весьма маловероятным событием. Следовательно, нестрогое условие неустойчивости можно записать в виде

$$\|\Gamma^{2^m}\| > M, \quad m \leq m^*. \quad (7.4.4)$$

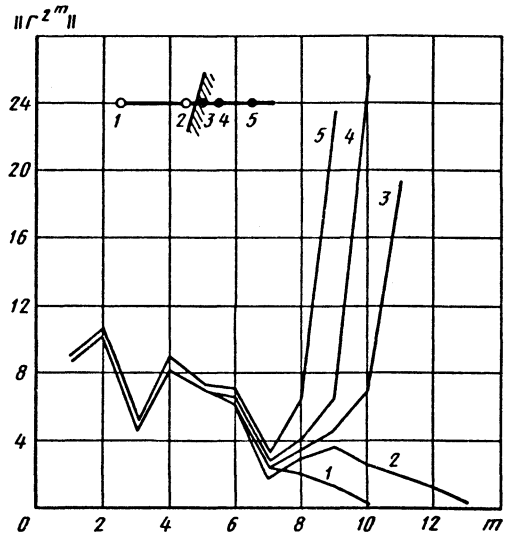


Рис. 7.4.4. Зависимость нормы степеней матрицы  $\Gamma$  в точках из области устойчивости (1, 2) и в области неустойчивости (3, 4, 5)

Условие (7.4.3) можно дополнить строгим достаточным условием неустойчивости, которое вытекает из рассмотрения следов степеней матрицы:

$$\text{Tr } \Gamma^{2^m} = \lambda_1^{2^m} + \lambda_2^{2^m} + \dots + \lambda_n^{2^m}. \quad (7.4.5)$$

Если хотя бы одно из собственных значений  $\lambda$  лежит вне единичного круга, то при больших  $m$  модуль следа может превысить величину  $n$ . Достаточное условие неустойчивости имеет вид

$$\frac{1}{n} \left| \text{Tr } \Gamma^{2^m} \right| > 1. \quad (7.4.6)$$

Различные случаи поведения функции  $\frac{1}{n} \left| \text{Tr } \Gamma^{2^m} \right|$  для матрицы  $\Gamma$  (см. пример 4) показаны на рис. 7.4.5.

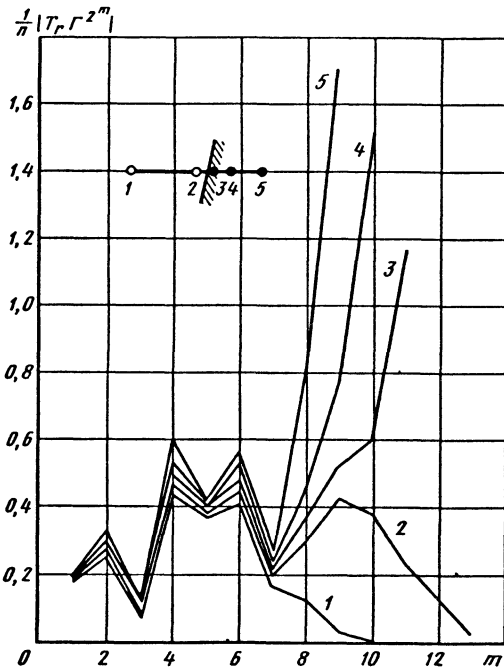


Рис. 7.4.5. Зависимость следа степеней матрицы  $\Gamma$  в точках из области устойчивости (1, 2) и области неустойчивости (3, 4, 5)

Условие (7.4.6) позволяет иногда избежать неопределенности при решении вопроса о том, отнести сомнительную точку в пространстве параметров к области устойчивости или к области неустойчивости.

Практически вычисления сводятся к умножению степеней матрицы самих на себя с последующим анализом числовых характеристик получаемых матриц. Трудоемкость алгоритма, оцениваемая числом арифметических операций, существенно зависит от характера задачи и свойств матрицы  $\Gamma$ . Как показывает опыт, решение с помощью критерия, основанного на построении последовательности (7.4.1), как правило, менее трудоемко, чем непосредственное решение полной проблемы собственных значений.

7.4.3. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Пусть плоскость параметров, в которой требуется строить границу области неустойчивости, ограничивается двумя параметрами  $\beta_i$  и  $\beta_j$ , остальным параметрам придаются фиксированные значения. Исходный принцип при построении границы области неустойчивости - это принцип дихотомии, который состоит в том, что

на плоскости параметров  $\beta_i, \beta_j$  отыскивают отрезок, параллельный координатной оси  $\beta_i$ , один конец которого принадлежит области устойчивости  $S$ , другой - области неустойчивости  $J$ . Этот отрезок делят пополам, после чего выясняют, какая половина обладает указанным выше свойством. Процесс деления продолжают до тех пор, пока точка, соответствующая границе, не окажется локализованной с наперед заданной точностью. Вообще точность построения границы характеризуется двумя величинами: шагом по одному параметру, например  $\beta_j$ , и предельной длиной деления  $\epsilon$  отрезка по другому параметру. Если типичные значения параметров  $\beta_i$  и  $\beta_j$  имеют порядок единицы, то шаг  $\Delta\beta_j=0,01$  и предельная длина отрезка  $\Delta\beta_i \leq \epsilon=0,001$  представляются вполне разумными для технических приложений.

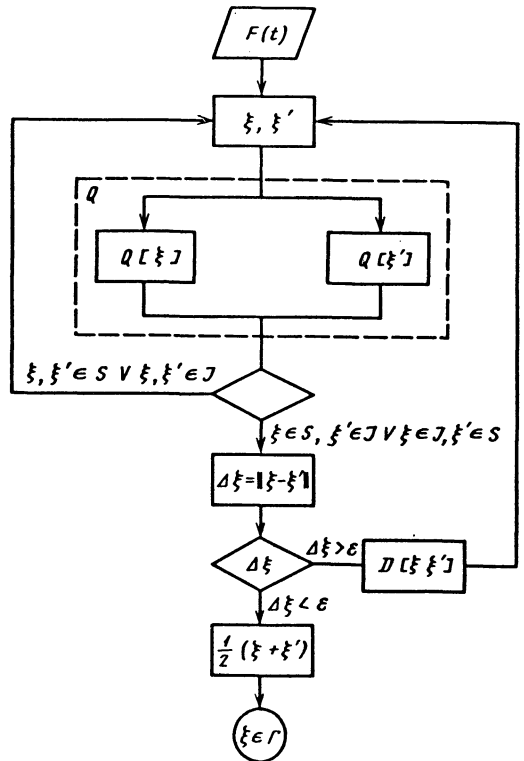


Рис. 7.4.6. Алгоритм метода дихотомии

Общая схема алгоритма дихотомии приведена на рис. 7.4.6. Здесь  $\xi$  и  $\xi'$  - точки на плоскости



кости параметров;  $Q[\xi]$  - процедура исследования устойчивости. Предельная длина отрезка  $\Delta\xi = \|\xi - \xi'\|$ , при котором дихотомия прекращается, обозначена  $\varepsilon$ , а сама процедура дихотомии -  $D[\xi, \xi']$ . Конечным результатом является граница  $\Gamma$  области устойчивости.

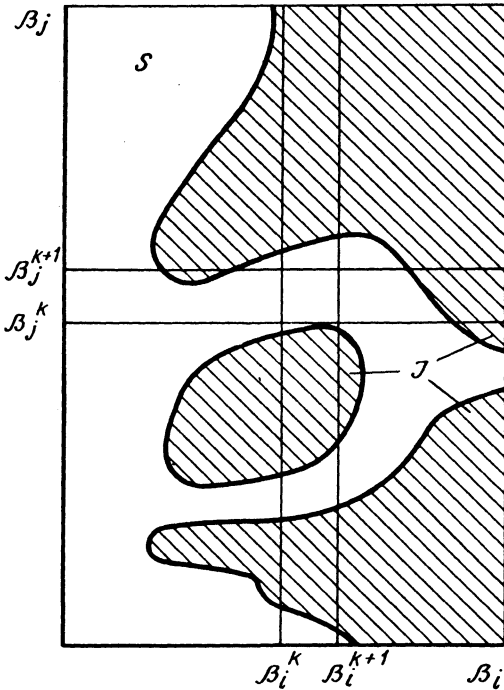


Рис. 7.4.7. Сетка на плоскости параметров  $(\beta_i, \beta_j)$  для многосвязных областей неустойчивости

Реализация и трудоемкость алгоритма существенно зависят от топологии области неустойчивости на рассматриваемой части плоскости параметров. В общем случае область неустойчивости может быть многосвязанной (рис. 7.4.7). Отыскание границ в этом случае начинается с построения сетки шагом  $\Delta\beta_i, \Delta\beta_j$ , узлы которой служат исходными точками для начала процесса дихотомии. Если заранее известно, что в рассматриваемой части плоскости прямая  $\beta_j = \text{const}$  пересекает границу области неустойчивости в единственной точке, то для сокращения процессорного времени удобен вариант алгоритма, в котором при каждом последующем значении используется координата границы, найденная на предыдущем шаге, что ускоряет процесс уточнения положения следующей граничной точки (рис. 7.4.8).

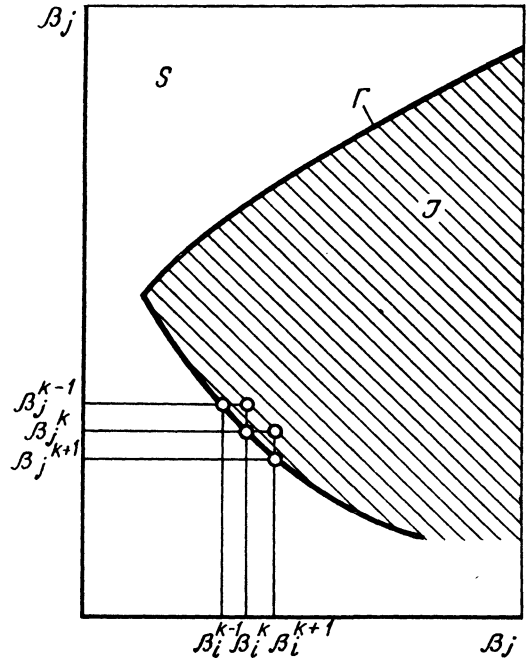


Рис. 7.4.8. Линия  $\beta_j = \text{const}$  пересекает границу области устойчивости в одной точке

7.4.4. МЕТОД МАТРИЦ МОНОДРОМИИ

Эффективный численный метод, ориентированный на использование ЭВМ [60], основан непосредственно на общей теории устойчивости дифференциальных уравнений с периодически коэффициентами.

Матрицу фундаментальных решений  $X(t)$  системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7.2.21), удовлетворяющую начальному условию  $X(0) = E$ , строят путем численного интегрирования методом Рунге - Кутты. Конечный результат - матрица монодромии  $R = X(T)$ . Принадлежность рассматриваемой точки из пространства параметров к области устойчивости или асимптотической устойчивости устанавливают либо путем непосредственного вычисления мультипликаторов, либо на основании анализа норм матрицы монодромии  $R$  и ее возрастающих положительных степеней (критерии (7.4.3) и (7.4.4) или (7.4.6)).

**Пример 4.** Рассмотрим задачу динамической устойчивости упругого консольного стержня при наличии периодической следящей силы. Для дискретизации задачи применим метод Бубнова - Галеркина, приняв в качестве базисных балочные функции консольного стержня. Ограничившись разложением по первым четырем формам колебаний, уравнения возьмем в виде

$$\mathbf{A} \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \mathbf{B} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + [\mathbf{C}_0 + 2\mu\Phi(t)\mathbf{D}]\mathbf{q} = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{q}(t)$  - вектор обобщенных координат;  
 $\mathbf{A}=\mathbf{E}$ ;  $\mathbf{B}=\text{diag}(0,2; 0,2; 0,2; 0,2)$ ;  
 $\Phi(t) = \cos vt$ ;  $\mathbf{C}_0 = \text{diag}(3,515^2; 22,03^2; 61,7^2; 120,92^2)$ ;

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0,859 & -11,744 & 27,450 & -37,390 \\ 1,874 & -13,293 & -9,042 & 30,400 \\ 1,565 & 3,229 & -45,900 & 8,333 \\ 1,087 & 5,540 & 4,255 & -98,920 \end{pmatrix}$$

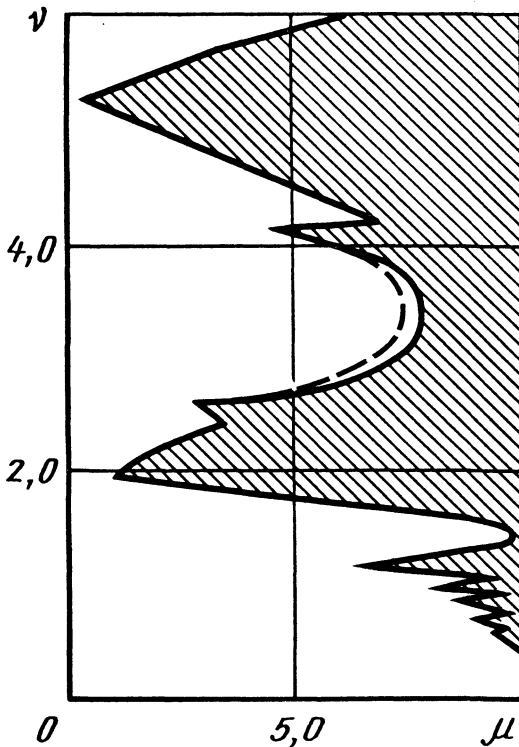


Рис. 7.4.9. Диаграмма устойчивости консольного стержня, нагруженного следящей периодической силой

Результаты вычислений показаны на рис. 7.4.9 сплошной линией. Условие асимптотической устойчивости проверялось непосредственным вычислением характеристических показателей матрицы монодромии  $\mathbf{R}$ .

#### 7.4.5. МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ХИЛЛА

В основе метода лежит обобщение классического метода Хилла для уравнения Матье - Хилла на системы произвольной конечной размерности. Метод базируется [3, 63] на следую-

щем фундаментальном факте, вытекающем из теории Флоке - Ляпунова: среди решений уравнения (7.2.20), где элементы матрицы  $\mathbf{G}(t)$  - достаточно регулярные  $T$ -периодические функции  $t$ , имеется хотя бы одно решение вида

$$\mathbf{x}(t) = e^{ht} \chi(t). \quad (7.4.7)$$

Здесь  $\chi(t)$  -  $T$ -периодическая вектор-функция;  $h$  - комплексное число (характеристический показатель).

Идея метода состоит в том, чтобы искать вектор-функцию  $\chi(t)$  в виде ряда Фурье с векторными коэффициентами и затем, свести задачу к некоторому уравнению относительно характеристического показателя  $h$ . Это уравнение оказывается условием равенства нулю определителя некоторой блочной матрицы - обобщением определителя Хилла в теории уравнений Матье - Хилла.

Пусть матрицу-функцию  $\mathbf{G}(t)$  в уравнении (7.2.20) можно представить в виде матричного ряда Фурье по времени

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{F}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{F}_k \cos k\omega t + \mathbf{G}_k \sin k\omega t) \quad (7.4.8)$$

$$(\omega = 2\pi/T)$$

с постоянными коэффициентами - матрицами  $\mathbf{F}_k$  и  $\mathbf{G}_k$ . Считаем, что  $\mathbf{F}_0$  - неособенная матрица, т.е. существует обратная матрица  $\mathbf{F}_0^{-1}$ .

Разлагая периодическую вектор-функцию (7.4.7) в ряд Фурье с векторными коэффициентами  $\mathbf{a}_k$  и  $\mathbf{b}_k$ , ищем решение уравнения (7.2.20) в виде

$$\mathbf{x}(t) = e^{ht} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{a}_k \cos k\omega t + \mathbf{b}_k \sin k\omega t) \right]. \quad (7.4.9)$$

Подставляя (7.4.8) и (7.4.9) в уравнение (7.2.20), осуществляя элементарные выкладки и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых  $e^{ht} \cos k\omega t$  и  $e^{ht} \sin k\omega t$ , приходим к бесконечным и, вообще говоря, "зацепляющимся" системам однородных линейных алгебраических уравнений относительно компонент векторов  $\mathbf{a}_k$  и  $\mathbf{b}_k$ :

$$\begin{aligned} h\mathbf{a}_0 &= \mathbf{F}_0 \mathbf{a}_0 + \mathbf{F}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{G}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{F}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{G}_2 \mathbf{b}_2 + \dots; \\ h\mathbf{a}_k + k\omega \mathbf{b}_k &= \mathbf{F}_0 \mathbf{a}_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} [\mathbf{F}_k (\mathbf{a}_{j-k} + \mathbf{a}_{j+k}) + \\ &+ \mathbf{G}_k (\mathbf{b}_{j-k} + \mathbf{b}_{j+k})]; \end{aligned} \quad (7.4.10)$$

$$h\mathbf{b}_k + k\omega\mathbf{a}_k = \mathbf{F}_0\mathbf{b}_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} [\mathbf{F}_k(\mathbf{b}_{j+k} - \mathbf{b}_{j-k}) + \\ + \mathbf{G}_k(\mathbf{a}_{j-k} - \mathbf{a}_{j+k})], k = 1, 2, \dots; \mathbf{a}_{-j} = \mathbf{a}_j; \mathbf{b}_{-j} = \mathbf{b}_j.$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{F}_4 & \frac{1}{2}(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3) & \frac{1}{2}\mathbf{F}_2 & \frac{1}{2}(\mathbf{G}_3 - \mathbf{G}_1) & \frac{1}{2}(\mathbf{G}_4 - 2\omega\mathbf{E}) \\ \frac{1}{2}(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3) & \mathbf{F}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{F}_2 & \frac{1}{2}\mathbf{F}_1 & \frac{1}{2}\mathbf{G}_2 - \omega\mathbf{E} & \frac{1}{2}(\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_3) \\ \mathbf{F}_2 & \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 \\ \frac{1}{2}(\mathbf{G}_3 - \mathbf{G}_1) & \frac{1}{2}\mathbf{G}_2 + \omega\mathbf{E} & \frac{1}{2}\mathbf{G}_1 & \mathbf{F}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{F}_2 & \frac{1}{2}(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) \\ \frac{1}{2}\mathbf{G}_4 + 2\omega\mathbf{E} & \frac{1}{2}(\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_3) & \frac{1}{2}\mathbf{G}_2 & \frac{1}{2}(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_3) & \mathbf{F}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{F}_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (7.4.12)$$

При фактических вычислениях приходится проводить редукцию бесконечного определителя к определителям конечного порядка. Это эквивалентно усечению ряда Фурье в решении (7.4.9) и, если это требуется, аналогичному усечению ряда Фурье (7.4.8). Усеченное уравнение (7.4.11) имеет конечное число корней  $h$ , чему соответствует конечное число параметрических резонансов, учитываемых на данном уровне редукции. Если известна область частот, представляющих интерес с точки зрения рассматриваемой прикладной задачи, то отсюда нетрудно получить нестрогие, но достаточно убедительные основания для выбора уровня редукции. Для расчета области неустойчивости вблизи побочного резонанса порядка  $p$  нужно сохранить в разложениях (7.4.8) и (7.4.9), по крайней мере, гармоники до порядка  $p$  включительно.

Размерность матрицы  $\mathbf{H}$  в уравнении (7.4.11) может оказаться довольно большой. Если размерность фазового пространства (размерность вектора  $\mathbf{x}$ ) равна  $n$ , а в рядах Фурье (7.4.8) и (7.4.9) удерживается соответственно по  $m_1$  и  $m_2$  гармоник, то размерность матрицы  $\mathbf{H}$  равна  $n(2m_1 + 1)(2m_2 + 1)$ .

Таким образом, после редукции задача сводится к выяснению положения корней уравнения (7.4.11) на комплексной плоскости. Для суждения об устойчивости достаточно вычислить все собственные значения  $h_k$  либо отобразить левую полуплоскость комплексного переменного  $h$  на внутренность единичного круга комплексной плоскости  $\sigma$  с помощью дробно-линейного преобразования (7.2.16). После этого появляется возможность использования критериев (7.4.3) и (7.4.4) или (7.4.6).

Система (7.4.10) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Отсюда получаем уравнение для характеристического показателя

$$\det(\mathbf{H} - h\mathbf{E}) = 0, \quad (7.4.11)$$

где  $\mathbf{H}$  - бесконечная блочная матрица:

На рис. 7.4.9 штриховая линия иллюстрирует применение метода обобщенных определителей Хилла для численного анализа динамической устойчивости консольного стержня, нагруженного следящей периодической силой. В разложении Фурье (7.4.9) удержано четыре гармоники.

#### 7.4.6. МЕТОД ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Асимптотическую устойчивость тривиального решения линейной системы дифференциальных уравнений можно установить путем прямого численного решения задачи Коши для этих уравнений. Для линейных систем независимо от начальных условий в области асимптотической устойчивости происходит затухание отклонений. Поэтому вычислительный процесс можно прекратить, если с некоторого  $s$  будут удовлетворяться неравенства

$$\sum_{j=s}^{s+m} |x_k(t_j)| \leq M \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (7.4.13)$$

где  $t_j$  - дискретные моменты времени;  $n$  - размерность вектора  $\mathbf{x}$ . Как показывают численные эксперименты, в практических приложениях достаточно положить  $0 < M \leq 10^{-5}$ ,  $m \geq 10$ . При этом начальные условия должны быть единичными, т.е.  $x_k(0) = 1$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Соотношения (7.4.13) можно дополнить условиями неустойчивости

$$\sum_{j=s}^{s+m} |x_k(t_j)| \geq L \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (7.4.14)$$

где  $L \geq 10^5$ ;  $m \geq 10$ .

Рассмотрим еще один подход проверки устойчивости положения линейных систем, основанный на численном построении функции Ляпунова в классе квадратичных форм. Справедливо следующее утверждение.

Для асимптотической устойчивости положения равновесия  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$  линейной системы (7.2.2) необходимо и достаточно, чтобы существовали положительно определенные формы  $V(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^T \mathbf{L}(t) \mathbf{x}$ ,  $W(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^T \mathbf{B}(t) \mathbf{x}$ , удовлетворяющие соотношению в силу системы  $\dot{V} = -W$ . Последнее приводит к равенству

$$\mathbf{x}^T \left( \dot{\mathbf{L}} + \mathbf{G}^T \mathbf{L} + \mathbf{L} \mathbf{G} + \mathbf{B} \right) \mathbf{x} = 0,$$

справедливого вдоль любой траектории  $\mathbf{x}(t)$ . Отсюда следует матричное уравнение Ляпунова

$$\dot{\mathbf{L}} = - \left( \mathbf{G}^T \mathbf{L} + \mathbf{L} \mathbf{G} + \mathbf{B} \right). \quad (7.4.15)$$

Если линейная система автономна, т.е.  $\mathbf{G}$  - постоянная матрица, то и матрица  $\mathbf{L}$  будет постоянной. Приходим к матричному алгебраическому уравнению

$$\mathbf{G}^T \mathbf{L} + \mathbf{L} \mathbf{G} = -\mathbf{B}. \quad (7.4.16)$$

Как известно, последнее уравнение разрешимо при любой правой части  $\mathbf{B}$ , если матрицы  $\mathbf{G}^T$  и  $-\mathbf{G}$  не имеют общих собственных значений. Для постоянной матрицы  $\mathbf{G}$ , все собственные значения которой лежат в левой полуплоскости, это условие всегда выполняется. Матричное уравнение (7.4.16) всегда имеет решение. Удобно принять  $\mathbf{B} = \mathbf{E}$ .

## Глава 7.5

### УСТОЙЧИВОСТЬ НЕУПРУГИХ СИСТЕМ

#### 7.5.1. КОНЦЕПЦИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУПРУГИХ СИСТЕМ

Задачи устойчивости неупругих систем возникают в связи с расчетами элементов конструкций и машин, материал которых работает за пределом упругости. Таковы упругопластические, вязкоупругие, вязкопластические и упруго-вязкопластические системы. Существенное отличие этих систем от упругих (в том числе геометрически нелинейных) систем состоит в том, что их поведение зависит от предыстории нагружения и деформирования. Дополнительные осложнения вносят эффекты разгрузки после деформирования в упругопластической стадии. С точки зрения аналитической механики упругопластические, вязкопластические и упруговязкопластические системы - это нелинейные системы с неголономными односторонними связями, причем если исключить модельные задачи, то это - системы с континуальным числом степеней свободы.

Перечисленные особенности неупругих систем затрудняют анализ устойчивости даже в самом простом случае квазистатического нагружения потенциальными силами. Хотя классическая теория устойчивости движения и может быть распространена на неупругие системы, на практике используют упрощенные подходы, например, трактуют упругопластическую систему как нелинейно упругую с соответствующим выбором закона деформирования. Вообще, в этой области широко применяют различные подходы к данной задаче (или классу задач) определения и критерии устойчивости.

Для упругопластических систем часто применяют обобщение простейшего понятия устойчивости по Эйлеру: состояние равновесия системы называют устойчивым, если она после статического приложения и последующего снятия малой возмущающей силы стремится вернуться в свое исходное состояние, оставаясь в его малой окрестности.

Данное определение не рассматривает процесс нагружения, с помощью которого достигнут данный уровень внешних сил, и ограничивает анализ устойчивости малой окрестностью точки бифуркации. Поскольку деформирование неупругих систем существенно зависит от истории их нагружения, то такой анализ не дает полной информации ни о значении нагрузки бифуркации, ни о послебифуркационном поведении конструкции.

Основу современной концепции устойчивости неупругих систем составляет исследование процессов их нагружения. Процесс нагружения упругопластической системы становится неустойчивым, если сколь угодно малому его продолжению соответствует катастрофическое развитие перемещений и деформаций.

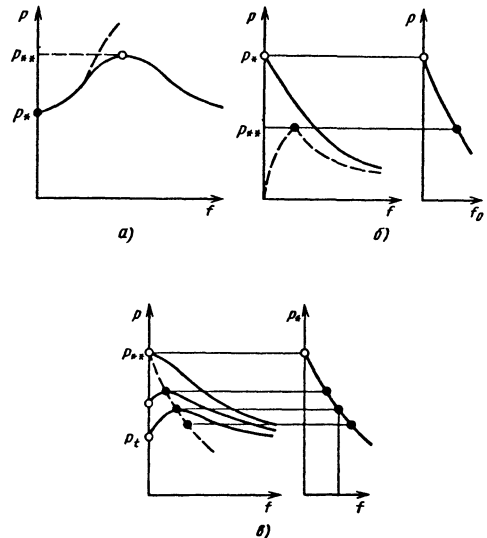


Рис. 7.5.1. Ветвление форм равновесия упругих и упругопластической систем

На рис. 7.5.1, *a* и *б* представлены типичные зависимости параметра нагрузки  $p$  от характерного перемещения  $f$  для упругих систем. Здесь значение параметра  $p_*$  отвечает точке бифуркации форм равновесия, значение  $p_{**}$  - предельной точке. На рис. 7.5.1, *в* показана аналогичная зависимость для упругопластической системы (зависимость критического параметра  $p_{**}$  от характерного перемещения  $f$ ). Послебифуркационное поведение упругопластических систем в корне отличается от поведения упругих. Здесь имеется целый спектр нагрузок бифуркации с устойчивым либо неустойчивым послебифуркационным поведением одной и той же системы.

Наименьшей возможной нагрузкой бифуркации является касательно-модульная нагрузка  $p_b$ , наибольшей - нагрузка  $p_{**}$ . Различают устойчивые (докритические) и неустойчивые (послекритические) нагрузки бифуркации. Первые расположены в интервале  $p_b \leq p \leq p_r$ , где  $p_r$  - приведенно-модульная нагрузка, вторые (при работе стержня в конструкции) - в интервале  $p_r \leq p \leq p_{**}$ . Для устойчивых нагрузок бифуркации  $dp/df > 0$ , для неустойчивых  $dp/df < 0$ . Послебифуркационное поведение упругопластических систем из устойчивых точек бифуркации обнаруживает резерв устойчивости. Вследствие этого различают докритический и послекритический процесс выпучивания. Критическое состояние имеет место в предельных точках, в которых

$$\frac{df}{dp} \rightarrow \infty. \quad (7.5.1)$$

Это условие принимают за критерий неустойчивости для квазистатического процесса нагружения. Соответствующую нагрузку называют критической, или пределом устойчивости.

Анализ выпучивания и устойчивости идеальных упругопластических систем не является общим потому, что реальные элементы конструкций имеют различные несовершенства. Неустойчивость реальных конструкций и их элементов наступает в предельных точках точно так же, как и для идеальных систем с устойчивым послебифуркационным выпучиванием. В связи с этим все начальные несовершенства геометрической формы и внецентренного приложения нагрузок принимают за возмущающие факторы с наложенными на них ограничениями. Процесс выпучивания системы с начальными несовершенствами рассматривают как возмущенный процесс, с помощью которого анализируют устойчивость идеализированной конструкции. На рис. 7.5.2 приведены два случая сжатия стержня эксцентрично приложенной силой  $P$ . Если эксцентриситет  $\delta$  мал и не превосходит некоторого предельного значения  $\delta_*$ , то стержень теряет устойчивость в предельной точке. Если  $\delta > \delta_*$ , то задачи устойчивости не возникает.

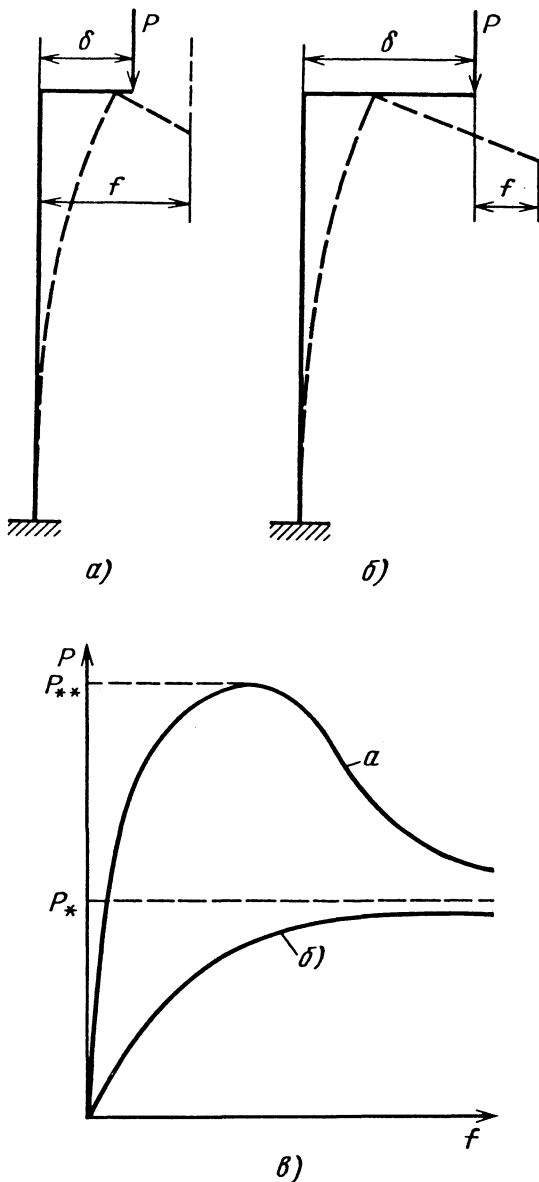


Рис. 7.5.2. Диаграмма потери устойчивости ( $\sigma$ ) в случае малого (*a*) и большого (*б*) эксцентриситета приложения силы

Под исследованием устойчивости систем, материал которых обладает свойством вязкоупругости, обычно понимают анализ влияния малых несовершенств на процесс деформирования системы во времени. Несоввершенства являются, например, начальное искривление оси стержня или срединной поверхности оболочки (пластины), эксцентриситет приложения нагруз-

ки и др. Вследствие указанных несовершенств в системе появляются дополнительные перемещения (прогибы), которые увеличиваются во времени.

Всякая вязкоупругая система является динамической системой; однако ее движение происходит достаточно медленно, в связи с чем в расчетах силами инерции, как правило, пренебрегают. При квазистатической постановке задачи по истечении некоторого промежутка времени процесс деформирования может завершиться "хлопком", чему соответствует либо неограниченное увеличение прогиба, либо его скорости. Этот момент времени называют критическим  $t_c$ . Систему считают устойчивой при  $t < t_c$  и неустойчивой при  $t > t_c$ .

Совместный учет вязкоупругих и пластических деформаций вызывает дополнительные трудности. Укажем один из способов преодоления этих трудностей [23]. Квазистатический процесс нагружения разбивается на два этапа, происходящих в обобщенном времени  $t$ : этап нагружения системы по заданной истории и этап ползучести во времени после остановки процесса нагружения. Считают, что на первом этапе ползучесть проявляется не успеивает, и за параметр прослеживания процесса принимают параметр внешней нагрузки  $\tau = p$ . На втором этапе за параметр прослеживания процесса принимают время  $t$ . Если ползучесть материала ограниченная, то правомерна постановка задачи устойчивости на неограниченном интервале времени. Соответствующий предел устойчивости называют также длительной критической нагрузкой. Если материал обладает неограниченной ползучестью, то постановка задачи об устойчивости на неограниченном интервале времени не имеет смысла и всякий процесс выпучивания является неустойчивым. Критическое значение времени  $t_c$  определяют при этом из условия

$$\frac{df}{dt} \rightarrow \infty. \quad (7.5.2)$$

### 7.5.2. БИФУРКАЦИЯ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

В результате потери устойчивости центрально сжатого стержня в некоторой конструкции происходит перераспределение усилий между ее элементами. Сжимающая нагрузка  $P$  изменяется на величину

$$\delta P = -r\delta\Delta, \quad (7.5.3)$$

где  $r$  - жесткость конструкции без стержня;  $\delta\Delta$  - сближение его концов, связанное с выпучиванием. Если  $r < 0$ , то соответствующую конструкцию называют догружающей (рис. 7.5.3, а), если  $r > 0$  - разгружающей (рис. 7.5.3, б).

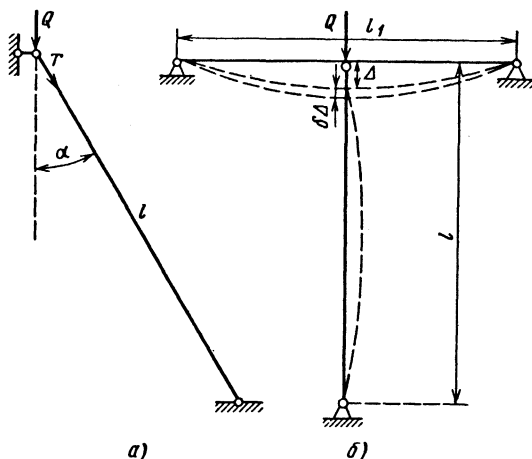


Рис. 7.5.3. Устойчивость стержня, входящего в состав догружающей (а) и разгружающей (б) систем

В волокнах на вогнутой стороне стержня возникает дополнительное сжатие, на выпуклой - растяжение. Дополнительное напряжение  $\delta\sigma$  связано с дополнительной деформацией  $\delta\varepsilon = \delta\varepsilon^0 + z\delta\varpi$  соотношением (рис. 7.5.4)

$$\delta\sigma = \begin{cases} E_k(\delta\varepsilon^0 + z\delta\varpi), & z \leq z_p; \\ E(\delta\varepsilon^0 + z\delta\varpi), & z > z_p, \end{cases}$$

где  $E_k = d\sigma/d\varepsilon$  - касательный модуль;  $E$  - модуль упругости;  $\delta\varepsilon^0$  - дополнительная деформация оси стержня;  $\delta\varpi = d^2w/dx^2$  - ее кривизна;  $w$  - прогиб;  $z$  - координата точки.

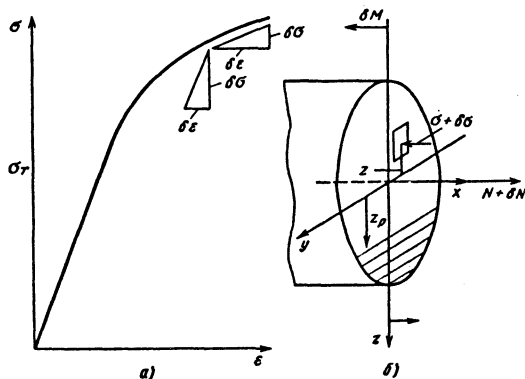


Рис. 7.5.4. Диаграмма  $\sigma$ - $\varepsilon$  (а) и внутренние силовые факторы (б) при выпучивании стержня

Критическую силу  $P_c$  определяют из системы уравнений

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ D(z_p) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0;$$

$$(E - E_k)(S - z_p A_*) - z_p E_k A = B \delta \varepsilon(x_n) / \delta \varepsilon;$$

$$\beta \frac{E}{r} = - \sum_{m=1,3,\dots} \left[ x_m - x_{m-1} \pm \frac{1}{\delta \varepsilon(x_n)} \int_{x_m}^{x_{m+1}} z_p^* \delta \varepsilon dx \right]$$

(7.5.4)

Для случая  $\delta P > 0$  перед интегралом следует взять знак минус,  $\beta = E_k / E$ ,  $B = E_k A h / 2$ , а для случая  $\delta P < 0$  - знак плюс,  $\beta = 1$ ,  $B = -E A h / 2$ . Кроме того, в уравнениях (7.5.4) используются обозначения:

$$D(z_p) = (E - E_k)(J_* - z_p S_*) + E_k J \quad (7.5.5)$$

- переменная жесткость стержня;  $z_p = z_p^* h / 2$  - граница зоны разгрузки, определяемая из условия  $\delta \varepsilon = \delta \varepsilon^0 + z_p \delta \varepsilon = 0$ ;  $A_*$  - площадь зоны разгрузки;  $S_*$  - ее статический момент;  $J$  - момент инерции;  $J_*$  - момент инерции площади  $A_*$ ;  $x_m$  - границы областей упругопластического деформирования.

Переменная жесткость  $D(z_p)$  изменяется в пределах  $E_k J \leq D \leq E J$ , причем

$$E_k J \leq D(z_p) \leq K J \quad (\delta P > 0); \quad (7.5.6)$$

$$K J < D(z_p) \leq E J \quad (\delta P < 0).$$

Для  $\delta P = 0$  (изолированный стержень)  $z_p = \text{const}$ . Тогда критическое значение силы

$$P_k = \frac{\pi^2 K J}{(\mu l)^2}, \quad (7.5.7)$$

где  $\mu$  - коэффициент, характеризующий условия закрепления концов стержня (коэффициент приведения длины);  $K$  - приведенный модуль Кармана;

$$K = E_k + (E - E_k)(J_* - z_p S_*) / J. \quad (7.5.8)$$

В частности, для стержней прямоугольного и двутаврового сечений с тонкой стенкой соответственно

$$K = \frac{4 E E_k}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_k})^2}; \quad K = \frac{2 E E_k}{E + E_k}.$$

Предельным жесткостям в (7.5.6) соответствует касательно-модульная нагрузка Энгессера

$$P_t = \frac{\pi^2 E_k J}{(\mu l)^2}, \quad (7.5.9)$$

приведенно-модульная нагрузка Кармана (7.5.7), а также нагрузка Эйлера

$$P_E = \frac{\pi^2 E J}{(\mu l)^2}. \quad (7.5.10)$$

Касательно-модульная нагрузка (7.5.9) является нагрузкой бифуркации для нелинейно упругого тела. В то же время она является наименьшей нагрузкой бифуркации пластически сжатого стержня в условиях продольжающегося нагружения в смысле Шенли [23].

Решение задачи о бифуркации упругопластического стержня, включенного в конструкцию, дано в работе [23]. Из (7.5.3) - (7.5.5) следует формула для нагрузки бифуркации сжатого стержня

$$P_* = \frac{\pi^2 K_* J}{(\mu l)^2} = P_* P_E, \quad (7.5.11)$$

где  $K_* = E p_*(E_k, x_n)$  приведенный модуль, зависящий от  $E$ ,  $E_k$  и значений  $x_n$  ( $n=1,2,\dots$ ), определяющих границы областей упругопластического деформирования (рис. 7.5.5).

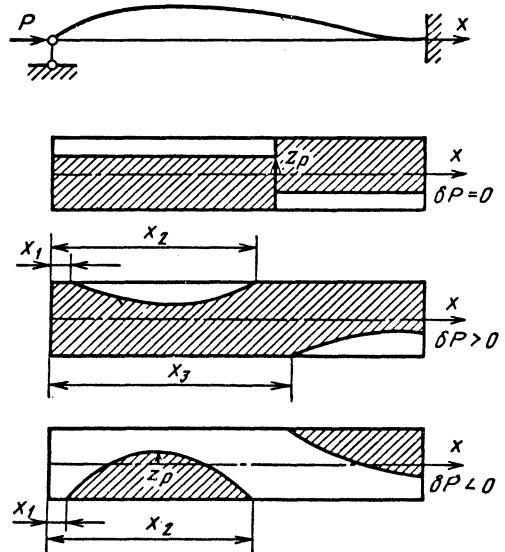


Рис. 7.5.5. Области упругопластического деформирования

Бифуркационное значение нагрузки (7.5.11) при работе стержня в догружающих конструкциях лежит в интервале  $P_t \leq P_* \leq P_k$ , а при работе в разгружающих конструкциях -  $P_k \leq P_* \leq P_t$ , где  $P_t$  - нагрузка бифуркации в предельно жесткой разгружающей системе. Полная упругая разгрузка стержня невозможна.

7.5.3. ВЫПУЧИВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Выпучивание сжато-изогнутого стержня рассматривается как процесс, связанный с изменением некоторого параметра  $\tau$ . Этим параметром может быть сжимающая сила, сближение концов стержня  $\Delta$ , время  $t$ . Если стержень имеет начальный прогиб  $w_0(x)$ , либо эксцентриситет  $e$  приложения сжимающих сил  $P(\tau)$ , либо наличие поперечной возмущающей нагрузки  $q(\tau, x)$ , то его выпучивание происходит с началом нагружения. Продольная деформация волокон стержня  $\varepsilon = \varepsilon^0 + z_3 \varpi$ , где

$$\varepsilon^0 = -\frac{du}{dx} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 - \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right];$$

$$\varpi = \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{d^2 w_0}{dx^2}.$$

соответственно деформация оси стержня и изменение ее кривизны;  $\dot{u}$  - продольное перемещение;  $w$  - прогиб в направлении осей  $x$  и  $z$ . Сближение концов стержня

$$\Delta = -\int_0^l \frac{du}{dx} dx = \int_0^l \varepsilon^0 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 - \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right] dx.$$

При выпучивании прямого стержня конечное приращение продольной деформации  $\varepsilon = \varepsilon^0 + z_3 \varpi$ , где  $\Delta \varepsilon^0 = \varepsilon^0 - \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0$  - деформация в момент бифуркации. При бесконечно малом продолжении процесса  $\delta \varepsilon = \dot{\varepsilon} \delta \tau$ ;  $\delta \varepsilon^0 = \dot{\varepsilon}^0 \delta \tau$ ;  $\delta \varpi = \dot{\varpi} \delta t$  и  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^0 + z_3 \dot{\varpi}$ .

В начальной стадии выпучивания стержень остается упругим. Затем на вогнутой стороне в точках  $z \text{sign} \dot{\varpi} > 0$  возникает зона первичных пластических деформаций сжатия с границей  $z_1$ , на которой  $\varepsilon^0 + z_1 \varpi = \varepsilon_T$ , где  $\varepsilon_T$  - деформация текучести материала. Для коротких стержней ( $p_l \leq p_* \leq p_r$ ) эта граница переходит на выпуклую сторону при  $P_f = \sigma_f A$  и возможно ее обратное движение от некоторого положения  $\tilde{z}_1$  образованием зоны разгрузки с границей  $z_2 = z_p$ , определяемой из условия  $\dot{\varepsilon}^0 + z_2 \dot{\varpi} = 0$ .

На выпуклой стороне стержня для  $z \text{sign} \dot{\varpi} < 0$  возможно возникновение зоны первичных либо вторичных пластических деформаций от растяжения с границей  $z_3$ , определяемой из условия

$$\varepsilon(x, \tau, z_3) = \varepsilon^0 + z_3 \varpi = \begin{cases} -\varepsilon_T, & (z_3 + z_1) \text{sign} \dot{\varpi} < 0; \\ \varepsilon_* - \gamma \varepsilon_T, & (z_3 - \tilde{z}_1) \text{sign} \dot{\varpi} \geq 0, \end{cases}$$

где  $\varepsilon_*(x, z_3)$  - деформация, с которой в данной точке началась разгрузка,  $\gamma(\varepsilon) \approx 2$ . Прямой стержень или стержень с весьма малым начальным искривлением полностью переходит в пластическое состояние, после чего на его выпуклой стороне возникает зона разгрузки, а затем и зона вторичных пластических деформаций от растяжения. Для гибких стержней на вогнутой стороне образуется зона пластических деформаций от сжатия с границей  $z_1$ , а на выпуклой - зона первичных пластических деформаций от растяжения с границей  $z_3$ . С развитием последней возможно ее обратное движение с образованием зоны разгрузки с границей  $z_2$ . Если зоны разгрузки не образуются, то материал ведет себя как нелинейно упругий.

**Пример 1.** Рассмотрим процесс выпучивания сжато-изогнутого стержня, описываемый дифференциальным уравнением

$$D \frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} + P \dot{w} + \dot{P}(w + P_2/P_1) + \dot{M}_0 + \dot{Q}_0 x + \dot{M}_q = 0, \tag{7.5.12}$$

где

$$D = P_3 - P_2^2 / P_1; \quad P_m = \int_{-h/2}^{h/2} E_k z^{m-1} b(z) dz$$

- жесткости стержня;  $M_0, Q_0$  - момент и сила в начале координат;  $M_q$  - момент в сечении от поперечной нагрузки  $q$ .

Для решения задачи задается зависимость  $P = P(\tau)$ , граничные и начальные условия. При вычислении жесткостей  $P_m$  интегралы разбиваются по высоте сечения на четыре в соответствии с образующимися зонами деформирования. К уравнению (7.5.12) применяется процедура Бубнова-Галеркина по координате  $x$  с последующим переходом к задаче Коши по времени  $t$ . На рис. 7.5.6 и 7.5.7 приведены результаты расчета по выпучиванию и устойчивости стального стержня с жестко зашпеленными концами. Кривые 1-4 соответствуют стреле начального прогиба  $f_0 / h = 10^{-4}; 10^{-2}; 0,05; 0,125$ . Треугольник, кружочек, сплошной кружочек и крестик на кривых выпучивания отвечают моментам возникновения пластических деформаций соответственно от сжатия, первичных пластических от растяжения, вторичных пластических и разгрузки. Предел устойчивости  $P_{**}$ , по-



лученный с учетом разгрузки, практически не отличается от предела устойчивости  $P_{**}^0$  при решении задачи без учета образования зон разгрузки. Последний результат имеет место для стержней с различными формами сечений и закреплением концов, что позволяет сделать вывод о допустимости инженерных расчетов по выпучиванию и устойчивости сжато-изогнутых стержней исходя из модели нелинейно-упругого тела.

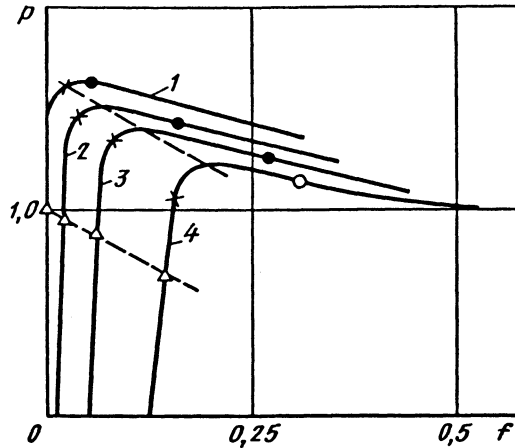


Рис. 7.5.6. Послекритическое поведение при различных значениях начального прогиба

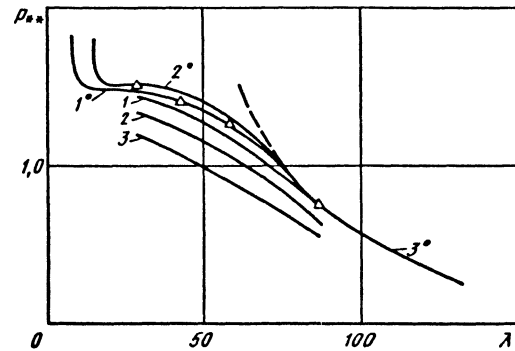


Рис. 7.5.7. Зависимость критического параметра нагрузки от гибкости стержня

7.5.4. ВЫПУЧИВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Поведение сжатых вязкоупругих систем во времени существенно различно при линейной и нелинейной ползучести. Наиболее наглядно это можно проиллюстрировать на примере сжатого постоянной во времени силой  $P$  стержня, шарнирно опертого по концам и имеющего начальное искривление вида

$$w_0(x) = f_0 \sin \frac{\pi}{l} x, \quad (7.5.13)$$

где  $f_0$  - стрела прогиба стержня;  $l$  - его длина. Если деформирование материала подчиняется линейному соотношению  $E\dot{\epsilon} + nE_{\infty}\epsilon = \dot{\sigma} + n\sigma$ , то прогиб стержня ищем в виде

$$w(t, x) = f(t) \sin \frac{\pi}{l} x. \quad (7.5.14)$$

При этом  $f(t)$  выражается в виде

$$f(t) = \frac{f_0}{1 - \alpha_{\infty}} \left( \frac{\alpha - \alpha_{\infty}}{1 - \alpha} e^{-\beta t} + 1 \right);$$

$$\alpha = \frac{P}{P_E}; \quad \alpha_{\infty} = \frac{P}{P_{\infty}} = \frac{E}{E_{\infty}} \alpha;$$

$$\beta = n \frac{E_{\infty} (1 - \alpha_{\infty})}{E (1 - \alpha)}; \quad P_E = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}; \quad P_{\infty} = \frac{\pi^2 E_{\infty} J}{l^2}.$$

Отсюда следует, что при  $P < P_{\infty}$  прогиб увеличивается во времени, стремясь к конечному значению в каждой точке с координатой  $x$ :

$$w_{\infty}(x) = \frac{f_0}{1 - \alpha_{\infty}} \sin \frac{\pi}{l} x.$$

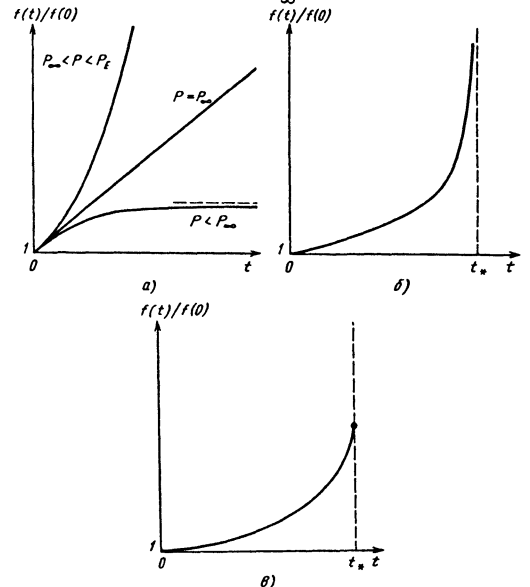


Рис. 7.5.8. Характерные виды зависимости от времени прогибов стержней из линейного вязкоупругого (а) и нелинейного (б, в) материалов

При  $P_{\infty} < P < P_E$  прогиб неограниченно возрастает. Если  $P = P_{\infty}$ , то функция  $f(t)$  определяется равенством

$$f(t) = f_0 \left( 1 + n \frac{E}{E_{\infty}} t \right) / \left( 1 - \frac{E_{\infty}}{E} \right),$$

из которого следует, что амплитуда прогиба стержня неограниченно растет со временем. Функция  $f(t)/f(0)$  при разных  $P$  представлена на рис. 7.5.8, а.

Силу  $P_\infty = E_\infty P_E / E$ , называемую длительной критической, вычисляют так же, как Эйлерову критическую силу, заменив в выражении последней модуль упругости  $E$  длительным модулем  $E_\infty$ . При любом значении сжимающей силы, меньшем  $P_\infty$ , каждому фиксированному моменту времени соответствует конечное значение прогиба стержня.

При  $P < P_\infty$  прямой стержень устойчив в любой момент времени  $t$ , поскольку малое изменение амплитуды начального искривления  $f_0$  вызывает малое изменение амплитуды  $f(t)$ . Очевидно, что стержень устойчив по отношению к возмущению начального искривления по Ляпунову.

В том случае, когда материал обладает свойством нелинейной ползучести, решение задачи выпучивания становится значительно сложнее. Для стержня, поперечное сечение которого является идеальным двутавром (площадь поперечного сечения сосредоточена в полках, а тонкая стенка воспринимает только сдвиговые деформации), а деформирование материала подчиняется степенной зависимости  $\dot{\epsilon} = B\sigma^3$ , соотношение между безразмерной амплитудой прогиба и временем имеет вид

$$\frac{1}{6} \left( \frac{\pi h}{l} \right)^2 \ln \frac{\xi^2 [3 + \xi(0)]}{\xi^2(0) (3 + \xi^2)} = B\sigma^3 t, \quad (7.5.15)$$

где  $\sigma = P/A$ ;  $\xi = f(t)/h$ ;  $\xi(0) = f(0)/h$ ;  $2h$  - высота двутаврового поперечного сечения;  $f(0)$  - амплитуда прогиба стержня в начальный момент времени. При получении соотношения (7.5.15) предполагались справедливыми выражения (7.5.13) и (7.5.14), а уравнение равновесия для стержня удовлетворялось в одной точке (при  $x=l/2$ ). Если при  $t=0$  стержень деформируется упруго, то  $f(0)=f_0/(1-\alpha)$ .

Функция  $f(t)/f(0)$  показана на рис. 7.5.8, б. Критическое время  $t_*$  находят из уравнения (7.5.15):

$$B\sigma^3 t_* = \frac{1}{6} \left( \frac{\pi h}{l} \right)^2 \ln \frac{3 + \xi^2(0)}{\xi^2(0)}.$$

Если величина  $\xi(0)$  достаточно мала, можно принять

$$B\sigma^3 t_* \approx \frac{1}{6} \left( \frac{\pi h}{l} \right)^2 \ln \frac{3}{\xi^2(0)}.$$

В том случае, когда закон деформирования материала имеет вид

$$\dot{\epsilon} = Bsh \frac{\sigma}{C},$$

значение критического времени  $t_*$  определяется равенством

$$\frac{\sigma}{C} Bsh \left( \frac{\sigma}{C} \right) t_* = -2 \left( \frac{\pi h}{l} \right)^2 \ln \operatorname{th} \left( \frac{\sigma}{2C} \xi(0) \right).$$

Особый интерес представляют результаты, когда для закона ползучести используется дробно-линейная зависимость:

$$\dot{\epsilon} = \frac{B\sigma_{1B}\sigma}{\sigma_{1B} - \sigma} \quad (\sigma_{1B} > 0, \sigma > 0);$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{B\sigma_{2B}\sigma}{\sigma_{2B} - \sigma} \quad (\sigma_{2B} < 0, \sigma < 0).$$

Уравнение, описывающее изменение во времени амплитуды прогиба стержня, записывают по-разному в зависимости от значения  $\xi$ :

$$\frac{\pi^2 h^2}{Bl^2 \sigma} \dot{\xi} = - \frac{\alpha_2^2 \xi}{(1 - \alpha_2)^2 - \xi^2}, \quad \xi < 1, \alpha_i = \frac{\sigma_{iB}}{\sigma};$$

$$\frac{\pi^2 h^2}{Bl^2 \sigma} \dot{\xi} = - \frac{2\alpha_1 \alpha_2 \xi - (\alpha_1 + \alpha_2)(1 - \xi^2)}{2(\alpha_1 - 1 + \xi)(\alpha_2 + 1 + \xi)}, \quad \xi > 1.$$

Первое уравнение интегрируется в пределах от  $\xi(0)$  до  $\xi=1$ , а второе от  $\xi=1$  до  $\xi_*$ . Значение  $\xi_*$  определяется из условия  $\dot{\xi} \rightarrow \infty$ . Это имеет место при  $\alpha_2 < -2$  и  $\alpha_2 - \alpha_1 > 2$ . Тогда потеря устойчивости произойдет при  $\xi_* = 1 - \alpha_1$ . В отличие от степенной зависимости или зависимости гиперболического синуса использование дробно-линейного соотношения приводит к качественно новому результату - потере устойчивости при малых конечных прогибах.

### 7.5.5. ВЫПУЧИВАНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Поведение сжатых вязкопластических систем принципиально отличается от поведения нелинейно-вязкоупругих систем. Если деформирование материала подчиняется зависимости

$$\dot{\epsilon} = \epsilon_0(\sigma)\dot{\sigma} + \nu(\sigma),$$

где первое слагаемое описывает мгновенное пластическое деформирование, а второе - деформации ползучести, то для стержня с поперечным сечением в виде идеального двутавра соотношение  $t \sim \xi$  имеет вид

$$t = \frac{2\pi^2 h^2}{l^2} \int_{\xi(0)}^{\xi} \frac{\Phi(\xi)}{R(\xi)} d\xi. \quad (7.5.16)$$

Здесь использованы обозначения:

$$\Phi(\xi) = \frac{2\pi^2 h^2}{l^2} - \sigma \{ \epsilon_0 [\sigma(1 + \xi)] + \epsilon_0 [\sigma(1 - \xi)] \};$$

$$R(\xi) = \nu[\sigma(1 + \xi)] - \nu[\sigma(1 - \xi)].$$

Зависимость (7.5.16) носит условный характер, поскольку выражения  $\Phi(\xi)$ ,  $R(\xi)$  меняются в зависимости от того, нагружение или разгрузка происходят в одной из полок двутаврового поперечного сечения.

Дифференцированием левой и правой частей равенства (7.5.16) по времени  $t$  нетрудно убедиться в том, что в случае обращения функции  $\Phi(\xi)$  в нуль скорость изменения амплитуды прогиба стремится к бесконечности. Соответствующее значение прогиба  $\xi$  называют критическим, т.е.  $\Phi(\xi_*) = 0$ . Значение критического времени  $t_*$  находят из соотношения (7.5.16) при замене верхнего предела интегрирования на  $\xi_*$ .

Итак, отличие выпучивания нелинейно-вязкоупругого и вязкопластического стержней заключается в том, что в первом случае критическому времени соответствует обращение прогиба в бесконечность (за исключением дробно-линейного закона ползучести), а во втором - достижение прогибом конечного значения, при котором обращается в бесконечность скорость его изменения (рис. 7.5.8,  $\theta$ ).

#### 7.5.6. УЧЕТ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Особенности поведения вязкоупругих систем при появлении конечных прогибов можно проанализировать на примере фермы Мизеса (рис. 7.5.9). Если материал стержней деформируется в соответствии с зависимостью  $\dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/E + B\sigma^3$ , то в предположении малости начального (в ненагруженном состоянии фермы)  $\theta_0$  и текущего  $\theta(t)$  углов наклона стержней из уравнений равновесия следует соотношение между  $\theta$  и  $t$ :

$$\frac{P}{4EA} \left[ \theta^2 - \theta(0)^2 \right] - \frac{1}{5} \left[ \theta^5 - \theta^5(0) \right] = B \left( \frac{P}{2A} \right)^3 t, \quad (7.5.17)$$

где  $\theta(0)$  - угол поворота стержней в начальный момент времени (непосредственно после приложения нагрузки). Значение  $\theta(0)$  найдем из решения упругой задачи, т.е. из уравнения

$$P/(EA) = \theta(0) \left[ \theta_0^2 - \theta^2(0) \right]$$

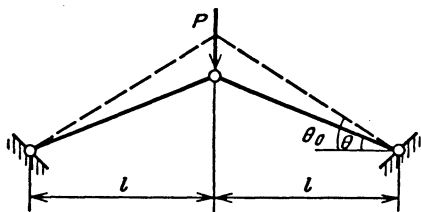


Рис. 7.5.9. Ферма Мизеса из вязкоупругих стержней

Скорость изменения угла поворота  $\theta$  увеличивается во времени, стремясь к бесконечности при  $\theta_* = [P/(2EA)]^{1/3}$ . Критическое значение  $\theta_*$  определяется только упругими характеристиками материала фермы и не зависит от характеристик ползучести.

Таким образом, в тот момент времени, когда угол  $\theta$  достигает значения  $\theta_*$ , в ферме происходит "хлопок" (угол поворота мгновенно изменяется на конечную величину). Указанный момент времени называют критическим. Значение  $t_*$  находят из соотношения (7.5.17) при  $\theta = \theta_*$ . Характерный вид изменения угла  $\theta$  во времени показан на рис. 7.5.10. Нижняя ветвь графика соответствует положению узла фермы ниже уровня опор.

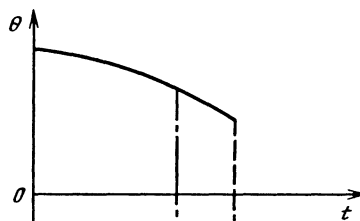


Рис. 7.5.10. Зависимость угла наклона стержней фермы Мизеса от времени

Ранее предполагалось, что в процессе деформирования фермы прямолинейная форма ее стержней не теряет устойчивости. Если стержни являются гибкими, то по мере уменьшения угла  $\theta$  усилия в них увеличиваются и могут достигнуть величины эйлеровой критической силы. Значение соответствующего угла  $\theta_{**}$  находят из уравнения  $P/(2\theta_{**}) = \pi^2 EJ/l^2$ . Время  $t_{**}$ , при котором происходит потеря устойчивости стержня, а следовательно, и фермы, определяют из выражения (7.5.17) при подстановке в него вместо  $\theta$  величины  $\theta_{**}$ .

## Глава 7.6

### УСТОЙЧИВОСТЬ РОТОРОВ

#### 7.6.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

В задачах динамики роторных систем возникает несколько физических постановок об устойчивости.

1. Устойчивость положения оси ротора-гироскопа с одной точкой опоры. В простейшем

частном случае вертикальное положение оси вращения в поле сил тяжести будет устойчивым при соблюдении условия [25]

$$\omega^2 I_0 > 4IMgl,$$

где  $\omega$  - скорость вращения;  $I_0$  - полярный момент инерции ротора;  $I$  - эквивалентный момент инерции относительно точки опоры;  $M$  - масса ротора;  $l$  - расстояние от точки опоры до центра тяжести.

2. Устойчивость равномерного вращения неуровновешенного гибкого ротора с приводом, но без регулятора [50, 29]. Равномерное вращение при установившейся моментной нагрузке будет всегда устойчивым, за исключением диапазона критической скорости при большой неуровновешенности ротора.

3. Устойчивость ротора в электромагнитном или в электрическом полях [33]. В частном случае невращающийся ферромагнитный ротор на механических опорах в поле электромагнитных сил притяжения статора будет устойчивым, если "отрицательная" жесткость магнитного поля будет меньше изгибной жесткости вала ротора. Безопорный ротор в поле постоянных магнитов всегда неустойчив, и для его стабилизации используется автоматическая система регулирования [50].

4. Устойчивость стационарного движения ротора при действии циркуляционных сил, обусловленных взаимодействием ротора с окружающей средой [4].

5. Устойчивость стационарного вращения ротора, обладающего анизотропными свойствами [4, 3].

Ниже рассмотрены две последние постановки как наиболее распространенные и важные в практическом плане.

### 7.6.2. СИЛЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РОТОРА СО СРЕДОЙ

На ротор при его движении действуют силы и моменты, зависящие от перемещений и скоростей характерных его точек и обусловленные реакцией окружающей среды на это движение. При малых перемещениях  $\mathbf{u}$  и скоростях  $\dot{\mathbf{u}}$  эти реакции будут линейными функциями последних и в общем случае для поступательных перемещений могут быть представлены в виде

$$\mathbf{N} = \mathbf{F} + \mathbf{R} = -\Phi \mathbf{u} - \mathbf{R} \dot{\mathbf{u}}. \quad (7.6.1)$$

Здесь  $\Phi$  и  $\mathbf{R}$  - некоторые матрицы, имеющие вид

$$\Phi = \begin{vmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{vmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{vmatrix}, \quad (7.6.2)$$

где  $c_{xx}, \dots, k_{yy}$  - коэффициенты, зависящие от параметров ротора и внешней среды, причем в общем случае  $c_{xy} \neq c_{yx}, k_{xy} \neq k_{yx}$ . Матрицы  $\Phi$

и  $\mathbf{R}$  могут быть разложены на симметричные и кососимметричные

$$\Phi = \mathbf{C} + \mathbf{B}; \quad \mathbf{R} = \mathbf{K} + \mathbf{H},$$

где составляющие матрицы

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} c_{xx} & \frac{1}{2}(c_{xy} + c_{yx}) \\ \frac{1}{2}(c_{xy} + c_{yx}) & c_{yy} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{vmatrix},$$

$$b = \frac{1}{2}(c_{xy} - c_{yx});$$

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} k_{xx} & \frac{1}{2}(k_{xy} + k_{yx}) \\ \frac{1}{2}(k_{xy} + k_{yx}) & k_{yy} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{vmatrix} 0 & h \\ -h & 0 \end{vmatrix},$$

$$h = \frac{1}{2}(k_{xy} - k_{yx}).$$

Матрицы  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{K}$  определяют соответственно чисто упругие и чисто демпфирующие силы. Силы, определяемые матрицей  $\mathbf{H}$ , называют гироскопическими, а матрицей  $\mathbf{B}$  - псевдогироскопическими или циркуляционными.

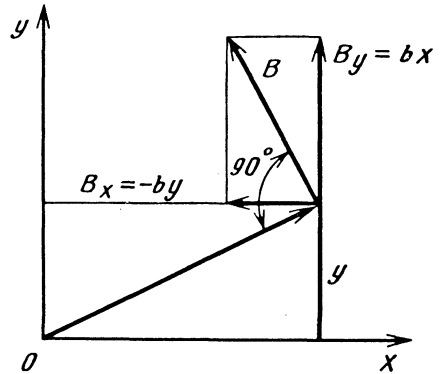


Рис. 7.6.1. Векторы циркуляционных сил и смещение

Циркуляционные силы связаны с вектором смещения, причем вектор циркуляционных сил перпендикулярен вектору смещения (рис. 7.6.1), вследствие чего эти силы могут проявить себя лишь в системах с числом степеней свободы больше одной. Важнейшей особенностью циркуляционных сил является их неконсервативность, так как работа  $W$  этих сил на произвольном замкнутом контуре  $L$  не равна нулю:

$$W = \int_L (B_x dx + B_y dy) = -b \int_L (y dx + x dy) = 2bS,$$

где  $S$  - площадь, заключенная внутри замкнутого контура.

Зависимостями вида (7.6.2) характеризуются силы при многих взаимодействиях ротора с

окружающей средой: силы внутреннего трения в материале вала; гидрогазодинамические силы в подшипниках скольжения и в уплотнениях; газодинамические силы в рабочих элементах паровых и газовых турбин; электродинамические силы в электромагнитных полях и др. При этом в ряде случаев циркуляционные силы сопротивления оказываются связанными между собой, так как имеют общее происхождение в виде вращающихся полей сил трения. В то же время в некоторых случаях циркуляционные силы как бы независимы от других сил, когда их возникновение связано с передачей роторам моментной нагрузки.

Под силами внутреннего трения понимают силы сопротивления с коэффициентом пропорциональности  $k_i$ , которые возникают внутри самого ротора и обусловлены несовершенной упругостью материала вала ротора или трением между элементами ротора при их неплотном соединении. Коэффициент циркуляционных сил внутреннего трения  $b = k_i \omega$ .

Эти силы связаны с ротором и вращаются вместе с ним с частотой вращения ротора.

В гидрогазодинамических подшипниках скольжения между цапфой ротора и самим подшипником имеется тонкий слой смазочного материала. Компоненты матриц (7.6.2) называют динамическими коэффициентами:

$$c_{xx, \dots, yy} = \frac{\mu \omega l}{\psi^3} I_1, \dots, I_4; k_{xx, \dots, yy} = \frac{\mu l}{\psi^3} I_5, \dots, I_8, \quad (7.6.3)$$

где  $\mu$  - динамическая вязкость;  $\omega$  - скорость вращения;  $l$  - длина подшипника;  $\psi = \Delta/R$ ;  $\Delta$  - радиальный зазор;  $R$  - радиус цапфы;  $I_1, \dots, I_8$  - величины, определяемые при решении гидродинамической задачи и зависящие от типа подшипников.

В гидрогазостатических подшипниках и уплотнениях тонкий слой создается в основном вследствие перепада давлений. В этом случае коэффициенты  $k$  будут по-прежнему определяться зависимостями (7.6.3), а коэффициенты  $c$  будут иметь вид

$$c_{xx, \dots, yy} = \frac{p l}{\psi} I_1, \dots, I_4, \quad (7.6.4)$$

где  $p$  - перепад давлений.

Особое место в этих задачах занимает случай, когда ротор статически ненагружен и когда между динамическими коэффициентами, характеризующими циркуляционные силы и силы демпфирования, имеет место соотношение

$$c_{xy} = -c_{yx} = b = \frac{1}{2} k \omega, \quad \text{где } k = k_{xx} = k_{yy}. \quad (7.6.5)$$

В проточных частях паровых турбин возникают циркуляционные силы, называемые еще

венцовыми, которые обусловлены неодинаковостью сил, действующих на рабочие лопатки при поперечных и угловых смещениях ротора. Это различие возникает, в свою очередь, из-за неодинаковости протечек пара через периферийные и диафрагменные уплотнения ступеней. Венцовые силы связаны с передачей ротором момента (мощности), и коэффициент жесткости этих сил зависит как от конструктивных параметров ротора, так и от параметров, определяющих величину передаваемой мощности - перепада давления и окружных составляющих скоростей парового потока.

На роторы, находящиеся в электромагнитном поле, действуют циркуляционные силы, родственные силам внутреннего трения в материале ротора и обусловленные потерями на перемагничивание и действием вихревых токов, а также циркуляционные силы, связанные с передачей момента. В последнем случае циркуляционные силы зависят как от магнитной индукции поля, так и от разности частот вращения ротора и поля, знаком этой разности определяется направление этих сил [41].

### 7.6.3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ДЕЙСТВИИ ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ СИЛ

Влияние циркуляционных сил на устойчивость роторов проанализируем на примере сил внутреннего трения в материале вала, действующих в симметричном гибком роторе с одним диском.

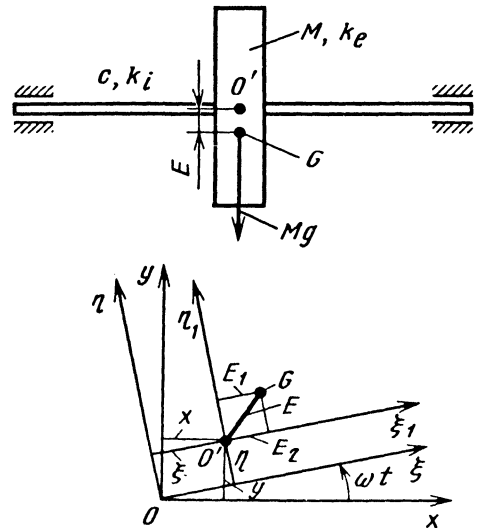


Рис. 7.6.2. Схема ротора и координаты

Силы внутреннего трения вводятся, как обычные силы сопротивления, в естественной для этих сил координатах  $\xi\eta$  (рис. 7.6.2), вращающихся с частотой вращения ротора. В подвижных координатах уравнения имеют вид:

$$M(\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \omega^2\xi) + k_i\dot{\xi} + c\xi = 0;$$

$$M(\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \omega^2\eta) + k_i\dot{\eta} + c\eta = 0,$$

где  $M$  - масса диска ротора;  $c$  - жесткость вала.

Преобразование к неподвижным координатам, добавление членов, учитывающих приведенное к центру диска внешнее трение с коэффициентом  $k_e$ , силы тяжести ротора и его неуровненности, приводит к системе

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + k_e\dot{x} + k_i(x + \omega y) + cx &= \\ &= ME\omega^2 \cos(\omega t + \varphi); \\ M\ddot{y} + k_e\dot{y} + k_i(y - \omega x) + cy &= \\ &= ME\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) - Mg. \end{aligned} \tag{7.6.6}$$

Из системы (7.6.6) следует, что силы внутреннего трения приводят одновременно к возникновению сил обычного демпфирования и циркуляционных сил с коэффициентом  $b = k_i\omega$ .

При изменении скорости вращения центр диска из-за действия циркуляционных сил будет перемещаться по кривой, представляющей собой полуокружность с радиусом  $Mg/(2c)$ . Существование таких кривых, называемых, в частности, в задачах динамики роторов на подшипниках скольжения кривыми подвижного равновесия, является одним из характерных признаков действия циркуляционных сил.

Анализ однородной части системы (7.6.6) с помощью критерия Рауса - Гурвица приводит к условию устойчивости

$$\omega < \omega_* = \Omega(1 + k_e / k_i), \tag{7.6.7}$$

где  $\omega_*$  - скорость вращения ротора на границе устойчивости;  $\Omega = (c / M)^{1/2}$ .

Из условия (7.6.7) следует, что потеря устойчивости может произойти лишь при скорости, превышающей собственную частоту ротора  $\Omega$ , и что силы внешнего трения отодвигают границу устойчивости в сторону высших скоростей. Из условия (7.6.7) также следует, что в линейной задаче внешние воздействия в виде сил тяжести и неуровненности не оказывают влияния на устойчивость.

Анализ системы (7.6.6) с помощью метода  $D$ -разбиения показывает, что на границе устойчивости частота самовозбуждающихся колебаний  $\lambda$  равна собственной частоте ротора  $\Omega$  и колебания эти происходят в форме прямой прецессии, т.е. в направлении вращения ротора.

Эффективным средством повышения устойчивости является применение упругодемпферных опор. На рис. 7.6.3 показан характер

границы устойчивости для гибкого ротора на изотропных упругодемпферных опорах при фиксированном уровне сил внутреннего трения  $k_i = \text{const}$ . Область неустойчивости заштрихована. Из рис. 7.6.3 следует, что существует некоторое оптимальное демпфирование, при котором ширина области устойчивости максимальна.

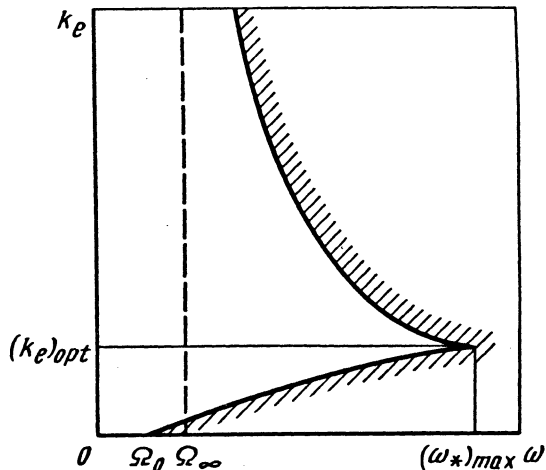


Рис. 7.6.3. Области устойчивости гибкого ротора на изотропных упругодемпферных опорах:  $\Omega_0$  - собственная частота ротора на упругих опорах;  $\Omega_\infty$  - собственная частота ротора на абсолютно жестких опорах

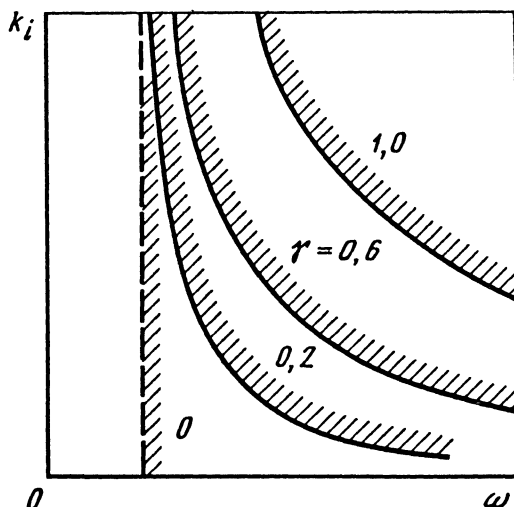


Рис. 7.6.4. Зависимость устойчивости ротора от анизотропии упругих опор

Анизотропия упругих опор также существенно повышает устойчивость. На рис. 7.6.4

показаны границы областей устойчивости для опор без внешнего трения при нескольких значениях коэффициентов анизотропии  $\gamma = (c_1 - c_2) / (c_1 + c_2)$  и при постоянном коэффициенте относительной жесткости опор  $(c_1 + c_2) / 2c = 0,5$ . Вертикальной штриховой линией показано положение границы устойчивости для ротора на изотропных опорах с той же относительной жесткостью. Физический смысл повышения устойчивости с увеличением анизотропии заключается в том, что при изменении параметра устойчивости, например скорости, потеря устойчивости наступает только тогда, когда частоты колебаний по двум направлениям выравниваются.

В несимметричных роторных конструкциях гироскопический эффект дисков повышает устойчивость. Это объясняется тем, что гироскопический эффект всегда повышает критическую скорость, а потеря устойчивости может происходить лишь при скоростях, превышающих критическую.

Циркуляционные силы в подшипниках скольжения и в уплотнениях приводят в основном к уже описанным эффектам, но имеются и некоторые особенности, связанные, в частности, с соотношением (7.6.5). Так, из-за наличия в смазочном слое квазиупругих составляющих возможна потеря устойчивости и жесткого ротора. При этом для таких роторов частота колебаний на границе устойчивости оказывается всегда близкой к половине скорости вращения, т.е. для жесткого ротора величина  $\omega/2$  является как бы его собственной частотой. Уменьшение жесткости ротора всегда понижает его устойчивость и особенно резко понижается устойчивость при скоростях, близких к удвоенной собственной частоте  $2\Omega$ . При этом частота колебаний на границе устойчивости, оставаясь близкой к  $\omega/2$ , одновременно оказывается близкой к собственной частоте ротора  $\Omega$ .

Эффективным средством повышения устойчивости является применение упругодемпферных опор, специальных подшипников с выраженными анизотропными свойствами, например эллиптических, а также подшипников, у которых циркуляционные силы отсутствуют (с подвижными вкладышами).

Величина циркуляционных сил парового потока обусловлена главным образом давлением и расходом пара, поэтому при анализе устойчивости роторов ставится задача определения так называемой пороговой мощности, т.е. мощности, превышение которой приводит к неустойчивости. Как и при действии циркуляционных сил иного типа, повышению устойчивости способствует увеличение жесткости ротора, использование виброустойчивых подшипников, а также

конструктивных мер, приводящих к уменьшению сил парового потока.

При действии циркуляционных сил электромагнитного происхождения устойчивость роторов зависит наряду с параметрами, определяющими интенсивность действующих сил, от частоты взаимного вращения ротора и магнитного поля. В частности, возможна потеря устойчивости вращающегося ротора при неподвижном поле и потеря устойчивости невращающегося ротора при вращающемся поле.

Для анализа устойчивости сложных роторных систем, таких, например, как валопроводы крупных турбоагрегатов, используют различные приближенные методы.

При использовании метода разложения по формам собственных колебаний составляют характеристическое уравнение, порядок которого определяется числом учитываемых форм колебаний. Далее характеристическое уравнение анализируют с помощью критериев Рауса - Гурвица или Зубова (см. гл. 7.2).

При использовании методов расчета, базирующихся на численных методах начальных параметров или динамических жесткостей, находят границу устойчивости в зависимости от параметра устойчивости задачи  $A$  (скорость вращения, пороговая мощность и т.п.). При реализации метода отыскивают периодическое решение с неизвестной частотой  $\lambda$  и с помощью переходных матриц для ротора с распределенными параметрами составляют с учетом граничных условий характеристический определитель  $\Phi(A, \lambda)$ . Из условия  $\Phi(A, \lambda) = 0$  численно находят границу устойчивости и частоту колебаний на этой границе.

#### 7.6.4. ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РОТОРА

Выход параметров системы за границы устойчивости приводит к режиму автоколебаний, амплитуда и частота которых определяется характером и величиной нелинейных сил в системе.

Ниже в качестве иллюстрации многообразия возможных явлений приведены результаты расчетов для неуравновешенного ротора с одним диском на жестких опорах, у которого нелинейны только силы внешнего и внутреннего трения, зависящие от четных степеней радиуса перемещений диска. Уравнения движения такой системы имеют вид [13]

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + \left[ k_{e0} + k_{e1}(x^2 + y^2) + k_{e2}(x^2 + y^2)^2 \right] \dot{x} + \\ + \left[ k_{i0} + k_{i1}(x^2 + y^2) + k_{i2}(x^2 + y^2)^2 \right] (\dot{x} + \omega y) + \\ + cx = ME\omega^2 \cos \omega t; \end{aligned} \quad (7.6.8)$$

$$M\ddot{y} + \left[ k_{e0} + k_{e1}(x^2 + y^2) + k_{e2}(x^2 + y^2)^2 \right] \dot{y} +$$

$$+ \left[ k_{i0} + k_{i1}(x^2 + y^2) + k_{i2}(x^2 + y^2)^2 \right] (y - \omega x) +$$

$$+ cy = ME\omega^2 \sin \omega t - Mg.$$

Для идеально уравновешенного ротора с вертикальной осью, т.е. для системы (7.6.8) без правых частей, находят точное решение в форме несинхронной прецессии с частотой  $\lambda = \sqrt{c/M}$

$$x = A \cos \lambda t; \quad y = A \sin \lambda t,$$

где амплитуду  $A$  определяют из уравнения

$$S = A \left[ -\lambda \left( k_{e0} + k_{e1}A^2 + k_{e2}A^4 \right) - \right.$$

$$\left. - (\lambda - \omega) \left( k_{i0} + k_{i1}A^2 + k_{i2}A^4 \right) \right] = 0.$$

Решения будут устойчивыми при выполнении условия  $\partial S / \partial A < 0$ .

В зависимости от соотношения между нелинейными составляющими сил внешнего и внутреннего трений возможны амплитудные кривые различных видов:

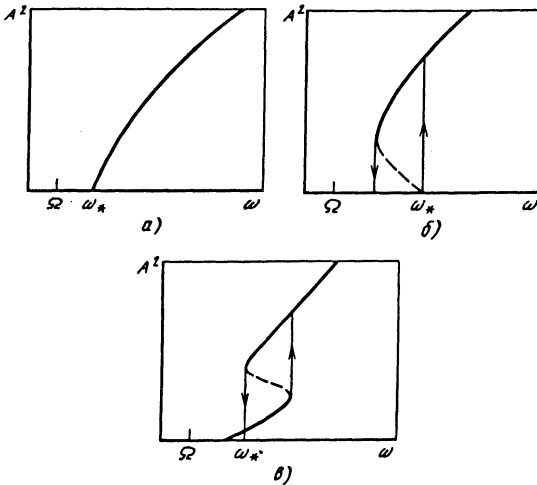


Рис. 7.6.5. Виды амплитудных зависимостей при автоколебаниях

нелинейные составляющие сил внешнего трения при всех амплитудах больше составляющих сил внутреннего трения (рис. 7.6.5, а);

при малых амплитудах внутреннее трение больше внешнего ( $k_{i1} > k_{e1}$ ), но при больших

амплитудах внешнее трение больше внутреннего ( $k_{e2} > k_{i2}$ ) (рис. 7.6.5, б);

при малых амплитудах  $k_{e1} > k_{i1}$ , при средних  $k_{e2} < k_{i2}$ , при больших  $k_{e3} > k_{i3}$ , где  $k_{e3}, k_{i3}$  - коэффициенты при шестых степенях амплитуд (рис. 7.6.5, в).

На рис. 7.6.5 штриховыми линиями показаны неустойчивые ветви решений. Из рис. 7.6.5 следует, что в зависимости от характера сил возможно жесткое возбуждение автоколебаний при увеличении скорости и затягивание колебаний при снижении скорости.

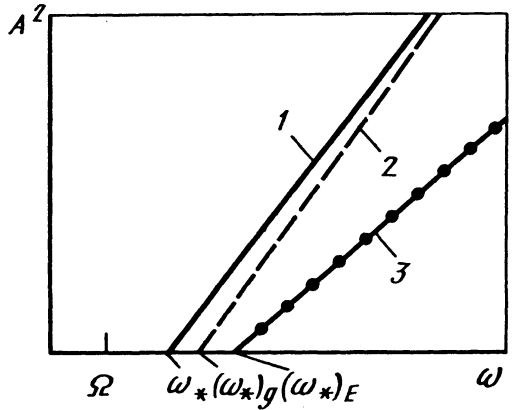


Рис. 7.6.6. Амплитудно-частотные зависимости при наличии сил тяжести и неуравновешенности: 1 - автономная задача; 2 - при учете сил тяжести; 3 - при действии неуравновешенности

Силы тяжести и неуравновешенность сдвигают границу устойчивости, найденную при решении соответствующей линейной задачи, и оказывают влияние на автоколебания (рис. 7.6.6).

При другом характере нелинейных сил неуравновешенность может как повышать, так и понижать устойчивость системы. В частности, установлено, что при "жесткой" нелинейности упругих сил неуравновешенность повышает устойчивость, а при "мягкой" нелинейности - понижает устойчивость по сравнению со случаем нелинейной упругости.

Для многомассовых роторных систем или систем с распределенными параметрами, когда скорость вращения превышает не только первую, но и высшие критические скорости, существует возможность возникновения одночастотных автоколебаний различных форм или даже многочастотных автоколебаний. Соответствующая линейная задача устанавливает здесь лишь факт потери устойчивости, но не дает ответа на вопрос, какие формы колебаний будут при этом осуществляться, и ответ может быть получен только при рассмотрении нелинейной задачи.



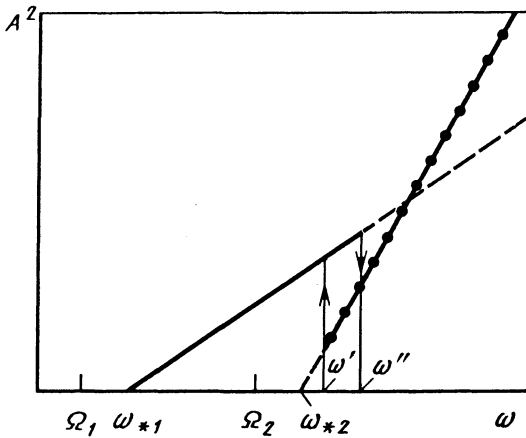


Рис. 7.6.7. Амплитудно-частотные зависимости для ротора с распределенными параметрами:  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  - соответственно первая и вторая критические скорости;  $\omega_{*1}$  и  $\omega_{*2}$  - скорости потери устойчивости соответственно по первой и второй формам

На рис. 7.6.7 показаны зависимости амплитуды колебаний ротора с распределенными параметрами при наличии сил внутреннего трения, когда скорость вращения превышает вторую критическую. При скорости  $\omega_{*1} > \Omega_1$  происходит потеря устойчивости по первой форме и возникают соответствующие автоколебания с частотой  $\Omega_1$ , амплитуда которых растет с увеличением  $\omega$  до скорости  $\omega''$ , и автоколебания по первой форме исчезают. При скорости  $\omega = \omega' > \omega_{*2}$  возникают автоколебания по второй форме с частотой  $\Omega_2$ . В диапазоне  $\omega' - \omega''$  могут существовать автоколебания или по первой, или по второй форме, и реализация той или иной формы будет зависеть от начальных условий. Смена режима в диапазоне  $\omega' - \omega''$  происходит скачкообразно.

При действии в рассматриваемой задаче циркуляционных сил типа сил, возникающих в подшипниках скольжения или в уплотнениях, будут существовать автоколебания только по первой форме с частотой  $\Omega_1$ .

Для простых двухопорных систем режимы многократных автоколебаний не наблюдаются, однако они могут возникать в сложных роторных системах, например, в валопроводах или соосных роторных системах.

На рис. 7.6.8 показана область устойчивости при действии сил внутреннего трения для системы, состоящей из двух соосных роторов, вращающихся в жестком амортизированном корпусе [42]. Роторы могут вращаться с различными угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , в том числе и в противоположные стороны. Из рис. 7.6.8

следует, что вращение роторов в одну сторону понижает, а в разные - увеличивает устойчивость системы. При выходе за область устойчивости возникают автоколебания, частота и характер которых устанавливаются лишь при рассмотрении нелинейной задачи. Анализ показывает, что здесь возможно большое разнообразие режимов - одночастотные и двухчастотные автоколебания с различными формами. При слабой связи между роторами, например при большой жесткости амортизаторов корпуса, как правило, будут существовать двухчастотные режимы, а при сильной связи между роторами - одночастотные.

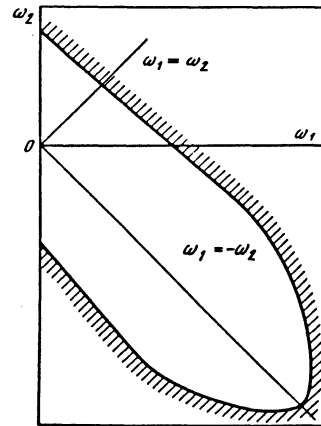


Рис. 7.6.8. Области устойчивости системы двух соосных роторов, вращающихся в жестком амортизированном корпусе

#### 7.6.5. УСТОЙЧИВОСТЬ РОТОРОВ, ОБЛАДАЮЩИХ АНИЗОТРОПНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Различают внешнюю анизотропию, когда анизотропными свойствами обладают опоры, и внутреннюю, когда анизотропным является вращающийся ротор. Несмотря на кажущуюся близость этих видов анизотропии, влияние их на колебания роторов существенно различается. В частности, внутренняя анизотропия может приводить при определенных условиях к потере устойчивости и возникновению параметрических колебаний [3].

Особенности задачи рассматриваем на примере неуравновешенного ротора с одним диском, вал которого имеет различные жесткости  $c_I$  и  $c_{II}$  на изгиб в двух взаимно перпендикулярных осях, связанных с ротором. В подвижной системе координат уравнения имеют вид

$$M(\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \omega^2\xi) + k(\xi - \omega\eta) + c_I\xi = M\omega^2 E_1;$$

$$M(\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \omega^2\eta) + k(\eta + \omega\xi) + c_{II}\eta = M\omega^2 E_2.$$

(7.6.9)

В неподвижной системе координат уравнения движения имеют уже периодические коэффициенты:

$$\begin{aligned}
 & M\ddot{x} + x(c_I \cos^2 \omega t + c_{II} \sin^2 \omega t) + \\
 & + 1/2y(c_I - c_{II}) \sin 2\omega t + k\dot{x} = \\
 & = M\omega^2 (E_1 \cos \omega t - E_2 \sin \omega t); \\
 & M\ddot{y} + 1/2x(c_I - c_{II}) \sin 2\omega t + y \times \\
 & \times (c_I \sin^2 \omega t + c_{II} \cos^2 \omega t) + k\dot{y} = \\
 & = M\omega^2 (E_1 \sin \omega t + E_2 \cos \omega t).
 \end{aligned}
 \tag{7.6.10}$$

Две недемпфированные частоты  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  собственных колебаний в подвижной системе координат находим из характеристического уравнения, получаемого из системы (7.6.9):

$$\begin{aligned}
 & \left[ c_{II} - M(\Omega^2 + \omega^2) \right] \left[ c_I - M(\Omega^2 + \omega^2) \right] - \\
 & - 4\omega^2 \Omega^2 = 0.
 \end{aligned}$$

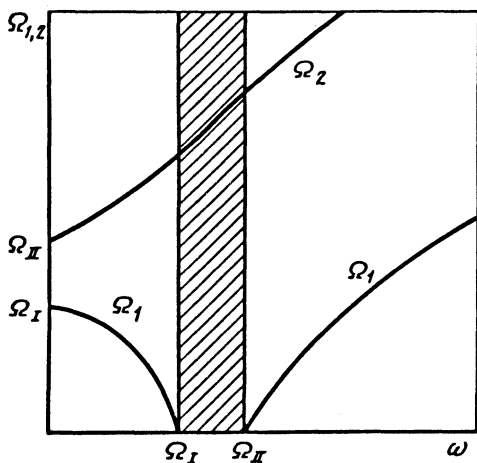


Рис. 7.6.9. Зависимость собственных частот анизотропного ротора от скорости

Зависимость частот  $\Omega_{1,2}$  от скорости  $\omega$  показана на рис. 7.6.9, из которого следует, что в диапазоне скоростей вращения  $\Omega_I < \omega < \Omega_{II}$ , где  $\Omega_I = \sqrt{c_I / M}$  и  $\Omega_{II} = \sqrt{c_{II} / M}$  - парциальные частоты ротора, существует только одна собственная частота. Другая собственная частота

в этом диапазоне становится мнимой и в системе возникает неустойчивость, характеризуемая аперiodическим движением в подвижной системе координат и движением по раскручивающейся спирали в неподвижной системе координат с частотой  $\omega$ . Область неустойчивости заштрихована.

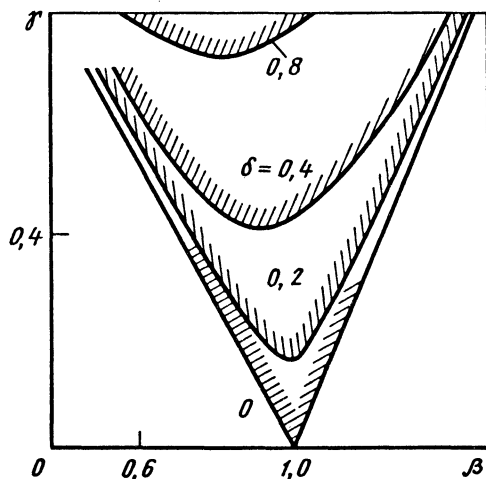


Рис. 7.6.10. Области неустойчивости анизотропного ротора

Анализ однородной части системы (7.6.9) с помощью критерия Рауса - Гурвица приводит к условию устойчивости

$$(c_I - M\omega^2)(c_{II} - M\omega^2) + (k\omega^2) > 0, \tag{7.6.11}$$

которое определяет область неустойчивых скоростей вращения, расположенную внутри интервала  $[\Omega_I, \Omega_{II}]$ . Демпфирование уменьшает ширину области неустойчивости, и при  $k/M \gg |\Omega_{II} - \Omega_I|$  неустойчивость совсем исчезает. На рис. 7.6.10 показаны границы областей устойчивости в плоскости параметров  $\gamma = (c_{II} - c_I) / (c_{II} + c_I)$  и  $\beta = \omega / \Omega_m$ ,  $\Omega_m = \sqrt{c_m / M}$ ,  $c_m = (c_I + c_{II}) / 2$  при нескольких фиксированных значениях параметра  $\delta = k / \sqrt{c_m / M}$ . Области неустойчивости заштрихованы.

Неуравновешенность ротора приводит в неподвижных координатах к круговым движениям с частотой  $\omega$ :

$$x = A \cos(\omega t + \psi); \quad y = A \sin(\omega t + \psi), \tag{7.6.12}$$

где  $A = \sqrt{A_I^2 + A_{II}^2}$ ;  $\text{tg} \psi = A_{II} / A_I$ ;

$$A_I = M\omega^2 \frac{E_1(c_{II} - M\omega^2) + E_2k\omega}{(c_I' - M\omega^2)(c_{II} - M\omega^2) + (k\omega)^2};$$

$$A_{II} = M\omega^2 \frac{-E_1k\omega + E_2(c_I - M\omega^2)}{(c_I - M\omega^2)(c_{II} - M\omega^2) + (k\omega)^2}.$$

Из решений (7.6.12) следует, что на границе устойчивости (7.6.11) амплитуды вынужденных колебаний становятся неограниченно большими, т.е. анизотропия ротора как бы уничтожает положительные силы сопротивления в системе.

Причина такого влияния анизотропии ротора на вынужденные колебания, а также на ширину области устойчивости согласно (7.6.11) заключена в неконсервативности рассматриваемой системы. Чтобы показать это, вычислим работу сил упругости вала (без учета сил сопротивления) на перемещениях (7.6.12). В результате вычислений найдем

$$W = 2\pi A_I A_{II} |c_{II} - c_I|,$$

т.е. работа сил упругости в анизотропной системе не равна нулю, что, вообще говоря, заранее не было столь очевидным.

Имеющиеся в реальных системах нелинейные силы ограничивают амплитуды вынужденных колебаний на границах области неустойчивости, а также амплитуды параметрических колебаний внутри этой области. При этом оказывается, что вынужденные и параметрические колебания становятся связанными.

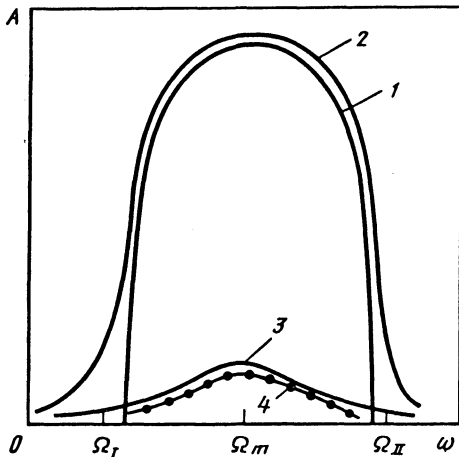


Рис. 7.6.11. Амплитудные зависимости для анизотропного (1, 2) и изотропного (3, 4) ротора

На рис. 7.6.11 приведены результаты расчетов для идеально уравновешенного (кривая 1) и неуравновешенного ротора (кривая 2) для случая, когда в системе действуют изотропные не-

линейные силы демпфирования, пропорциональные квадрату амплитуд перемещений диска, при анизотропии  $\gamma = 0,4$  и линейных силах сопротивления  $\delta = 0,1$ . Там же показаны амплитудные кривые 3, 4 для изотропного ротора, имеющего одинаковую с анизотропным ротором "усредненную" жесткость. Уровень нелинейных сил (кривая 4) выбран так, что эти силы в изотропной системе снижают амплитуды вынужденных колебаний на резонансе примерно на 10 % по сравнению с линейной системой. Из рис. 7.6.11 следует, что при отсутствии неуровновешенности в диапазоне неустойчивости будут существовать только параметрические колебания. Для неуравновешенного ротора на границе устойчивости амплитуды будут уже ограничены, а в диапазоне неустойчивости будут существовать совместные вынужденные и параметрические колебания с общей частотой  $\omega$ . Для анизотропного ротора уровень колебаний вблизи резонанса будет существенно более высокий, чем для изотропного ротора.

Массовая анизотропия ротора, в частности неодинаковость экваториальных моментов инерции насаженных на вал дисков, приводит к явлениям, аналогичным описанным.

## Глава 7.7

### УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ

#### 7.7.1. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ

Рассмотрим задачи об устойчивости упругих систем при действии на них ударных (импульсных) нагрузок, которые "мгновенно" возрастают до некоторой величины, а затем убывают по некоторому закону (рис. 7.7.1). Вопросы о критериях устойчивости упругих систем при ударных нагрузках до сих пор остаются дискуссионными. Наибольшее распространение получили "практические" критерии, отражающие конкретные требования к условиям эксплуатации конструкций различных классов [15, 37].

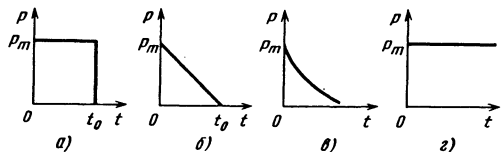


Рис. 7.7.1. Возможные виды ударных нагрузок: а - ступенчатый импульс конечной длительности; б, в - ударные нагрузки с линейным и экспоненциальным законом падения нагрузок за фронтом; г - ступенчатая нагрузка бесконечной длительности

Рассмотрим упругую систему, движение которой описывается уравнением [37]

$$\Delta u + p = u_{tt} + \alpha u_t, \quad (7.7.1)$$

где  $\Delta$  - дифференциальный оператор;  $u$  - вектор перемещений;  $\alpha$  - коэффициент линейного демпфирования;  $p$  - вектор внешних сил.

Будем искать решения, удовлетворяющие некоторым граничным и начальным условиям:

$$\Gamma(u) = 0; u(0) = u^0; u_t(0) = u_t^0. \quad (7.7.2)$$

Под воздействием внешних факторов, учесть которые по тем или иным причинам не представляется возможным, система совершает движение, определяемое вектором  $\tilde{u} = u + \bar{u}$ , где  $\bar{u}$  - возмущения, изучение характера которых и составляет задачу об устойчивости невозмущенного решения  $u$ .

Для широкого класса операторов с помощью (7.1.1) и (7.1.2) можно показать, что при внешних нагрузках, исчезающих с течением времени, невозмущенное движение асимптотически устойчиво, т.е. возмущения при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к нулю. Это, однако, не означает, что возмущения остаются произвольного малыми в любой момент времени. При некоторых условиях амплитуды возмущений на этапе переходного процесса могут стать достаточно большими. Таким образом, на практике критерий устойчивости должен заключаться в назначении верхней границы для тех или иных параметров напряженно-деформированного состояния. Этот подход идентичен концепции устойчивости на конечном интервале времени.

В качестве критерия динамической "потери устойчивости" для тонких упругих оболочек [15] обычно принимают величину прогиба в характерной точке, равную толщине оболочки. В этом случае нагружение при заданном давлении на оболочку  $p(t)$  характеризуется двумя параметрами: максимальным давлением  $p_m$  и импульсом

$$J = \int_0^{t_*} p(t) dt, \quad (7.7.3)$$

где  $t_*$  - время, при котором прогиб становится равным некоторому заданному критическому значению.

Другой возможный критерий связан с ограничением на некоторый параметр напряженного состояния, например, за момент динамической "потери устойчивости" принимают момент достижения интенсивностью напряжений в срединной поверхности оболочки предела текучести материала.

### 7.7.2. ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ

Характер выпучивания конструкции при динамическом приложении сил может быть совершенно иным, чем при статическом нагружении [28]. Это объясняется влиянием сил инерции, соответствующих перемещениям при выпу-

чивании. При решении динамических задач определяют ту форму выпучивания, которой при заданном импульсе соответствует наибольший темп нарастания перемещений. По существу, исследуются асимптотические формы выпучивания при относительно большом времени (эксперименты показывают, что в динамике выпучивание происходит по более высоким формам, чем в статике).

Исследования поведения стержней и цилиндрических оболочек при продольном ударе о массивную преграду показали, что процесс выпучивания можно схематично разделить на три стадии [20, 31]. Рассмотрим эти стадии на примере круговой цилиндрической обдлочки.

*Первая стадия.* Прогибы оболочки  $w(x, y, t)$ , описываемые линейными уравнениями движения пологих цилиндрических оболочек, в процессе выпучивания приближаются к осесимметричной форме

$$w(x, y, t) = A \sin \omega x \exp(\gamma t)$$

с длиной волны  $\lambda$ , определяемой соотношением  $\lambda = 2\pi / \omega = kh(a/v)^{1/2}$ . Здесь  $x, y$  - координаты вдоль образующей  $u$  в окружном направлении;  $h$  - толщина оболочки;  $a = (E/\rho)^{1/2}$  - стержневая скорость звука;  $v$  - скорость удара;  $k = 2\pi \left[ 6(1 - \nu^2) \right]^{-1/2}$ ;  $\nu$  - коэффициент Пуассона.

*Вторая стадия.* Появляющиеся нелинейные эффекты приводят ко вторичной неустойчивости осесимметричного выпучивания по отношению к всегда имеющимся начальным неосесимметричным возмущениям.

*Третья стадия.* В конце процесса выпучивания оболочка принимает форму изометрического изгибающего исходного цилиндра, для которой энергия мембранных напряжений минимальна.

Определяющим параметром процесса упругого выпучивания цилиндрических оболочек при продольном ударе является длина волны  $\lambda$  линейного выпучивания; ромбовидные вмятины имеют характерный размер  $2\lambda$  вдоль образующей цилиндра. При скоростях удара, меньших значе-

ния  $v_* = ah / \left( R \sqrt{3(1 - \nu^2)} \right)$ , в оболочке возникают лишь колебательные движения (при  $v \rightarrow v_*$  осевые сжимающие напряжения в оболочке достигают эйлеровых критических).

Теоретическое описание выпучивания цилиндрической оболочки применимо и к описанию выпучивания слабоконических оболочек. Слабая конусность оболочек (до  $4^\circ$ ) качественно и количественно не влияет на выпучивание оболочек на осесимметричной стадии. На переходной и заключительной стадиях такое отличие более заметно. У достаточно коротких оболочек

с углом полураствора  $\alpha=15^{\circ}$ , нагруженных ударом по большему основанию, характерных трех стадий не наблюдается. Конусность оболочек влияет на локализацию процесса выпучивания. У расширяющихся оболочек процесс более локализован вблизи ударяемого торца, чем у сужающихся. Как и в случае цилиндрической оболочки, процесс выпучивания можно разделить на три стадии: начальную линейную стадию, когда основная форма прогибов осесимметрична; переходную стадию между начальной и заключительной, когда нелинейные эффекты начинают играть существенную роль; заключительную нелинейную стадию, на которой деформированная поверхность близка к изометрическому изгибанию поверхности конуса.

### 7.7.3. ПОВЕДЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НАЧАЛЬНЫМИ НЕСОВЕРШЕНСТВАМИ

Реальные конструкции и образцы, служащие для проведения экспериментов, всегда имеют начальные неправильности. Формы и амплитуды этих неправильностей в значительной мере зависят от технологии изготовления. По известным в литературе данным, для тщательно изготовленных оболочек амплитуда начального прогиба может быть в вычислениях принята равной около 0,001 толщины. Один из возможных путей решения задачи в этом случае основан на непосредственном интегрировании уравнений движения неидеальной оболочки.

В процессе выпучивания упругого стержня и упругой цилиндрической оболочки при продольном ударе происходит избирательное усиление различных составляющих начального прогиба, так что после некоторого переходного процесса форма выпучивания определяется действующей нагрузкой и не зависит от вида начальных неправильностей. При других видах нагружения поведение в значительной степени определяется начальными неправильностями. Методика определения значения начального прогиба, начиная с которого развитие динамических прогибов резко меняет темп, приведена в работе [37].

В качестве примера учета начального прогиба рассмотрим устойчивость цилиндрической оболочки конечной длины  $l$  при действии осесимметричного равномерно распределенного импульсного давления  $p(t)$  [39]. Принято считать, что срединная поверхность оболочки имеет начальные неправильности, совпадающие по форме с прогибами при потере устойчивости. Изучим лишь такие процессы, в которых амплитуда изгибных прогибов не превосходит толщины оболочки. В этом случае в рамках теории пологих оболочек поведение оболочки будет описываться системой уравнений смешанного типа относительно функции напряжений  $\Phi$  и нормального прогиба  $w$ .

Для случая свободного опирания форма динамического и начального прогиба имеет вид

$$w(x, \theta, t) = h \left[ w_0(t) + w_n(t) \cos \frac{\pi x}{l} \cos n\theta \right];$$

$$w^0(x, \theta) = h \delta_n \cos \frac{\pi x}{l} \cos n\theta,$$

где  $n$  - число волн потери устойчивости оболочки по окружности.

Далее предполагаем, что  $t_0$  больше, чем период осесимметричных колебаний оболочки  $T_0$ , а период изгибных колебаний  $T_n \gg T_0$ . В качестве критерия динамической устойчивости оболочки принимаем условие  $w_n^{\max} / \delta_n \leq C$ . Это условие означает, что в ходе динамического процесса потери устойчивости начальные неправильности оболочки увеличиваются в  $C$  раз. В результате минимизации по  $n$  было установлено, что устойчивость оболочки определяется только значением критического импульса  $J_*$ , который не зависит от конструктивного параметра оболочки  $\gamma = \pi^2 R h / l^2$  (при  $\gamma \leq 0,1$ ).

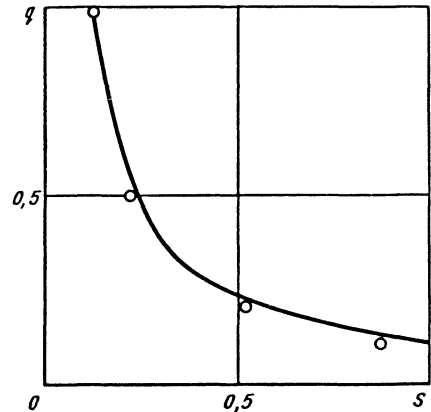


Рис. 7.7.2. Граница устойчивости для цилиндрической оболочки при действии ступенчатого импульса конечной длительности

На рис. 7.7.2 показана граница устойчивости оболочек при  $C=1000$ , которая хорошо аппроксимируется зависимостью

$$\frac{p_m - p_*}{J - J_*} = \text{const}, \quad (7.7.4)$$

где  $p_*$  - значение статической критической нагрузки;  $J_* = p_m t_0$ ;  $t_0$  - продолжительность действия нагрузки (см. рис. 7.7.1, а). Формула (7.7.4) описывает границу устойчивости широкого класса оболочек. Например, для круговых

цилиндрических оболочек постоянная в правой части близка к двум. Этот же закон справедлив для конических оболочек, сферических куполов и цилиндрических панелей. Результаты экспериментов подтверждают справедливость данного приближенного метода оценки динамической устойчивости оболочек [37]. Формула (7.7.4) применима только в случае, когда критические напряжения оболочки существенно меньше предела текучести материала; она становится непригодной и для нагрузок импульсного типа, когда  $t_0 \ll T_0$ .

При достаточно высоком значении параметра нагрузки  $p_m$  величина опасного импульса остается почти неизменной при различных нагрузках, испытываемых системой. На основе систематических опытов с моделями цилиндрических оболочек из сплава АМг-6, подвергавшимся действию осесимметричного равномерно распределенного импульсного давления, получен ряд эмпирических зависимостей, позволяющих определить критическую величину удельного импульса и другие величины, характеризующие выпучивание [37]:

$$J_* = 1,44R\sqrt{\rho\sigma_T}\left(\frac{h}{R}\right)^{1,5};$$

$$n^* = \frac{7,43JR^{0,5}}{h^{1,5}(\rho\sigma_T)^{0,5}}; \quad \frac{w_*^{\max}}{h} = \frac{0,482RJ^2}{\rho\sigma_T h^3}.$$

Здесь  $w_*^{\max}$  - максимальный остаточный прогиб, возникающий при действии импульсной нагрузки. Принято, что выпучивание сопровождается образованием серии окружных вмятин, число  $n$  которых равно ближайшему целому к величине  $n^*$ . За потерю устойчивости принимают достижение остаточным прогибом толщины стенки.

**7.7.4. ВЛИЯНИЕ ВОЛНОВЫХ ЭФФЕКТОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ**

Волновой характер распространения напряжений вдоль конструкции оказывает значительное влияние на динамическую устойчивость в случае, если конструкция удлиненного очертания подвергается продольному удару, например удару о преграду или со стороны некоторого груза. В этой постановке условие удара задают скоростью одного из торцов стержня, пластины или оболочки при определенном соотношении масс деформируемой конструкции и груза. Эксперименты показывают, что при увеличении скорости удара число волн, образующихся вдоль конструкции, возрастает, причем преимущественное выпучивание имеет место на участке,

примыкающем к нагруженному концу. Наблюдается также явление перестройки динамических форм, заключающееся в изменении числа волн в процессе выпучивания [18].

Приведем постановку задачи о выпучивании полубесконечного упругого стержня при продольном ударе телом, движущимся с постоянной скоростью  $v$ . В этом случае продольная волна сжимающих напряжений и выпучивание с учетом начального прогиба  $w_0(x)$ , деформации поперечного сдвига и инерции вращения, а также неоднородности сжимающих усилий описываются линеаризованной по прогибам  $w$  системой уравнений:

$$\left( E \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(x, t) = 0;$$

$$Lw(x, t) = EA \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dw_0}{dx} \right);$$

$$L = EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \rho I \frac{E + nG}{nG} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{nG} \frac{\partial^4}{\partial t^4} -$$

$$-EA \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

с нулевыми начальными условиями, условиями шарнирного опирания на торце и краевым условием для  $u(x, t)$  в виде  $u(0, t) = vt$ . Здесь  $x$  - расстояние от торца стержня;  $E$ ,  $G$  и  $\rho$  - модуль Юнга, модуль сдвига и плотность материала стержня;  $u$  - продольные смещения;  $I$ ,  $A$ ,  $n$  - момент инерции, площадь поперечного сечения и коэффициент, зависящий от его формы [31]. Аналогичные уравнения для пластин и цилиндрических оболочек при продольном ударе приведены в работе [15].

**7.7.5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С АКУСТИЧЕСКИМИ ВОЛНАМИ**

Распространение акустических волн (или поверхностей слабого разрыва) характеризуется постоянством скорости звука во всех точках среды, малостью изменения плотности по сравнению с плотностью невозмущенной среды  $\rho_0$ , а также малостью скоростей частиц  $v$  по сравнению со скоростью звука  $c_0$ . Давление  $p$ , действующее на преграду, можно представить в виде  $p = p_1 + p_2 + p_3$ , где  $p_1$  - давление в падающей волне;  $p_2$  - давление в волне, отраженной от жесткой и неподвижной преграды;  $p_3$  - давление излученных волн, связанное с деформированием преграды и движением ее как твердого тела.

Для воздуха теория акустического приближения допустима, если перепад давления в падающей волне не превышает 7 кПа. Поскольку давлением  $p_3$  в воздухе можно пренебречь, то задача определения внешних нагрузок в этом случае является чисто аэродинамической (сумму  $p_0 = p_1 + p_2$  обычно называют дифракционным давлением).

В жидкости давление  $p_3$  играет существенную роль, поэтому ниже основное внимание будет уделено этому случаю. Гидродинамическому давлению  $p$  соответствует суммарный потенциал  $\psi$ , который также представляется в виде суммы трех слагаемых  $p = -\rho \partial \psi / \partial t$ ,  $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ . Здесь  $\rho$  - плотность жидкости;  $\psi_1$  - потенциал скорости жидкости в волне давления, который считается заданным;  $\psi_2$  - потенциал, соответствующий давлению  $p_2$ , и  $\psi_3$  - давлению  $p_3$ . Потенциалы  $\psi_2$  и  $\psi_3$  должны удовлетворять волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} \quad (i = 2, 3),$$

нулевым начальным условиям и краевым условиям на поверхности (границе)  $S$  преграды

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial n} + \frac{\partial \psi_2}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t},$$

где  $c$  - скорость звука в жидкости;  $n$  - направление внешней нормали;  $w$  - перемещение преграды в сторону внешней нормали; граница  $S$  - кусочно-гладкая поверхность.

Если на поверхности  $S$  имеются сингулярные точки (вершины границ) и линии (ребра границ), то в их окрестности необходимо положить дополнительные ограничения на поведение  $\psi_2$  и  $\psi_3$ , чтобы обеспечить единственность решения гидродинамической задачи с заданными начальными и граничными условиями.

Для оболочек вращения потенциалы  $\psi_2$  и  $\psi_3$  можно представить через "переходные функции"  $F(t)$  в форме [18]

$$\psi_2 = \int_0^t \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \right)_S F(t - t_1) dt_1;$$

$$\psi_3 = \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t} F(t - t_1) dt_1.$$

Получен ряд приближенных выражений для функций  $F(t)$ , которые с практической точ-

ки зрения достаточно точно согласуются с их точными представлениями в случае дифракции акустических ударных волн на сферических и цилиндрических оболочках (рис. 7.7.3). Некоторые из них представлены в табл. 7.7.1. Точность этих аппроксимаций и пределы их применимости подробно обсуждаются в [18, 37]. В случае цилиндра расчеты давлений по этим соотношениям подтверждаются экспериментальными данными [62]. Если внутренняя полость цилиндрической оболочки заполнена жидкостью, то дополнительно на оболочку будет действовать давление  $p_4$ , для которого переходная функция  $F(\tau) = 1 + \tau / 2 \quad (\tau \ll 1)$ .

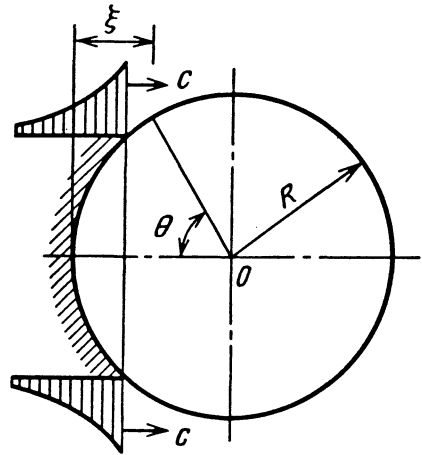


Рис. 7.7.3. Схема взаимодействия плоской волны с цилиндрической (сферической) оболочкой

Полученные соотношения для гидродинамических нагрузок становятся неприменимыми в следующих случаях: возникающие давления в жидкости больше 100 МПа; перемещения контактных поверхностей становятся очень большими (для оболочек соизмеримыми с радиусами кривизны); в жидкости возникает кавитация.

Поскольку в динамике и с учетом среды картина потери устойчивости оболочек значительно сложнее, чем, в статике, то обычно в задачах подобного рода вводят гипотетические критерии динамической устойчивости, о которых говорилось выше: нагрузку считают критической, если амплитуда изгибных прогибов достигает толщин оболочек. При этом нагрузка характеризуется двумя параметрами: максимальным давлением и импульсом. В такой постановке решены задачи об устойчивости цилиндрических панелей в газе и в жидкости при действии на них плоских акустических ударных волн [16, 18].

7.7.1 Переходные функции  $F$  для определения нагрузок при действии нестационарных акустических волн на сферические и цилиндрические оболочки

Оболочка	$F(\tau)$	Представление нормально-го прогиба $w(x, \theta, \tau)$
Сферическая	$F(\tau) = \exp(-\tau) \cos \tau;$ $F_n(\tau) = \exp[-(n+1)\tau];$ $F_n(\tau) = [1 - (n+1)\tau / 2] \times$ $\times \{1 - H[\tau - 2 / (n+1)]\}$ $F_n(\tau) = \exp(-\tau) J_0[(n+1)^2 - 1]^{1/2}$	$w(\theta, \tau);$ $w(\theta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\tau) P_n(\cos \theta)$
Гладкая цилиндрическая	$F(\tau) = \exp(-\tau / 2) \cos(\tau / 2);$ $F(\tau) = 2 / \pi \exp(-\tau / 2) (\tau^2 - \theta^2)^{-1/2} \times$ $\times \text{ch} \left[ (\tau^2 - \theta^2)^{1/2} / 2 \right];$ $F_n(\tau) = \exp(-\tau / 2) J_0 \left[ \tau (n^2 - 1/4) \right]^{1/2};$ $F_n(\tau) = (1 - m\pi / 2) [1 - H(\tau - 2 / n)]$	$w(\theta, \tau);$ $w(\theta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\tau) \cos n\theta$
Подкрепленная цилиндрическая	$F_{nm}(\tau) = [1 - \tau / (2M_{nm})] [1 - H(\tau - 2M_{nm})];$ $M_{nm} = (n^2 + m_*^2)^{1/2}; \quad m_* = m\pi / l;$ $F_{nm}(\tau) = \exp(-\tau / 2) J_0 \left[ (n^2 + m^2 - 1/4)^{1/2} \tau \right]$	$w(x, \theta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} w_{nm}(\tau) \times$ $\times \cos n\theta \cos m_* x$

Принятые обозначения:  $\tau = ct / R$ ;  $R$  - радиус оболочки;  $P_n(\cos \theta)$  - полиномы Лежандра;  $J_0(\cdot)$  - функция Бесселя первого рода нулевого порядка;  $l$  - расстояние между периодически расположенными шпангоутами.

7.7.6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

Акустическая модель сжимаемого газа позволяет описать распространение волн лишь сравнительно слабой интенсивности. Для описания более интенсивных волн следует привлекать нелинейные уравнения газовой динамики. В этом случае при решении задач о поведении и динамической устойчивости тонкостенных конструкций, взаимодействующих с ударными волнами в воздухе, можно пренебречь влиянием деформации конструкции на величину давления на ее поверхности. Это предположение позволяет разделить задачу взаимодействия среды и конструкции на два этапа.

На первом этапе решают задачу о дифракции волны сильного разрыва на жестких поверхностях [16, 37]. Тогда аэродинамическая нагрузка, возникающая при действии волны давления, может быть приближенно аппроксимирована подвижной нагрузкой. Так, при дифракции плоской ударной волны на цилиндрической оболочке (см. рис. 7.7.3) давление, возникающее на поверхности оболочки, аппроксимируется выражением

$$p(\theta, t) = p^0 \exp[-\tau(v_0 t - \xi)] \cos^2 \theta H(v_0 t - \xi) H\left(\frac{\pi}{2} - |\theta|\right),$$

где



$$\eta = \frac{p^0}{v_0 J}; \quad J = \int_0^{\infty} p(0, t) dt; \quad \xi = R(1 - \cos \theta);$$

здесь  $v_0$  - скорость движения фронта волны;  $p^0$  - давление в точках критической образующей цилиндра (на линии встречи с фронтом) в момент прихода волны; его определяют через параметры газа в невозмущенной области и число Маха фронта. Для бесконечно длинной цилиндрической оболочки установлены пределы изменения параметров подобия, когда изменение давления вследствие деформации не превышает 10% [37].

На втором этапе каким-либо численным методом интегрируют уравнения движения деформируемой конструкции с начальным прогибом при заданной внешней подвижной нагрузке. Многочисленные результаты решений и экспериментальных исследований несущей способности и динамической устойчивости замкнутых цилиндрических и конических оболочек, а также пластин и панелей при действии на них ударных волн с различной ориентацией фронта приведены в работах [16, 37]. В ряде случаев граница устойчивости достаточно хорошо описывается выражением вида (7.7.4). Например, при действии волны давления на коническую оболочку (фронт волны перемещается параллельно оси конуса) одна из асимптот гиперболы соответствует статическому критическому внешнему давлению  $p_*$ , найденному для цилиндрической оболочки с радиусом, равным среднему радиусу усеченной конической оболочки, и длиной, равной длине образующей конуса. Другая асимптота

$$J_* = 5\alpha a_0 R_0 (h/R)^2 \cos \alpha,$$

где  $a_0$  - скорость звука в материале;  $R_0, \alpha$  - средний радиус и угол полураствора конуса.

## Глава 7.8

### УСТОЙЧИВОСТЬ АЭРО- И ГИДРОУПРУГИХ СИСТЕМ

#### 7.8.1. ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ В ТЕОРИИ АЭРО- И ГИДРОУПРУГОСТИ

Деформируемость конструкций, обтекаемых потоком жидкости или газа, обуславливает явления потери устойчивости, происходящие при достаточно большой скорости обтекания. Анализ поведения конструкции и определение критических параметров потери устойчивости приводит к необходимости решения связанных линейных и нелинейных краевых задач аэро- и гидроупругости [2, 4]. Решение этих задач основано на использовании методов механики деформируемого твердого тела и строительной механики, с одной стороны, и методов аэро- и гидромеханики - с другой. Для решения задач аэро- и гидроупругости в полном объеме требу-

ется учитывать сложное воздействие многих факторов: аэро- и гидродинамических сил, сил упругости, сил инерции, демпфирующих сил различной природы, температурных воздействий, электромагнитного поля, а также взаимодействие конструкции с системой управления.

Задачи аэро- и гидродинамической устойчивости можно разделить на две группы. К первой группе относят статические задачи, при решении которых используют соотношения стационарной аэро- и гидродинамики установившихся течений без учета сил инерции, демпфирующих сил и других временных факторов. К задачам статической устойчивости относят многие задачи выпучивания пластинок, оболочек, панелей обшивки летательных аппаратов, скручивания крыльев. Статическую форму потери устойчивости аэроупругих и гидроупругих систем называют дивергенцией, а величину скорости потока  $U_d$ , при которой происходит данное явление, - критической скоростью дивергенции. Расчет дивергенции сводится к определению критических величин параметров конструкции и потока, обеспечивающих возможность существования отклоненных (слабоискривленных) форм конструкции. Уравнения, применяемые для расчета дивергенции, могут быть записаны в виде

$$Q_E(q) = Q_A(q), \quad (7.8.1)$$

где  $q$  - обобщенные перемещения, а  $Q_E(q), Q_A(q)$  - выражения для зависящих от перемещений сил упругости и сил, описывающих действие потока на конструкцию. Для задач о дивергенции, рассматриваемых в линейной постановке, уравнения (7.8.1) и соответствующие граничные условия являются линейными однородными дифференциальными или интегродифференциальными соотношениями относительно  $q$  и составляют задачи на собственные значения, для которых могут применяться разработанные методы решения бифуркационных задач (см. гл.7.3).

Ко второй группе относят динамические задачи, исследование которых в традиционной постановке основывается на рассмотрении малых колебаний конструкций в окрестности положения равновесия. Характерными здесь являются изгибно-крутильный флаттер крыльев большого удлинения (классический флаттер), изгибный флаттер пластинок (панельный флаттер), флаттер оболочек и других тонкостенных конструкций, рулевой и элеронный флаттер, срывной флаттер винтов. Отметим существенные различия механизмов возникновения указанных видов флаттеров. Так, возникновение изгибно-крутильного флаттера обусловлено взаимодействием изгибных и крутильных форм колебаний, а панельного флаттера - чисто изгибными колебаниями. Под флаттером в широком смысле понимают самовозбуждающиеся колебания упругой системы в потоке. Эти колебания возникают, если энергия,

получаемая конструкцией за цикл колебаний от потока, превышает затраты энергии, необходимые для преодоления конструкционного демпфирования. Скорость потока  $U_f$ , при которой начинается флаттер, называют критической скоростью флаттера.

Уравнения, применяемые для решения задач флаттера, могут быть представлены в форме

$$Q_E(q) + Q_I(q) + Q_D(q) = Q_A(q), \quad (7.8.2)$$

где  $Q_I$  и  $Q_D$  - силы инерции и внутреннего демпфирования. При линейной постановке задач о флаттере зависимости  $Q_E(q), Q_I(q), Q_D(q), Q_A(q)$  представляют собой линейные однородные выражения первой степени относительно обобщенной координаты  $q$ , а уравнения (7.8.2) и соответствующие граничные условия составляют задачу на собственные значения. В отличие от большей части задач о дивергенции задачи о флаттере являются существенно неконсервативными и их исследование сводится к рассмотрению так называемых несамосопряженных краевых задач. Методы решения этих задач приведены в работах [4, 32, 55, 48].

**7.8.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ АЭРО-И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ**

Приведем выражения для аэро- и гидродинамических сил  $Q_A = Q_A(q)$ , прикладываемых к поверхности упругих тел перпендикулярно к потоку, для различных схем обтекания и при различных числах Маха  $M = U/a_s$ . Здесь  $U, a_s$  - скорости движения среды и распространения звука в невозмущенном потоке. Геометрические характеристики тонких профилей (несущих поверхностей) могут быть заданы при помощи уравнения средней линии  $w = w(x, t)$  и толщины  $h = h(x)$  или срединной поверхности  $w = w(x, y, t)$  и толщины  $h = h(x, y)$ . Соответственно предполагают, что поток ориентирован в направлении оси  $Ox$  прямоугольной системы координат  $Oxyz$ . Через  $\alpha(x, y) = -dw/dx$  обозначают местный угол атаки профиля или несущей поверхности, а через  $\delta$  - максимальную толщину тела  $\delta = \max h(x, y)$ . Прикладываемую к телу в положительном направлении оси  $Oz$  безразмерную обобщенную силу  $Q_A$  выражают через перепад давлений  $\Delta P(x, y, t)$  на нижней и верхней поверхностях тела по формуле

$$Q_A = \frac{\Delta p}{\rho U^2 / 2}, \quad (7.8.3)$$

где  $\rho$  - плотность невозмущенного потока. В качестве обобщенной координаты  $q$ , фигурирующей в (7.8.1), (7.8.2), в случае установившегося обтекания примем  $q = dw(x, y)/dx = -\alpha$ , а в случае неустановившегося потока

$$q = (\partial / \partial x + U^{-1} \partial / \partial t) w(x, y, t).$$

**Формулы для аэро- и гидродинамических сил, используемые при расчете дивергенции.** Распределение сил на профиль в плоском дозвуковом ( $M < 1$ ) установившемся потоке сжимаемой жидкости имеет вид [55]

$$Q_A = \frac{4}{\pi \beta} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{1/2} \oint_{-1}^1 \left( \frac{1+\xi}{1-\xi} \right)^{1/2} \frac{dw}{dx} \frac{d\xi}{x-\xi}, \quad (7.8.4)$$

где  $\beta = \left( 1 - M^2 \right)^{1/2}$  - коэффициент Прандтля.

В (7.8.3) использованы безразмерные координаты  $x' = x/b, \xi' = \xi/b$ , где  $2b$  - хорда крыла, причем штрихи у безразмерных величин здесь и в последующих выражениях опущены. Интеграл в (7.8.4) понимается в смысле главного значения по Коши. Случаю идеальной несжимаемой жидкости соответствует  $\beta = 1$ .

При установившемся сверхзвуковом обтекании тонких профилей ( $M > 1, M\delta \ll 1$ ) потоком сжимаемого газа для расчета приращения давления применяют формулу Аккерета:

$$Q_A = -\frac{4}{\beta} \frac{dw}{dx}, \quad (7.8.5)$$

основанную на предположении, что местное приращение давления пропорционально местному углу атаки профиля.

При гиперзвуковых скоростях обтекания в диапазоне  $M^2 \gg 1, M \ll \delta^{-1}$  проявляется существенное влияние распределения толщин профиля  $h(x)$  на положение аэродинамического центра и на распределение давлений вдоль хорды крыла. В этом случае для расчета распределения приращений давления можно применять так называемую поршневую теорию

$$Q_A = -\frac{4}{M} \left[ 1 + \left( \frac{1+\alpha}{4} \right) M \frac{dh}{dx} \right] \frac{dw}{dx}. \quad (7.8.6)$$

Согласно этой теории влияние возмущений носит локальный характер и каждая частица газа движется практически лишь в поперечном направлении. Через  $\alpha$  в (7.8.6) обозначено отношение теплоемкостей при постоянном давлении и объеме.

В диапазоне  $M^2 \gg 1, M\delta = 0(1)$  для расчета прикладываемых к профилю сил можно применять следующее выражение [64]:

$$Q_A = -4 \frac{dh}{dx} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-2} \left( \frac{dw}{dx} \right). \quad (7.8.7)$$

Для несущих поверхностей (крылья малых удлинений) в трехмерных установившихся дозвуко-

вых и сверхзвуковых потоках в предположении, что скорости возмущений в направлении потока, т.е. вдоль оси  $Ox$ , много меньше скоростей возмущений вдоль вертикальной оси  $Oz$  и поперечной оси  $Oy$  в плоскости крыла, применима формула [55, 64]

$$Q_A = \frac{4}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-s(x)}^{s(x)} \ln \left[ \frac{s^2(x) - y\eta - \sqrt{s^2(x) - y^2} \times \dots}{s(x)|y - \eta|} \dots \right. \\ \left. \times \sqrt{s^2(x) - \eta^2} \right] \frac{\partial w}{\partial x} d\eta, \quad (7.8.8)$$

где функция  $s(x)$  задает форму несущей поверхности в плане (в плоскости  $Oxy$ ). Если упругие деформации вдоль размаха крыла пренебрежимо малы ( $\partial w / \partial x$  зависит только от  $x$ ), то выражение (7.8.7) упрощается

$$Q_A = -4 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sqrt{s^2(x) - y^2} \frac{dw}{dx} \right]. \quad (7.8.9)$$

При гиперзвуковых скоростях ( $M^2 \gg 1$ ) обтекания несущих поверхностей применяют выражение для аэродинамических сил

$$Q_A = -\frac{4}{M} \left[ 1 + \frac{\alpha + 1}{4} M \frac{dh}{dx} \right] \frac{dw}{dx} - \\ - \frac{2}{M^3} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \int_{x_{LE}}^x (x - \xi) \frac{\partial w(\xi, y)}{\partial \xi} d\xi, \quad (7.8.10)$$

где  $x, \xi, y$  - безразмерные переменные, а  $x_{LE}(y)$  - безразмерная координата передней кромки крыла. Если  $\delta \gg 1/M^2$ , то вторым членом в формуле (7.8.9) можно пренебречь и получить выражение для аэродинамической силы, определяемой поршневой теорией

**Формулы для аэро- и гидродинамических сил, применяемых при расчете флаттера.** Методы расчета флаттерных характеристик основаны на анализе гармонических колебаний, совершаемых конструкцией в потоке непосредственно перед возникновением флаттера. Поэтому ниже выражения для аэро- и гидродинамических сил приведены в предположении о гармоническом характере колебаний

При гармонических колебаниях профиля в плоском дозвуковом потоке ( $M^2 \gg 1$ ) несжимаемого газа или идеальной жидкости распределение сил, действующих на профиль, описывается выражением

$$Q_A = \frac{4}{\pi} \left\{ [1 - C(k)] \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{1/2} \int_{-1}^1 \left( \frac{1+\xi}{1-\xi} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \right. \right. \\ \left. \left. + ik \right) w(\xi) d\xi + \oint_{-1}^1 \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{1/2} \left( \frac{1+\xi}{1-\xi} \right)^{1/2} \frac{1}{x-\xi} - \right. \\ \left. - \frac{ik}{2} \ln \left[ \frac{1-x\xi + (1-x^2)^{1/2} (1-\xi^2)^{1/2}}{1-x\xi - (1-x^2)^{1/2} (1-\xi^2)^{1/2}} \right] \right\} \times \\ \times \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + ik \right) w(\xi) d\xi, \quad (7.8.11)$$

где  $k = \omega b / U$  - приведенная частота;  $\omega$  - частота;  $x, \xi$  - безразмерные координаты;  $C(k)$  - функция Теодорсена  $C(k) = H_1^2(k) / [H_1^2(k) + iH_0^2(k)]$ ;  $H_n^2(k)$  - цилиндрические функции 2-го рода  $n$ -го порядка.

При трансзвуковом обтекании ( $M \approx 1, k \gg |1 - M|$ ) колеблющегося профиля может быть использовано следующее выражение для поперечных аэродинамических воздействий:

$$Q_A = -4 \left( \frac{\partial}{\partial x} + ik \right) \int_{-1}^x \frac{\exp[-ik(x-\xi)/2]}{\sqrt{2\pi ik(x-\xi)}} \times \\ \times \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + ik \right) w(\xi) d\xi. \quad (7.8.12)$$

В случае сверхзвукового обтекания ( $M > 1, M\delta \ll 1$ ) профиля, колеблющегося в потоке сжимаемого газа, выражение для аэродинамических сил имеет вид [55, 64]

$$Q_A = -\frac{4}{\beta} \left( \frac{\partial}{\partial x} + ik \right) \int_{-1}^x \exp[-ikM^2(x-\xi)/\beta^2] \times \\ \times J_0 \left( \frac{kM(x-\xi)}{\beta^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + ik \right) w(\xi) d\xi. \quad (7.8.13)$$

При сверхзвуковых скоростях обтекания и малых значениях приведенной частоты  $k$  (квазистационарное приближение) можно пользоваться формулой

$$Q_A = -\frac{4}{\beta U} \left[ \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right]. \quad (7.8.14)$$

В случае гиперзвукового обтекания, т.е. при

$M^2 \gg 1$ ,  $M\delta=0(1)$ , выражение для  $Q_A$  может быть представлено в виде

$$Q_A = -\frac{4}{M} \left[ 1 + \left( \frac{\alpha + 1}{4} \right) M \frac{dh}{dx} \right]^{(\alpha+1)/(\alpha-1)} \times \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i\omega}{U} \right) w(x), \quad (7.8.15)$$

если будем предполагать, что  $|dh/dx| \gg |(\partial/\partial x + i\omega/U)w|$ , и использовать представления поршневой теории. Линеаризованная формула поршневой теории, применяемая при расчете флаттера плоских и цилиндрических панелей, имеет вид [4, 55]

$$Q_A = -\frac{4}{MU} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (7.8.16)$$

Для слабоискривленной (почти плоской) несущей поверхности, совершающей низкочастотные колебания в дозвуковом ( $M < 1$ ,  $M\delta \ll 1$ ) потоке газа, для описания распределения сил используется следующее представление:

$$Q_A = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i\omega}{U} \right) \int_{-s(x)}^{s(x)} \ln \left( \frac{s^2(x) - \eta y - \dots}{s(x)y - \eta} \dots \right) \dots \left( \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{i\omega}{U} \right) w(\eta) d\eta. \quad (7.8.17)$$

Приведем также выражение для распределения аэродинамических сил, действующих на колеблющуюся несущую поверхность в гиперзвуковом потоке ( $M^2 \gg 1$ ):

$$Q_A = -\frac{4}{M} \left[ 1 + \left( \frac{\alpha + 1}{4} \right) M \frac{\partial h}{\partial x} \right] \left( \frac{\partial}{\partial x} + ik \right) w(x, y) - \frac{2}{M^3} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \int_{x_{LE}}^x (x - \xi) \exp[-ik(x - \xi)] \times \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + ik \right) w(\xi, y) d\xi. \quad (7.8.18)$$

Выражение (7.8.18) записано в безразмерных переменных и получено при условии удержания членов порядка  $\delta / M$ ,  $\delta / M^3$ ,  $\delta^2$ .

### 7.8.3. ЗАДАЧА АЭО- И ГИДРОУПРУГОСТИ ДЛЯ СТЕРЖНЕЙ

Для расчета дивергенции и флаттера многих реальных конструкций или их элементов широко применяют модель упругого стержня, нагруженного аэро- и гидроупругими силами.

Модель стержня позволяет описать происходящие в конструкции изгибные, крутильные и сдвиговые деформации. Для большей части задач статической и динамической устойчивости можно ограничиться рассмотрением моделей прямолинейных стержней или балок и пренебречь деформацией сдвига и вращательной инерцией в уравнении изгиба и секториальной жесткостью в уравнении кручения, если выполнены условия:

$$\frac{EJ}{GA l^2} \ll 1; \quad \frac{\mu}{m l^2} \ll 1; \quad \frac{\mu \omega^2}{GA} \ll 1; \quad \frac{EJ \omega}{GJ_k l^2} \ll 1,$$

где  $EJ$ ,  $GJ_k$ ,  $GA$ ,  $EJ_\omega$  - жесткости на изгиб, кручение, сдвиг и секториальная жесткость;  $l$  - длина балки;  $m$  и  $\mu$  - масса и момент инерции единицы длины стержня;  $\omega$  - частота колебаний.

В этом случае дифференциальные уравнения малых колебаний, описывающие распределение прогибов  $w(y, t)$  и углов закручивания  $\vartheta(y, t)$ , имеют вид [4, 64]

$$\left( 1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - mx_m \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = Q_A^L; \quad (7.8.19)$$

$$- \left( 1 + b_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( GJ_k \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + mr^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} - mx_m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Q_A^M,$$

где  $b_1$ ,  $b_2$  - коэффициенты внутреннего демпфирования, отвечающие модели Фойгта;  $x_m$  - расстояние между осью жесткости, расположенной вдоль оси  $y$ ;  $r$  - радиус инерции сечения относительно оси жесткости;  $Q_A^L$  и  $Q_A^M$  - соответственно аэродинамическая сила и аэродинамический момент, отнесенные к единице длины крыла. Для решения конкретных задач устойчивости с использованием уравнений (7.8.19) требуется задание аэродинамических нагрузок и соответствующих граничных условий. Формулы для  $Q_A^L$  и  $Q_A^M$  получаются при помощи интегрирования вдоль хорды крыла выражений для перепадов давлений и их распределенных моментов относительно упругой оси (оси жесткости).

Для тонких стреловидных крыльев (рис.7.8.1) большого удлинения с углом стреловидности  $\chi$  и хордой  $2b$ , совершающих гармонические изгибно-крутильные колебания с частотой  $\omega$ , подъемная сила  $Q_A^L$  и момент  $Q_A^M$  задаются следующими выражениями:

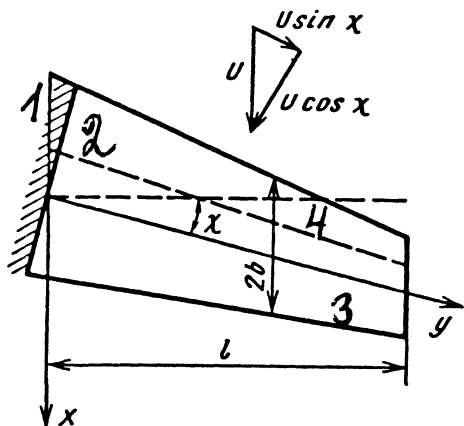


Рис. 7.8.1. Стреловидное крыло большого удлинения: 1 - эффективное корневое сечение; 2 - действительное корневое сечение; 3 - ось фокусов; 4 - ось жесткости

$$Q_A^L = \pi \rho b^2 \cos \chi \left( -\frac{d^2 w}{dt^2} + U \frac{d\vartheta}{dt} - x_k \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} \right) + 2\pi \rho b U \cos \chi \left[ -\frac{dw}{dt} + U\vartheta + \left( \frac{b}{2} - x_k \right) \frac{d\vartheta}{dt} \right] Ck; \tag{7.8.20}$$

$$Q_A^M = \pi \rho b^2 \cos \chi \left[ -x_k \frac{d^2 w}{dt^2} - U \left( \frac{b}{2} - x_k \right) \frac{d\vartheta}{dt} - \left( \frac{b^2}{8} + x_k^2 \right) \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} \right] + 2\pi \rho U b \cos \chi \left[ \frac{b}{2} + x_k \right] \left[ -\frac{dw}{dt} + U\vartheta + \left( \frac{b}{2} - x_k \right) \frac{d\vartheta}{dt} \right] Ck.$$

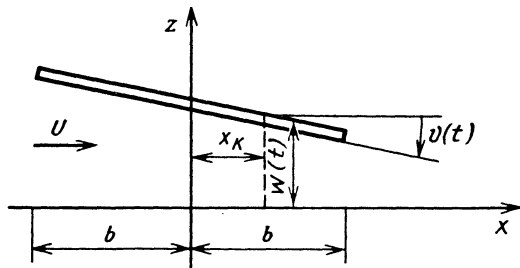


Рис. 7.8.2. Обобщенные координаты изгибно-крутальных форм колебаний крыла большого удлинения

Здесь  $w$  - поперечные смещения точки с координатой  $x_k$  (рис.7.8.2);  $Ck$  - комплексная функция приведенной частоты  $k = \omega b / U$  (функция Теодорсена). Если изменить в выражениях (7.8.20) функцию  $Ck$  на значение  $C(0)$ , то получим выражения для подъемной силы и момента, соответствующие квазистационарной теории. Для описания колебаний крыльев большого удлинения в потоке применяют также более грубые аппроксимации сил и моментов, основанные на теории стационарного обтекания:

$$Q_A^L = 2\pi \rho U b \left( -\frac{dw}{dt} + U\vartheta \right);$$

$$Q_A^M = -2\pi \rho U b \left( -\frac{dw}{dt} + U\vartheta \right) \left( \frac{b}{2} + x_k \right).$$

При анализе динамической устойчивости используют аппроксимации распределений прогибов  $w(y,t)$  и углов закручивания  $\vartheta(y,t)$  в виде произведений функций пространственной координаты (форм колебаний) и функций времени:

$$w(y,t) = w(y)e^{\lambda t}; \tag{7.8.21}$$

$$\vartheta(y,t) = \vartheta(y)e^{\lambda t};$$

где  $\lambda = \nu + i\omega$  - характеристический показатель;  $\nu$  и  $\omega$  - действительная и мнимая части характеристического показателя. В зависимости от знака  $\nu$  меняется характер колебаний: при  $\nu = 0$  - колебания периодические с частотой  $\omega$ ; при  $\nu < 0$  - затухающие и при  $\nu > 0$  - неограниченно возрастающие. Подставляя выражения (7.8.21) в уравнения колебаний крыла, получают некоторую задачу на собственные значения. Задача о флаттере состоит в анализе поведения показателей  $\lambda$  в зависимости от скорости обтекания крыла  $U$ .

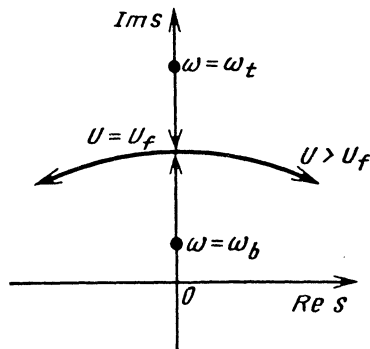


Рис. 7.8.3. Миграция характеристического показателя от скорости обтекания

Если все характеристические показатели лежат в левой полуплоскости комплексного переменного (рис.7.8.3), то относительное равновесие крыла устойчиво. Наименьшее значение скорости, при котором реализуется переход хотя бы одного из характеристических показателей в правую полуплоскость, является критической скоростью. Если переход в правую полуплоскость происходит не через начало координат ( $\lambda \neq 0$ ), то критическую скорость называют скоростью флаттера,  $U=U_f$ , а возникающую колебательную неустойчивость - флаттером. Если переход характеристического показателя  $\lambda$  в правую полуплоскость происходит через начало координат ( $\lambda=0$ ), то реализуется статическая форма потери устойчивости - дивергенция. Критическую скорость называют скоростью дивергенции  $U=U_d$ .

#### 7.8.4. УСТОЙЧИВОСТЬ ТРУБОПРОВОДОВ

Уравнение малых поперечных колебаний упругого прямолинейного трубопровода длины  $l$  с протекающей в нем жидкостью имеет вид [47]

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E_s J \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + c \frac{\partial w}{\partial t} + (m + m_1) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2Um_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + m_1 U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (7.8.22)$$

где  $EJ$  - жесткость трубы на изгиб;  $w(x,t)$  - поперечный прогиб;  $E_s J$ ,  $c$  - коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования;  $m$ ,  $m_1$  - масса трубы и жидкости на единицу длины;  $U$  - скорость потока. Первое слагаемое в (7.8.22) означает упругую реакцию трубы при поперечном изгибе, второе - предварительное сжатие, третье и четвертое - внутреннее и внешнее демпфирование, пятое - инерцию трубы с жидкостью, шестое и седьмое - кориолисову и центробежную силы, действующие на жидкость. При различных значениях параметров уравнения (7.8.22) и соответствующих граничных условий гидроупругая неустойчивость может проявляться либо в форме дивергенции, либо в форме флаттера. Для шарнирно опертой по краям трубы, не испытывающей предварительного продольного сжатия ( $N=0$ ), дивергенция возможна при  $m_1 U^2 \geq \pi^2 EJ/l^2$ . Для консольно защемленной трубы дивергенция оказывается невозможной при любой величине  $m_1 U^2$ . В этом случае торцовая реакция вытекающей жидкости представляет собой следящую силу и не может удержать трубу в статическом изогнутом состоянии. Поэтому для консольной трубы потеря устойчивости ре-

ализуется в форме флаттера. Детали расчета динамической неустойчивости трубопровода по методу Галеркина с использованием двучленного разложения содержатся в работах [47, 51].

#### 7.8.5. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОХО ОБТЕКАЕМЫХ ТЕЛ В ПОТОКЕ

Для плохообтекаемых тел и сопряжений с острыми кромками при определенных режимах обтекания происходит срыв потока и образование вихрей, обуславливающие аэро- и гидроупругую неустойчивость. Такие явления динамической неустойчивости, как флаттер, резонансное возбуждение колебаний при периодическом срыве вихрей, галопирование, наблюдаются в определенных диапазонах чисел Рейнольдса  $Re = lU/\nu$  и Струхала  $Sh = \omega l/U$ , где  $l$  - характерный размер тела;  $\nu$  - кинематическая вязкость;  $\omega$  - частота колебаний. Многие процессы, обуславливающие процесс обтекания, являются родственными и поэтому строго не разграничены.

Характерным для высоких строительных сооружений является возбуждение аэроупругих колебаний при малых числах Струхала  $Sh \leq 0,05$ , называемых галопированием. Причина этого вида неустойчивости обусловлена отрицательными величинами коэффициента подъемной или поперечной силы соответствующего поперечного сечения сооружения. Колебания при галопировании характеризуются в основном лишь одной степенью свободы и возможностью применения квазистационарной аэродинамической теории [55], что существенно упрощает расчеты. Пусть  $\dot{w}$  - скорость перемещения тела нормально потоку;  $\alpha = \arctg(\dot{w}/U)$  - угол, под которым происходит набегание потока на профиль;  $U_r$  - относительная скорость (рис. 7.8.4).

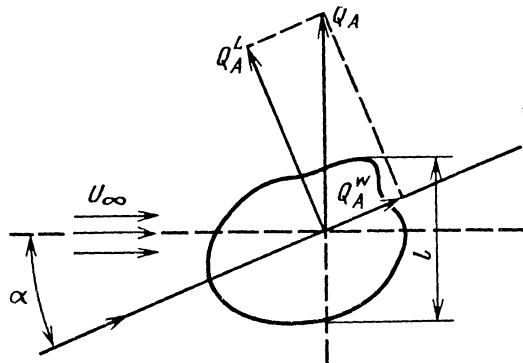


Рис. 7.8.4. Плохообтекаемое тело

Тогда

$$Q_A^L = \frac{1}{2} \rho C_L U_r^2; \quad Q_A^W = \frac{1}{2} C_W \rho l U_r^2;$$

$$U_r = U / \cos \alpha; \quad Q_A = Q_A^L \cos \alpha + \\ + Q_A^W \sin \alpha = \frac{1}{2} \rho C_F U^2,$$

где  $C_L$ ,  $C_W$  - коэффициенты подъемной силы и силы сопротивления.

Если пренебречь конструкционным демпфированием, то условие  $(dQ_A / d\alpha) < 0$ , означающее возможность возникновения аэроупругой неустойчивости, будет иметь вид

$$\left( \frac{dC_L}{d\alpha} + C_W \right)_{\alpha \rightarrow 0} < 0.$$

С учетом конструкционного демпфирования достаточный критерий возникновения аэроупругой динамической неустойчивости имеет вид  $\delta_a + \delta_s \leq 0$ , где аэродинамический логарифмический декремент  $\delta_a = \pi r U (dC_F / d\alpha) / (2m\omega)$ ;  $\delta_s$  - логарифмический декремент конструкционного демпфирования. Возбуждение аэроупругих колебаний возможно лишь при отрицательном  $\delta_a$ , который по абсолютной величине должен превышать логарифмический декремент  $\delta_s$  конструкционного демпфирования в неподвижном воздухе.

### 7.8.6. ФЛАТТЕР ПЛОСКИХ ПАНЕЛЕЙ

Панельный флаттер возникает при сверхзвуковых скоростях обтекания и не носит взрывной характер, приводящий к мгновенному разрушению конструкций. Поперечные колебания при панельном флаттере происходят с некоторыми предельными амплитудами, определяемыми при помощи нелинейных теорий, учитывающих немалые деформации. Однако расчет критических значений параметров (скорости обтекания, частот и толщин панели и др.), при которых возникает панельный флаттер, можно выполнить на основе линейных моделей [4, 55, 64].

Уравнение малых колебаний плоской панели шириной  $a$  по потоку ( $0 \leq x \leq a$ ) и бесконечно протяженной в поперечном к потоку направлении с использованием квазистационарного выражения для аэродинамической нагрузки  $Q_A$  имеет вид [64]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \times \right. \\ \left. \times \frac{a}{U} \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \frac{m a^4}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (7.8.23)$$

Здесь использованы безразмерные переменные и обозначения [штрихи у безразмерных переменных в (7.8.23) опущены]

$$w' = \frac{w}{a}; \quad x' = \frac{x}{a}; \quad N'_x = -\frac{a^2 N_x}{D};$$

$$\alpha = \frac{\rho U^2 a^3}{D(M^2 - 1)^{1/2}}.$$

Кромки панели могут быть опертыми или защемленными. Определение критических параметров потери устойчивости основывается на представлении поперечных прогибов в форме  $w(x, t) = w(x) \exp(\lambda t)$  с комплексным характеристическим показателем  $\lambda = \nu + i\omega$ . Подстановка данного представления в (7.8.23) приводит к дифференциальному уравнению для  $w(x)$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + N_x \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha \frac{dw}{dx} - r w = 0,$$

где через  $r$  обозначено собственное значение

$$r = r_1 + i r_2 = -\alpha \left( \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \right) - \alpha \lambda \left( \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \right) \times$$

$$\times \frac{a}{U} - \lambda \frac{m a^4}{D} = -\pi g_\lambda \frac{\lambda}{\omega_r} - \pi^4 \frac{\lambda^2}{\omega^2};$$

$$g_\lambda = \frac{(M^2 - 2)}{(M^2 - 1)^{3/2}} \frac{\rho U}{m \omega_r}; \quad \omega_r = \pi^2 \left( \frac{D}{m a^4} \right)^{1/2}$$

$\alpha / \chi^4$

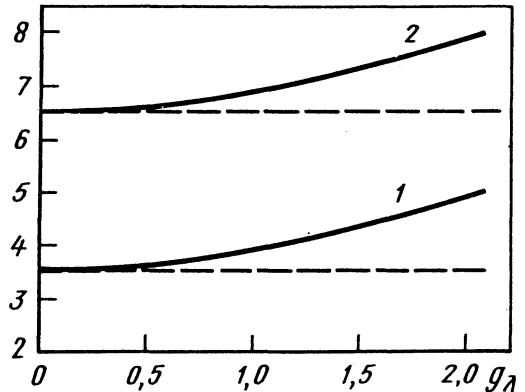


Рис. 7.8.5. Зависимость критической скорости флаттера от коэффициента демпфирования

Подробное описание результатов решения задачи о флаттере панели в данной постановке содержится в работе [64]. Границы флаттера для опертой и защемленной панелей показаны на рис. 7.8.5 соответственно кривыми 1 и 2.

## 7.8.7. ФЛАТТЕР КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ

Малые поперечные колебания в сверхзвуковом потоке газа предварительно напряженных пологих цилиндрических панелей (рис. 7.8.6) описываются уравнениями [4, 64]

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \\ - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\rho U^2}{(M^2 - 1)^{1/2}} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{1}{U} \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \frac{\partial w}{\partial t} \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0; \\ \nabla^4 F - \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \end{aligned}$$

где  $D$  - цилиндрическая жесткость;  $R$  - радиус кривизны;  $F$  - функция усилий. Для прямоугольной в плане панели со сторонами  $a$  (по потоку) и  $b$  (поперек потока), обтекаемой газом в направлении оси (см. рис. 7.8.6), решение задачи о флаттере проводится с использованием безразмерных величин  $x' = x/a$ ;  $y' = y/a$ ;

$$\gamma' = Eha^3 / DR; \quad \alpha = \rho U^2 a^3 / \left[ D(M^2 - 1)^{1/2} \right]$$

(штрихи в дальнейшем опущены). Определение критической величины динамического давления  $\alpha$  основывается на рассмотрении частных решений вида

$$w(x, y, t) = W_0 \sin m\pi x \cos n\pi y \exp(i\omega t);$$

$$F(x, y, t) = F_0 \sin m\pi x \cos n\pi y \exp(i\omega t).$$

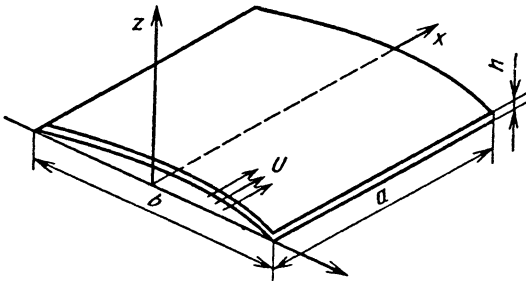


Рис. 7.8.6. Схема обтекания цилиндрической панели

Критическая безразмерная величина динамического давления для пологой цилиндрической оболочки может быть представлена в виде суммы двух слагаемых: соответствующей величины для плоской панели и поправки, обусловленной кривизной панели.

Для конкретных параметров панелей поправочный член может быть в несколько раз больше значения критического параметра для плоской панели.

## 7.8.8. ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ АЭРОУПРУГИХ СИСТЕМ

Анализ закритического поведения аэроупругих систем важен, так как во многих случаях превышение критической скорости флаттера не вызывает мгновенного разрушения конструкции, а приводит к установившимся колебаниям. Характеристики этих колебаний (амплитуды и частоты) используют для оценки времени функционирования конструкции до разрушения. Необходимо рассматривать конечные деформации и геометрическую нелинейность. Наряду с геометрическими нелинейностями для расчета критических параметров потери устойчивости и поведения конструкции при флаттере в ряде случаев важен учет неупругих свойств материалов и аэродинамических нелинейностей. Учет нелинейных факторов позволяет, в частности, обнаружить статические и динамические формы потери устойчивости при немалых возмущениях, которые могут реализоваться при меньших значениях сжимающих нагрузок и скоростей потока, чем те, которые получаются на основе линейной теории. В тонкостенных конструкциях конечные прогибы вызывают растягивающие усилия в срединной плоскости. Так, рассматривая в качестве модели обшивки бесконечно длинную пластину, лежащую на упругом основании и обтекаемую газом, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + kw + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\ + \rho_0 h \epsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\rho p}{a_y} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + U \right) = 0, \end{aligned} \quad (7.8.24)$$

где продольные усилия в пластине

$$N_x = N_0 + \frac{c}{2\lambda_x} \int_0^{\lambda_x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Представив частные решения уравнения (7.8.24) в виде

$$w(x, y, t) = A \sin \left( \frac{\pi y}{\lambda_y} \right) \sin \left( \Omega t - \frac{\pi x}{\lambda_x} \right),$$

получим следующее выражение для амплитуды установившихся колебаний [4]:

$$A = \frac{h}{S} \sqrt{(U/U_*)^2 - 1}; \quad S = \frac{\pi \sqrt{c/\rho_0}}{2\lambda_x h \Omega_0}.$$

В приведенных выше соотношениях  $k$  - жесткость основания;  $c$  - некоторый коэффициент жесткости ( $0 \leq c \leq Eh/(1 - \mu^2)$ ), характеризу-



ющий сопротивление уменьшению длины пластинки;  $\Omega_0$  - частота собственных колебаний;  $\lambda_x, \lambda_y$  - длины полуволн;  $U_*$  - критическая величина скорости. Если коэффициент жесткости  $c$  принимает максимальное значение, то амплитуда имеет порядок  $h$  даже при двукратном превышении критической скорости. Анализ закритического поведения криволинейных панелей с учетом аэродинамической нелинейности приведен также в работе [4].

### 7.8.9. ЭФФЕКТЫ ДЕСТАБИЛИЗАЦИИ АЭРО- И ГИДРОУПРУГИХ СИСТЕМ

Динамическая устойчивость упругих систем, находящихся в потоке жидкости или газа, существенно зависит от взаимного расположения парциальных собственных частот. Сближение парциальных частот может послужить причиной снижения критической скорости флаттера, т.е. дестабилизации невозмущенного состояния системы. Напротив, "разводя" некоторые парциальные частоты, можно добиться стабилизации. Явление стабилизации (дестабилизации) упругих панелей, находящихся в сверхзвуковом потоке газа, с подвешенными массами изложено в работе [12]. Если к упругой панели при помощи вязкоупругой подвески присоединена относительно малая дополнительная масса, то следует ожидать, что при этом изменится и критическая скорость флаттера. Ответ на вопрос о характере изменения условий устойчивости не может быть дан в общей форме вследствие сложности задачи.

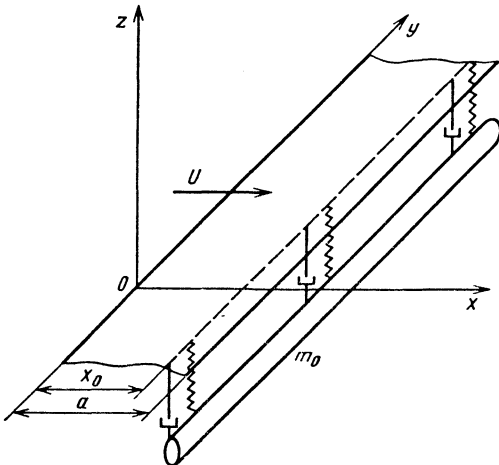


Рис. 7.8.7. Упругая панель с присоединенной массой в сверхзвуковом потоке

В качестве упрощенной модели рассмотрим плоскую упругую панель, обтекаемую с одной стороны сверхзвуковым потоком с невозмущенной скоростью  $U$  (рис. 7.8.7). С другой стороны к панели  $x=x_0$  при помощи вязкоупругой связи

с жесткостью  $c_0$  и коэффициентом демпфирования  $b_0$  прикреплена масса  $m_0$ . Пусть размах панели велик по сравнению с ее размером  $a$  в направлении потока, а все параметры присоединенного элемента отнесены к единице длины в направлении оси  $Oy$ . Панель трактуется как классическая пластина с цилиндрической жесткостью  $D$ , плотностью  $\rho_0$  и коэффициентом "внешнего" трения  $\varepsilon \rho_0 h$ . Возмущенное давление со стороны потока вводим согласно формуле (7.8.16). После отделения времени в классе экспоненциальных решений с показателем  $\lambda$  получаем относительно функции прогиба, пластины  $W(\xi)$  краевую задачу

$$W'''' + \beta W' + (\sigma + \gamma)W = 0 \quad (0 < \xi < 1); \quad (7.8.25)$$

$$W = W'' = 0 \quad (\xi = 0, \xi = 1); \quad (7.8.26)$$

$$W_- = W_+, \quad W'_- = W'_+; \quad W''_- = W''_+;$$

$$W''_- - W''_+ = \frac{\mu \sigma^2 (\gamma_0 \sigma + \omega_0^2) W}{\sigma^2 + \gamma_0 \sigma + \omega_0^2} \quad (\xi = \xi_0). \quad (7.8.27)$$

Здесь использованы безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{x}{a}; \quad \xi_0 = \frac{x_0}{a}; \quad \beta = \frac{\varepsilon \rho_\infty U a^3}{D}; \quad \mu = \frac{m_0}{\rho_0 h a}$$

$$\gamma = \frac{1}{\Omega_0} \left( \varepsilon + \frac{\varepsilon \rho_\infty}{\rho_0 h} \right); \quad \omega_0 = \frac{1}{\Omega_0} \left( \frac{c_0}{m_0} \right)^{1/2}; \quad \gamma_0 = \frac{b_0}{m_0 \Omega_0},$$

а также характерная частота

$$\Omega_0 = (D / \rho_0 h)^{1/2} / a^2.$$

Граничные условия (7.8.26) выписаны для случая панели, опертой по концам. Задача сводится к построению области в пространстве параметров  $\beta, \gamma, \omega_0$  и  $\gamma_0$ , где все характеристические показатели  $\sigma$  имеют отрицательные действительные части.

Результаты вычислений при некоторых числовых значениях параметров показали, что при отсутствии присоединенного элемента критическое значение параметра скорости потока  $\beta_* = 5,66$ . Изменение парциальной частоты подвески  $\omega_0$  приводит к существенному ( $\beta = 0,03$ ) и притом немонотонному изменению условий устойчивости. Отрезки стабилизации сменяются отрезками дестабилизации. Дестабилизация имеет место, когда присоединение элемента приводит к сближению собственных частот соответствующей консервативной системы. При прочих равных условиях эффект дестабилизации будет тем сильнее, чем больше величина присоединяемой массы и чем меньше демпфирование в подвеске.

## Глава 7.9

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

## 7.9.1. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПОНЯТИЯМИ УСТОЙЧИВОСТИ И ВЕРОЯТНОСТИ

Устойчивые состояния и устойчивые движения в природе и технике наиболее вероятны, а неустойчивые - наименее вероятны и даже невозможны. Вероятностный подход к проблеме устойчивости в некотором смысле является расширением классического подхода. Устойчивость в классическом смысле - это, по существу, свойство системы оставаться вблизи рассматриваемого состояния (движения). Вероятностный подход состоит в исследовании распределения параметров системы вблизи рассматриваемого состояния и, таким образом, содержит в себе более детальное описание поведения системы.

Значение вероятностных методов для теории упругой устойчивости определяется в первую очередь высокой чувствительностью упругих систем к малым изменениям ряда параметров и случайным характером изменения этих параметров. Для тонких стержней, пластин и особенно оболочек такими параметрами служат малые начальные отклонения от идеальной формы (начальные несовершенства). Именно влиянием малых начальных несовершенств объясняется большой разброс экспериментальных критических сил для тонких упругих оболочек [15].

Применительно к устойчивости равновесия консервативных систем с конечным числом степеней свободы при случайных возмущениях, не зависящих от времени, перечисленные задачи могут быть решены в рамках теории вероятностей. Это утверждение остается верным и для распределенных систем, если они аппроксимируются системами с конечным числом степеней свободы [5]. В общем случае, когда исследуемое движение или возмущения зависят явно от времени, требуется применение методов теории случайных функций [8]. Многие задачи о нахождении вероятности прибытия системы в заданной области родственны задачам теории надежности [11].

## 7.9.2. ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА РАВНОВЕСИЕ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим консервативную механическую систему с  $n$  степенями свободы. Состояние равновесия этой системы характеризуется обобщенными координатами  $q_1, \dots, q_n$ , внешние воздействия - параметрами  $\beta_1, \dots, \beta_r$ . Пусть, кроме того, равновесие системы может быть изменено возмущающими параметрами  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ . Потенциальная энергия системы имеет вид  $\Pi = \Pi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\beta})$ , где через  $\mathbf{q}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}$  и  $\boldsymbol{\beta}$  обозначены соответствующие векторы. Для устойчивых состоя-

ний равновесия  $\delta\Pi=0$ ,  $\delta^2\Pi>0$ . Рассмотрим семейство состояний, удовлетворяющих этим условиям:

$$q_k = q_k(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\beta}) \quad (k=1, \dots, n). \quad (7.9.1)$$

Если параметры возмущения - случайные, то возникает задача о распределении обобщенных координат системы в окрестности невозмущенного состояния при фиксированных внешних воздействиях. Для решения этой задачи нужно знать совместную плотность вероятности  $p_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\epsilon})$  параметров возмущений.

Пусть  $m \geq n$ . Среди  $m$  параметров  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$  выберем такие  $n$  параметров  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ , относительно которых уравнения (7.9.1) по всей области изменения имеют однозначное решение

$$\boldsymbol{\epsilon}_k = H_k(q_1, \dots, q_n; \epsilon_{n+1}, \dots, \epsilon_m; \boldsymbol{\beta}), \quad (7.9.2)$$

причем всюду в этой области якобиан преобразования отличен от нуля:

$$\left| \frac{\partial(H_1, \dots, H_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \right| \neq 0. \quad (7.9.3)$$

Тогда плотность вероятности обобщенных координат при фиксированных параметрах нагрузки дается формулой

$$p_q(q_1, \dots, q_n | \boldsymbol{\beta}) = \int \dots \int p_{\boldsymbol{\epsilon}}(H_1, \dots, H_n; \epsilon_{n+1}, \dots, \epsilon_m) \times \left| \frac{\partial(H_1, \dots, H_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \right| d\epsilon_{n+1} \dots d\epsilon_m. \quad (7.9.4)$$

Чтобы сделать истолкование формулы (7.9.4) более наглядным, рассмотрим случай, когда  $m=n=r=1$ . Формула (7.9.4) принимает вид

$$p_q(q | \beta) = p_{\epsilon} [H(q, \beta)] \left| \frac{\partial H(q, \beta)}{\partial q} \right|. \quad (7.9.5)$$

Из формулы следует, что ступица плотности вероятности будут иметь место вблизи достаточно выраженных максимумов взятой по модулю величины  $\partial H / \partial q$ . Ее обратное значение

$$S = \frac{dq(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\beta})}{d\boldsymbol{\epsilon}} \quad (7.9.6)$$

характеризует степень реакции системы, измеряемой величиной  $q$ , на возмущение  $\boldsymbol{\epsilon}$ . Чем больше  $S$ , тем менее устойчиво равновесие системы. Для неустойчивых форм равновесия  $S \rightarrow \infty$  даже при  $\boldsymbol{\epsilon} \rightarrow 0$ . Величины типа (7.9.6) называют коэффициентами чувствительности системы к возмущениям.

**Пример 1.** Рассмотрим уже частично затронутую в предыдущих разделах задачу о продольном изгибе опертого по концам слегка искривленного стержня. Чтобы проследить за поведением прогиба стержня в закритической стадии, будем рассматривать задачу в нелинейной постановке. Вместе с тем будем полагать прогибы не

слишком большими, чтобы в уравнениях достаточно было удержать члены не выше третьего порядка и чтобы можно было аппроксимировать искомую форму изгиба при помощи собственной функции линейной задачи. Как обычно, стержень будем считать вполне упругим, а деформацию сжатия пренебрежимо малой.

Начальная и полная кривизна  $\varpi_0$  и  $\varpi$ , изгибающий момент  $M$  и изгибная жесткость  $EJ$  связаны между собой соотношением  $EJ(\varpi - \varpi_0) = M$ . Начальный прогиб обозначим  $w_0(x)$ , прогиб при заданной сжимающей силе  $P$  обозначим  $w(x, P)$ . Заметим, что  $M = -Pw$ . Выражения для кривизны оси стержня в начальном и нагруженном состоянии имеют вид

$$\varpi_0 = w_0'' \left[ 1 - (w_0')^2 \right]^{-1/2}; \quad \varpi = w'' \left[ 1 - (w')^2 \right]^{-1/2}.$$

Мы пользуемся здесь лагранжевыми координатами; штрихами обозначаем дифференцирование по длине  $s$  дуги, измеренной вдоль искривленной оси стержня. После отбрасывания членов выше третьего порядка получим уравнение

$$w'' \left[ 1 + 1/2 (w')^2 \right] + (Pw/EJ) = w_0'' \left[ 1 + 1/2 (w_0')^2 \right].$$

Приближенное решение этого уравнения найдем, полагая

$$w_0(s) = f_0 \sin(\pi s/l); \quad w(s) = f \sin(\pi s/l)$$

и применяя метод Бубнова - Галеркина. В результате приходим к соотношению

$$\frac{\pi^2 f^3}{8l^2} + \left( 1 - \frac{P}{P_*} \right) f = \frac{\pi^2 f_0^3}{8l^2} + f_0, \quad (7.9.7)$$

связывающему начальный прогиб  $f_0$  с полным прогибом  $f$ . Здесь  $P_*$  - эйлерова сила.

Зависимость прогиба  $f$  от начального прогиба  $f_0$  и параметра нагрузки  $P$  была представлена на рис. 7.3.9, а. Если  $P < P_*$ , то имеем сгущение кривых около тривиального невозмущенного решения  $f=0$ , что указывает на его устойчивость. При  $P > P_*$  сгущение кривых имеет место вблизи устойчивого нетривиального невозмущенного решения

$$f_* = \frac{2\sqrt{2}l}{\pi} \left( \frac{P}{P_*} - 1 \right)^{1/2}. \quad (7.9.8)$$

Решения, одно из которых на рис. 7.3.9, а намечено штриховой линией, реализуется лишь при наличии дополнительных возмущений, вызывающих переменный знак прогиба. Эти возмущения здесь считаем отсутствующими, так что решения, не удовлетворяющие условию  $f f_* > 0$ , исключаем из рассмотрения.

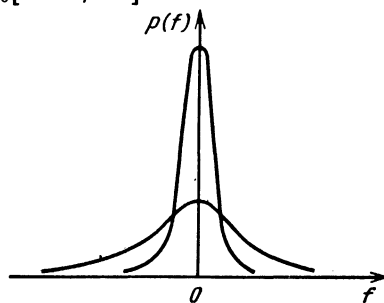
Плотность вероятности полного прогиба вычислим по формуле (7.9.5):

$$p_f(f|P) = p_0[H(f, P)] \left| \frac{\partial H(f, P)}{\partial f} \right|. \quad (7.9.9)$$

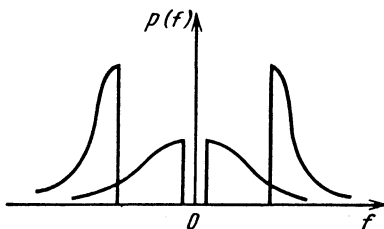
Возьмем, например, центральное гауссовское распределение для  $f_0$ . Тогда

$$p_0(f_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{f_0^2}{2\sigma_0^2}\right), \quad (7.9.10)$$

где  $\sigma_0^2$  - дисперсия начального прогиба. Если сила  $P$  не слишком близка снизу к эйлеровому значению, то можно положить  $f \approx f_0 [1 - (P/P_*)]^{-1}$ .



а)



б)

Рис. 7.9.1. Плотность вероятности распределения прогибов: а -  $P < P_*$ ; б -  $P > P_*$ .

Но тогда средние квадратические значения (квадратные корни из дисперсий) полного и начального прогибов оказываются связанными соотношением  $\sigma = \sigma_0 [1 - (P/P_*)]^{-1}$ . Очевидно, вновь получаем центральное гауссовское распределение, которое "расплывается" тем более, чем ближе сила  $P$  к эйлеровому значению (рис. 7.9.1, а).

Рассмотрим теперь случай  $P > P_*$ ,  $f > f_0$ . В правой части уравнения (7.9.7) тогда можно пренебречь первым членом. Отсюда

$$H(f, P) \approx \frac{\pi^2 f^3}{8l^2} + \left( 1 - \frac{P}{P_*} \right) f.$$

Подстановка этого выражения в формулу (7.9.9) с использованием начального распределения (7.9.10) дает

$$p_f(f|P) = \frac{[3(f/f_*)^2 - 1][(P/P_*) - 1]}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \times \exp\left\{-\frac{f^2[(f/f_*)^2 - 1]^2[(P/P_*) - 1]}{2\sigma_0^2}\right\}. \quad (7.9.11)$$

Здесь  $f_*$  определяется согласно (7.9.8). Формула (7.9.11) справедлива при условии, что  $f f_0 > 0$ . Если  $f f_0 < 0$ , что будет иметь место при  $|f| < f_*$ , то здесь  $\partial H/\partial f = 0$  и, следовательно,  $p_f(f|p) \equiv 0$ . Без дополнительных воздействий эта область значений  $f$  не достижима. Мы приходим к кривым распределения, показанным на рис. 7.9.1, б.

Если зависимость между обобщенными координатами и параметрами нагрузки - немонотонные даже при заданных начальных возмущениях, то представления типа (7.9.2) могут оказаться неоднозначными. Эта неоднозначность устраняется, если задать направление изменения параметров  $\beta_1, \dots, \beta_r$  (например, считать их монотонно возрастающими). Кроме того, необходимо ввести в число параметров  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  конечные возмущения, вызывающие переход системы с одной устойчивой ветви на другую [5].

**7.9.3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ КРИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ**

Для простоты ограничимся случаем, когда нагрузки на систему заданы с точностью до одного параметра  $\beta$ , а критическое значение  $\beta_*$  зависит от  $m$  параметров возмущения:

$$\beta_* = \beta_*(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m). \quad (7.9.12)$$

Пусть формула (7.9.12) может быть представлена как взаимно однозначная функция одного из параметров  $\varepsilon_k$ , например,  $\varepsilon_1$ . Тогда

$$\varepsilon_1 = H_1(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m; \beta_*), \quad (7.9.13)$$

и формула преобразования случайной величины дает плотность вероятности критического параметра

$$p_\beta(\beta_*) = \int \dots \int p_\varepsilon(H_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m; \beta_*) \times \left| \frac{\partial H_1(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m; \beta_*)}{\partial \beta_*} \right| d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_m. \quad (7.9.14)$$

Интегрирование в формуле (7.9.14) проводится по всей области значений параметров  $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ . При  $m=1$  формула (7.9.14) принимает вид

$$p_\beta(\beta_*) = p_\varepsilon[\varepsilon(\beta_*)] \left| \frac{d\varepsilon(\beta_*)}{d\beta_*} \right|, \quad (7.9.15)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon(\beta_*)$  есть обращение зависимости  $\beta_* = \beta_*(\varepsilon)$ . Некоторые затруднения возникают, если среди  $\varepsilon_k$  не существует таких параметров, которые бы однозначно зависели от  $\beta_*$ . В этом случае следует отдельно рассмотреть монотонные ветви функции (7.9.13) и просуммировать вклад всех ветвей в плотность вероятности  $p_\beta(\beta_*)$ . Так, при  $m=1$  формула (7.9.15) обобщается следующим образом:

$$p_\beta(\beta_*) = \sum_k p_\varepsilon[H_k(\beta_*)] \left| \frac{dH_k(\beta_*)}{d\beta_*} \right|. \quad (7.9.16)$$

Здесь  $H_k(\beta)$  - ветви функции  $\varepsilon = H(\beta_*)$ , на которых эта зависимость монотонная.

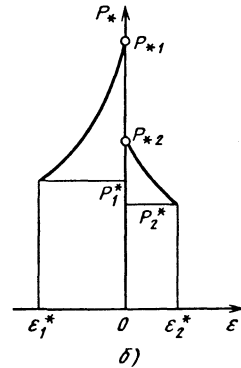
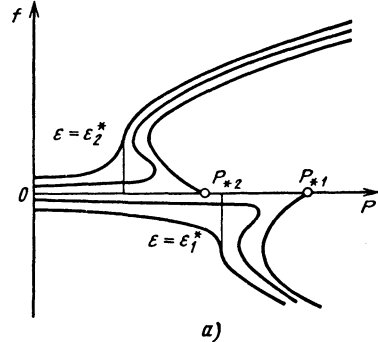


Рис. 7.9.2. Зависимость характерного прогиба от параметра нагрузки (а) и критической силы от начального прогиба (б)

**Пример 2.** Рассмотрим диаграмму зависимости между параметром нагрузки  $P$ , характерным прогибом  $f$  и начальным значением прогиба - возмущением  $\varepsilon = f_0$  (рис. 7.9.2, а). В зависимости от знака  $\varepsilon$  реализуются два разных семейства функций  $f = f(P)$ . Диаграмму можно истолковать как график функции прогиба неупругого стержня несимметричного поперечного сечения, сжатого силой  $P$ . При этом  $P_{*1}$  и  $P_{*2}$  - критические

значения силы  $P$  для идеального прямого стержня;  $P_1^*$  и  $P_2^*$  - максимальные значения силы  $P$ , при которых еще не происходит скачкообразных переходов от одной формы равновесия к другой. График (рис. 7.9.2, б) показывает зависимость критической силы  $P_*$  от начального прогиба  $\varepsilon = f_0$ . Область критических значений ограничена возмущениями  $\varepsilon_1^* < 0$  и  $\varepsilon_2^* > 0$ . Зависимость  $\varepsilon = H(\beta_*)$  имеет ветви  $\varepsilon = H_1(\beta_*)$  при  $\varepsilon \in [\varepsilon_1^*, 0]$  и  $\varepsilon = H_2(\beta_*)$  при  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2^*]$ . Формула (7.9.16) дает

$$p_\beta(\beta_*) = \left\{ p_\varepsilon[H_1(\beta_*)] dH_1(\beta_*) / d\beta_* + p_\varepsilon[H_2(\beta_*)] dH_2(\beta_*) / d\beta_* \right\} \times \left[ \int_{\varepsilon_1^*}^{\varepsilon_2^*} p_\varepsilon(\varepsilon) d\varepsilon \right]^{-1}.$$

Перенормированный множитель в знаменателе учитывает то, что для стержней с начальными возмущениями, лежащими вне отрезка  $[\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*]$ , скачкообразная потеря устойчивости не возникает.

#### 7.9.4. ВЕРОЯТНОСТЬ ОПАСНОГО СОСТОЯНИЯ

Задача определения вероятности наступления опасного состояния, связанного с потерей устойчивости, принципиально не отличается от аналогичных задач теории надежности - найти вероятность того, что параметры рассматриваемого технического объекта будут находиться в некоторой допустимой области [11].

Пусть состояние системы характеризуется обобщенными координатами  $q_1, \dots, q_n$  с допустимой областью  $\Omega = \{q; \psi(q) < 0\}$ . Тогда вероятность того, что опасное состояние не наступит, определяется как

$$R = \int_{\psi(q) < 0} p_q(q) d^n q, \quad (7.9.17)$$

где  $p_q(q)$  - совместная плотность вероятностей обобщенных координат. Вероятность наступления опасного состояния  $Q$  равна дополнению до единицы вероятности  $R$ , т.е.  $Q = 1 - R$ .

Формула (7.9.17) сохраняет смысл, если допустимая область  $\Omega$ , помимо ограничений по устойчивости, определяется другими ограничениями, например прочностью, жесткостью и т.п. Вероятность  $R$  в сущности является показателем надежности.

В ряде приложений допустимая область задается не в пространстве обобщенных координат, а в пространстве  $\mathfrak{R}^m \times \mathfrak{R}^r$  параметров возмущений  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  и воздействий  $\beta_1, \dots, \beta_r$ . Тогда  $\Omega = \{\varepsilon, \beta; \psi_1(\varepsilon, \beta) < 0\}$ . Вместо формулы (7.9.17) имеем

$$R = \int \dots \int p(\varepsilon, \beta) d^m \varepsilon d^r \beta, \quad (7.9.18)$$

$$\psi_1(\varepsilon, \beta)$$

где  $p(\varepsilon, \beta)$  - совместная плотность вероятности для составляющих векторов  $\varepsilon$  и  $\beta$ . Например, если  $m=n=r=1$ , то формулы (7.9.17) и (7.9.18) принимают вид

$$R = \int_{\psi(q) < 0} p_q(q) dq = \iint p(\varepsilon, \beta) d\varepsilon d\beta. \quad (7.9.19)$$

$$\psi_1(q) < 0 \quad \psi_1(\varepsilon, \beta)$$

Примеры применения формул (7.9.17) - (7.9.19) можно найти в работе [5].

#### 7.9.5. ПОВЕДЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ

Если возмущения, действующие на систему, являются случайными функциями времени, то для анализа их поведения в окрестности невозмущенного движения (равновесия) требуется применение метода теории случайных функций.

Рассмотрим систему уравнений относительно вектора возмущений фазовых переменных  $x \in \mathfrak{R}^N$ :

$$\dot{x} = f(x, t) + G(x, t)\xi(t). \quad (7.9.20)$$

Здесь  $f(x, t)$  -  $N$ -мерная вектор-функция фазовых переменных  $x_j$  и времени  $t$ ;  $G(x, t)$  - матрица размерностью  $N \times m$ ;  $\xi(t)$  -  $m$ -мерный вектор, компоненты которого - случайные функции времени. Функции  $f(x, t)$  и  $G(x, t)$  предполагаем детерминистическими по всем аргументам, гладкими по  $x$  и непрерывными по  $t$ . При нулевом значении  $x=0$  система (7.9.20) отвечает невозмущенному движению (равновесию). Задача состоит в том, чтобы найти распределение значений вектора отклонений  $x(t)$  от невозмущенного движения.

Задача имеет известное решение, если компоненты вектор-функции  $\xi(t)$  - независимые стационарные нормальные "белые шумы". Плотность вероятности  $p(x, t | x_0, t_0)$  значений вектора  $x$  в момент времени  $t$ , найденная при условии, что  $x(t_0) = x_0$ , удовлетворяет уравнению Колмогорова:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} [a_j(x, t)p] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} [b_{jk}(x, t)p] \quad (7.9.21)$$

с начальным условием  $p = \delta(x - x_0)$  при  $t = t_0$ . В этом уравнении  $a_j(x, t)$  - коэффициенты сноса, которые характеризуют смещение центра распределения по времени;  $b_{jk}(x, t)$  - коэффициенты диффузии. Решение уравнения (7.9.21) должно удовлетворять требованиям положительности и нормировки при всех  $t \geq t_0$ :

$$\int \dots \int_{\mathfrak{R}^N} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) d^N \mathbf{x} = 1. \quad (7.9.22)$$

Коэффициенты сноса и диффузии выражаются через элементы вектора  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  и матрицы  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$  по известным формулам [8]. В случае белого шума Ито (производной от винеровского процесса) имеем

$$a_j = f_j; b_{jk} = \sum_{l=1}^N g_{jl} g_{kl}. \quad (7.9.23)$$

Если белый шум представлен в симметризированной форме Стратоновича [49], то вместо первой формулы берется выражение

$$a_j = f_j + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_k} g_{kl}.$$

**Пример 3.** Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы с уравнением движения в окрестности неустойчивого положения равновесия

$$m\ddot{q} + 2m\epsilon\dot{q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = \xi(t), \quad (7.9.24)$$

где  $m$  - инерционный коэффициент (например, масса системы);  $\epsilon$  - коэффициент демпфирования;  $\Pi(q)$  - потенциальная энергия системы. Через  $\xi(t)$  обозначен стационарный нормальный белый шум с интенсивностью  $s$ . Вводя фазовые переменные  $x_1=q, x_2=\dot{q}$ , представим уравнение (7.9.24) в виде

$$dx_1 = x_2 dt;$$

$$dx_2 = -2\epsilon x_2 dt - (\partial \Pi / \partial x_1) dt \frac{1}{m} + \sqrt{s} dw \frac{1}{m},$$

где  $w(t)$  - винеровский процесс единичной интенсивности. Для коэффициентов (7.2.23) получаем формулы

$$a_1 = x_2; a_2 = -2\epsilon x_2 - \frac{1}{m} \frac{\partial \Pi}{\partial x_1};$$

$$b_{22} = s / m^2$$

(остальные коэффициенты равны нулю). Уравнение Колмогорова принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -x_2 \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \left( 2\epsilon x_2 + \frac{1}{m} \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \right) p \right] + \frac{s}{2m} \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}.$$

Это уравнение имеет решение, не зависящее от времени:

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{J} \exp \left\{ -\frac{4\epsilon}{s} \left[ \Pi(x_1) + \frac{m x_2^2}{2} \right] \right\},$$

которое описывает распределение обобщенной координаты  $q$  и обобщенной скорости  $\dot{q}$  в окрестности состояния равновесия. Нормировочный множитель  $J$  находим из условия (7.9.22). В частности, стационарное распределение обобщенной координаты описывается формулой

$$p(q) = \frac{1}{J_1} \exp \left[ -\frac{4\epsilon}{s} \Pi(q) \right]. \quad (7.9.25)$$

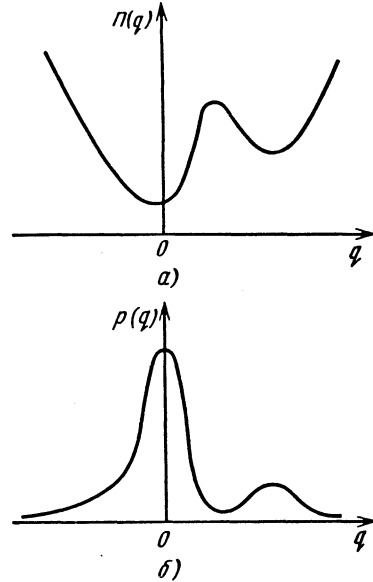


Рис. 7.9.3. График потенциальной энергии (а) и плотности вероятности распределения (б)

В состоянии равновесия  $d\Pi/dq=0$ , причем, если состояние устойчиво, то  $d^2\Pi/dq^2 > 0$ , если неустойчиво, то  $d^2\Pi/dq^2 < 0$ . Таким образом, устойчивые состояния отвечают максимумам распределения (7.9.25), неустойчивые - минимумам (рис. 7.9.3).

### 7.9.6. ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Для строгого анализа устойчивости при наличии случайных возмущений требуется уточнить определение стохастической устойчивости [56]. Это понятие неоднозначно: различают устойчивость по вероятности, по математическим ожиданиям, по совокупности моментных функций второго порядка и др. Приведем соответствующие определения, ограничившись случаем детерминированных начальных условий.

Положение равновесия  $\mathbf{x}(t) \equiv 0$  системы (7.9.20) называют устойчивым по вероятности, если для любых  $\rho > 0$  и  $\epsilon > 0$  существует  $\delta(\rho, \epsilon) > 0$  такое, что для всех решений системы (7.9.20),

удовлетворяющих условию  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$ , будет иметь место неравенство

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t < \infty} \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \right\} > 1 - \rho. \quad (7.9.26)$$

Иногда это определение называют устойчивостью с вероятностью единица в том смысле, что вероятность превышения отклонениями уровня  $\varepsilon$  при  $t > t_0$  не превысит любого наперед заданного значения  $\rho$ .

Положение равновесия  $\mathbf{x}(t) \equiv 0$  называют асимптотически устойчивым по вероятности, если оно устойчиво по вероятности, и, кроме того, для всех решений системы (7.9.20), удовлетворяющих условию  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$ , выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \right\} = 1. \quad (7.9.27)$$

Говорят, что положение равновесия  $\mathbf{x}(t) \equiv 0$  системы (7.9.20) устойчиво по математическому ожиданию нормы, если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что из  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$  следует неравенство

$$\sup_{t_0 \leq t < \infty} \langle \|\mathbf{x}(t)\| \rangle < \varepsilon. \quad (7.9.28)$$

Здесь  $\langle \cdot \rangle$  означает операцию взятия математического ожидания.

Если положение равновесия  $\mathbf{x}(t) \equiv 0$  устойчиво по математическому ожиданию нормы и, кроме того, выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \|\mathbf{x}(t)\| \rangle = 0,$$

то положение равновесия называют асимптотически устойчивым по математическому ожиданию нормы. В случае евклидовой нормы  $\|\mathbf{x}\|$  будем иметь асимптотическую устойчивость в среднем квадратическом.

В прикладных расчетах широко используется понятие устойчивости по совокупности моментных функций [65, 8, 36]. Обозначим через  $m_{j_1, \dots, j_r}(t)$  моменты  $r$ -го порядка компонент вектора отклонений  $\mathbf{x}(t)$ . Совокупность всех моментов  $r$ -го порядка  $\mathbf{m}_r(t)$  образует векторное пространство  $\mathbf{M}^r$ , размерность которого можно сократить с учетом симметрии моментов.

Положение равновесия  $\mathbf{x}(t) \equiv 0$  системы (7.9.20) называют устойчивым по совокупности моментных функций  $r$ -го порядка, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для всех решений системы (7.9.20), удовлетворяющих условию  $\|\mathbf{m}_r(t_0)\| < \delta$ , будет иметь место неравенство

$$\sup_{t_0 \leq t < \infty} \|\mathbf{m}_r(t)\| < \varepsilon. \quad (7.9.29)$$

Если положение равновесия  $\mathbf{x}(t) \equiv 0$  устойчиво в указанном выше смысле и, кроме того, выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{m}_r(t)\| = 0, \quad (7.9.30)$$

то положение равновесия называют асимптотически устойчивым по совокупности моментных функций  $r$ -го порядка. Для тех задач, в которых моментные функции различных порядков оказываются связанными, вводят понятие устойчивости по совокупности моментных функций до порядка  $r$  включительно [8].

### 7.9.7. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ СТОХАСТИЧЕСКОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Типичная задача об устойчивости механических систем, параметрически возмущаемых переменными по времени случайными силами, приводит к уравнению

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega_0^2[1 + \mu\varphi(t)]q = 0, \quad (7.9.31)$$

где  $\varphi(t)$  - случайная функция времени с математическим ожиданием, равным нулю. Уравнение (7.9.31) является аналогом уравнения Матве-Хилла применительно к случайному параметрическому возбуждению. Приближенный анализ стохастической устойчивости решения  $q(t) \equiv 0$  обычно основан на методе Крылова - Боголюбова - Митропольского. Решение уравнений (7.9.31) ищут в форме  $q(t) = A(t) \sin[\omega_0 t + \psi(t)]$  и приходят к системе двух уравнений относительно медленно изменяющейся амплитуды  $A(t)$  и фазы  $\psi(t)$ . Эти переменные далее трактуют как составляющие марковского процесса, совместная плотность вероятности которых удовлетворяет некоторому уравнению типа Колмогорова. Приближенное условие асимптотической устойчивости по вероятности имеет вид [49]

$$\mu^2 S_\varphi(2\omega_0) < 2\varepsilon / \pi\omega_0^2, \quad (7.9.32)$$

где  $S_\varphi(\omega)$  - спектральная плотность процесса  $\varphi(t)$ . Эта спектральная плотность входит в формулу (7.9.32) при частоте  $2\omega_0$ , т.е. при удвоенной собственной частоте. Если процесс  $\varphi(t)$  - узкополосный с несущей частотой  $\theta$ , то условие (7.9.32) включает описание параметрического резонанса в окрестности частотного соотношения  $\theta = 2\omega_0$ .

Если в основу анализа положить критерий устойчивости по совокупности моментных функций, то в ряде задач можно получить точное решение вопроса устойчивости.

**Пример 4.** Пусть функция  $\varphi(t)$  в уравнении (7.9.31) - стационарный нормальный белый шум

с интенсивностью  $s = \omega_0^{-1}$ . Представив это уравнение в виде

$$dx_1 = x_2 dt; \quad dx_2 = -(2\gamma x_2 + x_1) dt - \mu dw,$$

где  $x_1 = q$ ;  $x_2 = \dot{q}$ ;  $\tau = t\omega_0$ ;  $\gamma = \varepsilon / \omega_0$ ;  $w(\tau)$  - винеровский процесс, приходем к уравнению Колмогорова относительно плотности вероятности  $p(x_1, x_2; \tau)$ :

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = 2\gamma p - x_2 \frac{\partial p}{\partial x_1} + (2\gamma x_2 + x_1) \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\mu^2 x_1^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}. \quad (7.9.33)$$

Моменты от фазовых переменных  $x_1, x_2$ , их произведений и степеней найдем, умножая левую часть уравнения (7.9.33) на комбинацию этих переменных и интегрируя результат по всей области их изменения. В результате для совокупности моментов  $r$ -го порядка получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{m}_r}{dt} = \mathbf{H}_r \mathbf{m}_r \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (7.9.34)$$

Здесь размерность вектора  $\mathbf{m}_r$  (совокупность моментных функций порядка  $r$ ) с учетом симметрии составляет  $r+1$ . Матрица  $\mathbf{H}_r$  размерностью  $(r+1) \times (r+1)$  имеет постоянные коэффициенты. Существенно, что моменты неодинакового порядка разделяются. Это позволяет делать выводы об устойчивости решения  $q(t) \equiv 0$  уравнения (7.9.31) по совокупности моментов второго порядка (в среднем квадратическом), третьего и т.д. порядков. В частности, относительно моментов второго порядка уравнение (7.9.34) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{m}_{11} &= 2m_{12}; \quad \dot{m}_{22} = \mu^2 m_{11} - 2m_{12} - 4\gamma m_{22}; \\ \dot{m}_{12} &= -m_{11} - 2\gamma m_{12} + m_{22}. \end{aligned} \quad (7.9.35)$$

Согласно определениям устойчивости (7.9.29) и (7.9.30) для асимптотической устойчивости решения  $q(t) \equiv 0$  в среднем квадратическом необходимо и достаточно, чтобы было асимптотически устойчиво решение  $m_{11} = m_{12} = m_{22} = 0$  уравнений (7.9.35). Применение критерия Рауса - Гурвица дает условие устойчивости

$$\mu^2 < 4\gamma. \quad (7.9.36)$$

На рис.7.9.4 показаны границы области устойчивости на плоскости параметров  $\gamma = \varepsilon/\omega_0, \mu$ . Здесь  $r$  - порядок моментов, по отношению к которым исследуется устойчивость [8, 36]. Как следует из графика, с ростом порядка  $r$  требования к параметрам системы, обеспечивающим ее устойчивость, возрастают. При больших  $r$  перемещение границы, впрочем, становится незначительным (ср. кривые на рис. 7.9.4 при  $r=17$  и  $r=20$ ).

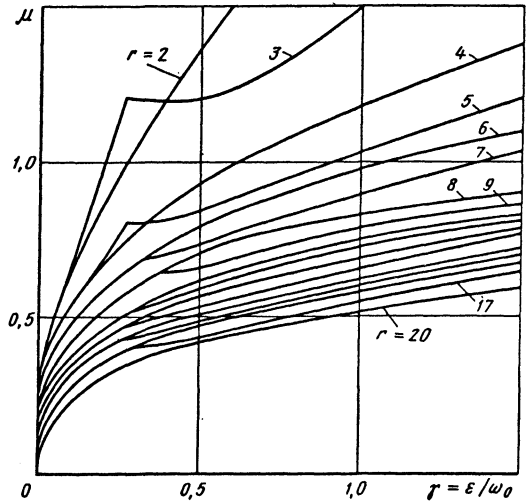


Рис. 7.9.4. Границы области устойчивости на плоскости параметров

Если параметрическое возбуждение отлично от белого шума, анализ устойчивости существенно усложняется. Стационарный нормальный процесс с дробно-рациональной спектральной плотностью можно получить, пропуская белый шум через линейный фильтр с постоянными параметрами. В статье [65] было предложено расширять фазовое пространство с помощью переменных, описывающих процесс в системе фильтра, и исследовать устойчивость по отношению к моментным функциям в расширенном фазовом пространстве. Таким путем были построены области устойчивости для случайных процессов со скрытой периодичностью и обнаружены аналоги побочных параметрических резонансов. Ряд примеров приведен в работе [8], где также дано сопоставление теоретических результатов с данными вычислительного эксперимента.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
2. Баничук Н. В., Мионов А. А. Схема струйного обтекания для исследования равновесных форм упругих пластин в потоке жидкости и задачи оптимизации // Прикладная механика и математика. 1979. Т.43. Вып.1. С. 83-90.
3. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
4. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.



5. **Болотин В. В.** Статистические методы в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965. 279 с.
6. **Болотин В. В.** О понятии устойчивости в строительной механике // Проблемы устойчивости в строительной механике: Сб. статей. М.: Стройиздат, 1965. С. 6-27.
7. **Болотин В. В.** Численный анализ устойчивости линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Избранные проблемы прикладной механики: Сб. статей. М.: ВИНТИ, 1974. С. 155-156.
8. **Болотин В. В.** Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.
9. **Болотин В. В.** Эффекты стабилизации и дестабилизации в задачах устойчивости упругих систем // Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением: Сб. статей. Новосибирск: Наука, 1979. С.7-17.
10. **Болотин В. В.** Устойчивость и рост трещин при непотенциальных внешних нагрузках // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1987. № 5. С. 148-157.
11. **Болотин В. В.** Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 447 с.
12. **Болотин В. В., Симонов Б. П.** Влияние упругоподвешенных масс на устойчивость упругих панелей в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1983. № 3. С.149-156.
13. **Вибрации** в технике: Справочник. Т.1. Колебания линейных систем / Ред. В. В. Болотин. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
14. **Воеводин В. В.** Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1966. 248 с.
15. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
16. **Вольмир А. С.** Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М.: Наука, 1976. 416 с.
17. **Гилмор Р.** Прикладная теория катастроф. В 2-х кн.: Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
18. **Григолюк Э. И., Горшков А. Г.** Нестационарная гидроупругость оболочек. М.: Судостроение, 1974. 207 с.
19. **Диментберг М. Ф.** Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
20. **Ефимов А. Б., Малый В. И., Утешев С. А.** О потере устойчивости цилиндрической оболочки при продольном ударе // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1971. № 1. С.20-23.
21. **Зубов В. И.** Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1973. 272 с.
22. **Зубов В. И.** Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.
23. **Зубчанинов В. Г.** Упругопластическая устойчивость стержней в разгружающих системах // Упругость и неупругость: Сб. статей. Вып. 1. М.: МГУ, 1971. С. 146-158.
24. **Итоги науки и техники.** Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 5. Теория бифуркаций. Теория катастроф/Под ред. В.И.Арнольда. М.:ВИНИТИ, 1986. 284 с.
25. **Иплинский А. Ю., Борзов В. И., Степаненко Н. П.** Лекции по теории гироскопов. М.: МГУ, 1983. 243 с.
26. **Костюк А. Г.** Динамика и прочность турбомашин. М.: Машиностроение, 1982. 263 с.
27. **Красовский Н. Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
28. **Лаврентьев М. А., Иплинский А. Ю.** Динамические формы потери устойчивости упругих систем // ДАН СССР. 1949. Т. 64. № 6. С. 779-799.
29. **Малаховский Е. Е., Позняк Э. И.** Об устойчивости равномерного вращения неуравновешенного гибкого ротора // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 6. С. 23-29.
30. **Малкин И. Г.** Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 532 с.
31. **Малый В. И., Ефимов А. Б.** Потеря устойчивости стержня при продольном ударе // ДАН СССР. 1972. Т. 202. № 4. С. 797-799.
32. **Макаревский А. И., Чижов В. М.** Основы прочности и аэроупругости летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1982. 238 с.
33. **Мартыненко Ю. Г.** Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
34. **Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н.** Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980. 481 с.
35. **Меркин Д. Р.** Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.
36. **Москвин В. Г., Смирнов А. И.** К устойчивости линейных стохастических систем // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1975. № 6. С. 62-65.
37. **Нестационарная аэроупругость** тонкостенных конструкций / А. В. Кармишин, Э. Д. Скурлатов, В. Г. Старцев и др.; Под ред. А. В. Кармишина. М.: Машиностроение, 1982. 240 с.
38. **Парлетт Б.** Симметричная проблема собственных значений. Численные методы: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 384 с.
39. **Перцев А. К., Платонов Э. Г.** Динамика оболочек и пластин: Нестационарные задачи. Л.: Судостроение, 1987. 316 с.
40. **Потапов В. Д.** Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций. М.: Стройиздат, 1985. 312 с.
41. **Позняк Э. Л.** Об устойчивости железного сердечника в магнитном поле // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 10. С. 12-17.
42. **Позняк Э. Л.** Об устойчивости и автоколебаниях соосных роторов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1982. № 2. С. 38-45.

43. **Попов Е. П.** Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1989. 304 с.
44. **Прочность. Устойчивость. Колебания:** Справочник. Т. 3. М.: Машиностроение, 1968. 567 с.
45. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
46. **Румянцев В. В., Озиряпер А. С.** Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
47. **Светлицкий В. А.** Механика трубопроводов и шлангов. Задачи взаимодействия стержней с потоком жидкости или воздуха. М.: Машиностроение, 1982. 279 с.
48. **Смирнов А. И.** Аэроупругая устойчивость летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1980. 231 с.
49. **Стратонович Р. Л.** Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. М.: Советское радио, 1961. 558 с.
50. **Теория и применение электромагнитных подвесов / Ю. А. Осокин, В. Н. Герди, К. А. Майков и др.** М.: Машиностроение, 1980.
51. **Томпсон Дж. М. Т.** Неустойчивости и катастрофы в технике: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 254 с.
52. **Уилкинсон Дж. Х.** Алгебраическая проблема собственных значений: Пер. с англ. М.: Наука, 1970. 564 с.
53. **Уилкинсон Дж. Х., Рейнш К.** Сборник алгоритмов на АЛГОЛе. Линейная алгебра: Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1976. 389 с.
54. **Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.** Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1960. 655 с.
55. **Ферлинг Г.** Основы аэроупругости: Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1984. 600 с.
56. **Хасьянский Р. З.** Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 368 с.
57. **Химмельблау Д.** Прикладное нелинейное программирование: Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 534 с.
58. **Челомей В. Н.** О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций // ДАН СССР. 1956. Т. 110. N 3. С. 345-347.
59. **Четаев Н. Г.** Устойчивость движения. М.: Наука, 1990. 176 с.
60. **Численные** методы расчета устойчивости параметрически возбуждаемых систем / В. В. Болотин, О. А. Бабин, А. В. Голубков и др. // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1982. Вып. 23. С. 194-207.
61. **Шестериков С. А., Юмаева М. А.** Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1984. N° 1. С. 86-91.
62. **Экспериментальные** исследования тонкостенных конструкций // А. Н. Гузь, В. А. Заруцкий, И. Я. Амиро и др. Киев: Наукова думка, 1984. 240 с.
63. **Якубович В. А., Старжинский В. М.** Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
64. **Bisplinghoff R. L., Ashley H.** Principles of aeroelasticity - New York: Dover. 1975. 527 p.
65. **Bolotin V. V.** Reliability theory and stochastic stability // Study on Stability. - Waterloo: Univ. of Waterloo. 1971. No.6. P.385-422.
66. **Bolotin V. V., Zhinzher N. I.** Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces // Intern. J. Solids Structures. 1969. Vol.5. No. 9. P.965-969.
67. **Herrmann G.** Stability of equilibrium of elastic systems subjected to nonconservative forces // Appl. Mech. Rev. 1967. Vol.20. No.2.
68. **Huseyin K.** Nonlinear theory of elastic stability. - Leyden: Noordhoff. 1978. 220 p.
69. **Mason D. R., Blotter R. T.** Finite-element application to rocket nozzle aeroelasticity // J. Propulsion and Power. 1986. Vol.2. No. 6. P.499-507.

## **СПРАВОЧНОЕ ИЗДАНИЕ**

**Колесников Константин Сергеевич, Александров Дмитрий Александрович,  
Асташев Владимир Константинович и др.**

**МАШИНОСТРОЕНИЕ. ЭНЦИКЛОПЕДИЯ**

**Том 1-3**

**Динамика и прочность машин.  
Теория механизмов и машин**

**Книга 1**

**ИБ № 7338**

**Лицензия ЛР № 080003 от 15.08.91.**

**Редактор Т.С. Грачева**  
**Художественный редактор Т.Н. Галицына**  
**Корректоры А.П. Сизова, Л.Е. Солюшкина, Л.А. Ягупьева**  
**Оформление художника Т.Н. Погореловой**

<b>Сдано в набор 11.05.94.</b>	<b>Подписано в печать 11.11.94.</b>	<b>Формат 70×100/16.</b>
<b>Бумага офсетная.</b>	<b>Гарнитура Times ET.</b>	<b>Печать офсетная.</b>
<b>Уч.-изд.л. 59,11.</b>	<b>Тираж 3000 экз.</b>	<b>Заказ 740.</b>
		<b>Усл.печ.л. 43,55.</b>
		<b>Цена договорная.</b>

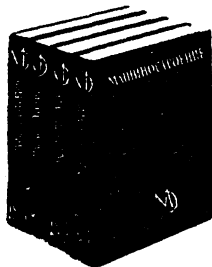
**Издательство "Машиностроение", 107076, Москва, Б-76, Стромьинский пер., 4**

**Оригинал-макет изготовлен в издательско-полиграфическом центре  
Тамбовского государственного технического университета  
392032, г. Тамбов, Мичуринская, 112, корп. Б**

**Отпечатано в типографии № 4 Комитета Российской Федерации по печати  
129041, Москва, Б.Переяславская ул., 46**

# ВПЕРВЫЕ В РОССИИ!

Российская академия наук, издательство "Машиностроение" объявляют о подписке на 40-томную энциклопедию "Машиностроение".



Уникальное издание — 40-томная энциклопедия "Машиностроение" (ЭМ) подготовлено коллективом ученых Российской академии наук, видных специалистов машиностроения. Энциклопедия не имеет аналогов в мировой практике.

Редакционный совет от имени Российской академии наук возглавляет академик К.В. Фролов.

Издание имеет государственную поддержку по линии Министерства науки и технической политики, других ведомств Российской Федерации, а также инвестируется Международной ассоциацией "Надежность машин и конструкций", рядом университетов, корпораций, банков и фирм.

## ЭНЦИКЛОПЕДИЯ "МАШИНОСТРОЕНИЕ" ЯВЛЯЕТСЯ:

- полной (содержащей десятки тысяч статей по всем областям машиностроения);
- достоверной (авторами публикуемых материалов являются более 3000 ведущих ученых и специалистов академий, вузов, промышленных центров);
- актуальной (энциклопедия освещает прогрессивные достижения науки и техники, лучшие конструкторско-технологические решения объектов техники и технологии, имеющие высокую значимость для развития всех отраслей промышленности, с учетом мирового опыта в этой области);
- удобной (статьи сопровождаются новейшими сведениями, скомпонованными в виде таблиц и графиков)
- перспективной (статьи, кроме проверенных практикой решений, содержат новые идеи, необходимые для создания техники XXI века)

## ЭНЦИКЛОПЕДИЯ — НЕЗАМЕНИМЫЙ ПОМОЩНИК ДЛЯ ВСЕХ МАШИНОСТРОИТЕЛЕЙ!



ЭНЦИКЛОПЕДИЯ СОСТОИТ ИЗ ЧЕТЫРЕХ БЛОКОВ:

- I — Инженерные расчеты в машиностроении (5 томов);
- II — Материалы в машиностроении (4 тома);
- III — Технология машиностроения (8 томов);
- IV — Расчет и конструирование машин (23 тома).

Для оформления подписки на энциклопедию "Машиностроение" Вам достаточно выслать в адрес издательства гарантийное письмо.

Вы можете заказать все издание в целом или его отдельные тома, выкуп которых предприятие гарантирует. Содержание всех томов было опубликовано в журнале "Вестник машиностроения".

Более подробную информацию Вы можете получить по телефонам:  
(095) 269-54-96 или (095) 268-69-19; факс (095) 269-48-97  
Редакция справочной литературы издательства "Машиностроение".

**НАШ АДРЕС:** 107076, Москва, Стримынский пер., 4. Издательство "Машиностроение", редакция СА.