

# VIBRATION PROBLEMS IN ENGINEERING

By

S. TIMOSHENKO

Professor Emeritus of Engineering Mechanics  
Stanford University

THIRD EDITION

In collaboration with

D. H. YOUNG

Professor of Engineering Mechanics  
Stanford UniversityD. VAN NOSTRAND COMPANY, INC.  
TORONTO NEW YORK LONDON

1955

Тимошенко С. П., **Колебания в инженерном деле.**  
Главная редакция физико-математической литературы издательства  
«Наука», 1967, 444 стр.

Излагаются основы общей теории колебаний. Ее приложения к решению технических задач иллюстрированы различными примерами, взятыми из практики наблюдения над колебаниями машин и сооружений в эксплуатации. Первая глава посвящена колебаниям систем с одной степенью свободы. Во второй главе рассматриваются системы с нелинейными и переменными упругими характеристиками. Третья глава посвящена системам с двумя степенями свободы, а четвертая — системам с несколькими степенями свободы. В пятой главе рассматриваются колебания упругих тел, в частности колебания мостов, судовых корпусов, турбинных дисков и т. д.

Рис. 242, табл. 24, библиограф. ссылки 178

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |   |
|---|---|
| <i>Предисловие к первому изданию</i> . . . . .  | 5 |
| <i>Предисловие к третьему изданию</i> . . . . . | 7 |
| <i>От переводчика</i> . . . . .                 | 8 |

### ГЛАВА I

#### СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

|  |     |
|--|-----|
| 1. Свободные гармонические колебания . . . . .                                     | 9   |
| 2. Крутильные колебания . . . . .  | 17  |
| 3. Применение уравнения энергии к задачам о колебаниях . . . . .                   | 22  |
| 4. Метод Рэлея . . . . .   | 30  |
| 5. Критическая скорость вращающегося вала . . . . .                                | 39  |
| 6. Вынужденные колебания: установившийся режим . . . . .                           | 45  |
| 7. Вынужденные колебания: переходный процесс . . . . .                             | 50  |
| 8. Технические приложения теории вынужденных колебаний . . . . .                   | 54  |
| 9. Другие технические приложения . . . . .   | 59  |
| 10. Уравновешивание вращающихся машин . . . . .                                    | 62  |
| 11. Демпфирование . . . . .  | 69  |
| 12. Свободные колебания с вязким сопротивлением . . . . .                          | 72  |
| 13. Вынужденные колебания с вязким сопротивлением . . . . .                        | 78  |
| 14. Упругая подвеска машин с демпфированием . . . . .                              | 87  |
| 15. Свободные колебания с сухим трением . . . . .                                  | 90  |
| 16. Вынужденные колебания с сухим трением и другими видами демпфирования . . . . . | 93  |
| 17. Общий случай периодической возмущающей силы . . . . .                          | 97  |
| 18. Общий случай возмущающей силы: переходный процесс . . . . .                    | 104 |
| 19. Общий случай возмущающей силы: графическое решение . . . . .                   | 115 |
| 20. Автоколебания . . . . .  | 119 |

### ГЛАВА II

#### СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНЫМИ И ПЕРЕМЕННЫМИ УПРУГИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

|   |     |
|---|-----|
| 21. Примеры нелинейных систем . . . . .   | 124 |
| 22. Свободные колебания систем с нелинейной восстанавливающей силой . . . . .                 | 128 |
| 23. Нелинейные колебания: графический метод . . . . .   | 135 |
| 24. Свободные нелинейные колебания: численное решение . . . . .                               | 141 |
| 25. Приложение метода последовательных приближений к задачам о свободных колебаниях . . . . . | 148 |
| 26. Вынужденные нелинейные колебания: установившийся режим . . . . .                          | 156 |
| 27. Применение метода Рунге к нелинейным колебаниям . . . . .                                 | 162 |
| 28. Примеры переменных упругих характеристик . . . . .  | 167 |
| 29. Условия неустойчивости систем с переменными упругими характеристиками . . . . .           | 175 |

## ГЛАВА III

## СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

|  |     |
|--|-----|
| 30. Примеры систем с несколькими степенями свободы         | 184 |
| 31. Свободные колебания систем с двумя степенями свободы   | 186 |
| 32. Примеры свободных колебаний                            | 192 |
| 33. Вынужденные колебания систем с двумя степенями свободы | 201 |
| 34. Колебания с вязким сопротивлением                      | 205 |
| 35. Устойчивость установившегося режима движения           | 216 |
| 36. Прецессия вращающегося вала, вызванная гистерезисом    | 223 |

## ГЛАВА IV

## СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

|  |     |
|--|-----|
| 37. Свободные колебания систем с несколькими степенями свободы                 | 229 |
| 38. Свободные крутильные колебания валов                                       | 234 |
| 39. Приближенные методы вычисления собственных частот                          | 239 |
| 40. Вынужденные крутильные колебания вала с несколькими дисками                | 249 |
| 41. Крутильные колебания коленчатого вала дизеля                               | 255 |
| 42. Поглотитель колебаний с сухим трением                                      | 258 |
| 43. Поперечные колебания многоопорных валов                                    | 261 |
| 44. Влияние гироскопического эффекта на критические скорости вращающихся валов | 273 |
| 45. Влияние веса вала и дисков на критическую скорость                         | 281 |
| 46. Влияние деформируемости валов на уравнивание роторов                       | 285 |

## ГЛАВА V

## КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

|   |     |
|---|-----|
| 47. Свободные продольные колебания призматических стержней                        | 289 |
| 48. Вынужденные продольные колебания призматических стержней                      | 297 |
| 49. Колебания стержня с грузом на конце   | 302 |
| 50. Крутильные колебания круглых валов  | 309 |
| 51. Свободные поперечные колебания призматических стержней                        | 314 |
| 52. Свободные колебания стержня с шарнирно опертыми концами                       | 321 |
| 53. Свободные колебания стержней с другими условиями на концах                    | 326 |
| 54. Свободные колебания неразрезных балок   | 331 |
| 55. Вынужденные колебания балки с опертыми концами                                | 334 |
| 56. Колебания мостов  | 346 |
| 57. Вынужденные колебания балок с различными условиями на концах                  | 352 |
| 58. Колебания, вызываемые заданным движением некоторых поперечных сечений стержня | 356 |
| 59. Влияние осевых сил на поперечные колебания                                    | 362 |
| 60. Колебания балок на упругом основании  | 365 |
| 61. Метод Рунта   | 368 |
| 62. Колебания балок переменного поперечного сечения                               | 373 |
| 63. Колебания судовых корпусов  | 380 |
| 64. Численные методы определения частот поперечных колебаний                      | 383 |
| 65. Совместные изгибно-крутильные колебания балок                                 | 392 |
| 66. Поперечный удар по балке  | 396 |
| 67. Продольный удар по призматическому стержню                                    | 401 |
| 68. Колебания кругового кольца  | 409 |
| 69. Колебания мембран   | 414 |
| 70. Колебания пластин   | 424 |
| 71. Колебания турбинных дисков  | 436 |

|                      |     |
|----------------------|-----|
| Предметный указатель | 443 |
|----------------------|-----|

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

С увеличением размеров и скоростей современных машин в инженерных расчетах становится все более и более важным решение задач, связанных с колебаниями. Хорошо известно, что только на основе теории колебаний могут быть полностью выяснены такие практически важные проблемы, как уравнивание машин, крутильные колебания валов и зубчатых передач, колебания турбинных лопаток и турбинных дисков, прецессия вращающихся валов, колебания рельсового пути и мостов под действием движущихся грузов, колебания фундаментов. Лишь при помощи этой теории можно установить наиболее удачные пропорции конструкций, отодвигающие эксплуатационные условия работы машин возможно дальше от условий возникновения больших колебаний.

В настоящей книге излагаются основы общей теории колебаний, причем ее приложения к решению технических задач иллюстрированы различными примерами, взятыми во многих случаях из практики наблюдений над колебаниями машин и сооружений в эксплуатации. При создании этой книги автор следовал лекциям по колебаниям, читанным им в 1925 г. для инженеров-механиков компании Вестингауз (Westinghouse Electric and Manufacturing Company), а также некоторым главам ранее опубликованной книги по теории упругости \*).

В общих чертах содержание книги следующее.

Первая глава посвящена гармоническим колебаниям систем с одной степенью свободы. Рассмотрена общая теория свободных и вынужденных колебаний и показано применение этой теории к уравниванию машин и к виброизмерительным приборам. Далее рассмотрен приближенный метод Рэлея для исследования колебаний более сложных систем; этот метод применен к вычислению критических скоростей вращающихся валов переменного поперечного сечения.

Вторая глава содержит теорию негармонических колебаний систем с одной степенью свободы. Изложены приближенные методы исследования свободных и вынужденных колебаний таких систем. Иссле-

\*) Теория упругости, т. II, 1916, СПб.

дован в деталях частный случай, когда жесткость системы изменяется во времени; результаты теории применены к исследованию колебаний электровозов с передачей спарниками.

В третьей главе рассмотрены системы с несколькими степенями свободы. Изложена общая теория колебаний таких систем и дано ее применение к таким инженерным задачам, как колебания экипажей, крутильные колебания валов, критические скорости вращения многоопорных валов, гасители колебаний.

Четвертая глава содержит теорию колебаний упругих тел. Рассмотрены задачи о продольных, крутильных и поперечных колебаниях призматических стержней, о колебаниях стержней переменного поперечного сечения, о колебаниях мостов, турбинных лопаток и изложена теория колебаний круговых колец, мембран, пластин и турбинных дисков.

В приложении дано краткое описание наиболее важной виброизмерительной аппаратуры, которая применяется при экспериментальных исследованиях колебаний.

Автор глубоко благодарен руководству компании Вестингауз, которая дала ему возможность уделить значительное время работе над рукописью и использовать в качестве примеров исследованные инженерами компании важные случаи колебаний машин. Он также пользуется случаем, чтобы поблагодарить многочисленных друзей, в различных формах содействовавших написанию книги, в особенности Дж. М. Лессельса, Дж. Ормондройда и Дж. П. Ден-Гартога, которые полностью прочли рукопись и дали много существенных советов. Он обязан также Ф. К. Виларму за изготовление чертежей и компании Ван-Ностранд за заботу об издании этой книги.

*С. Тимошенко*

Ани Арбор, Мичиган,  
22 мая 1928 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

После появления в 1928 г. первого издания книги «Колебания в инженерном деле» ее предмет вошел почти во все учебные планы подготовки инженеров-механиков. Изучение колебаний становится все более и более важным для инженеров-строителей и получило значительное развитие, в частности, в области нелинейных колебаний. Главной целью настоящего переработанного издания является приспособление книги к задачам обучения и отражение в ней наиболее важных новых результатов.

Глава I, относящаяся к системам, имеющим одну степень свободы, полностью переработана с тем, чтобы охватить широкую область приложений; в главу добавлено значительное число задач. Глава II, посвященная нелинейным колебаниям, значительно расширена и содержит изложение ряда новых способов трактовки соответствующих задач. Чтобы сделать книгу более доступной для студентов, обладающих знаниями лишь в объеме элементарного курса динамики, в главах III и IV исключено применение уравнений Лагранжа и все выводы построены на более привычном принципе Даламбера. В остальном эти главы, относящиеся к системам с несколькими степенями свободы, несущественно отличаются от предыдущих изданий. Глава V, посвященная колебаниям упругих тел, также полностью переработана; в ней рассмотрено несколько новых вопросов, как, например, совместные изгибно-крутильные колебания балок. Наконец, опущено приложение, посвященное виброизмерительным приборам. В последние годы техника измерения колебаний развилась столь значительно, что соответствующие вопросы оказались далеко выходящими за рамки книги настоящего объема. Читатели, интересующиеся этой проблемой, могут обратиться к книге M. Hetenyi, Handbook of Experimental Stress Analysis.

*С. Тимошенко, Д. Х. Янг*

Пало Алто, Калифорния,  
ноябрь 1954 г.

Советский читатель знаком с книгой С. П. Тимошенко по переводу ее первого издания, вышедшего в США в 1928 г. (С. П. Тимошенко, Теория колебаний в инженерном деле, ОНТИ, М.—Л., 1931—1934). С тех пор книга была дважды переиздана в США (второе издание — в 1937 г. и третье издание — в 1955 г.), причем последнее издание существенно отличается от предыдущих.

Настоящий перевод сделан с третьего издания. Четкость языка оригинала сделала почти совершенно излишними дополнительные подстрочные пояснения. В отдельных местах добавлены ссылки на отечественную литературу и исправлены мелкие погрешности оригинала. Все принадлежащие переводчику замечания заключены в квадратные скобки.

При переводе многочисленных задач и примеров взамен английских мер оригинала использованы метрические меры (с округлением).

В настоящем, втором издании перевода сделаны лишь отдельные мелкие поправки текста первого издания (Физматгиз, Москва, 1959).

Я. Г. Пановко

Ленинград,  
сентябрь 1966 г.

1. **Свободные гармонические колебания.**—Если упругую систему, например нагруженную балку, закрученный вал или деформированную пружину, отклонить от положения равновесия ударом или дополнительной внезапно приложенной и затем устраненной силой, то в возмущенном положении упругие силы не будут находиться в равновесии с нагрузкой и возникнут колебания. В общем случае упругая система может совершать колебания различных видов. Например, колеблющаяся струна или балка может принимать различные формы в зависимости от числа узлов, подразделяющих ее длину. В простейших случаях конфигурация колеблющейся системы может быть определена только одной координатой. Такие системы называются *системами с одной степенью свободы*.

Рассмотрим случай, показанный на рис. 1. Если устройство допускает только вертикальные перемещения груза  $W$  и масса пружины мала сравнительно с массой груза  $W$ , то эту систему можно рассматривать как имеющую *одну степень свободы*. Конфигурация системы будет полностью определена вертикальным смещением груза.

Колебания этой системы могут быть вызваны мгновенным импульсом или внезапным приложением и последующим устранением внешней силы. Такие колебания, которые поддерживаются только силой упругости пружины, называются *свободными* или *собственными* колебаниями. Аналитическое выражение этих колебаний может быть получено из дифференциального уравнения движения; такое уравнение всегда может быть записано, если известны действующие на движущееся тело силы.

Пусть  $k$  обозначает груз, необходимый для того, чтобы вызвать удлинение пружины, равное единице. Эта величина называется *коэффициентом жесткости*. Если нагрузка измеряется в килограммах и удлинение в сантиметрах, то коэффициент жесткости будет

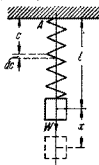


Рис. 1.



получаться в килограммах на сантиметр. Статическая деформация пружины под действием груза  $W$  будет

$$\delta_{ст} = \frac{W}{k}.$$

Обозначив через  $x$  вертикальное перемещение колеблющегося груза от его положения равновесия и считая это перемещение положительным, если оно направлено вниз, получим выражение для силы, растягивающей пружину, при любом положении груза:

$$F = W + kx. \quad (a)$$

Для вывода дифференциального уравнения движения воспользуемся законом Ньютона, согласно которому произведение массы материальной точки на ее ускорение равно силе, действующей в направлении ускорения. В нашем случае масса колеблющегося тела равна  $W/g$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести; ускорение тела определяется второй производной перемещения по времени и будет обозначаться через  $\ddot{x}$ ; силами, действующими на колеблющееся тело, являются действующая вниз сила веса  $W$  и сила  $F$  натяжения пружины (а), которая действует вверх при положении груза, показанном на рис. 1. Таким образом, в рассматриваемом случае дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{W}{g} \ddot{x} = W - (W + kx). \quad (b)$$

Это равенство выполняется для любого положения тела. Если, например, тело в его колебательном движении занимает такое положение выше положения равновесия, что в пружине вызывается сжатие, то выражение (а) становится отрицательным, и оба члена в правой части уравнения (b) получают одинаковые знаки. Таким образом, в данном случае сила упругости пружины прибавляется к силе веса, как это и должно быть.

Если ввести обозначение

$$p^2 = \frac{kg}{W} = \frac{g}{\delta_{ст}}, \quad (c)$$

то уравнение (b) может быть представлено в следующей форме:

$$\ddot{x} + p^2 x = 0. \quad (1)$$

Этому уравнению можно удовлетворить, если принять  $x = C_1 \cos pt$  или  $x = C_2 \sin pt$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. Общее решение уравнения (1) получится в результате сложения этих решений:

$$x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt. \quad (2)$$

Как видно, вертикальное движение груза  $W$  носит колебательный характер, так как  $\cos pt$  и  $\sin pt$  являются периодическими функциями, повторяющими свои значения после некоторого интервала времени  $\tau$ , удовлетворяющего равенству

$$p(\tau + t) - pt = 2\pi. \quad (d)$$

Этот интервал времени называется *периодом* колебаний. Из равенства (d) его величина

$$\tau = \frac{2\pi}{p},$$

или, используя обозначение (c),

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{W}{kg}} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{ст}}{g}}. \quad (3)$$

Как видно, период колебаний зависит только от веса груза  $W$  и коэффициента жесткости  $k$  и не зависит от размахов колебаний. Мы можем также сказать, что период колебаний подвешенного груза  $W$  совпадает с периодом колебаний математического маятника, длина которого равна статическому отклонению  $\delta_{ст}$ . Период  $\tau$  можно вычислить из уравнения (3), если теоретически или экспериментально найдено статическое отклонение  $\delta_{ст}$ . Число циклов колебаний в единицу времени, например в секунду, называется *частотой* колебаний. Обозначая частоту через  $f$ , получим:

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}}. \quad (4)$$

Представленное уравнением (2) колебательное движение называется *гармоническим движением*. Для определения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  нужно рассмотреть начальные условия. Положим, например, что в начальный момент ( $t=0$ ) груз  $W$  имеет перемещение  $x_0$  от положения равновесия и что начальная скорость груза равна  $\dot{x}_0$ . Подставляя  $t=0$  в уравнение (2), получим:

$$x_0 = C_1. \quad (e)$$

Дифференцируя теперь уравнение (2) по времени и подставляя  $t=0$  в выражение производной, имеем:

$$\dot{x}_0 = C_2. \quad (f)$$

Подставляя в уравнение (2) значения постоянных (e) и (f), получим следующее выражение для колебательного движения груза  $W$ :

$$x = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt. \quad (5)$$

Как видно, в этом случае колебания состоят из двух частей: колебаний, которые пропорциональны  $\cos pt$  и зависят от начального смещения груза, и колебаний, которые пропорциональны  $\sin pt$  и зависят от начальной скорости  $\dot{x}_0$ . Каждая из этих частей может быть представлена графически, как показано на рис. 2, а и б, где перемещение показано в функции времени. Полное перемещение  $x$  колеблющегося груза  $W$  в любой момент получится суммированием ординат этих двух кривых для этого момента; в результате образуется кривая, показанная на рис. 2, в.

В другом способе представления колебаний используется вра-

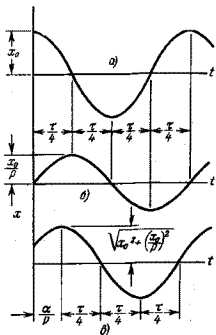


Рис. 2.

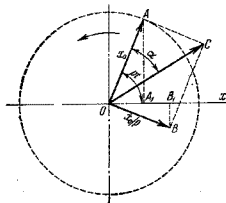


Рис. 3.

щающий вектор. Вообразим вектор  $\overline{OA}$  (рис. 3), по величине равный  $x_0$ , вращающийся с постоянной угловой скоростью  $p$  вокруг полюса  $O$ . Эта скорость называется *угловой частотой* колебаний. Если в начальный момент ( $t=0$ ) вектор  $\overline{OA}$  совпадает с осью  $x$ , то угол, который он составляет с той же осью в любой момент  $t$ , равен  $pt$ . Проекция  $OA_1$  этого вектора на ось  $x$  равна  $x_0 \cos pt$  и представляет первый член выражения (5). Беря теперь другой вектор  $\overline{OB}$ , равный  $x_0/p$  и перпендикулярный к вектору  $\overline{OA}$ , получим, что его проекция на ось  $x$  даст второй член выражения (5). Полное перемещение  $x$  колеблющегося груза определится теперь сложением проекций на ось  $x$  этих двух взаимно перпендикулярных векторов  $\overline{OA}$  и  $\overline{OB}$ , вращающихся с угловой скоростью  $p$ .

Тот же результат получится, если вместо векторов  $\overline{OA}$  и  $\overline{OB}$  мы рассмотрим вектор  $\overline{OC}$ , равный геометрической сумме двух пре-

дующих векторов, и возьмем проекцию этого вектора на ось  $x$ . Величина этого вектора согласно рис. 3 равна

$$\overline{OC} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2} \quad (g)$$

и угол, который он составляет с осью  $x$ , равен

$$pt - \alpha,$$

где

$$\alpha = \arctg \frac{\dot{x}_0}{px_0}. \quad (h)$$

Из сказанного очевидно, что уравнение (5) может быть представлено в эквивалентной форме:

$$x = \overline{OC} \cos(pt - \alpha), \quad (6)$$

где  $\overline{OC}$  и  $\alpha$ , представленные выражениями (g) и (h), являются новыми постоянными, зависящими от начальных условий движения. Как видно, сложение двух простых гармонических движений, из которых одно пропорционально  $\cos pt$ , а другое  $\sin pt$ , есть также простое гармоническое движение, пропорциональное  $\cos(pt - \alpha)$ , как это графически представлено на рис. 2, в. Максимальная ордината этой кривой, равная вектору  $\overline{OC}$  на рис. 3, выражает наибольшее перемещение колеблющегося тела от его положения равновесия; оно называется *амплитудой колебаний*. Максимальная ордината кривой (рис. 2, в) смещена относительно ординаты кривой (рис. 2, а) на величину  $\alpha/p$ , соответствующую углу  $\alpha$  между двумя вращающимися векторами  $\overline{OA}$  и  $\overline{OC}$ . В таком случае можно сказать, что колебания, представленные кривой рис. 2, в, запаздывают относительно колебаний, представленных кривой рис. 2, а; угол  $\alpha$  называется *сдвигом фаз* этих двух колебаний.

### Примеры

1. Груз  $W = 15$  кг подвешен на вертикальной стальной проволоке длиной  $l = 125$  см и площадью поперечного сечения  $A = 0,0065$  см<sup>2</sup>. Определить частоту свободных колебаний груза, если модуль упругости стали  $E = 2 \cdot 10^8$  кг/см<sup>2</sup>. Определить амплитуду этих колебаний, если начальное перемещение  $x_0 = 0,025$  см и начальная скорость  $\dot{x}_0 = 2,5$  см/сек.

**Решение.** Статическое удлинение проволоки равно  $\delta_{ст} = \frac{15 \cdot 125}{2 \cdot 10^4 \cdot 0,0065} = 0,144$  см. Тогда из формулы (4)  $f = 15,2$  сек<sup>-1</sup>. Амплитуда колебаний из формулы (g) составляет

$$\sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/p)^2} = \sqrt{(0,025)^2 + [2,5/2\pi \cdot 15,2]^2} = 0,0367$$
 см.

2. Груз  $W$  опирается на балку длиной  $l$  (рис. 4). Определить коэффициент жесткости балки и частоту свободных вертикальных колебаний груза, пренебрегая массой балки.

**Решение.** Статический прогиб балки под нагрузкой равен

$$\delta_{ст} = \frac{Wc^2(l-c)^2}{3EIJ}$$

Здесь  $c$  — расстояние груза от левого конца балки и  $EJ$  — изгибная жесткость сечения балки в вертикальной плоскости. Предполагается, что эта плоскость содержит одну из главных центральных осей инерции поперечного сечения балки, так что вертикальные нагрузки вызывают только вертикальные перемещения. По определению коэффициент жесткости в данном случае равен

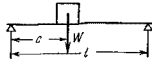


Рис. 4.

$$k = \frac{3EIJ}{c^2(l-c)^2}$$

Искомая частота может быть найдена подстановкой  $\delta_{ст}$  в формулу (4). Влияние массы балки на частоту колебаний будет рассмотрено ниже.

3. Груз  $W$  подвешен на двух пружинах, как показано на рис. 5, а. Определить общий коэффициент жесткости и частоту вертикальных колебаний груза, если коэффициенты жесткости пружин равны  $k_1$  и  $k_2$ . Определить частоту колебаний груза  $W$ , если он подвешен на двух одинаковых пружинах, как показано на рис. 5, б.

**Решение.** В случае, показанном на рис. 5, а, статическое перемещение груза  $W$  равно

$$\delta_{ст} = \frac{W}{k_1} + \frac{W}{k_2} = \frac{W(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}$$

Общий коэффициент жесткости равен  $k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$ . При подстановке  $\delta_{ст}$  в формулу (4) получится частота колебаний

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{gk_1 k_2}{W(k_1 + k_2)}}$$

В случае, показанном на рис. 5, б,

$$\delta_{ст} = \frac{W}{2k}$$

$$\text{и } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2gk}{W}}$$

4. Определить период горизонтальных колебаний рамы (рис. 6) с грузом  $W$ , расположенным посередине пролета. В этом расчете массу рамы не учитывать.

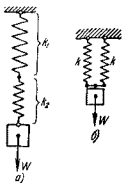


Рис. 5.

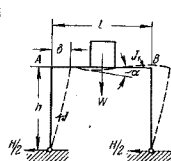


Рис. 6.

**Решение.** Начнем со статической задачи и определим горизонтальное смещение  $\delta$  рамы, которое вызывается горизонтальной силой  $H$ , действующей в точке расположения груза  $W$ . Пренебрегая деформациями растяжения — сжатия элементов и учитывая только изгиб, найдем, что горизонтальный стержень  $AB$  изгибается двумя равными моментами  $Hh/2$ . Тогда угол поворота

узлов  $A$  и  $B$  равен

$$\alpha = \frac{HhI}{12EJ_1}$$

Рассматривая теперь стойки рамы как консоли, изгибаемые горизонтальными силами  $H/2$ , находим, что горизонтальное перемещение  $\delta$  будет состоять из двух частей, одна из которых определяется изгибом консолей, а другая — вычисленным выше поворотом  $\alpha$  узлов  $A$  и  $B$ . Следовательно,

$$\delta = \frac{Hh^3}{6EJ} + \frac{Hh^2\alpha}{12EJ_1} = \frac{Hh^3}{6EJ} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{I}{h} \frac{J}{J_1} \right)$$

В таком случае коэффициент жесткости равен

$$k = \frac{H}{\delta} = \frac{6EJ}{h^3 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{I}{h} \frac{J}{J_1} \right)}$$

Подставляя в формулу (3), получим:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{Wh^3 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{I}{h} \frac{J}{J_1} \right)}{6gEJ}}$$

Если жесткость горизонтального элемента велика по сравнению с жесткостью стоек, то член, содержащий отношение  $J/J_1$ , мал и им можно пренебречь. Тогда

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{Wh^3}{6gEJ}}$$

и частота равна

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6gEJ}{Wh^3}}$$

5. Предполагая, что груз  $W$  (рис. 7) представляет кабину лифта, движущегося вниз с постоянной скоростью  $v_0$ , и учитывая упругость стального троса, определить наибольшее напряжение в сечении, если верхний конец  $A$  троса внезапно остановлен. Принять, что вес  $W = 4500$  кг, длина троса  $l = 18$  м, площадь поперечного сечения троса  $A = 16$  см<sup>2</sup>, модуль упругости материала троса  $E = 10^8$  кг/см<sup>2</sup>, скорость  $v_0 = 1$  м/сек. Весом троса пренебречь.

**Решение.** При равномерном движении кабины растягивающая сила в тросе равна  $W = 4500$  кг и удлинение троса в момент остановки равно  $\delta_{ст} = W/AE = 0,51$  см. Двигавшийся со скоростью  $v_0$  лифт не может внезапно остановиться и начнет совершать колебания на тросе. Будем отсчитывать время от момента остановки; в этот момент смещение груза от положения равновесия равно нулю и скорость равна  $v_0$ . Из уравнения (5) заключаем, что амплитуда колебаний равна  $v_0/p$ , где  $p = \sqrt{g/\delta_{ст}} = 44$  сек<sup>-1</sup> и  $v_0 = 100$  см/сек; тогда наибольшее удлинение троса равно  $\delta_2 = \delta_{ст} + v_0/p = 0,51 + 100/44 = 2,78$  см и наибольшее напряжение равно  $(4500/16)(2,78/0,51) = 1530$  кг/см<sup>2</sup>. Как видно, напряжение в сечении троса вследствие внезапной остановки его верхнего конца в данном случае возрастает примерно в пять раз.

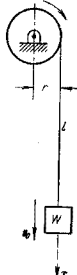


Рис. 7.

## Задачи

1. Винтовая пружина на рис. 1 имеет средний диаметр витка  $D=2,5$  см, диаметр проволоки  $d=0,25$  см и содержит  $n=20$  витков. Модуль сдвига материала проволоки  $G=0,8 \cdot 10^8$  кг/см<sup>2</sup>, и вес подвешенного груза  $W=14$  кг. Вычислить период свободных колебаний.

Ответ:  $\tau=0,67$  сек.

2. Балка, показанная на рис. 4, имеет пролет  $l=3,6$  м и тавровое поперечное сечение, показанное на рис. 8. Материалом служит алюминий, для которого модуль упругости  $E=0,7 \cdot 10^8$  кг/см<sup>2</sup>. Вес  $W=230$  кг. Вычислить частоту свободных вертикальных колебаний, если груз удален от левой опоры на расстояние  $c=1,2$  м. Пренебречь влиянием собственной массы балки.

Ответ:  $f=6,13$  кол/сек.

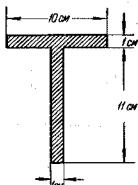


Рис. 8.

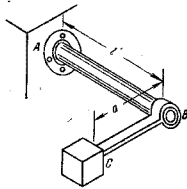


Рис. 9.

3. Каково будет наибольшее динамическое перемещение  $\delta_{\max}$ , если груз  $W$  (см. предыдущую задачу) падает на балку посередине пролета с высоты  $k=2,5$  см, измеряемой от уровня опор?

Ответ:  $\delta_{\max}=3,05$  см.

4. Вычислить частоту свободных колебаний груза  $W=4,5$  ка (рис. 9). Вал  $A$  имеет сплошное круглое сечение диаметром  $d=2,5$  см, длину  $l=1$  м и заделан в стене в сечении  $A$ . Консольная полоса  $BC$  жестко прикреплена к валу в сечении  $B$  и имеет длину  $a=0,3$  м, ширину  $b=2,5$  см и толщину  $t=0,6$  см. Материал всей конструкции — сталь для которой  $E=2 \cdot 10^8$  кг/см<sup>2</sup> и  $G=0,8 \cdot 10^8$  кг/см<sup>2</sup>.

Ответ:  $f=5,11$  кол/сек.

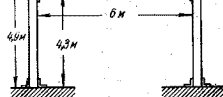


Рис. 10.

5. Чтобы уменьшить наибольшие динамические напряжения, найденные для условий примера 5, между нижним концом троса и кабиной лифта помещена короткая пружина, имеющая коэффициент жесткости  $k=360$  кг/см. Вычислить наибольшие динамические напряжения, которые будут вызваны в этом случае, если верхний конец троса внезапно остановлен. Принять те же численные значения, что в примере 5.

Ответ:  $\sigma_{\max}=530$  кг/см<sup>2</sup>.

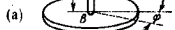
6. Портальная рама состоит из тяжелой двутавровой балки № 60 длиной 6 м, опертая на две относительно гибкие стойки высотой 4,9 м (рис. 10).

Каждая стойка имеет коробчатое поперечное сечение площадью  $A=26$  см<sup>2</sup> и наименьшего радиуса инерции  $r=1,6$  см;  $E=2 \cdot 10^8$  кг/см<sup>2</sup>. Вычислить собственный период боковых колебаний в плоскости рамы: а) предполагая полную жесткость соединения элементов; б) предполагая шарнирную связь балки со стойками. Изгибом балки пренебречь. [Расчетную высоту стоек принять равной 4,6 м.]

Ответ:  $\tau_1=0,813$  сек,  $\tau_2=2,30$  сек.

2. Крутильные колебания. Рассмотрим вертикальный вал, к нижнему концу которого прикреплен круглый горизонтальный диск (рис. 11). Если в плоскости диска приложить крутящий момент, а затем его внезапно снять, то возникнут свободные крутильные колебания вала с диском. Положение диска в любой момент может быть определено углом  $\varphi$ , который составляет радиус колеблющегося диска с направлением того же радиуса, когда диск находится в покое. В этом случае за коэффициент жесткости примем крутящий момент  $k$ , который необходим, чтобы вызвать угол закручивания вала, равный одному радиану. В случае круглого вала длиной  $l$  и диаметром  $d$  найдем из известной формулы для угла закручивания

$$k = \frac{\pi d^4 G}{32l}.$$



(а)

Рис. 11.

При любом угле закручивания  $\varphi$  в процессе колебаний крутящий момент в сечении вала равен  $k\varphi$ . Из уравнения движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, следует, что момент инерции тела относительно этой оси, умноженный на угловое ускорение, равен моменту внешних сил, действующих на тело относительно оси вращения. В нашем случае этот момент равен и противоположен по направлению действующему на вал крутящему моменту и получается следующее дифференциальное уравнение движения:

$$J\ddot{\varphi} = -k\varphi, \quad (b)$$

где  $J$  — момент инерции диска относительно оси вращения, которая в данном случае совпадает с осью вала, и  $\ddot{\varphi}$  — угловое ускорение диска. При обозначении

$$p^2 = \frac{k}{J} \quad (c)$$

дифференциальное уравнение движения (b) получает вид:

$$\ddot{\varphi} + p^2\varphi = 0. \quad (7)$$

Это уравнение имеет форму уравнения (1) предыдущего параграфа, так что решение уравнения (7) имеет вид (5), и мы получим:

$$\varphi = \varphi_0 \cos pt + \frac{\dot{\varphi}_0}{p} \sin pt, \quad (8)$$

где  $\varphi_0$  и  $\dot{\varphi}_0$  — соответственно угловое перемещение и угловая скорость диска в начальный момент  $t=0$ . Поступая, как и в предыдущем параграфе, найдем из уравнения (8), что период крутильных колебаний равен

$$\tau = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k}} \quad (9)$$

и их частота равна

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{J}}. \quad (10)$$

В случае круглого диска постоянной толщины и диаметра  $D$

$$J = \frac{WD^3}{8g},$$

где  $W$  — вес диска. Подставив это в уравнения (9) и (10) и используя выражение (а), получим:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{4WD^3}{\pi g d^4 G}}, \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi g d^4 G}{4WD^3}}. \quad (д)$$

В нашем выводе было предположено, что вал имеет постоянный диаметр  $d$ . Если вал состоит из участков различных диаметров, можно легко привести его к эквивалентному валу, имеющему постоянный диаметр. Предположим, например, что вал состоит из двух участков длиной  $l_1$  и  $l_2$  и соответственно диаметрами  $d_1$  и  $d_2$ . Если к этому валу приложен момент  $M_l$ , то вызываемый им угол закручивания равен

$$\varphi = \frac{32M_l l_1}{\pi d_1^4 G} + \frac{32M_l l_2}{\pi d_2^4 G} = \frac{32M_l}{\pi d_1^4 G} \left( l_1 + l_2 \frac{d_1^4}{d_2^4} \right).$$

Как видно, угол закручивания вала, имеющего два диаметра  $d_1$  и  $d_2$ , такой же, как угол закручивания вала постоянного диаметра  $d_1$  и приведенной длины  $L$ , определяемой по формуле

$$L = l_1 + l_2 \frac{d_1^4}{d_2^4}.$$

Вал длиной  $L$  и диаметром  $d_1$  является в этом случае эквивалентным валом; он имеет тот же коэффициент жесткости, что и данный вал из двух различных диаметров.

В общем случае, если имеется вал, состоящий из участков различных диаметров, можно, не меняя коэффициента жесткости вала, заменить любой участок длиной  $l_n$  и диаметра  $d_n$  участком диаметра  $d$  и длиной  $l$ , определяемой по формуле

$$l = l_n \frac{d^4}{d_n^4}. \quad (11)$$

Результаты, полученные для случая, показанного на рис. 11, можно применить также к случаю вала с двумя вращающимися концевыми массами (рис. 12). Этот случай имеет большую практическую важность, так как устройства подобного рода очень часто встречаются в конструкциях машин. Примером может служить вал воздушного или гребного винта с винтом на одном конце и двигателем на другом конце\*). Если к концам вала на рис. 12 приложить две равные противоположно направленные закручивающие пары, а затем их внезапно удалить, то возникнут крутильные колебания, в процессе которых концевые массы все время вращаются в противоположных направлениях\*\*. Из этого можно сразу заключить, что существует некоторое промежуточное поперечное сечение вала, которое в процессе колебаний остается неподвижным. Это поперечное сечение называется *узловым поперечным сечением*, и его положение может быть найдено из условия, что оба участка вала, справа и слева от узлового сечения, должны иметь одинаковый период колебаний; в противном случае не будет соблюдено условие, что массы на концах все время вращаются в противоположных направлениях.

Применив формулу (9) к каждой из двух частей вала, получим

$$\sqrt{\frac{J_1}{k_1}} = \sqrt{\frac{J_2}{k_2}}, \quad \text{или} \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{J_1}{J_2}, \quad (е)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — коэффициенты жесткости соответственно для левого и правого участков вала. Эти величины, как видно из выражения (а), обратно пропорциональны длинам соответствующих участков вала; из равенств (е) следует

$$\frac{a}{b} = \frac{J_2}{J_1},$$

и так как  $a + b = l$ , получаем:

$$a = \frac{lJ_2}{J_1 + J_2}, \quad b = \frac{lJ_1}{J_1 + J_2}. \quad (f)$$

\*) Именно в этом случае инженеры впервые установили практическую важность тщательного исследования колебаний; см. Н. Frahm, Z. Ver. deut. Ing., стр. 797, 1902.

\*\*) Это следует из закона сохранения главного момента количества движения. В начальный момент главный момент количества движения двух дисков относительно оси вала равен нулю и должен оставаться равным нулю, так как момент внешних сил относительно той же оси отсутствует (силами трения пренебрегаем). Равенство нулю главного момента количества движения требует, чтобы обе массы вращались в противоположных направлениях.

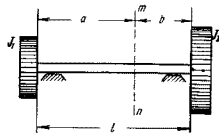


рис. 12.

Используя теперь выражения (9) и (10) для левого участка вала, получаем:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{k_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{32I_1 J_2}{\pi d^4 G (J_1 + J_2)}}, \quad (12)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi d^4 G (J_1 + J_2)}{32I_1 J_2}}. \quad (13)$$

По этим формулам можно вычислить период и частоту крутильных колебаний, если известны размеры вала, модуль  $G$  и моменты инерции масс. В данном случае мы пренебрегаем массой вала; ее влияние на период колебаний будет рассмотрено ниже.

Из формул (1) можно видеть, что если одна из вращающихся масс имеет весьма большой момент инерции по сравнению с моментом инерции другой массы, то узловое поперечное сечение можно считать расположенным у большей массы и двухмассовая система (рис. 12) приводится к одномассовой (рис. 11).

### Примеры

1. Определить частоту крутильных колебаний вала, на концах которого имеются два круглых диска постоянной толщины (рис. 12), если веса дисков равны  $W_1 = 450$  кг и  $W_2 = 900$  кг и их внешние диаметры составляют соответственно  $D_1 = 125$  см,  $D_2 = 193$  см. Длина вала равна  $l = 300$  см и диаметр его сечения  $d = 10$  см. Модуль сдвига  $G = 0,8 \cdot 10^8$  кг/см<sup>2</sup>.

*Решение.* Расстояние узлового поперечного сечения от большего диска, согласно формуле (f), равно

$$a = \frac{300 \cdot 450 \cdot 125^2}{450 \cdot 125^2 + 900 \cdot 190^2} = \frac{300}{1 + 4,62} = 53,4 \text{ см.}$$

Подставляя во второе выражение (d), получаем:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi \cdot 981 \cdot 10^4 \cdot 0,8 \cdot 10^8}{4 \cdot 900 \cdot 190^2 \cdot 53,4}} = 9,52 \text{ кол/сек.}$$

2. Во сколько раз увеличится частота колебаний вала, рассмотренного в предыдущем примере, если на длине, равной 160 см, диаметр вала увеличивается с 10 до 20 см?

*Решение.* Вал длиной 160 см и диаметром 20 см может быть заменен валом длиной 10 см и диаметром 10 см. Таким образом, длина эквивалентного вала равна  $10 + 140 = 150$  см, т. е. вдвое меньше длины вала, рассмотренного в предыдущем примере. Так как частота свободных колебаний обратно пропорциональна квадратному корню из длины вала (см. формулу (13)), мы заключаем, что в результате усиления вала частота увеличится в отношении  $\sqrt{2} : 1$ .

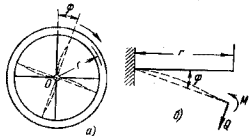


Рис. 13.

3. Определить частоту колебаний кольца (рис. 13) относительно оси  $O$ , предполагая, что центр кольца неподвижен и что повороты обода связаны с некоторым изгибом спиц, как показано на рис. 13 пунктиром. Принять, что общая масса кольца распределена вдоль средней линии обода и длину

спиц положить равной радиусу  $r$  этой средней линии. Принять также, что изгибом обода можно пренебречь, так что касательные к изогнутым осям спиц вблизи их концов имеют направленные радиусов обода. Даны общий вес кольца  $W$  и изгибная жесткость  $B$  спиц.

*Решение.* Рассматривая каждую спицу как консоль длиной  $r$  (рис. 13, б), на конце которой действуют поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$ , и используя известные формулы для изгиба консоли, получаем следующие выражения для угла  $\varphi$  и перемещения  $\frac{M\varphi}{r}$ :

$$\varphi = \frac{Qr^3}{2B} - \frac{Mr}{B},$$

$$r\varphi = \frac{Qr^3}{3B} - \frac{Mr^2}{2B},$$

$$M = \frac{Qr}{3} = \frac{2B\varphi}{r},$$

откуда

Если  $M_1$  обозначает приложенный к ободу крутящий момент, то имеем:

$$M_1 = 4Qr - 4M = \frac{16B\varphi}{r}.$$

Крутящий момент, способный вызвать поворот обода, равный одному радиану, является коэффициентом жесткости и равняется  $k = 16B/r$ . Подставляя в формулу (10), находим искомую частоту

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{16B}{rJ}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{16gB}{Wr^2}}.$$

### Задачи

1. Определить частоту крутильных колебаний диска (рис. 14), если концы вала закреплены в сечениях  $A$  и  $B$ . Обе части вала имеют одинаковый диаметр  $d$ , но различные длины  $l_1$  и  $l_2$ . Момент инерции диска равен  $J$ .

*Ответ.*

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi d^4 G (l_1 + l_2)}{32I_1 l_1 l_2}}.$$

2. Определить эквивалентную длину  $l$  прямого вала, имеющего крутильную жесткость  $C_1$  такую же, как кривошип коленчатого вала (рис. 15). Шеки кривошипа  $CE$  и  $DF$  имеют изгибную жесткость  $B$ . Предположить, что подшипники  $A$  и  $B$  имеют достаточные зазоры и не препятствуют свободным поперечным перемещениям узлов  $C$  и  $D$  при кручении вала. Шатунная шейка  $EF$  имеет крутильную жесткость  $C_2$  и отстоит от оси вала на расстоянии  $r$ .

*Ответ.*

$$l = 2a + \frac{C_1}{C_2} b + 2 \frac{C_1}{B} r.$$

3. Два параллельных вала  $AB$  и  $CD$  оперты на подшипники и вращаются вместе (рис. 16). Каждый вал несет тяжелый диск на внешнем конце,

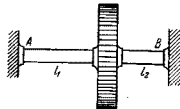


Рис. 14.

и система совершает круговые колебания. Вычислить период свободных колебаний при следующих численных значениях:  $J_a = J_b = 1150 \text{ кг/сек}^2 \text{ см}$ ,  $l_1 = l_2 = 150 \text{ см}$ ,  $d_1 = d_2 = 7,5 \text{ см}$ ,  $r_1/r_2 = 0,5$ . Пренебречь инерцией шестерен и валов. Модуль сдвига  $G = 0,8 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ .

Ответ.  $\tau = 0,203 \text{ сек}$ .

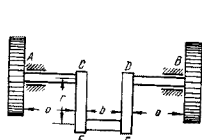


Рис. 15.

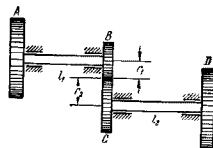


Рис. 16.

4. Для системы, показанной на рис. 16, вывести общее выражение эквивалентной длины  $l$  одного вала диаметром  $d_1$ , связывающего два диска A и D.

Ответ.

$$l = l_1 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 l_2.$$

5. Круговой стальной обод веса  $W$  и среднего радиуса  $r$  прикреплен  $n$  радиальными спицами к неподвижной ступице радиуса  $r_0$ ; каждая из спиц испытывает значительное начальное растяжение  $S_0$  (рис. 17). Определить период свободных круговых колебаний обода, принимая, что при малых амплитудах колебаний растягивающая сила в каждой спице остается постоянной. Спицы шарнирно закреплены на концах и не могут испытывать изгиб.

Ответ.

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{Wr(r-r_0)}{ngS_0^2}}.$$

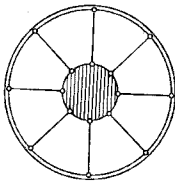


Рис. 17

3. Применение уравнения энергии к задачам о колебаниях. — Для вычисления собственных частот колебательных систем иногда может оказаться выгодным использование закона сохранения энергии

(при условии, что демпфирование пренебрежимо мало). Рассмотрим, например, систему, показанную на рис. 1. Пренебрегая массой пружины и учитывая только массу подвешенного тела, найдем кинетическую энергию системы в процессе колебаний

$$\frac{W}{2g} \dot{x}^2.$$

Потенциальная энергия системы в данном случае состоит из двух частей: 1) потенциальной энергии деформации пружины и 2) потенциальной энергии груза  $W$ , зависящей от его положения. Рассматривая энергию деформации, найдем, что растяжение пружины, соответствующее любому перемещению  $x$  от положения равновесия, равно  $k(\delta_{cr} + x)$  и соответствующая энергия деформации равна  $k(\delta_{cr} + x)^2/2$ . В положении равновесия ( $x=0$ ) эта энергия равна  $k\delta_{cr}^2/2$ . Следовательно, энергия, накопленная в пружине при перемещении  $x$ , равна

$$\frac{k(\delta_{cr} + x)^2}{2} - \frac{k\delta_{cr}^2}{2} = Wx + \frac{kx^2}{2}. \quad (b)$$

Энергия положения груза уменьшается при перемещении на величину  $Wx$ . Следовательно, полное изменение потенциальной энергии системы попросту равно

$$\frac{kx^2}{2}. \quad (c)$$

Имея выражения (a) и (c) и пренебрегая рассеянием энергии, получим уравнение энергии

$$\frac{W}{2g} \dot{x}^2 + \frac{kx^2}{2} = \text{const}. \quad (d)$$

Значение постоянной в правой части этого уравнения определяется начальными условиями. В предположении, что в начальный момент  $t=0$  перемещение тела равно  $x_0$  и начальная скорость равна нулю, начальная полная энергия системы равна  $kx_0^2/2$ , и уравнение (d) принимает вид:

$$\frac{W}{2g} \dot{x}^2 + \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}. \quad (e)$$

Как видно, в процессе колебаний сумма кинетической и потенциальной энергии все время равна начальной энергии деформации. Если при колебаниях координата  $x$  становится равной начальному перемещению  $x_0$ , то скорость  $\dot{x}$  обращается в нуль и энергия системы состоит только из потенциальной энергии. Когда  $x$  становится равным нулю, т. е. когда колеблющийся груз проходит через среднее положение, скорость максимальна, и из уравнения (e) получаем:

$$\frac{W}{2g} \dot{x}_{\text{max}}^2 = \frac{kx_0^2}{2}. \quad (14)$$

Таким образом, максимальная кинетическая энергия равна энергии растяжения в положении крайнего отклонения, когда  $x = x_0$ .

Во всех случаях, когда можно предположить, что движение колеблющегося тела является простым гармоническим движением, что обычно справедливо для малых колебаний<sup>\*)</sup>, можно вычислить частоту колебаний по уравнению (14). Предположим, что движение описывается уравнением  $x = x_0 \sin pt$ . Тогда  $(\dot{x})_{\max} = x_0 p$ . Подставив в уравнение (14), находим:

$$p^2 = \frac{k_2 g}{W}. \quad (f)$$

Это совпадает с результатом, ранее найденным на стр. 10.

Особенно выгодно вычислять частоту, используя равенство (14), если вместо простой задачи (рис. 1) имеется более сложная система.

В качестве примера определим собственную частоту колебаний груза  $W$  амплитудомера (рис. 18).

Чтобы с большей точностью определить собственную частоту прибора, необходимо учесть не только груз  $W$  и пружину  $k_1$ , но также рычаг  $AOB$  и пружину  $k_2$ . Пусть  $x$  обозначает малое вертикальное перемещение груза  $W$  от положения равновесия. Тогда потенциальная энергия обеих пружин с коэффициентами жесткости  $k_1$  и  $k_2$  будет

$$\frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_2}{2} \left(\frac{c}{b}\right)^2 x^2. \quad (g)$$

Кинетическая энергия груза  $W$  будет, как и выше,

$$\frac{W}{2g} \dot{x}^2. \quad (h)$$

Угловая скорость рычага  $AOB$  при вращении вокруг точки  $O$  равна  $\dot{x}/b$ , а его кинетическая энергия составляет

$$\frac{J}{2} \frac{\dot{x}^2}{b^2}, \quad (i)$$

где  $J$  — момент инерции рычага относительно точки  $O$ . Уравнение движения, соответствующее данному выше уравнению (d), будет согласно (g), (h) и (i)

$$\left(\frac{W}{2g} + \frac{J}{2b^2}\right) \dot{x}^2 + \left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2} \frac{c^2}{b^2}\right) x^2 = \text{const.} \quad (j)$$

Мы видим, что это уравнение имеет форму уравнения (d), но вместо

<sup>\*)</sup> Некоторые исключения рассмотрены в главе II.

массы  $W/g$  теперь получена приведенная масса

$$\frac{W}{g} + \frac{J}{b^2}$$

и вместо коэффициента жесткости  $k$  — приведенный коэффициент жесткости  $k_1 + k_2 (c^2/b^2)$ .

В качестве другого примера рассмотрим крутильные колебания вала, один конец которого закреплен, а к другому концу прикреплен диск, связанный с поршнем (рис. 19). Рассмотрим только малые

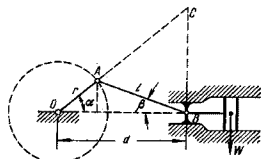


Рис. 19.

вращательные колебания относительно среднего положения, заданного углом  $\alpha$ . Если  $\phi$  есть угол закручивания вала в любой момент, то потенциальная энергия системы, которая в этом случае есть энергия деформации кручения вала, равна  $k\phi^2/2$ , где  $k$  — коэффициент жесткости вала. Для вычисления кинетической энергии системы мы должны учесть кинетическую энергию вращающихся частей, равную  $J\dot{\phi}^2/2$ , и также кинетическую энергию возвратно-поступательно движущихся масс<sup>\*)</sup>. При вычислении кинетической энергии возвратно-поступательно движущихся масс, общий вес которых обозначен через  $W$ , необходимо иметь выражение для скорости этих масс в процессе крутильных колебаний. Угловую скорость  $\dot{\phi}$  шатуна  $AB$  относительно центра  $C$  (рис. 19) можно получить из рассмотрения скорости точки  $A$ . Рассматривая эту точку как принадлежащую диску, найдем, что ее скорость при колебаниях равна  $r\dot{\phi}$ . Скорость той же точки как принадлежащей шатуну, равна  $\overline{AC}\dot{\theta}$ , и мы получим:

$$r\dot{\phi} = \overline{AC}\dot{\theta} = \frac{l \cos \beta}{\cos \alpha} \dot{\theta}, \quad (k)$$

где  $l$  — длина шатуна и  $\beta$  — угол его наклона к горизонтالي. Из этого равенства

$$\dot{\theta} = \frac{r\dot{\phi} \cos \alpha}{l \cos \beta}, \quad (l)$$

<sup>\*)</sup> Масса шатуна может быть заменена двумя массами,  $m_1 = J_1/l^2$  в точке прикрепления к валу и  $m_2 = m - m_1$  в ползуне, где  $m$  — полная масса шатуна,  $J_1$  — его момент инерции относительно центра ползуна. Это обычный путь замены шатуна; см.: Max Tolle, Regelung der Kraftmaschinen, 3-е изд., стр. 116, 1921.



и скорость возвратно-поступательно движущихся масс равна

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\theta} \overline{BC} = \dot{\theta} (l \cos \beta + r \cos \alpha) \operatorname{tg} \alpha = \\ &= r \dot{\varphi} \sin \alpha \left( 1 + \frac{r \cos \beta}{l \cos \alpha} \right). \end{aligned} \quad (m)$$

Из рис. 19 получаем:

$$r \sin \alpha = l \sin \beta.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta &= \frac{r}{l} \sin \alpha; \\ \cos \beta &= \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \alpha} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

Если отношение  $r/l$  мало, то мы можем с достаточной точностью принять  $\cos \beta \approx 1$ . Тогда скорость возвратно-поступательно движущихся масс равна

$$\dot{x} \approx r \dot{\varphi} \sin \alpha \left( 1 + \frac{r}{l} \cos \alpha \right), \quad (o)$$

и общая кинетическая энергии системы равна

$$\frac{J \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{W}{2g} r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha \left( 1 + \frac{r}{l} \cos \alpha \right)^2.$$

Уравнение энергии в данном случае принимает вид:

$$\frac{J \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{W}{2g} r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha \left( 1 + \frac{r}{l} \cos \alpha \right)^2 = \frac{k \varphi_0^2}{2}. \quad (p)$$

Влияние возвратно-поступательно движущихся масс на частоту крутильных колебаний подобно увеличению момента инерции диска вследствие добавления на контуре диска приведенной массы, равной

$$\frac{W}{g} \sin^2 \alpha \left( 1 + \frac{r}{l} \cos \alpha \right)^2. \quad (q)$$

Очевидно, частота зависит от величины угла  $\alpha$ . Если  $\alpha = 0$  или  $\alpha = \pi$ , то возвратно-поступательно движущиеся массы не влияют на частоту; наибольший эффект достигается, когда  $\alpha \approx \pi/2$ .

### Примеры

1. Вычислить частоты малых колебаний маятников, показанных на рис. 20, а, б, в, пользуясь уравнением энергии. Пренебречь массой стержня и принять во всех случаях, что масса груза  $W$  сосредоточена в его центре.

*Решение.* Если  $\varphi$  — угол отклонения маятника (рис. 20, а) и  $l$  — его длина, то кинетическая энергия маятника равна  $W \dot{\varphi}^2 l^2 / 2g$ . Изменение потенциальной энергии маятника определяется вертикальным смещением  $l(1 - \cos \varphi) \approx \frac{1}{2} l \varphi^2 / 2$  груза  $W$ , и уравнение энергии принимает вид

$$\frac{W \dot{\varphi}^2 l^2}{2g} + \frac{W l \varphi^2}{2} = \text{const.} \quad (r)$$

Предполагая, что движение происходит по закону  $\varphi = \varphi_0 \sin pt$ , и записывая уравнение, подобное уравнению (14), получим угловую частоту

$$p = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

При записи уравнения энергии для случая рис. 20, б нужно к потенциальной энергии груза  $W$  прибавить энергию деформации пружин. Если  $k$  — коэффициент жесткости, подсчитанный с учетом обеих пружин, то энергия деформации пружин равна  $k(a\varphi)^2/2$  и вместо уравнения (r) получим:

$$\frac{W \dot{\varphi}^2 l^2}{2g} + (Wl + ka^2) \frac{\varphi^2}{2} = \text{const.}, \quad (s)$$

и частота колебаний равна

$$p = \sqrt{\frac{g}{l} \left( 1 + \frac{ka^2}{Wl} \right)}.$$

В случае, показанном на рис. 20, в, при любом отклонении маятника от вертикального положения потенциальная энергия груза  $W$  уменьшается; применяя те же соображения, что и выше, получим:

$$p = \sqrt{\frac{g}{l} \left( \frac{ka^2}{Wl} - 1 \right)}.$$

Как видим, действительные значения для  $p$  мы получим только при условии

$$\frac{ka^2}{Wl} > 1 \quad \text{или} \quad W < \frac{ka^2}{l}.$$

Если это условие не соблюдено, то вертикальное положение равновесия маятника неустойчиво.

2. Для записи колебаний корабля используется схема, показанная на рис. 21\*. Определить частоту вертикальных колебаний груза  $W$ , если известен момент инерции  $J$  груза вместе со стержнем  $BD$  относительно точки вращения  $B$ .

*Решение.* Пусть  $\varphi$  — угловое отклонение стержня  $BD$  от его горизонтального положения равновесия и  $k$  — коэффициент жесткости пружины. Тогда энергия, накапливаемая при таком отклонении, равна  $ka^2 \varphi^2 / 2$  и

\* Это паллограф Шлика, см. Trans. Inst. Nav. Architects (London), т. 34, стр. 167, 1893.

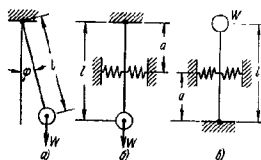


Рис. 20.

кинетическая энергия системы равна  $J\dot{\varphi}^2/2$ . Уравнение энергии принимает вид:

$$\frac{J\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{ka^2\varphi^2}{2} = \text{const.}$$

Поступая, как в случае, соответствующем выводу уравнения (d), получим для угловой частоты выражение

$$\rho = \sqrt{\frac{ka^2}{J}}.$$

Если пренебречь массой стержня  $BD$  и принять, что масса груза  $W$  сосредоточена в его центре, то  $J = Wl^2/g$ , и частота оказывается равной

$$\rho = \sqrt{\frac{ka^2g}{Wl^2}} = \sqrt{\frac{ag}{l\delta_{ст}}},$$

где  $\delta_{ст} = Wl/ak$  — статическое удлинение пружины под действием веса  $W$ . Сравнивая это с формулой (4), можно заключить, что при том же удлинении пружины горизонтальный маятник имеет значительно меньшую частоту, чем система, показан-

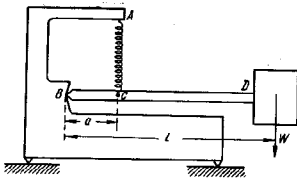


Рис. 21.

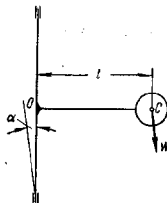


Рис. 22.

ная на рис. 1, если отношение  $a/l$  достаточно мало. В данном случае никакая частота колебаний прибора требуется потому, что собственная частота колебаний корабля может быть сравнительно малой, а частота прибора должна быть в несколько раз меньше частоты исследуемых колебаний (см § 8).

3. На рис. 22 представлен тяжелый маятник, ось вращения которого составляет малый угол  $\alpha$  с вертикалью. Определить частоту малых колебаний, учитывая только вес  $W$ , который предполагается сосредоточенным в центре тяжести  $C$ .

Решение. Если  $\varphi$  обозначает малый угол поворота маятника относительно наклонной оси, отсчитываемый от положения равновесия, то соответствующее повышение уровня центра  $C$  равно

$$l(1 - \cos \alpha) \sin \alpha \approx \frac{l\varphi^2}{2},$$

и уравнение энергии принимает вид:

$$\frac{W}{2g} l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{Wl\varphi^2}{2} = \text{const.}$$

Угловая частота маятника равна

$$\rho = \sqrt{\frac{g\alpha}{l}}.$$

Очевидно, что при выборе малого угла  $\alpha$  можно получить весьма низкую частоту колебаний маятника. Этот тип маятника иногда применяется для записи колебаний при землетрясениях. Чтобы получить две составляющие горизонтальных колебаний, применяются два прибора, один для составляющей север—юг, а второй для составляющей восток—запад.

### Задачи

1. Вычислить частоту свободных колебаний системы, показанной на рис. 18, для следующих численных значений:  $W = 2,3$  кг,  $k_1 = 0,4$  кг/см,  $k_2 = 1,8$  кг/см,  $b = 10$  см,  $c = 5$  см. Рычаг  $BOA$  рассматривать как тонкий однородный стержень весом  $W' = 0,18$  кг и принять длину  $OA$  равной 30 см.

Ответ.  $f = 2,80$  кол/сек.

2. Когда система, показанная на рис. 20, а, имела груз  $W_1 = 1$  кг на верхнем конце вертикального стержня, наблюдалась частота 90 кол/мин; при грузе  $W_2 = 2$  кг наблюдалась частота 45 кол/мин. Какой груз  $W_3$  приводит систему к состоянию неустойчивого равновесия? Весом стержня пренебречь.

Ответ.  $W_3 = 3$  кг.

3. Определить угловую частоту  $\rho$  для системы рис. 20, а, если вертикальный стержень имеет полный вес  $wl$ , равномерно распределенный по его длине.

Ответ.

$$\rho = \sqrt{\frac{g}{l} \left[ \frac{3ka^2/l}{3W + wl} - \frac{3}{4} \frac{(4W - wl)}{(3W + wl)} \right]}.$$

4. Для регистрации вертикальных колебаний применяется прибор, изображенный на рис. 23, в котором жесткий рычаг  $AOB$ , несущий груз  $W$ , может вращаться вокруг оси, проходящей через точку  $O$ , перпендикулярной к плоскости рисунка. Определить частоту малых вертикальных колебаний груза, если даны: момент инерции  $J$  рычага вместе с грузом относительно оси вращения, коэффициент жесткости  $k$  и все размеры.

Ответ.

$$\rho = \sqrt{\frac{ka^2}{J}}.$$

5. Призматический стержень  $AB$ , подвешенный на двух вертикальных проволоках, совершает малые вращательные колебания в горизонтальной плоскости относительно оси  $OO$  (рис. 24). Определить частоту этих колебаний.

Ответ.

$$\rho = \sqrt{\frac{3ga^2}{lb^2}}.$$

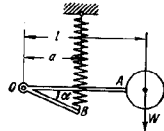


Рис. 23.

\* [Предполагается, что угол  $\alpha$  весьма мал.]

6. Какая частота получится, если в предыдущей задаче проволоки будут расположены под углом  $\beta$  к оси  $OO'$ ?

Ответ.

$$\rho = \sqrt{\cos \beta} \sqrt{\frac{3ga^2}{lb^2}}$$

7. Цапфы ротора оперты на криволинейные направляющие радиуса  $R$  (рис. 25). Определить частоту малых колебаний ротора, если качение по направляющим не сопровождается скольжением. Момент инерции ротора равен  $J$ .

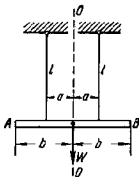


Рис. 24.

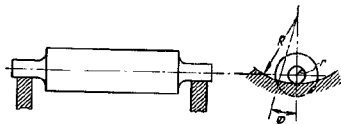


Рис. 25.

Указание. Если  $\phi$  — угол, определяющий положение цапф при колебаниях, и  $r$  — радиус цапф, то угловая скорость ротора при колебаниях равна  $\dot{\phi}(R-r)/r$ , скорость его центра тяжести равна  $(R-r)\dot{\phi}$  и повышается уровня центра тяжести составляет  $(R-r)\phi^2/2$ .

Ответ.

$$\rho^2 = \frac{Wr^2}{\left(J + W \frac{r^2}{g}\right)(R-r)}$$

8. Половина круглого цилиндра колеблется, качаясь без скольжения на горизонтальной плоскости (рис. 26). Определить угловую частоту малых колебаний, если  $r$  — радиус цилиндра,  $c = OC$  — расстояние центра тяжести от плоского основания и  $I^2 = Jg/W$  — квадрат радиуса инерции относительно центральной оси.

Ответ.

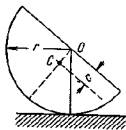


Рис. 26.

$$\rho = \sqrt{\frac{cg}{I^2 + (r-c)^2}}$$

4. Метод Рэлея. — Во всех ранее рассмотренных случаях, подобных показанным на рис. 1, 4 и 11, после определенных упрощений задача сводилась к простейшему случаю колебаний системы с одной степенью свободы. Например, в схеме, показанной на рис. 1, мы пренебрегли массой пружины по сравнению с массой груза  $W$ ; в схеме, показанной на рис. 4, мы пренебрегли массой балки, а в случае, изображенном на рис. 11, — моментом инерции вала по сравнению с моментом инерции диска. Хотя эти упрощения во многих практи-

ческих случаях дают достаточную точность, существуют технические задачи, в которых необходимо более подробное исследование точности подобных приближенных решений.

Чтобы определить влияние таких упрощений на частоту колебаний, изложим приближенный метод, предложенный лордом Рэлеем<sup>\*</sup>). Для применения этого метода необходимо сделать некоторые предположения относительно конфигурации системы в процессе колебаний. Тогда частота колебаний найдется из рассмотрения энергии системы. В качестве простого примера применения метода Рэлея возьмем случай, показанный на рис. 1 и рассмотренный в § 3.

Если масса пружины мала по сравнению с массой груза  $W$ , то она не будет существенно влиять на форму колебаний; с достаточной точностью можно принять, что перемещение любого сечения пружины, расположенного на расстоянии  $s$  от закрепленного конца, такое же, что и в случае безмассовой пружины, т. е. равно

$$\frac{xc}{l}, \quad (a)$$

где  $l$  — длина пружины.

Если, как это было принято выше, масса пружины не влияет на перемещения, то выражение потенциальной энергии системы останется таким же, что и в случае безмассовой пружины (см. уравнение (с), стр. 23), и необходимо заново рассмотреть лишь кинетическую энергию системы. Пусть  $w$  обозначает вес единицы длины пружины. Тогда масса элемента пружины длиной  $dc$  будет  $w dc/g$  и соответствующая кинетическая энергия согласно выражению (a) равна

$$\frac{w}{2g} \left(\frac{xc}{l}\right)^2 dc.$$

Полная кинетическая энергия пружины будет

$$\frac{w}{2g} \int_0^l \left(\frac{xc}{l}\right)^2 dc = \frac{w^2 xl}{2g} \cdot \quad (15)$$

Эта величина должна быть прибавлена к кинетической энергии груза  $W$ ; таким образом, уравнение энергии принимает вид:

$$\frac{w^2 xl}{2g} \left(W + \frac{wl}{3}\right) + \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}. \quad (b)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (e) предыдущего параграфа, можно заключить, что для оценки влияния массы пружины на период собственных колебаний нужно к весу  $W$  прибавить одну треть веса пружины.

<sup>\*</sup>) См. его книгу Theory of Sound, 2-е изд., т. I, стр. 111 и 287, 1894. [Имеется русский перевод: Рэлея, Теория звука, ГТТИ, 1955.]

Это заключение, основанное на предположении, что вес пружины весьма мал по сравнению с весом груза, может быть с достаточной точностью применено даже в тех случаях, когда вес пружины имеет тот же порядок, что и вес  $W$ . Например, для  $\omega l = 0,5W$  ошибка приближенного решения составляет приблизительно  $1/2\%$ , для  $\omega l = W$  ошибка около  $3/4\%$ ; для  $\omega l = 2W$  ошибка составляет приблизительно  $3\%$  \*).

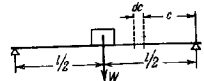


Рис. 27.

В качестве второго примера рассмотрим случай колебаний нагруженной посередине балки постоянного поперечного сечения (рис. 27). Если вес  $\omega l$  балки мал по сравнению с грузом  $W$ , то с достаточной точностью можно принять, что изогнутая ось балки в процессе колебаний имеет форму статической кривой изгиба. Тогда, обозначая через  $x$  перемещение груза  $W$  при колебаниях, получим перемещение любого элемента  $\omega dc$  балки, находящегося на расстоянии  $c$  от опоры:

$$x \cdot \frac{3cl^2 - 4c^3}{l^3}$$

Кинетическая энергия самой балки равна

$$2 \int_0^{l/2} \frac{\omega}{2g} \left( x \cdot \frac{3cl^2 - 4c^3}{l^3} \right)^2 dc = \frac{17}{35} \omega l \frac{x^2}{2g} \quad (16)$$

Для оценки влияния массы балки на период колебаний эта кинетическая энергия колеблющейся балки должна быть прибавлена к энергии  $Wx^2/2g$  сосредоточенного посередине груза; таким образом, период колебаний будет таким же, что и период безмассовой балки, нагруженной посередине грузом  $W + (17/35)\omega l$ .

Необходимо отметить, что уравнение (16), полученное в предположении малости веса балки по сравнению с весом груза  $W$ , может быть использовано во всех практических случаях. Даже в предельном случае, когда  $W=0$  и когда согласно сделанному предположению груз  $(17/35)\omega l$  сосредоточен в середине балки, точность приближенного метода достаточна для всех практических случаев. Прогиб балки под действием приложенного в ее середине груза  $(17/35)\omega l$  равен

$$\delta_{ст} = \frac{17}{35} \omega l \cdot \frac{l^3}{48EI}$$

\*) Более точное решение этой задачи дано в § 49.

Подставляя это выражение в формулу (3) (см. стр. 11), найдем период свободных колебаний

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{ст}}{g}} = 0,632 \sqrt{\frac{\omega l^4}{EJg}}$$

Точное решение для этого случая \*):

$$\tau = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\omega l^4}{EJg}} = 0,637 \sqrt{\frac{\omega l^4}{EJg}}$$

Как видим, ошибка приближенного решения для этого предельного случая составляет менее чем  $1\%$ .

Этот метод может быть применен также к случаю, показанному на рис. 28. Предполагая, что форма изогнутой оси балки при колебаниях совпадает с формой кривой статического изгиба, вызванного приложением на конце грузом, и обозначая через  $x$  вертикальное перемещение груза  $W$ , находим кинетическую энергию консоли постоянного поперечного сечения:

$$\int_0^l \frac{\omega}{2g} \left( x \cdot \frac{3c^2l - c^3}{2l^3} \right)^2 dc = \frac{33}{140} \omega l \frac{x^2}{2g} \quad (17)$$

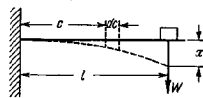


Рис. 28.

Период колебаний совпадает с периодом колебаний безмассовой консоли, несущей на конце груз  $W + (33/140)\omega l$ . Этот результат получен в предположении, что вес  $\omega l$  мал по сравнению с  $W$ , но он остается достаточно точным и в тех случаях, когда величина  $\omega l$  не мала. Применив этот результат к крайнему случаю, когда  $W=0$ , получим:

$$\delta_{ст} = \frac{33}{140} \omega l \frac{l^3}{3EI}$$

Соответствующий период колебаний будет

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{ст}}{g}} = \frac{2\pi}{3,567} \sqrt{\frac{\omega l^4}{EJg}} \quad (c)$$

Точное решение для этого случая \*\*)

$$\tau = \frac{2\pi}{3,515} \sqrt{\frac{\omega l^4}{EJg}} \quad (d)$$

Отсюда видно, что ошибка приближенного решения составляет около  $1,5\%$ . В случае  $W=0$  может быть найдено лучшее

\*) См. § 52.

\*\*) См. § 53.

приближение. Для этого необходимо предположить, что форма изогнутой оси при колебаниях балки совпадает с кривой изгиба от равномерно распределенной нагрузки. Тогда прогиб  $y_0$  произвольного поперечного сечения, находящегося на расстоянии  $c$  от заделки, определяется следующим уравнением:

$$y_0 = x_0 \left[ -\frac{1}{3} + \left(\frac{4c}{3l}\right) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{c}{l}\right)^4 \right], \quad (e)$$

где

$$x_0 = \frac{\omega l^4}{8EJ}$$

есть прогиб конца консоли.

Потенциальная энергия изгиба

$$V = \frac{\omega}{2} \int_0^l y_0^2 dc = \frac{8}{5} \cdot \frac{EJx_0^2}{l^3}.$$

Кинетическая энергия колеблющейся балки

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\omega}{g} \dot{y}^2 dc.$$

Принимая

$$y = y_0 \cos pt$$

и

$$(\dot{y})_{\max} = y_0 p,$$

придадим следующий вид уравнению (14) для определения  $p$ :

$$\frac{1}{2} \int_0^l \frac{\omega}{g} (y_0 p)^2 dc = \frac{8}{5} \frac{EJx_0^2}{l^3}.$$

Подставляя для  $y_0$  выражение (e) и выполняя интегрирование, получаем:

$$p = 3,530 \cdot \sqrt{\frac{EJg}{\omega l^4}}.$$

Соответствующий период колебаний равен

$$\tau = \frac{2\pi}{3,530} \sqrt{\frac{\omega l^4}{EJg}}. \quad (f)$$

Сравнивая этот результат с точным решением (d), можно заключить, что в данном случае ошибка приближенного решения составляет всего около  $0,5\%$ .

Необходимо отметить, что упругая балка представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы. Она может

подобно струне совершать колебания различной формы. Выбор определенной формы для изогнутой кривой в методе Рэлея эквивалентен введению некоторых дополнительных связей, которые приводят данную систему к системе, имеющей одну степень свободы. Такие дополнительные связи могут лишь увеличить жесткость системы, т. е. увеличить частоту колебаний. Во всех рассмотренных выше случаях найденные методом Рэлея приближенные значения частот несколько выше точных значений\*).

В случае крутильных колебаний (рис. 11) для учета влияния инерции вала на частоту круглых колебаний может быть использован тот же приближенный метод. Пусть  $i$  обозначает момент инерции единицы длины вала. В предположении, что форма колебаний остается той же, что и в случае безмассового вала, угол поворота поперечного сечения, расположенного на расстоянии  $c$  от закрепленного конца вала, равен  $c\dot{\phi}/l$  и кинетическая энергия элемента вала равна

$$\frac{i dc}{2} \left(\frac{c\dot{\phi}}{l}\right)^2.$$

Кинетическая энергия всего вала будет

$$\frac{i}{2} \int_0^l \left(\frac{c\dot{\phi}}{l}\right)^2 dc = \frac{\dot{\phi}^2}{2} \frac{i}{3}. \quad (18)$$

Для оценки влияния массы вала на частоту колебаний эта кинетическая энергия должна быть прибавлена к кинетической энергии диска; период колебаний будет таким же, что и период безмассового вала, несущего на конце диск, момент инерции которого равен

$$J + \frac{i l}{3}.$$

В следующем параграфе будет изложено применение метода Рэлея к вычислению критических скоростей вращающихся валов.

### Примеры

1. Определить частоту свободных колебаний груза  $W$ , связанного с балкой (рис. 29) постоянного поперечного сечения: 1) предполагая, что весом балки можно пренебречь; 2) учитывая вес балки с помощью метода Рэлея.

Решение. Если  $a$  и  $b$  — расстояния груза соответственно от левого и правого концов балки, то статический прогиб балки под грузом равен  $\delta = Wa^2b^3/3EJ$ . Принимая для коэффициента жесткости выражение  $k = 3EJ/ab^3$  и пренебрегая массой балки, найдем угловую частоту колебаний

\* Полное описание метода Рэлея можно найти в книге: G. Temple, W. G. Bickley, Rayleigh's Principle, Oxford University Press, 1933, см. также Collatz, Z. angew. Math. u. Mech., т. 19, стр. 224, 1939.

из уравнения энергии:

$$\frac{W}{2g} \dot{x}_{\max}^2 = \frac{kx_0}{2}, \quad (g)$$

где  $\dot{x}_{\max} = x_0 \rho$ . Отсюда

$$\rho = \sqrt{\frac{kg}{W}} = \sqrt{\frac{3EJg}{W a^2 b^2}}. \quad (h)$$

Чтобы учесть массу балки, рассмотрим изогнутую ось балки при статическом действии груза  $W$ . Прогиб произвольной точки левого участка, находящейся на расстоянии  $\xi$  от опоры  $A$ , равен

$$x_1 = \frac{W \xi b}{6EJ} [a(l+b) - \xi^2]. \quad (i)$$

Для прогиба произвольной точки, расположенной справа от груза  $W$  и находящейся на расстоянии  $\eta$  от опоры  $B$ , имеем:

$$x_2 = \frac{W a \eta}{6EJ} [b(l+a) - \eta^2]. \quad (j)$$

Применяя метод Рэля и полагая, что при колебаниях максимальная скорость любой точки левого участка, расположенной на расстоянии  $\xi$  от опоры  $A$ , дается уравнением

$$(\dot{x}_1)_{\max} = \dot{x}_{\max} \frac{x_1}{\delta} = \dot{x}_{\max} \frac{x_1}{2a^2 b} [a(l+b) - \xi^2],$$

в котором  $\dot{x}_{\max}$  — максимальная скорость груза  $W$ , находим, что для учета массы левого участка балки нужно прибавить к левой части уравнения (g) величину

$$\begin{aligned} \frac{\omega \cdot \dot{x}_{\max}^2}{2g} \int_0^a \left( \frac{x_1}{\delta} \right)^2 d\xi &= \frac{\omega \cdot \dot{x}_{\max}^2}{2g} \int_0^a \frac{\xi^2}{4a^4 b^2} [a(l+b) - \xi^2]^2 d\xi = \\ &= \dot{x}_{\max}^2 \frac{\omega a}{2g} \left[ \frac{1}{3} \frac{l^3}{b^2} + \frac{23}{105} \frac{l^3}{b^2} - \frac{8}{15} \frac{al}{b^2} \right]. \end{aligned} \quad (k)$$

Рассматривая правый участок балки, мы тем же способом найдем, что к левой части уравнения (g) нужно прибавить выражение

$$\frac{\dot{x}_{\max}^2 \omega b}{2g} \left[ \frac{1}{12} \frac{(l+a)^3}{a^2} + \frac{1}{28} \frac{b^3}{a^2} - \frac{1}{10} \frac{b(l+a)}{a^2} \right]. \quad (l)$$

Уравнение энергии принимает вид:

$$\frac{(W + \alpha \omega a + \beta \omega b)}{2g} \dot{x}_{\max}^2 = \frac{kx_0^2}{2},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  обозначают величины, стоящие в квадратных скобках выражений (k) и (l); для угловой частоты колебаний получим:

$$\rho = \sqrt{\frac{3EJg}{(W + \alpha \omega a + \beta \omega b) a^2 b^2}}. \quad (m)$$

2. Определить частоту свободных вертикальных колебаний груза  $W$ , лежащего на раме, шарнирно закрепленной в точках  $A$  и  $B$  (рис. 30, а), предполагая, что все три элемента рамы имеют одинаковые длины и одинаковые поперечные сечения и что груз расположен посередине стержня  $CD$ . При вычислениях: 1) пренебречь массой рамы; 2) учесть массу рамы с помощью метода Рэля.

Решение. Используя известные формулы прогибов балок, находим, что изгибающие моменты в узлах  $C$  и  $D$  равны  $3Wl/40$ . Прогиб вертикального стержня на расстоянии  $\xi$  от нижнего сечения равен

$$x_1 = \frac{3Wl^2 \xi}{240EJ} \left( 1 - \frac{\xi^2}{l^2} \right). \quad (n)$$

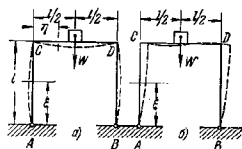


Рис. 30.

Прогиб горизонтального стержня слева от груза представится формулой

$$x_2 = \frac{W \eta}{48EJ} (3l^2 - 4\eta^2) - \frac{3Wl}{80EJ} \eta (l - \eta). \quad (o)$$

Прогиб под грузом  $W$  равен

$$\delta = (x_2)_{\eta = \frac{l}{2}} = \frac{11Wl^3}{960EJ}. \quad (p)$$

Пренебрегая массой рамы, находим угловую частоту

$$\rho = \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \sqrt{\frac{960EJg}{11Wl^3}}. \quad (q)$$

Для определения влияния этой массы на частоту обозначим через  $\dot{x}_{\max}$  максимальную скорость колеблющегося груза  $W$ . Тогда максимальная скорость любой точки вертикального стержня, находящейся на расстоянии  $\xi$  от нижнего сечения, равна

$$(\dot{x}_1)_{\max} = \dot{x}_{\max} \frac{x_1}{\delta} = \dot{x}_{\max} \frac{12\xi}{11l} \left( 1 - \frac{\xi^2}{l^2} \right) \quad (r)$$

и максимальная скорость любой точки левого участка горизонтального стержня равна

$$(\dot{x}_2)_{\max} = \dot{x}_{\max} \frac{x_2}{\delta} = \dot{x}_{\max} \left[ \frac{20\eta}{11l} \left( 3 - \frac{4\eta^2}{l^2} \right) - \frac{36\eta}{11l} \left( 1 - \frac{\eta}{l} \right) \right]. \quad (s)$$

Кинетическая энергия рамы, которую нужно прибавить к кинетической энергии груза  $W$ , равна

$$2 \int_0^l \frac{\omega \dot{x}_1^2}{2g} \left( \frac{x_1}{\delta} \right)^2 d\xi + 2 \int_0^l \frac{\omega \dot{x}_2^2}{2g} \left( \frac{x_2}{\delta} \right)^2 d\eta.$$

Подставляя для отношений  $x_1/\delta$  и  $x_2/\delta$  их выражения из (r) и (s) и интегрируя, представляем дополнительную кинетическую энергию в форме

$$\frac{\omega a l}{2g} (\dot{x}')_{\max}^2,$$

где  $\alpha$  — постоянная.

Выражение угловой частоты колебаний теперь получает вид:

$$p = \sqrt{\frac{56EJg}{11(W + \alpha\omega l)^2}} \quad (t)$$

3. Определить частоту боковых колебаний рамы, показанной на рис. 30, 6.

*Решение.* Частота этих колебаний, если пренебречь массой рамы, может быть вычислена по формулам примера 4 (стр. 14—15). Для учета массы рамы необходимо рассмотреть ее изгиб. Если  $x$  — поперечное перемещение груза  $W$ , совершаемое вместе с горизонтальным стержнем  $CD$ , то горизонтальное перемещение произвольной точки вертикального стержня, расположенной на расстоянии  $\xi$  от основания, из рассмотрения изгиба рамы получится в виде

$$x_1 = x - \frac{x}{3} \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) - \frac{2}{3} x \left[\frac{3}{2} \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)^3\right] \quad (u)$$

Кинетическая энергия вертикальных стержней равна

$$2 \int_0^l \frac{\omega x_1^2}{2g} d\xi = \frac{\alpha\omega l}{g} x^2,$$

где  $\alpha$  — постоянная, получаемая после замены  $x_1$  его выражением (u) в последующем интегрировании. При определении кинетической энергии горизонтального стержня учтем только горизонтальные составляющие  $\dot{x}$  скоростей элементов стержня. Тогда полная кинетическая энергия всей системы равна

$$\frac{W\dot{x}^2}{2g} + \frac{(1-2\alpha)\omega l x^2}{2g},$$

и частота определяется из формулы (см. пример 4, стр. 15)

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4EJg}{[W + (1+2\alpha)\omega l]^2 l^3}} \quad (v)$$

### Задачи

1. Какую часть равномерно распределенной нагрузки свободно опертой балки (рис. 27) нужно прибавить к грузу  $W$ , если принять изогнутую ось при поперечных колебаниях балки в виде полуволны синусоиды вместо кривой статического изгиба?

*Ответ.*  $\frac{1}{3}$  вместо  $\frac{17}{35}$ .

2. Если балка (рис. 27) имеет вместо свободно опертых концов жесткие заделки, то какая часть ее полного веса должна быть прибавлена к весу груза  $W$  при вычислении собственного периода поперечных колебаний? Предположить изогнутую ось балки при колебаниях совпадающей со статической кривой изгиба под действием груза  $W$ .

*Ответ.*  $\frac{10}{35}$ .

3. Решить предыдущую задачу в предположении, что форма изгиба при колебаниях совпадает с волной косинусоиды.

*Указание.* Если начало координат совпадает с левым концом балки, то уравнение изогнутой оси имеет вид:

$$y = \frac{\Delta}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right),$$

где  $\Delta$  — перемещение под грузом  $W$ .

*Света*  $\frac{8}{9}$ .

4. Для рамы, показанной на рис. 10, при условии, что каждая стойка имеет погонный вес 30 кг/м и шарнирно закреплена внизу, найти собственную частоту боковых колебаний рамы с учетом влияния масс стоек. Использовать численные значения задачи 6, стр. 16—17.

*Ответ.*  $\tau = 2,52$  сек.

5. Какую часть равномерно распределенного веса балки  $ABC$  (рис. 31) нужно прибавить к весу  $W$ , сосредоточенному на свободном конце, при вычислении собственной частоты поперечных колебаний? Принять статическую кривую изгиба.

Рис. 31.

*Ответ.*  $\frac{23W}{1848} \approx \frac{1}{7}$ .

6. Пересчитать частоту крутильных колебаний колеса (рис. 13), учитывая влияние массы радиальных спиц. Принять, что каждая спица имеет массу  $\omega r/g$ , равномерно распределенную по всей длине.

*Ответ.*

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{16gB^4}{(W + 116,105\omega r)^2}}$$

5. **Критическая скорость вращающегося вала.** — Хорошо известно, что при определенных скоростях вращающиеся валы становятся динамически неустойчивыми и возможно появление больших колебаний. Это явление возникает вследствие резонанса; нетрудно показать, что *критическая скорость* вала есть такая скорость, при которой число оборотов вала в секунду равно собственной частоте его поперечных колебаний\*).

*Вал с одним диском.* Чтобы исключить из нашего рассмотрения влияние веса вала и по возможности упростить постановку задачи, рассмотрим вертикальный вал с одним круглым диском (рис. 32, а). Пусть  $C$  — центр тяжести диска и  $e$  — малый эксцентриситет, т. е. расстояние точки  $C$  от оси вала. Вследствие эксцентриситета  $e$  на вал при его вращении будет действовать центробежная сила, которая вызовет его изгиб. Прогиб  $x$  может быть легко найден из условия равновесия центробежной силы и реакции  $P$  изогнутого вала. Последняя пропорциональна прогибу

$$P = kx.$$

Множитель  $k$  может быть вычислен, если известны размеры вала и условия на опорах. Предполагая, например, что вал имеет постоянное

\* Более подробное рассмотрение поперечных колебаний вала дано в §§ 36 и 45.

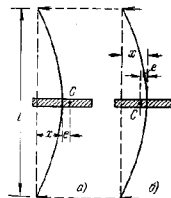


Рис. 32.

сечение и что диск расположен посередине между опорами, имеем:

$$k = \frac{48EJ}{l^3}.$$

Теперь из условия равновесия получается следующее уравнение для определения  $x$ :

$$\frac{W}{g}(x+e)\omega^2 = kx, \quad (a)$$

где  $W/g$  — масса диска,  $\omega$  — угловая скорость вала.

Из уравнения (a) имеем:

$$x = \frac{e}{\frac{k}{\omega^2} \frac{g}{W} - 1}. \quad (b)$$

Вспомня (уравнение (c), стр. 10), что

$$\frac{kg}{W} = p^2,$$

можно из (b) заключить, что прогиб  $x$  быстро растет при приближении  $\omega$  к  $p$ , т. е. когда число оборотов в секунду вала приближается к частоте поперечных колебаний вала с диском. Критическое значение скорости равно

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{kg}{W}}. \quad (19)$$

При этой скорости знаменатель выражения (b) становится равным нулю, и возникают большие поперечные колебания вала. Интересно отметить, что при скоростях больших, чем критическая, вновь устанавливаются условия спокойного вращения. Эксперименты показывают, что в этом случае центр тяжести  $S$  располагается между прямой, соединяющей опорные точки, и изогнутой осью вала, как показано на рис. 32, б.

Уравнение, определяющее прогиб, имеет вид:

$$\frac{W}{g}(x-e)\omega^2 = kx,$$

откуда

$$x = \frac{e}{1 - \frac{kg}{\omega^2 W}}. \quad (c)$$

Как легко теперь видеть, с увеличением  $\omega$  прогиб  $x$  уменьшается и стремится к пределу  $e$ , т. е. при очень больших скоростях центр тяжести диска стремится к прямой, соединяющей опорные точки, и изогнутый вал будет вращаться вокруг центра тяжести  $S$  диска.

Вал, нагруженный несколькими дисками. Выше на простом примере было показано, что критическое число оборотов вала в секунду

равно собственной частоте поперечных колебаний этого вала. Определив эту частоту по методу Рэлея, легко найти критическую скорость вала с несколькими дисками (рис. 33). Пусть  $W_1, W_2, W_3$  — веса грузов и  $x_1, x_2, x_3$  — соответствующие статические прогибы. Тогда потенциальная энергия деформации, накопленная в балке при изгибе, будет

$$V = \frac{W_1 x_1}{2} + \frac{W_2 x_2}{2} + \frac{W_3 x_3}{2}. \quad (d)$$

Рис. 33.

При вычислении периода основного типа колебаний в качестве хорошего приближения для изогнутой оси балки при колебаниях можно взять кривую статического изгиба, показанную на рис. 33. Вертикальные перемещения грузов  $W_1, W_2$  и  $W_3$  при колебаниях можно записать в виде

$$x_1 \cos pt, \quad x_2 \cos pt, \quad x_3 \cos pt. \quad (e)$$

Тогда максимальные прогибы вала от положения равновесия будут такими, как это показано на рис. 33, поэтому увеличение потенциальной энергии вала при изгибе от положения равновесия к крайнему положению определяется выражением (d). С другой стороны, кинетическая энергия системы становится максимальной в момент, когда колеблющийся вал проходит через среднее положение. Из выражений (e) видно, что соответствующие этому положению скорости грузов равны

$$px_1, \quad px_2, \quad px_3,$$

и кинетическая энергия системы принимает вид:

$$\frac{p^2}{2g}(W_1 x_1^2 + W_2 x_2^2 + W_3 x_3^2). \quad (f)$$

Приравнявая (d) и (f), получаем следующее выражение для  $p^2$ :

$$p^2 = \frac{g(W_1 x_1 + W_2 x_2 + W_3 x_3)}{W_1 x_1^2 + W_2 x_2^2 + W_3 x_3^2}. \quad (20)$$

Период колебаний равен

$$\tau = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{W_1 x_1^2 + W_2 x_2^2 + W_3 x_3^2}{g(W_1 x_1 + W_2 x_2 + W_3 x_3)}}. \quad (21)$$



В общем случае, когда с валом связан  $n$  грузов, период основного типа колебаний будет

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n W_i x_i^2}{g \sum_{i=1}^n W_i x_i}} \quad (22)$$

Как видим, для вычисления  $T$  необходимо знать только статические прогибы  $x_1, x_2, \dots$ . Эти величины могут быть легко найдены обычными способами. Если вал имеет переменное поперечное сечение, то для вычисления этих прогибов нужно применить графический метод. В расчет может быть также введен собственный вес вала. Для этой цели нужно разделить вал на несколько частей, веса которых, приложенные в соответствующих центрах тяжести, следует рассматривать как сосредоточенные грузы.

Рассмотрим, например, вал, изображенный на рис. 31, а, где показаны также диаметры вала и действующие нагрузки. Эпюра моментов получается путем построения силового многоугольника (рис. 34, б) и соответствующего веревочного многоугольника (рис. 34, в). Для определения численного значения изгибающего момента в произвольном поперечном сечении необходимо лишь измерить соответствующую ординату  $e$  на эпюре моментов в масштабе для чертежа и умножить ее на полюсное расстояние  $h$ , измеренное в масштабе сил силового многоугольника (в нашем случае  $h = 36200$  кг). Для получения кривой изгиба необходимо построить второй веревочный многоугольник; при этом построенная ранее эпюра моментов рассматривается как фиктивная эпюра нагрузки. Для учета переменности поперечного сечения вала интенсивность этой фиктивной нагрузки в каждом сечении умножается на  $J_0/J$ , где  $J_0$  — момент инерции наибольшего поперечного сечения вала и  $J$  — момент инерции сечения на рассматриваемом участке вала. Таким образом получается окончательное фиктивное нагружение, представленное заштрихованной площадью на рис. 32, в. Разделив эту площадь на несколько участков, измерив площади этих участков в квадратных сантиметрах и умножив их на выраженные в килограммах полюсное расстояние  $h$ , получим фиктивные грузы, измеряемые в  $\text{кг}\cdot\text{см}^2$ . Для этих грузов строится второй силовой многоугольник (рис. 34, г) при полюсном расстоянии  $h_1$ , равном  $EJ_0/l$ , где  $EJ_0$  — наибольшая изгибная жесткость вала и  $l$  — некоторое целое число (в нашем случае  $l = 800$ ). Необходимо отметить, что фиктивные грузы и полюсное расстояние  $EJ_0/l$  имеют одинаковую размерность ( $\text{кг}\cdot\text{см}^2$ ) и должны быть представлены на силовом многоугольнике в одном и том же масштабе. При помощи второго силового многоугольника легко строится второй веревочный многоугольник

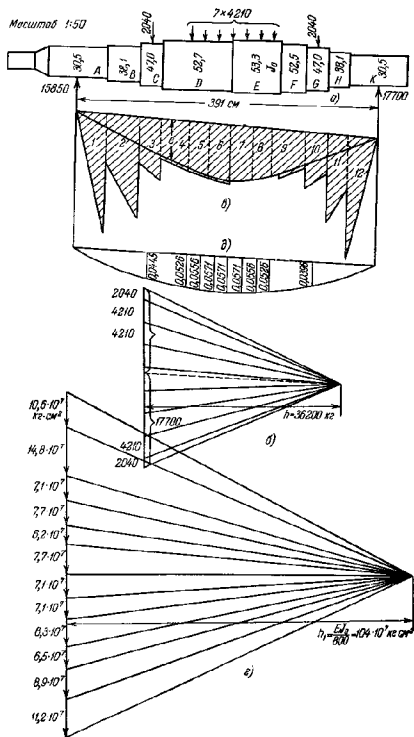


Рис. 34.

(рис. 34, д) и кривая изгиба, касательная к этому многоугольнику. Для получения численных значений прогибов нужно только измерить их в том же масштабе, в котором измерена длина вала, и разделить на число  $l$ , принятое ранее при построении второго силового многоугольника. В следующей таблице приводятся взятые с чертежа численные значения, необходимые для подстановки в формулу (22):

| $W_i$ , кг | $x_1 \cdot 10^3$ , см | $x_2^2 \cdot 10^4$ , см <sup>2</sup> | $W_i x_1$ , кг·см | $W_i x_1^2$ , кг·см <sup>2</sup> | $W_i$ , кг | $x_1 \cdot 10^3$ , см | $x_2^2 \cdot 10^4$ , см <sup>2</sup> | $W_i x_1$ , кг·см | $W_i x_1^2$ , кг·см <sup>2</sup> |
|------------|-----------------------|--------------------------------------|-------------------|----------------------------------|------------|-----------------------|--------------------------------------|-------------------|----------------------------------|
| 2040       | 4,44                  | 19,7                                 | 91                | 4,0                              | 4210       | 5,71                  | 32,6                                 | 241               | 13,7                             |
| 4210       | 5,26                  | 27,6                                 | 222               | 11,6                             | 4210       | 5,56                  | 30,9                                 | 234               | 13,1                             |
| 4210       | 5,56                  | 30,9                                 | 234               | 13,1                             | 4210       | 5,26                  | 27,6                                 | 222               | 11,6                             |
| 4210       | 5,71                  | 32,6                                 | 241               | 13,7                             | 2040       | 3,96                  | 15,7                                 | 81                | 3,2                              |
| 4210       | 5,71                  | 32,6                                 | 241               | 13,7                             |            |                       |                                      | $\Sigma = 1805$   | $\Sigma = 97,7$                  |

Теперь получается следующее критическое число оборотов в минуту:

$$N_{кр} = \frac{60}{\tau} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g \sum_{i=1}^n W_i x_i}{\sum_{i=1}^n W_i x_i^2}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{981 \cdot 1807}{97,7}} = 1290 \text{ об/мин.}$$

Нужно заметить, что ступицы шкивов или маховиков увеличивают жесткость вала и могут значительно повысить его критическую скорость. При рассмотрении этого явления можно принять, что напряжения, возникающие вследствие колебаний, малы и что давления запрессовки между ступицей и валом достаточно для полного предотвращения относительных сдвигов обеих частей, так что ступицу можно рассматривать как часть вала увеличенного диаметра. Таким образом, влияние ступиц на критическую скорость будет учтено введением этого увеличенного диаметра в изложенное выше графическое построение\*).



Рис. 35

В случае ротора с кольцевыми канавками (рис. 35), если расстояние между канавками имеет тот же порядок, что и их глубина,

\* А. Стодола в своей книге «Dampf- und Gasturbinen» (6-е изд., Берлин, стр. 383, 1924) приводит пример, в котором подобный учет дополнительной жесткости дал удовлетворительный результат и вычисленная критическая скорость оказалась в хорошем соответствии с экспериментом. См также работу: В. Еск, Versteifender Einfluss der Turbinenscheiben, Z. Ver. deut. Ing., т. 72, стр. 51, 1928.

материал между канавками не испытывает напряжений изгиба и жесткость такого ротора близка к жесткости ротора, диаметр которого измерен по дну канавок\*).

Необходимо также отметить, что для случая, изображенного на рис. 33, были предположены жесткие опоры. В некоторых случаях жесткость опор достаточно мала для того, чтобы оказать заметное влияние на значение критической скорости. Влияние податливости опор может быть легко учтено, если она одинакова в вертикальном и горизонтальном направлениях. Нужно только прибавить к ранее вычисленным прогибам  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  вертикальные смещения, вызванные осадкой опор под действием грузов  $W_1$ ,  $W_2$  и  $W_3$ . Такие дополнительные прогибы уменьшают критическую скорость вала\*\*).

**6. Вынужденные колебания: установившийся режим.** — Во всех предыдущих пунктах рассматривались свободные колебания систем с одной степенью свободы. Рассмотрим теперь случай, когда кроме силы веса и силы натяжения пружины (рис. 1) на груз  $W$  действует периодическая возмущающая сила  $P \sin \omega t$ . Период этой силы равен  $\tau_1 = 2\pi/\omega$ , а ее частота  $f_1 = \omega/2\pi$ . Поступая, как и выше (§ 1), мы получаем следующее дифференциальное уравнение движения:

$$\frac{W}{g} \ddot{x} = W - (W + kx) + P \sin \omega t, \quad (a)$$

или, вводя обозначения

$$q = \frac{Pg}{W}, \quad p^2 = \frac{k}{W}, \quad (b)$$

имеем:

$$\ddot{x} + p^2 x = q \sin \omega t. \quad (23)$$

Частное решение этого уравнения получится в предположении, что  $x$  пропорционально  $\sin \omega t$ , т. е.

$$x = A \sin \omega t, \quad (c)$$

где  $A$  — постоянная, значение которой должно удовлетворять уравнению (23). Подставляя (c) в это уравнение, находим:

$$A = \frac{q}{p^2 - \omega^2}.$$

Тогда искомое частное решение есть

$$x = \frac{q \sin \omega t}{p^2 - \omega^2}. \quad (24)$$

\* В. Еск (см. предыдущую сноску).

\*\* Случай, когда жесткость опор различна в двух взаимно перпендикулярных направлениях, рассмотрен на стр. 279.

Прибавляя к этому частному решению выражение (2), представляющее решение уравнения (1) для свободных колебаний, получаем:

$$x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{q \sin \omega t}{p^2 - \omega^2}. \quad (25)$$

Это выражение содержит две постоянные интегрирования и представляет общее решение уравнения (23). Как видно, это решение состоит из двух частей; первые два члена представляют свободные колебания<sup>\*)</sup>, которые были рассмотрены ранее, а третий член, зависящий от возмущающей силы, представляет *вынужденные колебания* системы. Эти последние колебания имеют тот же период  $T_1 = 2\pi/\omega$ , что и возмущающая сила. Используя первое обозначение (b) для  $q$  в уравнении (24) и не учитывая свободные колебания<sup>\*\*)</sup>, получаем так называемый *установившийся режим* вынужденных колебаний, определяемый уравнением

$$x = \frac{P}{k} \left( \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \right) \sin \omega t. \quad (26)$$

Множитель  $P/k$  представляет собой перемещение, которое вызывает максимальная возмущающая сила  $P$ , если она приложена статически, а множитель  $1/(1 - \omega^2/p^2)$  выражает динамичность действия этой силы. Абсолютная величина этого множителя обычно называется

*динамическим коэффициентом*. Мы видим, что он зависит только от отношения  $\omega/p$ , т. е. от частоты, получаемого делением частоты возмущающей силы на частоту свободных колебаний системы. На рис. 36 показано изменение динамического коэффициента в зависимости от отношения  $\omega/p$ .

Как видно, при малых значениях отношения  $\omega/p$ , т. е. в случае, когда частота возмущающей силы мала по сравнению с частотой свободных колебаний, динамический коэффициент близок к единице и перемещения приблизительно такие же, что и при статическом действии силы  $P \sin \omega t$ .

\*) [Термин «свободные колебания» полностью соответствует смыслу этих слагаемых. Так, при нулевых начальных условиях  $x=0$ ,  $\dot{x}=0$  при  $t=0$  эти слагаемые не исчезают.]

\*\*) Влияние свободных колебаний в комбинации с вынужденными колебаниями будет рассмотрено в следующем параграфе.

Когда отношение  $\omega/p$  приближается к единице, динамический коэффициент и амплитуда вынужденных колебаний быстро возрастают и обращаются в бесконечность при  $\omega = p$ , т. е. в случае, когда частота возмущающей силы точно совпадает с частотой свободных колебаний системы. Это — *условие резонанса*. Полученные бесконечные значения амплитуд вынужденных колебаний указывают, что при соответствующем темпе изменения возмущающей силы амплитуды колебаний неограниченно возрастают, если отсутствуют неупругие сопротивления. В практических случаях такие сопротивления всегда существуют; их влияние на амплитуды вынужденных колебаний будет рассмотрено ниже (§ 13).

Динамический коэффициент принимает конечное значение, когда частота возмущающей силы становится большей, чем частота свободных колебаний. Его абсолютная величина уменьшается с возрастанием отношения  $\omega/p$  и приближается к нулю при весьма больших значениях этого отношения. Это означает, что если на колеблющееся тело действует сила высокой частоты ( $\omega/p$  велико), то вызываемые ею колебания имеют малую амплитуду и во многих случаях тело можно считать остающимся неподвижным. Практическое значение этого факта будет рассмотрено в следующем параграфе.

При рассмотрении знака выражения  $1/(1 - \omega^2/p^2)$  видно, что для случая  $\omega < p$  это выражение положительно, а для  $\omega > p$  оно становится отрицательным. Это показывает, что если частота возмущающей силы меньше частоты свободных колебаний, то вынужденные колебания и возмущающая сила находятся все время в одной фазе, т. е. колеблющаяся масса (рис. 1) достигает низшего положения в тот же момент, когда возмущающая сила принимает наибольшее значение в направлении вниз. Если  $\omega > p$ , то сдвиг фаз между вынужденными колебаниями и возмущающей силой становится равным  $\pi$ . Это означает, что в момент, когда сила направлена вниз и максимальна, колеблющаяся масса занимает крайнее верхнее положение. Это явление может быть проиллюстрировано на следующем простом опыте. В случае простого маятника  $AB$  (рис. 37) вынужденные колебания могут быть вызваны горизонтальными колебаниями точки подвеса  $A$ . Если эти колебания имеют частоту меньшею, чем частота свободных колебаний маятника, то крайние положения маятника будут такими, как показано на рис. 37, а; движение точек  $A$  и  $B$  будет в одной фазе. Если колебания точки  $A$  будут происходить с частотой большей, чем

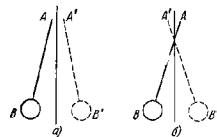


Рис. 37.

Рис. 36.

частота свободных колебаний маятника, то крайние положения его при колебаниях соответствуют рис. 37, б. В этом случае сдвиг фаз между движениями точек  $A$  и  $B$  равен  $\pi$ .

Выше было принято, что возмущающая сила пропорциональна  $\sin \omega t$ . Те же результаты получаются, если в выражении возмущающей силы принять  $\cos \omega t$  вместо  $\sin \omega t$ .

Вынужденные колебания упруго подвешенного груза (рис. 1) могут быть вызваны также другим способом, несколько отличающимся от рассмотренного выше. Допустим, например, что верхнему концу пружины задано в вертикальном направлении простое гармоническое движение

$$x_1 = a \sin \omega t. \quad (d)$$

Тогда, измеряя перемещение  $x$  подвешенного груза  $W$  от его положения равновесия, когда  $x_1 = 0$ , получим для удлинения пружины в любой момент  $x - x_1 + \delta_{ст}$  и для соответствующей силы в пружине  $k(x - x_1) + W$ . Таким образом, уравнение движения подвешенного груза принимает вид

$$\frac{W}{g} \ddot{x} = W - k(x - x_1) - W.$$

Подставляя вместо  $x_1$  его выражение из (d) и используя обозначения

$$q = \frac{akg}{W}, \quad p^2 = \frac{kg}{W}, \quad (e)$$

находим:

$$\ddot{x} + p^2 x = q \sin \omega t. \quad (23^1)$$

Это уравнение идентично полученному выше уравнению (23). Отсюда можно заключить, что заданное верхнему концу пружины простое гармоническое движение  $a \sin \omega t$  эквивалентно непосредственному приложению возмущающей силы  $ak \sin \omega t$ . Все ранее сделанные заключения, относящиеся к решению уравнения (23), применимы также и в этом случае, так что, в конце концов, мы приходим к установившемуся состоянию вынужденных колебаний, определяемому уравнением

$$x = a \left( \frac{1}{1 - \omega^2/p^2} \right) \sin \omega t. \quad (26^1)$$

### Примеры

1. Определить амплитуду вынужденных крутильных колебаний вала (рис. 11), вызванных переменным крутящим моментом  $M \sin \omega t$ , если  $\omega = 10 \text{ л/сек}^{-1}$ , свободные крутильные колебания этого вала имеют частоту  $f = 10 \text{ сек}^{-1}$  и угол закручивания вала, вызванный статическим моментом  $M$ , равен  $0,01$  радиана.

Решение. В этом случае уравнение движения имеет вид (см. § 2):

$$\ddot{\varphi} + p^2 \varphi = \frac{M}{J} \sin \omega t,$$

где  $\varphi$  = угол закручивания и  $p^2 = k/J$ . Вынужденные колебания описываются уравнением

$$\varphi = \frac{M}{J(p^2 - \omega^2)} \sin \omega t = \frac{M}{k(1 - \omega^2/p^2)} \sin \omega t.$$

Замечая, что статическое отклонение  $M/k = 0,01$  и  $p = 2\pi \cdot 10$ , находим, что искомая амплитуда равна

$$\frac{0,01}{(1 - 1/4)} = 0,0133 \text{ рад.}$$

2. Колесо катится с постоянной горизонтальной скоростью  $v$  вдоль волнистой поверхности (рис. 38). Определить амплитуду вынужденных вертикальных колебаний груза  $W$ , связанного пружины с осью колеса, если статическая деформация пружины под действием груза  $W$  составляет  $\delta_{ст} = 9,8 \text{ см}$ ,  $v = 18 \text{ м/сек}$  и поверхность задана уравнением

$$y = a \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \text{где } a = 2,5 \text{ см и } l = 90 \text{ см.}$$

Решение. Рассматривая свободные вертикальные колебания груза  $W$  на пружине, найдем квадрат угловой частоты этих колебаний  $p^2 = g/\delta_{ст} = 100 \text{ сек}^{-2}$ . Центр  $O$  катящегося колеса совершает вертикальные колебания вследствие волнистости пути. Предполагая, что в начальный момент  $t = 0$  точка соприкосновения колеса находится в начале координат  $x = 0$  и подставляя  $x = vt$ , получаем для вертикальных колебаний этой точки уравнение  $y = a \sin \frac{\pi vt}{l}$ . Теперь вынужденные колебания груза определяются

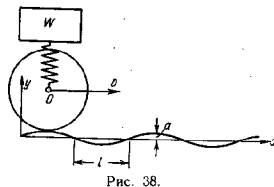


Рис. 38.

из уравнения (26<sup>1</sup>) после подстановки в него  $a = 2,5 \text{ см}$ ,  $\omega = \frac{\pi v}{l} = 20 \pi \text{ сек}^{-1}$ ,  $p^2 = 100 \text{ сек}^{-2}$ . Следовательно, амплитуда вынужденных колебаний равна  $2,5/(4\pi^2 - 1) = 0,066 \text{ см}$ . При данной скорости  $v$  вертикальные колебания колеса лишь в очень слабой степени передаются грузу  $W$ . Если мы примем вчетверо меньшую скорость  $v$  колеса, то получим  $\omega = 5 \pi \text{ сек}^{-1}$  и амплитуда вынужденных колебаний станет равной  $2,5/(\pi^2/4 - 1) = 1,72 \text{ см}$ . При дальнейшем уменьшении скорости  $v$  мы приходим в конце концов к резонансу, когда  $\pi v/l = p$ ; при этом будут происходить весьма сильные колебания груза  $W$ . В этих вычислениях масса колеса не учитывалась.

### Задачи

1. Найти амплитуду вынужденных колебаний груза  $W$  (рис. 1), если верхний конец пружины совершает вертикальные простые гармонические колебания с амплитудой  $a = 2,5 \text{ см}$  и угловой частотой  $\omega = 180 \text{ сек}^{-1}$ . Принять, что статическое отклонение груза  $\delta_{ст} = 8 \text{ см}$ .

Ответ.  $0,0095 \text{ см}$ .

2. Показанный на рис. 1 подвешенный груз имеет статическое отклонение  $\delta_{ст} = 2,5$  см. Какую амплитуду вынужденных колебаний вызовет возмущающая сила  $P \cos \omega t$ , если  $P = 1$  кг,  $\omega = 10$  д/сек<sup>-1</sup> и  $W = 4,5$  кг.

Ответ. 0,37 см.

3. Стандартная двутавровая балка № 20а (погонный вес 27,9 кг/м) имеет свободно опертые концы и пролет  $l = 3,6$  м. Посередине пролета установлен электромотор весом  $W = 450$  кг, совершающий 1800 об/мин. Вследствие неуравновешенности ротора развивается центробежная сила  $Q = 200$  кг. Чему равна вызываемая при этом амплитуда установившихся вынужденных колебаний?

Ответ. 0,24 см.

7. Вынужденные колебания: переходный процесс. — В предыдущем параграфе был рассмотрен только последний член уравнения (25), представляющий вынужденные колебания. Вообще говоря, приложение возмущающей силы вызывает также свободные колебания системы, представленные первыми двумя членами выражения (25). Таким образом, действительное движение является результатом сложения двух простых гармонических колебаний, имеющих в общем случае различные амплитуды, различные частоты и различные фазы. В результате получается весьма сложное движение. Однако вследствие не учтенного при выводе уравнения (25) демпфирования после короткого промежутка времени свободные колебания исчезают и остается только установившийся процесс вынужденных колебаний, постоянно поддерживаемых действием возмущающей силы. Частный случай кривой «перемещение — время» графически представлен на рис. 39. На штриховую кривую, представляющую вынужденные колебания с угловой частотой  $\omega$ , накладываются свободные колебания с более высокой угловой частотой  $p$  и амплитудой, убывающей вследствие демпфирования. Таким образом, полное движение представляется сплошной кривой, которая постепенно приближается к штриховой кривой, соответствующей условиям установившегося процесса. Начальный этап этого движения, т. е. те первые несколько циклов, в течение которых в движении участвуют свободные колебания, относят к *переходному процессу*. Иногда представляет практический интерес изучить подробности этого движения.

Амплитуда свободных колебаний может быть найдена из общего решения (25), если ввести в рассмотрение начальные условия. Положим, что в начальный момент ( $t = 0$ ) перемещение и скорость колеблющегося тела равны нулю. Тогда постоянные решения (25)

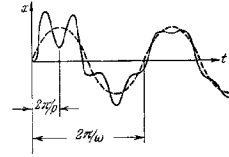


Рис. 39.

должны быть определены так, чтобы для  $t = 0$

$$x = 0 \text{ и } \dot{x} = 0. \quad (a)$$

Эти условия будут удовлетворены, если принять

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{q\omega}{p^2 - \omega^2}.$$

Подставив эти значения в выражение (25), получим:

$$x = \frac{q}{p^2 - \omega^2} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{p} \sin pt \right). \quad (27)$$

Таким образом, движение состоит из двух частей: свободных колебаний, пропорциональных  $\sin pt$ , и вынужденных колебаний, пропорциональных  $\sin \omega t$ .

Рассмотрим случай, когда частота возмущающей силы весьма близка к частоте свободных колебаний системы, т. е.  $\omega$  близко к  $p$ . Вводя обозначение

$$p - \omega = 2\Delta,$$

где  $\Delta$  — малая величина, и пренебрегая малым членом, содержащим множитель  $2\Delta/p$ , представим выражение (27) в следующей форме:

$$x = \frac{q}{p^2 - \omega^2} (\sin \omega t - \sin pt) = \frac{2q}{p^2 - \omega^2} \cos \frac{(\omega + p)t}{2} \sin \frac{(\omega - p)t}{2} = -\frac{2q \sin \Delta t}{p^2 - \omega^2} \cos \frac{(\omega + p)t}{2} \approx -\frac{q \sin \Delta t}{2\omega\Delta} \cos \omega t. \quad (28)$$

Так как  $\Delta$  есть малая величина, то функция  $\sin \Delta t$  меняется медленно

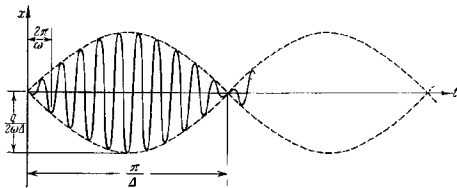


Рис. 40.

и ее период  $2\pi/\Delta$  велик. В таком случае выражение (28) можно рассматривать как колебания с периодом  $2\pi/\omega$  и переменной амплитудой  $q \sin \Delta t / 2\omega\Delta$ . Этот вид колебаний называется *биениями* и показан на рис. 40. Период биений, равный  $\pi/\Delta$ , увеличивается с приближением  $\omega$  к  $p$ , т. е. с приближением к условиям резонанса.

Для предельного случая  $\omega = p$  мы можем подставить в выражение (28)  $\Delta t$  вместо  $\sin \Delta t$ ; тогда получим:

$$x = -\frac{qt}{2\omega} \cos \omega t. \quad (29)$$

Амплитуда колебаний движения, описываемого уравнением (29), неограниченно возрастает со временем, как это показано на рис. 41. Это значит, что хотя в отсутствие демпфирования мы теоретически получаем бесконечную амплитуду резонансных вынужденных колебаний, однако необходимо время для нарастания больших амплитуд. Таким образом, в случае машины, предназначенной для работы в зарезонансной области, не возникнет больших трудностей при прохождении через резонанс, если сделать этот переход достаточно быстрым. Однако эксперименты показывают, что если какая-либо колебательная система находится в установившемся режиме непосредственно ниже резонанса, то становится трудным разгон машины для перехода через резонанс. Вводимая с этой целью дополнительная мощность, вместо разгона машины попросту расходуется на увеличение амплитуды колебаний. Это относится, в частности, к случаю перехода через критическую скорость вращающегося вала с неуравновешенными дисками, рассмотренного в § 5.

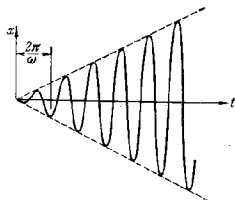


Рис. 41.

Ранее ради простоты всюду был предположен частный вид начальных условий (а). Хотя начальные условия не влияют на установившийся процесс вынужденных колебаний, они естественно сильно влияют на переходный процесс, так как определяют, в какой мере свободные колебания входят в комбинацию с вынужденными колебаниями. Обращаясь, например, к уравнению (27), мы видим, что при начальных условиях (а) амплитуда свободных колебаний относится к амплитуде вынужденных колебаний, как  $\omega/p$ . Следовательно, в этом случае, свободные колебания влияют на переходное движение в большей мере за резонансом, чем до резонанса\*).

Вместо случая возмущающей силы  $P \sin \omega t$ , рассмотрим случай, когда возмущающая сила изменяется по закону  $P \cos \omega t$ . Приняв те же начальные условия (а), найдем общее решение дифференциального уравнения (23) в виде (25), однако с той разницей, что

в последнем члене  $\sin \omega t$  заменяется на  $\cos \omega t$ . Поступая, как выше, мы найдем, что в данном случае постоянные интегрирования равны

$$C_1 = -\frac{q}{p^2 - \omega^2}, \quad C_2 = 0$$

и полное решение будет

$$x = \frac{q}{p^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos pt). \quad (30)$$

Мы видим, что в этом случае колебания свободные и вынужденные имеют одинаковые амплитуды независимо от отношения  $\omega/p$ .

### Пример

1. Верхний конец пружины (рис. 1) движется вниз с постоянной скоростью  $v_0$  и в момент  $t=0$  начинает простое гармоническое движение

$$x_1 = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Определить полное выражение для последующего движения подвешенного груза  $W$ .

Решение. В этом случае начальные условия движения будут:

$$t=0, \quad x=0, \quad \dot{x}=v_0. \quad (б)$$

Подставляя их в общее решение (25) и в его первую производную по времени, находим:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{v_0}{p} - \frac{q\omega}{p^2 - \omega^2}.$$

Подставляя значения постоянных вновь в (25) и замечая, что в этом случае

$$q = \frac{ahk}{W} = ap^2 = \frac{v_0 p^2}{\omega},$$

получаем:

$$x = \frac{v_0}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \left( \sin \omega t - \frac{\omega^2}{p^2} \sin pt \right).$$

### Задачи

1. Для системы, показанной на рис. 1, вес  $W=4,5$  кг и коэффициент жесткости  $k=2$  кг/см. Принимая возмущающую силу в виде  $P \sin \omega t$ , где  $P=1$  кг и  $\omega=10$  л/сек<sup>-1</sup> и начальные условия  $x=\dot{x}=0$  при  $t=0$ , найти скорость и перемещение груза  $W$  в момент  $t=1$  сек.

Ответ.  $x_1 = +0,52$  см;  $\dot{x}_1 = -6,28$  см/сек.

2. Какое перемещение и скорость получит груз  $W$  предыдущей задачи в момент  $t=1$  сек, если действует возмущающая сила  $P \cos \omega t$  вместо  $P \sin \omega t$ . Все другие значения взять из условия задачи 1.

Ответ.  $x_1 = -0,69$  см;  $\dot{x}_1 = -7,26$  см/сек.

3. Вычислить максимальное перемещение груза  $W$  примера 1 для частного случая, когда  $\omega/p=0,9$ .

Ответ.  $x_{\max} = 5,81$   $v_0/\omega$ .

\* [Здесь предполагается несколько искусственное условие, что возмущающая сила сразу приобретает частоту  $\omega$ .]

### 8. Технические приложения теории вынужденных колебаний. —

а) *Упругая подвеска машин.* Вращающиеся машины, имеющие некоторую неуравновешенность, передают на свои фундаменты периодические возмущающие силы, что может вызвать нежелательные колебания фундаментов и шум. Для уменьшения этих вредных явлений иногда применяется упругая подвеска машин. Пусть тело веса  $W$

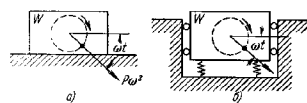


Рис. 42.

(рис. 42) представляет машину и  $P$  обозначает центробежную силу, возникающую вследствие неуравновешенности при угловой скорости машины, равной  $1 \text{ рад/сек}$ ; тогда при любой угловой скорости  $\omega$  цент-

робежная сила равна  $P\omega^2$ . Отсчитывая углы, как показано на рисунке, получим вертикальную и горизонтальную составляющие возмущающей силы, равные соответственно  $P\omega^2 \cos \omega t$  и  $P\omega^2 \sin \omega t$ . Если машина жестко прикреплена к жесткому фундаменту, как показано на рис. 42, а, то тело  $W$  будет оставаться неподвижным и фундаменту будет передаваться полная центробежная сила. Чтобы уменьшить силу, действующую на фундамент, введем упругую подвеску, как показано на рис. 42, б, и допустим, что имеются связи, препятствующие горизонтальному движению машины. Таким образом получается колебательная система, состоящая из тела  $W$  на вертикальных пружинах, подобная системе, показанной на рис. 1. Чтобы определить переменную вертикальную силу, передающуюся на фундамент через пружины, необходимо исследовать колебания тела под действием возмущающей силы  $P\omega^2 \sin \omega t$  (\*). Используя данное в § 6 выражение (26) для вынужденных колебаний и подставляя  $P\omega^2$  вместо  $P$ , находим, что амплитуда вынужденных колебаний равна абсолютному значению выражения

$$\frac{Pp^2}{k} \frac{\omega^2}{p^2 - \omega^2}, \quad (a)$$

где  $k$  — коэффициент жесткости, т. е. сила, способная вызвать вертикальное перемещение тела, равное единице, а  $p$  — собственная

\*) Здесь предполагается, что колебания малы и не оказывают заметного влияния на величину возмущающей силы, вычисленной в предположении, что неуравновешенный груз вращается вокруг неподвижной оси. [Об обратном влиянии основания на движение вибратора см. в книге В. О. Кононенко, Колебательные системы с ограниченным возбуждением, Наука, М., 1964].

частота угловых колебаний системы. Как мы видим, для данного значения отношения  $Pp^2/k$  амплитуда вынужденных колебаний зависит только от отношения  $\omega/p$ . Зависимость абсолютных значений второго множителя, входящего в выражение (а), от величин  $\omega/p$  показана на рис. 43. При больших значениях  $\omega/p$  эти значения стремятся к единице и абсолютное значение выражения (а) стремится к  $Pp^2/k$ . Зная амплитуду вынужденных колебаний тела  $W$  и умножая ее на коэффициент жесткости  $k$ , найдем максимум переменной силы, которую

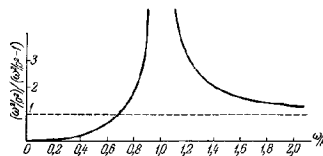


Рис. 43.

пружины будут передавать фундаменту. Вспоминая, что  $P\omega^2$  есть максимум вертикальной возмущающей силы, соответствующий случаю машины, жестко прикреплённой к фундаменту (рис. 42, а), из (а) можно заключить, что упругая подвеска уменьшает силу, передаваемую фундаменту, только если абсолютная величина разности  $1 - \omega^2/p^2$  больше единицы, т. е. если  $\omega > p\sqrt{2}$ . Когда  $\omega$  значительно больше  $p$ , т. е. когда машина установлена на весьма податливых пружинах, выражение (а) численно приближается к значению  $Pp^2/k$ , и вследствие упругой подвески происходит уменьшение вертикальной силы в отношении  $p^2/\omega^2$ . Из этого видно, что для уменьшения возмущающей силы, передаваемой фундаменту, машина должна быть установлена на податливых пружинах так, чтобы собственная частота колебаний тела  $W$  была мала по сравнению с числом оборотов в секунду машины. Влияние затухания в поддерживающих пружинах будет рассмотрено ниже (§ 14). Для упрощения задачи мы здесь рассматривали только вертикальные колебания тела. Чтобы уменьшить горизонтальную возмущающую силу, необходимо ввести горизонтальные пружины и исследовать горизонтальные колебания. Тогда мы вновь придем к заключению, что для уменьшения горизонтальной возмущающей силы собственная частота колебаний должна быть мала по сравнению с числом оборотов в секунду машины.

б) *Приборы для исследования колебаний.* Для измерения вертикальных колебаний можно воспользоваться грузом, подвешенным на пружине (рис. 44). Если точка  $A$  подвеса неподвижна и имеют место

вертикальные колебания груза, то можно присписать уравнение движения (1), в котором  $x$  обозначает перемещение груза  $W$  от положения равновесия. Примем теперь, что корпус, в котором подвешен груз  $W$ , прикреплен к телу, совершающему вертикальные колебания.

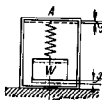


Рис. 44.

В таком случае колеблется также точка подвеса  $A$ , и вследствие этого будут вызваны вынужденные колебания груза. Допустим, что вертикальные колебания корпуса заданы уравнением

$$x_1 = a \sin \omega t, \quad (b)$$

так что точка подвеса  $A$  совершает простые гармонические колебания с амплитудой  $a$ . Следовательно, мы имеем второй случай вынужденных колебаний, рассмотренный в § 6, и заключаем соответственно, что движение подвешенного груза  $W$  описывается уравнением (26'), т. е.

$$x = \frac{a \sin \omega t}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}}. \quad (c)$$

Как видно, в случае, когда  $\omega$  мало по сравнению с  $p$ , т. е. когда частота колебаний точки подвеса  $\omega$  мала по сравнению с частотой свободных колебаний системы, перемещение  $x$  приблизительно равно  $x_1$ , и груз  $W$  практически повторяет движение точки подвеса  $A$ . Когда  $\omega$  приближается к  $p$ , знаменатель выражения (с) приближается к нулю, система приближается к резонансу, и происходят значительные вынужденные колебания.

Рассматривая теперь случай, когда  $\omega$  значительно больше  $p$ , т. е. когда частота колебаний тела, к которому прикреплен прибор, значительно выше частоты свободных колебаний груза  $W$ , мы видим, что амплитуда вынужденных колебаний (с) становится малой, и груз  $W$  можно считать неподвижным. Принимая, например,  $\omega = 10p$ , находим, что амплитуда вынужденных колебаний составляет лишь  $a/99$ , т. е. в этом случае колебания точки подвеса будут лишь в слабой мере передаваться грузу  $W$ .

Это свойство используется в различных приборах, применяемых для измерения и записи колебаний. Предположим, что к корпусу прикреплена стрелка, конец которой прикажет к грузу  $W$  (рис. 44). Стрелка, двигаясь при колебаниях вверх и вниз, укажет двойную амплитуду относительного движения груза  $W$  по отношению к корпусу. Эта амплитуда равна наибольшему значению выражения

$$x - x_1 = a \sin \omega t \left( \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} - 1 \right) = a \sin \omega t \frac{\frac{\omega^2}{p^2}}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}}. \quad (d)$$

Когда  $p$  мало по сравнению с  $\omega$ , это значение весьма близко к амплитуде  $a$  колеблющегося тела, с которым связан прибор. На рис. 43 показана зависимость последнего множителя, входящего в правую часть выражения (d), от отношения  $\omega/p$ .

Описанный прибор оказался весьма полезным в силовых установках для изучения колебаний турбогенераторов. Путем введения дополнительных горизонтальных пружин этим инструментом можно также измерять горизонтальные колебания. Обычно пружины прибора выбираются таким образом, чтобы частоты свободных колебаний груза  $W$  в вертикальном и горизонтальном направлениях составляли около 200 кол/мин. Если турбогенератор совершает 1800 об/мин, то можно ожидать, что вследствие некоторой неуравновешенности будут вызваны колебания той же частоты фундамента и подшипников. Тогда связанные с фундаментом или подшипником стрелки прибора покажут с достаточной точностью амплитуды вертикальных и горизонтальных колебаний, так как в этом случае  $\omega/p = 9$  и разница между изучаемым движением и относительным движением (d) мала.

Для получения записи колебаний можно использовать вращающийся с постоянной скоростью цилиндрический барабан. Если такой барабан с вертикальной осью прикреплен к корпусу (рис. 44) и связанный с грузом карандаш упирается в барабан, то будет получена полная запись относительного движения (d). На этом принципе построены различные вибрографы. На рис. 45 показано простое устройство для записи колебаний судовых корпусов. Груз  $W$  связан резиновым шнуром  $AC$  с точкой  $A$  балки. Если период свободных колебаний груза весьма велик, то при вертикальных колебаниях корпуса груз остается практически неподвижным. Тогда прикрепленный к грузу карандаш запишет колебания корпуса на вращающемся барабане  $B$ . Для того, чтобы запись без заметных искажений отражала колебания корпуса, частота свободных колебаний груза должна быть мала по сравнению с частотой изучаемых колебаний корпуса корабля. Это требует, чтобы статическое удлинение шнура было большим. Например, для получения собственной частоты 0,5 кол/сек удлинение шнура при статическом действии груза  $W$  должно быть  $\sim 90$  см. Необходимость больших удлинений является недостатком прибора этого типа.

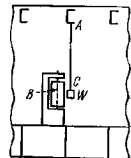


Рис. 45.

Устройство, подобное показанному на рис. 44, может быть использовано также для измерения ускорений. В этом случае следует применить жесткую пружину, а собственная частота колебаний груза  $W$  должна быть весьма большой по сравнению с частотой колеблющегося тела, к которому прикреплен прибор. Тогда в выражении (d)  $p$  велико по сравнению с  $\omega$ , и относительное движение



груза  $W$  равно приблизительно  $a\omega^2 \sin \omega t / p^2$  и пропорционально ускорению  $\ddot{x}_1$  тела, с которым связан прибор. Вследствие жесткости пружины относительные перемещения груза  $W$  обычно малы и для их записи требуются специальные устройства.

### Примеры

1. Машина весом  $W = 450$  кг, совершающая 1800 об/мин, опирается на четыре винтовые пружины (рис. 42, б), изготовленные из стальной проволоки диаметром  $d = 1,2$  см. Средний диаметр пружины  $D = 10$  см и число витков  $\lambda = 10$ . Определить наибольшую вертикальную возмущающую силу, передаваемую фундаменту, если центробежная сила от неуравновешенности  $P = 0,45$  кг при угловой скорости  $1$  рад/сек.

*Решение.* Статическая осадка пружин под действием груза равна

$$\delta_{ст} = \frac{2nD^3W}{d^4G} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 450}{1,2^4 \cdot 0,8 \cdot 10^{10}} = 5,43 \text{ см},$$

откуда коэффициент жесткости  $k = 450 : 5,43 = 83$  кг/см и квадрат угловой частоты свободных колебаний составляет  $p^2 = g/\delta_{ст} = 181$  сек<sup>-2</sup>. Используя уравнение (а), получим наибольшую силу, передаваемую фундаменту:

$$0,45 \frac{(60\pi)^2}{(60\pi)^2 - 181} = 82 \text{ кг}.$$

2. Для измерения вертикальных колебаний фундамента используется прибор, показанный на рис. 44. Какова амплитуда этих колебаний, если частота равна 1800 в минуту, стрелка прибора колеблется между делениями шкалы, показывающими смещения 0,25 и 0,30 см, и пружины выбраны так, чтобы статическое отклонение груза  $W$  было равно 2,5 см?

*Решение.* Из отсчетов по шкале заключаем, что амплитуда относительного движения (см. уравнение (д)) равна 0,025 см. Согласно формуле (4) частота свободных колебаний груза  $W$  равна  $f = 3,16$  сек<sup>-1</sup>, следовательно,  $\omega/p = 30/3,16$ . Амплитуда колебаний фундамента из уравнения (д) равна

$$a = 0,025 \frac{\left(\frac{30}{3,16}\right)^2 - 1}{\left(\frac{30}{3,16}\right)^2} = 0,0248 \text{ см}.$$

3. Для измерения амплитуды вертикальных колебаний локомотива можно использовать устройство, показанное на рис. 44. Пусть частота вертикальных колебаний локомотива равна 3 кол/сек. Жесткость пружины прибора такова, что частота свободных колебаний груза  $W$  равна 60 сек<sup>-1</sup>. Каково максимальное ускорение вертикальных колебаний локомотива, если записанные прибором колебания, представляющие относительное движение груза  $W$  по отношению к корпусу прибора, имеют амплитуду  $a_1 = 0,0025$  см? Какова амплитуда  $a$  колебаний наддрессорной части локомотива?

*Решение.* Из уравнения (д) имеем:

$$a_1 = \frac{a\omega^2}{p^2 - \omega^2}.$$

следовательно, наибольшее вертикальное ускорение наддрессорной части равно

$$a\omega^2 = a_1(p^2 - \omega^2).$$

Замечая, что  $p = 2\pi \cdot 60$  и  $\omega = 2\pi \cdot 3$ , получаем:

$$a\omega^2 = 0,0025 \cdot 4\pi^2 (60^2 - 3^2) = 352 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$$

и

$$a = \frac{352}{56\pi^2} = 1 \text{ см}.$$

### Задачи

1. Во сколько раз увеличится вертикальная возмущающая сила, передаваемая фундаменту неуравновешенной машины, рассмотренной выше в примере 1, если имеется восемь опорных пружин вместо четырех? Все другие данные принять прежними.

*Ответ.* Приблизительно вдвое.

2. Вычислить необходимое значение коэффициента жесткости  $k$  для упругой подвески электромотора, весомого 90 кг и совершающего 1800 об/мин, если наибольшая сила, передаваемая 0,1 центробежной силой, возникающей от неуравновешенности.

*Ответ.*  $k = 295$  кг/см.

3. Показанный на рис. 46 прибор должен быть применен для записи вертикальных колебаний моста, собственная частота которого примерно 90 кол/мин. Вес  $W = 0,30$  кг; рычаг  $BD$  весит 0,45 кг; пружина  $AC$  имеет коэффициент жесткости  $k_2 = 0,18$  кг/см. Найти отношение  $a/l$ , необходимое для того, чтобы запись на вращающемся барабане  $FG$  представляла движение моста с точностью  $\pm 2\%$ .

*Ответ.*  $a/l \approx 1/15$ .

4. Запись, сделанная акселерометром, прикрепленным к возвратно-ступенчатому движущемуся ползуну паровой машины, показывает амплитуду 0,61 см. Найти наибольшее ускорение ползуна, если коэффициент жесткости прибора равен  $k = 1,78$  кг/см и подвешенный груз  $W = 0,09$  кг.

*Ответ.*  $\ddot{x}_1 = 12400$  см/сек<sup>2</sup>.

5. вновь обращаясь к рис. 46, принять, что  $a/l = 0,1$  и  $W = 0,45$  кг. Найти коэффициент жесткости  $k_2$ , необходимый для того, чтобы прибор записал колебания корабля 90 кол/мин с ошибкой, не превосходящей 1%. В этом случае пренебречь весом рычага  $BD$ .

*Ответ.*  $k_2 = 0,41$  кг/см.

6. Электромотор вместе с опорной плитой весят 4500 кг. Мотор совершает 1800 об/мин. Найти коэффициент жесткости  $k$  подвески, которая обеспечит уменьшение передаваемой фундаменту силы до 10% центробежной силы, вызванной неуравновешенностью.

*Ответ.*  $k = 15000$  кг/см.

9. Другие технические приложения. — Вибратор. Для определения собственных частот инженерных конструкций иногда применяется специальный механизм, называемый вибратором\*. Он состоит из двух роторов, вращающихся в вертикальной плоскости в противоположных направлениях с равными по величине скоростями (рис. 47). Опоры роторов установлены на жесткой раме, которая должна быть жестко прикреплена к конструкции, колебания

\*) Подобный вибратор описан в статье: W. Späth, Z. Ver. deut. Ing., т. 73, стр. 563, 1929.

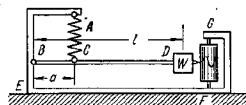


Рис. 46.

которой изучаются. С роторами связаны неуравновешенные грузы, симметрично расположенные относительно вертикальной оси  $ml$ ; при вращении роторов возникают центробежные силы  $R\omega^2$ , равнодействующая которых  $2R\omega^2 \sin \omega t$  направлена вдоль оси  $ml$  (\*). Эта переменная сила вызывает вынужденные колебания конструкции, которые могут быть записаны вибрографом. Постепенно изменяя скорость вращения роторов, можно установить то число оборотов в секунду, при котором амплитуда вынужденных колебаний конструкции достигает максимума. Так как это имеет место при резонансе (\*\*), частота свободных колебаний конструкции равна найденному таким образом числу оборотов роторов в секунду.

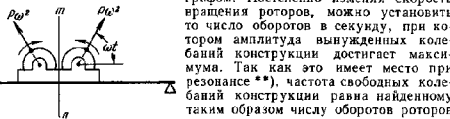


Рис. 47.

**Тахометр Фрама (\*\*\*)**. Тахометр Фрама является прибором, широко применяемым для измерения частоты колебаний. Он состоит из системы стальных полос, жестко закрепленных на их нижних концах, как показано на рис. 48. К верхним концам этих полос прикреплены небольшие массы, величина которых рассчитана так, что система полос представляет определенную серию частот. Разность частот двух соседних полос обычно равна половине колебания в секунду.

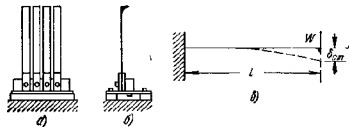


Рис. 48.

При вычислении частоты полосу можно рассматривать как консоль (рис. 48, а). Для того чтобы учесть влияние массы полосы на колебания, нужно четверть веса  $W_1$  полосы прибавить к сосредоточенному на конце весу  $W$ . Тогда

$$\delta_{ст} = \frac{(W + \frac{W_1}{4}) l^3}{3EI}$$

Для определения собственного периода колебаний полосы это статическое отклонение нужно подставить в формулу (4). Для пользования прибором его прикрепляют к машине, частота колебаний которой должна быть измерена. Та полоса, у которой собственный период колебаний является бли-

\* Предполагается, что допустимо пренебречь влиянием колебаний на силы инерции, развиваемые грузами. (См. сноску на стр. 54).

\*\* Для более точного изучения этого вопроса необходимо учесть влияние демпфирования (см. § 13).

\*\*\* Этот прибор описан в работе: F. L. и X., Elektrotech. Z., стр. 264—387, 1905.

жайшим к периоду одного оборота машины, оказывается в близких к резонансу условиях и возникают значительные колебания этой полосы. По известной частоте колебаний полосы может быть установлена частота исследуемых колебаний.

Вместо ряда полос различной длины с различными массами на концах можно воспользоваться одной полосой, имеющей регулируемую длину. Тогда частота исследуемых колебаний может быть найдена путем изменения длины полосы, необходимого для наступления резонанса. На этом принципе основано устройство хорошо известного виброметра Фуллартона.

**Индикатор паровых машин**. Индикаторы паровых машин применяются для измерения изменений давления пара в цилиндре машины. Точность показаний таких индикаторов зависит от способности системы индикатора, состоящей из поршня, пружины и пера, точно следовать за изменением давления пара. Из общей теории, данной в § 6, известно, что это условие удовлетворяется, если частота свободных колебаний системы индикатора значительно выше частоты изменений давления пара в цилиндре.

Пусть  $A = 1,3 \text{ см}^2$  — площадь поршня индикатора,  $W = 0,06 \text{ кг}$  — вес поршня, штока и приведенный вес других частей, связанных с поршнем,  $S = 0,25 \text{ см}$  — перемещение пера, вызываемое давлением, равным  $1 \text{ ат}$  ( $1 \text{ кг/см}^2$ ), и  $l = 4$  — отношение перемещения пера к перемещению поршня. Из условия, что сила давления на поршень, равная  $1 \cdot 1,30 = 1,30 \text{ кг}$ , вызовет сжатие пружины, равное  $0,25 \cdot 1/4 = 0,0625 \text{ см}$ , найдем, что коэффициент жесткости равен

$$k = 1,30 \cdot 0,0625 = 20,8 \text{ кг/см.}$$

Частота свободных колебаний индикатора равна

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{gk}{W}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{981 \cdot 20,8}{0,06}} = 93 \text{ сек}^{-1}.$$

Эту частоту можно считать достаточно высокой по сравнению с обычными частотами паровых машин, и запись индикатора будет достаточно точной. Однако в случае высокоскоростных машин такой прибор при определенных условиях может дать совершенно неравные показания \*).

**Давление колеса локомотива на рельс**. Хорошо известно, что силы инерции противовесов колес локомотива вызывают дополнительные давления на путь. Это влияние противовесов можно легко определить при помощи теории вынужденных колебаний. Пусть  $W$  — вес колеса и всех частей, жестко связанных с колесом,  $Q$  — сила сжатия рессоры,  $P$  — центробежная сила, вызванная противовесом,  $\omega$  — угловая скорость колеса. При решении этой задачи в статической постановке вертикальное давление колеса на рельс (рис. 49) будет равно

$$Q + W + P \cos \omega t. \quad (a)$$

Это выражение дает хорошее приближение для давления колеса при малой скорости. Для определения этого давления с большей точностью нужно рассмотреть вынужденные колебания колеса на рельсе, вызванные периодической вертикальной силой  $P \cos \omega t$ . Пусть  $k$  обозначает приложенную

\* (Подобный случай описан в книге: А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, Л., Изд. АН СССР, 3-е изд., 1933.)

Описание индикатора для высокочастотных машин (микрондикатор Коллинза) дано в журнале Engineering, т. 113, стр. 716, 1922.

См. также сборник статей, посвященных индикаторам: Proc. Inst. Mech. Engrs. (London), Jan. 1923.

к рельсу вертикальную силу, способную вызвать равный единиче прогиб рельса под грузом, а  $\delta_{ст}$  — прогиб, вызываемый грузом  $W$ ; тогда  $\delta_{ст} = W/k$ . Период свободных колебаний колеса на рельсе определяется формулой\*)

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{W}{kg}}. \quad (b)$$

Время одного оборота колеса, т. е. период возмущающей силы  $P \cos \omega t$ , составляет

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Теперь с помощью уравнения (26) можно найти, что динамический прогиб рельса, вызванный силой  $P$ , будет больше соответствующего статического прогиба в отношении

$$1 - \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^2$$

(c)

Вызванное центробежной силой  $P$  давление на рельс увеличится в том же отношении, и наибольшее давление колеса составит

$$Q + W + \frac{P}{1 - \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^2} \quad (d)$$

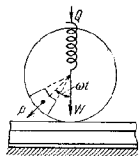


Рис. 49

Для рельса с жесткостью сечения  $3660 \cdot 10^6$   $\text{кгсм}^2$ , коэффициентом упругости основания, равным  $267$   $\text{кг/см}$ , и  $W = 2700$   $\text{кг}$  имеем:

$$\tau = 0,068 \text{ сек.}$$

Полагая, что колесо совершает пять оборотов в секунду, получаем:

$$\tau_1 = 0,2 \text{ сек.}$$

Подставляя эти значения  $\tau$  и  $\tau_1$  в выражение (c), можно заключить, что динамический эффект противовесов примерно на 11% больше, чем вычисленный статический.

**10. Уравновешивание вращающихся машин.** — Одним из наиболее важных приложений теорий колебаний является решение задач на уравновешивание. Известно, что вращающееся тело не оказывает никакого переменного возмущающего действия на опоры, если ось вращения совпадает с одной из главных осей инерции тела. В процессе изготовления машины трудно точно удовлетворить этому условию вследствие нарушений геометрических размеров, неоднородности

материала и некоторых нарушений симметрии в распределении масс. В результате этого возникают переменные возмущающие силы, которые вызывают колебания. Уравновешивание становится необходимым для уменьшения этих колебаний в машине и создания условий спокойного вращения. Важность уравновешивания становится особенно значительной для высокоскоростных машин. В таких случаях малейшая неуравновешенность может вызвать очень большую возмущающую силу. Например, при  $1800$  *об/мин* неуравновешенность, равная  $0,5$   $\text{кг}$  на радиусе  $75$   $\text{см}$ , создает возмущающую силу, равную  $2700$   $\text{кг}$ .

Для выяснения различных типов неуравновешенности рассмотрим ротор, показанный на рис. 50, а\*). Представим вращающееся тело

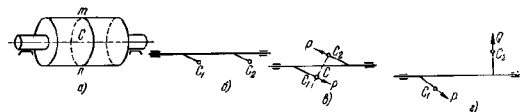


Рис. 50.

разделенным на две части некоторым поперечным сечением  $mn$ . Существуют три типичных случая неуравновешенности:

1. Центры тяжести обеих частей могут находиться в одной и той же осевой плоскости и по одну и ту же сторону от оси вращения (рис. 50, б). Соответственно центр тяжести  $C$  всего тела находится в той же плоскости на некотором расстоянии от оси вращения. Эта неуравновешенность называется *статической неуравновешенностью*, так как она может быть обнаружена статической проверкой. При проверке статической уравновешенности концы вала ротора устанавливаются на строго горизонтальные параллельные рельсы. Если центр тяжести всего ротора находится на оси (рис. 50, в), то ротор будет находиться в равновесии в любом положении; если же центр тяжести слегка смещен в сторону от оси, то ротор (рис. 50, б) покатится по рельсам, пока центр тяжести не займет нижнее положение.

2. Центры тяжести обеих частей могут быть в одной и той же осевой плоскости, но по разные стороны от оси вращения (рис. 50, в) и на таких расстояниях, что центр тяжести  $C$  всего ротора оказывается точно на оси вращения. В этом случае ротор будет находиться в равновесии в статических условиях, но при вращении возникает пара центробежных сил  $P$ . Плоскость действия этой пары

\*) В этом расчете не учтена масса рельса [а также присоединенная масса основания], а сила сжатия рессоры предположена постоянной. Последнее допущение оправдывается тем, что период колебаний наддрессорной части локомотива на рессорах обычно значительно превосходит период колебаний колеса на рельсе, так что колебания колеса не передаются наддрессорной части и изменение давления на рессору будет очень малым (см. § 8).

\*) Ротор рассматривается как абсолютно твердое тело, и колебания вследствие упругих перемещений не учитываются.

вращается вместе с ротором и вызывает колебания фундамента. Такой случай называется *динамической неуравновешенностью*.

3. В самом общем случае центры тяжести  $C_1$  и  $C_2$  могут лежать в разных осевых сечениях и при вращении образуется система двух центробежных сил  $P$  и  $Q$  (рис. 50, з). Эта система сил всегда может быть приведена к паре, действующей в некотором осевом сечении, и радиальной силе, так что в этом случае имеет место как статическая, так и динамическая неуравновешенность.

Можно показать, что во всех случаях полное уравновешивание может быть достигнуто прикреплением к ротору грузов в двух произвольно выбранных поперечных сечениях. Рассмотрим, например, случай, показанный на рис. 51. Вследствие неуравновешенности ротора при его вращении возникнут обе центробежные силы  $P$  и  $Q$ . Допустим теперь, что грузы, необходимые для уравновешивания, должны быть расположены в плоскости II поперечных сечений I и II. Центробежная сила  $P$  может быть уравновешена двумя силами  $P_1$  и  $P_2$ , лежащими в том же осевом сечении, что и сила  $P$ . Величины этих сил определяются из следующих уравнений статики:

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= P, \\ P_1 a &= P_2 b. \end{aligned}$$

Тем же способом сила  $Q$  может быть уравновешена силами  $Q_1$  и  $Q_2$ . Равнодействующая сил  $P_1$  и  $Q_1$  в плоскости I и равнодействующая сил  $P_2$  и  $Q_2$  в плоскости II определяет величины и положения уравновешивающих грузов, необходимых для полного уравновешивания ротора. Из сказанного видно, что уравновешивание может быть выполнено без всяких затруднений, если известны положение и величина неуравновешенности. Для определения неуравновешенности применяются различные типы балансировочных машин; рассмотрим основные принципы их работы.

Обычно балансировочная машина представляет собой устройство, в котором эффект любой неуравновешенности испытываемого ротора может быть усилен с помощью резонанса. Существуют три основных типа балансировочных машин: 1) машины, в которых ротор поворачивается на двух независимых опорах, как машина Лавачека — Хейманна или машина Вестингауза; 2) машины, в которых ротор устанавливается на колеблющемся столе с неподвижной осью вращения; 3) балансировочные машины с подвижной осью вращения.

*Машина Лавачека — Хейманна* состоит в основном из двух независимых опор. Два поддерживающие ротор подшипника прикреплены к пружинам, которые допускают колебания концов ротора в горизонтальной осевой плоскости. Один из подшипников закрепляется при уравновешивании, производимом на другом конце (рис. 52). Любая неуравновешенность вызовет горизонтальные колебания ротора вокруг неподвижной оси, проходящей через центр закрепленного подшипника. Для увеличения этих колебаний все наблюдения ведутся в условиях резонанса. Специальным мотором ротор доводится до скорости выше критической, после чего мотор выключается. Вследствие трения скорость ротора постепенно уменьшается, и когда она проходит через критическое значение, появляются отчетливо выраженные вынужденные колебания незакрепленного подшипника ротора при любой неуравновешенности. Процесс уравновешивания состоит в устранении этих колебаний путем прикрепления подходящих уравновешивающих грузов. Для помещения этих грузов наиболее удобны торцевые плоскости, по окружности которых обычно предусматриваются специальные отверстия для таких грузов. При таком устройстве достигается наибольшее расстояние между уравновешивающими грузами; поэтому величина этих грузов доводится до минимума. Когда плоскость для таких уравновешивающих грузов выбрана, подлежат решению два вопроса: 1) определить положение уравновешивающего груза и 2) определить его величину. Оба эти вопроса могут быть решены путем проб. Для определения положения в плоскости уравновешивания нужно установить некоторый произвольный уравновешивающий груз и сделать несколько испытаний при различных положениях груза по окружности ротора. Это даст возможность получить кривую зависимости амплитуды колебаний от угла, определяющего положение груза. Тем же способом, постепенно меняя величину груза, можно установить нужное значение веса уравновешивающего груза.

Опишем процесс балансировки ротора  $AB$  (см. рис. 52). Сначала предположим, что подшипник  $B$  закреплен, а конец  $A$  ротора может свободно колебаться в горизонтальной осевой плоскости. Уже было показано, что в наиболее общем случае неуравновешенности возникает система центробежных сил, которые всегда можно привести к двум центробежным силам, действующим в двух произвольно выбранных плоскостях, перпендикулярных к оси вала. Пусть неуравновешенность

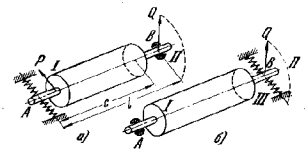


Рис. 52.

ротора представляют сила  $P$  в плоскости  $I$  (рис. 52, а) и сила  $Q$  в плоскости  $II$ , проходящей через центр закрепленного подшипника  $B$ . В рассматриваемом случае колебания вызывает только сила  $P$ . Поступая, как описано выше, можно определить силу  $P$  и соответствующим выбором уравнивающего груза уничтожить колебания. Для уравнивания силы  $Q$  нужно закрепить подшипник  $A$  и дать свободу колебаний подшипнику  $B$  (рис. 52, б). Беря плоскость  $III$  для помещения уравнивающего груза и поступая, как ранее, можно определить величину и положение этого груза. Пусть  $G$  обозначает центробежную силу, соответствующую этому грузу. Тогда из уравнения статики имеем:

$$Gc = Ql$$

$$Q = \frac{Gc}{l}. \quad (а)$$

Легко видеть, что, помещая уравнивающий груз в плоскость  $III$ , мы уничтожаем колебания, вызванные силой  $Q$  лишь при условии, что подшипник  $A$  закреплен. В противном случае будут существовать колебания вследствие того, что сила  $Q$  и сила  $G$  действуют в двух разных плоскостях  $II$  и  $III$ .

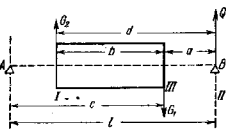


Рис. 53

Для получения полного уравнивания в каждую из двух плоскостей  $I$  и  $III$  должен быть помещен уравнивающий груз так, чтобы соответствующие центробежные

силы  $G_1$  и  $G_2$  имели равнодействующую —  $Q$ , равную и противоположную силе  $Q$  (рис. 53). Тогда из уравнений статики имеем:

$$\begin{aligned} G_1 - G_2 &= Q, \\ G_2 b &= Qa; \end{aligned}$$

отсюда с помощью уравнения (а) находим:

$$G_2 = \frac{Qa}{b} = \frac{Gac}{bl}, \quad (б)$$

$$G_1 = Q + G_2 = \frac{Gcd}{bl}. \quad (в)$$

Из этого видно, что уравниванием конца  $B$  и определением этим способом величины  $G$  можно из соотношений (б) и (в) найти необходимый уравнивающий груз в плоскости  $III$  и дополнительный уравнивающий груз в плоскости  $I$  и добиться полного уравнивания ротора.

Большая машина Вестингауза\*), позволяющая уравнивать роторы весом до 140 т, состоит в основном из двух опор, установленных на жесткую плиту, с приводным мотором и специальной магнитной муфтой сцепления для вращения ротора. В поперечном сечении опора состоит из неподвижной части, прикрепленной болтами к рельсам на опорной плите, и маятниковой части, удерживаемой на месте мощными пружинами. Вертикальная нагрузка веса ротора воспринимается гибкой тонкой вертикальной пластиной, создающей подвеску без трения. Ротор приводится во вращение со скоростью выше критической, что может быть обеспечено надлежащим подбором пружин соответственно весу ротора, и затем магнитная муфта сцепления выключается. Ротор медленно проходит через критическую скорость, причем ведутся наблюдения над колебаниями, вызванными увеличенным эффектом неуравновешенности.

Уравнивание производится закреплением одного подшипника и балансировкой другого конца, а затем закреплением второго конца и балансировкой соответственного противоположного конца. При уравнивании, производимом методом проб, время, необходимое для уравнивания тяжелых роторов, меньше времени, потребного для установки и подготовки к балансировке. Дополнительные уравнивающие грузы устанавливаются в балансировочных кольцах так же, как в случае машины Лавачека—Хеймана.

Балансировочная машина Акимова\*\*) состоит из жесткого стола, на котором установлены ротор и компенсирующее приспособление. Стол укреплен на основании таким образом, что допускает колебания либо относительно оси, параллельной оси ротора, либо относительно оси, перпендикулярной к оси ротора. В первом случае колебания вызывает только статическая неуравновешенность, во втором случае причиной колебаний будут как статическая, так и динамическая неуравновешенность. Для проверки и устранения статической неуравновешенности нужно закреплять стол так, чтобы получить колебания относительно оси, параллельной оси вращения ротора. Способ определения положения и величины неуравновешенности состоит в создании в некоторой подвижной части машины искусственной неуравновешенности, нейтрализующей неуравновешенность испытываемого ротора. Когда эта искусственная неуравновешенность точно уравнивает неуравновешенность испытываемого ротора, колебания установки исчезают; величина и положение неуравновешенности указываются машиной.

После устранения статической неуравновешенности ротора испытания динамической неуравновешенности могут быть выполнены путем

\*) L. C. Fletcher, Balancing Large Rotating Apparatus, Elec. J., т. 21, стр. 5.

\*\*) Trans. ASME, т. 38, стр. 367, 1916.

перестановки опор стола так, чтобы ось колебаний оказалась перпендикулярной к оси вращения. Величина и положение динамической неуравновешенности будут тогда легко найдены тем же описанным выше способом — путем введения в подвижную часть машины искусственной неуравновешенной пары. Важно отметить, что перед контролем динамической неуравновешенности должна быть полностью устранена статическая неуравновешенность.

*Машина Зодерберга — Трамплера* является примером машин третьего типа. При массовой балансировке малых объектов большое значение имеет время, необходимое для балансировки каждого объекта. В описанных выше типах машин определение дополнительных уравновешивающих грузов вызывает потерю времени. Чтобы избежать этого, в описываемой машине ось балансировочного стола делают подвижной. Уравновешиваемое тело устанавливается в блоке подшипников на колеблющийся стол, опирающийся на два упругих элемента и перещаемую ось. Установкой этой оси в плоскости одного из балансирующих колец, например *BB*, исключается влияние теоретической неуравновешенности в этой плоскости на движение колеблющегося стола. Это движение будет вызвано только неуравновешенностью в другой плоскости. Тогда уравновешиваются силы в плоскости *AA*, после чего подвижная ось устанавливается в плоскость *AA*; затем балансируется плоскость *BB*. Очевидно, что эта балансировка является окончательной и не требует никаких поправок. Описываемые машины применяются главным образом для уравновешивания малых роторов.

На том же принципе построена автоматическая машина фирмы Вестингауз, предназначенная для уравновешивания малых роторов\*). Для исключения вредного влияния трения в опорах пожевые опоры заменяются гибкими упругими элементами. Горизонтально колеблющийся стол поддерживается вертикальным стержнем, представляющим собой податливую на кручение ось. Стол надлежащим образом перемещается в соответствующих направляющих таким образом, что всего один груз в плоскости уравновешивания может обеспечить балансировку на оси вертикального стержня.

Для автоматического уравновешивания стол снабжается балансировочной головкой, связанной с ротором. Уравновешивание производится двумя электрически управляемыми муфтами. Перемещаемые на головке грузы создают уравновешивающую пару. Одна муфта раздвигает грузы для увеличения этой пары, другая муфта изменяет угловое положение уравновешивающей пары относительно ротора. Муфты управляются двумя кнопками, расположенными на передней части машины. Устраняя колебания стола, в очень короткое время легко

подобрать уравновешивающие грузы. Индикаторы на балансировочной головке указывают величину и положение неуравновешенности и в конструкцию вводятся необходимые уравновешивающие грузы\*).

**11. Демпфирование.** — В предыдущем исследовании свободных и вынужденных колебаний предполагалось, что на движущееся тело не действуют никакие силы сопротивления. На основе этого предположения для случая свободных колебаний было найдено, что амплитуда колебаний остается постоянной, хотя эксперименты показывают, что со временем амплитуда уменьшается и колебания постепенно затухают. В случае вынужденных колебаний при резонансе было найдено, что амплитуда колебаний может неограниченно увеличиваться, хотя, как мы знаем, вследствие демпфирования амплитуда всегда остается ниже определенного верхнего предела. Чтобы привести аналитическое рассмотрение задач колебаний в лучшее соответствие с действительными условиями, необходимо принять во внимание силы неупругого сопротивления (демпфирования), возникающие от нескольких различных причин: трение между сухими трущимися поверхностями, сопротивление воздуха или жидкости, электрическое сопротивление, внутреннее трение вследствие несовершенной упругости и т. д.

Для вычисления силы трения между сухими поверхностями обычно применяется закон Кулона — Морса\*\*). Предполагается, что в случае сухих поверхностей сила трения  $F$  пропорциональна нормальному давлению  $N$ , действующему между поверхностями, так что

$$F = \mu N, \quad (a)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения, значение которого зависит от материала трущихся тел и степени неровности их поверхностей.

Эксперименты показывают, что сила  $F$ , необходимая для преодоления трения и начала движения, больше силы, необходимой для поддержания равномерного движения. Поэтому коэффициент трения покоя обычно предполагается большим, чем коэффициент трения движения. Обычно также принимается, что коэффициент трения

\*) Недавно было предложено несколько новых типов балансировочных машин, значительно уменьшающих необходимое для уравновешивания время. Можно здесь упомянуть балансировочную машину Ледлан-Сирль, описанную в работе: E. L. Thearle, Trans. ASME, т. 54, стр. APR-131, 1932; об автоматической балансировочной машине Спэс — Ловенхаузен и способе уравновешивания роторов с помощью электрических схем см.: J. G. Vaker, F. C. Rushing, J. Franklin Inst., т. 222, стр. 183, 1936. [Подробное изложение методов балансировки см. в книге: Н. В. Колесник и К. Статическая и динамическая балансировка, Магистр, М., 1954.]

\*\*) С. A. Coulomb, Mémoires de mathématique et de physique, Париж, 1785; см. также его Théorie des machines simples, Париж, 1821; A. Morin, Mémoires présentés par divers savants, т. 4, 1833 и т. 6, 1835.

Новая литература, относящаяся к этому предмету, указана в книге: Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, т. 1, стр. 751, 1929.

\*) W. E. Trimptier, The Dynamic Balance of Small High Speed Armatures, Elec. J., т. 22, стр. 34, 1925.

движения не зависит от скорости, так что закон Кулона графически может быть представлен прямой  $BC$ , параллельной оси абсцисс (рис. 54). На том же рисунке точка  $A$  дает значение коэффициента трения покоя. Этот закон удивительно согласуется с экспериментами в случае гладких поверхностей. Если поверхности шероховаты, коэффициент трения зависит от скорости и уменьшается с ее увеличением (кривая  $AD$  на рис. 54)\*).

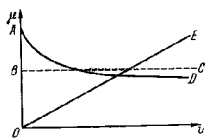


Рис. 54.

Если вместо скольжения мы имеем качение, как в шариковых подшипниках, то коэффициент трения не зависит от скорости и уменьшается с увеличением нормальной нагрузки на подшипник. Он очень мал по сравнению с коэффициентом трения скольжения.

Например, в случае скольжения стали по стали коэффициент трения имеет порядок от  $\mu = 0,15$  до  $\mu = 0,20$ , тогда как в случае шариковых или роликовых подшипников этот коэффициент изменяется в пределах от 0,001 до 0,002.

При трении между смазанными поверхностями сила трения не зависит от материала соприкасающихся тел, но зависит от вязкости смазки и скорости движения. В случае идеально смазанных поверхностей, когда между трущимися поверхностями существует непрерывная пленка смазки, можно считать, что сила трения пропорциональна вязкости смазки и скорости движения. На рис. 54 прямой линией  $OE$  представлен для этого случая коэффициент трения в зависимости от скорости.

Мы получим также силу сопротивления, пропорциональную скорости, если тело движется в вязкой жидкости с малой скоростью или если движущееся тело проталкивает жидкость через узкие каналы, как в случае амортизаторов\*\*). В дальнейшем изложении во всех случаях, в которых силы трения пропорциональны скоростям, мы будем называть эти силы силами вязкого трения.

При движении тел в воздухе или жидкости с большими скоростями можно с достаточной точностью принимать, что сопротивление пропорционально квадрату скорости.

Необходимо отметить, что силы трения всегда направлены в сторону, противоположную относительной скорости движущихся тел. В случае вращающегося в подшипниках вала (рис. 55, а) сила трения перпендикулярна к оси вала. Допустим теперь, что враща-

ющийся вал имеет некоторое движение в продольном направлении, вызванное приложением осевой силы. В таком случае относительная скорость будет не только иметь составляющую в окружном направлении, но также и некоторую составляющую вдоль оси, и сила трения  $F$  будет наклонена к оси вала (рис. 55, б). Очевидно, сила сопротивления в осевом направлении будет мала; таким образом, гораздо легче сдвинуть вал в продольном направлении в его подшипниках при вращении, чем при покое. Это означает, что вращающийся вал может колебаться в продольном направлении практически без затухания.

Другим примером пренебрежимо малого демпфирования может служить вал, вращающийся с большой скоростью и одновременно совершающий крутильные колебания. Так как амплитуды крутильных колебаний малы, соответствующая окружная скорость поверхности вала мала по сравнению со скоростью вращения вала как жесткого тела, и относительная скорость точек соприкосновения с подшипником остается практически постоянной, так что при крутильных колебаниях силы трения сохраняют направление и величину. Эти силы вызывают постоянное закручивание вала, но не создают затухания крутильных колебаний. В этом случае демпфирование почти исключительно зависит от *внутреннего трения материала* вала. Это внутреннее трение в основном имеет термическую природу\*). Температурные изменения, вызванные деформацией поликристаллического металлического образца, меняются от зерна к зерну в зависимости от их кристаллографической ориентации, и происходит некоторое рассеяние энергии вследствие теплового потока между отдельными кристаллами. Если вызвать последовательные циклы нагрузки и разгрузки, то соответствующие диаграммы испытаний обнаружат петли гистерезиса, площади которых измеряют энергию, рассеянную за цикл. Так как количество тепла, образуемое в любом зерне, пропорционально его объему, тогда как теплообмен определяется величиной поверхности зерна, то очевидно, что с уменьшением размеров зерен теплообмен облегчается и потери механической энергии возрастают. Таким образом, чтобы увеличить демпфирование за счет внутреннего трения, нужно применять материалы, имеющие малые размеры зерна.

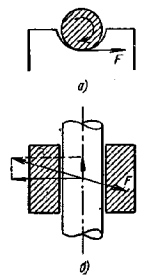


Рис. 55

\* Коэффициент трения между колесом локомотива и рельсом исследован в работе: Douglas Gaiton, Engineering, т. 25 и 26, 1878 и т. 27, 1879.

\*\* Описание соответствующих экспериментов дано в работе: A. S t o d o l a, Schweiz. Bauzeitung, т. 23, стр. 113, 1893.

\*) См. С. М. Зенгер, Elasticity and Anelasticity of Metals, Chicago, 1948. [Имеется русский перевод: Зинер, Упругость и неупругость металлов, ИЛ, М., 1954.]

В нашем последующем рассмотрении мы увидим, что проблема колебаний значительно упрощается, если силы демпфирования пропорциональны скорости. По этой причине силы сопротивления сложной природы для целей анализа очень часто заменяются *эквивалентным вязким сопротивлением*. Это эквивалентное сопротивление определяется из требования, чтобы оно вызывало то же рассеяние энергии за один цикл, что и действительная сила сопротивления. Этим способом, например, может быть исследовано затухание, вызываемое внутренним трением. В следующих параграфах будут подробно рассмотрены различные случаи колебаний с затуханием.

**12. Свободные колебания с вязким сопротивлением.**—Вновь рассмотрим колебания системы, показанной на рис. 1, и предположим, что колеблющееся тело  $W$  при движении встречает сопротивление, пропорциональное скорости. В таком случае вместо уравнения (б), стр. 10, получим:

$$\frac{W}{g} \ddot{x} = W - (W + kx) - c\dot{x}. \quad (а)$$

Последний член правой части этого уравнения представляет силу демпфирования, пропорциональную скорости  $\dot{x}$ . Знак минус показывает, что эта сила действует в направлении, противоположном скорости. Коэффициент  $c$  представляет собой постоянную, зависящую от вида демпфирующего устройства, равную величине демпфирующей силы при скорости, равной единице. Деля уравнение (а) на  $W/g$  и вводя обозначения

$$p^2 = \frac{kg}{W} \quad \text{и} \quad \frac{cg}{W} = 2n, \quad (б)$$

получаем для свободных колебаний с вязким сопротивлением дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = 0. \quad (31)$$

Для решения этого уравнения воспользуемся обычным методом решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, приняв решение в форме

$$x = e^{rt}, \quad (с)$$

где  $e$ —основание натуральных логарифмов,  $t$ —время, а  $r$ —постоянная, которая должна быть определена из условия, что выражение (с) удовлетворяет уравнению (31).

Подставляя (с) в уравнение (31), получаем:

$$r^2 + 2nr + p^2 = 0,$$

откуда

$$r = -n \pm \sqrt{n^2 - p^2}. \quad (д)$$

Рассмотрим сначала случай, когда зависящая от вязкого сопротивления величина  $n^2$  меньше, чем величина  $p^2$ . В таком случае величина

$$p_1^2 = p^2 - n^2 \quad (е)$$

положительна, и мы имеем для  $r$  два комплексных корня:

$$r_1 = -n + p_1 i \quad \text{и} \quad r_2 = -n - p_1 i.$$

Подставляя эти корни в выражение (с), находим два частных решения уравнения (31). Сумма или разность этих двух решений, умноженная на любую постоянную, также будет решением. Таким образом получим решения:

$$x_1 = \frac{C_1}{2} (e^{r_1 t} + e^{r_2 t}) = C_1 e^{-nt} \cos p_1 t,$$

$$x_2 = \frac{C_2}{2i} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t}) = C_2 e^{-nt} \sin p_1 t.$$

Складывая их, получаем общее решение уравнения (31) в форме

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t), \quad (32)$$

где  $C_1$  и  $C_2$ —постоянные, которые в каждом частном случае должны быть определены из начальных условий.

Выражение, заключенное в скобки в решении (32); имеет ту же форму, которую мы имели для колебаний без затухания (см. уравнение (2)). Оно представляет периодическую функцию с периодом

$$\tau = \frac{2\pi}{p_1} = \frac{2\pi}{p} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n^2}{p^2}}}. \quad (33)$$

Сравнивая этот период с периодом  $2\pi/p$ , найденным выше для колебаний без затухания, видим, что период колебаний вследствие демпфирования возрастает, однако, если  $n$  мало по сравнению с  $p$ , это возрастание имеет второй порядок малости. Поэтому в практических задачах с достаточной точностью можно считать, что малое вязкое сопротивление не влияет на период колебаний.

Множитель  $e^{-nt}$  в решении (32) постепенно убывает со временем, и вызванные вначале колебания будут постепенно затухать.

Для определения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  в решении (32) положим, что в начальный момент  $t=0$  колеблющееся тело смещено от его



положения равновесия на расстоянии  $x_0$  и имеет начальную скорость  $\dot{x}_0$ . Подставляя  $t=0$  в выражение (32), находим:

$$x_0 = C_1. \quad (f)$$

Дифференцируя то же выражение по времени и приравнявая его величине  $\dot{x}_0$  для  $t=0$ , получаем:

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{p_1}. \quad (g)$$

Подставляя (f) и (g) в решение (32), находим:

$$x = e^{-nt} \left( x_0 \cos p_1 t + \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{p_1} \sin p_1 t \right). \quad (34)$$

Первый член этого выражения, пропорциональный  $\cos p_1 t$ , зависит только от начального смещения  $x_0$ , а второй член, пропорциональный  $\sin p_1 t$ , зависит как от начального смещения  $x_0$ , так и от начальной скорости  $\dot{x}_0$ . Каждый член может быть легко представлен графически. Волнообразная кривая на рис. 56 представляет первый

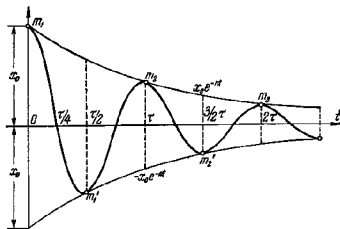


Рис. 56.

член. Эта кривая касается кривой  $x = x_0 e^{-nt}$  в точках  $m_1, m_2, \dots$ , где  $t=0, t=\tau, t=2\tau, \dots$ , и второй кривой  $x = -x_0 e^{-nt}$  в точках  $m_1, m_2, \dots$ , где  $t=\tau/2, t=3\tau/2, \dots$ . Эти точки не совпадают с точками наибольших отклонений тела от положения равновесия, и легко видеть, что вследствие демпфирования время, необходимое для перемещения тела от среднего положения до соответствующего крайнего положения, меньше времени, необходимого для возвращения из крайнего положения в соответствующее среднее положение. Темп затухания зависит от величины постоянной  $n$  (см. выражение (b)). Из общего решения (34) видно, что амплитуда колебаний уменьшается

после каждого цикла в отношении

$$e^{-n\tau}; 1, \quad (h)$$

т. е. ее убывание следует закону геометрической прогрессии. Выражение (h) может быть использовано для экспериментального определения коэффициента затухания  $n$ . Необходимо лишь определить опытным путем, во сколько раз уменьшается амплитуда колебаний после данного числа циклов.

Величина

$$n\tau = \frac{2\pi}{p} \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{n^2}{p^2}}}, \quad (35)$$

от которой зависит темп затухания, обычно называется *логарифмическим декрементом*. Он равен разности логарифмов двух последовательных амплитуд, измеренных в моменты  $t$  и  $t+\tau$ . При рассмотрении свободных незатухающих колебаний мы воспользовались понятием вращающегося вектора. В данном случае это тоже можно сделать, рассматривая равномерное вращение вокруг полюса  $O$  вектора  $\overline{OA}$ , имеющего переменную длину  $x_0 e^{-nt}$ ; угловая скорость вращения вектора должна быть принята равной  $p_1$ . При измерении угла поворота от оси  $x$  в направлении против часовой стрелки проекция  $OA_1$  этого вектора равна  $x_0 e^{-nt} \cos p_1 t$  и представляет первый член выражения (34). Таким же образом, беря вектор  $\overline{OB}$ , равный  $e^{-nt} (x_0 + n x_0)/p_1$  и перпендикулярный вектору  $\overline{OA}$ , и проектируя его на ту же ось, получим второй член решения (34). Общее выражение будет получено в виде проекции на ось  $x$  вектора  $\overline{OC}$ , который является суммой векторов  $\overline{OA}$  и  $\overline{OB}$ . Величина этого вектора равна

$$\overline{OC} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} = e^{-nt} \sqrt{x_0^2 + \frac{(x_0 + n x_0)^2}{p_1^2}}, \quad (i)$$

и угол, составляемый им с осью  $x$ , равен  $p_1 t - \alpha$ , где

$$\alpha = \arctg \frac{x_0 + n x_0}{p_1 x_0}; \quad (j)$$

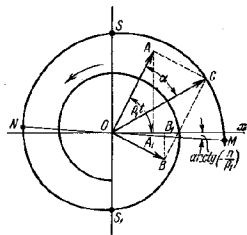


Рис. 57.

отсюда следует, что выражение (34) может быть представлено в виде

$$x = e^{-nt} \sqrt{x_0^2 + \frac{(x_0 + nx_0)^2}{p_1^2}} \cos(p_1 t - \alpha). \quad (36)$$

При вращении вектора  $\overline{OC}$  (рис. 57) точка  $C$  описывает логарифмическую спираль, касательная к которой составляет постоянный угол  $\arctg(-n/p_1)$  с перпендикуляром к вектору  $\overline{OC}$ . Крайние положения колеблющегося тела соответствуют точкам, в которых кривая имеет вертикальные касательные. Эти точки определяются пересечением спирали прямой линией  $MN$  (рис. 57). Точки пересечения спирали с вертикальной осью определяют моменты, в которые колеблющееся тело проходит через положение равновесия. Так как вектор вращается равномерно, то угол его поворота пропорционален соответствующему интервалу времени. Поэтому время, необходимое для перемещения тела от положения равновесия  $S$  в крайнее положение  $N$ , как определяемое углом  $SON$ , меньше времени, необходимого для возвращения в положение равновесия  $S_1$  (это время определяется большим углом  $NOS_1$ ). Однако время, необходимое для перехода тела из одного крайнего положения  $M$  в следующее крайнее положение  $N$ , всегда одно и то же и равно половине периода  $T$ .

В предыдущем решении уравнения (31) мы считали, что  $p^2 > n^2$ . Если  $p^2 < n^2$ , то оба корня (d) становятся действительными отрицательными числами. Подставляя их в выражение (c), мы получаем два частных решения уравнения (31), и общее решение этого уравнения принимает вид

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}. \quad (k)$$

Это решение более не содержит периодических членов и не представляет колебательного движения. Вязкое сопротивление столь велико, что тело, смещенное от его положения равновесия, не колеблется и лишь монотонно возвращается к этому положению.

*Критическая величина демпфирования*, при которой движение теряет колебательный характер, определяется условием  $n = p$ ; пользуясь обозначением (b), находим для этого случая:

$$c_{кр} = 2 \sqrt{\frac{kW}{g}}. \quad (l)$$

Выше мы всюду предполагали, что  $n$  положительно, т. е. представляет силу сопротивления. Таким образом, вследствие ее действия энергия рассеивается, амплитуда колебаний постепенно уменьшается и движение исчезает. Существуют, однако, случаи \*), когда энергия

вводится в систему и вследствие этого амплитуды при движении колебаний со временем растут. В этих случаях иногда применяется термин *отрицательное затухание*. Из решения (32) мы видим, что если  $n$  отрицательно, то множитель  $e^{-nt}$  увеличивается со временем и колебания постепенно возрастают. Случай положительного  $n$ , когда колебания исчезают, представляют *устойчивое движение*; случай отрицательного  $n$  — *неустойчивое движение*. Ниже будут рассмотрены различные случаи, в которых необходимо установить границу между устойчивым и неустойчивым движением.

### Примеры

1. Тело, колеблющееся с вязким сопротивлением (рис. 1), совершает 10 полных колебаний в секунду. Определить  $n$ , если по истечении 10 сек. амплитуда колебаний уменьшилась до 0,9 начальной амплитуды. Определить уменьшение периода колебаний, которое получится, если устранить затухание. Вычислить логарифмический декремент.

*Решение.* Предполагаем, что движение описывается уравнением

$$x = x_0 e^{-nt} \cos p_1 t,$$

и подставляя в это уравнение  $x = 0,9x_0$ ,  $t = 10$ ,  $p_1 = 20\pi$ , находим:

$$e^{10n} = \frac{1}{0,9} = 1,111,$$

откуда  $n = 0,01054$ .

Влияние затухания на период колебаний выражено в уравнении (33) множителем  $1/\sqrt{1-n^2/p^2} = p/\sqrt{p^2-n^2} = p/p_1$ . Подставляя  $p = \sqrt{p_1^2 + n^2} = p_1 \sqrt{1+n^2/p_1^2}$ , мы видим, что при устранении затухания период колебаний уменьшится в отношении  $1/\sqrt{1+n^2/p_1^2} \approx 1-n^2/2p_1^2$ , где  $n$  и  $p_1$  имеют вычисленные выше значения. Логарифмический декремент равен  $nt = 0,01054 \cdot 0,1 = 0,001054$ .

2. Определить общий характер кривой перемещения — время для движения упруго подвешенного груза, представленного самому себе при смещении  $x_0$  без начальной скорости, если затухание больше критического, т. е.  $n > p$ .

*Решение.* Подставляя начальные условия  $x = x_0$  и  $\dot{x} = 0$  при  $t = 0$  в выражение (k) и его первую производную по времени, находим:

$$C_1 + C_2 = x_0, \quad C_1 r_1 + C_2 r_2 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{r_2 x_0}{r_1 - r_2}, \quad C_2 = \frac{r_1 x_0}{r_1 - r_2}.$$

Таким образом, в этом случае выражение (k) принимает вид

$$x = \frac{x_0}{r_1 - r_2} (r_1 e^{r_1 t} - r_2 e^{r_2 t}). \quad (m)$$

\* ) Некоторые из них рассмотрены в § 20.

Дважды дифференцируя это выражение по времени, находим следующие выражения для скорости и ускорения:

$$\dot{x} = \frac{r_1 r_2 x_0}{r_1 - r_2} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t}), \quad (п)$$

$$\ddot{x} = \frac{r_1 r_2 x_0}{r_1 - r_2} (r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}). \quad (о)$$

Из выражения (п) мы видим, что скорость равна нулю при  $t=0$  и при  $t=\infty$  и что она отрицательна для всех промежуточных значений  $t$ , так как обе величины  $r_1$  и  $r_2$  отрицательны. Чтобы найти момент  $t_1$ , в котором эта отрицательная скорость максимальна, приравняем выражение (о) нулю и получим:

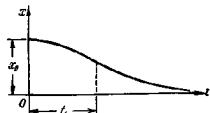


Рис. 58.

Из выражений (м), (н), (о) и (п) мы заключаем, что кривая «перемещение — время» имеет в общем вид, показанный на рис. 58. Для любой частной системы с данным коэффициентом затухания  $\delta$  можно определить полностью ход кривой, если вспомнить, что

$$r_1 = -n + \sqrt{n^2 - p^2}, \quad r_2 = -n - \sqrt{n^2 - p^2},$$

где  $n$  и  $p$  определяются выражениями (б).

#### Задачи

1. Тело весом  $W = 4,5$  кг оперто на пружину, для которой  $k = 1,8$  кг/см, и связано с гидравлическим амортизатором, создающим сопротивление 0,0015 кг при скорости 1 см/сек. Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний после 10 циклов?

Ответ. В 1 : 0,595 раз.

2. Груз  $W = 0,9$  кг, подвешенный к пружине с коэффициентом жесткости  $k = 0,18$  кг/см, движется, причем затухание определяется величиной  $n = \sqrt{5} p/2$ . Определить наибольшую отрицательную скорость, которая будет достигнута при возвращении к положению равновесия, если груз начинает движение при  $x_0 = 5$  см,  $\dot{x}_0 = 0$ .

Ответ.  $\dot{x}_{\max} = -23,7$  см/сек.

13. Вынужденные колебания с вязким сопротивлением. — Рассматривая вынужденные колебания с вязким сопротивлением, учтем, что дополнительно к силам, рассмотренным в предыдущем параграфе, на колеблющееся тело действует возмущающая сила  $P \sin \omega t$ . Тогда вместо уравнения (а) предыдущего параграфа получим:

$$\frac{W}{g} \ddot{x} + W - (W + kx) - c\dot{x} + P \sin \omega t.$$

Воспользовавшись обозначениями (б) на стр. 72, придадим этому уравнению вид:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x = \frac{Pg}{W} \sin \omega t. \quad (37)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения получится суммированием решения соответствующего однородного уравнения (31), стр. 72 и частного решения уравнения (37). Последнее решение примем в виде:

$$x_1 = M \sin \omega t + N \cos \omega t, \quad (а)$$

где  $M$  и  $N$  — постоянные. Подставляя это выражение в уравнение (37), найдем, что оно удовлетворяется, если  $M$  и  $N$  удовлетворяют линейным уравнениям:

$$-N\omega^2 + 2M\omega n + Np^2 = 0, \quad -M\omega^2 - 2N\omega n + Mp^2 = \frac{Pg}{W}.$$

Отсюда

$$M = \frac{Pg}{W} \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}, \quad N = -\frac{Pg}{W} \frac{2n\omega}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}. \quad (б)$$

Подставив эти выражения в (а), найдем искомого частное решение. Прибавив его к общему решению (32) однородного уравнения, получим общее решение уравнения (37):

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t) + M \sin \omega t + N \cos \omega t. \quad (с)$$

Первый член правой части, содержащий множитель  $e^{-nt}$ , представляет рассматриваемые в предыдущем пункте свободные затухающие колебания. Остальные два члена, имеющие частоту возмущающей силы, представляют вынужденные колебания.

Как и выше (см. стр. 75), выражение для вынужденных колебаний можно упростить, пользуясь понятием вращающегося вектора. Рассмотрим вектор  $\overline{OD}$  величиной  $M$ , вращающийся против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Если измерять углы, как показано на рис. 59, то проекция этого вектора на ось  $x$  даст первый член выражения (а) для вынужденных колебаний. Второй член того же выражения получится, если взять проекцию на ось вектора  $\overline{OB}$ , перпендикулярного к вектору  $\overline{OD}$ ; величина вектора  $\overline{OB}$  равна абсолютному значению  $N$ , и направление его выбрано так, чтобы учесть знак минус во втором выражении (б). Алгебраическую сумму проекций этих двух векторов  $\overline{OD}$  и  $\overline{OB}$  можно заменить проекцией их геометрической суммы, выраженной вектором  $\overline{OC}$ . Величину этого вектора, которую мы обозначим через  $A$ , найдем из треугольника  $ODC$  в, пользуясь выражением (б), представим

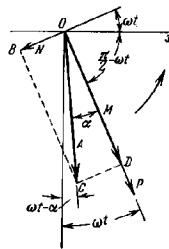


Рис. 59.

в виде:

$$A = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{Pg}{W} \frac{1}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}},$$

откуда, вынося  $p^2$  из-под знака корня и замечая, что  $p^2 = kg/W$ , получаем:

$$A = \frac{P}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2\omega^2}{p^4}}} = \frac{x_{ст}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2\omega^2}{p^4}}}, \quad (38)$$

где  $x_{ст}$  обозначает удлинение пружины (см. рис. 1), вызываемое статически действующей вертикальной силой  $P$ . Угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{OD}$  и  $\vec{OC}$  определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-N}{M} = \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2} \quad (39)$$

Проектируя теперь вектор  $\vec{OC}$  на ось  $x$ , получаем для вынужденных колебаний выражение

$$x_1 = x_{ст} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2\omega^2}{p^4}}} \sin(\omega t - \alpha). \quad (40)$$

Как мы видим, амплитуда вынужденных колебаний получается путем умножения статического отклонения  $x_{ст}$  на множитель

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2\omega^2}{p^4}}},$$

который называется *динамическим коэффициентом*. Его величина зависит от отношения  $\omega/p$  угловых частот возмущающей силы и свободных колебаний без затухания, а также от отношения  $n/p$ , которое мало в большинстве практических случаев. Принимая это последнее отношение равным нулю, мы получим для амплитуды вынужденных колебаний значение, найденное выше при рассмотрении вынужденных колебаний без демпфирования (см. уравнение (26), стр. 46).

Значения динамического коэффициента в зависимости от  $\omega/p$  при различных значениях отношения  $2n/p$  представлены на рис. 60. Из рисунка видно, что если частота возмущающей силы мала по сравнению с собственной частотой колебаний системы, то динамический коэффициент близок к единице и амплитуда вынужденных колебаний приблизительно равна  $x_{ст}$ . Это означает, что в подобных случаях удлинение пружины в любой момент может быть с достаточной точностью вычислено в предположении статического действия возмущающей силы  $P \sin \omega t$ .

В другом крайнем случае  $\omega$  велика по сравнению с  $p$ , т. е. частота возмущающей силы велика по сравнению с собственной частотой колебаний системы. В этом случае динамический коэффициент становится весьма малым и также малыми оказываются амплитуды вынужденных колебаний.

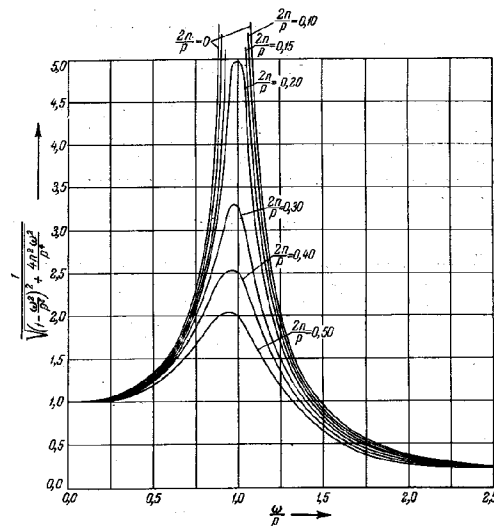


Рис. 60.

Кривые для обоих отмеченных крайних случаев, показанные на рис. 60, сходятся очень близко. Отсюда следует, что в этих случаях силы демпфирования не имеют практического значения при вычислении амплитуды вынужденных колебаний и что с достаточной точностью можно принять ее равной амплитуде, найденной выше в § 6 без учета затухания. Когда частота возмущающей силы приближается к частоте свободных колебаний системы, динамический

коэффициент быстро увеличивается и, как видно из рисунка, его величина становится весьма чувствительной к изменениям демпфирования, особенно если оно мало. Можно видеть также, что максимум динамического коэффициента достигается при значении отношения  $\omega/p$ , которое несколько меньше единицы. Приравнявая нулю производную динамического коэффициента, взятую по аргументу  $\omega/p$ , можно найти, что динамический коэффициент достигает максимума при

$$\frac{\omega^2}{p^2} = 1 - \frac{2n^2}{p^2}. \quad (д)$$

Так как  $n$  обычно весьма мало по сравнению с  $p$ , то частота  $\omega$ , при которой амплитуда вынужденных колебаний достигает максимума, лишь незначительно отличается от частоты свободных колебаний системы без затухания, и чаще всего для вычисления максимальных амплитуд принимают  $\omega = p$ ; в этом случае соотношение (38) принимает вид:

$$A_{\max} = \frac{F_{\text{ст}} p}{2n}. \quad (41)$$

До сих пор мы интересовались амплитудой вынужденных колебаний, равной величине вектора  $\overline{OC}$  на рис. 59. Рассмотрим теперь угол  $\alpha$ , определяющий отставание вынужденных колебаний от возмущающей силы. Для этого рассмотрим вектор  $\overline{OP}$ , совпадающий по направлению с вектором  $\overline{OD}$  на рис. 59 и равный по величине силе  $P$ . Тогда проекция вектора  $\overline{OP}$  на ось  $x$  равна возмущающей силе в любой момент времени. Когда вектор  $\overline{OP}$  совпадает с осью  $x$  и возмущающая сила становится максимальной, перемещение тела, определяемое проекцией вектора  $\overline{OC}$  на ось  $x$ , еще не достигает наибольшего значения и становится максимальным лишь после промежутка времени, равного  $\alpha/\omega$ , когда  $\overline{OC}$  совпадает с осью  $x$ . Угол  $\alpha$  представляет сдвиг фаз между возмущающей силой и вынужденными колебаниями. Из соотношения (39) мы видим, что когда  $\omega < p$ , т. е. когда частота возмущающей силы меньше частоты свободных незатухающих колебаний,  $\alpha$  положителен и угол  $\alpha$  меньше  $\pi/2$ . Для  $\omega > p$   $\alpha$  отрицателен и  $\alpha > \pi/2$ . Когда  $\omega = p$ ,  $\alpha$  обращается в бесконечность и сдвиг фаз  $\alpha$  становится равным  $\pi/2$ . Это означает, что при таком движении колеблющееся тело проходит через среднее положение в моменты, когда возмущающая сила максимальна. На рис. 61 величина  $\alpha$  дана в зависимости от  $\omega/p$  для различных значений демпфирования. Как видим, в резонансной области ( $\omega = p$ ) при малом затухании имеет место резкое изменение сдвига фаз. В предельном случае, когда  $n = 0$ , при резонансе происходит скачкообразное изменение сдвига фаз с  $\alpha = 0$  до  $\alpha = \pi$ , и вместо кривой рис. 61 мы

получаем ломаную линию  $O113$ . Это соответствует рассмотренному ранее случаю вынужденных колебаний без демпфирования (стр. 47).

Рассмотрим теперь работу, производимую возмущающей силой за цикл в процессе установившихся вынужденных колебаний\*. Эта сила в любой момент равна  $P \sin \omega t$ , скорость точки ее приложения равна  $\dot{x}_1 = A\omega \cos(\omega t - \alpha)$ ; поэтому работа, произведенная за бесконечно малый промежуток времени, равна

$$P \sin \omega t A\omega \cos(\omega t - \alpha) dt,$$

и работа за цикл будет

$$\int_0^{\tau} P \sin \omega t A\omega \cos(\omega t - \alpha) dt = \\ = \frac{A\omega P}{2} \int_0^{\tau} [\sin(2\omega t - \alpha) + \sin \alpha] dt = \\ = A\omega P \tau \sin \alpha. \quad (42)$$

Эта работа должна быть равна энергии за один цикл, рассеиваемой вследствие действия силы вязкого сопротивления. Величина этой силы составляет  $-c\dot{x}_1 = -cA\omega \cos(\omega t - \alpha)$ . Умножая на  $\dot{x}_1 dt$  и интегрируя в интервале от 0 до  $\tau$ , получаем для рассеиваемой за цикл энергии выражение

$$\int_0^{\tau} cA^2\omega^2 \cos^2(\omega t - \alpha) dt = \frac{cA^2\omega^2\tau}{2} = \pi cA^2\omega. \quad (43)$$

Таким образом, рассеиваемая за цикл энергия возрастает пропорционально квадрату амплитуды.

Если демпфирование известно, то выражения (42) и (43) можно использовать для вычисления максимальной амплитуды, которая может быть вызвана данной возмущающей силой. С достаточной точностью можно принять, что эта амплитуда достигается при резонансе, когда  $\omega = p$  и  $\alpha = \pi/2$ . Подставляя  $\sin \alpha = 1$  в выражение (42) и

\* Вследствие наличия множителя  $e^{-nt}$  в первом члене правой части соотношения (с) (стр. 79) свободные колебания постепенно затухают и остаются только установившиеся вынужденные колебания.

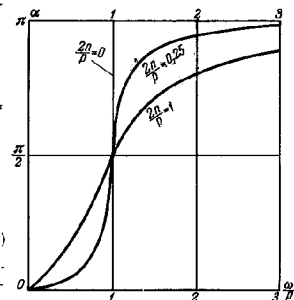


Рис. 61.

приравнивая работу, произведенную возмущающей силой, рассеянной энергии, получаем

$$\pi AP = \pi c A^2 \omega,$$

откуда

$$A_{\max} = \frac{P}{c\omega}. \quad (44)$$

С помощью обозначений (b) (стр. 72) это выражение легко привести к виду, совпадающему с выражением (41).

Из рис. 59 видно, что величина  $A \sin \alpha$  равна абсолютному значению  $N$ , данному выражением (b). Подставив это значение в формулу (42), получим следующее выражение для работы, совершаемой возмущающей силой за цикл:

$$\frac{\pi P^2 g}{W} \frac{2n\omega}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2} = \frac{2\pi}{\omega} \frac{P^2 g}{W} \frac{2n/p}{2p [(p/\omega - \omega/p)^2 + (2n/p)^2]}.$$

Используя обозначения

$$2n/p = \gamma, \quad p/\omega = 1 + z, \quad (e)$$

представим эту работу в виде:

$$\frac{2\pi}{\omega} \frac{P^2 g}{W} \frac{\gamma}{2p \left[ \left(1 + z - \frac{1}{1+z}\right)^2 + \gamma^2 \right]}.$$

а так как  $2\pi/\omega$  есть период колебаний, то средняя работа за секунду равна

$$\frac{P^2 g}{W} \frac{\gamma}{2p \left[ \left(1 + z - \frac{1}{1+z}\right)^2 + \gamma^2 \right]}. \quad (f)$$

Предполагая все величины, входящие в это выражение, кроме  $z$ , известными, мы заключаем, что средняя работа за секунду достигает максимума при резонансе ( $p = \omega$ ), когда  $z$  равняется нулю.

При исследовании изменения средней работы за секунду вблизи резонанса можно считать величину  $z$  малой и заменить выражение (f) приближенным выражением

$$\frac{P^2 g}{2pW} \cdot \frac{\gamma}{4z^2 + \gamma^2}.$$

На рис. 62 представлен второй множитель этого выражения в зависимости от  $z$  для трех различных значений  $\gamma$ . Можно видеть, что с уменьшением демпфирования кривые на рисунке приобретают все более и более четко выраженный резонансный пик ( $z=0$ ), а также что лишь вблизи резонанса рассеяние энергии возрастает с уменьшением демпфирования. Для точек, удаленных от резонанса, рассеяние энергии уменьшается с уменьшением затухания.

До сих пор для движения тела, изображенного на рис. 1, мы рассматривали только вторую часть общего выражения (c), которая представляет *установившиеся* вынужденные колебания, имеющие место только по истечении времени, необходимого для затухания свободных колебаний, вызываемых в начале действия возмущающей силы. Если нас интересует движение, которое совершает тело в

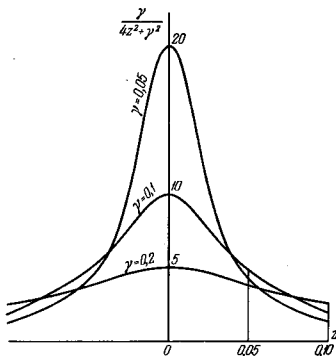


Рис. 62.

начале действия возмущающей силы, то нужно рассмотреть общую форму движения

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t) + A \sin(\omega t - \alpha), \quad (g)$$

определив постоянные  $C_1$  и  $C_2$  из начальных условий. Примем, например, что  $x=0$  и  $\dot{x}=0$  при  $t=0$ , т. е. что в момент начала действия возмущающей силы  $P \sin \omega t$  тело находится в покое. Тогда, пользуясь выражением (g) и его производной по времени, получим:

$$C_1 = A \sin \alpha, \quad C_2 = \frac{nA \sin \alpha - \omega A \cos \alpha}{p_1}.$$

Подставив этот результат в выражение (g), найдем общее уравнение движения тела. Для случая малого затухания и вдали от резонанса фазовый угол  $\alpha$  мал и можно принять  $C_1=0$ ,  $C_2=-\omega A/p_1$ . Тогда движение (g) представится приближенным выражением

$$x = -\frac{\omega A e^{-nt}}{p_1} \sin p_1 t + A \sin \omega t. \quad (h)$$

Таким образом, на установившиеся вынужденные колебания с амплитудой  $A$  и угловой частотой  $\omega$  накладываются свободные колебания с частотой  $p_1$  и с постепенно убывающей амплитудой.

Если частоты  $\omega$  и  $p_1$  близки друг к другу, то возникнет явление биений, рассмотренное в § 6, но вследствие затухания эти биения постепенно исчезнут и останутся только установившиеся вынужденные колебания.

### Примеры

1. Определить амплитуду вынужденных колебаний, вызываемых вибратором, установленным посредине балки (рис. 47) при скорости 600 об/мин, если  $2P = 0,45$  кг, вес сосредоточенного груза в середине балки составляет  $W = 450$  кг и вызывает статический прогиб балки  $\delta_{ст} = 0,025$  см. Пренебречь весом балки и принять, что демпфирование эквивалентно действию на середину балки силы, пропорциональной скорости и равной 18 кг при скорости 1 см/сек. Определить также амплитуду вынужденных колебаний при резонансе ( $\omega = p$ ).

$$\text{Решение. } \omega^2 = 400\pi^2; \quad c = 18; \quad p^2 = 39200;$$

$$n = \frac{cg}{2W} = \frac{18 \cdot 981}{2 \cdot 450} = 19,6;$$

$$2P\omega^2 = 0,45\omega^2 = 180\pi^2;$$

$$A = \frac{2Pg\omega^2}{W} \frac{1}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} = \frac{180\pi^2 \cdot 981}{450 \sqrt{(39200 - 400\pi^2)^2 + 4 \cdot 19,6^2 \cdot 400\pi^2}} = 0,11 \text{ см.}$$

Если  $\omega = p$ , то

$$A = \frac{2Pg\omega^2}{W} \frac{1}{2n\omega} = \frac{180\pi^2 \cdot 981}{450 \cdot 2 \cdot 19,6 \cdot 20\pi} = 1,57 \text{ см.}$$

2. Исследовать влияние демпфирования на показания прибора, изображенного на рис. 44.

Решение. В предположении, что колебательное движение точки подвеса  $A$  задано уравнением  $x_1 = a \sin \omega t$ , дифференциальное уравнение движения подвешенного груза:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = \frac{akg}{W} \sin \omega t.$$

Подставив  $ak$  вместо  $P$  в выражение (38), представим вынужденные колебания в виде:

$$x = \frac{a}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2\omega^2}{p^4}}} \sin(\omega t - \alpha) = \alpha\beta \sin(\omega t - \alpha), \quad (i)$$

где  $\beta$  — динамический коэффициент.

Прибор измеряет разность перемещений  $x_1$  и  $x$ , и мы получаем:

$$x_1 - x = a \sin \omega t - \beta a \sin(\omega t - \alpha).$$

Из рис. 63 видно, что два члена правой части этого уравнения можно сложить, используя понятие двух вращающихся векторов — вектора  $\overline{OS}$ , имеющего величину  $a$  и вектора  $\overline{OD}$ , имеющего величину  $\beta a$ . Геометрическая сумма  $\overline{OE}$  этих векторов дает амплитуду относительного движения  $x_1 - x$ . Из треугольника  $OCE$  эта амплитуда равна

$$A = a \sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \alpha + 1}. \quad (j)$$

Она зависит не только от динамического коэффициента  $\beta$ , но также от фазового угла  $\alpha$ .

В приборах, применяемых для измерения амплитуд колебаний (см. § 8), частота  $\omega$  велика по сравнению с  $p$ ,  $\beta$  мало,  $\alpha$  приближается к значению  $\pi$  и данная выражением (j) амплитуда приблизительно равна  $a(1 + \beta)$ . Подставляя из уравнения (i) выражение  $\beta$  и пренебрегая демпфированием, найдем:

$$A = a \left(1 + \frac{1}{\frac{\omega^2}{p^2} - 1}\right) = \frac{a}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}},$$

что приблизительно равно  $a$ .

В приборах, применяемых для измерения ускорений,  $\omega$  мало по сравнению с  $p$ ,  $\alpha$  также мало и выражение (j) приближается к значению  $a(\beta - 1)$ . Подставляя вновь выражение  $\beta$  и пренебрегая демпфированием\*, получим в этом случае

$$A = a \left(\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} - 1\right) = \frac{a}{\frac{p^2}{\omega^2} - 1},$$

что приблизительно равно  $a\omega^2/p^2$  и пропорционально наибольшему ускорению.

14. Упругая подвеска машин с демпфированием. — В предшествующем описании упругой подвески машин (§ 8) предполагалось отсутствие неупругих сопротивлений и совершенная упругость опорных пружин. Такое предположение приблизительно справедливо в случае стальных винтовых пружин; но если применяются листовые рессоры или резиновые и пробковые прокладки, то демпфирование значительно, и им уже нельзя пренебречь. Для случая такой несовершенной упругости можно предположить, что сила сопротивления состоит из двух частей: упругой силы, пропорциональной удлинению пружины, и силы демпфирования, пропорциональной скорости.

\* Так как исследуемое движение зачастую не является простым синусоидальным движением и может содержать высшие гармоники с частотами, расположенными вблизи резонанса прибора, в обычной практике используют акселерометры со значительным вязким сопротивлением, порядка  $0,5 < n/p < 1$ .

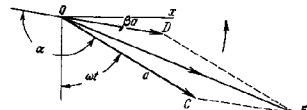


Рис. 63.

Эти условия можно осуществить, например, при помощи комбинации идеально упругих пружин и гидравлического амортизатора, как показано на рис. 64. Обращаясь к случаю, исследованному в § 8, и вычисляя передаваемую на фундамент часть возмущающей силы, мы должны теперь учесть не только упругую силу, но также силу вязкого сопротивления. Так как эти силы действуют со сдвигом фаз, равным  $90^\circ$ , их равнодействующая равна

$$A\sqrt{k^2 + c^2\omega^2} = Ak\sqrt{1 + \frac{4n^2\omega^2}{p^4}}, \quad (a)$$

где  $A$  — амплитуда вынужденных колебаний,  $k$  — коэффициент жесткости и  $c = 2nW/g$  — сила вязкого сопротивления, соответствующая скорости, равной единице. Подставляя для  $A$  его выражение из формулы (38) и принимая, как в § 8, возмущающую силу равной  $P\omega^2 \sin \omega t$ , находим, что наибольшая сила, передаваемая на фундамент, равна

$$\frac{P\omega^2 \sqrt{1 + \frac{4n^2\omega^2}{p^4}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2\omega^2}{p^4}}}. \quad (b)$$

Предполагая, что  $\omega$  велико по сравнению с  $p$  и что в то же время отношение  $n/p$  мало, найдем, что результат (b) отличается от полученного в § 13 наличием члена  $4n^2\omega^2/p^4$  под корнем числителя.

Принимая, как в примере 1, стр. 58,  $\omega = 60n$ ,  $p^2 = 181 \text{ сек}^{-2}$ ,  $P = 0,45$  и полагая  $2n = 1$ , получим:

$$\sqrt{1 + 4n^2\omega^2/p^4} = 1,44, \quad \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2\omega^2}{p^4}} = 195,$$

откуда сила, передаваемая на фундамент, равна

$$0,45 \frac{(60\pi)^2 \cdot 1,44}{195} = 117 \text{ кг},$$

т. е. примерно на 40% больше, чем найденная выше без учета демпфирования.

Отношение силы, передаваемой на фундамент, (b) к возмущающей силе  $P\omega^2$  определяет коэффициент передачи силы. Он равен

$$\sqrt{1 + 4n^2\omega^2/p^4} : \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + 4n^2\omega^2/p^4}, \quad (c)$$

и его значение зависит не только от отношения  $\omega/p$ , но и от отношения  $n/p$ .

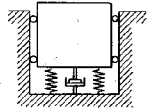


Рис. 64.

В качестве второго примера рассмотрим однофазный генератор. В этом случае электрические силы, действующие между ротором и статором, создают передаваемый статору переменный крутящий момент, выражаемый уравнением

$$M_t = M_0 + M_1 \sin \omega t, \quad (d)$$

где  $\omega$  — двойная угловая скорость ротора, а  $M_0$  и  $M_1$  — постоянные.

Если статор жестко связан с основанием, то переменный крутящий момент может вызвать весьма неприятные колебания. Для их уменьшения статор устанавливается на пружинах, как показано на рис. 65\*). Постоянная часть  $M_0$  крутящего момента непосредственно передается на фундамент и вызывает постоянные реакции, которые могут быть легко найдены из уравнений статики. Остается рассмотреть только переменную часть  $M_1 \sin \omega t$ . Под действием этого переменного момента статор совершает колебания поворота относительно оси машины. Если  $\phi$  обозначает угол поворота в процессе этих колебаний, а  $k$  — коэффициент жесткости, выражающий в данном случае статический крутящий момент, вызывающий угол поворота статора, равный одному радиану, то момент реакций фундамента, действующих на статор при колебаниях, равен  $k\phi$ , и уравнение движения имеет вид

$$J\ddot{\phi} + c\dot{\phi} + k\phi = M_1 \sin \omega t; \quad (e)$$

здесь  $J$  — момент инерции статора относительно оси вращения, а  $c$  — момент пары сил сопротивления при угловой скорости, равной единице. Применив обозначения

$$\frac{c}{J} = 2n, \quad \frac{k}{J} = p^2, \quad (f)$$

приведем уравнение (e) к форме (37) и используем для амплитуды вынужденных колебаний общее выражение (38); необходимо лишь подставить в это выражение  $M_1$  вместо  $P$ . Умножив эту амплитуду на коэффициент жесткости  $k$ , найдем наибольшее значение крутящего момента, возникающего при деформации пружин. К этому моменту нужно прибавить переменный крутящий момент, вызванный силами демпфирования. Исходя из тех же соображений, что и в предыдущей задаче, в конце концов найдем из выражения (b) наибольший переменный крутящий момент, передаваемый фундаменту, подставив в это выражение  $M_1$  вместо  $P\omega^2$ .

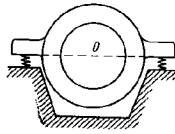


Рис. 65.

\*) См. С. R. Soderberg, Elec. J., т. 21, стр. 160, 1924.



Установлено, что применение упругих опор для однофазных электромоторов и генераторов весьма целесообразно. В случае больших машин упругая подвеска обычно делается из стальных пружин. В малых моторах, применяемых в бытовых приборах, необходимая упругость опор достигается установкой резиновых колец между жесткими опорами и подшипниками ротора, которые в этом случае жестко связаны со статором, как показано на рис. 66. Резиновое кольцо жестко при любых поступательных перемещениях подшипника, так как всякое радиальное сжатие резинового кольца требует окружного расширения, которому препятствуют силы трения между кольцом и жестким основанием. В то же время любой поворот статора вызывает в резиновом кольце только деформации сдвига, не требующие изменения объема, а в этом случае резина весьма податлива и оказывает на передачу переменного крутящего момента то же влияние, что и пружины, изображенные на рис. 65.

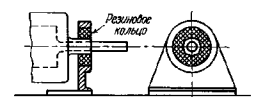


Рис. 66.

Другим примером применения упругих опор служит подвеска автомобильных двигателей. Здесь также имеется переменный крутящий момент, который в случае жесткой подвески двигателя будет передаваться на кузов. Существенное улучшение может быть достигнуто путем введения упругой подвески, обеспечивающей низкую частоту колебаний поворота двигателя.

15. Свободные колебания с сухим трением. — В качестве примера колебаний с сухим трением рассмотрим случай, показанный на рис. 67. Тело  $W$ , прикрепленное пружинкой к неподвижной точке  $A$ , скользит при колебаниях по горизонтальной сухой поверхности. Чтобы записать дифференциальное уравнение движения, положим, что тело отклонено до некоторого крайнего правого положения и затем предоставлено самому себе. Тогда под действием силы натяжения пружины тело начинает двигаться влево. Силы, которые необходимо учесть, суть: 1) сила натяжения пружины и 2) сила трения. Обозначая через  $x$  перемещение тела от положения, в котором пружина недеформирована, и беря положительное направление оси  $x$  соответственно показанному на рисунке, получим, что сила натяжения пружины равна  $-kx$ . Сила трения в случае сухой поверхности постоянна. Она действует противополо-

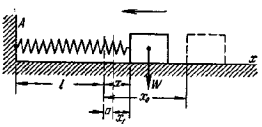


Рис. 67.

ложно направлению движения, т. е. в данном случае в положительном направлении оси  $x$ . Обозначая эту силу через  $F$ , имеем дифференциальное уравнение движения

$$\frac{W}{g} \ddot{x} = -kx + F \quad (a)$$

или, вводя обозначения

$$\frac{kg}{W} = p^2, \quad \frac{F}{k} = a, \quad (b)$$

получаем:

$$\ddot{x} + p^2(x - a) = 0, \quad (c)$$

где величина  $a$  имеет простой физический смысл, — она представляет собой статическое удлинение пружины, которое могла бы вызвать сила трения  $F$ . Уравнение (c) можно привести в полное соответствие с уравнением (1) (стр. 10) для свободных колебаний без затухания путем введения новой переменной:

$$x_1 = x - a. \quad (d)$$

Эта замена означает, что расстояния должны теперь измеряться не от положения, в котором пружина не деформирована, а от положения, в котором ее удлинение равно  $a$ . Тогда, подставив  $x$  из (d) в уравнение (c), найдем:

$$\ddot{x}_1 + p^2 x_1 = 0. \quad (e)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям есть

$$x_1 = (x_0 - a) \cos pt, \quad (f)$$

где  $x_0$  обозначает начальное смещение груза от положения, в котором пружина не деформирована. Это решение применимо, пока тело движется влево, как это предпологалось при выводе уравнения (a). Крайнее левое положение будет достигнуто по истечении промежутка времени, равного  $\pi/p$ , когда  $x_1 = -(x_0 - a)$  и расстояние тела от положения, которому соответствует отсутствие деформации пружины, равно  $x_0 - 2a$ . Отсюда видно, что время, необходимое для половины цикла колебания, — такое же, что и в случае свободных колебаний без затухания, и таким образом, постоянное трение не влияет на частоту колебаний. В то же время, рассматривая два крайних положения тела, определяемых расстояниями  $x_0$  и  $x_0 - 2a$ , можно заключить, что за половину цикла амплитуда колебаний уменьшится на  $2a$ .

Рассматривая теперь движение тела от крайнего левого положения вправо и применяя те же соображения, можно показать, что за вторую половину цикла произойдет дальнейшее уменьшение амплитуды на величину  $2a$ . Таким образом, убывание амплитуды следует

закону арифметической прогрессии. Наконец, груз  $W$  остановится в одном из крайних положений, как только амплитуда станет меньше, чем  $a$ , так как в этом положении сила трения окажется достаточной для того, чтобы уравновесить силу натяжения пружины.

Это колебательное движение также можно наглядно представить при помощи вращающегося вектора. Чтобы найти движение, соответствующее первой половине цикла (уравнение (f)), воспользуемся понятием вращающегося вектора

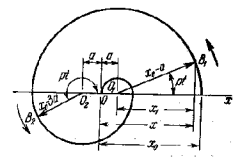


Рис. 68.

$\vec{O}_1B_1$  (см. рис. 68), который имеет величину  $x_0 - a$  и вращается с постоянной угловой скоростью  $p$  вокруг центра  $O_1$ ; последний смещен на отрезок  $a$  вправо от точки  $O$ , соответствующей недеформированному состоянию пружины. Для второй половины цикла воспользуемся понятием вектора  $\vec{O}_2B_2$ , величина которого равна  $x_0 - 3a$ ; он вращается с постоянной угловой скоростью  $p$  вокруг центра  $O_2$ , смещенного влево от точки  $O$  на отрезок  $a$  и т. д. Этим путем мы получим кривую типа спирали; точка пересечения этой спирали с осью  $x$  в интервале  $O_1O_2$  определит конечное положение тела.

### Примеры

1. Тело, изображенное на рис. 67, смещено от положения, соответствующего отсутствию натяжения пружины, на величину  $x_0 = 25$  см, когда сила натяжения пружины равна  $5W = 4,5$  кг, и затем предоставлено себе при нулевой начальной скорости. Как долго будет колебаться тело и на каком расстоянии от положения, соответствующего отсутствию натяжения пружины, оно остановится, если коэффициент трения равен 0,25?

**Решение.** В данном случае сила трения равна  $F = 0,25 W = 0,225$  кг, коэффициент жесткости  $k = 0,18$  кг/см и  $a = 1,25$  см. Следовательно, амплитуда убывает на 2,5 см после каждого полупериода, и тело остановится после 5 циклов и окажется в положении, соответствующем недеформированной пружине. Период одного колебания равен  $\tau = 2\pi\sqrt{\delta_{ст}/g} = 2\pi\sqrt{5,981}$  сек, и полное время колебаний равно  $10\sqrt{5,981} = 2,24$  сек.

2. Определить коэффициент трения для случая, показанного на рис. 67, если сила натяжения пружины, равная  $W$ , вызывает удлинение пружины, равное 0,6 см, и начальное смещение  $x_0 = 60$  см уменьшается до 0,90 своего значения после 10 полных циклов.

**Решение.** Вследствие трения амплитуда колебаний убывает после каждого цикла на величину  $\Delta a = 4F/k$ , и так как после 10 циклов она уменьшается на 6 см, имеем:

$$10 \frac{4F}{k} = 10 \frac{4F}{W} \cdot 0,6 = 6.$$

Следовательно,  $F = W/4$  и коэффициент трения равен 0,25.

16. **Вынужденные колебания с сухим трением и другими видами демпфирования.** — Из изложенного в предыдущем параграфе видно, что для учета изменения направления постоянной силы трения  $F$  необходимо рассматривать отдельно каждую половину цикла. Это обстоятельство осложняет строгое исследование задачи о вынужденных колебаниях, однако приближенное решение может быть получено без больших трудностей\*). В практических приложениях нас главным образом интересует амплитуда установившихся вынужденных колебаний, которая с достаточной точностью может быть найдена в предположении, что при действии постоянной силы трения  $F$  имеет место простое гармоническое движение, как и в случае вязкого сопротивления, и при помощи замены постоянной силы трения эквивалентным вязким сопротивлением так, чтобы рассеянная за цикл энергия была одинакова в обоих случаях.

Пусть  $P \sin \omega t$  — возмущающая сила; примем, что установившиеся вынужденные колебания описываются уравнением

$$x \rightarrow A \sin(\omega t - \alpha). \quad (a)$$

Между двумя последующими крайними положениями колеблющегося тела перемещается на расстояние  $2A$ , так что работа, совершаемая против силы трения за цикл, представляющая рассеянную энергию, равна

$$4AF. \quad (b)$$

Если вместо постоянного трения имеется вязкое сопротивление, то соответствующая величина рассеянной энергии определяется формулой (43), стр. 83, и величина эквивалентного вязкого сопротивления определяется из соотношения

$$\pi c A^2 \omega = 4AF, \quad (c)$$

откуда

$$c = \frac{4F^2}{\pi A \omega}. \quad (d)$$

Таким образом, значение эквивалентного вязкого сопротивления зависит не только от силы  $F$ , но и от амплитуды  $A$  и частоты  $\omega$  колебаний. Применяя обозначения (b) стр. 72 и подставляя их в формулу (38):

$$\frac{2a}{p^2} = \frac{c}{k} = \frac{4F}{\pi A k \omega}.$$

находим для амплитуды вынужденных колебаний с эквивалентным

\*) Это приближенное решение было предложено в работе: L. S. Jacobsen, Trans. ASME, т. 52, стр. APM-169, 1930; см. также: A. L. Kimball, там же, т. 51, стр. APM-227, 1929. Точное решение этой задачи дано в работе: J. P. Den Hartog, там же, т. 53, стр. APM-107, 1931; см. также: Phil. Mag., т. 9, стр. 801, 1930.

вязким сопротивлением следующее выражение

$$A = \frac{P}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \left(\frac{4F}{\pi A k}\right)^2}},$$

которое содержит амплитуду  $A$  также в правой части. Решая полученное уравнение относительно  $A$ , находим

$$A = \pm \frac{P}{k} \frac{\sqrt{1 - (4F/\pi P)^2}}{1 - \omega^2/p^2}. \quad (45)$$

Первый множитель правой части представляет статическое отклонение, а второй множитель — динамический коэффициент. Мы видим, что он имеет действительные значения лишь при условии

$$F/P < \pi/4. \quad (e)$$

Это условие выполняется в практических приложениях, когда обычно действуют небольшие силы трения, и мы заключаем, что динамический

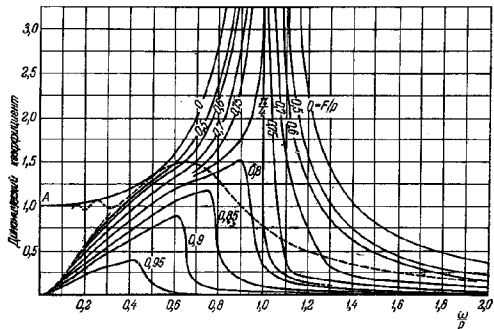


Рис. 69.

коэффициент зависит от отношения  $\omega/p$ . Значения этого коэффициента в зависимости от  $\omega/p$  для различных отношений  $F/P$  даны на рис. 69\*). Как видно, во всех случаях, когда удовлетворяется

\*) Рис. 69—71 взяты из упомянутой на стр. 93 статьи Ден-Гартога. Штриховой линией показан предел, выше которого колебания происходят без остановок. Ниже этого предела движение более сложно, и показанные на рисунке кривые могут быть получены только из точного решения.

условие (e), динамический коэффициент при резонансе ( $\omega = p$ ) обращается в бесконечность; это означает, что в данном случае даже при значительном трении резонансные амплитуды стремятся к бесконечности. Это явление можно объяснить, если сопоставить рассеяние энергии и работу, совершаемую возмущающей силой. В случае вязкого сопротивления рассеиваемая за цикл энергия (выражение (43)) возрастает пропорционально квадрату амплитуды. В то же время работа, совершаемая за цикл возмущающей силой (выражение (42)), возрастает пропорционально амплитуде. Таким образом, конечная амплитуда определяется пересечением параболы и прямой, как это показано на рис. 70. В случае постоянного трения рассеяние энергии (b) пропорционально  $A$ , и на рис. 70 оно будет представлено прямой линией, наклон которой меньше наклона прямой  $OE$ , если соблюдено условие (e), так что все время имеет место избыток подводимой энергии и амплитуда неограниченно возрастает.

Подставив значение эквивалентного вязкого сопротивления (d) в соотношение (39) и воспользовавшись соотношением (45), получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{4F}{\pi P} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4F}{\pi P}\right)^2}}; \quad (f)$$

отсюда можно вычислить фазовый угол  $\alpha$ . Этот угол не зависит от отношения  $\omega/p$  и только при резонансе ( $\omega = p$ ) скачком меняет свое значение. Точное решение показывает, что фазовый угол несколько меняется в зависимости от отношения  $\omega/p$ , как показано на рис. 71.

Описанный приближенный метод исследования вынужденных колебаний можно применить и к общему случаю, когда сила трения является произвольной функцией скорости. В каждом конкретном случае необходимо только вычислить соответствующее эквивалентное вязкое сопротивление из соотношения, подобного уравнению (c). Предположим, например, что сила трения представлена функцией  $f(\dot{x})$ ; тогда соответствующее соотношение приобретает вид:

$$\pi c A^2 \omega = \int_0^{\tau} f(\dot{x}) \dot{x} dt. \quad (g)$$

Если подставить сюда выражение  $x$  из (a), то можно вычислить значение  $c$ .

Возьмем в качестве примера комбинацию сухого трения с вязким трением. Тогда

$$f(\dot{x}) = \pm F + c_1 \dot{x}.$$

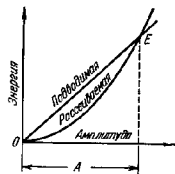


Рис. 70.

Подставляя в (г), находим:

$$\pi c A^2 \omega = 4AF + \pi c_1 A^2 \omega,$$

откуда

$$c = \frac{4F}{\pi A \omega} + c_1.$$

Далее следует поступить так же, как это было сделано на стр. 93 с выражением (д). В результате получим уравнение для определения  $A$ :

$$A^2 \left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{c_1^2 \omega^2}{k^2} \right] + 2A \frac{4Fc_1 \omega}{\pi k^2} + \left(\frac{4F}{\pi k}\right)^2 - \frac{p^2}{k^2} = 0. \quad (h)$$

Если  $c_1 = 0$ , то это уравнение дает для  $A$  выражение (45). При  $F = 0$

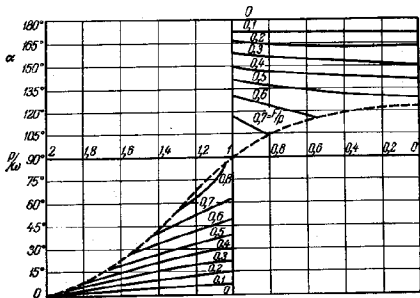


Рис. 71.

получим для  $A$  выражение (38). Для любых данных значений  $F$  и  $c_1$  амплитуда вынужденных колебаний легко вычисляется из уравнения (h).

#### Пример

Вынести приближенное уравнение для амплитуды установившихся вынужденных колебаний, если сила неупругого сопротивления пропорциональна квадрату скорости \*).

\*) Свободные колебания с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости, были изучены Милном. См. W. E. Milne, Univ. Oregon Publ. Math. Ser., т. 1, № 1, 1923 и т. 2, № 2, 1929. При решении задач полезные таблицы, приложенные к этим работам. [См. также: А. Н. Крылов, О боковой качке корабля, Военмориздат, 1942; Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье, Курс теоретической механики, т. II.] Для вынужденных колебаний имеется приближенное решение, данное в упомянутой на стр. 93 работе L. S. Jacobsen.

Решение. Принимая, что сила сопротивления задана выражением  $c_1 \dot{x}^2$ , и рассматривая четверть цикла, начиная от среднего положения, получаем рассеиваемую энергию

$$c_1 \omega^3 A^3 \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \cos^3 \omega t \, dt = \frac{2}{3} c_1 \omega^3 A^3,$$

и соотношение (г) принимает вид

$$\pi c A^2 \omega = \frac{8}{3} c_1 \omega^3 A^3,$$

откуда

$$c = \frac{8}{3\pi} c_1 \omega A.$$

Уравнение для вычисления  $A$  принимает вид:

$$A^4 + A^2 \frac{p^2}{k^2} \frac{\omega^4}{\omega^4 c_1^2} \left( \frac{8}{3\pi} \right)^2 \frac{p^4}{k^4} p^2 - \frac{p^4}{p^4 c_1^2} \left( \frac{8}{3\pi} \right)^2 \frac{p^4}{k^4} p^2 = 0,$$

или

$$A^4 + A^2 k^2 \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2}{c_1^2 \omega^4 \left(\frac{8}{3\pi}\right)^2} - \frac{p^2}{\omega^4 c_1^2 \left(\frac{8}{3\pi}\right)^2} = 0.$$

17. **Общий случай периодической возмущающей силы.** — В предыдущем рассмотрении вынужденных колебаний (см. §§ 6 и 13) мы всюду предполагали простую гармоническую возмущающую силу, пропорциональную  $\sin \omega t$  или  $\cos \omega t$ . В общем случае возможна возмущающая сила, являющаяся более сложной функцией времени.

Рассмотрим, например, горизонтальный одноцилиндровый двигатель, установленный на опорной плите (рис. 72). При работе такого двигателя с неуравновешенными возвратно-поступательно движущимися частями возникает периодическая возмущающая сила, вызывающая вынужденные горизонтальные колебания жесткой опорной плиты  $BC$ , опертной на гибкие стойки  $AB$  и  $CD$ . При исследовании этих вынужденных колебаний важно точно выяснить природу возмущающей силы, в частности соотношение между периодом силы и периодом свободных колебаний системы.

При анализе возмущающей силы можно с достаточной точностью заменить массу шатуна двумя массами: одной на конце кривошипа и другой — ползуна. К этим же двум точкам можно легко привести все остальные массы, так что в конце концов должны быть приняты

в рассмотрение только две массы  $M_1$  и  $M$  (рис. 72, б). Горизонтальная составляющая сила инерции массы  $M_1$  равна

$$-M_1 \omega^2 r \cos \omega t, \quad (a)$$

где  $\omega$  — угловая скорость двигателя,  $r$  — радиус кривошипа,  $\omega t$  — угол, составляемый кривошипом с горизонтальной осью.

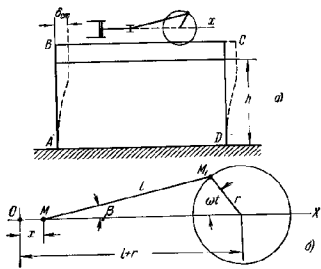


Рис. 72.

Более сложно возвратно-поступательное движение массы  $M$ . Пусть  $x$  обозначает смещение  $M$  от мертвой точки и  $\beta$  — угол между осью шатуна и осью  $x$ . Из рисунка имеем:

$$x = l(1 - \cos \beta) + r(1 - \cos \omega t) \quad (b)$$

$$r \sin \omega t = l \sin \beta. \quad (c)$$

Из (c) следует:

$$\sin \beta = \frac{r}{l} \sin \omega t.$$

Длина  $l$  обычно в несколько раз больше, чем  $r$ , так что с достаточной точностью можно принять, что

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \omega t} \approx 1 - \frac{r^2}{2l^2} \sin^2 \omega t.$$

Подставляя в (b), получаем:

$$x = r(1 - \cos \omega t) + \frac{r^2}{2l} \sin^2 \omega t. \quad (d)$$

Из этого соотношения скорость масс, совершающих возвратно-поступательное движение, равна

$$\dot{x} = r\omega \sin \omega t + \frac{r^2\omega}{2l} \sin 2\omega t,$$

и соответствующая сила инерции будет

$$-M\dot{x} = -M\omega^2 r \left( \cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right). \quad (e)$$

Полное выражение для возмущающей силы получится суммированием (a) и (e). Заметим, что это выражение состоит из двух членов: одного, имеющего частоту, равную числу оборотов двигателя, и второго, имеющего вдвое большую частоту. Отсюда можно заключить, что в рассматриваемом случае имеются две критические скорости двигателя: первая, когда число оборотов двигателя в секунду равно частоте  $1/\tau$  свободных колебаний системы, и вторая, когда число оборотов двигателя составляет половину указанной величины. Надлежащим выбором жесткости стоек  $AB$  и  $CD$  всегда можно добиться условий работы, достаточно далеких от этих критических скоростей, и тем самым устранить возможность больших колебаний. Необходимо отметить, что выражение (e) для силы инерции возвратно-поступательно движущихся масс — приближенное, полученное при некоторых сделанных допущениях. Более точное решение будет содержать также гармоникки высших порядков. Это означает, что существуют критические скорости порядка более низкого, чем рассмотренные выше; однако эти скорости обычно не имеют практического значения, поскольку соответствующие силы слишком малы для того, чтобы вызвать существенные колебания системы.

В общем случае периодическая возмущающая сила произвольного вида может быть представлена в форме тригонометрического ряда

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots, \quad (f)$$

где  $f_1 = \omega/2\pi$  — частота возмущающей силы,  $\tau_1 = 2\pi/\omega$  — период возмущающей силы. При заданной функции  $f(t)$  для вычисления любого из коэффициентов ряда (f) нужно поступить следующим образом. Для определения какого-либо коэффициента  $a_i$  обе части равенства (f) умножаются на  $\cos i\omega t dt$  и интегрируются от  $t=0$  до  $t=\tau_1$ . Можно показать, что

$$\int_0^{\tau_1} a_0 \cos i\omega t dt = 0, \quad \int_0^{\tau_1} a_k \cos k\omega t \cos i\omega t dt = 0, \\ \int_0^{\tau_1} b_k \sin k\omega t \cos i\omega t dt = 0, \quad \int_0^{\tau_1} a_i \cos^2 i\omega t dt = \frac{a_i}{2} \tau_1,$$

где  $i$  и  $k$  обозначают целые числа 1, 2, 3, ... Воспользовавшись этими формулами, найдем из равенства (f)

$$a_i = \frac{2}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} f(t) \cos i\omega t dt. \quad (g)$$

Тем же способом, умножив (i) на  $\sin i\omega t dt$  и проинтегрировав от  $t=0$  до  $t=\tau_1$ , получим:

$$b_i = \frac{2}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} f(t) \sin i\omega t dt. \quad (h)$$

Наконец, умножив (i) на  $dt$  и проинтегрировав от  $t=0$  до  $t=\tau_1$ , будем иметь:

$$a_0 = \frac{1}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} f(t) dt. \quad (i)$$

Как видно, при помощи формул (g), (h) и (i) могут быть вычислены коэффициенты, входящие в (f), если функция  $f(t)$  задана в аналитической форме. Если же функция  $f(t)$  задана графически и ее аналитическое представление невозможно, то нужно использовать какой-либо приближенный численный метод для вычисления интегралов (i), (h) и (g); последнее можно вычислить также на приборах для гармонического анализа кривых<sup>\*)</sup>.

Предполагая, что возмущающая сила представлена в виде тригонометрического ряда, получим уравнение вынужденных колебаний (см. уравнение (37), стр. 78):

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + p^2x = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots \\ \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots \quad (j)$$

Общее решение этого уравнения будет состоять из двух частей: свободных колебаний (см. уравнение (31), стр. 72) и вынужденных колебаний. Вследствие трения свободные колебания постепенно затухнут. При рассмотрении вынужденных колебаний следует учесть, что для линейных уравнений, подобных уравнению (j), вынужденные колебания могут быть получены путем наложения вынужденных колебаний, вызываемых каждым членом ряда (f). Последние могут быть найдены способом, изложенным в § 13, и на основе решения (40)

(см. стр. 80) можно заключить, что значительные вынужденные колебания могут возникнуть в том случае, когда период одного из членов ряда (f) совпадает с периодом  $\tau$  собственных колебаний системы, т. е. если период  $\tau_1$  возмущающей силы равен или кратен периоду  $\tau$ .

### Примеры

1. Для системы, показанной на рис. 72, даны следующие численные значения: вес поршня  $W_p = 2,70$  кг, вес шатуна  $W_s = 1,35$  кг,  $Mg = W_p + \frac{1}{3} W_s = 3,15$  кг,  $Mg = \frac{2}{3} W_s = 0,90$  кг, полный вес двигателя и платформы  $W = 225$  кг, число оборотов двигателя 500 об/мин, радиус кривошипа  $r = 20$  см, длина шатуна  $l = 60$  см, изгибная жесткость каждой стойки  $EJ = 62 \cdot 10^6$  кг-см<sup>2</sup>, высота стоек  $h = 90$  см.

Найти максимальное горизонтальное смещение платформы при установившихся вынужденных колебаниях системы. Деформированием шестеренки и принять, что колесчатый вал и шаток жесткостью уравновешены.

Решение. Начнем с вычисления собственной частоты боковых колебаний системы. Замечая, что каждая стойка имеет точку перегиба на половине высоты, легко можно записать:

$$\delta_{cr} = 2 \left( \frac{1}{2} W \left( \frac{1}{2} h \right)^3 \right) = \frac{225 \cdot 91200}{3 \cdot 62 \cdot 10^6} = 0,110 \text{ см.}$$

Тогда собственная угловая частота

$$p = \sqrt{\frac{W}{\delta_{cr}}} = \sqrt{\frac{981}{0,110}} = 94,5 \text{ сек}^{-1}.$$

Далее,

$$\omega = \frac{600}{60} \cdot 2\pi = 20\pi = 62,83 \text{ сек}^{-1},$$

и мы получим:

$$\frac{\omega}{p} = \frac{62,83}{94,5} = \frac{2}{3}, \quad \frac{2\omega}{p} = \frac{4}{3}.$$

Из этих отношений мы видим, что возмущающая сила, пропорциональная  $\cos 2\omega t$ , будет действовать в резонансной области, а возмущающая сила, пропорциональная  $\cos \omega t$ , будет действовать в дорезонансной области. Пренебрегая высокочастотными составляющими возмущающей силы, мы должны заметить только эффекты, вызываемые силами инерции, представленными выражениями (a) и (e). Записывая их в форме

$$\left. \begin{aligned} P_1 \cos \omega t &= (M + M_1) a^2 \cos \omega t, \\ P_2 \cos 2\omega t &= M \omega^2 \left( \frac{r}{l} \right) \cos 2\omega t, \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

тогда:

$$P_1 = (M + M_1) a^2 = \left( \frac{3,15 + 0,9}{981} \right) 400^2 \cdot 20 = 324 \text{ кг.}$$

$$P_2 = M \omega^2 \left( \frac{r}{l} \right) = \left( \frac{3,15}{981} \right) 400^2 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} = 84 \text{ кг.}$$

<sup>\*)</sup> Изложены различные способы гармонического анализа и описание соответствующих приборов можно найти в книге: Н. von S a n d e r, Practical Mathematical Analysis, New York, 1936. Имеется русский перевод: Г. З а н д е р, Элементы прикладного анализа, ГИИИ, М., 1932.]

Возвращаясь теперь к уравнению (26), стр. 46 и замечая, что

$$k = \frac{W}{\delta_{ст}} = \frac{225}{0,110} = 2050 \text{ кг/см.}$$

находим, что вынужденные колебания, вызванные в отдельности каждой из возмущающих сил (к), равны:

$$x_1 = \frac{P_1}{k} \left( \frac{1}{1-\omega^2} \right) \cos \omega t = \frac{324}{2050} \left( \frac{1}{1-4} \right) \cos \omega t = -0,285 \cos \omega t,$$

$$x_2 = \frac{P_2}{k} \left( \frac{1}{1-4\omega^2} \right) \cos 2\omega t = \frac{84}{2050} \left( \frac{1}{1-16} \right) \cos 2\omega t = -0,0527 \cos 2\omega t.$$

Чтобы получить максимальное смещение, примем  $\omega t = \pi$ ; тогда

$$(x_1 + x_2)_{\max} = -0,285 - 0,0527 = -0,338 \text{ см.}$$

2. Система, показанная на рис. 73, а, подвергается действию вертикальной возмущающей силы  $F(t)$ , которая изменяется во времени соответственно графику, изображенному на рис. 73, б. Пренебрегая демпфированием, найти установившийся процесс вынужденных колебаний  $x = I(t)$ , если масса  $m$  и коэффициент жесткости таковы, что  $\omega/p = 0,9$ .

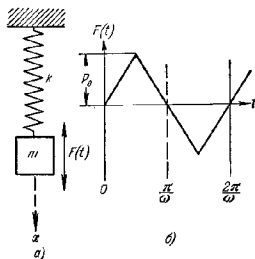


Рис. 73.

Рассматривая далее выражение (г), мы видим, что каждая ордината графика рис. 73, б должна быть умножена на  $\cos i\omega t$  и проинтегрирована в пределах от  $t=0$  до  $t=2\pi/\omega$ . Из антисимметрии функции  $F(t)$  относительно прямой  $t=\pi/\omega$  и симметрии функции  $\cos i\omega t$  относительно той же прямой заключаем, что этот интеграл в выражении (г) исчезает и  $a_i=0$ .

Рассматривая, наконец, выражение (и), мы видим, что каждая ордината графика рис. 73, б должна быть умножена на  $\sin i\omega t$  и проинтегрирована в пределах от  $t=0$  до  $t=2\pi/\omega$ . В данном случае функция  $F(t)$ , рассматриваемая в интервале от  $t=0$  до  $t=\pi/\omega$  симметрична относительно прямой  $t=\pi/2\omega$ , а рассматриваемая в интервале от  $t=\pi/\omega$  до  $t=2\pi/\omega$  симметрична относительно прямой  $t=3\pi/2\omega$ . Если  $i$  есть четное число, то соответствующие участки функции  $\sin i\omega t$  антисимметричны относительно тех же прямых  $t=\pi/2\omega$  и  $t=3\pi/2\omega$ . Таким образом, для  $i=2, 4, 6, \dots$  мы получим  $b_i=0$ .

Если  $i$  есть нечетное число, то функции  $F(t)$  и  $\sin i\omega t$  антисимметричны относительно прямой  $t=\pi/\omega$  и формула (и) дает:

$$b_i = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(t) \sin i\omega t dt = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^{\pi/2\omega} F(t) \sin i\omega t dt. \quad (1)$$

Обращаясь к рис. 73, б, мы видим, что в интервале от  $t=0$  до  $t=\pi/2\omega$

$$F(t) = \frac{2P_0\omega}{\pi} t.$$

Подставляя это в выражение (1), получаем:

$$b_i = \frac{8P_0\omega^2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2\omega} t \sin i\omega t dt = \frac{8P_0}{i^2\pi^2} \int_0^{\pi/2} u \sin u du.$$

Интегрируя в указанных пределах, находим:

$$b_i = \frac{8P_0}{i^2\pi^2} \sin \frac{i\pi}{2} = \frac{8P_0}{i^2\pi^2} (-1)^{(i-1)/2}, \quad (м)$$

где, очевидно,  $i=1, 3, 5, 7, \dots$

Учитывая, что  $a_0=0$ ,  $a_i=0$  и используя выражение (м) для  $b_i$ , получим тригонометрический ряд (н) в виде:

$$F(t) = \frac{8P_0}{\pi^2} \left( \sin \omega t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega t - \dots \right). \quad (н)$$

Мы видим, что для представления пилообразного графика рис. 73 в виде тригонометрического ряда, мы должны суммировать синусоиды только с нечетным числом волн и интервале от  $i=0$  до  $i=2\pi/\omega$ . Это совершенно естественно, так как только в этом случае мы можем сохранить антисимметричную форму данного графика. Далее мы видим, что ряд (н) сходится настолько быстро, что практически важен только первый член. Это попросту означает, что пилообразная возмущающая сила вызывает практически тот же эффект, что и простая гармоническая возмущающая сила несколько меньшей амплитуды

$$F(t) \approx 0,8P_0 \sin \omega t. \quad (о)$$

Чтобы оценить несущественность второго члена ряда, заметим, что при  $\omega/p=0,9$

$$\frac{1}{1-\left(\frac{3\omega}{p}\right)^2} = -0,159.$$

Таким образом, амплитуда вынужденных колебаний, вызванных вторым членом, равна всего  $0,159/3^2=0,0177$  статического смещения, вызванного силой  $8P_0/3^2$ , тогда как амплитуда, вызываемая первым членом, в

$$\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{p^2}} = 5,26 \text{ раза}$$

больше указанного смещения. Следовательно, использование приближенного выражения (о) вносит ошибку меньше, чем 1,2%.

## Задачи

1. Используя данные приведенного выше примера 1, построить кривую перемещение — время  $x = f(t)$  для установившегося процесса вынужденных колебаний системы, изображенной на рис. 72.

2. Разложить в тригонометрический ряд силу  $F(t)$ , графически представленную на рис. 74, а.

$$\text{Ответ. } F(t) = \frac{4P_0}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right).$$

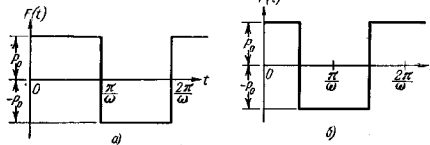


Рис. 74.

3. Разложить в тригонометрический ряд силу  $F(t)$ , графически представленную на рис. 74, б.

$$\text{Ответ. } F(t) = \frac{4P_0}{\pi} \left( \cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \dots \right).$$

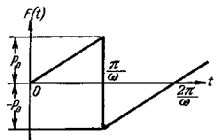


Рис. 75.

4. Разложить в тригонометрический ряд силу  $F(t)$ , графически представленную на рис. 75.

$$\text{Ответ. } F(t) = \frac{2P_0}{\pi} \left( \sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \dots \right).$$

## 18. Общий случай возмущающей

силы: переходный процесс. В предыду-

щем параграфе было исключено рас-

смотрение переходного процесса. Пред-

полагалось, что возникающие в начале движения свободные

колебания системы исчезают вследствие трения, и рассматривался

установившийся процесс вынужденных колебаний. Предполагалось

также, что возмущающая сила носит периодический характер

и поэтому с хорошей точностью может быть представлена только

небольшим числом членов тригонометрического ряда. В случаях, когда

важен характер движения системы до того, как исчезнут свободные

колебания, или когда действующая сила не может быть точно пред-

ставлена малым числом членов тригонометрического ряда (f) (стр. 99),

определенные преимущества имеют другой путь вычисления переме-

щений колеблющейся системы, основанный на решении (5) (стр. 11)

уравнения свободных колебаний. Для объяснения этого способа рассмотрим систему, показанную на рис. 1. Предположим, что в начальный момент ( $t=0$ ) тело находится в покое в положении статического равновесия. В начальный момент прикладывается вертикальная возмущающая сила величины  $q$  на единицу массы тела  $W$ , требуется найти перемещение тела в произвольный момент  $t = t_1$ . Изменение силы во времени представлено кривой  $MN$  на рис. 76. Для вычисления искомого перемещения представим непрерывное действие силы разделенным на малые интервалы  $dt$ \*, импульсы силы  $q dt$ , соответствующий элементарному интервалу времени, представлен заштрихованной полоской на рис. 76. Вычислим теперь вызванное этим элементарным импульсом перемещение тела в момент  $t_1$ . Вследствие действия этого импульса в момент  $t$  скорость тела увеличится. Увеличение скорости найдем из условия

$$\frac{dx}{dt} = q,$$

откуда

$$dx = q dt. \quad (a)$$

Перемещение тела в момент  $t_1$ , соответствующее скорости  $dx$ , возникающей в момент  $t$ , может быть вычислено при помощи решения (5).

Из этого решения видно, что вследствие начальной скорости  $\dot{x}_0$  перемещение в любой момент времени  $t$  равно  $(\dot{x}_0 \sin pt)/p$ . Следовательно, скорость тела  $dx$ , возникающая в момент  $t$ , вызывает перемещение тела в момент  $t_1$ , равное

$$dx = \frac{q dt}{p} \sin p(t_1 - t). \quad (b)$$

Это перемещение возникает только от одного элементарного импульса. Для получения полного перемещения тела, вызванного непрерывным действием силы  $q$ , необходимо суммировать все элементарные перемещения, данные выражением (b). Такое суммирование дает

$$x = \frac{1}{p} \int_0^{t_1} q \sin p(t_1 - t) dt. \quad (46)$$

Это выражение представляет полное перемещение, вызванное силой  $q$ , действующей в интервале времени от  $t=0$  до  $t=t_1$ . Оно включает

\* ) Этот способ был применен Рэлеем, см. сноску на стр. 31.



как вынужденные, так и свободные колебания и может оказаться полезным для изучения начала движения. Его можно применять также в случаях, когда аналитическое выражение возмущающей силы неизвестно и сила  $q$  задана в графической или табличной форме. В этом случае значение интеграла необходимо вычислить одним из приближенных способов интегрирования\*\*).

В качестве примера применения излагаемого метода рассмотрим колебания, вызываемые возмущающей силой  $q = u \sin \omega t$ . Подставляя это выражение  $q$  в (46) и замечая, что

$$\sin \omega t \sin p(t - t_1) = \frac{1}{2} \{ \cos(\omega t + pt - pt_1) - \cos(\omega t - pt + pt_1) \},$$

получаем:

$$x = \frac{u}{p^2 - \omega^2} \left( \sin \omega t_1 - \frac{\omega}{p} \sin pt_1 \right),$$

что совпадает с решением (27) для  $t = t_1$ .

Выражение (46) можно также использовать в случаях, когда необходимо вычислить перемещение груза  $W$  (рис. 1), вызываемое несколькими импульсами. Положим, например, что вследствие импульсов, получаемых грузом  $W$  в моменты  $t'$ ,  $t''$ ,  $t'''$ , ..., его скорость получает приращения  $\Delta_1 \dot{x}$ ,  $\Delta_2 \dot{x}$ ,  $\Delta_3 \dot{x}$ , ... Тогда на основании выражений (б) и (46) перемещение в произвольный момент  $t_1$  будет равно

$$x = \frac{1}{p} [\Delta_1 \dot{x} \sin p(t_1 - t') + \Delta_2 \dot{x} \sin p(t_1 - t'') + \Delta_3 \dot{x} \sin p(t_1 - t''') + \dots]. \quad (c)$$

Это перемещение можно очень легко найти графически, рассматривая  $\Delta_1 \dot{x}$ ,  $\Delta_2 \dot{x}$ , ... как векторы, наклоненные к горизонтальной оси под углами  $p(t_1 - t')$ ,  $p(t_1 - t'')$ , ... (рис. 77).

Вертикальная проекция  $OC_1$  геометрической суммы  $OC$  этих векторов, разделенная на  $p$ , представит перемещение  $x$ , данное в приведенном выше выражении\*\*).

\*\* См. сноску на стр. 100.

\*\*\*) Идея этого построения обстоятельно разработана И. М. Рабиновичем; см. его статью «К расчету сооружений на действие сил, меняющихся во времени по произвольному закону» (Вестник Военно-инженерной академии Красной Армии им. В. В. Куйбышева, № 21, 1937, стр. 20—85) и позднейшие публикации.]

В случаях, когда в момент  $t = 0$  к грузу  $W$  (рис. 1) прикладывается постоянная сила  $q$ , перемещение груза в произвольный момент  $t_1$  согласно (46) становится равным

$$x = \frac{q}{p} \int_0^{t_1} \sin p(t_1 - t) dt = \frac{q}{p^2} (1 - \cos pt_1), \quad (d)$$

где  $q/p^2$  — статическое отклонение, вызываемое силой  $q$  (стр. 45—46). Как видно из (d), наибольшее перемещение при колебаниях, вызванных внезапно приложенной силой, вдвое больше статического отклонения, соответствующего этой же силе.

Здесь предполагалось, что внезапно приложенная сила  $q$  действует все время от  $t = 0$  до  $t = t_1$ . Если сила  $q$  действует только в течение определенной части  $\Delta$  этого времени, а затем внезапно устраняется, то движение тела после исчезновения силы также может быть получено из выражения (46). Запишем это выражение в следующей форме:

$$x = \frac{1}{p} \int_0^{\Delta} q \sin p(t_1 - t) dt + \frac{1}{p} \int_{\Delta}^{t_1} q \sin p(t_1 - t) dt.$$

Замечая, что  $q$  равно нулю при  $\Delta < t < t_1$ , так что второй интеграл правой части исчезает, получаем:

$$x = \frac{1}{p} \int_0^{\Delta} q \sin p(t_1 - t) dt = \frac{q}{p^2} [\cos p(t_1 - t)]_0^{\Delta} = \frac{q}{p^2} [\cos p(t_1 - \Delta) - \cos pt_1] = \frac{2q}{p^2} \sin \frac{p\Delta}{2} \sin p \left( t_1 - \frac{\Delta}{2} \right). \quad (e)$$

Таким образом, постоянная сила, действующая в течение интервала времени  $\Delta$ , вызывает затем простое синусоидальное движение, амплитуда которого зависит от отношения интервала  $\Delta$  к периоду  $\tau = 2\pi/p$  свободных колебаний системы. Принимая, например,  $\Delta/\tau = 1/2$ , найдем  $\sin(p\Delta/2) = 1$ , и амплитуда колебаний становится вдвое больше статического отклонения  $q/p^2$ . Если принять  $\Delta = \tau$ , то  $\sin(p\Delta/2) = 0$ , и после исчезновения силы колебаний вообще не будет. В системе, представленной на рис. 1, имеет место первый случай, если сила  $q$  устраняется в тот момент, когда груз занимает крайнее нижнее положение; если же сила  $q$  устраняется в момент, когда груз находится в положении статического равновесия, то имеет место второй случай.

Если нагрузка и разгрузка системы повторяются несколько раз в интервал времени между двумя последовательными приложениями

силы одинаков и равен  $\tau_1$ , то результирующее движение имеет вид:

$$x = \frac{2q}{p^2} \sin \frac{p\Delta}{2} \left[ \sin p \left( t_1 - \frac{\Delta}{2} \right) + \sin p \left( t_1 - \tau_1 - \frac{\Delta}{2} \right) + \right. \\ \left. + \sin p \left( t_1 - 2\tau_1 - \frac{\Delta}{2} \right) + \dots \right].$$

Как мы видим, при  $\tau_1 = 2\pi/p$  имеет место явление резонанса, и амплитуда колебаний будет постепенно увеличиваться.

При выводе выражения (46) было предположено, что в начальный момент система находилась в покое. Если в этот момент система имела начальное перемещение  $x_0$  и начальную скорость  $\dot{x}_0$ , то полное перемещение в момент  $t_1$  будет получено путем наложения перемещения, вызванного начальными условиями, на перемещение, данное выражением (46). В таком случае получим:

$$x = x_0 \cos pt_1 + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt_1 + \frac{1}{p} \int_0^{t_1} q \sin p(t_1 - t) dt. \quad (47)$$

При исследовании вынужденных колебаний с вязким сопротивлением может быть применен подобный же способ. Из (34) видно, что начальная скорость  $\dot{x}_0$  вызывает в момент  $t$  перемещение тела (рис. 1),

$$\frac{1}{p_1} \dot{x}_0 e^{-nt} \sin p_1 t. \quad (f)$$

Величина  $p$  определяет вязкое сопротивление и  $p_1 = \sqrt{p^2 - n^2}$ . Отсюда мы заключаем, что скорость  $d\dot{x} = q dt$ , появляющаяся в момент  $t$ , вызовет в момент  $t_1$  перемещение, равное

$$dx = \frac{q}{p_1} e^{-n(t_1-t)} \sin p_1(t_1 - t) dt. \quad (g)$$

Полное перемещение тела, вызванное действием силы  $q$  в течение промежутка времени от  $t=0$  до  $t=t_1$ , найдем суммированием выражений (g). Таким образом, получим:

$$x = \frac{1}{p_1} \int_0^{t_1} q e^{-n(t_1-t)} \sin p_1(t_1 - t) dt. \quad (48)$$

В качестве приложения решения (48) рассмотрим случай, когда частота переменной возмущающей силы непостоянна и равномерно возрастает со временем, так что эту силу, отнесенную к единице массы тела, можно выразить в виде:

$$q = q_0 \sin \left( \frac{1}{2} at^2 + \alpha \right), \quad (h)$$

где  $a$  обозначает угловое ускорение, а  $\alpha$  — начальный фазовый угол возмущающей силы. В данном случае особенно интересно рассмотреть

колебания, вызванные этой силой, когда при постепенном увеличении ее частоты последняя проходит значение, равное собственной частоте

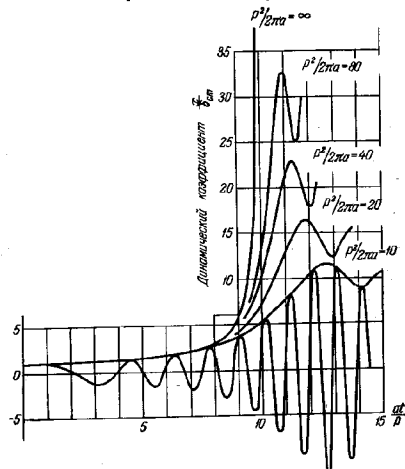


Рис. 78.

системы. Перемещение в любой момент  $t_1$  получится путем введения выражения (h) в общее решение (48), что дает:

$$x = \frac{q_0}{p_1} \int_0^{t_1} e^{-n(t_1-t)} \sin p_1(t_1 - t) \sin \left( \frac{1}{2} at^2 + \alpha \right) dt. \quad (i)$$

Этот довольно сложный интеграл был вычислен Льюнсом<sup>\*</sup>. Результат этого вычисления для частного случая отсутствия демпфирования показан на рис. 78. Волнообразная линия представляет движение для

<sup>\*</sup> См. его работы: Vibration during acceleration through a critical speed, Trans. ASME, т. 54, стр. APM—253, 1932.

[См. также статьи: А. М. К а ц, Вынужденные колебания при прохождении через резонанс, Инженерный сборник, т. III, вып. 2, Изд. АН СССР, 1947; Б. Г. К о р е н е в, О пусковом резонансе, Сборник «Исследования по динамике сооружений», Гостройиздат, М., 1957.]

частного случая, когда  $p^2/2la = 10$  и в начале движения ( $t=0$ ) масса находится в покое, а упругая сила уравновешена начальным значением возмущающей силы. Изменяя в выражении (h) фазовый угол  $\alpha$ , можно получить семейство подобных кривых. Показанная на рисунке сплошной линией огибающая этого семейства позволяет определить наибольшую амплитуду. Как видно, в этом частном случае максимальная амплитуда составляет около  $11\delta_{ст}$  и достигается, когда мгновенная частота  $at$  возмущающей силы примерно на 25% выше собственной частоты  $p$  системы. На рисунке показаны также три кривые для меньших значений ускорения  $a$ ; как видно, чем больше ускорение  $a$ , тем меньше максимальная амплитуда и тем больше ее смещение от резонанса ( $at=p$ ). Подобные результаты получены также при учете вязкого сопротивления. Было также установлено, «что если ускорение при переходе через резонанс не слишком велико или если демпфирование слабое, то амплитуды не намного меньше, чем амплитуды при постоянной частоте»\*), показанные на рис. 60.

Кривые, подобные кривым рис. 78, были найдены также для случая перехода через резонанс при замедлении хода машины. При этом максимальные амплитуды несколько больше, чем при разгоне, и наблюдаются при скоростях ниже критической.

В этих рассуждениях предполагалось, что амплитуда переменной силы (h) остается постоянной и меняется со временем только ее частота. В практических случаях, например при разгоне или остановке вращающихся механизмов, нормально эксплуатируемых за резонансом и вынужденных проходить через критическую скорость при разгоне (или остановке), амплитуда переменной силы вследствие неуровновешенности не остается постоянной и содержит член, пропорциональный  $\omega^2$ . Интеграл (48\*\*) для этого случая был вычислен при помощи дифференциального анализатора\*\*\*). Анализ показал, что при прохождении критической скорости могут возникнуть колебания большой амплитуды, и иногда могут потребоваться специальные гасители колебаний, чтобы предотвратить вредные последствия. Было также показано, что амплитуда таких колебаний может быть значительно уменьшена при введении упругой подвески, как это делается для уменьшения критической скорости системы.

#### Пример

Как пример применения выражения (46) рассмотрим влияние небольшой неровности на прогиб рельса. Вследствие неровности рельса происходит некоторое вертикальное перемещение катящегося колеса, в результате чего возникает дополнительное вертикальное давление на рельс. Это дополнитель-

#### 18] ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ СИЛЫ: ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС 111

ное давление зависит от скорости качения и профиля неровности. Выбрав систему координат так, как это показано на рис. 79, обозначим через  $l$  длину неровности и через  $\eta$  переменную глубину неровности. Будем рассматривать рельс как балку на сплошном упругом основании и обозначим через  $k$  сосредоточенное вертикальное давление, необходимое для того, чтобы вызвать вертикальный прогиб рельса, равный одному сантиметру. Если  $W$

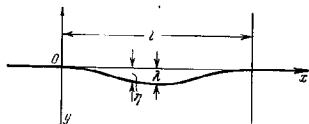


Рис. 79.

обозначает вес колеса и жестко связанных с колесом всех других частей, то статический прогиб рельса под действием этого веса составит

$$\delta_{ст} = \frac{W}{k}. \quad (j)$$

Если рассматривать рельс как упругую пружину, то период свободных колебаний колеса, овертого на рельс, будет

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{ст}}{g}}. \quad (k)$$

Для рельса с жесткостью  $EI = 3660 \cdot 10^6$  кг см<sup>2</sup> и груза  $W = 1400$  кг, найдем при обычной жесткости пути, что колесо совершает около 20 кол/сек. Так как эта частота велика по сравнению с частотой колебаний надressорной части локомотива, можно принять, что колебания колеса не передаются этой части и что вертикальное давление рессор на ось остается постоянным и равным силе начального обжатия рессор. Теперь рассмотрим вынужденные колебания колеса, вызываемые неровностью. Обозначим через  $y$  динамический прогиб рельса под колесом при колебаниях<sup>\*)</sup>. Тогда вертикальное перемещение колеса, проходящего вдоль неровности с переменной глубиной  $\eta$ , равно  $y + \eta$ , и вертикальная сила инерции колеса равна

$$-\frac{W}{g} \frac{d^2(y + \eta)}{dt^2}.$$

Реакция рельса равна  $-ky$ , и уравнение движения колеса в вертикальном направлении принимает вид:

$$\frac{W}{g} \frac{d^2(y + \eta)}{dt^2} + ky = 0,$$

\*) Этот прогиб измеряется от положения статического равновесия, когда колесо находится под действием веса  $W$  и силы начального обжатия рессор [а также реакции рельса].

\*) См. сноску на стр. 109.

\*\*) См. работу J. G. В а с к е г, J. Appl. Mech., т. 6, стр. 145—150, 1939.

\*\*\*) Описание этого прибора дано в работе: V. U s h, J. Franklin Inst., т. 212, стр. 447, 1931.

откуда

$$\frac{W}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = -\frac{W}{g} \frac{d^2 \eta}{dt^2}. \quad (1)$$

Если известны форма неровности и скорость локомотива, то глубина  $\eta$  и соответственно правая часть уравнения (1) могут быть выражены в функции времени. Таким образом, мы получаем уравнение вынужденных колебаний колеса, вызванных неровностью.

Рассмотрим случай, когда форма неровности (рис. 79) задана уравнением

$$\eta = \frac{\lambda}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right), \quad (m)$$

в котором  $\lambda$  обозначает глубину неровности посредине ее длины.

Если начать отсчет времени от момента, когда точка соприкосновения колеса и рельса совпадает с началом неровности (рис. 79), и если обозначить скорость локомотива через  $v$ , то  $x = vt$ , и из уравнения (m) найдем:

$$\eta = \frac{\lambda}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi vt}{l}\right). \quad (n)$$

Подставив это выражение в уравнение (1), получим:

$$\frac{W}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = -\frac{W}{g} \frac{\lambda}{2} \frac{4\pi^2 v^2}{l^2} \cos \frac{2\pi vt}{l}.$$

Разделив на  $W/g$  и воспользовавшись предыдущими обозначениями, придадим этому уравнению вид:

$$\ddot{y} + p^2 y = -\frac{2\lambda \pi^2 v^2}{g} \cos \frac{2\pi vt}{l}. \quad (o)$$

Подставив правую часть этого уравнения в выражение (46), найдем, что дополнительный прогиб рельса, происходящий от динамического влияния неровности, равен

$$y = -\frac{2\pi^2 \lambda v^2}{g p^2} \int_0^{t_1} \cos \frac{2\pi vt}{l} \sin p(t_1 - t) dt. \quad (p)$$

Выполняя интегрирование и обозначая через  $\tau_1$  время  $l/v$ , необходимое для прохода колеса через всю неровность, получаем:

$$y = -\frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{\tau_1^2}{\tau^2}\right) \left(\cos \frac{2\pi t_1}{\tau_1} - \cos \frac{2\pi t_1}{\tau}\right). \quad (q)$$

Таким образом, дополнительный прогиб рельса, вызванный неровностью, пропорционален ее глубине  $\lambda$  и зависит также от отношения  $\tau_1/\tau$ . Кривые на рис. 80 представляют изменение дополнительного прогиба при движении колеса вдоль неровности для некоторых значений отношения  $\tau_1/\tau$ . Абсциссы определяют положение колеса вдоль неровности, а ординаты выражают дополнительный прогиб в долях  $\lambda$ . Как только колесо входит на неровность, давление на рельс и соответственно прогиб рельса начинают уменьшаться ( $y$  отрицательно), а колесо получает вертикальное ускорение. Затем следует замедление этого движения с соответствующим увеличением давления и прогиба. Из рисунка видно, что для  $\tau_1 < \tau$  наибольшее давление достигается

в момент, когда колесо приближается к другому концу неровности. В таблице даны отношения наибольшего дополнительного прогиба к глубине  $\lambda$  неровности, вычисленные по формуле (q):

|                       |      |               |      |               |               |               |               |
|-----------------------|------|---------------|------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\frac{\tau_1}{\tau}$ | 2    | $\frac{3}{2}$ | 1    | $\frac{4}{5}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $y_{\max}/\lambda$    | 0,33 | 0,65          | 1,21 | 1,41          | 1,47          | 1,45          | 1,33          |

Как видно, наибольшее значение приблизительно равно 1,47. Этому отношению соответствует такая скорость локомотива, при которой  $\tau_1/\tau \approx 2/3$

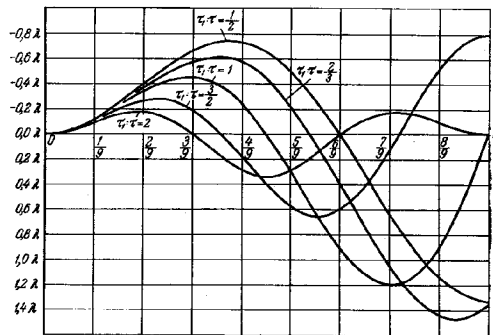


Рис. 80.

Подобные вычисления могут быть легко выполнены и в случае, если для формы неровности принято выражение, отличное от (n), при условии, что рассматриваемая кривая имеет горизонтальную касательную по концам неровности. Если это условие не выполняется, то необходимо учитывать удар у концов неровности\*).

### Задача

1. На массу, подвешенную к пружине с коэффициентом жесткости  $k$  (рис. 1), действует вертикальная возмущающая сила  $F(t) = \alpha t$ . Предполагая, что

\* См. работу автора в Известиях Института инженеров путей сообщения, СПб., 1915, а также Génie Civil, стр. 551, 1921. См. также докторскую диссертацию: В. К. Невея, Göttingen, 1933. По поводу напряжений на поверхности соприкосновения см. J. Appl. Mech., т. 17, стр. 466—467, 1950.

$x_0 = \dot{x}_0 = 0$ , когда  $t=0$ , вывести общее выражение зависимости перемещения подвешенной массы от времени.

$$\text{Ответ. } x = \frac{\alpha}{k} \left( t - \frac{1}{p} \sin pt \right),$$

где

$$p = \sqrt{k/m}.$$

2. Жесткий шар массы  $m$  катится с постоянной горизонтальной скоростью  $v$  вправо вдоль кривой  $OBC$ , лежащей в вертикальной плоскости и имеющей форму полуовальной синусоиды (рис. 81). Предполагая, что  $OBC$  является упругим основанием с коэффициентом жесткости  $k$ , вывести общее выражение для осадки  $y$  основания, дополнительной к осадке, вызываемой весом шара.

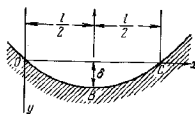


Рис. 81.

$$\text{Ответ. } y = \delta \left( \frac{1}{p^2/\omega^2 - 1} \right) \left( \sin \alpha t - \frac{\omega}{p} \sin pt \right);$$

$$\omega = \frac{pv}{l}; \quad p = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

3. Груз  $W$  может двигаться только в вертикальном направлении и испытывает действие горизонтально движущегося с постоянной скоростью жесткого кулачка (рис. 82). Пренебрегая трением и массой пружины и толкателя  $D$ , найти перемещение  $x$  груза  $W$ , измеряемое от нормального положения для любого момента  $0 < t_1 < v/l$ , если точка  $A$  кулачка подходит к толкателю  $D$  в момент  $t_1=0$ . Кривая  $ACB$  имеет форму полуовальной синусоиды.

$$\text{Ответ. } x = \frac{a}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{p} \sin pt \right);$$

$$\omega = \frac{pv}{l}; \quad p = \sqrt{\frac{kg}{W}}.$$

4. Шахтная клеть весом  $W$  подвешена к растяжимому тросу, имеющему площадь поперечного сечения  $A$  и модуль упругости  $E$ , и опускается в вертикальную

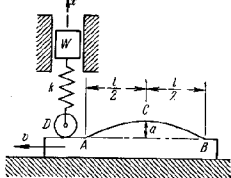


Рис. 82.

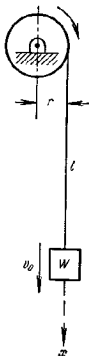


Рис. 83.

шахту с постоянной скоростью  $v_0$  (рис. 83). В определенный момент времени  $t_1=0$ , когда свободная длина троса равна  $l$ , включается тормоз, который постепенно останавливает барабан с постоянным отрицательным,

угловым ускорением  $a/r$ . Найти перемещение  $x$  клетки для любого момента  $0 < t_1 < \frac{2v_0}{a}$ . Пренебречь малым увеличением длины  $l$  вследствие последующего разматывания троса после момента  $t_1=0$ . Какова амплитуда свободных колебаний клетки после остановки барабана?

$$\text{Ответ. } x = v_0 t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2 + \frac{a}{p^2} (1 - \cos pt_1); \quad p = \sqrt{\frac{AEg}{Wl}}.$$

19. Общий случай возмущающей силы: графическое решение. — В предыдущих двух параграфах мы рассмотрели только такие случаи вынужденных колебаний, когда возмущающая сила  $F(t)$  может быть представлена в аналитической форме, и получили решение либо разложением в тригонометрический ряд, либо непосредственным интегрированием по формуле (46). Во многих практических случаях возмущающая сила не может быть легко представлена какой-либо простой аналитической функцией времени. Таковы, например, случаи колебаний, вызванных порывом ветра или иной импульсной нагрузкой (рис. 84).

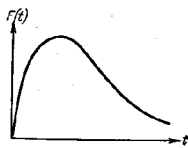


Рис. 84.

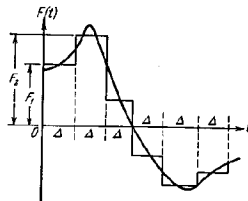


Рис. 85.

Во всех таких случаях мы можем получить приближенное решение для переходного процесса\*) графоаналитически, используя формулу (47), принимая, что влиянием демпфирования можно пренебречь. Для этого положим, что возмущающая сила  $F(t)$  является произвольной функцией времени, как графически представлено на рис. 85, и заменим эту кривую соответствующей ступенчатой функцией; при этом равным интервалам времени  $\Delta$  приписываются постоянные ординаты  $F_1, F_2, F_3, \dots$ . Это означает, что действие силы  $F(t)$  заменено последовательностью постоянных сил  $F_1, F_2, F_3, \dots$ , каждая из которых действует в течение промежутка времени  $\Delta$ .

Рассмотрим теперь один из таких промежутков  $\Delta$ , в течение которого возмущающая сила имеет постоянное значение  $F_i$ . Вследствие

\*) Если возмущающая сила непериодическая, но понятия «установившийся режим движения», конечно, не существует.

действия этой постоянной силы перемещение  $x$  возмущенной упруго подвешенной массы в любой момент  $t_1 \leq \Delta$ , измеряемый от начала этого интервала, определяется выражением (d) предыдущего параграфа, которое принимает вид:

$$x = \frac{q}{p^2} (1 - \cos pt_1) = \frac{F_1}{k} (1 - \cos pt_1), \quad (a)$$

а полное перемещение, представленное уравнением (47), имеет вид:

$$x_i = x_{i-1} \cos pt_1 + \frac{\dot{x}_{i-1}}{p} \sin pt_1 + \frac{F_i}{k} (1 - \cos pt_1), \quad (b)$$

где  $x_{i-1}$  и  $\dot{x}_{i-1}$  — перемещение и скорость возмущенной массы в начале рассматриваемого интервала. Выражение (b) легко может быть переписано в виде:

$$x_i = \frac{F_i}{k} + \left( x_{i-1} - \frac{F_i}{k} \right) \cos pt_1 + \frac{\dot{x}_{i-1}}{p} \sin pt_1. \quad (49)$$

Дифференцируя (49) один раз по времени, получим:

$$\frac{\dot{x}_i}{p} = - \left( x_{i-1} - \frac{F_i}{k} \right) \sin pt_1 + \frac{\dot{x}_{i-1}}{p} \cos pt_1. \quad (50)$$

Подставляя  $t_1 = \Delta$  в выражения (49) и (50), получим перемещение  $x_i$  и скорость  $\dot{x}_i$  в конце рассматриваемого интервала.

Применяя выражения (49) и (50) к первому интервалу, для которого известны начальное перемещение  $x_0$  и начальная скорость  $\dot{x}_0$  в момент  $t=0$ , найдем  $x_1$  и  $\dot{x}_1$  в конце этого интервала. Затем, используя эти значения как новое начальное перемещение и начальную скорость для второго интервала, найдем  $x_2$  и  $\dot{x}_2$  и т. д. Этим путем можно получить сколь угодно мало отклоняющиеся от точного приближенное решение на основе замены графика действительной возмущающей силы достаточно близкой ступенчатой линией.

Указанный выше процесс последовательного наращивания (способ приспособовывания) можно очень просто выполнить графически\*). Чтобы показать это, возведем оба выражения (49) и (50) в квадрат и затем сложим их:

$$\left( x_i - \frac{F_i}{k} \right)^2 + \left( \frac{\dot{x}_i}{p} \right)^2 = \left( x_{i-1} - \frac{F_{i-1}}{k} \right)^2 + \left( \frac{\dot{x}_{i-1}}{p} \right)^2. \quad (c)$$

Мы получили уравнение окружности с радиусом

$$R = \sqrt{\left( x_{i-1} - \frac{F_{i-1}}{k} \right)^2 + \left( \frac{\dot{x}_{i-1}}{p} \right)^2}$$

\*) Это построение предложено Лямозом. См. его работу: J. Lamoin Étude graphique des vibrations de systèmes à un seul degré de liberté, Rev. universelle mines, май 1935.

и с центром в точке  $(F_i/k, 0)$  на фазовой плоскости  $x, \dot{x}/p$ . Таким образом, в течение каждого интервала  $\Delta$  движение колеблющейся массы представляется на фазовой плоскости дугой окружности, положение центра которой определяется соответствующим значением  $F_i/k$ .

Для этого построения на фазовой плоскости поступим следующим образом: пусть точка  $A$  с координатами  $(x_0, \dot{x}_0/p)$  (рис. 86, а) представляет заданные начальные условия движения в момент  $t=0$ . Тогда, как показано, из центра  $C_1$ , имеющего ординату  $F_1/k$ , описываем дугу окружности  $AB$  с центральным углом  $p\Delta$ . Полученная

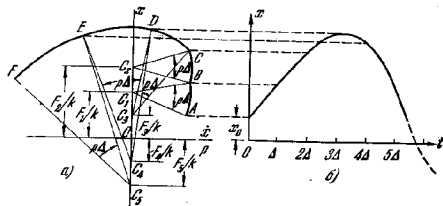


Рис. 86.

при этом точка  $B$  представит перемещение  $x_1$  и скорость  $\dot{x}_1$  возмущенной массы в конце первого интервала времени  $\Delta$ . Далее из центра  $C_2$ , имеющего ординату  $F_2/k$ , строим следующую дугу окружности  $BC$  с тем же центральным углом  $p\Delta$  и находим точку  $C$ , определяющую перемещение  $x_2$  и скорость  $\dot{x}_2$  в конце второго интервала, т. е. в момент  $t=2\Delta$ . Таким образом, на рис. 86, а выполнено построение до момента  $t=5\Delta$ , соответствующее кривой  $F(t)$ , данной на рис. 85.

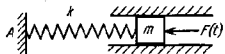
Имея полное построение на фазовой плоскости (рис. 86, а), можно легко спроектировать точки  $A, B, C, D, \dots$  на плоскость «перемещение—время» и построить кривую  $x=f(t)$ , показанную на рис. 86, б. Тем же способом можно построить и кривую  $\dot{x}=\varphi(t)$ .

Описанное построение даст хорошую точность, если позаботиться о надлежащем выборе ступенчатой линии, заменяющей заданную возмущающую силу  $F(t)$ . При выборе интервала времени  $\Delta$  следует руководствоваться не только характером изменения данной кривой  $F(t)$ , но также и значением собственного периода  $\tau=2\pi/p$  упруго подвешенной массы. В общем случае интервал  $\Delta$  должен составлять лишь небольшую долю этого периода. Если возмущающая

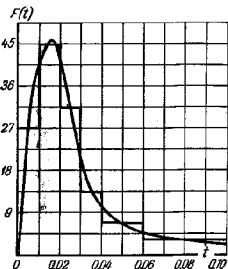
сила меняется весьма неравномерно, т. е. ее быстрое изменения в течение одного промежутка времени сменяется медленным изменением в течение другого промежутка времени, то нет оснований принимать при вычислениях постоянные интервалы времени  $\Delta$ . В таких случаях целесообразно брать короткие интервалы  $\Delta$  в промежутках быстрого изменения силы и относительно длинные интервалы  $\Delta$  в промежутках медленного ее изменения.

### Примеры

1. Поршень весом 443 г упирается в пружину, имеющую коэффициент жесткости  $k=1,78$  кг/см (рис. 87, а). Поршень сначала находится в покое в положении равновесия, а затем подвергается действию взрыва, который создает возмущающую силу, изменение которой с течением времени представлено на рис. 87, б. Какая амплитуда свободных колебаний установится после взрыва? Трением пренебречь.



а)



б)

Рис. 87.

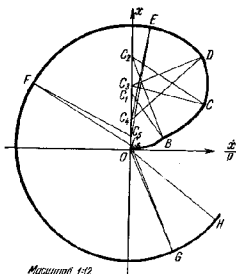


Рис. 88.

**Решение.** Период свободных колебаний данной системы равен

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3940}} = 0,1 \text{ сек.}$$

Отсюда заключаем, что ступенчатая линия на рис. 87, б предстает удовлетворительное приближение для кривой  $F(t)$ . Соответствующая фазовая кривая показана на рис. 88 и заканчивается в точке G. В соответствии с этим поршень совершает свободные колебания с амплитудой  $OH=29$  см.

2. Исследовать движение системы, показанной на рис. 87, а, при горизонтальном движении точки A, представленном кривой «перемещение—время» рис. 89.

**Решение.** Если  $x$  представляет перемещение поршня и  $x_1$ —перемещение точки A в любой момент  $t$ , то уравнение движения принимает вид:

$$m\ddot{x} = -k(x-x_1).$$

Записывая его в форме

$$m\ddot{x} + kx = kx_1,$$

заключаем, что поршень движется так, как если бы он был подвержен действию возмущающей силы  $F(t)=kx_1$ . Таким образом, заменяя кривую перемещений на рис. 89 подходящей ступенчатой линией, мы можем поступать точно так же, как при построении фазовой кривой.

### Задачи

1. Исследовать движение поршня, показанного на рис. 87, а при действии возмущающей силы, представленной на рис. 87, б, если коэффициент жесткости  $k=17,8$  кг/см, а все остальные числовые значения те же, что и в данном выше примере 1.

2. Исследовать движение системы, изображенной на рис. 87, а, при действии возмущающей силы, графически представленной на рис. 90.

3. Какое наибольшее перемещение верха portalной рамы на рис. 10

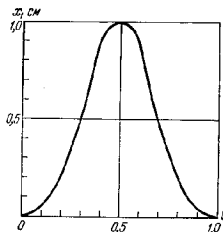


Рис. 89.

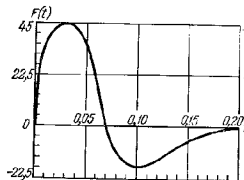


Рис. 90.

будет вызвано горизонтальным движением основания, представленным кривой «перемещение—время» на рис. 89? Считать, что узлы A и B совершенно жесткие.

**20. Автоколебания.**—При рассмотрении различных задач о вынужденных колебаниях мы всюду считали, что сила, вызывающая эти колебания, не зависит от колебательного движения. Существуют, однако, случаи, в которых установившийся режим колебаний поддерживается силой, вызываемой самим движением и исчезающей при остановке движения. Такие колебания называются *самовозбуждающимися колебаниями* или *автоколебаниями*.

Как простой пример таких колебаний рассмотрим случай, показанный на рис. 91. Масса  $m$ , связанная пружиной с неподвижной точкой  $A$ , покоится на горизонтальной плоскости  $SS$ , которая постепенно приобретает постоянную скорость  $v_0$  в показанном направлении. Пренебрегая начальным возмущением, мы можем предположить, что масса  $m$  будет находиться в положении равновесия под действием силы трения  $F$  и равной и противоположно направленной силе натяжения пружины. Однако опыт показывает, что равновесие в этом положении не устойчиво и возникают горизонтальные колебания массы.

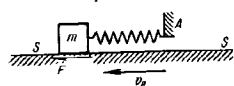


Рис. 91.

Для объяснения этих колебаний нужно учесть, что сила сухого трения не постоянна и несколько падает с увеличением скорости скольжения. Если вследствие малого возмущения возникнут колебания массы, то сила трения  $F$ , когда масса движется в направлении  $v_0$ , чем когда она движется в противоположном направлении. Замечая, что в первом случае сила  $F$  совершает положительную работу, а во втором случае — отрицательную работу, заключаем, что за весь цикл колебания будет совершена некоторая положительная работа. Таким образом, энергия массы  $m$  нарастает, и амплитуда ее колебаний будет увеличиваться. Это явление называется автоколебаниями потому, что дополнительная сила, накладывающаяся на постоянное и среднее трение, вызывается движением массы и исчезает, если масса покоится.

Подобное же явление можно наблюдать в системе, показанной на рис. 92. Здесь в вертикальной плоскости имеется два круглых диска с неглубокими канавками на ободах, в которых удерживается стержень  $AB$  весом  $W$ . Расстояние между осями дисков равно  $2a$ , и диски вращаются в противоположных направлениях с равными угловыми скоростями. Примем теперь постоянный коэффициент сухого трения равным  $\mu$  в каждой точке соприкосновения и положим, что стержень смещен от среднего положения на расстояние  $x$ . Тогда реакции в точках  $A$  и  $B$  составят:

$$\left. \begin{aligned} R_a &= W(a-x)/2a, \\ R_b &= W(a+x)/2a, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

и соответствующие силы трения равны  $\mu R_a$  и  $\mu R_b$ . равнодействующая горизонтальных сил, действующих на стержень, равна

$$X = \mu(R_a - R_b) = -\frac{\mu W x}{a}; \quad (b)$$

\*) Мы считаем, что скорость колебательного движения всегда меньше, чем  $v_0$ .

Уравнение движения стержня принимает форму

$$\frac{W}{g} \ddot{x} = -\frac{\mu W x}{a}$$

и приводится к виду

$$\ddot{x} + \frac{\mu g}{a} x = 0. \quad (c)$$

Отсюда заключаем, что смещенный из своего среднего положения ( $x=0$ ) стержень будет совершать простое гармоническое движение с периодом

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{\mu g}}. \quad (d)$$

До сих пор мы считали коэффициент трения независимым от скорости скольжения. Теперь учтем, что в действительности с увеличением скорости скольжения коэффициент трения уменьшается, а с убыванием скорости скольжения возрастает. Замечая, что диск, вращающийся в сторону, противоположную движению стержня, имеет большую относительную скорость скольжения и соответственно меньший коэффициент трения, чем другой диск, заключаем, что на среднее постоянное трение, вызывающее простое гармоническое движение, представляемое уравнением (c), накладывается вторичная дополнительная сила, действующая все время в направлении движения. Эта сила совершает положительную работу, и амплитуда колебаний будет постепенно возрастать, так что возникает явление самовозбуждающихся колебаний. Это легко увидеть на опыте: действительно, такое устройство может быть использовано для изучения закона изменения трения в зависимости от относительной скорости скольжения путем нескольких прогонов дисков с различными угловыми скоростями и регистрации соответствующих периодов колебаний стержня. Коэффициент трения  $\mu$  для каждого прогона можно затем вычислить из выражения (d).

Один из первых экспериментов над самовозбуждающимися механическими колебаниями был произведен Фрудом\*), который обнаружил, что при вращении вала колебания качающегося на валу маятника (рис. 93) могут поддерживаться или даже возрастать. Причиной этого явления также служит сухое трение, действующее на маятник. Если направление вращения вала такое, как показано на рисунке, то сила трения больше, когда маятник движется вправо, чем при обратном движении. Следовательно, во время каждого цикла силы трения совершают положительную работу. Ясно, что устройства, показанные на рис. 92 и 93, обнаружат самовозбуждающиеся колебания, лишь поскольку имеется сухое трение. В случае вязкого трения сила трения возрастает со скоростью и вместо возбуждения колебаний она будет постепенно их гасить. Существуют случаи, в которых самовозбуждающиеся колебания имеют практическую важность и должны учитываться инженерами\*\*).

Самовозбуждающиеся колебания могут быть получены в эксперименте с вертикальной машиной (рис. 94), содержащей массу  $A$ , вращаемую мотором  $B$ . Пусть существует значительный зазор между валом и ограничителем  $C$ , так что вал можно рассматривать как консоль, жестко закрепленную



Рис. 93.

\*) См. упомянутую книгу Рэлея, § 138.

\*\* Несколько случаев таких колебаний описано и объяснено Бэйкером, см.: J. G. B a c k e r, Trans. ASME, т. 55, стр. 4, APM-5, 1933; Den Hartog, Proc. 4-th Intern. Congr. Appl. Mech., стр. 36, 1934.



вниз и нагруженную на конце. Частота собственных поперечных колебаний вала, являющаяся также критической скоростью его вращения, может быть легко вычислена обычным путем (см. § 5). Эксперименты показывают, что пока вал остается прямым и не касается ограничителя, машина вращается спокойно, но если по той или иной причине вал коснется ограничителя, то возникнет и будет неограниченно поддерживаться прецессия вала. Это явление может возникнуть при любой скорости вращения вала, причем угловая скорость прецессии равна указанной выше собственной частоте поперечных колебаний вала. Для объяснения причин возникновения этого вида движения рассмотрим поперечное сечение вала и ограничителя, показанное на рис. 94, б. Как только вал коснется ограничителя, возникнет сила сухого трения  $F$ , стремящаяся сместить вал и вызывающая вращение оси вала в сторону, противоположную собственному вращению вала. Давление, необходимое для появления силы трения, обеспечивается центробежной силой массы  $A$ , передаваемой через вал на ограничитель.

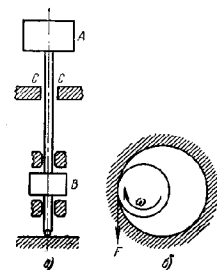


Рис. 94.

ном боковом ветре и температуре порядка  $32^\circ \text{F}$  ( $0^\circ \text{C}$ ), когда погода благоприятствует образованию льда на проводах. Описанное явление можно рассматривать как автоколебания\*). Если боковой ветер дует на провод круглого сечения (рис. 95, а), то сила давления имеет направление ветра. Но условия меняются в случае удлиненного поперечного сечения, образуемого

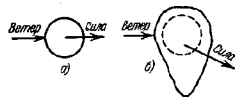


Рис. 95.

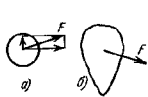


Рис. 96.

при появлении льда (рис. 95, б), и сила давления на провод имеет обычно направление, отличающееся от направления ветра. Обычный пример этого наблюдается на крыле самолета, когда кроме лобового сопротивления, совпадающего с направлением набегающего потока, возникает подъемная сила, перпендикулярная к этому направлению. Предположим теперь существование колебаний провода и рассмотрим половину цикла, во время которой провод движется вниз. При круглом сечении провода вследствие этого движения имеется некоторое давление воздуха, направленное вверх. Эта сила вместе с силой горизонтального давления ветра дает наклонную силу  $F$

(рис. 96, а) имеющую вертикальную составляющую, направленную против движения провода. Таким образом, имеется демпфирующее влияние, которое будет тормозить колебания. Как было пояснено выше, в случае удлиненного поперечного сечения (рис. 96, б) вследствие действия горизонтального ветра при движении провода вниз может возникнуть сила  $F$ , имеющая составляющую, направленную также вниз и потому совершающая положительную работу при движении провода вниз. Во время второй половины цикла, когда провод движется вверх, вертикальная составляющая давления воздуха меняет знак и становится направленной вверх. Таким образом, вновь получается положительная работа, совершаемая при движении провода, что и приводит к нарастанию колебаний.

Этот вид колебаний можно продемонстрировать на установке, показанной на рис. 97. Легкий деревянный стержень, подвешенный на гибких пружинах и повернутый плоской стороной перпендикулярно воздушному потоку, создаваемому вентилятором, можно ввести в состояние сильных колебаний в вертикальной плоскости. Объяснение этих колебаний следует из того обстоятельства, что полукруглое поперечное сечение соответствует рассмотренному выше условию, так что в результате одновременного влияния ветра и вертикального движения стержня на последний все время действует вертикальная составляющая в направлении вертикального движения. Таким образом, при колебаниях создается положительная работа.

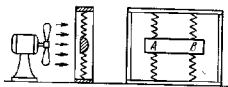


Рис. 97.

\*) См. J. P. Den Hartog, Trans. Am. Inst. Elec. Engrs., стр. 1074, 1932.

т. е. модуль упругости уменьшается с ростом деформации, поэтому можно ожидать некоторого уменьшения частоты с ростом амплитуды колебаний.

Иногда применяются такие специальные виды стальных пружин, что их жесткость меняется с перемещением. Собственная частота систем, включающих такие пружины, зависит от амплитуды. Путем использования таких типов пружин может быть уменьшено вредное влияние резонанса. Если вследствие резонанса амплитуда колебаний начинает возрастать, то собственная частота колебаний меняется, т. е. нарушается условие резонанса. Простой пример такой пружины показан на рис. 99. Плоская пружина, поддерживающая груз  $W$ , закреплена у конца  $A$ . Во время колебаний эта пружина частично соприкасается с одной из двух цилиндрических поверхностей  $AB$  или  $AC$ . Вследствие этого свободная длина консоли меняется с амплитудой, так что жесткость пружины возрастает с увеличением отклонения. Условия оказываются теми же, что и в случае, представленном на рис. 98, а, т. е. частота колебаний увеличивается с увеличением амплитуды.

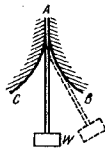


Рис. 99.

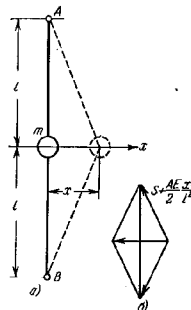


Рис. 100.

Если размеры пружины и форма фрикционных поверхностей  $AB$  и  $AC$  известны, то легко можно получить кривую, представляющую восстанавливающую силу в функции прогиба конца пружины.

Другой пример нелинейной системы представляют собой колебания вдоль оси  $x$  массы  $m$ , прикрепленной к натянутой струне (рис. 100). Пусть  $S$  — начальная сила натяжения струны,  $x$  — малое перемещение массы  $m$  в горизонтальном направлении,  $A$  — площадь поперечного сечения струны,  $E$  — модуль упругости материала струны. Относительное удлинение струны, соответствующее перемещению  $x$ , равно

$$\frac{\sqrt{l^2 + x^2} - l}{l} \approx \frac{x^2}{2l^2}.$$

Соответствующая сила растяжения струны равна

$$S + AE \frac{x^2}{2l^2}.$$

и восстанавливающая сила, действующая на массу  $m$  (рис. 100, б),

## ГЛАВА II

### СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНЫМИ И ПЕРЕМЕННЫМИ УПРУГИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

**21. Примеры нелинейных систем.** — При рассмотрении задач на колебания в предыдущей главе всюду предполагалось, что реакция упругой связи пропорциональна ее деформации. В ряде случаев предполагалось также, что сила неупругого сопротивления есть линейная функция скорости движения. В результате этих предположений колебания системы описывались линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Существует много практических задач, в которых эти предположения удовлетворительно выражают действительные условия. Однако существуют также системы, для которых линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами не в состоянии описать действительное движение, так что общее исследование колебаний требует рассмотрения нелинейных дифференциальных уравнений. Такие системы называются *системами с нелинейными характеристиками*. Пример этих систем мы имеем, когда восстанавливающая сила не пропорциональна перемещению системы от ее положения равновесия.

Иногда, например, в муфтах и подшипниках колебаний применяются такие материалы, как резину или кожу. Диаграмма

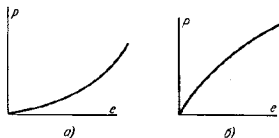


Рис. 98.

растяжения этих материалов имеет вид, показанный на рис. 98, а; таким образом, модуль упругости возрастает с удлинением. Для малых амплитуд колебаний это изменение модуля можно не учитывать, но с увеличением амплитуды возрастание модуля может вызвать заметное увеличение частоты колебаний.

Другой пример переменной жесткости встречается в конструкциях, выполненных из таких материалов, как чугун или бетон. В обоих случаях диаграмма растяжения имеет вид, показанный на рис. 98, б,

будет

$$\left( S + AE \frac{x^2}{2l^2} \right) \frac{2x}{\sqrt{l^2 + x^2}} \approx \frac{2Sx}{l} + AE \frac{x^3}{l^3}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение движения массы  $m$  принимает вид:

$$m\ddot{x} + \frac{2Sx}{l} + AE \frac{x^3}{l^3} = 0. \quad (a)$$

Как мы видим, в случае очень малых перемещений и при достаточно большой начальной растягивающей силе  $S$ , когда можно пренебречь последним членом в левой части уравнения (а), мы получим простое гармоническое колебание массы  $m$  в горизонтальном направлении. В противном случае, должны быть учтены все три члена уравнения (а). При этом восстанавливающая сила будет возрастать быстрее, чем перемещение, и частота колебаний будет увеличиваться с амплитудой.

В случае простого математического маятника (рис. 101), применяя принцип Даламбера и спроектировав вес  $W$  и силу инерции на направление касательной  $ml$ , получим уравнение движения

$$\frac{Wl}{g} \ddot{\theta} + W \sin \theta = 0$$

или

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \quad (b)$$

где  $l$  — длина маятника,  $\theta$  — угол между маятником и вертикалью.

Как видно, колебания такого маятника можно рассматривать как простые гармонические лишь в случае малых амплитуд, когда  $\sin \theta \approx \theta$ . Если амплитуды не малы, то имеет место более сложное движение и период колебаний будет зависеть от величины амплитуды. Ясно, что восстанавливающая сила не пропорциональна перемещению и увеличивается в меньшей мере, так что частота будет убывать с увеличением амплитуды колебаний. Разлагая  $\sin \theta$  в степенной ряд и беря только первые два члена этого ряда, вместо уравнения (b) получим уравнение

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0. \quad (c)$$

Из сравнения этого уравнения с уравнением (а) легко видеть, что нелинейные члены имеют разные знаки. Поэтому можно получить лучшее приближение к изохронным колебаниям, комбинируя маятник с горизонтально натянутой струной (рис. 102), прикрепленной к

стержню маятника в точке  $B$  и перпендикулярной к плоскости колебаний.

На рис. 103, а дан другой пример системы, период колебаний которой зависит от амплитуды. Масса  $m$  совершает колебания между двумя пружинами, скользя без трения вдоль стержня  $AB$ . Изменяя перемещение от среднего положения массы  $m$ , представим графически изменение восстанавливающей силы в зависимости от перемещения, как показано на рис. 103, б. Частота колебаний будет зависеть не только от коэффициента жесткости пружин, но также от величины зазора  $a$  и от начальных условий. Положим, например, что в начальный момент ( $t=0$ ) масса  $m$  находится в среднем положении и имеет начальную скорость  $v$  в направлении оси  $x$ . Тогда время, необходимое для преодоления зазора  $a$ , будет

$$t_1 = \frac{a}{v}. \quad (d)$$

После этого масса  $m$  вступает в соприкосновение с пружиной и дальнейшее движение в направлении оси  $x$  будет простым гармоническим. Время, в течение которого скорость

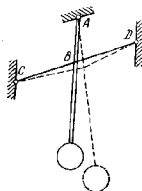


Рис. 102.

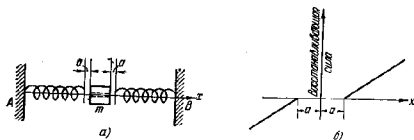


Рис. 103.

массы меняется от  $\sigma$  до 0 (четверть периода простого гармонического движения), будет (см. формулу (3), стр. 11)

$$t_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (e)$$

где  $k$  — коэффициент жесткости одной пружины. Полный период колебаний массы  $m$  равен

$$\tau = 4(t_1 + t_2) = \frac{4a}{v} + 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (f)$$

Для данной величины зазора, данной массы  $m$  и данного коэффициента жесткости  $k$  период колебаний зависит только от начальной

скорости  $v$ . Период становится очень большим для малых значений  $v$  и убывает с увеличением  $v$ , приближаясь к пределу  $\tau_0 = 2\pi \sqrt{m/k}$  (рис. 104), когда  $v \rightarrow \infty$ . Такие условия всегда получаются, если в системе имеются зазоры между колеблющейся массой и пружиной.

Если зазоры очень малы, период  $\tau$  остается практически постоянным для широкого диапазона изменения скорости  $v$  (рис. 104, кривая I). С увеличением зазора наблюдается ясно выраженное изменение периода в значительной области изменения скорости  $v$  (рис. 104, кривая II). Период колебаний такой системы может иметь любое значение между  $\tau = \infty$  и  $\tau = \tau_0$ . Если действует периодическая возмущающая сила, имеющая период большой, чем  $\tau_0$ , всегда можно сообщить массе  $m$  такой импульс, что соответствующий период колебаний будет равен  $\tau$ , и таким образом установятся условия резонанса\*). Этим способом были объяснены некоторые значительные колебания в электровозах\*\*).

Может иметь место другой вид нелинейной системы, когда силы неупругого сопротивления нельзя представить линейной функцией скорости. Например, сопротивление воздуха или жидкости при значительных скоростях может быть принято пропорциональным квадрату скорости и уравнение для колебательного движения тела в такой среде уже не будет линейным, хотя упругие свойства системы могут иметь линейную характеристику.

**22. Свободные колебания систем с нелинейной восстанавливающей силой.** — Если пренебречь затуханием, то дифференциальное уравнение движения в этом случае имеет вид:

$$\frac{W}{R} \ddot{x} + cf(x) = 0 \quad (a)$$

или

$$\ddot{x} + p^2 f(x) = 0, \quad (51)$$

\*) [Эта фраза может вызвать неверное представление об особенностях процесса вынужденных колебаний нелинейной системы рассматриваемого типа. Дело в том, что режим установившихся вынужденных колебаний не зависит от начальных условий (как и в линейных системах); период вынужденных колебаний равен периоду возмущающей силы. Об амплитудах колебаний см. ниже § 26.]

\*\*) См. A. Wicher t, Schüttelerscheinungen in elektrischen Lokomotiven, Forschungsarbeiten, № 277, 1921

где  $p^2 f(x)$  представляет собой восстанавливающую силу, отнесенную к единице массы, в функции перемещения  $x$ . Так как

$$\ddot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dx} \dot{x} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{x})^2}{dx},$$

дифференциальное уравнение (51) принимает вид:

$$\frac{1}{2} \frac{d(\dot{x})^2}{dx} + p^2 f(x) = 0. \quad (b)$$

Предполагая, что восстанавливающая сила  $p^2 f(x)$  задана кривой  $Om$  (рис. 105) и что в момент  $t=0$  масса находится в крайнем положении  $[(x)_{t=0} = x_0, (\dot{x})_{t=0} = 0]$ , получаем, интегрируя уравнение (b):

$$\frac{1}{2} (\dot{x})^2 = -p^2 \int f(x) dx = p^2 \int_x^{x_0} f(x) dx. \quad (c)$$

Это означает, что для любого положения колеблющейся массы ее кинетическая энергия равна разности накопленной в пружине начальной потенциальной энергии (соответствующей перемещению  $x_0$ ) и потенциальной энергии в рассматриваемый момент. Эта разность определяется площадью, заштрихованной на рис. 105. Если дано аналитическое выражение для восстанавливающей силы, то скорость  $\dot{x}$  для любого положения колеблющейся массы находится вычислением интеграла в правой части уравнения (c). Если функция  $f(x)$  задана графиком, то нужно применить графическое или численное интегрирование.

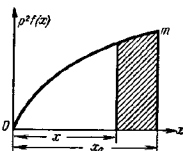


Рис. 105.

Замечая теперь, что  $\dot{x} = dx/dt$ , получаем из уравнения (c):

$$dt = - \frac{dx}{\sqrt{2p^2 \int_x^{x_0} f(x) dx}}. \quad (d)$$

Знак минус принят потому, что при рассматриваемых начальных условиях перемещение  $x$  с течением времени убывает.

Интегрируя уравнение (d), получаем:

$$t = - \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{2p^2 \int_x^{x_0} f(x) dx}}, \quad (e)$$

откуда можно вычислить время, необходимое для достижения массой любого заданного положения. Обычно нас интересует период колебаний  $\tau$ . Если упругое устройство симметрично относительно среднего положения системы, то время движения массы от крайнего положения ( $x = x_0$ ) к среднему положению ( $x = 0$ ) равно  $\tau/4$  и из (е) находим:

$$\tau = -4 \int_{x_0}^0 \frac{dx}{\sqrt{2p^2 \int_x^{x_0} f(x) dx}} = 4 \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{2p^2 \int_x^{x_0} f(x) dx}}. \quad (f)$$

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи. Сначала предположим, что восстанавливающая сила задана уравнением

$$p^2 f(x) = p^2 x^{2n-1}.$$

Подставляя это выражение в формулу (f), получаем:

$$\tau = \frac{4\sqrt{n}}{p} \frac{1}{x_0^{n-1}} \int_0^{x_0} \frac{d\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{2n}}} = \frac{4\sqrt{n}}{p} \frac{1}{x_0^{n-1}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{2n}}}, \quad (52)$$

где  $u = x/x_0$ .

В частном случае, когда  $n=1$  (линейная упругость), интеграл в формуле (52) равен

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = |\arccos u|_0^1 = \frac{\pi}{2},$$

и мы получаем:

$$\tau = \frac{2\pi}{p}. \quad (g)$$

Когда  $n=2$ , т. е. восстанавливающая сила пропорциональна  $x^3$ , формула (52) дает

$$\tau = \frac{4\sqrt{2}}{p} \frac{1}{x_0} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}. \quad (h)$$

Численное значение этого интеграла известно\*) и равно  $1,8541/\sqrt{2}$ , так что

$$\tau = \frac{4}{px_0} (1,8541).$$

Мы видим, что в данном случае период колебаний обратно пропорционален амплитуде. Такие колебания происходят, например, в слу-

\*) См. Jahneke—Emde, Tables of Functions, Берлин, стр. 131, 1933. [Есть русское издание: Янке и Эмде, Таблицы функций, ГТТИ, 1948.]

чае, представленном на рис. 100, если начальное натяжение струны  $S$  равно нулю.

Если натяжение  $S$  на рис. 100 отлично от нуля, то получается более общий случай колебаний, для которого восстанавливающая сила имеет вид:

$$p^2 f(x) = p^2 (x + \alpha x^3) \quad (\alpha > 0). \quad (i)$$

В данном случае имеем:

$$\int_x^{x_0} f(x) dx = \frac{1}{2} \left( x_0^2 + \frac{\alpha x_0^6}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( x^2 + \frac{\alpha x^4}{2} \right),$$

и формула (f) дает:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{4}{p} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} x_0^4 + x_0^2\right) - \left(\frac{\alpha x^4}{2} + x^2\right)}} = \\ &= \frac{4}{p} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(x_0^2 - x^2) \left(1 + \frac{\alpha}{2} x_0^2 + \frac{\alpha}{2} x^2\right)}}. \end{aligned}$$

Чтобы привести к нормальному виду эллиптический интеграл, входящий в правую часть этого равенства, введем обозначения:

$$\frac{x}{x_0} = z, \quad 0 = \alpha x_0^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{4}{p} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2) \left(1 + \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2} \theta z^2\right)}} = \\ &= \frac{4}{p} \sqrt{\frac{2}{\theta}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2) \left(\frac{2+\theta}{\theta} + z^2\right)}}. \quad (j) \end{aligned}$$

В таблицах находим\*)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 + t^2)}} = \frac{1}{c} F\left(\frac{a}{c}, \varphi\right), \quad (k)$$

где  $F(a/c, \varphi)$  — эллиптический интеграл первого рода, значения которого для различных значений  $a/c$  и  $\varphi$  даются в таблицах, и

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad \sin^2 \varphi = \frac{c^2 x^2}{a^2 (b^2 + x^2)}.$$

\*) См. упомянутые таблицы, стр. 130.

Сопоставляя интегралы (j) и (k), заключаем, что

$$a^2 = 1, \quad b^2 = \frac{2+\theta}{0}, \quad c^2 = 1 + \frac{2+\theta}{\theta} = \frac{2(1+\theta)}{\theta},$$

$$x = 1, \quad \sin^2 \varphi = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

и формула (h) дает

$$\tau = \frac{4}{p} \frac{1}{\sqrt{1+\theta}} F\left(\sqrt{\frac{\theta}{2(1+\theta)}}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (53)$$

Если упругая характеристика очень мало отклоняется от линейной, положим  $\theta = 0$  в формуле (i). Тогда для  $\tau$  получим значение (g), найденное для случая линейно деформируемой пружины. С другой стороны, если первый член в выражении (i) пренебрежимо мал по сравнению со вторым,  $\alpha$  и  $\theta$  становятся весьма большими и, пренебрегая единицей по сравнению с членами, содержащими  $\theta$  в выражении (j), получаем для  $\tau$  выражение (h)\*. Для любых промежуточных условий период  $\tau$  получим из формулы (53). В каждом частном случае необходимо найти численное значение корня  $\sqrt{\theta/2(1+\theta)}$  и взять из таблиц соответствующее значение эллиптического интеграла.

В нашем выводе предполагалось, что с увеличением отклонений восстанавливающая сила растет быстрее отклонения (формула (i)). В противоположном случае примем для восстанавливающей силы выражение

$$p^2 f(x) = p^2 (x - \alpha x^3) \quad (\alpha > 0). \quad (1)$$

Поступая таким же образом, как и выше, получаем:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{4}{p} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2) \left(1 - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\theta z^2\right)}} = \\ &= \frac{4}{p} \sqrt{\frac{2}{\theta}} \int_0^1 \frac{dz}{(1-z^2) \left(\frac{2-\theta}{\theta} - z^2\right)}. \end{aligned} \quad (m)$$

Для данного случая в таблицах находим:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2} \sqrt{c^2 - t^2}} = \frac{1}{c} F\left(\frac{a}{c}, \varphi\right), \quad (n)$$

где  $\sin \varphi = x/a$ .

\* Здесь получается член  $p\sqrt{\alpha}$  вместо  $p$ , так как восстанавливающая сила из выражения (i) равна  $\alpha p^2 x^3$  вместо  $p^2 x^2$ , принятой при выводе выражения (h).

Сопоставляя интегралы (m) и (n), заключаем, что

$$a^2 = 1, \quad c^2 = \frac{2-\theta}{0}, \quad \sin \varphi = x = 1,$$

и получаем:

$$\tau = \frac{4}{p} \sqrt{\frac{2}{2-\theta}} F\left(\sqrt{\frac{\theta}{2-\theta}}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (54)$$

С помощью таблиц эллиптических интегралов можно также без труда вычислить  $\tau$  для любого значения  $\theta = \alpha x_0^2$ .

Выражения восстанавливающей силы (i) и (l) при надлежащем выборе  $\alpha$  можно использовать для приближенного вычисления  $\tau$  в различных случаях симметричной упругости. В более общем случае, когда восстанавливающая сила задана в виде полинома

$$f(x) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3,$$

задача может быть решена также с помощью эллиптических интегралов\*.

Другой случай нелинейной восстанавливающей силы, допускающий получение строгого решения, представляет математический маятник; его дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\varphi} + p^2 \sin \varphi = 0.$$

Поступая как выше, получим:

$$\frac{1}{2} (\dot{\varphi})^2 = p^2 \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi \, d\varphi = p^2 (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

и

$$\tau = \frac{4}{p\sqrt{2}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \frac{2}{p} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \quad (o)$$

Пользуясь обозначением  $k = \sin \frac{\varphi_0}{2}$  и вводя с помощью соотношения

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \theta = \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \theta \quad (p)$$

новую переменную  $\theta$ , находим:

$$d\varphi = \frac{2k \cos \theta \, d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}.$$

\* См. G. Duffing, *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz...*, Braunschweig, 1918; A. Weigand, *Forsch. Gebiete Ingenieurw.*, т. 12, стр. 274, 1941.

Подставляя это значение  $d\varphi$  в выражение (о) и замечая из равенства (р), что  $\theta$  изменяется от 0 до  $\pi/2$ , когда  $\varphi$  изменяется от 0 до  $\varphi_0$ , находим:

$$\tau = \frac{4}{p} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (q)$$

Мы имеем снова эллиптический интеграл первого рода, численное значение которого для любого значения  $k$  можно взять из таблиц. Если начальный угол  $\varphi_0$  мал, величина  $k$  также мала и в выражении (q) можно пренебречь членом  $k^2 \sin^2 \theta$  по сравнению с единицей.

Тогда интеграл станет равным  $\pi/2$ , и мы найдем  $\tau = 2\pi/p$ .

В заключение рассмотрим случай, когда жесткость меняется скачком, как показано на рис. 106. Если массу  $m$  отклонить на расстояние  $x_0$  от среднего положения и затем предоставить самой себе без начальной скорости, то уравнение движения для интервала  $x_2 < x < x_0$  представит простые гармонические колебания с центром в точке  $A$ :

$$x = a + x_1 \cos p_1 t, \quad (r)$$

где  $p_1^2$  — коэффициент жесткости на единицу массы в интервале  $x_2 < x < x_0$ . Время  $t_1$ , нужное для прохождения расстояния от  $x = x_0$  до  $x = x_2$ , получится из (r) подстановкой  $x_2$  вместо  $x$ . Тогда

$$x_1 \cos p_1 t_1 = x_2 - a = d$$

$$t_1 = \frac{1}{p_1} \arccos \frac{d}{x_1}. \quad (s)$$

В интервале  $0 < x < x_2$  масса  $m$  совершает гармонические колебания с центром в точке  $O$  при начальных условиях (из формулы (r)):

$$(x)_{t=0} = x_2 \quad \text{и} \quad (\dot{x})_{t=0} = -x_1 p_1 \sin p_1 t_1.$$

Обозначая через  $p_2^2$  коэффициент жесткости для этого интервала, получаем уравнение движения:

$$x = x_2 \cos p_2 t - \frac{x_1 p_1 \sin p_1 t_1}{p_2} \sin p_2 t.$$

Время  $t_2$ , нужное для достижения точки  $O$ , найдется из уравнения

$$0 = x_2 \cos p_2 t_2 - \frac{x_1 p_1 \sin p_1 t_1}{p_2} \sin p_2 t_2.$$

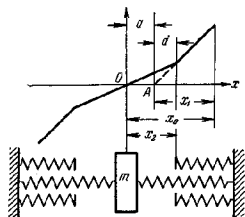


Рис. 106.

откуда

$$t_2 = \frac{1}{p_2} \arccos \left( \frac{x_2 p_2}{x_1 p_1 \sin p_1 t_1} \right). \quad (t)$$

Зная  $t_1$  и  $t_2$  из (s) и (t), получим период колебаний  $\tau = 4(t_1 + t_2)$ . Подобным же образом можно поступить, если имеется более двух скачкообразных изменений коэффициентов жесткости, что представлено ломаной линией на рис. 107.

В общем случае, когда упругая характеристика задана кривой, эту кривую можно заменить ломаной и описанным выше способом приближенно найти период колебаний\*). Другие приближенные методы исследования свободных нелинейных колебаний будут рассмотрены в следующих двух параграфах.

### 23. Нелинейные колебания:

**графический метод.** — вновь рассмотрим дифференциальное уравнение свободных нелинейных колебаний системы с одной степенью свободы

$$\ddot{x} + p^2 f(x) = 0. \quad (a)$$

В предыдущем параграфе мы видели, что аналитическое решение этого уравнения, как правило, громоздко или даже невозможно. Во многих практических случаях, в частности, когда отнесенная к единице массы восстанавливающая сила  $p^2 f(x)$  определена только графически, может оказаться необходимым прибегнуть к какому-нибудь методу последовательного принасовывания. Было предложено несколько приближенных графических способов решения дифференциальных уравнений; мы начнем со способа, предложенного Кельвином\*\*) и являющегося хронологически, вероятно, одним из первых.

\*) См. K. Klotter, Ing.-Arch., т. 7, стр. 87, 1936.

\*\*) См. статью: Lord Kelvin, On Graphic Solution of Dynamical Problems, Phil. Mag., т. 34, 1892. Описание этого и некоторых других графических способов интегрирования дифференциальных уравнений можно найти в книге: W. Hogt, Die Differentialgleichungen des Ingenieurs, Берлин, 2-е изд., 1925, содержащей приложения этих способов к решению технических задач. [Есть русский перевод: В. Горт, Дифференциальные уравнения, ГТТИ, М., 1933.] См. также упомянутую книгу Заледна. Дальнейшее развитие этих графических способов с приложениями к решению задач теории колебаний дано Мейсснером. См. его работы: Graphische Analyse vermittels des Linienbildes einer Funktion, Kommissions Verlag Rascher und Co., Цюрих, 1932; Schweiz. Bauzeitung, т. 104, стр. 35, 1934; Z. angew. Math. u. Mech., т. 15, стр. 62, 1935.

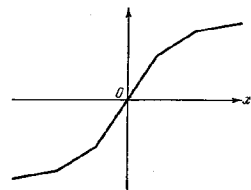


Рис. 107.

Для того чтобы показать широкое возможности этого способа рассмотрим уравнение (а) в более общей форме:

$$\ddot{x} = f(x, t, \dot{x}). \quad (b)$$

Решение этого уравнения выразит перемещение  $x$  как функцию времени  $t$ . Эта функция может быть представлена графически в виде кривой «время—перемещение» (рис. 108). Для того чтобы получить определенное решение, нужно знать начальные условия т. е. начальное перемещение и начальную скорость  $x = x_0$  и  $\dot{x} = \dot{x}_0$  для  $t = 0$ . Тогда известны начальная ордината и начальный наклон кривой «время—перемещение». Подставляя эти начальные значения  $x$  и  $\dot{x}$  в уравнение (b), можно вычислить начальное значение  $\ddot{x}$ . Из известной формулы

$$\rho = \frac{\sqrt{(1 + \dot{x}^2)^3}}{\ddot{x}} \quad (c)$$

можно найти радиус кривизны  $\rho_0$  в начале кривой «время—перемещение», с помощью которого можно вычертить малый элемент  $a_0 a_1$  этой кривой как дугу окружности (рис. 108); далее с чертежа следует снять значения ординаты  $x = x_1$  и угла наклона  $\dot{x} = \dot{x}_1$  в следующей точке  $a_1$  и по уравнению (b) вычислить соответствующее значение  $\ddot{x}$ . Теперь из выражения (c) определяется величина  $\rho = \rho_1$  и с ее помощью вычерчивается следующий элемент  $a_1 a_2$  кривой.

Продолжая описанное построение, графически получим кривую «время—перемещение». Построение может быть упрощено с помощью угла наклона касательной к кривой «время—перемещение». Пусть  $\theta$  обозначает этот угол; тогда

$$\dot{x} = \operatorname{tg} \theta \quad \text{и} \quad \ddot{x} = f(x, t, \operatorname{tg} \theta).$$

Подставляя в уравнение (c), получаем:

$$\rho = \frac{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^3}}{f(x, t, \operatorname{tg} \theta)} = \frac{1}{\cos^3 \theta f(x, t, \operatorname{tg} \theta)}. \quad (d)$$

В этом вычислении квадратный корень берется с положительным знаком, так что знак  $\rho$  совпадает со знаком  $\ddot{x}$ . Если  $\ddot{x}$  отрицателен, то центр кривизны располагается таким образом, чтобы выпуклость кривой оказалась обращенной кверху (рис. 108).

В случае свободных колебаний без затухания уравнение (b) принимает вид уравнения (а) и описанное графическое интегрирование становится очень простым, поскольку в этом случае функция  $f$  зависит только от величины перемещения  $x$ . Если принять начальные условия  $x = x_0$  и  $\dot{x} = 0$  при  $t = 0$ , то общий характер кривой «время—перемещение» будет таким, как это показано на рис. 109. В случае системы, симметричной относительно среднего положения, пересечение этой кривой с осью  $t$  определит период  $\tau$  свободных колебаний. Величину  $\tau$  можно всегда определить этим способом с точностью, достаточной для практических приложений. На рис. 109 для примера был взят случай простого гармонического движения, когда дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\ddot{x} + p^2 x = 0,$$

и точное решение даст

$$\tau = \frac{2\pi}{p}.$$

Выражение (d) в этом случае принимает вид

$$\rho = \frac{1}{\cos^3 \theta p^2 x}. \quad (d')$$

Начальное смещение  $x_0$  на рис. 109 взято равным 20 единицам длины и  $\rho_0$  равным 100 единицам длины. Тогда из уравнения (d') для  $\theta = 0$  получим:

$$\frac{1}{p} = \sqrt{20 \cdot 100} = 44,7 \text{ единицы}. \quad (e)$$

Величина  $1/p$  имеет размерность времени и для определения периода из рис. 109 нужно использовать длину, данную формулой (c). Измеряя  $t/4$  в масштабе, использованном для  $x_0$  и  $\rho$ , находим из рис. 109:

$$\frac{\tau}{4} = 69,5 \text{ единицы}$$

или, используя (e):

$$\tau = \frac{1}{p} \cdot 4 \cdot 69,5 = \frac{6,22}{p}.$$

В этом графическом решении для построения четверти периода кривой «время—перемещение» было взято только семь интервалов и найденные результаты имеют точность около 1%.

Опишем теперь другой графический способ решения уравнения (b), являющийся видоизмененным применением рассмотренного в

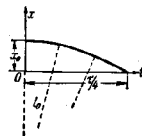


Рис. 109.



§ 19\*) метода фазовой плоскости Ляпоена. Беря дифференциальное уравнение движения в общем виде (b), примем лишь, что восста навливающая сила содержит член, пропорциональный  $x$ , и введи уравнения (b) запишем:

$$\ddot{x} + p^2 [x + g(x, \dot{x}, t)] = 0. \quad (f)$$

Теперь примем, что в течение любого малого интервала времени  $\Delta t$  функция  $g(x, \dot{x}, t)$  остается постоянной и равной ее значению в начале этого интервала. Тогда с помощью обозначения

$$\delta_i = g(x, \dot{x}, t) \quad (g)$$

уравнение (f) может быть записано в упрощенной форме:

$$\ddot{x} + p^2 (x + \delta_i) = 0. \quad (55')$$

Это уравнение действительно только для интервала времени от  $t$  до  $t + \Delta t$ , для которого  $\delta_i$  вычисляется из выражения (g).

Запишем теперь общее решение уравнения (55') в виде:

$$x = C_1 \cos pt_1 + C_2 \sin pt_1 - \delta_i, \quad (h)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования,  $t_1$  — время от начала рассматриваемого интервала  $\Delta t$ ; величина  $\delta_i$  рассматривается как постоянная. Дифференцирование выражения (h) по времени дает

$$\dot{x} = -pC_1 \sin pt_1 + pC_2 \cos pt_1. \quad (i)$$

Обозначая через  $x_i$  и  $\dot{x}_i$  перемещение и скорость колеблющейся массы при  $t_1 = 0$ , находим из уравнений (h) и (i):

$$C_1 = x_i + \delta_i \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\dot{x}_i}{p}. \quad (j)$$

Вновь подставляя эти значения в выражения (h) и (i), получаем:

$$\left. \begin{aligned} x &= (x_i + \delta_i) \cos pt_1 + \frac{\dot{x}_i}{p} \sin pt_1 - \delta_i, \\ \dot{x} &= -(x_i + \delta_i) \sin pt_1 + \frac{\dot{x}_i}{p} \cos pt_1. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Наконец, возведение в квадрат каждого из этих равенств и затем их сложение дают:

$$(x + \delta_i)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{p}\right)^2 = (x_i + \delta_i)^2 + \left(\frac{\dot{x}_i}{p}\right)^2. \quad (56)$$

\*) Эта модификация построения на фазовой плоскости для нелинейных задач предложена Л. С. Джейкобсоном и более подробно изложена в его работе: On a General Method of Solving Second Order Ordinary Differential Equations by Phase—Plane Displacements, J. Appl. Mech., декабрь 1952. [В настоящее время этот способ обычно называют «дельта-методом»].

Уравнение (56) показывает, что решение уравнения (55) определяет на фазовой плоскости ( $x, \dot{x}/p$ ) дугу окружности, центр которой лежит на оси  $x$  и имеет координату  $-\delta_i$ .

Для построения этой фазовой кривой нужно знать начальные значения  $x_0$  и  $\dot{x}_0$  перемещения и скорости колеблющейся массы при  $t = 0$ . Это определит исходную точку  $A_0$  на рис. 110, а, а из выражения (g) найдем:

$$\delta_0 = g(x_0, \dot{x}_0, 0),$$

что определяет положение первого центра  $C_0$  на рис. 110, а. Принимая  $C_0$  за центр и отрезок  $C_0A_0$  за радиус, проводим, как показано на рисунке, дугу  $A_0A_1$ , соответствующую малому центральному

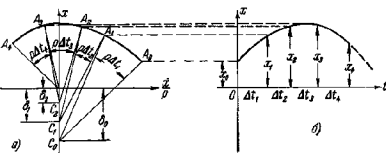


Рис. 110.

углу  $p\Delta t_1$ . Координаты  $x_1, \dot{x}_1/p$  точки  $A_1$  можно теперь использовать как новые начальные значения для второго интервала времени  $\Delta t_2$  и из уравнения (g) можно найти

$$\delta_1 = g(x_1, \dot{x}_1, \Delta t_1),$$

что определяет местоположение центра  $C_1$  на рис. 110, а. Из этого центра радиусом  $C_1A_1$  проводим вторую дугу  $A_1A_2$ , соответствующую малому центральному углу  $p\Delta t_2$ ). Координаты  $x_2, \dot{x}_2/p$  могут быть теперь использованы как новые начальные условия для третьего интервала времени и т. д. Таким способом можно сколь угодно далеко продолжить фазовую кривую  $A_0A_1A_2\dots$ , после чего кривая «перемещение—время»  $x = f(t)$  может быть построена, как показано на рис. 110, б.

Из рассмотрения построения на рис. 110, а ясно, что лучшее приближенное решение может быть получено, если при построении первой дуги  $A_0A_1$  использован центр  $C'_0$ , расположенный между  $C_0$

\*) Удобно, хотя и не обязательно, принимать интервалы времени  $\Delta t_i$  одинаковыми.

и  $C_1$ . Это дополнительное улучшение метода может быть введено следующим образом: приняв  $C_0$  за центр, сделаем первое пробное определение местоположения точки  $A_1$  и затем используем средние значения  $(x_0 + x_1)/2$  и  $(\dot{x}_0 + \dot{x}_1)/2$  в уравнении (g), чтобы найти уточненное положение центра  $C_0$ , после чего может быть построена дуга  $A_0A_1$ . Повторяя этот процесс для каждой дуги, можно избежать накопления ошибок, возникающих от использования начального значения  $\delta$ , вместо более подходящего среднего значения  $\delta_i$  на всем интервале. Это уточнение позволяет также брать несколько большие интервалы времени.

### Пример

1. Масса  $m$  подвешена на пружине, имеющей характеристику

$$k(x) = (k_0 + k_1 x^2)x,$$

показанную на рис. 111, б, и совершает вертикальные колебания при начальном перемещении  $x_0 = 2,5$  см и без начальной скорости. Найти период колебаний для этой частной амплитуды, если даны следующие численные значения:  $mg = 0,45$  кг,  $k_0 = 0,357$  кг/см,  $k_1 = 0,111$  кг/см<sup>3</sup>.

*Решение.* При измерении перемещения  $x$  от положения равновесия уравнение движения принимает вид:

$$m\ddot{x} = -(k_0 + k_1 x^2)x. \quad (1)$$

Обозначив  $p = \sqrt{k_0/m} = 27,8$  сек<sup>-1</sup>, запишем уравнение (1) в виде:

$$\ddot{x} + p^2 \left[ x + \frac{k_1}{k_0} x^3 \right] = 0, \quad (2)$$

что соответствует дифференциальному уравнению (55).

Мы видим, что в данном случае член

$$\delta_i = \frac{k_1}{k_0} x^2 = 2x^2 \quad (3)$$

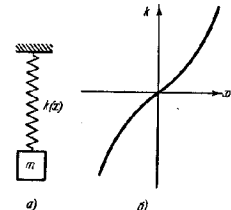


Рис. 111.

является функцией только  $x$  и поэтому можно несколько ускорить графическое решение уравнения (2) методом фазовой плоскости. Поступим следующим образом: нанесем на фазовую плоскость кривую  $\delta = 2x^2$ , соответствующую уравнению (3) таким образом, что ось  $x$  кривой  $\delta$  совпадает с осью  $x$  фазовой плоскости (рис. 112). Выбираем на кривой  $\delta$  ряд точек  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , что определяет принимаемые интервалы  $x$ , и проводим через эти точки горизонтальные прямые  $a_0A_0, a_1A_1, a_2A_2, \dots$ , как показано на рисунке. Средние точки дуг  $a_0A_1, a_1A_2, a_2A_3, \dots$  проектируем на ось  $\delta$  и затем переносим на отрицательную часть оси  $x$ . Нужно заметить, что таким способом мы получаем центры  $C'_0, C'_1, C'_2, \dots$ , соответствующие средним значениям  $\delta_i$  для каждого интервала, и поэтому повышаем точность приближенного решения. Принимая теперь  $A_0$  за исходную точку ( $x_0 = 2,5$  см;  $\dot{x}_0 = 0$ ),  $C'_0$  — за центр и  $C'_0A_0$  — за радиус, опишем дугу  $A_0A_1$  до ее пересечения  $A_1$  с горизонталью, ранее проведенной через  $a_1$ . Этим завершается

первый интервал, и координаты точки  $A_1$  на фазовой плоскости определяют перемещение  $x_1$  и скорость  $\dot{x}_1$  в конце этого интервала.

Затем, приняв  $C'_1$  за центр и  $C'_1A'_1$  за радиус, опишем дугу  $A_1A_2$ , пока она не пересечет горизонталь, проведенную через  $a_2$ , и т. д.

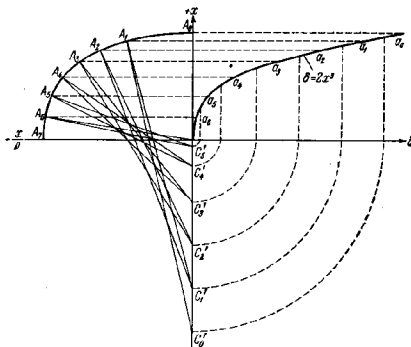


Рис. 112.

Такое построение продолжается до тех пор, пока на фазовой плоскости не будет получена точка  $A_n$ ; эта точка указывает, что движение на четверть цикла завершено, поскольку система симметрична относительно начала координат.

Измеряя транспортиром углы  $A_0C'_0A_1, A_1C'_1A_2$  и т. д. и суммируя их, получаем:

$$13^\circ,0 + 6^\circ,33 + 6^\circ,33 + 7^\circ,5 + 8^\circ,0 + 8^\circ,5 + 8^\circ,25 = 57^\circ,9 = 1,01 \text{ радиана.}$$

Отсюда период равен

$$\tau = \frac{4,04}{27,8} = 0,1452 \text{ сек.}$$

Используя уравнение (53) § 22 и таблицу эллиптических функций, найдем, что точное решение в данном случае равно  $\tau = 0,1447$  сек. Таким образом, ошибка графического решения равна всего  $1/3$  %.

24. Свободные нелинейные колебания: численное решение. — Для исследования негармонических колебаний, описываемых дифференциальным уравнением (51), может быть использован численный способ. Рассмотрим пример свободных колебаний без затухания.

Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\ddot{x} + p^2 f(x) = 0. \quad (a)$$

Пусть начальные условия будут:

$$x = x_0, \quad \dot{x} = 0 \quad \text{для } t = 0. \quad (b)$$

Величину  $\ddot{x}_0$  можно вычислить, если в уравнение (a) подставить  $x_1$  вместо  $x$ . Используя значение  $\ddot{x}_0$  ускорения в момент  $t = 0$ , можно вычислить величины  $\dot{x}_1$  и  $x_1$ , т. е. скорость и перемещение для некоторого момента  $t_1$ , взятого весьма близко к моменту  $t = 0$ . Пусть  $\Delta t$  обозначает малый интервал времени между моментом  $t = 0$  и моментом  $t = t_1$ . Тогда приближенные значения  $\dot{x}_1$  и  $x_1$  найдутся из следующих выражений:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_0 + \ddot{x}_0 \Delta t, \quad x_1 = x_0 + \frac{\dot{x}_0 + \dot{x}_1}{2} \Delta t. \quad (c)$$

Подставляя в уравнение (a)  $x_1$  вместо  $x$ , получим  $\ddot{x}_1$ . Используя это последнее значение, определим уточненные значения  $\dot{x}_1$  и  $x_1$  из выражений

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_0 + \frac{\ddot{x}_0 + \ddot{x}_1}{2} \Delta t \quad \text{и} \quad x_1 = x_0 + \frac{\dot{x}_0 + \dot{x}_1}{2} \Delta t. \quad (d)$$

Еще более точное приближение для  $\dot{x}_1$  будет получено теперь подстановкой второго приближения  $x_1$  (выражение (d)) в уравнение (a). Беря теперь второй интервал, можно, используя  $x_1$ ,  $\dot{x}_1$  и  $\ddot{x}_1$ , вычислить тем же способом величины  $x_2$ ,  $\dot{x}_2$ ,  $\ddot{x}_2$  для момента  $t = t_2 = 2\Delta t$ . Если взять интервалы  $\Delta t$  достаточно малыми и, как было пояснено выше, дважды повторять вычисления для каждого значения  $t$ , чтобы получить вторые приближения, то этот способ численного интегрирования всегда может дать достаточную для практических приложений точность.

Чтобы проиллюстрировать эту последовательность вычислений и дать представление о точности способа, рассмотрим случай простого гармонического колебания, для которого уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{x} + p^2 x = 0.$$

Точное решение этого уравнения при начальных условиях (b):

$$x = x_0 \cos pt, \quad \dot{x} = -x_0 p \sin pt. \quad (e)$$

Результаты численного интегрирования даны ниже в таблице I. Интервал времени был взят равным  $\Delta t = 1/4p$ . Так как период колебаний в этом случае равен  $\tau = 2\pi/p$ , то выбранный интервал  $\Delta t$  составляет приблизительно  $1/8$  четверти периода  $\tau$ . Вторая строка

таблицы содержит начальные условия. Далее были использованы выражения (c) для получения первых приближений  $\dot{x}_1$  и  $x_1$  в момент  $t = \Delta t = 1/4p$ . Найденные результаты приведены в третьей строке таблицы. Для получения лучших приближений  $\dot{x}_1$  и  $x_1$  были использованы выражения (d) и результаты помещены в четвертой строке таблицы. Таким образом была вычислена вся таблица. В последних двух столбцах даны соответствующие значения  $\sin pt$  и  $\cos pt$  пропорциональные точным решениям (e), так что точность численного интегрирования можно видеть прямо из таблицы. Как мы видим, вычисленные скорости всегда имеют высокую точность. Наибольшая ошибка для перемещений видна из последней строки таблицы и доходит приблизительно до 1% начального перемещения  $x_0$ .

Таблица I

Численное интегрирование

| $t$          | $x$           | $\dot{x}$       | $\ddot{x}$        | $\cos pt$ | $\sin pt$ |
|--------------|---------------|-----------------|-------------------|-----------|-----------|
| 0            | $x_0$         | 0               | $-p^2 x_0$        | 1         | 0         |
| $\Delta t$   | 0,9687 $x_0$  | -0,2500 $p x_0$ | -0,9687 $p^2 x_0$ |           |           |
| $\Delta t$   | 0,9692 $x_0$  | -0,2461 $p x_0$ | -0,9692 $p^2 x_0$ | 0,9689    | 0,2474    |
| 2 $\Delta t$ | 0,8774 $x_0$  | -0,4884 $p x_0$ | -0,8774 $p^2 x_0$ |           |           |
| 2 $\Delta t$ | 0,8788 $x_0$  | -0,4769 $p x_0$ | -0,8788 $p^2 x_0$ | 0,8776    | 0,4794    |
| 3 $\Delta t$ | 0,7321 $x_0$  | -0,6966 $p x_0$ | -0,7321 $p^2 x_0$ |           |           |
| 3 $\Delta t$ | 0,7344 $x_0$  | -0,6783 $p x_0$ | -0,7344 $p^2 x_0$ | 0,7317    | 0,6816    |
| 4 $\Delta t$ | 0,5419 $x_0$  | -0,8619 $p x_0$ | -0,5419 $p^2 x_0$ |           |           |
| 4 $\Delta t$ | 0,5449 $x_0$  | -0,8378 $p x_0$ | -0,5449 $p^2 x_0$ | 0,5403    | 0,8415    |
| 5 $\Delta t$ | 0,3184 $x_0$  | -0,9740 $p x_0$ | -0,3184 $p^2 x_0$ |           |           |
| 5 $\Delta t$ | 0,3220 $x_0$  | -0,9457 $p x_0$ | -0,3220 $p^2 x_0$ | 0,3153    | 0,9490    |
| 6 $\Delta t$ | 0,0755 $x_0$  | -1,0262 $p x_0$ | -0,0755 $p^2 x_0$ |           |           |
| 6 $\Delta t$ | 0,0794 $x_0$  | -0,9954 $p x_0$ | -0,0794 $p^2 x_0$ | 0,0707    | 0,9975    |
| 7 $\Delta t$ | -0,1719 $x_0$ | -1,0153 $p x_0$ | -0,1719 $p^2 x_0$ |           |           |
| 7 $\Delta t$ | -0,1680 $x_0$ | -0,9836 $p x_0$ | -0,1680 $p^2 x_0$ | -0,1792   | 0,9840    |

Приведенные результаты были получены при разделении четверти периода всего на шесть интервалов. Точность можно повысить увеличением числа интервалов, но в то же время возрастает число необходимых выкладок.

При помощи этой таблицы можно также вычислить период колебаний. Из первого и второго столбцов видно, что кривая «время — перемещение» при  $t = 6\Delta t$  имеет положительную ординату, равную 0,0794 $x_0$ . При  $t = 7\Delta t$  ордината этой кривой отрицательна и равна 0,1680 $x_0$ . Точка пересечения кривой «время — перемещение» с осью  $t$  определяет время, равное четверти периода колебаний. При помощи

линейной интерполяции получается следующий результат:

$$\frac{1}{4} \tau = 6\Delta t + \Delta t \frac{0,0794}{0,0794 + 0,1680} = 6,32\Delta t = \frac{6,32}{4p} = \frac{1,58}{p}.$$

Точное значение четверти периода колебаний равно  $\pi/2p \approx 1,57/p$ . Как мы видим, вычисленный период колебаний найден с ошибкой меньше, чем 1%. Из этого примера легко видеть, что описанный численный метод может оказаться весьма полезным для вычисления периода колебаний систем с переменной жесткостью\*).

Более общий подход к численному решению уравнения (а) при начальных условиях (б) состоит в записи решения  $x = f(t)$  в виде степенного ряда\*\*. Для разъяснения этого способа вновь возьмем дифференциальное уравнение движения в более общей форме:

$$\ddot{x} = \Phi(x, \dot{x}, t). \quad (f)$$

Тогда простым дифференцированием легко найти все высшие производные:

$$\left. \begin{aligned} x^{III} &= \Phi'(x, \dot{x}, t), \\ x^{IV} &= \Phi''(x, \dot{x}, t), \\ x^V &= \Phi'''(x, \dot{x}, t). \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Подставляя в выражения (f) и (g) начальные значения  $x_0$  и  $\dot{x}_0$  вместе с  $t=0$  и применяя формулу Маклорена:

$$f(t) = f(0) + t f'(0) + \frac{t^2}{2!} f''(0) + \frac{t^3}{3!} f'''(0) + \dots, \quad (h)$$

можно записать решение  $x = f(t)$  в следующем виде:

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \ddot{x}_0 \frac{t^2}{2} + x_0^{III} \frac{t^3}{6} + x_0^{IV} \frac{t^4}{24} + x_0^V \frac{t^5}{120} + x_0^{VI} \frac{t^6}{720} + \dots \quad (57)$$

Учтем теперь, что для весьма малых значений  $t$  ряд (57) быстро сходится, и возьмем только первые три члена. Таким образом, для весьма малых значений  $t$  имеем:

$$\left. \begin{aligned} x &\approx x_0 + \dot{x}_0 t + \ddot{x}_0 \frac{t^2}{2}, \\ \dot{x} &\approx \dot{x}_0 + \ddot{x}_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

\* Изложение более сложных способов численного интегрирования дифференциальных уравнений можно найти в ранее упомянутых книгах В. Горта и К. Зандена. См. также: Runge — König, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Берлин, 1924 и А. Н. Крылов, Approximate Numerical Integration of Ordinary Differential Equations, Берлин, 1923. [А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, Изд. АН СССР, М., 5-е изд., 1950.]

\*\* Описываемый метод предложен в работе V. Blaess, Zur näheren Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen, Z. Ver. deut. Ing. т. 81, стр. 587—596, 1937.

Нужно заметить, что использование этих выражений равносильно приближенному представлению действительного движения фиктивным движением с постоянным ускорением

$$\ddot{x}_0 = \Phi(x_0, \dot{x}_0, 0), \quad (j)$$

которое получается при подстановке данных начальных значений  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$ ,  $t = 0$  в уравнение (f). В этом смысле использование выражений (i) аналогично применению уравнений (с) на стр. 142. Однако далее мы поступим несколько иным способом. Вместо немедленного отыскания улучшенных вторых приближений для  $x_1$  и  $\dot{x}_1$  в конце первого малого интервала времени  $\Delta t$  (выражения (d) на стр. 142) используем непосредственно выражения (i) и запишем:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 + \dot{x}_0 \Delta t + \ddot{x}_0 \frac{(\Delta t)^2}{2}, \\ \dot{x}_1 &= \dot{x}_0 + \ddot{x}_0 \Delta t + 2\ddot{x}_0 \frac{(\Delta t)^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Теперь, подставляя эти значения в уравнение (f) и заменяя здесь  $t$  на  $\Delta t$ , найдем ускорение в конце первого интервала:

$$\ddot{x}_1 = \Phi(x_1, \dot{x}_1, \Delta t). \quad (l)$$

Затем, принимая  $x_1$ ,  $\dot{x}_1$ ,  $\ddot{x}_1$  за новые начальные значения, по выражениям (i) найдем перемещение и скорость в конце второго интервала:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + \dot{x}_1 \Delta t + \ddot{x}_1 \frac{(\Delta t)^2}{2}, \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + \ddot{x}_1 \Delta t + 2\ddot{x}_1 \frac{(\Delta t)^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

и т. д. Эти вычисления укладываются в очень простую табличную форму, показанную в таблице II (стр. 146).

После выбора подходящего интервала времени  $\Delta t$  таблица заполняется строка за строкой, слева направо, точно так же, как читают страницу книги. Кроме значений, входящих в последний столбец, каждый элемент таблицы требует простого прибавления (или вычитания) предыдущих элементов. В конце каждого интервала элемент последнего столбца вычисляется по формуле (f), что также часто является простой операцией.

В приведенной таблице процесс выполнен для пяти интервалов времени. Из-за накопления ошибок вследствие приближенности выражения (i) недопустимо далее продолжать выкладки без внесения поправок на эти ошибки. Эти поправки вычислены следующим образом: пусть  $X_5$  и  $\dot{X}_5$  обозначают более точные значения  $x_5$  и  $\dot{x}_5$ , получаемые подстановкой  $t = 5\Delta t$  в первые семь членов ряда (57) и

## Численное интегрирование

| Интервал | Момент времени | $x_i$  | $\dot{x}_i \Delta t$   | $\ddot{x}_i \frac{(\Delta t)^2}{2}$ |
|----------|----------------|--|--|-------------------------------------|
| 0        | 0              | $x_0$  | $\dot{x}_0 \Delta t$   | $\ddot{x}_0 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ |
| 1        | $\Delta t$     | $x_1 = x_0 + \dot{x}_0 \Delta t + \ddot{x}_0 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ | $\dot{x}_1 \Delta t = \dot{x}_0 \Delta t + 2\ddot{x}_0 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ | $\ddot{x}_1 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ |
| 2        | $2\Delta t$    | $x_2 = x_1 + \dot{x}_1 \Delta t + \ddot{x}_1 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ | $\dot{x}_2 \Delta t = \dot{x}_1 \Delta t + 2\ddot{x}_1 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ | $\ddot{x}_2 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ |
| 3        | $3\Delta t$    | $x_3 = x_2 + \dot{x}_2 \Delta t + \ddot{x}_2 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ | $\dot{x}_3 \Delta t = \dot{x}_2 \Delta t + 2\ddot{x}_2 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ | $\ddot{x}_3 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ |
| 4        | $4\Delta t$    | $x_4 = x_3 + \dot{x}_3 \Delta t + \ddot{x}_3 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ | $\dot{x}_4 \Delta t = \dot{x}_3 \Delta t + 2\ddot{x}_3 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ | $\ddot{x}_4 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ |
| 5        | $5\Delta t$    | $x_5 = x_4 + \dot{x}_4 \Delta t + \ddot{x}_4 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ | $\dot{x}_5 \Delta t = \dot{x}_4 \Delta t + 2\ddot{x}_4 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ | $\ddot{x}_5 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ |
| —        | Поправка       | $X_5 - x_5$  | $\dot{X}_5 \Delta t - \dot{x}_5 \Delta t$                                      | —                                   |
| 5с       | $5\Delta t$    | $X_5$  | $\dot{X}_5 \Delta t$   | $\ddot{X}_5 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ |
| 6        | $6\Delta t$    | $x_6 = X_5 + \dot{X}_5 \Delta t + \ddot{X}_5 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ | $\dot{x}_6 \Delta t = \dot{X}_5 \Delta t + 2\ddot{X}_5 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ | $\ddot{x}_6 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ |
| 7        | $7\Delta t$    | $x_7 = x_6 + \dot{x}_6 \Delta t + \ddot{x}_6 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ | $\dot{x}_7 \Delta t = \dot{x}_6 \Delta t + 2\ddot{x}_6 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ | $\ddot{x}_7 \frac{(\Delta t)^2}{2}$ |
| 8        | $8\Delta t$    | $x_8 = \dots$  | $\dots$  | $\dots$                             |

По поводу размеров интервалов времени заметим, что они должны быть достаточно малы, чтобы ряд (57) достаточно быстро сходиллся для значения  $t = 5\Delta t$ . Рассматривая этот вопрос, Блесс рекомендует такой выбор  $\Delta t$ , чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \frac{\frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_{n+1} - \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_n}{x_{n+1} - x_n} \right| < 0,01. \quad (n)$$

Этот критерий имеет следующую основу. На любой ступени выкладок от  $t_n = n\Delta t$  до  $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$  мы предполагаем, что начальное ускорение  $\ddot{x}_n$  имеет место в течение всего интервала. Перемещение, соответствующее только этому ускорению, равно  $\ddot{x}_n \frac{(\Delta t)^2}{2}$ . В конце интервала мы используем уравнение (f) и находим  $\ddot{x}_{n+1}$ , что в общем случае отличается от  $\ddot{x}_n$ . Если в течение этого интервала использовать это последнее ускорение  $\ddot{x}_{n+1}$ , то соответствующее перемещение будет равно  $\ddot{x}_{n+1} \frac{(\Delta t)^2}{2}$ . Так как среднее ускорение в этом интервале лежит где-то между двумя крайними значениями, резонно считать, что числитель в выражении (n) представляет наибольшую возможную ошибку в перемещении, вызванную использованием начального ускорения во всем интервале. В то же время знаменатель выражения (n) есть приближенное значение действительного перемещения. Таким образом, используя выражение (n) как критерий для выбора  $\Delta t$ , мы допускаем в наших вычислениях ошибку менее 1% на каждом интервале, что достаточно для получения высокой степени точности из поправочных формул (58).

Чтобы проиллюстрировать применение метода Блесса и оценить его точность, вновь рассмотрим свободные колебания системы на рис. 111, рассмотренной в примере 1 предыдущего параграфа. Используя те же числовые значения, имеем из уравнения (m) на стр. 140:

$$\ddot{x} = -772(x + 2x^3). \quad (o)$$

Произвольно беря  $\Delta t = 0,005$  сек, имеем:

$$\ddot{x} \frac{(\Delta t)^2}{2} = -0,00965(x + 2x^3). \quad (p)$$

Начиная теперь со значений  $x_0 = 1$  см и  $\dot{x}_0 = 0$ , составляем таблицу III таким же образом, как мы составляли таблицу II (стр. 146).

Для вычисления по выражению (p) значений последнего столбца включены столбцы значений  $x_i^2$  и  $x_i + 2x_i^3$ . После пятого интервала сделаны поправки к соответствию с формулами (58), и новые исходные значения помещены в строке 5с. Замечая, что интервал 7 приводит почти к  $x = 0$ , находим без дальнейших поправок с помощью

его первой производной по времени. Блесс показал, что соответствующие поправки достаточно точно определяются формулами\*):

$$\left. \begin{aligned} X_5 - x_5 &= \frac{45}{24} \ddot{x}_4 \frac{(\Delta t)^2}{2} + \frac{100}{24} \ddot{x}_1 \frac{(\Delta t)^2}{2} - \frac{145}{24} \ddot{x}_0 \frac{(\Delta t)^2}{2}, \\ \Delta t (\dot{X}_5 - \dot{x}_5) &= \frac{11}{12} \ddot{x}_6 \frac{(\Delta t)^2}{2} + \frac{5}{12} \ddot{x}_1 \frac{(\Delta t)^2}{2} - \frac{16}{12} \ddot{x}_0 \frac{(\Delta t)^2}{2}, \end{aligned} \right\} (58)$$

используемыми значениями, уже полученные в первых пяти интервалах. Применяя эти две формулы для поправок, получим новую систему исходных величин  $X_5$  и  $\dot{X}_5 \Delta t$ , как это показано в строке 5с таблицы II, и затем продолжаем выкладки для следующих пяти интервалов времени, после чего опять вводим поправки по формулам (58) и т. д.

\*) См. работу, цитированную на стр. 144, где дан вывод этих формул.

Численное интегрирование

Таблица II

| Интервал | Момент времени | $x_i$  | $x_i^3$ | $x_{i+1}x_i^3$ | $\dot{x}_i \Delta t$ | $\ddot{x}_i \frac{(\Delta t)^2}{2}$ |
|----------|----------------|--------|---------|----------------|----------------------|-------------------------------------|
| 0        | 0,000          | 1,000  | 1,000   | 3,000          | 0,000                | -0,0290                             |
| 1        | 0,005          | 0,978  | 0,935   | 2,848          | -0,058               | -0,0275                             |
| 2        | 0,010          | 0,893  | 0,712   | 2,317          | -0,113               | -0,0224                             |
| 3        | 0,015          | 0,758  | 0,436   | 1,630          | -0,158               | -0,0157                             |
| 4        | 0,020          | 0,584  | 0,199   | 0,982          | -0,189               | -0,0095                             |
| 5        | 0,025          | 0,385  | 0,057   | 0,499          | -0,208               | -0,0048                             |
| —        | Поправка       | +0,043 | —       | —              | +0,023               | —                                   |
| 5с       | 0,025          | 0,428  | 0,078   | 0,584          | -0,185               | -0,0056                             |
| 6        | 0,030          | 0,237  | 0,013   | 0,253          | -0,196               | -0,0025                             |
| 7        | 0,035          | 0,038  | —       | 0,038          | -0,201               | -0,0004                             |

линейной экстраполяции  $x=0$  при  $t=0,036$  сек. Таким образом период равен  $\tau=4 \cdot 0,036=0,144$  сек. Вновь отметим, что точный период, определяемый уравнением (53), равен  $\tau=0,1447$  сек, так что ошибка численного интегрирования менее 0,5%.

25. Приложение метода последовательных приближений к задачам свободных колебаниях.— Начнем с задач, в которых нелинейность уравнений движения происходит от нелинейности упругой характеристики системы. Если отклонение упругой характеристики от линейного закона сравнительно мало, то дифференциальное уравнение движения можно представить в виде

$$\ddot{x} + p^2 x + \alpha f(x) = 0, \quad (56)$$

где  $\alpha$  — малый параметр, а  $f(x)$  — полином, содержащий  $x$  в степени не ниже второй. Когда система симметрична относительно положения равновесия ( $x=0$ ), численное значение  $f(x)$  не должно изменяться при замене  $x$  на  $-x$  и функция  $f(x)$  должна содержать только нечетные степени  $x$ . Простейшее уравнение этого типа получается при сохранении только первого члена выражения  $f(x)$ . Тогда уравнение движения принимает вид:

$$\ddot{x} + p^2 x + \alpha x^3 = 0.$$

Система такого рода показана на рис. 100. Было предложено несколько методов исследования уравнений типа (59) и (60) в связи с важными астрономическими задачами, требующими решения подобных уравнений\*). Разсмотрим общий метод последовательных приближений для получения периодических решений уравнения (60).

\*) Эти методы рассмотрены в работе А. Н. Крылова, Изв. АН СССР 1933, № 1. Метод, который описывается в последующем изложении в основных чертах, предложен Линдстедтом Мém. Acad. Sci., СПб, сер. 7, т. 3, 1883 и А. М. Ляпуновом в его докторской диссертации, посвященной общей проблеме устойчивости движения.

Начнем с определения второго приближения решения уравнения (60)\*. Поскольку  $\alpha$  мало, логично в первом приближении предположить для  $x$  простое гармоническое движение с угловой частотой  $p_1$ , незначительно отличающейся от частоты  $p$ . Положим

$$p^2 = p_1^2 + (p^2 - p_1^2), \quad (a)$$

где  $p^2 - p_1^2$  — малая величина. Подставляя (a) в уравнение (60), получаем:

$$\ddot{x} + p_1^2 x + (p^2 - p_1^2) x + \alpha x^3 = 0. \quad (b)$$

Положим, что  $x=a$  и  $\dot{x}=0$  в начальный момент  $t=0$ ; гармоническое движение, удовлетворяющее этим начальным условиям, описывается уравнением

$$x = a \cos p_1 t, \quad (c)$$

которое представляет собой первое приближение к решению уравнения (60) для данных начальных условий.

Подставляя это выражение для  $x$  в последние два малых члена уравнения (b), получаем:

$$\ddot{x} + p_1^2 x = -a(p^2 - p_1^2) \cos p_1 t - \alpha a^3 \cos^3 p_1 t$$

или, используя соотношение

$$4 \cos^3 p_1 t = \cos 3p_1 t + 3 \cos p_1 t,$$

находим:

$$\ddot{x} + p_1^2 x = - \left[ a(p^2 - p_1^2) + \frac{3\alpha a^3}{4} \right] \cos p_1 t - \frac{\alpha a^3}{4} \cos 3p_1 t. \quad (d)$$

Очевидно, что таким образом мы получаем уравнение вынужденных колебаний для случая гармонического движения без демпфирования. Первый член правой части уравнения представляет возмущение, частота которого совпадает с собственной частотой колебаний системы. Чтобы исключить возможность резонанса, применим искусственный прием, состоящий в таком выборе значения  $p_1$ , которое удовлетворяет равенству\*\*)

$$a(p^2 - p_1^2) + \frac{3\alpha a^3}{4} = 0.$$

Из этого уравнения получим:

$$p_1^2 = p^2 + \frac{3\alpha a^2}{4}. \quad (e)$$

Теперь из (d) и (e) найдем следующее общее решение уравнения (b) для  $x$ :

$$x = C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t + \frac{\alpha a^3}{32p_1^2} \cos 3p_1 t.$$

\*) Такое приближенное решение было впервые получено М. В. Остроградским (Мém. Acad. Sci., СПб, сер. 6, т. 3, 1840). Подобное решение было дано также Рэлеем в его книге «Теория звука», т. 1. Неполнота обоих решений исследована в упомянутой выше работе А. Н. Крылова. [См. также А. Н. Крылов, «Вибрации судов», ОНТИ, М., 1936.]

\*\*) Этот прием вычисления  $p_1$  является существенной чертой метода последовательных приближений. Если в дифференциальном уравнении (d) выражение в скобках не равно нулю, то в выражении  $x$  появится член неограниченно возрастающий со временем.

Для удовлетворения принятым начальным условиям мы должны подставить в решение

$$C_1 = a - \frac{a\alpha^3}{32\rho_1^3}$$

и

$$C_2 = 0.$$

Отсюда следует второе приближение для  $x$ :

$$x = \left( a - \frac{a\alpha^3}{32\rho_1^3} \right) \cos \rho_1 t + \frac{a\alpha^3}{32\rho_1^3} \cos 3\rho_1 t. \quad (61)$$

Как легко видеть, из-за наличия в уравнении (60) члена, содержащего  $x^3$ , решение уже не представляет простого гармонического движения, пропорционального  $\cos \rho_1 t$ . Из-за появления высшей гармоники, пропорциональной  $\cos 3\rho_1 t$ , действительная кривая «перемещение—время» не будет косинусоидой. Величина отклонения от простой гармонической кривой зависит от значения множителя  $\alpha$ . Кроме того, основная частота колебаний, как видно из выражения (6), уже не является постоянной. Она зависит от амплитуды колебаний  $a$  и увеличивается с возрастанием амплитуды при положительных значениях  $\alpha$ . Такие условия осуществляются в случае, представленном на рис. 100.

Выражения (е) и (61) можно представить в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 &= \rho_1^2 + c_1 \alpha, \\ x &= \varphi_0 + \alpha \varphi_1, \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= -\frac{3a^2}{4}, \quad \varphi_0 = a \cos \rho_1 t, \\ \varphi_1 &= \frac{a^3}{32\rho_1^3} (\cos 3\rho_1 t - \cos \rho_1 t). \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, приближенные выражения (f) для частоты и перемещения содержат малый параметр  $\alpha$  в первой степени. Чтобы получить следующие приближения, примем вместо выражений (f) разложения:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_0 + \alpha \varphi_1 + \alpha^2 \varphi_2 + \alpha^3 \varphi_3 + \dots, \\ \rho^2 &= \rho_1^2 + c_1 \alpha + c_2 \alpha^2 + c_3 \alpha^3 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

которые содержат высшие степени малого параметра  $\alpha$ . В этих разложениях  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  — неизвестные функции времени  $t$ ,  $\rho$  — частота, которая будет определена позднее, а  $c_1, c_2, \dots$  — постоянные, которые нужно выбрать так, чтобы исключить условия резонанса, как было пояснено выше при определении второго приближения. Увеличивая число членов в выражениях (g), мы можем вычислить столько приближений, сколько пожелаем. В дальнейшем изложении ограничим наши вычисления и опустим все члены, содержащие  $\alpha$  в степенях выше третьей. Подставляя выражения (g) в уравнение (60), получаем:

$$\ddot{\varphi}_0 + \alpha \ddot{\varphi}_1 - \alpha^2 \ddot{\varphi}_2 + \alpha^3 \ddot{\varphi}_3 + (\rho_1^2 + c_1 \alpha + c_2 \alpha^2 + c_3 \alpha^3) + (\varphi_0 + \alpha \varphi_1 + \alpha^2 \varphi_2 + \alpha^3 \varphi_3) + \alpha (\varphi_0 + \alpha \varphi_1 + \alpha^2 \varphi_2 + \alpha^3 \varphi_3)^3 = 0. \quad (h)$$

После выполнения указанных алгебраических операций и отбрасывания всех членов, содержащих  $\alpha$  в степенях выше третьей, можно представить

уравнение (h) в виде:

$$\ddot{\varphi}_0 + \rho_1^2 \varphi_0 + \alpha (\ddot{\varphi}_1 + \rho_1^2 \varphi_1 + c_1 \varphi_0 + \varphi_0^3) + \alpha^2 (\ddot{\varphi}_2 + \rho_1^2 \varphi_2 + c_2 \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + 3\varphi_0^2 \varphi_1) + \alpha^3 (\ddot{\varphi}_3 + \rho_1^2 \varphi_3 + c_3 \varphi_0 + c_2 \varphi_1 + c_1 \varphi_2 + 3\varphi_0^2 \varphi_2 + 3\varphi_0 \varphi_1^2) = 0. \quad (i)$$

Это уравнение должно удовлетворяться для любого значения малого параметра  $\alpha$ ; поэтому должны порознь равняться нулю множители, стоящие при каждой степени  $\alpha$ . Таким образом, уравнение (i) приводит к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_0 + \rho_1^2 \varphi_0 &= 0, \\ \ddot{\varphi}_1 + \rho_1^2 \varphi_1 &= -c_1 \varphi_0 - \varphi_0^3, \\ \ddot{\varphi}_2 + \rho_1^2 \varphi_2 &= -c_2 \varphi_0 - c_1 \varphi_1 - 3\varphi_0^2 \varphi_1, \\ \ddot{\varphi}_3 + \rho_1^2 \varphi_3 &= -c_3 \varphi_0 - c_2 \varphi_1 - c_1 \varphi_2 - 3\varphi_0^2 \varphi_2 - 3\varphi_0 \varphi_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

Принимая те же начальные условия, что и выше, т. е. для  $t=0$

$$x = a \quad \text{и} \quad \dot{x} = 0,$$

и пользуясь для  $x$  выражениями (g), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(0) + \alpha \varphi_1(0) + \alpha^2 \varphi_2(0) + \alpha^3 \varphi_3(0) &= a, \\ \dot{\varphi}_0(0) + \alpha \dot{\varphi}_1(0) + \alpha^2 \dot{\varphi}_2(0) + \alpha^3 \dot{\varphi}_3(0) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Так как и эти уравнения должны удовлетворяться при любом значении  $\alpha$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(0) &= a, & \dot{\varphi}_0(0) &= 0, \\ \varphi_1(0) &= 0, & \dot{\varphi}_1(0) &= 0, \\ \varphi_2(0) &= 0, & \dot{\varphi}_2(0) &= 0, \\ \varphi_3(0) &= 0, & \dot{\varphi}_3(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Рассматривая первое из уравнений (j) и соответствующие начальные условия, из первой строки системы (k), найдем, как и выше:

$$\varphi_0 = a \cos \rho_1 t. \quad (l)$$

Подставляя это первое приближение в правую часть второго уравнения (j), получаем:

$$\ddot{\varphi}_1 + \rho_1^2 \varphi_1 = -c_1 a \cos \rho_1 t - a^3 \cos^3 \rho_1 t = -\left( c_1 a + \frac{3}{4} a^3 \right) \cos \rho_1 t - \frac{1}{4} a^3 \cos 3\rho_1 t.$$

Для исключения возможности резонанса выберем  $c_1$  так, чтобы обратился в нуль первый член правой части уравнения:

$$c_1 a + \frac{3}{4} a^3 = 0,$$

и мы находим:

$$c_1 = -\frac{3}{4} a^2. \quad (m)$$

Тогда общее решение для  $\varphi_1$  принимает вид:

$$\varphi_1 = C_1 \cos \rho_1 t + C_2 \sin \rho_1 t + \frac{1}{32} \frac{a^3}{\rho_1^3} \cos 3\rho_1 t.$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям, записанным во второй строке системы (к), положим:

$$C_1 + \frac{a^2}{32\rho_1^2} = 0, \quad C_2 = 0.$$

Таким образом,

$$\varphi_1 = \frac{a^2}{32\rho_1^2} (\cos 3\rho_1 t - \cos \rho_1 t). \quad (n)$$

Если ограничить вычисления вторым приближением и подставить выражения (l), (m), (n) в выражение (g), то получится:

$$x = a \cos \rho_1 t + \frac{a\alpha^2}{32\rho_1^2} (\cos 3\rho_1 t - \cos \rho_1 t), \quad (o)$$

где

$$\rho_1^2 = \rho^2 + \frac{3}{4} a^2 \alpha. \quad (p)$$

Эти результаты полностью совпадают с ранее полученными выражениями (j) (стр. 150).

Чтобы получить третье приближение, подставим выражения (l), (m) и (n) в правую часть третьего уравнения (j):

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_2 + \rho_1^2 \varphi_2 = & -c_2 a \cos \rho_1 t + \frac{3}{4} a^2 \frac{a^2}{32\rho_1^2} (\cos 3\rho_1 t - \cos \rho_1 t) - \\ & - 3a^2 \cos^2 \rho_1 t \frac{a^2}{32\rho_1^2} (\cos 3\rho_1 t - \cos \rho_1 t). \end{aligned}$$

С помощью формул для тригонометрических функций кратных аргументов можно записать это уравнение в форме:

$$\ddot{\varphi}_2 + \rho_1^2 \varphi_2 = -a \left( c_2 - \frac{3}{128} \frac{a^2}{\rho_1^2} \right) \cos \rho_1 t - \frac{3}{128} \frac{a^5}{\rho_1^2} \cos 5\rho_1 t.$$

Чтобы вновь исключить возможность резонанса, положим

$$c_2 = + \frac{3}{128} \frac{a^2}{\rho_1^2}. \quad (q)$$

Тогда общее решение для  $\varphi_2$  примет вид:

$$\varphi_2 = C_1 \cos \rho_1 t + C_2 \sin \rho_1 t + \frac{1}{1024} \frac{a^5}{\rho_1^4} \cos 5\rho_1 t.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  найдем, используя третью строку системы (к):

$$C_1 = - \frac{1}{1024} \frac{a^5}{\rho_1^4},$$

$$C_2 = 0.$$

Таким образом получим:

$$\varphi_2 = \frac{1}{1024} \frac{a^5}{\rho_1^4} (\cos 5\rho_1 t - \cos \rho_1 t). \quad (r)$$

Если в разложении (g) мы ограничимся членами, содержащими  $\alpha$  и  $\alpha^2$ , то получим третье приближение, используя уже найденные выражения для  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$ :

$$x = a \cos \rho_1 t + \frac{a\alpha^2}{32\rho_1^2} (\cos 3\rho_1 t - \cos \rho_1 t) + \frac{\alpha^2 a^2}{1024\rho_1^4} (\cos 5\rho_1 t - \cos \rho_1 t), \quad (s)$$

где  $\rho_1$  теперь определяется уравнением

$$\rho_1^2 = \rho^2 + \frac{3}{4} a^2 \alpha - \frac{3}{128} \frac{a^4 \alpha^2}{\rho_1^2}. \quad (t)$$

Подставляя выражения для  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$  в последнее уравнение (j) и поступая, как выше, получаем, наконец, четвертое приближение:

$$\begin{aligned} x = & a \cos \rho_1 t + \frac{a}{32} \frac{\alpha^2}{\rho_1^2} (\cos 3\rho_1 t - \cos \rho_1 t) + \frac{\alpha^2}{1024} \frac{a^5}{\rho_1^4} (\cos 5\rho_1 t - \cos \rho_1 t) + \\ & + \frac{\alpha^2}{32768} \frac{a^7}{\rho_1^6} (\cos 7\rho_1 t - 6 \cos 3\rho_1 t + 5 \cos \rho_1 t), \quad (u) \end{aligned}$$

где

$$\rho_1^2 = \rho^2 + \frac{3}{4} a^2 \alpha - \frac{3}{128} a^2 \frac{\alpha^2}{\rho_1^2}. \quad (v)$$

Используя выражение (p), находим:

$$\rho_1^2 = \rho^2 + \frac{3}{4} a^2 \alpha - \frac{3}{128} a^2 \frac{\alpha^2}{\rho^2} + \frac{9}{512} \alpha^2 \frac{a^4}{\rho^4},$$

Мы видим, что частота  $\rho_1$  зависит от амплитуды колебаний. Кривая «перемещение—время» не является простой косинусоидой; она содержит, соответственно выр жению (u), высшие гармоники, амплитуды которых при малых значениях  $\alpha$  быстро уменьшаются с увеличением порядка гармоники.

Применим этот метод к случаю колебаний математического маятника. Дифференциальное уравнение движения (стр. 126) в этом случае имеет вид:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

Разлагая  $\sin \theta$  в ряд и удерживая только первые два члена этого ряда, получим:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta - \frac{g}{6l} \theta^3 = 0.$$

Беря для частоты второе приближение (e) и обозначая через  $\theta_0$  угловую амплитуду, мы находим:

$$\rho_1^2 = \frac{g}{l} - \frac{g}{8l} \theta_0^2.$$

Таким образом, период колебаний равен

$$\tau = \frac{2\pi}{\rho_1} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \frac{1}{1 - \frac{1}{8} \theta_0^2}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left( 1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 \right)}.$$

Эта формула дает удовлетворительные результаты для углов отклонения, меньших чем один радиан.



Метод последовательных приближений, примененный к решению уравнения (60), может быть использован также в более общем случае уравнения (59). Этот же метод можно применить также и при исследовании негармонических колебаний, когда нелинейность дифференциального уравнения является следствием нелинейности силы демпфирования\*). В качестве примера рассмотрим случай, когда затухание пропорционально квадрату скорости. Тогда дифференциальное уравнение движения есть

$$\ddot{x} + p^2 x \mp \alpha \dot{x}^2 = 0.$$

Знак минус нужно принять при скорости, направленной против положительного направления оси  $x$ , знак плюс — при направлении скорости, совпадающем с направлением оси  $x$ . Принимая в начальный момент ( $t=0$ )  $x=a$  и  $\dot{x}=0$ , для первой половины цикла имеем уравнение

$$\ddot{x} + p^2 x - \alpha \dot{x}^2 = 0. \quad (a')$$

Ограничивая вычисления членами, содержащими  $\alpha^2$ , подставим, как и выше:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_0 + \alpha \varphi_1 + \alpha^2 \varphi_2, \\ p^2 &= p_1^2 + c_1 \alpha + c_2 \alpha^2, \end{aligned} \right\} \quad (b')$$

пренебрегая всеми членами, содержащими  $\alpha$  в степени выше второй, получаем уравнение

$\ddot{\varphi}_0 + p_1^2 \varphi_0 + \alpha (\ddot{\varphi}_1 + p_1^2 \varphi_1 - \dot{\varphi}_0^2) + \alpha^2 (\ddot{\varphi}_2 + p_1^2 \varphi_2 + c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_0 - 2\dot{\varphi}_0 \dot{\varphi}_1) = 0$ ,  
откуда следует:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_0 + p_1^2 \varphi_0 &= 0, \\ \ddot{\varphi}_1 + p_1^2 \varphi_1 &= \dot{\varphi}_0^2, \\ \ddot{\varphi}_2 + p_1^2 \varphi_2 &= -c_1 \varphi_1 - c_2 \varphi_0 + 2\dot{\varphi}_0 \dot{\varphi}_1. \end{aligned} \right\} \quad (c')$$

Начальные условия дают:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(0) &= a, & \dot{\varphi}_0(0) &= 0, \\ \varphi_1(0) &= 0, & \dot{\varphi}_1(0) &= 0, \\ \varphi_2(0) &= 0, & \dot{\varphi}_2(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (d')$$

Из первого уравнения (с') и соответственно первой строке условий (d') получим первое приближение:

$$\varphi_0 = a \cos p_1 t.$$

Подставив его в правую часть второго уравнения (с'), получим:

$$\ddot{\varphi}_1 + p_1^2 \varphi_1 = a^2 p_1^2 \sin^2 p_1 t = \frac{1}{2} a^2 p_1^2 (1 - \cos 2p_1 t).$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющим начальным условиям, будет

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} a^2 - \frac{2}{3} a^2 \cos p_1 t + \frac{1}{6} a^2 \cos 2p_1 t.$$

\*) Другой способ решения этой задачи дан Мизесом. См. R. von Mises, Elemente der technischen Hydromechanik, Берлин, стр. 188, 1914.

Подставляя  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  в правую часть третьего уравнения (с'), получаем:

$$\ddot{\varphi}_2 + p_1^2 \varphi_2 = -c_2 a \cos p_1 t - c_1 \left( \frac{1}{2} a^2 - \frac{2}{3} a^2 \cos p_1 t + \frac{1}{6} a^2 \cos 2p_1 t \right) - 2a^2 p_1^2 \sin p_1 t \left( \frac{2}{3} \sin p_1 t - \frac{1}{3} \sin 2p_1 t \right). \quad (e')$$

В правой части этого уравнения содержится две постоянные  $c_1$  и  $c_2$ ; так как существует только одно условие для исключения возможности резонанса, то одна из этих постоянных может быть выбрана произвольно. В простейшем предположении  $c_1=0$ . Тогда уравнение (e') можно представить в виде:

$$\ddot{\varphi}_2 + p_1^2 \varphi_2 = \left( -c_2 a + \frac{1}{3} p_1^2 a^3 \right) \cos p_1 t - \frac{2}{3} a^3 p_1^2 + \frac{2}{3} a^3 p_1^2 \cos 2p_1 t - \frac{1}{3} a^3 p_1^2 \cos 3p_1 t. \quad (f')$$

Чтобы исключить возможность резонанса, положим

$$-c_2 a + \frac{1}{3} p_1^2 a^3 = 0$$

или

$$c_2 = \frac{1}{3} p_1^2 a^2. \quad (g')$$

Тогда общим решением уравнения (f') будет:

$$\varphi_2 = C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t - \frac{2}{3} a^3 - \frac{2}{9} a^3 \cos 2p_1 t + \frac{1}{24} a^3 \cos 3p_1 t.$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям, представленным в третьей строке системы (d'), нужно положить

$$C_1 = \frac{61}{72} a^3, \quad C_2 = 0,$$

и окончательно имеем:

$$\varphi_2 = -\frac{2}{3} a^3 + \frac{a^3}{72} (61 \cos p_1 t - 16 \cos 2p_1 t + 3 \cos 3p_1 t).$$

Подставляя  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $c_1$  и  $c_2$  в выражения (b'), получаем:

$$\begin{aligned} x &= a \cos p_1 t + \frac{a a^2}{6} (3 - 4 \cos p_1 t + \cos 2p_1 t) - \\ &\quad - \frac{\alpha^2 a^3}{72} (48 - 61 \cos p_1 t + 16 \cos 2p_1 t - 3 \cos 3p_1 t) \end{aligned} \quad (h')$$

и

$$p^2 = p_1^2 + c_1 \alpha + c_2 \alpha^2 = p_1^2 + \frac{1}{3} p_1^2 \alpha^2,$$

откуда

$$p = \frac{p}{\sqrt{1 + \frac{1}{3} \alpha^2 \alpha^2}}. \quad (i')$$

Время, необходимое для совершения половины цикла, равно

$$\frac{\tau_1}{2} = \frac{\pi}{\rho_1} = \frac{\pi}{\rho} \sqrt{1 + \frac{1}{3} a^2 \alpha^2} \approx \frac{\pi}{\rho} \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \alpha^2\right), \quad (j')$$

причем перемещение системы в конце этой половины цикла определится подстановкой  $\rho_1 t = \pi$  в выражение (h')

$$(x) \quad x = \frac{\pi}{\rho_1} = a_1 = -a + \frac{4}{3} a a^2 - \frac{16}{9} a^3 \alpha^2. \quad (k')$$

Будем исходить теперь из начальных условий  $x = a_1$ ,  $\dot{x} = 0$ . Используя формулы (j') и (k'), находим, что длительность второй половины цикла равна

$$\frac{\tau_2}{2} \approx \frac{\pi}{\rho} \left(1 + \frac{1}{6} a_1^2 \alpha^2\right);$$

перемещение системы в конце цикла равно

$$a_2 = -a_1 + \frac{4}{3} a a_1^2 - \frac{16}{9} a^3 \alpha^2.$$

Таким образом, получаются колебания с постепенно убывающими амплитудами \*).

**26. Вынужденные нелинейные колебания установившийся режим.** — В предыдущих параграфах рассмотрены только свободные колебания систем с нелинейными характеристиками. Остановимся теперь на приближенном методе изучения установившегося процесса колебаний таких систем при действии внешней возмущающей силы.

Рассматривая в качестве примера нелинейную систему на рис. 100 и предполагая наличие вязкого сопротивления и простой гармонической возмущающей силы, можно взять дифференциальное уравнение движения в виде:

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + p^2(x + \beta x^3) = q \cos(\omega t + \alpha). \quad (a)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения неизвестно, поэтому необходимо обратиться к приближенному исследованию. Вследствие нелинейного характера уравнения следует считать непригодным метод наложения колебаний, который применим во всех задачах, рассмотренных в первой главе. Это значит, что даже если удастся точно определить свободные и вынужденные колебания системы, то сумма этих двух движений не даст действительных результирующих колебаний. Точно так же колебания, вызванные возмущающей силой, содержащей несколько гармоник, нельзя опре-

\* Другой способ решения задачи о колебаниях с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости, дан в работе: Н. Burkhardt, Z. Math. u. Phys., т. 63, стр. 303, 1914. Таблицы для решения этих задач составлены Миллом (см. сноску на стр. 96).

делять суммированием колебаний, возникающих под действием каждой гармоники в отдельности.

Для упрощения задачи рассмотрим здесь только установившийся режим вынужденных колебаний, не обращая внимания на свободные колебания, зависящие от начальных условий. Примем также, что  $\beta$  мало, т. е. закон изменения восстанавливающей силы незначительно отклоняется от линейного закона. Тогда приближенное частное решение уравнения (a) можно попробовать взять в виде:

$$x = a \cos \omega t. \quad (b)$$

Это соответствует предположению, что установившийся процесс вынужденных колебаний имеет такую же угловую частоту, что и вызвавшая их возмущающая сила; амплитуда  $a$  и сдвиг фазы  $\alpha$  подлежат дальнейшему определению.

Подставляя выражение (b) в (a) и замечая, что  $\cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha$ , получаем:

$$-a\omega^2 \cos \omega t - \mu a \omega \sin \omega t + p^2 a \cos \omega t + p^2 \beta a^3 \cos^3 \omega t = q \cos \alpha \cos \omega t - q \sin \alpha \sin \omega t \dots (c)$$

Сразу видно, что это равенство не может быть удовлетворено для всех значений  $t$  и удовлетворяется только при  $t = \pi l / 2\omega$ , где  $l$  — целое число. Это значит, что при надлежащем выборе амплитуды  $a$  и фазового угла  $\alpha$  предположенное решение (b) может удовлетворить дифференциальному уравнению движения в крайних и среднем положениях колеблющейся массы. Если  $l$  — четное число, то имеем  $\cos \omega t = \pm 1$  и  $\sin \omega t = 0$ , и уравнение (c) приводится к виду

$$p^2 a + p^2 \beta a^3 = q \cos \alpha + a \omega^2. \quad (d)$$

При  $l$  нечетном имеем  $\cos \omega t = 0$  и  $\sin \omega t = \pm 1$ , и уравнение (c) принимает вид:

$$\mu a \omega = q \sin \alpha. \quad (e)$$

Для любого значения  $\omega$  уравнения (d) и (e) позволяют приблизительно определить амплитуду  $a$  и фазовый угол  $\alpha$  установившегося процесса вынужденных колебаний. Из уравнения (e) имеем:

$$\sin \alpha = \frac{\mu a \omega}{q} \quad (f)$$

и

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{q^2} (a \omega)^2}. \quad (g)$$

Подставляя выражение (g) для  $\cos \alpha$  в уравнение (d), получим:

$$p^2 a + p^2 \beta a^3 = \pm q \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{q^2} (a \omega)^2} + a \omega^2. \quad (62)$$

Для любой конкретной системы, т. е. для заданных значений  $\rho^2$ ,  $\beta$ ,  $q$  и  $\mu$ , это алгебраическое уравнение приближенно определяет соотношение между амплитудой  $a$  и предполагаемой частотой  $\omega$  установившегося процесса вынужденных колебаний. Решение уравнения может быть получено графически следующим образом.

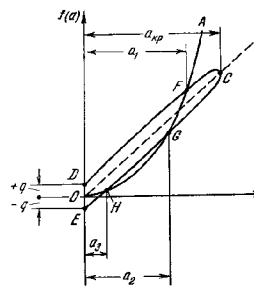


Рис. 113.

Левая часть уравнения (62) представляет собой восстанавливающую силу, отнесенную к единице массы системы; при заданной упругой характеристике эта сила может быть представлена в виде функции амплитуды  $a$ , как показано кривой  $OA$  на рис. 113.

При любом фиксированном значении частоты  $\omega$  правую часть уравнения (62) также можно рассматривать как функцию амплитуды  $a$ . На рис. 113 показана соответствующая кривая  $ECD$ ; тангенс угла наклона осевой прямой  $OC$  пропорционален  $\omega^2$ , причем точке  $C$  соответствует абсцисса

$$a_{кр} = \frac{q}{\mu\omega}. \quad (h)$$

Точки пересечения  $F$ ,  $G$  и  $H$  определяют в общем случае три значения  $a$ , которые при принятом значении  $\omega$  удовлетворяют уравнению (62).

Если повторить построение, данное на рис. 113, для ряда значений  $\omega$  и определить соответствующие значения  $a$ , то можно построить для данной системы амплитудную кривую, показывающую возможные амплитуды установившегося процесса вынужденных колебаний для всех значений частоты  $\omega$  возмущающей силы. Уже беглое рассмотрение рис. 113 показывает, что для малых значений  $\omega$  нижняя ветвь  $EC$  кривой, представляющей правую часть уравнения (62), нигде не пересекает кривую  $OA$  и получается единственное пересечение  $F$ , определяющее значение  $a_1$ . Из уравнения (h) также видно, что при большом значении  $\omega$  точка  $C$ , за которой правая часть уравнения (62) становится мнимой, может оказаться слева от

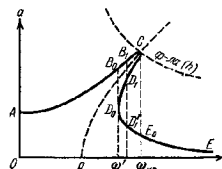


Рис. 114.

кривой  $OA$ , и вновь получится только одно пересечение  $H$ , определяющее значение  $a_2$ . Таким образом, амплитудная кривая имеет вид, показанный на рис. 114. Начиная с  $\omega = 0$ , имеем для каждого значения  $\omega$  до определенного значения  $\omega'$  только пересечение  $F$  верхней ветви с кривой  $OA$  рис. 113; таким образом определяется участок  $AB_0$  рис. 114 амплитудной кривой. Нижняя ветвь впервые касается кривой  $OA$  на рис. 113 при  $\omega = \omega'$ , и на рис. 114, кроме точки  $B_0$ , получается точка  $D_0$ . Следовательно, для каждого значения  $\omega' < \omega < \omega_{кр}$  получаются три пересечения на рис. 113 ( $F$ ,  $G$  и  $H$ ) и соответственно три точки  $B_1$ ,  $D_1$ ,  $D'_1$  на рис. 114. Наконец, будет достигнуто значение  $\omega = \omega_{кр}$ , для которого точка  $C$  на рис. 113 оказывается на кривой  $OA$ , и получается только два пересечения, определяющих амплитуды, представленные точками  $C$  и  $E_0$  на рис. 114. Для каждого значения  $\omega > \omega_{кр}$  точка  $C$  окажется слева от кривой  $OA$  на рис. 113, и получится единственное пересечение  $H$  нижней ветви, определяющее точки вдоль участка  $E_0E$  амплитудной кривой на рис. 114. Этим путем может быть завершено построение амплитудной кривой на рис. 114 для выбранного значения отношения  $q/\mu$ . Беря ряд значений  $q/\mu$ , можно построить семейство амплитудных кривых, подобное семейству амплитудных кривых для линейной системы (рис. 60).

Если в уравнении (62) взять  $q = 0$ , то получится случай свободных колебаний системы с нелинейной восстанавливающей силой. В этом случае уравнение (62) приводится к виду

$$\rho^2 a + \rho^2 \beta a^3 = a \omega^2, \quad (62')$$

и приближенное соотношение между амплитудой  $a$  и угловой частотой  $\omega$  свободных колебаний легко получается пересечением прямой  $OC$  с кривой  $OA$  на рис. 113. Таким способом получена штриховая линия на рис. 114. Если на рис. 114 нанести гиперболу с уравнением (h), то ее пересечение с кривой свободных колебаний происходит в той же точке  $C$ , в которой амплитудная кривая пересекает кривую свободных колебаний. Таким образом, для любого выбранного значения отношения  $q/\mu$  легко найти наибольшую возможную амплитуду установившегося процесса вынужденных колебаний без полного построения амплитудной кривой.

Возвращаясь к уравнению (f), мы видим, что для малых значений  $\omega$  фазовый угол  $\alpha$  мал и постепенно возрастает до  $\pi/2$ , когда  $\omega$  приближается к  $\omega_{кр}$ . Таким образом, при резонансе возмущающая сила опережает вынужденные колебания на полную четверть цикла, как и в случае линейной системы. Вспомня, что для  $\omega > \omega_{кр}$  на рис. 113 получаются пересечения только нижней ветви, соответствующей знаку минус в уравнении (62), из уравнения (g) заключаем, что  $\cos \alpha$  отрицателен и, следовательно,  $\alpha > \pi/2$  для больших значений  $\omega$ .

При помощи рис. 114 можно исследовать, как будет развиваться процесс нелинейных вынужденных колебаний с демпфированием, если постепенно увеличивать частоту возмущающей силы, начиная с  $\omega = 1$ . Сначала как амплитуда  $a$ , так и фазовый угол  $\alpha$  будут возрастать с увеличением частоты  $\omega$ , пока не достигнуто значение  $\omega_{кр}$ . Здесь, как и уже видели, возмущающая сила опережает движение на полпути четверть цикла и дальнейшего увеличения амплитуды произойти не может. Как только частота  $\omega$  превзойдет значение  $\omega_{кр}$ , вид движения полностью изменится; амплитуда падает до  $E_0$ , и возмущающая сила опережает новое движение несколько больше, чем на четверть цикла. С дальнейшим возрастанием  $\omega$  амплитуда постепенно уменьшается, следуя кривой  $E_0E$ , и фазовый угол  $\alpha$  приближается к  $\pi/2$ . Если теперь рассмотрим обратный процесс и начать постепенно уменьшение  $\omega$ , то амплитуда будет постепенно увеличиваться, следуя изменениям ординат кривой  $ED_0$ , пока не будет достигнуто значение  $\omega'$ . Так как для значений  $\omega < \omega'$  существует только одно решение уравнения (62), то дальнейшее уменьшение  $\omega$  вызовет скачок амплитуды до  $B_0$  и изменение фазового угла от значения несколько большего чем  $\pi/2$ , до значения, несколько меньшего чем  $\pi/2$ . При дальнейшем убывании частоты  $\omega$  амплитуда постепенно падает следуя изменениям ординат кривой  $B_0A$ . Эксперименты<sup>\*)</sup> подтвердили эти общие прогнозы и обнаружили, что условия, соответствующие участку  $CD_0$  амплитудной кривой, не могут быть осуществлены в реальной физической системе. Недавно К. Клотте показал, что решения уравнения (62), представляемые точкам участка  $CD_0$  амплитудной кривой, динамически неустойчивы, что объясняет неудачу попыток наблюдений этих решений в реальных физических системах<sup>\*\*)</sup>.

Для применения описанного выше графического метода вовсе не обязательно, чтобы восстанавливающая сила следовала закону кубической параболы, представленному левой частью уравнения (62). Вообще можно воспользоваться описанным графическим решением, если кривая  $OA$  на рис. 113 симметрична относительно начала и не слишком отличается от прямой линии. Этот метод, конечно, всегда является приближенным, кроме случая линейной восстанавливающей силы.

Устройство, показанное на рис. 115, а, имеет так называемую билинейную восстанавливающую силу, график которой представ-

на рис. 115, б. Графическое решение, показанное на рис. 113, применимо также и в данном случае, если восстанавливающая сила симметрична относительно начала и если различие углов наклона прямых  $OA$  и  $AB$  на рис. 115, б невелико. В этом случае получится амплитудная кривая, показанная на рис. 115, в.

Если система с одной степенью свободы имеет характеристику восстанавливающей силы, подобную приведенной на рис. 116, а,

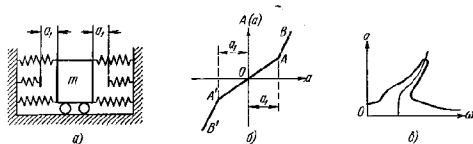


Рис. 115.

можно вновь поступать, как показано на рис. 113, и найти амплитудную кривую вида, изображенного на рис. 116, б.

В предшествующем рассмотрении вынужденных колебаний предполагалось, что их частота совпадает с частотой возмущающей силы. Однако в случае нелинейных упругих характеристик гармоническая сила  $q \cos \omega t$  иногда может вызвать значительные колебания с более низкими частотами, например  $\omega/2$ ,  $\omega/3$ . Это явление называется *субгармоническим резонансом*. Теоретическое исследование этого явления сложно<sup>\*)</sup>, и мы ограничимся элементарным рассмотрением, которое даст некоторое объяснение этого явления. Возьмем в качестве примера рассмотренный в предыдущем параграфе случай, описываемый уравнением (60). Было показано, что в этом случае свободные колебания не представляют простого гармонического движения и что их приближенное выражение содержит также высшую гармонику третьего порядка; поэтому для перемещения  $x$  можно принять выражение

$$x = a \cos \omega t + b \cos 3\omega t. \quad (1)$$

Если отсутствует возмущающая сила, то вследствие неизбежного трения эти колебания будут постепен-

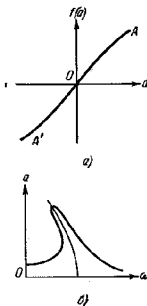


Рис. 116.

<sup>\*)</sup> Первые эксперименты этого рода были выполнены О. Мартинсеней занимавшейся аналогичными колебаниями в электрических системах. См. Phys. Z., т. 11, стр. 448, 1910. Подобные эксперименты с механическими системами выполнил Г. Дюффинг. См. цитированную на стр. 133 работу.

<sup>\*\*)</sup> См. К. Клотте, E. Pinney, A. Comprehensive Stability Criterion for the Forced Vibrations of Nonlinear Systems, J. Appl. Mech., т. 2, стр. 9, 1953.

<sup>\*)</sup> Теория нелинейных колебаний была значительно развита в последние годы, главным образом в связи с задачами радиотехники. Мы упомянем здесь важнейшие работы: В. ван дер Поля, Phil. Mag., сер. 7, т. 3, стр. 65, 1927; А. Андронов, Comptes rend., т. 189, стр. 559, 1929; А. Андронов и А. Витт, Comptes rend., т. 190, стр. 256, 1930; Л. Мандельштам и Н. Палаеки, Z. Physik, т. 73, стр. 233, 1931; Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Schweiz. Bauzeitung, т. 103, 1934.

но затухает. Представим теперь, что на систему действует сила  $q \cos(3\omega t + \beta)$ . На перемещениях (i) она совершит за цикл  $\tau = 2\pi/\omega$  работу:

$$\int_0^{\tau} q \cos(3\omega t + \beta) \dot{x} dt = -a\omega q \int_0^{\tau} \sin \omega t \cos(3\omega t + \beta) dt - 3\beta\omega q \int_0^{\tau} \sin 3\omega t \cos(3\omega t + \beta) dt$$

Первый член правой части выражения равен нулю, тогда как второй член дает  $3\beta\omega q \sin \beta$ . Таким образом, из-за наличия в выражении (i) высшей гармоники принятая переменная сила совершит работу, зависящую от сдвига фаз  $\beta$ . При соответствующем фазовом угле эта работа может компенсировать рассеивание энергии вследствие демпфирования. Таким образом принятая переменная сила частоты  $3\omega$  может поддерживать колебания (i) имеющей частоту  $\omega$ , что и представляет собой явление субгармонической резонанса\*).

## 27. Применение метода Ритца к нелинейным колебаниям.

Рассмотрим теперь более общий способ приближенного решения задачи о нелинейных колебаниях, основанный на применении метода Ритца к решению соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений движения\*\*). В общем случае это дифференциальное уравнение имеет форму

$$\ddot{x} + 2ng(\dot{x}) + p^2f(x) - F(t) = 0, \quad (6)$$

где  $g(\dot{x})$ ,  $f(x)$  — некоторые заданные функции скорости  $\dot{x}$  и перемещения  $x$ ,  $F(t)$  — возмущающая сила на единицу массы,  $n$  и  $p^2$  — постоянные, определяющие соответственно силу неупругого сопротивления и восстанавливающую силу на единицу массы системы.

Уравнение (63) можно рассматривать как уравнение равновесия, в котором сила инерции уравновешена силой неупругого сопротивления, упругой силой и возмущающей силой. Работа, совершаемая этой системой сил на любом виртуальном перемещении  $\delta x$ , должна равняться нулю:

$$[\ddot{x} + 2ng(\dot{x}) + p^2f(x) - F(t)] \delta x = 0. \quad (6)$$

\*.) Возможность этого явления в механических системах была указана Бэкером: J. G. Backer, Trans. ASME, т. 54, стр. APM-162, 1932.

\*\*.) Первое применение метода Ритца к решению задач нелинейных колебаний дано Г. Дuffингом в работе, упомянутой выше на стр. 13. Приближение этого метода к некоторым частным случаям было выполнено А. Лурье и А. Чекаревым (журнал «Прикладная математика и механика» т. 1, № 3, стр. 307, 1938). [Здесь и всюду далее автор не усматривает различий между методом Ритца и методом Бубнова—Галеркина; в действительности А. И. Лурье и А. И. Чекарев пользовались вторым методом.] В последнее время этот метод был использован в различных случаях К. Клоттером; см. его доклад, представленный национальной конференцией по прикладной механике, Чикаго, 1951.

Для применения метода Ритца прием приближенное выражение установленного процесса вынужденных колебаний в виде ряда

$$x = a_1\Phi_1(t) + a_2\Phi_2(t) + a_3\Phi_3(t) + \dots, \quad (65)$$

в котором  $\Phi_1(t)$ ,  $\Phi_2(t)$ , ... — должным образом выбранные функции времени, а  $a_1$ ,  $a_2$ , ... — параметры, которые нужно определить так, чтобы ограниченное число членов ряда (65) обеспечило наилучшее приближение для  $x$ . Тогда возможное перемещение будет

$$\delta x = \delta a_n \Phi_n(t).$$

Подставив это выражение и ряд (65) в уравнение (64), найдем, что равенство левой части нулю не выполняется для любого момента  $t$  и на принятом виртуальном перемещении совершается некоторая работа, поскольку ряд (65) является не точным, а лишь только приближенным решением для  $x$ . Чтобы получить возможно большую точность, выберем параметры  $a_1$ ,  $a_2$ , ... так, чтобы обратилось в нуль среднее значение виртуальной работы (64) за цикл; это дает уравнение вида\*):

$$\int_0^{\tau} [\ddot{x} + 2ng(\dot{x}) + p^2f(x) - F(t)] \Phi_n(t) dt = 0. \quad (66)$$

Сюда следует подставить ряд (65) для  $x$  и выполнять интегрирование по всему периоду  $\tau$  одного цикла. Таким образом мы получим столько алгебраических уравнений, сколько принято членов ряда (65); решая эти уравнения, найдем значения всех параметров  $a_1$ ,  $a_2$ , ... Сравнивая этот способ приближенного решения со способом, изложенным в предыдущем параграфе, замечаем, что в последнем случае амплитуда колебаний выбирается так, чтобы удовлетворить уравнению движения только в те моменты, когда колеблющаяся система находится в крайнем или среднем положении. Применяя метод Ритца, мы выбираем амплитуды  $a_1$ ,  $a_2$ , ... так, чтобы обратилось в нуль среднее значение за цикл виртуальной работы. При таком способе можно ожидать получения лучшего приближенного решения, чем ранее. Применим теперь этот способ усреднения к некоторым примерам.

В качестве первого примера рассмотрим случай отсутствия демпфирования, когда уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{x} + p^2(x - \beta x^3) = q \cos \omega t.$$

Вынужденные колебания будут симметричны относительно среднего положения ( $x = 0$ ) и будут либо полностью совпадать по фазе с возмущающей силой, либо полностью противоположны ей по фазе. За

\*.) Мы можем прийти к тем же уравнениям, используя принцип Гамильтона. См. S. P. Timoshenko and D. N. Young, Advanced Dynamics, Нью-Йорк, стр. 234, 1948.

первое приближение можно принять

$$x = a_1 \psi_1(t) = \pm a_1 \cos \omega t, \quad (6)$$

и уравнение (66) принимает вид:

$$\int_0^{\tau} [\ddot{x} + p^2(x + \beta x^3) - q \cos \omega t] \cos \omega t dt = 0.$$

Подставляя сюда выражение (67) и замечая, что

$$\int_0^{\tau} \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2 \omega t d(\omega t) = \frac{\pi}{\omega}$$

и

$$\int_0^{\tau} \cos^4 \omega t dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos^4 \omega t d(\omega t) = \frac{3}{4} \frac{\pi}{\omega},$$

получаем:

$$p^2 a_1 + \frac{3}{4} \beta p^2 a_1^3 = \mp q + a_1 \omega^2. \quad (7)$$

Сравнивая это с уравнением (62) предыдущего параграфа для случая отсутствия демпфирования ( $\mu = 0$ ), мы видим лишь небольшое различие, связанное с присутствием в левой части члена  $\frac{3}{4} \beta$  вместо  $\frac{3}{4}$ . Это показывает улучшение, вызванное использованием способа усреднения. За второе приближение, удовлетворяющее условию симметрии, можно взять

$$x = a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 3\omega t.$$

Тогда из уравнения (66) получим два алгебраических кубических уравнения, которые можно численно решить относительно  $a_1$  и  $a_2$  для любой системы частных значений постоянных  $p^2$ ,  $\omega^2$ ,  $\beta$ ,  $q$ .

Другой случай, когда с успехом может быть применен метод усреднения, представляет случай упругой характеристики, состоящей из прямых (рис. 115, а). Уже первое приближение, взят в форме (67), даст удовлетворительное совпадение с известными в данном случае точным решением. Рис. 117 содержит типичную систему амплитудных кривых, полученных для билинейной системы без демпфирования при помощи первого приближения методом усреднения\*\*. Чтобы пользоваться безразмерными параметрами, величину  $a/a_1$  выражены в функции  $\omega^2/p^2$  для некоторых значений  $\gamma = Q/k_1$

\* См. работу: J. P. Den Hartog, R. M. Heiles, J. Appl. Mech., т. стр. 127, 1936.

\*\* Эти кривые заимствованы из работы Клоттера, цитированной на стр. 160.

Уравнение движения есть

$$\ddot{x} + p^2 f(x) = \frac{Q}{m} \sin \omega t,$$

где  $p^2 = k_1/m$ .

Рассмотрим теперь колебания с демпфированием; примем силу неупругого сопротивления пропорциональной скорости, а упругую

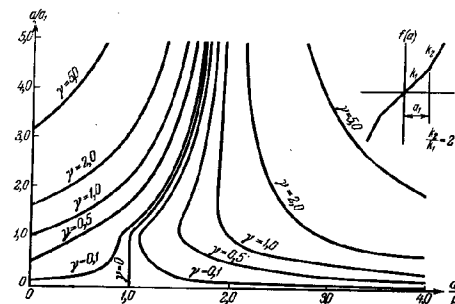


Рис. 117.

характеристику такую, как в первом примере, так что дифференциальное уравнение движения получит вид:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2(x + \beta x^3) = q \cos \omega t. \quad (69)$$

Установившиеся вынужденные колебания в данном случае не совпадают по фазе с возмущающей силой, и в первом приближении примем

$$x = c \cos(\omega t - \alpha) = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (70)$$

где

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

Для определения двух постоянных  $a$  и  $b$  способом усреднения возьмем два уравнения в виде (66); в данном случае они принимают вид:

$$\int_0^{\tau} [\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2(x + \beta x^3) - q \cos \omega t] \cos \omega t dt = 0,$$

$$\int_0^{\tau} [\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2(x + \beta x^3) - q \cos \omega t] \sin \omega t dt = 0.$$

Подставляя выражение (70) для  $x$  и выполняя интегрирование, в лучшем случае следующие уравнения для вычисления амплитуды и фаз вынужденных колебаний:

$$-a\omega^2 + 2p\omega b + p^2 \left( a + \frac{3}{4} \beta a c^2 \right) - q = 0,$$

$$-b\omega^2 - 2p\omega a + p^2 \left( b + \frac{3}{4} \beta b c^2 \right) = 0,$$

или, подставляя  $a = c \cos \alpha$ ,  $b = c \sin \alpha$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 \cos \alpha + 2p\omega \sin \alpha + p^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \beta c^2 \right) \cos \alpha - \frac{q}{c} &= 0, \\ \omega^2 \sin \alpha - 2p\omega \cos \alpha + p^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \beta c^2 \right) \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} (71)$$

Умножая первое из этих уравнений на  $\cos \alpha$ , а второе — на  $\sin \alpha$  складывая их, находим:

$$-\omega^2 + p^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \beta c^2 \right) = \frac{q}{c} \cos \alpha.$$

Умножая первое уравнение на  $\sin \alpha$  и второе — на  $\cos \alpha$  и вычитая второе из первого, находим:

$$2p\omega = \frac{q}{c} \sin \alpha.$$

Из последних двух уравнений получим:

$$\left. \begin{aligned} \left[ -\omega^2 + p^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \beta c^2 \right) \right]^2 + 4p^2 \omega^2 &= \left( \frac{q}{c} \right)^2, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2p\omega}{-\omega^2 + p^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \beta c^2 \right)}. \end{aligned} \right\} (72)$$

Для каждого частного случая можно из этих двух уравнений вычислить амплитуду  $c$  и фазовый угол  $\alpha$ . При отсутствии трения находим  $\alpha = 0$  или  $\alpha = \pi$  и первое из уравнений (72) совпадает с ранее полученным уравнением (68). Сравнивая первое из уравнений (72) с уравнением (62) предыдущего параграфа и замечая, что  $\mu = 2$  мы снова видим, что различие состоит лишь в появлении величины  $\beta$  вместо  $\nu$ .

Из этих примеров видно, что способом усреднения легко может быть получено первое приближение, и сравнение <sup>\*)</sup> с известными точными решениями показывает его достаточную точность. Определение второго приближения приводит к двум нелинейным уравнениям, решения которых может быть громоздким, однако возникающие при этом затруднения имеют лишь алгебраический характер.

<sup>\*)</sup> См. цитированную выше статью Клоттера.

28. Примеры переменных упругих характеристик. — В задачах предыдущих параграфов жесткость системы зависела от перемещения. Здесь будут рассмотрены случаи, в которых жесткость изменяется в зависимости от времени.

В качестве первого примера рассмотрим вертикально натянутую струну  $AB$  длиной  $2l$ , несущую посередине точечную массу  $m$  (рис. 118). Если  $x$  — малое перемещение массы от среднего положения, то растягивающая сила в струне, соответствующая этому перемещению, равна (см. стр. 125)

$$S' = S + AE \frac{x^2}{2l^2}, \quad (a)$$

где  $S$  — сила натяжения струны в положении равновесия массы,  $A$  — площадь поперечного сечения струны и  $E$  — модуль упругости материала струны. Примем, что сила  $S$  очень велика по сравнению с переменной частью растягивающей силы, выраженной вторым членом выражения (a). В таком случае этим вторым членом можно пренебречь ( $S' = S$ ), и уравнение движения массы  $m$  принимает вид:

$$m\ddot{x} + \frac{2Sx}{l} = 0. \quad (b)$$

Коэффициент жесткости в данном случае определяется величиной  $2S/l$ , и пока  $S$  остается постоянным, уравнение (b) определяет простое гармоническое движение с угловой частотой  $p = \sqrt{2S/lm}$  и амплитудой, зависящей от начальных условий. Если начальное перемещение и начальная скорость массы равны нулю, то масса остается в среднем положении, которое является положением устойчивого равновесия.

Положим теперь, что при помощи некоторого устройства создаются малые установившиеся периодические колебания растягивающей силы  $S$ , так что

$$S = S_0 + S_1 \sin \omega t. \quad (c)$$

Так как сила  $S$  все время остается достаточно большой, то уравнение (b) сохраняется также и в этом случае, и мы получаем систему, в которой коэффициент жесткости  $2S/l$  является периодической функцией времени. Даже без исследования дифференциального уравнения (b) можно установить, что при определенных значениях частоты  $\omega$  изменения переменного натяжения могут возникнуть большие колебания массы  $m$ . В этом можно убедиться рассматривая кривые, показанные на рис. 118, б и в. Первая из кривых представляет перемещение массы  $m$ , колеблющейся свободно при постоянном натяжении  $S = S_0$ ,

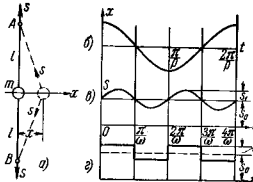


Рис. 118.

так что для полного цикла требуется время  $\tau = 2\pi/p = 2\pi \sqrt{lm/2S_0}$ . Вторая кривая представляет переменное натяжение струны, изменение которого предполагается происходящим с угловой частотой  $\omega = 2p$ . Как видно, за первую четверть цикла, когда масса  $m$  движется от крайнего положения к среднему и силы  $S$  совершают положительную работу, среднее значение  $S$  больше, чем  $S_0$ . Во второй четверти цикла, когда силы  $S$  направлены противоположно направлению движения массы, среднее значение сил меньше, чем  $S_0$ . Таким образом, за каждую половину цикла происходит прибавление положительной работы, совершаемой растягивающими силами  $S$ . В результате этой работы амплитуда колебаний будет постепенно увеличиваться. Это заключение может быть легко проверено экспериментом<sup>\*)</sup>. Кроме того, эксперимент также показывает, что среднее положение перестает быть положением устойчивого равновесия, если поддерживается частота  $\omega = 2p$  изменения растягивающей силы  $S$ . Малая случайная сила, вызывающая начальное перемещение или начальную скорость, может положить начало колебаниям, которые будут затем постепенно возрастать, как это пояснено выше.

На рис. 118, *г* представлен случай, когда натяжение струны изменяется по разрывному закону:

$$S = S_0 \pm S_1. \quad (д)$$

Используя те же соображения, что и в предыдущем случае, можно показать, что представленное на рис. 118, *г* изменение натяжения  $S$  вызовет значительные колебания.

Другой случай подобного рода представлен на рис. 119. Крутящий диск  $AB$  подвешен на вертикальном валу. Вращение вала может происходить свободно, но его изгиб ограничен направляющими стержнями  $лл$ , параллельными плоскости  $xu$  рисунка. Вдоль значительной части длины вал имеет некрутящее поперечное сечение, как показано на рисун

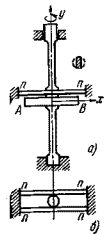


Рис. 119.

ке, так что его изгибная жесткость в плоскости  $xu$  зависит от угла поворота. Положим сначала, что вал не вращается и каким либо способом вызваны его поперечные колебания в плоскости  $xu$ . Диск будет совершать простое гармоническое движение, частот которого зависит от изгибной жесткости вала в этой плоскости. Для изображенного на рисунке положения вала изгибная жесткость мини

мальна, и поэтому поперечные колебания имеют наименьшую частоту. При совпадении плоскости максимальной изгибной жесткости вала с плоскостью  $xu$  получится наибольшая частота колебаний. Далее предположим, что разность между двумя главными жесткостями мала, например не более, чем 10%. Таким образом, разность между наибольшей и наименьшей частотами поперечных колебаний будет так же малой, например не больше 5%.

Предположим теперь, что колеблющийся вал вращается. В таком случае получается колебательная система, коэффициент жесткости которой меняется со временем, совершая один полный цикл изменения за половину оборота вала. Используя соображения того же рода, что и в предыдущем случае, можно показать, что при определенном отношении между угловой скоростью  $\omega$  вала и средним значением  $p$  угловой частоты его свободных поперечных колебаний система будет получать энергию, что приведет к постепенному возрастанию амплитуды поперечных колебаний. В этом можно убедиться рассматривая две кривые, показанные на рис. 120. Верхняя кривая представляет зависимость «перемещение — время» при поперечных колебаниях вала со средней частотой  $p$ . Нижняя кривая представляет переменную изгибную жесткость вала, если вал совершает один оборот за один цикл поперечных колебаний, так что  $\omega = p$ . Внизу рисунка показаны соответствующие положения вращающегося поперечного сечения вала и нейтральная ось  $л$ . Мы видим, что за первую четверть цикла, когда диск движется от крайнего положения к среднему и приложенная к диску реакция вала совершает положительную работу, изгибная жесткость больше, чем ее среднее значение; во второй четверти цикла реакция вала противоположна направлению движения диска и изгибная жесткость меньше ее среднего значения. Замечая, что в любой момент реакция пропорциональна соответствующей изгибной жесткости, можно заключить, что положительная работа, совершаемая за первую четверть цикла, численно больше отрицательной работы, совершаемой за вторую четверть цикла. Это приводит к избытку положительной работы за один оборот вала и создает постепенное возрастание амплитуды поперечных колебаний вала.

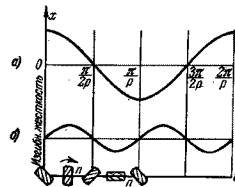


Рис. 120.

Если вал, показанный на рис. 119, расположен горизонтально, то необходимо учесть действие силы тяжести. Если положить, что перемещения, вызванные колебаниями, меньше статических прогибов вала, вызванных силой веса диска, то перемещения диска, измеряемые от

\*) Примером таких колебаний может служить эксперимент Мельде, см Phil. Mag., апрель 1883. В этом эксперименте поперечные колебания тонкой струны поддерживаются путем прикрепления одного из ее концов к колодещному камertonу; направление движения этого конца совпадает с осью струны. Период поперечных колебаний вдвое больше периода колебаний камertonа.



неизогнутой оси вала, будут всегда направлены вниз и могут быть представлены для одного цикла ординатами верхней кривой, измеряемыми от оси  $t$ , на рис. 121, а. На диск действуют две силы: 1) постоянная сила тяжести и 2) переменная реакция вала, которая в нашем случае все время направлена вверх. Работа силы тяжести за цикл равна нулю, и таким образом, необходимо рассмотреть лишь работу реакции вала. За первую половину цикла, когда диск движется вниз, реакция противоположна движению и производит отрицательную работу. Во время второй половины цикла реакция действует в направлении движения и совершает положительную работу. Если, как в предыдущем случае, предположить, что время одного оборота вала равно периоду поперечных колебаний и принять для переменной изгибающей жесткости

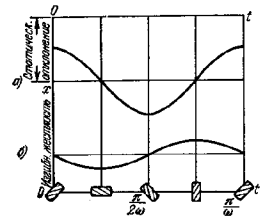


Рис. 121.

сти кривую, изображенную на рис. 120, б, то можно видеть, что полная работа за цикл равна нулю.

Иное заключение будет получено, если взять угловую скорость  $\omega$  вала вдвое меньше, чем частота поперечных колебаний, когда изменение изгибающей жесткости может быть представлено нижней кривой рис. 121. В этом случае в первой половине цикла, когда реакция направлена против движения, изгибная жесткость меньше среднего значения, а во второй половине цикла, когда реакция действует по направлению движения, изгибная жесткость больше, чем среднее значение. Таким образом, произведенная за цикл положительная работа

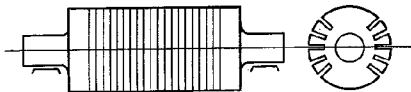


Рис. 122.

вызовет увеличение амплитуд колебаний. Мы видим, что при одновременном влиянии силы тяжести и переменной изгибающей жесткости могут появиться большие поперечные колебания, если число оборотов вала в минуту вдвое меньше числа его свободных поперечных колебаний в минуту. Этот тип колебаний можно наблюдать в роторах имеющих переменную изгибающую жесткость, например в двухполюсном роторе турбогенератора (рис. 122). Прогиб такого ротора от собст-

венного веса изменяется при вращении и вследствие переменной жесткости при определенной скорости могут иметь место значительные колебания. Колебания того же типа могут наблюдаться, когда непостоянство изгибающей жесткости ротора вызывается продольной шпоночной канавкой на валу. При устройстве двух дополнительных канавок, положение которых определяется центральными углами  $\pm 120^\circ$ , измеряемыми от радиуса, соответствующего первой канавке, получается поперечное сечение с одинаковыми моментами инерции во всех направлениях, и поэтому причина колебаний исчезает.

В качестве другого примера рассмотрим простой маятник переменной длины  $l$  (рис. 123). Изменения длины  $l$  маятника могут быть вызваны силой  $S$ , приложенной к нити  $OA$ . Для вывода дифференциального уравнения движения применим закон изменения момента количества движения. Количество движения массы  $W/g$  можно разложить на две составляющие: вдоль нити  $OA$  и перпендикулярно к  $OA$ . Для вычисления момента количества движения относительно точки  $O$  нужно учитывать только вторую составляющую, равную  $(W/g) l \dot{\theta}$ . Производная по времени  $t$  от момента этого количества движения равна моменту действующих сил относительно точки  $O$ . Отсюда получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{W}{g} l^2 \dot{\theta} \right) = - W l \sin \theta,$$

или

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{l} \frac{dl}{dt} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (73)$$

В случае малых колебаний вместо  $\sin \theta$  в уравнении (73) можно принять  $\theta$ , и мы получим:

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{l} \frac{dl}{dt} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (74)$$

Если длина  $l$  постоянна, то второе слагаемое левой части этого уравнения исчезает и уравнение описет простое гармоническое движение, причем  $g/l$  играет роль коэффициента жесткости, разделенного на массу в уравнении (б), стр. 167. Изменение длины, вследствие которого появляется второй член в уравнении (74), может оказать такое же влияние на колебания, как переменная жесткость, рассмотренная в предыдущих примерах. Сравнивая уравнение (74) с уравнением (31), стр. 72 для затухающих колебаний, мы видим, что член, содержащий производную  $dl/dt$ , занимает место члена, представляющего вязкое сопротивление в уравнении (31). При соответствующем

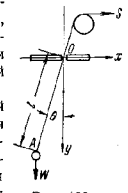


Рис. 123.

изменении во времени длины  $l$  может быть вызван эффект отрицательного затухания. В таком случае вместо рассеяния энергии имеет место прогрессивное накопление энергии в системе и амплитуды колебаний маятника возрастают со временем. Легко видеть, что такое накопление энергии является результатом работы, совершаемой силой натяжения  $S$  при периодических изменениях длины  $l$  маятника. Можно представить себе различные конструктивные способы изменения длины  $l$ , которые приводят к накоплению энергии в колебательной системе.

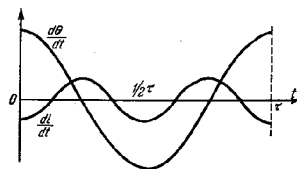


Рис. 124.

маятника и кривая  $d\theta/dt$  так расположена, что наибольший эффект отрицательного затухания совпадает с наибольшей скоростью. Это означает, что длина  $l$  уменьшается при больших скоростях  $d\theta/dt$  и увеличивается при сравнительно малых скоростях. Вспоминая, что сила натяжения  $S$  совершает работу, преодолевая радиальную составляющую веса  $W$  и центробежную силу, легко видеть, что в представленном на рис. 124 случае работа, совершаемая силой  $S$  за время уменьшения длины  $l$ , будет больше, чем при последующем увеличении длины  $l$ . Избыток этой работы вызовет возрастание энергии колебаний маятника.

Определение приращения энергии колеблющегося маятника становится особенно простым в случае, изображенном на рис. 125. Здесь предположено, что длина маятника внезапно уменьшается на величину  $\Delta l$ , когда маятник проходит среднее положение, и внезапно увеличивается на ту же величину в его крайних положениях. Траектория массы  $W/g$  показана на рисунке сплошной линией. Масс

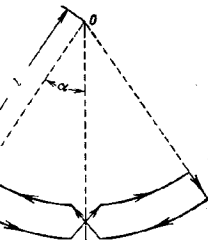


Рис. 125.

В качестве примера рассмотрим случай, представленный на рис. 124, где в функции времени даны угловая скорость  $d\theta/dt$  маятника и скорость  $dl/dt$  изменения длины маятника. Период изменения длины маятника взят равным половине периода свободных колебаний относительно кривой  $dl/dt$ .

совершает два полных цикла колебаний вдоль оси маятника за время одного колебания маятника. Работа, производимая при укорочении длины  $l$  маятника, будет:

$$\left(W + \frac{Wv^2}{g^2 l}\right) \Delta l^* \quad (e)$$

Здесь  $v$  обозначает скорость маятника массы  $W/g$ , когда он находится в среднем положении. Работа, возвращаемая в крайних положениях маятника, равна

$$W \Delta l \cos \alpha. \quad (f)$$

Приращение энергии за одно полное колебание маятника будет:

$$\Delta E = 2 \left\{ \left(W + \frac{Wv^2}{g^2 l}\right) \Delta l - W \Delta l \cos \alpha \right\},$$

или после подстановки

$$v^2 = 2gl(1 - \cos \alpha)$$

оно выразится в виде

$$\Delta E = 6W \Delta l (1 - \cos \alpha). \quad (g)$$

Следствие этого увеличения энергии имеет место прогрессивное возрастание амплитуды колебаний маятника.

В нашем выводе рассматривалось изменение длины маятника. Подобные же результаты могут быть получены, если вместо переменной длины ввести переменное ускорение  $g$ . Это может быть осуществлено установкой электромагнита под грузом маятника. Если за одно полное колебание маятника совершаются два цикла изменения магнитной силы, то за каждое колебание в систему вводится энергия и колебания будут нарастать.

Из сказанного видно, что вертикально подвешенный покоящийся маятник становится неустойчивым под действием переменной вертикальной магнитной силы и могут возникнуть описанные выше колебания, если задано соответствующее изменение этой силы во времени (\*\*). Подобный эффект может быть создан также вертикальными колебаниями точки подвеса маятника. Силы инерции такого вертикального движения эквивалентны описанным выше переменным магнитным силам. То же явление неустойчивости и постепенное нарастание колебаний можно наблюдать при определенных условиях, если вместо переменного коэффициента жесткости колеблющееся тело имеет переменную массу или — в случае крутильных колебаний — момент инерции тела является периодической функцией времени. Возьмем,

\*) В этих выкладках не учтено изменение центробежной силы при укорочении маятника.

\*\*) См. Рэлей, Теория звука § 68а, б.

например, вертикальный вал с перемонленным на его конце маховиком (рис. 126). Свободные крутильные колебания этой системы представляются уравнением

$$\frac{d}{dt}(J\dot{\theta}) + k\theta = 0, \quad (h)$$

где  $J$  — момент инерции маховика и  $k$  — коэффициент жесткости. Положим теперь, что момент инерции  $J$  не остается постоянным, а периодически изменяется во времени вследствие заданного гармонического движения двух симметрично расположенных масс  $m$ , скользящих вдоль спиц (рис. 126, б). В таком случае момент инерции выражается формулой

$$J = J_0(1 + \alpha \sin \omega t), \quad (i)$$

где  $\omega$  — угловая частота заданного движения масс  $m$ ,  $\alpha$  — множитель, который мы будем считать малым по сравнению с единицей, полагая, что имеются лишь малые изменения момента инерции  $J$ . Подставляя это выражение (i) в уравнение (h), можно записать это уравнение в виде:

$$J_0\ddot{\theta} + \frac{J_0\alpha\omega \cos \omega t}{1 + \alpha \sin \omega t} \dot{\theta} + \frac{k}{1 + \alpha \sin \omega t} \theta = 0;$$

замечая, что  $\alpha$  мало, получаем:

$$J_0\ddot{\theta} + J_0\alpha\omega \cos \omega t \dot{\theta} + k(1 - \alpha \sin \omega t)\theta = 0. \quad (j)$$

Таким образом, учет изменений момента инерции приводит к уравнению (j), подобному тем уравнениям, которые были получены выше для системы с переменной жесткостью. Отсюда можно заключить, что при надлежащем выборе частоты  $\omega$  радиально колеблющихся масс  $m$  могут возникнуть большие крутильные колебания системы, показанной на рис. 126. Необходимая для этих колебаний энергия вводится силами, осуществляющими заданное радиальное движение масс  $m$ . Когда массы движутся к оси вала, совершается положительная работа на преодоление центробежных сил. При обратном движении работа отрицательна. Если сообщить массам скорость, направленную к оси вала, когда угловая скорость крутильных колебаний и соответственно центробежные силы велики, и обратное движение — когда центробежные силы малы, то будет создаваться избыток положительной работы, необходимый для нарастания крутильных колебаний. Такие условия показаны на рис. 127, где верхняя кривая представляет угловую скорость  $\dot{\theta}$  колеблющегося маховика, а нижняя — радиальные перемещения  $r$  масс  $m$ . Частота колебаний масс  $m$  вдвое больше частоты крутильных колебаний вала.

Если маховик вала связан с возвратно-поступательно движущейся массой, как показано на рис. 128, то могут иметь место только что упомянутые условия. Если верхний конец вала закреплен и маховик совершает малые крутильные колебания, так что конфигурация системы изменяется весьма мало, то все массы системы можно привести к эквивалентному диску с постоянным моментом инерции (стр. 24).

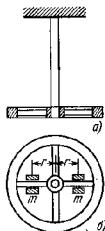


Рис. 126.

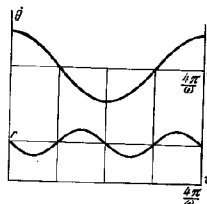


Рис. 127.

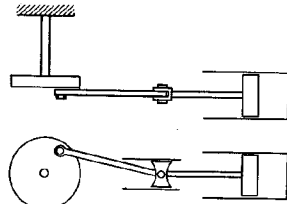


Рис. 128.

Но при вращении вала конфигурация системы периодически меняется и эквивалентному диску следует приписать периодически изменяющийся момент инерции. На основе предыдущего примера можно заключить, что при определенных угловых скоростях вала в системе могут возникнуть значительные крутильные колебания. Эти колебания имеют важное значение для машин с возвратно-поступательно движущимися массами \*).

**29. Условия неустойчивости систем с переменными упругими характеристиками.** — Из примеров предыдущего параграфа можно видеть, что в системах с переменной упругой характеристикой, при соответствующей выбранной частоте  $\omega$  изменения жесткости, могут возникнуть большие колебания. В практических приложениях очень важно знать значения  $\omega$ , при которых могут появиться такие большие колебания. На этот вопрос можно ответить путем исследования соответствующего уравнения движения, которое в общем случае колебаний без демпфирования может быть записано в виде:

$$\ddot{x} + [p^2 + a f(t)] x = 0. \quad (a)$$

\* Эта проблема рассмотрена в следующих работах: E. Trefftz, Aachen-Verträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete, Deurlin, 1930; F. Kluge, Ing.-Arch., т. 2, стр. 119, 1931; T. E. Schunk, Ing.-Arch., т. 2, стр. 591, 1932; R. Grammel, Ing.-Arch., т. 6, стр. 59, 1935 и Z. angew. Math. u. Mech., т. 15, стр. 47, 1935; Н. Е. Кочин, Прикладная математика и механика, т. 2, стр. 3, 1934. См. также С. В. Биезено, R. Grammel, Technische Dynamik. [Русский перевод: К. Бицено, Р. Граммель, Техническая динамика, ГТТИ, т. 2, 1952.]

Здесь член  $af(t)$  представляет периодическую функцию времени, определяющую изменение коэффициента жесткости. В проблемах механических колебаний обычно мы встречаемся с малыми изменениями коэффициента жесткости, и этот член можно считать малым по сравнению с  $p^2$ . Вид функции  $f(t)$  зависит от устройства системы. Два важных случая показаны на рис. 118, а и б, где представлены синусоидальное и прямоугольное изменения. Общее решение уравнения (а) неизвестно, но для наших целей его знать необязательно. Нас интересует лишь, будет ли в данном случае устойчива или неустойчива система, движение которой описано уравнением (а). Чтобы ответить на этот вопрос, нужно предположить, что система находится в среднем положении ( $x=0$ ) и что некоторая дополнительно приложенная сила вызывает малое начальное смещение  $x_0$  и малую начальную скорость  $\dot{x}_0$  и тем самым малые колебания. Если можно показать, что амплитуда этих колебаний неограниченно возрастает со временем, то имеется случай неустойчивости. Если колебания постепенно затухают со временем, то исходное состояние устойчиво. Рассмотрим, например, случай рис. 118, а. Под действием вертикальной переменной силы  $S$  масса  $m$  может оставаться в среднем положении на линии действия силы  $S$ ; но, как мы видели, это положение равновесия становится неустойчивым, если частота изменения силы  $S$  вдвое больше частоты поперечных колебаний системы, нагруженной постоянной силой натяжения. Так как выражение, заключенное в скобки в уравнении (а), представляет периодическую функцию, то допустимо ожидать, что при надлежащем выборе начальных условий можно вызвать такое движение  $x=F(t)$ , что в конце первого цикла ( $t=\tau=2\pi/\omega$ ) будет:

$$(x)_{t=\tau} = s x_0, \quad (\dot{x})_{t=\tau} = s \dot{x}_0. \quad (б)$$

т. е. перемещение и скорость в конце цикла становятся в  $s$  раз большими начальными величинами  $x_0$  и  $\dot{x}_0$ . Рассматривая теперь величины (б) как начальные условия для второго цикла, заключаем, что перемещения во втором цикле получаются умножением на  $s$  перемещений, происходивших в течение первого цикла, т. е.

$$(x)_{t+\tau} = s(x)_t. \quad (с)$$

Тогда в конце второго цикла будет:

$$(x)_{2\tau} = s^2 x_0, \quad (\dot{x})_{2\tau} = s^2 \dot{x}_0. \quad (д)$$

Рассуждая таким же образом дальше, заключаем, что перемещения в любом цикле получаются умножением на  $s$  соответствующих перемещений предыдущих циклов. Следовательно, характер движения определяется значением величины  $s$ . Если абсолютное значение  $s$  меньше единицы, то перемещения будут постепенно исчезать и система устойчива. Если абсолютное значение  $s$  больше единицы, то перемещения имеют тенденцию нарастать со временем; таким образом, в данном случае система неустойчива.

В практических приложениях очень важно определить области, в которых имеет место неустойчивость и могут возникнуть большие колебания. Области неустойчивости можно определить без больших трудностей, если коэффициент жесткости меняется по прямоугольному закону (рис. 118, а), так как для каждой половины цикла коэффициент жесткости остается постоянным и можно воспользоваться уравнением простого гармонического движения. Пусть  $\Delta$  — величина, определяющая изменения жесткости; тогда уравнение движения для первой половины цикла, т. е. для  $0 < t < \pi/\omega$ , будет:

$$\ddot{x} + (p^2 + \Delta)x = 0. \quad (е)$$

и для второй половины цикла, когда  $\pi/\omega < t < 2\pi/\omega$ :

$$\ddot{x} + (p^2 - \Delta)x = 0. \quad (ф)$$

Используя обозначения:

$$p_1 = \sqrt{p^2 + \Delta} \quad \text{и} \quad p_2 = \sqrt{p^2 - \Delta}, \quad (г)$$

напишем решения уравнений (е) и (ф) в виде:

$$x_1 = C_1 \sin p_1 t + C_2 \cos p_1 t, \quad (h)$$

$$x_2 = C_3 \sin p_2 t + C_4 \cos p_2 t, \quad (и)$$

где  $C_1, \dots, C_4$  — постоянные интегрирования, которые следует определить из следующих условий:

1) В конце первой половины цикла ( $t = \pi/\omega$ ) решения (h) и (и) должны совпадать, т. е. в этот момент оба решения должны дать одинаковые значения для перемещения и скорости.

2) В конце всего цикла ( $t = 2\pi/\omega$ ) перемещение и скорость соответственно условию (с) должны быть в  $s$  раз больше, чем в начале. Таким образом, условия для определения четырех постоянных имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} (x_1)_{t=\pi/\omega} &= (x_2)_{t=\pi/\omega}, \\ (\dot{x}_1)_{t=\pi/\omega} &= (\dot{x}_2)_{t=\pi/\omega}, \\ (x_2)_{t=2\pi/\omega} &= s(x_1)_{t=0}, \\ (\dot{x}_2)_{t=2\pi/\omega} &= s(\dot{x}_1)_{t=0}. \end{aligned} \right\} \quad (ж)$$

Подставляя выражения для  $x_1$  и  $x_2$  (h) и (и), получим первое уравнение (ж):

$$C_1 \sin \frac{\pi p_1}{\omega} + C_2 \cos \frac{\pi p_1}{\omega} - C_3 \sin \frac{\pi p_2}{\omega} - C_4 \cos \frac{\pi p_2}{\omega} = 0.$$

Подобную же форму будут иметь и остальные три уравнения системы (ж), так что всего получится четыре однородных уравнения для определения  $C_1, \dots, C_4$ . Эти уравнения могут дать отличные от нуля решения для  $C_i$ , только если определитель системы равен нулю. Развертывая этот определитель и приравняв его нулю, получим квадратное уравнение для  $s$ :

$$s^2 - 2s \left( \cos \frac{\pi p_1}{\omega} \cos \frac{\pi p_2}{\omega} - \frac{p_1^2 + p_2^2}{2p_1 p_2} \sin \frac{\pi p_1}{\omega} \sin \frac{\pi p_2}{\omega} \right) + 1 = 0. \quad (к)$$

Введя обозначение

$$N = \cos \frac{\pi p_1}{\omega} \cos \frac{\pi p_2}{\omega} - \frac{p_1^2 + p_2^2}{2p_1 p_2} \sin \frac{\pi p_1}{\omega} \sin \frac{\pi p_2}{\omega}, \quad (л)$$

получим:

$$s^2 - 2sN + 1 = 0,$$

откуда

$$s = N \pm \sqrt{N^2 - 1}. \quad (м)$$

Как мы замечаем, значение множителя  $s$  зависит от величины  $N$ . Если  $N > 1$ , то один из корней уравнения (л) больше единицы и колебания будут постепенно нарастать, следовательно, движение неустойчиво.

Когда  $N$  лежит между  $+1$  и  $-1$ , корни уравнения (л) комплексны, причем их модуль равен единице. Это означает, что колебания не будут иметь тенденцию к нарастанию и движение устойчиво.

Когда  $N < -1$ , один из корней уравнения (м) вновь становится по абсолютному значению больше единицы; соответственно движение становится неустойчивым.

Выясним теперь физический смысл того факта, что множитель  $\rho$  положителен при  $N > 1$  и отрицателен при  $N < -1$ . Рассматривая перемещение колеблющейся системы в конце нескольких последовательных циклов изменения жесткости, находим из выражения (с), что при положительном  $s$  эти перемещения возрастают и имеют все время один и тот же знак. Это означает, что колебания системы имеют ту же частоту, что и частота изменения жесткости  $\omega$ , или кратную ей. Если обозначить частоту колебаний системы через  $\omega_0$ , то для  $N > 1$  будет  $\omega_0 = \omega$  или  $\omega_0 = 2\omega$ ,  $\omega_0 = 3\omega$  и т. д. Если  $s$  отрицательно, то перемещения в конце последовательных циклов изменения жесткости имеют чередующиеся знаки, и тогда  $\omega_0 = \omega/2$ ,  $\omega_0 = 3\omega/2$  и т. д.

Величина  $N$ , определяемая выражением (1), есть функция отношений  $p_1/\omega$  и  $p_2/\omega$ . Используя обозначения (g), мы можем представить ее в функции отношений  $\Delta/p^2$  и  $p/\omega$ . Первое из этих отношений дает относительное изменение жесткости, а второе есть отношение частоты колебаний системы  $s$  к постоянной жесткостью  $k$  к частоте колебаний жесткости. Если принять значения  $p^2/\omega^2$  за абсциссы, а значения  $(\Delta/p^2) (p^2/\omega^2)$  — за ординаты, то для любой пары значений  $\Delta/p^2$  и  $p^2/\omega^2$  можно определить на плоскости точку и вычислить соответствующее значение  $N$ . Если такие вычисления выполнены для значительного числа точек, то можно провести кривые, определяющие переход от устойчивого к неустойчивому состоянию движения. Некоторые кривые этого вида показаны на рис. 129\*, где заштрихованные участки представляют области, в которых  $-1 < N < 1$  (устойчивость), а чистые участки — области, в которых  $N > 1$  или  $N < -1$  (неустойчивость). Сплошные линии соответствуют  $N = +1$ , а штриховые линии  $N = -1$ . Числа, помещенные на областях неустойчивости, показывают число циклов колебаний системы за один цикл  $t = 2\pi/\omega$  изменения жесткости.

Для данного отношения  $\Delta/p^2$ , т. е. для определенного значения относительного изменения жесткости, ординаты пропорциональны абсциссам; получается прямая линия, например  $OA$  на рис. 129. При перемещении вдоль этой линии последовательно пересекаются области устойчивого и неустойчивого движения; это значит, что устойчивость движения меняется в зависимости от частоты изменения жесткости  $\omega$ . Когда  $\omega$  мало, то на линии  $OA$  получаются точки пересечения далеко от начала  $O$ . По мере постепенного увеличения  $\omega$  система проходит через бесконечное число областей неустойчивости. Наконец, когда  $p/\omega$  приближается к началу, то пересекаются последние две области неустойчивости  $aa'$  и  $bb'$ ; одна, в которой отношение  $p/\omega$  приблизительно равно единице, и другая, в которой  $p/\omega$  составляет приблизительно  $1/2$ . Экспериментальные исследования, относящиеся к описанным в предыдущем параграфе случаям, показывают, что практически наиболее важны эти две области неустойчивости и что значительные колебания можно ожидать тогда, когда частота изменения жесткости совпадает с собственной частотой колебаний\*\* или вдвое больше ее. Из рисунка видно, что определяемая отрезками  $aa'$  и  $bb'$  ширина областей неустойчивости уменьшается при уменьшении наклона прямой  $OA$ , т. е. при уменьшении относительного изменения жесткости. Практически это уменьшение может быть достигнуто в случае крутильных колебаний введением упругой

муфты. Таким способом общая податливость системы увеличивается и относительное изменение жесткости становится меньше\*).

Другим важным фактором является, конечно, демпфирование. Во всех наших рассуждениях оно было исключено из рассмотрения, и поэтому мы

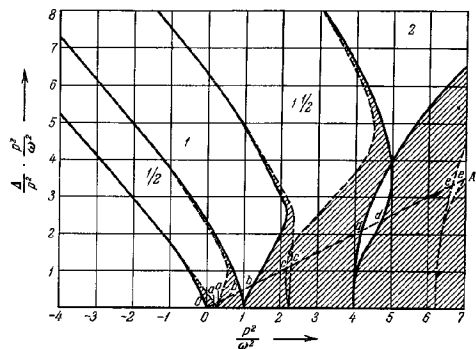


Рис. 129.

теоретически не смогли установить верхнего предела для амплитуды постепенно нарастающих колебаний. Практически этот предел зависит от интенсивности сил сопротивления, и поэтому, вводя некоторое дополнительное трение в упругую муфту, можно значительно уменьшить колебания\*\*).

На рис. 130 показаны результаты исследования уравнения (а) для случая изменения жесткости по синусоидальному закону  $\Delta \sin \omega t$ \*\*\*). Как видно,

\*) [Последние две фразы содержат, очевидно, ошибочное рассуждение. При уменьшении средней жесткости системы относительное изменение жесткости становится большим и ширина областей неустойчивости увеличивается, а не уменьшается.]

\*\*\*) [Сказанное не вполне точно определяет роль сил неупругого сопротивления. Так, вязкое сопротивление несколько уменьшает области неустойчивости, но не способно ограничить нарастания амплитуд колебаний. Ограничение амплитуд может быть достигнуто лишь введением нелинейных элементов. См. В. В. Болотин, Динамическая устойчивость упругих систем, ГТТИ, М., 1957.]

\*\*\*\*) Первое исследование этого случая выполнено Ван-дер-Полем: см. цитированную на стр. 178 работу, а также Е. Л. Инсе, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, т. 52, стр. 355—433, 1931—1932. [В действительности первое исследование выполнено Н. М. Беляевым в 1924 г. (Устойчивость призматических стержней под действием переменных сил, Сборник «Инженерные сооружения и строительная механика», Л., изд. «Путь», 1924).]

\*) См. В. van der Pol, Phil. Mag., сер. 7, т. 5, стр. 18, 1928; E. Schweglin, Z. tech. Phys., т. 12, стр. 104, 1931.

\*\*\*) Вычисленной в предположении среднего значения жесткости за цикл.

границы областей устойчивости и неустойчивости сходны с границами, найденными для случая прямоугольного изменения жесткости. Кривыми показаны экспериментальные результаты, найденные Х. Нейцгером\*, исследовавшим границы областей неустойчивости при помощи маятника специальной конструкции. Мы видим хорошее соответствие экспериментальных результатов с теорией.

В более общем случае, когда изменение жесткости имеет более сложную форму, для вычисления границ областей неустойчивости можно воспользоваться приближенным методом, который основан на следующих соображениях. В пределах любой области неустойчивости, например, области *aa* на рис. 129, численное значение множителя *S* в соотношении (с) больше единицы, так что колебания оказываются возрастающими; на границах области численное значение становится равным единице и возникает возможность установившегося движения с постоянными амплитудами. Поэтому при произвольном заданном законе изменения жесткости мы можем, исходя из некоторого предположенного движения системы, определить

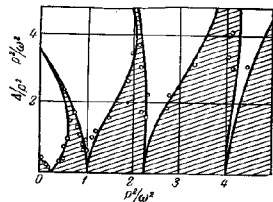


Рис. 130.

при каких значениях частоты  $\omega$  оно становится установившимся периодическим движением. Эти значения определяют границы областей неустойчивости.

Такой метод был применен для исследования колебаний электровозов со спарниками\*\* (рис. 131). Жесткость упругой связи между двумя

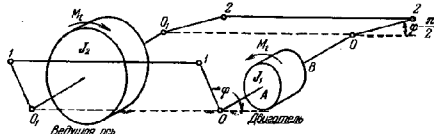


Рис. 131.

вращающимися массами — двигателя и ведущей оси, зависит от углового положения колес, и выражение в скобках уравнения (а) может быть пред-

\* См. Akust. Z., т. 5, стр. 11—26, 1940.

\*\* Эта проблема имела большую практическую важность в раннем периоде развития конструкции электровозов. Ее решение было дано в основном проф. Е. Мейснером (см. Schweiz. Bauzeitung, т. 72, стр. 95, 1918) и его учеником К. Мюллером (см. Schweiz. Bauzeitung, т. 74, стр. 141, 1919). См. также статьи: L. Dreifuss, A. Föppel zum siebzehnten Geburtstag, стр. 89, 1924; A. Wichert, Forschungsarbeiten, № 266, 1924; A. C. Cowenhoven, Forschungsarbeiten, № 218, 1919; E. Scherwin, Z. tech. Phys., т. 10, стр. 37, 1929.

ставлено в виде:

$$\frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \left[ \frac{a - b \cos 4\omega t}{c - d \cos 4\omega t} \right]^2, \quad (n)$$

так что податливость системы совершает четыре цикла изменения за один оборот двигателя. Если *a* и *c* велики сравнительно с *b* и *d*, то можно пренебречь периодическими членами в выражении (n) и получить обычные круглые колебания, рассмотренные в § 2. В общем же случае границы области неустойчивости, границы которых можно установить описанным выше способом.

Точки, лежащие слева от начала координат на рис. 129, соответствуют отрицательным коэффициентам жесткости. Такую упругую характеристику можно получить для маятника. Для висючего маятника коэффициент жесткости определяется величиной  $g/l$ , где *l* — эквивалентная длина маятника. В случае перевернутого маятника (рис. 132) коэффициент жесткости определяется величиной  $-g/l$ . Мы знаем, что это положение равновесия неустойчиво. Колебания жесткости могут быть введены заданием вертикальных колебаний точки опоры *A* (см. стр. 174). В таком случае для определенных частот этих колебаний можно получить условия устойчивости, как показано вельшой заштрихованной площадью слева от начала координат на рис. 129. Таким образом, этот маятник остается устойчивым в перевернутом положении.



Рис. 132.

Колебания с демпфированием. В качестве пример возьмем случай, когда неупругое сопротивление пропорционально скорости и жесткость меняется по синусоидальному закону с периодом  $\pi/\omega$ . Дифференциальное уравнение движения в этом случае

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + (p^2 - 2\alpha \sin 2\omega t)x = 0. \quad (o)$$

Когда  $\alpha = 0$ , это уравнение совпадает с уравнением (31), стр. 72, для свободных колебаний с линейным демпфированием. Из предыдущего параграфа мы знаем, что в данном случае можно ожидать установившиеся колебания, период которых вдвое больше периода изменения жесткости. Исследуем теперь, при каких условиях возможно такое установившееся движение. Движение не будет простым гармоническим колебанием, но мы можем представить его в виде ряда с периодом  $2\pi/\omega$ :

$$x = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t + A_3 \sin 3\omega t + B_3 \cos 3\omega t + A_5 \sin 5\omega t + \dots \quad (p)$$

и использовать метод последовательных приближений\*\*).

Подставляя ряд (p) в уравнение (o) и приравнявая нулю коэффициенты при  $\sin \omega t$ ,  $\cos \omega t$  и т. д., получаем:

$$\left. \begin{aligned} A_1(p^2 - \omega^2) - 2\omega B_1 - \alpha B_1 + \alpha B_3 &= 0, \\ B_1(p^2 - \omega^2) + 2\omega A_1 - \alpha A_1 - \alpha A_3 &= 0, \\ A_3(p^2 - 9\omega^2) - 6\omega B_3 - \alpha B_1 + \alpha B_5 &= 0, \\ B_3(p^2 - 9\omega^2) + 6\omega A_3 + \alpha A_1 - \alpha A_5 &= 0, \\ A_5(p^2 - 25\omega^2) - 10\omega B_5 - \alpha B_3 + \alpha B_7 &= 0, \\ B_5(p^2 - 25\omega^2) + 10\omega A_5 + \alpha A_3 - \alpha A_7 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (q)$$

Эти уравнения показывают, что коэффициенты  $A_3$ ,  $B_3$  имеют порядок  $\alpha$  относительно  $A_1$ ,  $B_1$ ; коэффициенты  $A_5$ ,  $B_5$  имеют порядок  $\alpha^2$  относительно

\* [ $J_1$ ,  $J_2$  — моменты инерции двигателя и ведущей оси соответственно,  $\omega$  — угловая скорость вращения двигателя.]

\*\* Такой способ исследования был применен Рэлеем. См. цитированную работу, § 68 б.

$A_3$ ,  $B_3$  и т. д. Таким образом, если  $\alpha$  мало, то ряд (р) быстро сходится. Первое приближение получается при сохранении лишь первых двух членов ряда. Опуская  $A_3$  и  $B_3$  в первых двух уравнениях (q), находим:

$$\left. \begin{aligned} A_1 (p^2 - \omega^2) - (2n\omega + \alpha) B_1 &= 0, \\ A_1 (2n\omega - \alpha) + (p^2 - \omega^2) B_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (r)$$

Эти уравнения дадут для  $A_1$  и  $B_1$  решения, отличные от нуля, только в том случае, если обращается в нуль определитель системы, откуда

$$(p^2 - \omega^2)^2 - \alpha^2 - 4n^2\omega^2. \quad (s)$$

Таким образом, если известна величина  $\alpha$ , определяющая изменения жесткости, из уравнения (s) можно найти частоту  $\omega$ , при которой возможно установившееся движение:

$$\omega = \sqrt{p^2 - 2n^2 \pm \sqrt{(p^2 - 2n^2)^2 + \alpha^2 - p^4}}. \quad (t)$$

Из уравнений (r) имеем также

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{2n\omega + \alpha}{p^2 - \omega^2} = \frac{p^2 - \omega^2}{\alpha - 2n\omega}. \quad (u)$$

Тогда первые два члена ряда, представляющих первое приближение для закона движения, можно представить в следующем виде:

$$x_1 = C \sin(\omega t + \beta),$$

где

$$C = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \quad \text{и} \quad \beta = \arctg \frac{B_1}{A_1}. \quad (v)$$

Амплитуда колебаний остается неопределенной, тогда как фазовый угол  $\beta$  можно вычислить из выражения (v). При отсутствии демпфирования  $2n = 0$ , и мы получаем:

$$\omega = p \sqrt{1 \pm \frac{\alpha}{p^2}} \approx p \left( 1 \pm \frac{\alpha}{2p^2} \right). \quad (w)$$

Эти два значения  $\omega$  соответствуют двум границам первой области неустойчивости, подобным точкам  $a$ ,  $a$  на рис. 129. Уравнение (s) требует, чтобы  $\alpha$  было не менее, чем  $2n\omega$ . Если  $\alpha < 2n\omega$ , то энергии оказывается недостаточно для поддержания движения. Для  $\alpha = 2n\omega$

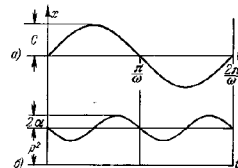


Рис. 133.

получим  $\omega = p$ , т. е. частота изменения жесткости точно вдвое больше частоты свободных колебаний системы без демпфирования, коэффициент жесткости которой определяется величиной  $p$ . Фазовый угол  $\beta$ , как можно видеть из (u) и (v), в данном случае равен нулю и движение согласуется с изменением жесткости так, как это показано на рис. 133,  $a$  и  $b$ . Если  $\alpha > 2n\omega$ , то из (t) получаются два решения для  $\omega$ , а из (v) соответственные фазовые углы. Если  $\alpha$  значительно больше  $2n\omega$ , то отношение  $A_1/B_1$  в уравнении (u) приближается к единице

вой рис. 133,  $a$ , т. е. жесткость была максимальной или минимальной в моменты, когда система проходит через положение равновесия.

Если необходимо второе приближение, то при помощи третьего и четвертого из уравнений (q) при малом затухании имеем приближенно:

$$A_3 = \frac{\alpha B_1}{p^2 - 9\omega^2}, \quad B_3 = -\frac{\alpha A_1}{p^2 - 9\omega^2}. \quad (x)$$

Таким образом, второе приближение для движения имеет вид:

$$x = C \sin(\omega t + \beta) + \frac{\alpha C}{p^2 - 9\omega^2} \cos(3\omega t + \beta). \quad (y)$$

Подставляя выражения (x) в первые два уравнения (q), находим следующее более точное уравнение для определения значений  $\omega$ , при которых возможно установившееся движение:

$$\left( p^2 - \omega^2 - \frac{\alpha^2}{p^2 - 9\omega^2} \right)^2 = \alpha^2 - 4n^2 p^2, \quad (z)$$

и для фазового угла

$$\operatorname{tg} \beta = \left( p^2 - \omega^2 - \frac{\alpha^2}{p^2 - 9\omega^2} \right) \div (\alpha + 2n\omega).$$

Таким образом, применяя описанный метод последовательных приближений, можно установить границы областей неустойчивости, исследовать, как эти границы зависят от величины демпфирования, и определить фазовый угол  $\beta$ . Все эти сведения имеют практический интерес при исследовании колебаний, связанных с изменением жесткости.

Так называемый двойной маятник, показанный на рис. 134, б, состоит из двух масс  $m_1$  и  $m_2$ , связанных между собой жестким невесомым стержнем  $l_2$  и подвешенных к потолку при помощи другого жесткого невесомого стержня  $l_1$ . Если массы могут перемещаться только в плоскости  $xy$ , то их положения в этой плоскости могут быть определены прямоугольными координатами  $x_1$ ,  $y_1$  и  $x_2$ ,  $y_2$ . Однако эти четыре координаты не являются независимыми; из рисунка видно, что

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= l_1^2, \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= l_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Такие уравнения, которые представляют геометрические соотношения между координатами системы, называются *уравнениями связей*. Так как имеются четыре координаты и относящиеся к ним два уравнения связей, то независимы только *две* координаты. Например, мы можем произвольно выбрать  $x_1$  и  $x_2$  и затем из уравнений (а) найти  $y_1$  и  $y_2$ . Таким образом, система имеет только две степени свободы, так как для полного описания конфигурации системы необходимы только две независимые координаты. В общем случае, если имеется  $j$  координат и  $k$  уравнений связей, то число степеней свободы равно

$$n = j - k. \quad (b)$$

Вместо координат  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $x_2$ ,  $y_2$  конфигурацию двойного маятника (рис. 134, б) можно определить углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , которые стержни составляют с вертикалью. Эти две независимые координаты полностью определяют конфигурацию системы. Выбирая координаты  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , можно через них легко выразить прямоугольные координаты:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \varphi_1, & y_1 &= l_1 \cos \varphi_1, \\ x_2 &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2, & y_2 &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Если массы  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 134, б) не обязательно остаются в плоскости  $xy$ , то система представляет собой *двойной сферический маятник*. В таком случае имеется шесть прямоугольных координат  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  и  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$  и два уравнения связей:

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= l_1^2, \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= l_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Таким образом, двойной сферический маятник является системой с *четырьмя* степенями свободы.

На рис. 134, в показана жесткая балка, опертая концами на пружины  $k_1$  и  $k_2$ . Предполагая, что система остается в вертикальной плоскости чертежа и что точка  $G$  может двигаться только по вертикали, можно определить положение балки в ее плоскости показанными на

## ГЛАВА III СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

### 30. Примеры систем с несколькими степенями свободы.

Во всех предыдущих примерах мы имели дело только с системами, которые можно было трактовать как простую массу, прикрепленную невесомой пружиной к основанию. При этом для описания конфигурации системы была необходима только одна координата, и система имела *одну степень свободы*. Иногда встречаются системы, которые содержат несколько масс, связанных между собой и с основанием упругими элементами. Тогда для определения конфигурации необходимо несколько координат и система имеет *несколько степеней свободы*. Число степеней свободы всегда

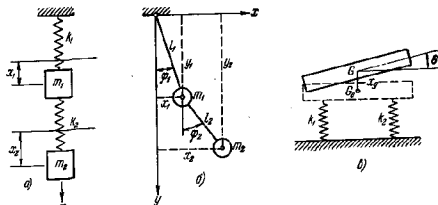


Рис. 134.

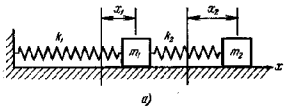
определяется числом независимых координат, необходимых для полного определения конфигурации системы. В простейших случаях рассматриваемые здесь системы имеют две степени свободы.

Несколько примеров показано на рис. 134. На рис. 134, а две массы  $m_1$  и  $m_2$  вертикально подвешены на пружинах  $k_1$  и  $k_2$ . Если эти массы имеют возможность перемещаться только по вертикали и перемещения  $x_1$  и  $x_2$  измеряются от изобразенного положения равновесия, то две координаты полностью определяют конфигурацию системы; таким образом, она имеет две степени свободы.



чертеже координатами  $x_1$  и  $\theta$ . Эти две координаты независимы, так что система имеет две степени свободы.

При рассмотрении колебаний систем с несколькими степенями свободы нужно записать столько дифференциальных уравнений движения, сколько имеется независимых координат. Тогда нашей основной задачей явится построение общего решения такой системы дифференциальных уравнений. Ниже мы рассмотрим различные частные случаи. Начнем с простейшего случая свободных колебаний системы с двумя степенями свободы.



а)

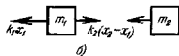


Рис. 135.

коэффициенты жесткости  $k_1$  и  $k_2$ . Примем за координаты перемещения  $x_1$  и  $x_2$  этих масс от положения статического равновесия, соответствующего отсутствию напряжений в пружинах. Тогда при движении действие пружин на массы будет таким, как показано на рис. 135, б, и уравнения движения для масс  $m_1$  и  $m_2$  получают вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1), \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1). \end{cases} \quad (a)$$

Чтобы упростить эти уравнения, введем обозначения:

$$\frac{k_1 + k_2}{m_1} = a, \quad \frac{k_2}{m_1} = b, \quad \frac{k_2}{m_2} = c. \quad (b)$$

Тогда уравнения (а) примут вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + ax_1 - bx_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 - cx_1 + cx_2 = 0. \end{cases} \quad (c)$$

Как видно, они представляют собой дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Принимая частное решение уравнений (с) в виде:

$$\begin{cases} x_1 = A \sin(pt + \alpha), \\ x_2 = B \sin(pt + \alpha), \end{cases} \quad (d)$$

и подставляя его в (с), получаем:

$$\begin{cases} -Ap^2 \sin(pt + \alpha) + aA \sin(pt + \alpha) - bB \sin(pt + \alpha) = 0, \\ -Bp^2 \sin(pt + \alpha) - cA \sin(pt + \alpha) + cB \sin(pt + \alpha) = 0. \end{cases} \quad (e)$$

Мы видим, что предположенные решения (d) могут удовлетворить дифференциальным уравнениям (с) для всех значений времени  $t$ , если удовлетворяются алгебраические уравнения:

$$\begin{cases} A(a - p^2) - Bb = 0, \\ -Ac + B(c - p^2) = 0. \end{cases} \quad (f)$$

Одно очевидное решение этих уравнений  $A = B = 0$  попросту определяет условия равновесия системы и ничего не говорит нам о ее колебаниях. Уравнения (f) могут дать для  $A$  и  $B$  отличные от нуля решения лишь если равен нулю определитель системы (f):

$$(a - p^2)(c - p^2) - bc = 0, \quad (g)$$

или

$$p^4 - (a + c)p^2 + c(a - b) = 0. \quad (h)$$

Это квадратное уравнение относительно  $p^2$  называется *частотным уравнением* системы; его корни

$$p_{1,2}^2 = \frac{a+c}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - c(a-b)} \quad (i)$$

можно также записать в виде:

$$p_{1,2}^2 = \frac{a+c}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + bc}. \quad (j)$$

Заметив, что входящее в (j) подкоренное выражение всегда положительно, заключаем, что оба корня  $p_1^2$  и  $p_2^2$  действительны. Далее, из обозначений (b) видно, что разность  $a - b$  положительна и, следовательно, значение радикала в выражении (i) всегда меньше, чем  $1/2(a + c)$ , и оба корня *положительны*. Таким образом, оба корня всегда действительны и положительны, и мы получаем две угловые частоты  $p_1$  и  $p_2$  со знаками плюс и минус. Для практических целей мы должны рассматривать только положительные значения  $p_1$  и  $p_2$ .

Возвращаясь теперь к уравнениям (f), мы видим, что найти значения  $A$  и  $B$  нельзя, можно определить только их отношение

$$\frac{A}{B} = \frac{b}{a - p^2} \quad \text{или} \quad \frac{A}{B} = \frac{c - p^2}{c}.$$

Для  $p^2 = p_1^2$  или  $p^2 = p_2^2$  оба эти отношения равны друг другу согласно уравнению (g). Подставляя для  $p^2$  значения (i), мы получим

два разных значения отношения амплитуд, а именно:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{b}{a-p_1^2} = \frac{c-p_1^2}{c} = \frac{1}{\lambda'}, \quad (k)$$

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{b}{a-p_2^2} = \frac{c-p_2^2}{c} = \frac{1}{\lambda''}. \quad (l)$$

Таким образом, хотя амплитуды  $A$  и  $B$  являются искомыми, их отношение может иметь только два определенных значения ( $k$  или  $l$ ). Эти отношения зависят только от физических постоянных  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , определяемых формулами (b).

Фазовые углы  $\alpha$  могут быть любыми, так что частное решение (d) может иметь следующие две формы:

$$x_1' = A_1 \sin(p_1 t + \alpha'), \quad x_2' = \lambda' A_1 \sin(p_1 t + \alpha'), \quad (m)$$

$$x_1'' = A_2 \sin(p_2 t + \alpha''), \quad x_2'' = \lambda'' A_2 \sin(p_2 t + \alpha''). \quad (n)$$

Используя формулы (j), мы видим, что

$$a - p_1^2 = \frac{a-c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + bc} > 0,$$

$$a - p_2^2 = \frac{a-c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + bc} < 0.$$

Отсюда заключаем, что отношение амплитуд  $\lambda' > 0$ , а отношение амплитуд  $\lambda'' < 0$ . Таким образом, когда система совершает колебания с частотой  $p_1$ , как это представлено частным решением (m) массы  $m_1$  и  $m_2$  движутся все время в одной фазе, как схематически

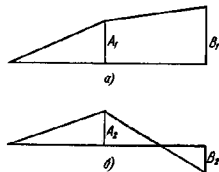


Рис. 136.

показано на рис. 136, а. Когда система совершает колебания с частотой  $p_2$ , что представлено частным решением (n), массы движутся все время со сдвигом фазы  $180^\circ$ , как показано на рис. 136, б. Такие колебания называются *главными колебаниями*, а соответствующие формы — *нормальными формами*. Форма, изображенная на рис. 136, а, и соответствующая ей частота  $p_1$ , называется *первой формой*, а изображенная на рис. 136, б, соответствующая высшей частоте  $p_2$ , называется *второй формой*.

Из выражений (m) и (n) видно, что главные колебания системы являются гармоническими колебаниями. После каждого интервала времени, равного  $2\pi/p_1$  для первой формы и  $2\pi/p_2$  для второй формы, система вновь имеет ту же конфигурацию и те же скорости. Массы дважды за каждый цикл проходят через положения рав-

новесия, обе массы достигают своих крайних положений одновременно, и их перемещения находятся все время в постоянном отношении.

Общее решение уравнений (c) может быть получено сложением двух частных решений (m) и (n), представляющих главные колебания. Таким образом, получим:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(p_1 t + \alpha') + A_2 \sin(p_2 t + \alpha''), \\ x_2 &= \lambda' A_1 \sin(p_1 t + \alpha') + \lambda'' A_2 \sin(p_2 t + \alpha''). \end{aligned} \right\} \quad (o)$$

Это общее решение содержит четыре произвольные постоянные  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\alpha'$  и  $\alpha''$ , которые должны быть выбраны так, чтобы удовлетворить начальным условиям движения, а именно:

$$\left. \begin{aligned} (x_1)_{t=0} &= (x_1)_0, & (x_2)_{t=0} &= (x_2)_0, \\ (\dot{x}_1)_{t=0} &= (\dot{x}_1)_0, & (\dot{x}_2)_{t=0} &= (\dot{x}_2)_0. \end{aligned} \right\} \quad (p)$$

Следует заметить, что уравнения (o) представляют сложное движение, которое не является периодическим, если только главные частоты  $p_1$  и  $p_2$  случайно не оказались соизмеримыми. Система совершает чисто гармоническое движение лишь при условии, что в исходном положении ей была задана одна из главных форм.

Рассматривая, как и выше, любую систему с двумя степенями свободы, мы всегда будем получать подобное частотное уравнение, квадратичное относительно  $p^2$ , которое обычно будет иметь два различных действительных положительных корня. Для каждого из этих двух корней получится определенное отношение амплитуд двух соответствующих координат. Эти отношения амплитуд определяют две нормальные формы свободных колебаний системы, подобные представленным на рис. 136. Сложение в надлежащих пропорциях этих нормальных форм представит общий случай свободных колебаний.

Если случится так, что оба корня частотного уравнения равны, то мы найдем, что амплитудные отношения  $\lambda'$  и  $\lambda''$  также одинаковы и обе главные формы колебаний совпадают. В этом случае общее решение (o) можно представить в форме:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= C \sin(pt + \beta'), \\ x_2 &= D \sin(pt + \beta''), \end{aligned} \right\} \quad (q)$$

где  $C$ ,  $D$ ,  $\beta'$  и  $\beta''$  — новые постоянные.

В качестве примера такой системы рассмотрим массу  $m$ , прикрепленную к верхнему концу тонкого вертикального стержня постоянного круглого поперечного сечения (рис. 137). При любом малом перемещении  $\delta$  этой массы, определяемом координатами  $x$  и  $y$ , создаваемая стержнем восстанавливающая сила равна  $k\delta$  и направлена к положению равновесия  $O$ . Раскладывая эту силу по осям  $x$  и  $y$ ,

получим уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx, \\ m\ddot{y} &= -ky. \end{aligned} \right\} \quad (r)$$

Сравнивая эти выражения с уравнениями (а), заключаем, что в этом случае

$$a = \frac{k}{m}, \quad b = 0, \quad c = \frac{k}{m},$$

и корни частотного уравнения (i) равны

$$p_{1,2}^2 = \frac{k}{m} \mp 0,$$

т. е.  $p_1 = p_2 = \sqrt{k/m}$ .

В частных случаях может оказаться, что один из корней частотного уравнения обращается

в нуль. Рассмотрим, например, вал с двумя дисками (рис. 138). Если определить конфигурацию этой системы углами поворота  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  дисков вокруг горизонтальной оси вала, то угол закручивания вала равен  $\varphi_2 - \varphi_1$ . Тогда, обозначая через  $k_t$

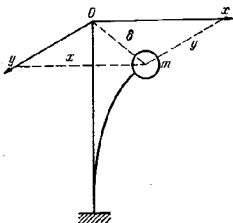


Рис. 137.



Рис. 138.

коэффициент крутильной жесткости вала, получим уравнения движения дисков:

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 &= k_t (\varphi_2 - \varphi_1), \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 &= -k_t (\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \right\} \quad (s)$$

Сравнивая (s) с уравнениями (а), мы видим, что в этом случае

$$a = \frac{k_t}{J_1}, \quad b = \frac{k_t}{J_1}, \quad c = \frac{k_t}{J_2}$$

и корни частотного уравнения

$$p_{1,2}^2 = \frac{J_1 + J_2}{2J_1 J_2} k_t \mp \sqrt{\left(\frac{J_1 - J_2}{2J_1 J_2}\right)^2 k_t^2}.$$

Таким образом,  $p_1^2 = 0$  и  $p_2^2 = \frac{(J_1 + J_2)k_t}{J_1 J_2}$ . В данном случае корень  $p_1 = 0$  попросту означает, что одно из возможных движений системы есть вращение твердого тела вокруг оси вала.

В рассмотренном на рис. 137 примере мы выбрали за координаты перемещения  $x_1$  и  $x_2$  двух масс и получили далее два дифференциальных уравнения (а), каждое из которых содержит обе неизвестные  $x_1$  и  $x_2$ . Надлежащим выбором координат всегда можно свести задачу к двум дифференциальным уравнениям, каждое из которых содержит только одну неизвестную величину и может быть решено независимо от другого. Координаты, удовлетворяющие этому условию, называются *главными координатами*. Для иллюстрации такой возможности вновь рассмотрим случай, представленный на рис. 135. Вместо определения конфигурации системы перемещениями  $x_1$  и  $x_2$  мы можем получить любую конфигурацию наложением двух главных колебаний, представленных на рис. 136 и данных формулами (m) и (n). Перемещения, отвечающие нижней форме колебаний, можно определить через перемещение  $\varphi_1$  массы  $m_1$ . Тогда

$$x_1' = \varphi_1, \quad x_2' = \frac{a - p_1^2}{b} \varphi_1. \quad (t)$$

Таким же образом перемещения, соответствующие высшей форме колебаний, можно определять через перемещение  $\varphi_2$  массы  $m_2$ :

$$x_1'' = \varphi_2, \quad x_2'' = \frac{a - p_2^2}{b} \varphi_2. \quad (u)$$

Величины  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  могут быть приняты за новые координаты.

Чтобы получить дифференциальное уравнение для  $\varphi_1$ , подставим в первое уравнение (с) вместо  $x_1$  и  $x_2$  выражения (t). Тогда найдем:

$$\ddot{\varphi}_1 = -a\varphi_1 + (a - p_1^2)\varphi_1 = -p_1^2\varphi_1. \quad (v)$$

То же самое уравнение получим, подставив (t) во второе уравнение (с) и заметив, что

$$\frac{a - p_1^2}{b} = \frac{c}{c - p_1^2}.$$

Подставляя (u) в уравнения (с), находим:

$$\ddot{\varphi}_2 = -p_2^2\varphi_2. \quad (w)$$

Уравнения (v) и (w) независимы друг от друга, так что новые координаты  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  являются главными координатами нашей системы. Мы видим, что если известны нормальные формы колебаний, то известны и главные координаты.

32. **Примеры свободных колебаний.** — Следуя выкладкам § 31, рассмотрим теперь некоторые примеры свободных колебаний системы с двумя степенями свободы.

а) **Два связанных простых маятника.** Рассмотрим два простых маятника с одинаковыми массами  $m$  и длинами  $l$ , связанных пружиной, имеющей коэффициент жесткости  $k$  и расположенной на расстоянии  $h$  ниже точек подвеса  $A$  и  $B$  (рис. 139). Положим, что стержни маятников не обладают массой и могут перемещаться только в вертикальной плоскости рисунка.

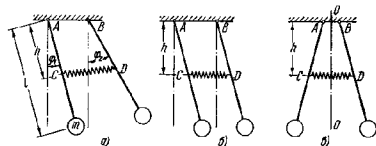


Рис. 139.

Как показано на рисунке, за координаты выбраны углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Замечая, что при вертикальном положении маятников пружина не растянута, заключаем, что для любой другой конфигурации системы удлинение пружины равно  $h(\varphi_2 - \varphi_1)$ . Ограничивая рассмотрение малыми углами отклонения, получаем дифференциальные уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} ml^2 \ddot{\varphi}_1 &= -mg l \varphi_1 + kh^2 (\varphi_2 - \varphi_1), \\ ml^2 \ddot{\varphi}_2 &= -mg l \varphi_2 - kh^2 (\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Вводя обозначения

$$a = \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}, \quad b = \frac{kh^2}{ml^2}, \quad (b)$$

представим дифференциальные уравнения (а) в упрощенной форме:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + a\varphi_1 - b\varphi_2 &= 0, \\ \ddot{\varphi}_2 - b\varphi_1 + a\varphi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Принимая за частное решение этих дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A \sin(pt + \alpha), \\ \varphi_2 &= B \sin(pt + \alpha). \end{aligned}$$

из (с) получим:

$$\left. \begin{aligned} (a - p^2)A - bB &= 0, \\ -bA + (a - p^2)B &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Приравняв нулю определитель этих уравнений, находим частотное уравнение

$$p^4 - 2ap^2 + (a^2 - b^2) = 0, \quad (e)$$

корни которого равны  $p_{1,2}^2 = a \mp b$ , или в обозначениях (b):

$$p_1^2 = \frac{g}{l}, \quad p_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2}. \quad (f)$$

Из уравнений (d) найдем теперь отношения амплитуд:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{b}{a - p_1^2} = +1, \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{b}{a - p_2^2} = -1. \quad (g)$$

Эти две формы колебаний показаны на рис. 139, б и в. Первой форме соответствуют одинаковые амплитуды колебаний маятников и совпадение фаз их колебаний. Очевидно, что пружина остается недеформированной, так что частота колебаний такая же, как для простого маятника. Во второй форме колебаний (рис. 139, в) колебания маятников имеют сдвиг фазы на  $180^\circ$ , пружина включается в работу, что означает получение высшей частоты. Последняя может быть найдена другим способом, если заметить, что конфигурация системы симметрична относительно вертикальной оси  $OO'$ . Рассматривая движение одного из двух маятников и замечая, что сила натяжения пружины равна  $2kqh$ , получим согласно закону изменения момента количества движения (относительно точки подвеса маятника):

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\varphi}l^2) = - (mg l \varphi + 2kqh^2),$$

откуда следует найденная выше частота  $p_2$ . Найдя главные колебания, можно записать общее решение путем наложения этих двух колебаний, беря каждую из форм колебаний с соответствующей амплитудой и с соответствующим фазовым углом. Таким образом, мы получаем следующие общие выражения для каждой координаты:

$$\varphi_1 = a_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) + a_2 \sin(p_2 t + \alpha_2),$$

$$\varphi_2 = a_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) - a_2 \sin(p_2 t + \alpha_2),$$

где постоянные  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  должны быть определены из начальных условий.

Примем, например, что в начальный момент ( $t=0$ ) левый маятник отклонен на угол  $\varphi_0$ , а правый маятник расположен вертикально; кроме того, пусть начальные скорости обоих маятников равны нулю. Тогда

$$(\varphi_1)_{t=0} = \varphi_0, \quad (\varphi_2)_{t=0} = 0, \quad (\dot{\varphi}_1)_{t=0} = (\dot{\varphi}_2)_{t=0} = 0.$$

Эти условия удовлетворяются, если принять

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2} \varphi_0 \quad \text{и} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2} \pi.$$

Тогда

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{2} (\cos p_1 t + \cos p_2 t) = \varphi_0 \cos \frac{p_1 - p_2}{2} t \cos \frac{p_1 + p_2}{2} t,$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_0}{2} (\cos p_1 t - \cos p_2 t) = \varphi_0 \sin \frac{p_2 - p_1}{2} t \cos \frac{p_1 + p_2}{2} t.$$

Если две частоты  $p_1$  и  $p_2$  близки друг к другу, то каждая координата содержит произведение двух тригонометрических функций: одной с низкой частотой  $(p_1 - p_2)/2$  и другой с высокой частотой  $(p_1 + p_2)/2$ . Таким образом, имеет место явление биений (см. стр. 51). Вначале мы имеем колебания левого маятника. Их амплитуда постепенно убывает, а амплитуда колебаний правого маятника возрастает; в момент  $\pi/(p_1 - p_2)$  движется только второй маятник. Немедленно после этого вновь начинается увеличение колебаний левого маятника и т. д.

б) *Двойной физической маятник*. Рассмотрим двойной маятник, показанный на рис. 140, который состоит из двух твердых тел, шарнирно связанных в точке  $B$  и подвешенных в точке  $A$ . Центры тяжести тел, обозначенные через  $C_1$  и  $C_2$ , и размеры показаны на рисунке. Система может перемещаться только в плоскости  $x\eta$ , и ее конфигурация в любой момент будет определяться координатами  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  точек  $C_1$  и  $C_2$ .

Применяя принцип Даламбера, приложим к каждому телу соответствующие силы инерции и инерционные пары  $^*$ , показанные на рис. 140. Это позволит записать дифференциальные уравнения движения как уравнение равновесия. Трением в шарнирах  $A$  и  $B$  пренебрегаем. Приравняв нулю алгебраические суммы моментов относительно  $A$  и  $B$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} -J_1\ddot{\varphi}_1 - J_2\ddot{\varphi}_2 - \frac{W_1}{g} \ddot{x}_1 y_1 - \\ - \left( W_1 - \frac{W_1}{g} \ddot{y}_1 \right) x_1 - \\ - \frac{W_2}{g} \ddot{x}_2 y_2 - \left( W_2 - \frac{W_2}{g} \ddot{y}_2 \right) x_2 = 0, \\ -J_2\ddot{\varphi}_2 - \frac{W_2}{g} \ddot{x}_2 h_2 \cos \varphi_2 - \\ - \left( W_2 - \frac{W_2}{g} \ddot{y}_2 \right) h_2 \sin \varphi_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Рис. 140.

В этих уравнениях прямоугольные координаты  $x_1, y_1, x_2, y_2$  связаны с координатами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_1 = h_1 \sin \varphi_1, & \quad y_1 = h_1 \cos \varphi_1, \\ x_2 = l \sin \varphi_1 + h_2 \sin \varphi_2, & \quad y_2 = l \cos \varphi_1 + h_2 \cos \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Ограничим исследование случаем малых колебаний, полагая, что  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  являются всегда малыми углами. В таком случае,  $\sin \varphi \approx \varphi$  и  $\cos \varphi \approx 1$ , так что выражения (i) можно заменить приближенными выражениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1 \approx h_1 \varphi_1, & \quad y_1 \approx h_1, \\ x_2 \approx l \varphi_1 + h_2 \varphi_2, & \quad y_2 \approx l + h_2. \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

Подставляя эти соотношения в уравнения (h), получаем:

$$\begin{aligned} -J_1\ddot{\varphi}_1 - J_2\ddot{\varphi}_2 - \frac{W_1}{g} h_1^2 \ddot{\varphi}_1 - W_1 h_1 \ddot{\varphi}_1 - \frac{W_2}{g} (l\ddot{\varphi}_1 + h_2\ddot{\varphi}_2) (l + h_2) - \\ - W_2 (l\varphi_1 + h_2\varphi_2) = 0, \\ -J_2\ddot{\varphi}_2 - \frac{W_2}{g} (l\ddot{\varphi}_1 + h_2\ddot{\varphi}_2) h_2 - W_2 h_2 \varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

\*  $J_1$  и  $J_2$  — моменты инерции тел относительно центральных осей, проходящих через  $C_1$  и  $C_2$  перпендикулярно к плоскости движения.

Чтобы получить два еще более простых уравнения для  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , вычтем второе уравнение из первого и запишем:

$$\begin{aligned} -J_1\ddot{\varphi}_1 - \frac{W_1}{g} h_1^2 \ddot{\varphi}_1 - W_1 h_1 \varphi_1 - \frac{W_2}{g} l^2 \ddot{\varphi}_1 - \frac{W_2}{g} l h_2 \ddot{\varphi}_2 - W_2 l \varphi_1 = 0, \\ -J_2\ddot{\varphi}_2 - \frac{W_2}{g} l h_2 \varphi_1 - \frac{W_2}{g} h_2^2 \ddot{\varphi}_2 - W_2 h_2 \varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

Приводя подобные члены, получим, наконец, два искоемых дифференциальных уравнения движения для малых свободных колебаний маятника в вертикальной плоскости:

$$\left. \begin{aligned} \left( J_1 + \frac{W_1}{g} h_1^2 + \frac{W_2}{g} l^2 \right) \ddot{\varphi}_1 + \frac{W_2}{g} l h_2 \ddot{\varphi}_2 + (W_1 h_1 - W_2 l) \varphi_1 = 0, \\ \frac{W_2}{g} l h_2 \ddot{\varphi}_1 + \left( J_2 + \frac{W_2}{g} h_2^2 \right) \ddot{\varphi}_2 + W_2 h_2 \varphi_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Заметим, что эти уравнения имеет постоянные коэффициенты только потому, что мы ограничились рассмотрением *малых значений*  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (см. выражение (j)).

Вводя теперь обозначения:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} = J_1 + \frac{W_1}{g} h_1^2 + \frac{W_2}{g} l^2, & \quad c_{11} = W_1 h_1 - W_2 l, \\ a_{12} = \frac{W_2}{g} l h_2, & \\ a_{22} = J_2 + \frac{W_2}{g} h_2^2, & \quad c_{22} = W_2 h_2. \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

можно представить уравнения (k) в виде:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\ddot{\varphi}_1 + a_{12}\ddot{\varphi}_2 + c_{11}\varphi_1 = 0, \\ a_{12}\ddot{\varphi}_1 + a_{22}\ddot{\varphi}_2 + c_{22}\varphi_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

Поступая далее как в предыдущих примерах, найдем частотное уравнение

$$(a_{11}p^2 - c_{11})(a_{22}p^2 - c_{22}) - a_{12}^2 p^4 = 0, \quad (n)$$

или в обозначениях (l):

$$\left[ \left( J_1 + \frac{W_1}{g} h_1^2 + \frac{W_2}{g} l^2 \right) p^2 - (W_1 h_1 - W_2 l) \right] \left[ \left( J_2 + \frac{W_2}{g} h_2^2 \right) p^2 - W_2 h_2 \right] - \\ - h_2^2 l^2 \left( \frac{W_2}{g} \right)^2 p^4 = 0. \quad (n')$$

Для упрощения записи введем обозначения:

$$\frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{W_1 h_1 + W_2 l}{J_1 + \frac{W_1}{g} h_1^2 + \frac{W_2}{g} l^2} = n_1^2, \quad \frac{c_{22}}{a_{22}} = \frac{W_2 h_2}{J_2 + \frac{W_2}{g} h_2^2} = n_2^2, \\ \frac{W_2^2 h_2^2 l^2}{g^2 \left( J_1 + \frac{W_1}{g} h_1^2 + \frac{W_2}{g} l^2 \right) \left( J_2 + \frac{W_2}{g} h_2^2 \right)} = n_3^2.$$

и частотное уравнение примет вид:

$$(1-n_3^2)p^4 - (n_1^2+n_2^2)p^2 + n_1^2n_2^2 = 0. \quad (п^*)$$

Необходимо заметить, что величины  $n_1$  и  $n_2$  имеют простой физический смысл. Величина  $n_1$  выражает частоту колебаний верхнего тела, если масса нижнего тела сосредоточена в шарнире  $B$ ; подобно этому  $n_2$  есть частота колебаний нижнего тела, если шарнир  $B$  неподвижен. Корни уравнения (п<sup>\*</sup>) равны

$$p_1^2 = \frac{1}{2(1-n_3^2)} (n_1^2 + n_2^2 - \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + 4n_1^2n_2^2}),$$

$$p_2^2 = \frac{1}{2(1-n_3^2)} (n_1^2 + n_2^2 + \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + 4n_1^2n_2^2}).$$

Отношения амплитуд соответствующих форм колебаний равны

$$\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)_1 = \frac{a_{12}p_1^2}{c_{11} - a_{11}p_1^2} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{p_1^2}{n_1^2 - p_1^2}, \quad (о)$$

$$\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)_2 = \frac{a_{12}p_2^2}{c_{11} - a_{11}p_2^2} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{p_2^2}{n_1^2 - p_2^2}. \quad (р)$$

Учитывая, что  $p_1 < p_2$ , найдем для формы с нижней частотой положительное отношение амплитуд и для формы с верхней частотой — отрицательное отношение амплитуд. Эти две формы колебаний схематически показаны на рис. 141. Найдя нормальные формы колебаний, получим общее решение путем наложения этих двух форм колебаний с такими амплитудами и фазовыми углами, чтобы удовлетворить начальным условиям. Для того чтобы

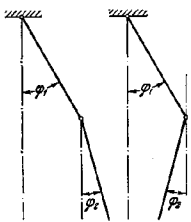


Рис. 141.

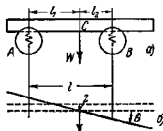


Рис. 142.

вызвать какие-либо главные колебания системы, необходимо вначале задать отношение между углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , соответствующее выражению (о) или выражению (р); затем система должна быть предоставлена самой себе при нулевых начальных скоростях.

в) *Колебания экипажей.* Задача о колебаниях четырехколесного экипажа как системы со многими степенями свободы весьма сложна. Ниже эта задача рассматривается в упрощенном виде с учетом только колебаний в продольной плоскости\* (рис. 142). В таком случае система имеет только две степени свободы и ее положение при колебаниях можно определить

\* Общее движение катящегося экипажа из последующего рассмотрения исключено.

двумя координатами: вертикальным перемещением  $z$  центра тяжести  $C$  и углом поворота  $\theta$  (рис. 142, б). Обе эти координаты будут измеряться от положения равновесия.

Пусть  $W$  — вес наддрессорной части экипажа;  $J = (W/g) i^2$  — момент инерции наддрессорной массы относительно оси, проходящей через центр тяжести  $C$  перпендикулярно к плоскости чертежа;  $i$  — радиус инерции относительно той же оси;  $k_1, k_2$  — коэффициенты жесткости осей;  $l_1, l_2$  — расстояния центра тяжести от тех же осей. При этих обозначениях дифференциальные уравнения движения принимают вид:

$$\frac{W}{g} \ddot{z} = -k_1(z - l_1\theta) - k_2(z + l_2\theta),$$

$$\frac{W}{g} i^2 \ddot{\theta} = l_1 k_1(z - l_1\theta) - l_2 k_2(z + l_2\theta).$$

Полагая

$$\frac{(k_1 + k_2)g}{W} = a, \quad \frac{(-k_1 l_1 + k_2 l_2)g}{W} = b, \quad \frac{(l_1^2 k_1 + l_2^2 k_2)g}{W} = c, \quad (q)$$

имеем:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z} + az + b\theta &= 0, \\ \ddot{\theta} + \frac{b}{l_1} z + \frac{c}{i^2} \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (r)$$

Эта система двух дифференциальных уравнений показывает, что в общем случае координаты  $z$  и  $\theta$  связаны друг с другом, и если, например, для того чтобы вызвать колебания, кузов смещен параллельно самому себе в направлении оси  $z$  и затем внезапно отпущен, то при последующих колебаниях будут иметь место не только вертикальные перемещения  $z$ , но также и углы поворота  $\theta$ . Координаты  $z$  и  $\theta$  становятся независимыми только в случае, когда  $b=0$ . Это может быть при  $k_1 l_1 = k_2 l_2$ , т. е. когда коэффициенты жесткости обратно пропорциональны расстояниям рессор от центра тяжести. В этом случае приложения к центру тяжести нагрузок вызовет только вертикальное смещение кузова без поворота. Такие условия выполняются в железнодорожных вагонах, где обычно  $l_1 = l_2$  и  $k_1 = k_2$ .

Возвращаясь теперь к общему случаю, приведем уравнения (r) и форме

$$z = A \cos(pt + \alpha), \quad \theta = B \cos(pt + \alpha).$$

Подставляя в уравнения (r), получаем:

$$\left. \begin{aligned} A(a - p^2) + bB &= 0, \\ \frac{b}{l_1} A + A\left(\frac{c}{i^2} - p^2\right)B &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (s)$$

Исключая  $A$  и  $B$  из уравнений (s), получим следующее частотное уравнение:

$$(a - p^2) \left( \frac{c}{i^2} - p^2 \right) - \frac{b^2}{l_1^2} = 0. \quad (t)$$

Два корня уравнения (t), рассматриваемого как квадратное относительно  $p^2$ , равны

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{i^2} + a \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c}{i^2} + a \right)^2 - \frac{ac}{i^2} + \frac{b^2}{l_1^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{i^2} + a \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c}{i^2} - a \right)^2 + \frac{b^2}{l_1^2}}. \end{aligned} \quad (u)$$

Замечая из выражений (q), что

$$ac - b^2 = \frac{g^2}{W^2} k_1 k_2 (l_1 + l_2)^2.$$

можно заключить, что оба корня уравнения (t) действительны и положительны.

Подставляя (u) в первое уравнение (s), получаем следующие отношения амплитуд  $A/B$ :

$$\frac{A}{B} = \frac{b}{p^2 - a} = \frac{b}{\frac{1}{2} \left( \frac{c}{i^2} - a \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c}{i^2} - a \right)^2 + \frac{b^2}{i^2}}}. \quad (v)$$

Знак плюс соответствует форме колебаний с высшей частотой, знак минус — колебаниям с низшей частотой.

В дальнейшем предположим, что

$$b > 0 \text{ или } k_2 l_2 > k_1 l_1.$$

Это значит, что под действием собственного веса смещение кузова противоположно показанному на рис. 142; смещению вниз соответствует отрицательный угол поворота  $\theta$ . В таком предположении амплитуды  $A$  и  $B$  будут иметь противоположные знаки, если принять минус перед корнем в знаменателе (v), и будут одного знака, если принять перед корнем плюс. Соответствующие два типа колебаний показаны на рис. 143. Тип  $a$  имеет низшую частоту; его можно рассматривать как вращение относительно некоторой определенной точки  $Q$ , расположенной справа от центра тяжести  $S$ . Тип  $b$ , имеющий высшую частоту, представляет вращение относительно определенной точки  $P$ , расположенной слева от  $S$ . Расстояния  $m$  и  $n$  этих точек от

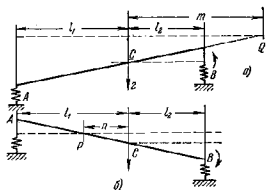


Рис. 143.

центра тяжести определяются абсолютным значением правой части уравнения (v), и мы получаем очень простое соотношение:

$$mn = -\frac{b}{\frac{1}{2} \left( \frac{c}{i^2} - a \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c}{i^2} - a \right)^2 + \frac{b^2}{i^2}}} \times \frac{b}{\frac{1}{2} \left( \frac{c}{i^2} - a \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c}{i^2} - a \right)^2 + \frac{b^2}{i^2}}}, \quad (w)$$

которое сводится к равенству  $mn = l^2$ .

В частном случае, если  $b = 0$ , т. е.  $k_1 l_1 = k_2 l_2$ , расстояние  $n$  обращается в нуль и  $m$  становится бесконечно большим. Это значит, что в данном случае одна из главных форм колебаний представляет повороты вокруг центра тяжести, а другая — поступательное движение без вращения. Приложенная в центре тяжести вертикальная нагрузка в этом случае вызывает только вертикальное смещение, и обе пружины сжимаются одинаково.

Если, кроме  $b = 0$ , также равна нулю разность  $c/i^2 - a$ , то обе частоты, определяемые формулой (u), становятся равными, и оба типа колебаний будут иметь одинаковый период.

Рассмотрим теперь численный пример\*). Принимая следующие значения:  $W = 437$  кг,  $i^2 = 1,21$  м<sup>2</sup>,  $l_1 = 1,22$  м,  $l_2 = 1,52$  м,  $k_1 = 23,8$  кг/см,  $k_2 = -35,7$  кг/см, получим соответствующие статические смещения:

$$\delta_a = \frac{W l_2}{k_1 l_1} = 10,2 \text{ см,}$$

$$\delta_b = \frac{W l_1}{k_2 l_2} = 5,45 \text{ см}$$

и по формулам (q):

$$a = 133,3, \quad b = 5670, \quad c = 2\,640\,000.$$

Подставляя в (u), найдем следующие два корня:  $\rho_1^2 = 109$ ,  $\rho_2^2 = 243$ . Соответствующие частоты равны:

$$\rho_1 = 10,5 \text{ сек}^{-1} \text{ и } \rho_2 = 15,6 \text{ сек}^{-1},$$

или

$$N_1 = 100 \text{ и } N_2 = 150 \text{ полных колебаний в минуту.}$$

Из формулы (v) имеем:

$$\frac{A}{B} = -2,34 \text{ м и } \frac{A}{B} = 0,51 \text{ м.}$$

Это значит, что при низкой форме колебания кузова составляют 2,34 м на радиан, или 4,1 см на 1 градус. При высшей форме колебания кузова составляют 0,51 м на радиан, или 0,9 см на 1 градус.

Грубо говоря, медленные колебания кузова состоят в его подпрыгиваниях, осадки обеих пружин имеют одинаковый знак и находятся в отношении

$$\frac{\delta_b}{\delta_a} = \frac{2,34 - 1,52}{2,34 + 1,22} = 0,24.$$

Быстрые колебания состоят главным образом в «галопировании» кузова. Интересно отметить, что хорошее приближение для частот главных форм колебаний может быть получено на основе теории систем с одной степенью свободы. Предполагая сначала, что рессора  $B$  закреплена так, что кузов может качаться на рессоре  $A$  вокруг оси  $B$  как вокруг шарнира, получим дифференциальное уравнение движения

$$\left( J + \frac{W}{g} i_2^2 \right) \ddot{\theta} + k_1 l_2 \theta = 0,$$

так что частота закрепленной системы равна

$$\rho_1' = l \sqrt{\frac{k_1}{J + \frac{W}{g} i_2^2}},$$

или, подставляя данные выше значения, получаем

$$\rho_1' = 274 \sqrt{\frac{23,8}{437 + \frac{437}{981} (12100 + 152^2)}} = 10,8 \text{ сек}^{-1}.$$

\* См. H. S. Rowell, Proc. Inst. Automobile Engrs. (Лондон), т. 17, ч. II, стр. 455, 1923.

Найденная частота близка по значению к частоте 10,5, найденной ранее для нижней формы колебаний кузова. Таким же образом, рассматривая качания кузова на пружине  $B$  вокруг оси  $A$  как вокруг шарнира, получим  $p_2 = 15,0$ , что близко к частоте  $p_2 = 15,6$ , ранее найденной для высшей формы колебаний.

На этом основан опытный метод определения частот главных колебаний путем качаний кузова сначала при закрепленных передних рессорах, а затем при закреплении задних рессор. Частоты, найденные при таких испытаниях, достаточно близки к истинным значениям.

Возвращаясь теперь к общему решению уравнений (г) и обозначая через  $p_1$  и  $p_2$  два корня, определяемых из (и), имеем:

$$\left. \begin{aligned} z &= A_1 \cos(p_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos(p_2 t + \alpha_2), \\ \theta &= B_1 \cos(p_1 t + \alpha_1) + B_2 \cos(p_2 t + \alpha_2), \end{aligned} \right\} \quad (\text{х})$$

где (см. равенство (v))

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{b}{p_1^2 - a}, \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{b}{p_2^2 - a}.$$

Общее решение (х) содержит четыре произвольные постоянные  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , которые в каждом частном случае должны быть определены так, чтобы удовлетворить начальным условиям. Примем, например, что в начальный момент создано перемещение вниз  $\lambda$  без поворота кузова и затем кузов внезапно отпущен. В этом случае начальные условия имеют вид:

$$(z)_{t=0} = \lambda, \quad (\dot{z})_{t=0} = 0, \quad (\theta)_{t=0} = 0, \quad (\dot{\theta})_{t=0} = 0.$$

Эти условия удовлетворены, если в уравнениях (х) принять:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = 0, \\ A_1 &= \lambda \frac{a - p_2^2}{p_1^2 - p_2^2}, \quad A_2 = \lambda \frac{p_1^2 - a}{p_1^2 - p_2^2}, \\ B_1 &= A_1 \frac{(p_1^2 - a)}{b}, \quad B_2 = A_2 \frac{(p_2^2 - a)}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{у})$$

Мы видим, что при принятых условиях будут вызваны обе формы колебаний, находящиеся вначале в одной фазе; однако вследствие различия частот с течением времени они сдвинутся по отношению друг к другу и будет иметь место сложное комбинированное движение. Если разность частот весьма мала, то возникнет явление *биений*, т. е. будут иметь место колебания с периодически меняющейся амплитудой. Рассматривая этот частный случай, примем в формуле (и)

$$\frac{c}{i^2} - a = 0 \quad \text{и} \quad \frac{b}{i} = \delta,$$

где  $\delta$  — малая величина. Тогда

$$p_1^2 = a - \delta, \quad p_2^2 = a + \delta,$$

и из (у) получим:

$$A_1 = \frac{\lambda}{2}, \quad A_2 = \frac{\lambda}{2}, \quad B_1 = -\frac{\lambda}{2i}, \quad B_2 = \frac{\lambda}{2i}.$$

Решения (х) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{\lambda}{2} (\cos p_1 t + \cos p_2 t) = \lambda \cos \frac{p_1 + p_2}{2} t \cos \frac{p_1 - p_2}{2} t, \\ \theta &= \frac{\lambda}{2i} (-\cos p_1 t + \cos p_2 t) = \frac{\lambda}{i} \sin \frac{p_1 + p_2}{2} t \sin \frac{p_1 - p_2}{2} t. \end{aligned} \right\} \quad (\text{z})$$

Вследствие того, что разность  $p_1 - p_2$  мала, функции  $\cos \frac{p_1 + p_2}{2} t$  и  $\sin \frac{p_1 + p_2}{2} t$  будут относительно быстро меняющимися функциями, совершающими несколько циклов изменения за то время, пока смогут заметно измениться медленно меняющиеся функции  $\cos \frac{p_1 - p_2}{2} t$  и  $\sin \frac{p_1 - p_2}{2} t$ . В результате получаются колебания с периодически изменяющимися амплитудами.

**33. Вынужденные колебания систем с двумя степенями свободы.** — Рассмотрим теперь общую задачу об установившемся режиме вынужденных колебаний системы с двумя степенями свободы под действием гармонической возмущающей силы. В качестве примера подобной системы вновь рассмотрим две массы, показанные на рис. 135, а, и допустим, что кроме сил натяжения упругих пружин имеется внешняя сила  $Q \sin \omega t$ , приложенная к массе  $m_1$ . В данном случае дифференциальные уравнения движения (а), стр. 186 принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + Q \sin \omega t, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1). \end{aligned} \right\} \quad (\text{а})$$

Вводя обозначения

$$\frac{k_1 + k_2}{m_1} = a, \quad \frac{k_2}{m_1} = b, \quad \frac{k_2}{m_2} = c, \quad \frac{Q}{m_1} = q, \quad (\text{б})$$

запишем уравнения (а) в компактной форме:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + ax_1 - bx_2 &= q \sin \omega t, \\ \ddot{x}_2 - cx_1 + cx_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{с})$$

Частное решение этих уравнений можно взять в виде:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= C \sin \omega t, \\ x_2 &= D \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (\text{д})$$

Чтобы получить амплитуды  $C$  и  $D$ , подставим выражения (д) в уравнения (с) и найдем:

$$\left. \begin{aligned} (a - \omega^2) C - bD &= q, \\ -cC + (c - \omega^2) D &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{е})$$



Эти уравнения дают для  $C$  и  $D$  следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{q(c - \omega^2)}{(a - \omega^2)(c - \omega^2) - bc}, \\ D &= \frac{qc}{(a - \omega^2)(c - \omega^2) - bc}. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

При этих значениях  $C$  и  $D$  выражения (d) удовлетворяют уравнениям движения (c) для любого значения времени. Мы видим, что выражения (d) представляют простое гармоническое движение обеих масс с угловой частотой  $\omega$  возмущающей силы, вызывающей движение. Однако амплитуды  $C$  и  $D$  зависят от приведенной амплитуды  $q$  возмущающей силы и от значения угловой частоты  $\omega$ .

Для весьма малых значений  $\omega$ , т. е. для весьма медленного изменения возмущающей силы, можно пренебречь  $\omega^2$  по сравнению с  $a$  и  $c$  в выражениях (f) и принять:

$$C = D \approx \frac{q}{a-b} = \frac{Q}{k_1} = \lambda_{ст}. \quad (g)$$

Отсюда видно, что медленно меняющаяся переменная возмущающая сила вызывает чисто статический эффект; пружина  $k_2$  сохраняет длину, и обе массы перемещаются вместе, причем их перемещение всегда равно статическому удлинению пружины  $k_1$  под действием силы  $Q \sin \omega t$ .

Сравнивая знаменатель выражений (f) с частотным уравнением (g) § 31, мы заключаем, что амплитуды  $C$  и  $D$  становятся бесконечно большими при  $\omega = p_1$  или  $\omega = p_2$ . Таким образом, для системы с двумя степенями свободы существуют два условия резонанса, соответствующих каждой из двух собственных частот свободных колебаний.

Из выражений (f) следует отношение амплитуд  $C$  и  $D$  вынужденных колебаний

$$\frac{C}{D} = \frac{c - \omega^2}{c}. \quad (h)$$

Для каждого из двух резонансных условий, т. е. при  $\omega = p_1$ , или  $\omega = p_2$ , эти отношения принимают значения  $A_1/B_1$  или  $A_2/B_2$ , данные выражениями (k) и (l) § 31. Это значит, что в условиях резонанса вынужденные колебания имеют соответствующую нормальную форму (рис. 136).

Чтобы построить полную амплитудную кривую, подобную приведенной на рис. 36, для системы с двумя степенями свободы, нужно задать некоторыми определенными отношениями между коэффициентами жесткости  $k_1$  и  $k_2$  и между массами  $m_1$  и  $m_2$ . Возьмем частный случай  $k_1 = k_2$  и  $m_1 = 2m_2$ . Тогда  $a = c = 2p_0^2$  и  $b = p_0^2$ , где  $p_0 = \sqrt{k_1/m_1}$  — собственная частота единственной массы  $m_1$  на пружине  $k_1$  (рис. 135, a). Для данного частного случая формулы (i)

стр. 187 дают квадраты двух собственных частот:

$$p_1^2 = 0,586p_0^2, \quad p_2^2 = 3,41p_0^2,$$

и при обозначениях (g) формулы (f), определяющие амплитуды, примут вид:

$$c = \frac{\lambda_{ст}(a-b)(1-\omega^2/c)}{a(1-\omega^2/a)(1-\omega^2/c)-b} = \frac{\lambda_{ст}(1-\omega^2/2p_0^2)}{2(1-\omega^2/2p_0^2)^2-1} = \alpha\lambda_{ст}, \quad (i)$$

$$D = \frac{\lambda_{ст}}{2(1-\omega^2/2p_0^2)^2-1} = \beta\lambda_{ст}, \quad (j)$$

где множители  $\alpha$  и  $\beta$  зависят только от отношения  $\omega/p_0$ . Графики этих множителей представлены на рис. 144. Мы видим, что когда  $\omega$  приближается к нулю, оба множителя становятся близкими к единице, и амплитуды  $C$  и  $D$  приближаются к значению  $\lambda_{ст}$ , определяемому выражением (g). С возрастанием  $\omega$  обе амплитуды также увеличиваются и стремятся к бесконечности, когда  $\omega$  приближается к первой собственной частоте  $p_1$ . В этой области обе амплитуды положительны, т. е. обе массы колеблются в фазе с возмущающей силой. Когда  $\omega$  становится несколько больше, чем  $p_1$ , обе амплитуды велики и имеют отрицательные значения. Это значит, что теперь обе массы колеблются со сдвигом фазы  $180^\circ$  относительно возмущающей силы, но еще находятся в одной фазе друг с другом. С дальнейшим возрастанием  $\omega$  обе амплитуды уменьшаются, и когда  $\omega = \sqrt{c} = \sqrt{2}p_0$ , амплитуда  $C$  обращается в нуль и амплитуда  $D$  становится численно равной  $\lambda_{ст}$ , но на  $180^\circ$  сдвинутой по фазе относительно возмущающей силы. Когда  $\omega$  становится больше, чем  $\sqrt{2}p_0$ , амплитуда  $C$  вновь становится положительной, тогда как  $D$  остается отрицательной. Это означает, что теперь обе массы сдвинуты по фазе на  $180^\circ$ , причем  $m_1$  находится в одной фазе с возмущающей силой. Наконец, когда  $\omega$  приближается ко второй собственной частоте  $p_2$ , обе амплитуды неограниченно растут и наступают условия второго резонанса. После этого массы продолжают двигаться в разных фазах, но с убывающими амплитудами, и когда  $\omega$  очень велико, колебания обеих масс почти исчезают.

Определенное практическое значение имеет тот факт, что  $C = 0$  при  $\omega = \sqrt{c} = \sqrt{k_2/m_2}$ . Как легко видеть, для удовлетворения этому условию нужно лишь выбрать  $k_2$  и  $m_2$  так, чтобы собственная частота отдельно взятой второй части системы совпала с частотой

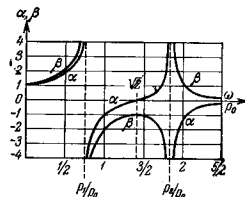


Рис. 144.

возмущающей силы. При этом, хотя возмущающая сила действует на массу  $m_1$ , однако она вызывает колебания только массы  $m_2$ . Амплитуда  $D$  этих колебаний, как видно из второго выражения (1), равна

$$D = -\frac{q}{b} = -\frac{Q}{k_2}. \quad (к)$$

Рассмотрим, например, балку, поддерживающую мотор (рис. 145, а). Ее можно рассматривать как систему с одной степенью свободы; мы знаем, что неуравновешенность ротора  $Q$  может вызвать значительные вынужденные колебания, если частота возмущения  $\omega$  окажется близкой к собственной частоте системы  $\sqrt{k_1/m_1}$ .

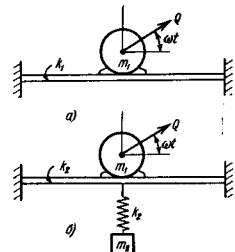


Рис. 145.

Чтобы предотвратить эти вынужденные колебания, прикрепим добавочную систему, показанную на рис. 145, б, и выберем  $k_2$  и  $m_2$  так, чтобы  $\sqrt{k_2/m_2} = \omega$ . Таким способом образуется система с двумя степенями свободы; применив к ней данную выше общую теорию, заключаем, что колебания главной массы  $m_1$  исчезают, а амплитуда колебаний дополнительной массы  $m_2$  дается формулой (к). Такая дополнительная система, прикрепленная к главной системе, называется *динамическим гасителем колебаний*. При проектировании гасителя выбирают такую пружину  $k_2$ , чтобы формула (к) дала приемлемое значение амплитуды  $D$ , и затем выбирают массу  $m_2$  так, чтобы  $\sqrt{k_2/m_2} = \omega$ .

В предшествующих рассуждениях рассматривалось только частное решение уравнения (с). Для получения общего решения на вынужденные колебания необходимо наложить свободные колебания, определяемые уравнениями (о) на стр. 189. Постоянные  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  следует затем выбрать так, чтобы удовлетворить заданным начальным условиям движения.

Во всех приведенных выше выкладках влияние демпфирования не учитывалось. Оно будет рассмотрено в следующем параграфе, в частности в связи с динамическим гасителем колебаний, представленным на рис. 145, б.

В качестве другого примера вынужденных колебаний без демпфирования рассмотрим систему, показанную на рис. 146. Она состоит из неполовностью уравновешенного ротора массы  $m_1$ , установленного на валу  $AB$  и вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Подшипники  $A$  и  $B$  закреплены на тяжелой опорной плите массы  $m$ , плита опирается на гибкие вертикальные стойки. Примем, что срединная плоскость  $xu$  диска является плоскостью симметрии системы и рассмотрим движение диска в этой плоскости. Пусть

начало координат (рис. 146, б) лежит на направлении недеформированной оси вала. Перемещение  $\overline{OD} = \xi$  описывает горизонтальное движение опорной плиты,  $\overline{DE} = f$  — полный прогиб вала,  $\overline{EC} = e$  — малый эксцентриситет центра тяжести  $C$  ротора. Таким образом, положение диска полностью определяется координатами  $x$ ,  $y$  точки  $C$  и углом поворота  $\omega t$ . Положение опорной плиты полностью определяется горизонтальным перемещением  $\xi$ .

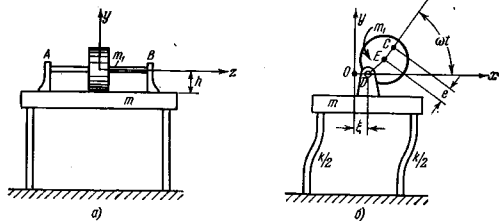


Рис. 146.

Чтобы записать уравнения движения этой системы, обозначим коэффициент жесткости при горизонтальном перемещении стоек через  $k$ ; вертикальными перемещениями стоек пренебрегаем. Обозначим через  $k_1$  коэффициент поперечной жесткости вала. Тогда сила давления изогнутого вала на диск, равная  $k_1 f$ , действует вдоль  $\overline{ED}$  и равна и противоположна по направлению силе давления на опорную плиту в подшипниках  $A$  и  $B$ . Влияние момента этой силы на плечо  $h$  не будем учитывать при определении горизонтального перемещения  $\xi$  опорной плиты. При этих упрощениях дифференциальные уравнения движения для диска имеют вид:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1(x - \xi - e \cos \omega t),$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = -k_1(y - e \sin \omega t),$$

и для опорной плиты

$$m \ddot{\xi} = -k\xi + k_1(x - \xi - e \cos \omega t).$$

Преобразуя эти уравнения, имеем:

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{\xi} + (k + k_1)\xi - k_1 x &= -ek_1 \cos \omega t, \\ m_1 \ddot{x} + k_1 x - k_1 \xi &= ek_1 \cos \omega t, \\ m_1 \ddot{y} + k_1 y &= k_1 e \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Эти уравнения являются уравнениями вынужденных колебаний системы. Как видно, третье уравнение содержит только одну координату  $y$ . Таким образом, гибкость стоек не влияет на вертикальные колебания вала, и соответствующая критическая скорость равна

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}. \quad (м)$$

Иными словами, она такая же, как и для вала с жесткими опорами. Первые два уравнения (I) определяют горизонтальные колебания диска и опорной плиты. Примем решения этих уравнений в виде:

$$x = \lambda_1 \cos \omega t, \quad \xi = \lambda_2 \cos \omega t.$$

Подставляя в уравнения (I), получим:

$$\left. \begin{aligned} (-m_1\omega^2 + k_1)\lambda_1 - k_1\lambda_2 &= ek_1, \\ -k_1\lambda_1 + (-m\omega^2 + k + k_1)\lambda_2 &= -ek_1 \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

Отсюда можно вычислить амплитуды  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Соответствующие критические скорости найдем, приравняв нулю определитель этой системы уравнений. Таким образом, находим:

$$\left. \begin{aligned} (-m_1\omega^2 + k_1)(-m\omega^2 + k + k_1) - k_1^2 &= 0, \\ (-m_1\omega^2 + k_1)(-m\omega^2 + k) - k_1m_1\omega^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (o)$$

или

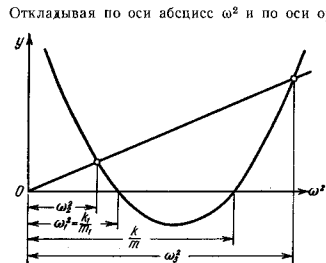


Рис. 147.

вторую часть (o), отличается от нуля. Обозначая его величину через  $\Delta$ , найдем из (n):

$$\lambda_1 = \frac{ek_1(-m\omega^2 + k + k_1) - ek_1^2}{\Delta}, \quad \lambda_2 = \frac{-ek_1(-m_1\omega^2 + k_1) + ek_1^2}{\Delta},$$

что определяет амплитуды вынужденных горизонтальных колебаний\*).

**34. Колебания с вязким сопротивлением.**—Рассматривая влияние вязкого сопротивления на колебания системы с двумя степенями свободы, вернемся к схеме, показанной на рис. 135, и примем, что

\* Колебания ротора на податливых опорах рассмотрены в работах V. Blaess, Maschinenbau der Betriebe, стр. 281, 1923; D. M. Smith, Proc. Roy. Soc., сер. A (Лондон), т. 142, стр. 92, 1933.

кроме упругих сил и возмущающей силы  $Q \sin \omega t$ , приложенной к массе  $m_1$ , имеются также силы вязкого сопротивления  $-\mu \dot{x}$ , действующие на каждую из масс. При этих условиях дифференциальные уравнения движения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) - \mu \dot{x}_1 + Q \sin \omega t, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1) - \mu \dot{x}_2. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Вводя обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_1 + k_2}{m_1} &= a, & \frac{k_2}{m_1} &= b, & \frac{k_2}{m_2} &= c, \\ \frac{\mu}{m_1} &= d, & \frac{\mu}{m_2} &= e, & \frac{Q}{m_1} &= q, \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

можно записать уравнения (a) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + ax_1 - bx_2 + d\dot{x}_1 &= q \sin \omega t, \\ \ddot{x}_2 - cx_1 + cx_2 + e\dot{x}_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Полное решение этих уравнений состоит из двух частей: 1) свободных затухающих колебаний и 2) вынужденных колебаний с вязким сопротивлением. Чтобы найти решение для свободных колебаний, опустим правую часть первого уравнения и рассмотрим соответствующие однородные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + ax_1 - bx_2 + d\dot{x}_1 &= 0, \\ \ddot{x}_2 - cx_1 + cx_2 + e\dot{x}_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Решение уравнений (d) можно принять в виде:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= Ce^{st}, \\ x_2 &= De^{st}, \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

где  $C$  и  $D$ —неопределенные постоянные. Подставляя (e) в уравнения (d), находим:

$$\left. \begin{aligned} C(s^2 + ds + a) - Db &= 0, \\ -Cc + D(s^2 + es + c) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Эти уравнения могут дать отличные от нуля значения  $C$  и  $D$  только в том случае, если равен нулю определитель системы, т. е.

$$(s^2 + ds + a)(s^2 + es + c) - bc = 0. \quad (g)$$

Это уравнение четвертой степени относительно  $s$  имеет четыре корня, дающие четыре частных решения (e) уравнений (d). Общее решение уравнений (d) получится комбинированием этих четырех решений. Если вязкое сопротивление настолько мало, что могут

происходить колебания, то все четыре корня уравнения (g) окажутся комплексными с отрицательными действительными частями\*)

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -n_1 + ip_1, \\ s_2 &= -n_1 - ip_1, \\ s_3 &= -n_2 + ip_2, \\ s_4 &= -n_2 - ip_2. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — положительные числа. При подстановке каждого из этих корней в уравнения (i) будут получены отношения  $C/D$ , соответствующие каждому корню. Таким образом, мы нашли четыре частных решения вида (e) с четырьмя постоянными интегрирования, которые могут быть определены из четырех начальных условий, а именно, из начальных значений координат  $x_1$ ,  $x_2$  и их производных  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$ .

Целесообразно поступить, как и в случае системы с одной степенью свободы (см. § 12), и вместо показательных функций (e) ввести тригонометрические функции. Беря первые два корня (h) и замечая, что

$$\begin{aligned} e^{-(n_1+ip_1)t} + e^{-(n_1-ip_1)t} &= 2e^{-n_1t} \cos p_1 t, \\ e^{-(n_1+ip_1)t} - e^{-(n_1-ip_1)t} &= 2ie^{-n_1t} \sin p_1 t, \end{aligned}$$

можно представить комбинации первых двух частных решений (e) в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-n_1t} (C'_1 \cos p_1 t + C'_2 \sin p_1 t), \\ x_2 &= e^{-n_1t} (C''_1 \cos p_1 t + C''_2 \sin p_1 t). \end{aligned}$$

Таким образом, каждая координата представляет затухающее колебание, как и в случае системы с одной степенью свободы. Действительная часть  $n_1$  корней определяет темп затухания амплитуд колебаний, а мнимая часть  $p_1$  определяет частоту колебаний. Тем же способом можно преобразовать последние два корня (h); в конце концов мы получим общее решение уравнений (d) в виде:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= e^{-n_1t} (C'_1 \cos p_1 t + C'_2 \sin p_1 t) + \\ &\quad + e^{-n_1t} (D'_1 \cos p_2 t + D'_2 \sin p_2 t), \\ x_2 &= e^{-n_1t} (C''_1 \cos p_1 t + C''_2 \sin p_1 t) + \\ &\quad + e^{-n_1t} (D''_1 \cos p_2 t + D''_2 \sin p_2 t). \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Вследствие того, что отношение между постоянными  $C$ ,  $D$  определяется уравнениями (f) для каждого частного решения (e), в выра-

жениях (i) содержатся только четыре независимые постоянные, которые должны быть определены из начальных условий.

В случае малого вязкого сопротивления числа  $n_1$  и  $n_2$  в выражениях (h) малы и влияние сопротивления на частоты колебаний является величиной второго порядка малости. Поэтому частоты  $p_1$  и  $p_2$  могут быть приняты равными частотам колебаний без сопротивления.

Если имеется система с очень большим вязким сопротивлением, то возможно, что два или все четыре корня (h) становятся действительными и отрицательными. Полагая, например, что действительны последние два корня, найдем, как и в случае системы с одной степенью свободы (стр. 76), что соответствующее движение является аperiodическим и что полное выражение для движения будет состоять из затухающих колебаний, наложенных на аperiodическое движение.

Из общего решения (i) видно, что свободные колебания постепенно затухают, так что практически приходится иметь дело только с установившимся процессом вынужденных колебаний, поддерживаемых возмущающей силой  $Q \sin \omega t$ . Эти вынужденные колебания определяются как частное решение уравнений (c). Замечая, что вследствие вязкого сопротивления должен быть сдвиг фаз между возмущающей силой и вызываемым ею движением, примем это частное решение в виде:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \\ x_2 &= C_3 \sin \omega t + C_4 \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (c) и приравнявая нулю коэффициенты у  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$ , получим четыре линейных алгебраических уравнения для вычисления четырех постоянных  $C_1, \dots, C_4$ . Решая эти уравнения и подставляя значения  $C_1, \dots, C_4$  в выражения (j), получаем, наконец, искомые вынужденные колебания системы.

В качестве примера приложения этих выкладок рассмотрим поведение динамического гасителя колебаний, показанного на рис. 145, б и схематически представленного на рис. 148, когда имеется демпфирование\*). Чтобы сделать гаситель эффективным в достаточно обширной области частот возмущающей силы  $P \cos \omega t$ , очень полезно

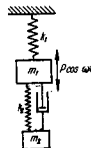


Рис. 148.

\*) Общее доказательство этого утверждения дано Гурвицем: А. Н. Гурвиц, Math. Ann. т. 46, стр. 273, 1895. Это доказательство можно найти в книге: Riemann-Weber, Differentialgleichungen der Physik, т. стр. 125, 1925.

\*) J. Ormondroyd, J. P. Den Hartog, Trans. ASME, т. 50, стр. APM-241, 1928. См. также статьи Е. Hahnkamma: Ann. Physik, сер. 5, т. 14, стр. 683, 1932; Z. angew. Math. u. Mech., т. 13, стр. 183, 1933; Ing.-Arch., т. 4, стр. 192, 1933. Влияние внутреннего трения на демпфирование рассмотрено в работах: О. Förrpl, Ing.-Arch., т. 1, стр. 223, 1930; О. Förrpl, Aufschaukelung und Dämpfung von Schwingungen, Берлин, 1936; G. Bock, Z. angew. Math. u. Mech., т. 12, стр. 261, 1932. [См. также сноску на стр. 225.]

вести устройство, создающее вязкое сопротивление между массами  $m_1$  и  $m_2$ , так, чтобы сила этого сопротивления была пропорциональна относительной скорости  $\dot{x}_2 - \dot{x}_1$  масс. Тогда дифференциальные уравнения движения будут подобны уравнениям (а):

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + c (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + P \cos \omega t, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1) - c (\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \end{aligned} \right\} \quad (к)$$

где коэффициент  $c$  обозначает величину силы вязкого сопротивления при относительной скорости масс, равной единице.

Рассматривая только установившийся процесс вынужденных колебаний, примем частное решение уравнений (к) в виде:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \\ x_2 &= C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (л)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (к), получаем четыре алгебраических уравнения, определяющие постоянные  $C_1, \dots, C_4$ .

Чтобы упростить последующие выкладки и придать всем выражениям безразмерную форму, введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{ст} &= P/k_1 - \text{статическое отклонение главной системы, вызванное силой } P; \\ p_1 &= \sqrt{k_2 g / W_2} - \text{собственная частота гасителя}; \\ \beta &= W_2 / W_1 - \text{отношение весов гасителя и главной системы}; \\ \delta &= p_1 / p_0 - \text{отношение собственных частот гасителя и главной системы}; \\ \gamma &= \omega / p_0 - \text{отношение частоты возмущающей силы к собственной частоте главной системы}. \end{aligned} \right\} \quad (м)$$

В дальнейшем нас будет интересовать амплитуда вынужденных колебаний массы  $W_1$ , равная

$$(x_1)_{\max} = \lambda_1 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}.$$

Опуская все промежуточные выкладки по определению постоянных  $C_1$  и  $C_2$  и используя обозначения (м), получаем:

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda_{ст}^2} = \frac{4\mu^2 \gamma^2 + (\gamma^2 - \delta^2)^2}{4\mu^2 \gamma^2 (\gamma^2 - 1 + \beta \gamma^2)^2 + [\beta \delta^2 \gamma^2 - (\gamma^2 - \delta^2)]^2}, \quad (н)$$

где вязкое сопротивление определяется параметром  $\mu = cg/2W_2 p_0$ .

Из этого выражения можно вычислить амплитуды вынужденных колебаний груза  $W_1$  для любых значений  $\gamma = \omega/p_0$ , если известны величины  $\delta$  и  $\beta$ , определяющие частоту и вес гасителя, а также величина  $\mu$ .

Принимая  $\mu = 0$ , получаем из (н):

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_{ст}} = \frac{\gamma^2 - \delta^2}{\beta \delta^2 \gamma^2 - (\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - \delta^2)}. \quad (п')$$

На рис. 149 штриховыми линиями показаны резонансные кривые для  $\mu = 0$ , дающие амплитуду колебаний для  $\beta = 1/20$ ,  $\delta = 1$  и различных значений  $\gamma = \omega/p$ . Необходимо иметь в виду, что на рисунке даны абсолютные значения выражения (п'), тогда как сами эти выражения меняют знак при  $\gamma = 0,895$ ,  $\gamma = 1$  и  $\gamma = 1,12$ .

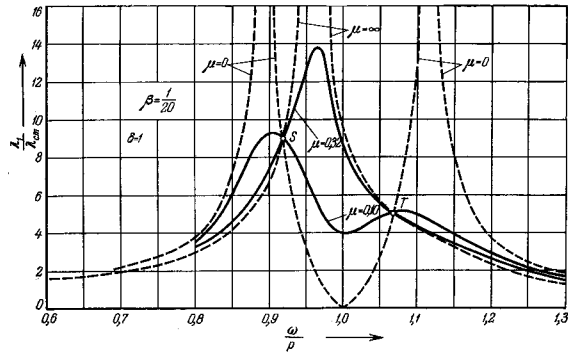


Рис. 149.

Другой крайний случай определяется равенством  $\mu = \infty$ . Если вязкое сопротивление бесконечно велико, то относительное движение  $W_1$  и  $W_2$  становится невозможным. Мы получим тогда систему с одной степенью свободы: груз  $W_1 + W_2$  и упругая связь с коэффициентом жесткости  $k_1$ . Для определения амплитуд вынужденных колебаний этой системы имеем из (п):

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_{ст}} = \frac{1}{(\gamma^2 - 1 + \beta \gamma^2)}. \quad (п'')$$

Критическая частота для этой системы найдется путем приравнения нулю знаменателя выражения (п''). Таким образом,

$$\gamma^2 - 1 + \beta \gamma^2 = 0 \quad (о)$$

и

$$\gamma_{cr} = \sqrt{\frac{1}{1+\beta}}. \quad (p)$$

Резонансные кривые для  $\mu = \infty$  также показаны на рис. 149 штриховой линией. Эти кривые подобны найденным выше для систем с одной степенью свободы (рис. 36, стр. 46). Для других значений  $\mu$  можно построить резонансные кривые, используя выражение (п). На рис. 149 приведены кривые для  $\mu = 0,10$  и  $\mu = 0,32$ . Интересно отметить, что все эти кривые пересекаются в точках  $S$  и  $T$ . Это значит, что для двух соответствующих значений  $\gamma$  амплитуды вынужденных колебаний груза  $W_1$  не зависят от вязкого сопротивления. Эти значения  $\gamma$  можно найти, приравняв абсолютные значения  $\lambda_1/\lambda_{cr}$ , получаемые из уравнений ( $n'$ ) и ( $n''$ ). Таким образом, имеем:

$$\frac{\gamma^2 - \delta^2}{\beta \delta^2 \gamma^2 - (\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - \delta^2)} = \frac{1}{\gamma^2 - 1 + \beta \gamma^2}. \quad (q)$$

То же уравнение может быть выведено из выражения (п). Точки пересечения  $S$  и  $T$  определяют такие значения  $\gamma$ , при которых выражение (п) перестает зависеть от вязкого сопротивления, т. е. является независимым от  $\mu$ . Выражение (п) имеет вид

$$\frac{M\mu^2 + N}{P\mu^2 + Q}$$

и не будет зависеть от  $\mu^2$  только если  $M/P = N/Q$ , что приводит вновь к уравнению (q). Это уравнение может быть представлено в виде:

$$(\gamma^2 - \delta^2)(\gamma^2 - 1 + \beta \gamma^2) = \beta \delta^2 \gamma^2 - (\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - \delta^2)$$

или

$$\gamma^4 - 2\gamma^2 \frac{1 + \delta^2 + \beta \delta^2}{2 + \beta} + \frac{2\delta^2}{2 + \beta} = 0. \quad (r)$$

Из этого уравнения могут быть найдены два корня  $\gamma_1^2$  и  $\gamma_2^2$ , определяющих абсциссы точек  $S$  и  $T$ . Соответствующие значения амплитуд вынужденных колебаний получаются подстановкой  $\gamma_1^2$  и  $\gamma_2^2$  в уравнение (п) или в уравнение ( $n''$ ). Используя последнее как более простое, получим для ординат точек  $S$  и  $T$  выражения\*):

$$-\frac{\lambda_{cr}}{\gamma_1^2 - 1 + \beta \gamma_1^2} \quad \text{и} \quad \frac{\lambda_{cr}}{\gamma_2^2 - 1 + \beta \gamma_2^2}. \quad (s)$$

Соответственно значения этих ординат зависят от величин  $\beta$  и  $\delta$ , определяющих вес и жесткость гасителя. Надлежащим выбором этих

\* Предполагается, что  $\gamma_1^2$  есть меньший корень уравнения (r) и перед квадратным корнем из ( $n''$ ) должен быть взят знак минус, чтобы получить положительное значение амплитуды.

характеристик можно повысить эффективность гасителя. Так как все кривые на рис. 149 должны проходить через точки  $S$  и  $T$ , то максимальные ординаты этих кривых, дающие максимальные амплитуды вынужденных колебаний, зависят от ординат точек  $S$  и  $T$ , и естественно ожидать, что наиболее выгодные условия получатся, если сделать ординаты  $S$  и  $T$  одинаковыми\*):

$$-\frac{\lambda_{cr}}{\gamma_1^2 - 1 + \beta \gamma_1^2} = \frac{\lambda_{cr}}{\gamma_2^2 - 1 + \beta \gamma_2^2}$$

или

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \frac{2}{1 + \beta}. \quad (t)$$

Вспомня, что  $\gamma_1^2$  и  $\gamma_2^2$  являются двумя корнями квадратного уравнения (r) и что для таких уравнений сумма двух корней равна взятому с обратным знаком коэффициенту при среднем члене, получаем:

$$\frac{2}{1 + \beta} = 2 \frac{1 + \delta^2 + \beta \delta^2}{2 + \beta},$$

откуда

$$\delta = \frac{1}{1 + \beta}. \quad (75)$$

Эта простая формула указывает надлежащий способ «настройки» гасителя. Если вес  $W_2$  гасителя выбран, то значение  $\beta$  известно, и из формулы (75) мы найдем надлежащее значение  $\delta$ , которое определяет частоту и коэффициент жесткости гасителя.

Чтобы определить амплитуду вынужденных колебаний, соответствующую точкам  $S$  и  $T$ , подставим в (s) значение одного из корней уравнения (r). Для правильно настроенного гасителя выполняется условие (75), и уравнение (r) принимает вид:

$$\gamma^4 - \frac{2\gamma^2}{1 + \beta} - \frac{2}{(2 + \beta)(1 + \beta)^2} = 0, \quad (u)$$

откуда

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 + \beta} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{\beta}{2 + \beta}} \right).$$

Таким образом, из (s)

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_{cr}} = \sqrt{\frac{2 + \beta}{\beta}}. \quad (76)$$

До сих пор величина  $\mu$ , определяющая вязкое сопротивление в гасителе, нами не рассматривалась, поскольку положение точек  $S$

\* Этот вопрос подробно рассмотрен в цитированной на стр. 209 статье Ханкамма.

и  $T$  не зависит от  $\mu$ . Но максимальные ординаты резонансных кривых, проходящих через точки  $S$  и  $T$ , зависят от величины  $\mu$ , как это видно из рис. 149. Наиболее выгодные условия мы получим при таком выборе  $\mu$ , при котором амплитудные кривые имеют горизонтальную касательную в  $S$  или  $T$ . На рис. 150 показаны две кривые такого рода: одна, имеющая максимум в  $S$ , и другая, имеющая максимум в  $T$ . Они построены для случая, когда  $\beta = W_2/W_1 = 1/4$ .

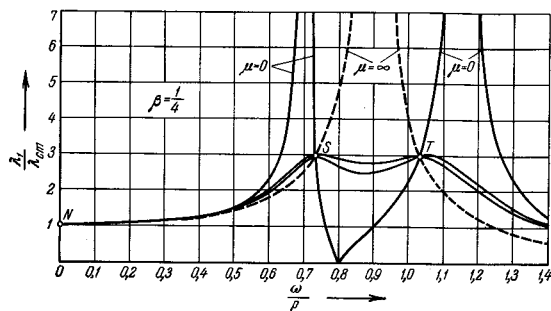


Рис. 150.

Как видно, максимальные ординаты этих кривых лишь весьма мало отличаются от ординаты точек  $S$  и  $T$ , поэтому можно принять, что уравнение (76) с хорошей точностью дает амплитуду вынужденных колебаний груза  $W_1$  при условии, что  $\mu$  выбрано описанным выше способом\*). Остается теперь выяснить, как нужно выбрать вязкое сопротивление, чтобы максимум резонансных кривых был в точках  $S$  или  $T$ . Начнем с равенства (н), представив его в виде:

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda_{ct}^2} = \frac{M\mu^2 + N}{P\mu^2 + Q}, \quad \begin{aligned} M &= 4\gamma^2, & N &= (\delta^2 - \sigma^2)^2, \\ P &= 4\delta^2(\gamma^2 - 1 + \beta\gamma^2)^2, & Q &= [\beta\delta^2\gamma^2 - (\gamma^2 - 1)(\delta^2 - \sigma^2)]^2 \end{aligned}$$

где  $M$ ,  $N$ ,  $P$  и  $Q$  — функции  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$ . Решая относительно  $\mu^2$ , получаем:

$$\mu^2 = \frac{N - Q(\lambda_1/\lambda_{ct})^2}{P(\lambda_1/\lambda_{ct})^2 - M}. \quad (v)$$

\*) Из вычислений Э. Ханкамма (см. Е. Н а н к а м м, Versammlung der Schiffbautechnische Gesellschaft, Берлин, ноябрь, 1935) следует, что ошибка увеличивается с возрастанием веса гасителя, т. е. с ростом  $\beta$ . Для  $\beta = 0,06$  ошибка равна 0,1%, для  $\beta = 0,7$  ошибка около 1%.

рис. П. Эерн Гартоз, Механические колебания, Физматгиз, 1960

$$\mu^2 = \frac{3}{8} \frac{\beta}{(1+\beta)^3}$$

$$\delta = 1/\lambda + \beta$$

Как только вес  $W_2$  гасителя выбран, становится известной  $\beta$ , и мы получаем  $\delta$  из формулы (75),  $\gamma_1^2$  и  $\gamma_2^2$  соответствующие точкам  $S$  и  $T$ , — из уравнения (и) и  $\lambda_1/\lambda_{ct}$  — из формулы (76). Если все эти величины подставить в (v), то для  $\mu^2$  получится неопределенное типа 0/0, так как положение точек  $S$  и  $T$  не зависит от  $\mu$ . Возьмем теперь точку резонансной кривой, весьма близкую к  $S$ . Если максимум имеет место в  $S$ , то при малом удалении указанной точки от точки  $S$  величины  $\lambda_1/\lambda_{ct}$ ,  $\beta$  и  $\delta$  практически останутся такими же и лишь вместо  $\gamma_1^2$  нужно взять несколько иную величину. Учитывая это изменение, найдем, что выражение (v) имеет определенное значение, которое является искомым значением  $\mu^2$ , обеспечивающим горизонтальность касательной к резонансной кривой в точке  $S$ . Таким же способом можно получить значение  $\mu^2$ , которое делает касательную горизонтальной в точке  $T$ .

Таким образом, последовательность действий при расчете гасителя такова. Для данного веса машины  $W_1$  и ее собственной частоты колебаний  $p_0$  выбираем определенный вес гасителя  $W_2$ . Коэффициент жесткости гасителя найдем теперь из формулы (75), а затем значение вязкого сопротивления — из формулы (v). Наконец, определим амплитуду вынужденных колебаний из формулы (76). Для упрощения вычислений можно воспользоваться кривыми рис. 151. По оси абсцисс

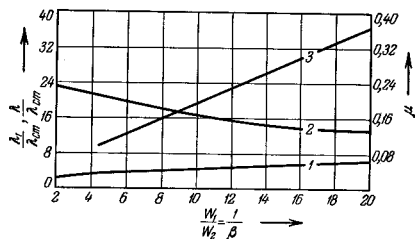


Рис. 151.

отложены отношения  $W_1/W_2 = 1/\beta$ . Ординаты кривой 1 дают отношения  $\lambda_1/\lambda_{ct}$ , определяющие амплитуды колебаний груза  $W_1$ . Кривая 2 определяет необходимое вязкое сопротивление.

Остается теперь рассчитать пружину гасителя. Коэффициент жесткости определяется из соотношения (75). Наибольшее напряжение в пружине, возникающее при колебаниях, можно найти, если известно максимальное относительное перемещение  $\lambda = (x_2 - x_1)_{\max}$ . Точное вычисление этой величины требует сложного исследования

движения груза  $W_2$ . Удовлетворительное приближение можно получить, принимая, что колебания системы отстанут на  $90^\circ$  от действующей на груз  $W_1$  переменной силы  $P \cos \omega t$ . В таком случае, работа, совершаемая за цикл, равна (см. стр. 83)

$$\pi P \lambda_1.$$

Энергия, рассеиваемая за цикл вследствие действия сил сопротивления, пропорциональных относительной скорости, равна (см. стр. 83)

$$\pi a \omega \lambda^2.$$

Приравнявая рассеянную энергию работе, совершаемой за цикл, получаем:

$$\pi P \lambda_1 = \pi a \omega \lambda^2,$$

откуда

$$\lambda^2 = \frac{P \lambda_1}{a \omega}$$

или, вводя прежние обозначения,

$$\mu = \frac{\alpha g}{2 W_2 P_0}, \quad \frac{P}{k_1} = \lambda_{cr}, \quad \frac{W_2}{W_1} = \beta,$$

получим:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_{cr}} \frac{1}{2\mu\beta}. \quad (77)$$

Так как  $\mu$  и  $\beta$  обычно малы, то определяемое из этого уравнения перемещение  $\lambda$  будет в несколько раз больше, чем перемещение  $\lambda_1$  груза  $W_1$ . Значения отношения  $\lambda/\lambda_{cr}$  показаны на рис. 151 кривой 3.

Большие перемещения вызывают большие напряжения в пружине гасителя, и так как при колебаниях эти напряжения меняют знак, то большую важность приобретает вопрос достаточной надежности в отношении усталостного разрушения. Изложенная теория гасителя колебаний может быть применена также к случаю крутильных колебаний. Главной областью применения гасителей являются двигатели внутреннего сгорания. Применение гасителя с сухим трением в случае крутильных колебаний изложено в § 42.

**35. Устойчивость установившегося режима движения.** — В предыдущих примерах всюду рассматривались колебания механических систем около состояния *статического равновесия*. Возможны также колебания относительно установившегося состояния движения или, как можно назвать, состояния *динамического равновесия*. Например, установившееся вращение конического маятника относительно вертикальной оси представляет установившийся процесс движения, в котором остается постоянным наклон нити маятника к вертикали. После малого возмущения конический маятник будет совершать малые колебания около этого установившегося состояния движения

почти так же, как простой маятник, совершающий колебания около состояния равновесия после возмущения. Подобно этому вращающийся волчок, совершающий под действием силы тяжести регулярную прецессию, находится в установившемся состоянии движения. После малого возмущения ось волчка начнет совершать малые высокочастотные колебания около установившегося режима прецессии.

Во всех случаях этого рода важно знать, является ли данное установившееся состояние движения *устойчивым* или *неустойчивым*. Основной вопрос можно сформулировать так: если вызваны малые колебания относительно установившегося состояния, то будут ли они иметь тенденцию к исчезновению, так что восстановится установившееся состояние, или они будут нарастать со временем, так что установившийся процесс совершенно нарушится? Для решения этого вопроса применяется следующий общий способ: 1) предполагается, что вызвано малое отклонение от установившейся формы движения; 2) исследуются результирующие колебания системы около установившегося движения, вызванные малым отклонением; 3) если эти колебания, как в случае колебаний с вязким сопротивлением в предыдущем параграфе, имеют тенденцию к затуханию, то мы заключаем, что установившееся движение устойчиво; в противном случае это движение неустойчиво. Таким образом, вопрос об устойчивости движения требует исследования малых колебаний около установившегося движения системы, возникающих вследствие предположенных произвольных отклонений или смещений от установившейся формы движения. Математически такое исследование приводит к системе линейных дифференциальных уравнений, подобных уравнениям (d) предыдущего параграфа, и решение вопроса об устойчивости или неустойчивости движения зависит от корней алгебраического уравнения, подобного уравнению (g), стр. 207. Если все корни имеют отрицательные действительные части, как было в случае, рассмотренном в предыдущем параграфе, то колебания, вызванные произвольным возмущением, будут затухать и, следовательно, рассматриваемое установившееся движение устойчиво. В противном случае установившееся движение неустойчиво.

После того как установлены определенные требования, относящиеся к коэффициентам алгебраического уравнения, следующего из дифференциальных уравнений, подобных уравнениям (d), можно судить о знаках действительных частей корней без решения уравнений\*). Если имеется, например, кубическое уравнение

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0,$$

\*) Эти правила были установлены Пауэсом. См. E. J. Routh, On the Stability of a Given Motion, Лондон, 1877, и его книги Rigid Dynamics, Лондон, т. 2, 1892, а также цит. на стр. 208 статью Гурвица.



то все его корни будут иметь отрицательные действительные части, и соответственно движение будет устойчиво, если все коэффициенты уравнения положительны и если

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \quad (4)$$

В случае уравнения четвертой степени

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0$$

для устойчивости движения также необходимо, чтобы все коэффициенты были положительны и чтобы, кроме того,

$$a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0. \quad (5)$$

Применим этот общий способ решения задач устойчивости к частным случаям. В качестве первого примера рассмотрим устойчивость вращения маятника относительно его вертикальной оси  $OO$  (рис. 152).

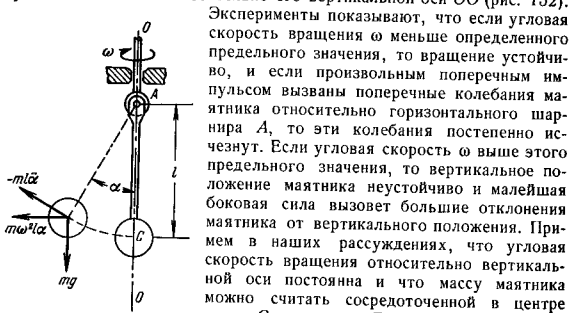


Рис. 152.

Эксперименты показывают, что если угловая скорость вращения  $\omega$  меньше определенного предельного значения, то вращение устойчиво, и если произвольным поперечным импульсом вызваны поперечные колебания маятника относительно горизонтального шарнира  $A$ , то эти колебания постепенно исчезнут. Если угловая скорость  $\omega$  выше этого предельного значения, то вертикальное положение маятника неустойчиво и малейшая боковая сила вызовет большие отклонения маятника от вертикального положения. Примем в наших рассуждениях, что угловая скорость вращения относительно вертикальной оси постоянна и что массу маятника можно считать сосредоточенной в центре груза  $C$  маятника. Если имеется поперечное движение маятника, определяемое малым углом  $\alpha$ , то возникнут силы инерции,

действующие как показано на рис. 152. В соответствии с принципом Даламбера, алгебраическая сумма моментов этих сил и силы веса  $mg$  относительно точки  $A$  должна равняться нулю. Рассматривая  $\alpha$  как малый угол, так что  $\sin \alpha \approx \alpha$  и  $\cos \alpha \approx 1$ , получим из этого условия:

или 
$$m l^2 \ddot{\alpha} - m \omega^2 l^2 \alpha + m g l \alpha = 0$$

Если 
$$\ddot{\alpha} + \left( \frac{g}{l} - \omega^2 \right) \alpha = 0. \quad (6)$$

$$\frac{g}{l} - \omega^2 > 0, \quad (7)$$

то уравнение (6) определяет простое гармоническое колебание, которое вследствие неизбежного трения будет постепенно затухать. Таким образом, в данном случае установившееся вращение маятника устойчиво. Если

$$\frac{g}{l} - \omega^2 < 0, \quad (8)$$

то уравнение (6) будет иметь ту же форму, что и для перевернутого маятника, так что вместо колебаний будет происходить непрерывное возрастание угла  $\alpha$ . Таким образом, в данном случае вращение маятника неустойчиво. Предельное значение угловой скорости равно

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (9)$$

Другими словами, предельная угловая скорость есть скорость, при которой число оборотов в секунду маятника относительно вертикальной оси равно собственной частоте его поперечных колебаний \*).

Если предположить действие на маятник вязкого сопротивления, то получится следующее дифференциальное уравнение вместо уравнения (6):

$$\ddot{\alpha} + 2n\dot{\alpha} + \left( \frac{g}{l} - \omega^2 \right) \alpha = 0. \quad (10)$$

Если условие (7) выполнено, то получатся затухающие колебания. Если имеет место условие (8), то уравнение (10) можно представить в виде:

$$\ddot{\alpha} + 2n\dot{\alpha} - p^2 \alpha = 0,$$

где

$$p^2 = \omega^2 - \frac{g}{l}.$$

Беря решение этого уравнения в виде  $\alpha = e^{st}$ , найдем, что

$$s^2 + 2ns - p^2 = 0,$$

откуда

$$s = -n \pm \sqrt{n^2 + p^2}.$$

Как видим, один из корней положителен. Таким образом, угол  $\alpha$  имеет тенденцию к возрастанию, и вращение неустойчиво.

В качестве второго примера рассмотрим устойчивость установившегося вращения регулятора паровой машины (рис. 153). Вследствие центробежных сил вращающихся грузов, возникает сжатие пружины регулятора втулкой  $B$ , которая находится в непосредственной механической связи с дросселем подачи пара. Если по какой-либо причине скорость машины увеличивается, то также возрастает скорость вращения регулятора, непосредственно связан-

\* [Речь идет о частоте, вычисляемой при отсутствии вращения вокруг оси  $OO'$ .]

ного с валом машины. Тогда грузы поднимутся выше и поднимут за собой втулку, так что отверстие парового клапана  $C$  уменьшится, т. е. машина будет задросселирована. С другой стороны, если скорость машины станет ниже нормальной, то грузы опустятся вниз и вследствие этого отверстие клапана расширится и увеличится доступ пара в машину. Чтобы упростить наш анализ, примем, что масса каждого из грузов равна  $m_1/2$ , а масса втулки равна  $m_1$  и, кроме того, что все массы сосредоточены в центрах тяжести и массами наклонных стержней и пружины можно пренебречь. За координаты

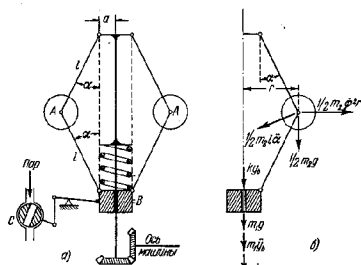


Рис. 153.

наты системы примем угол поворота  $\varphi$  регулятора относительно его вертикальной оси и угол наклона  $\alpha$ , который стержень регулятора составляют с вертикальной осью.

Чтобы исследовать возможные малые колебания системы около состояния установившегося движения, предположим малые изменения угла  $\alpha$ , так что в любой данный момент имеются угловая скорость  $\dot{\alpha}$  и угловое ускорение  $\ddot{\alpha}$  в дополнение к угловой скорости  $\dot{\varphi}$  и угловому ускорению  $\ddot{\varphi}$  относительно вертикальной оси регулятора. Тогда из геометрии системы видно, что втулка будет иметь следующие направленные вверх скорость и ускорение:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_B &= 2l\dot{\alpha} \sin \alpha, \\ \ddot{y}_B &= 2l\ddot{\alpha} \sin \alpha + 2l\dot{\alpha}^2 \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (h')$$

Если теперь, согласно принципу Даламбера, приложить к каждому грузу и втулке силы инерции, соответствующие различным ускорениям, связанным с  $\alpha$ ,  $\dot{\alpha}$  и  $\ddot{\alpha}$ ,  $\varphi$ , то система окажется в динамическом равновесии и можно записать уравнения движения как уравнения статики. Для сравнительно сложных систем, подобных регулятору, это проще всего сделать, пользуясь принципом виртуальных работ. На рис. 153, б показаны различные силы, действующие на систему, включая силы инерции\* и вязкое сопротивление

\* Кроме этого имеются горизонтальные силы инерции каждого груза, соответствующие тангенциальному ускорению  $g\dot{\varphi}$  и кориолисову ускорению, которые не показаны на рис. 153, б.

движению втулки  $B$ . Рассматривая малое виртуальное перемещение  $\delta a$  и приравнявая нулю соответствующую работу всех сил, записываем:

$$m_2 \dot{\varphi}^2 r \cos \alpha \delta \alpha - m_2 \ddot{\alpha} \delta \alpha - m_2 g \sin \alpha \delta a - (ky_B + m_1 g + m_1 \ddot{y}_B + c\dot{y}_B) \cdot 2l \delta a \sin \alpha = 0, \quad (f)$$

где, кроме выражений (h'), для  $\dot{y}_B$  и  $\ddot{y}_B$ :

$$\left. \begin{aligned} r &= a + l \sin \alpha, \\ y_B &= 2l(1 - \cos \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (h'')$$

Рассматривая малое виртуальное перемещение  $\delta \varphi$  и замечая, что каждый груз имеет перпеносное касательное ускорение  $g\dot{\varphi}$  и кориолисово ускорение  $2l\dot{\alpha}\varphi \cos \alpha$ , записываем второе уравнение:

$$M \delta \varphi - [J + m_2 r^2] \ddot{\varphi} \delta \varphi - 2m_2 l \dot{\alpha} \dot{\varphi} \cos \alpha r \delta \varphi = 0, \quad (j)$$

где  $M$  обозначает приведенный вращающий момент, действующий на вал машины, и  $J$  — приведенный момент инерции машины. Используя обозначения (h') и (h'') и перегруппировав члены, можно представить уравнения (i) и (j) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha}^2 (m_2 + 4m_1 \sin^2 \alpha) - \\ - m_2 l \cos \alpha (a + l \sin \alpha) \dot{\varphi}^2 + 4m_1 l^2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 = \\ = -gl \sin \alpha (2m_1 + m_2) - 4kl^2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha) - 4l^2 c \dot{\alpha} \sin^2 \alpha, \\ 2m_2 l \dot{\alpha} \dot{\varphi} (a + l \sin \alpha) \cos \alpha + [J + m_2 (a + l \sin \alpha)^2] \ddot{\varphi} = M. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Рассмотрим сначала установившееся движение, когда  $M=0$ . Тогда  $\dot{\varphi} = \omega_0$ ,  $\ddot{\varphi} = 0$ ,  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\dot{\alpha} = 0$ ,  $\ddot{\alpha} = 0$  и из первого уравнения получаем:

$$m_2 l^2 \cos \alpha_0 (a + l \sin \alpha_0) \omega_0^2 = gl \sin \alpha_0 (2m_1 + m_2) + 4kl^2 \sin \alpha_0 (1 - \cos \alpha_0). \quad (l)$$

Иследуем теперь малые колебания около этого состояния установившегося движения. В таком случае

$$\dot{\varphi} = \omega_0 + \omega \quad \text{и} \quad \alpha = \alpha_0 + \eta, \quad (m)$$

где  $\omega$  обозначает малое изменение угловой скорости вращения и  $\eta$  — малое изменение угла наклона  $\alpha$ . Подставляя выражения (m) в уравнения (k) и удерживая только величины второго порядка малости, можно принять:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}^2 &= \omega_0^2 + 2\omega_0 \omega, \quad \sin \alpha = \sin(\alpha_0 + \eta) = \sin \alpha_0 + \eta \cos \alpha_0, \\ \cos(\alpha_0 + \eta) &= \cos \alpha_0 - \eta \sin \alpha_0. \end{aligned} \right\}$$

Тогда уравнения (k) при учете уравнения (l) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\eta} + b\dot{\eta} + d\eta - e\omega = 0, \\ J_0 \dot{\omega} = -f\eta, \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

где

$$\begin{aligned} m &= l^2 (m_2 + 4m_1 \sin^2 \alpha_0), \quad b = 4cl^2 \sin^2 \alpha_0, \\ d &= m_2 \omega_0^2 [l \sin \alpha_0 (a + l \sin \alpha_0) - l^2 \cos^2 \alpha_0] + gl \cos \alpha_0 (2m_1 + m_2) + \\ &\quad + 4kl^2 [\cos \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0 + \sin^2 \alpha_0], \\ e &= 2\omega_0 l (a + l \sin \alpha_0) m_2, \quad J_0 = J + m_2 (a + l \sin \alpha_0)^2 \end{aligned}$$

и  $f$  обозначает характеристический коэффициент изменения вращающегося момента машины, определяемый как  $\frac{dM}{d\alpha}$  или как  $\frac{\Delta M}{\eta}$ , или, другими словами, параметр, который после умножения на изменение угла  $\eta$  дает изменение вращающегося момента, действующего на вал машины. Таким образом, колебания регулятора около установившегося движения определяются системой линейных уравнений (п). Принимая решения этих уравнений в виде

$$\eta = C_1 e^{st}, \quad \omega = C_2 e^{st}$$

и подставляя эти выражения в (п), получаем:

$$C_1 (ms^2 + bs + d) - eC_2 = 0, \quad C_1 f + J_0 s C_2 = 0.$$

Приравнявая нулю определитель этой системы, находим:

$$J_0 s (ms^2 + bs + d) + ef = 0,$$

или

$$s^3 + \frac{b}{m} s^2 + \frac{d}{m} s + \frac{ef}{mJ_0} = 0.$$

Все постоянные, входящие в это уравнение, положительны\*), так что на основании условия (а) стр. 218 можно утверждать, что движение регулятора будет устойчивым, если

$$\frac{bd}{m^2} > \frac{ef}{mJ_0}.$$

Отсюда следует, что для устойчивости движения величина  $b$ , зависящая от вязкого сопротивления регулятора, должна удовлетворять условию

$$b > \frac{mef}{dJ_0}.$$

Если это условие не выполняется, то колебания регулятора, вызванные внезапным изменением нагрузки на машину, не будут постепенно затухать и будет наблюдаться хорошо известное явление прыгания регулятора\*\*). Метод, использованный выше для анализа устойчивости регулятора, был успешно применен к некоторым другим практическим важным задачам, как, например, флаттер самолета\*\*\*), «шипим» автомобильного колеса\*\*\*\*) и осевые колебания паровых турбин\*\*\*\*\*).

\*) Мы принимаем, что при любом увеличении угловой скорости также возрастает соответствующий угол  $\alpha$ , определяемый уравнением (i). В этом случае выражение для  $d$ , содержащее отрицательные члены, является положительным.

\*\*\*) В случае, когда двигатель жестко связан с электрическим генератором, во второе уравнение (к) войдет дополнительный член, пропорциональный  $\varphi$ , так что вместо уравнений (п) мы получим два уравнения второго порядка. Анализ устойчивости потребует исследования корней уравнения четвертой степени. Такое исследование было выполнено М. Стоуном (см. M. Stone, Trans. A.I.E.E., стр. 332, 1933).

\*\*\*\*) W. B. I. n b a u m, Z. angew. Math. u. Mech., т. 4, стр. 277, 1924.

\*\*\*\*\*) G. В e c k e r, H. F r o m m, H. M a r t h u n, Schwingungen in Automobilen, Берлин, 1931.

\*\*\*\*\*) J. В a k e r, доклад на собрании ASME, Нью-Йорк, дек. 1934.

### 36. Прецессия вращающегося вала, вызванная гистерезисом.

В нашем предыдущем анализе неустойчивости движения вращающегося диска (стр. 39) мы предположили, что материал вала совершенно упругий, и пренебрегли всеми видами неупругих сопротивлений. На основе этого предположения были рассмотрены две формы прецессии вала, возникающей вследствие эксцентрисичности, а именно: 1) ниже критической скорости  $\omega_{кр}$  и 2) выше критической скорости. Было установлено, что в обоих случаях плоскость, содержащая изогнутую ось вала, вращается с той же скоростью, что и сам вал. Оба эти формы движения теоретически устойчивы\*), так что малое отклонение центра тяжести диска от круговой траектории, вызванное, например, ударом, вызовет малые колебания в радиальном и касательном направлениях, накладывающиеся на круговое движение центра тяжести. Наличие такого движения можно продемонстрировать при помощи соответствующего стробоскопа\*\*).

При этом можно также показать, что вследствие неизбежного демпфирования, колебания постепенно затухают, если скорость вала  $\omega_{кр}$ . Однако, если скорость вала выше  $\omega_{кр}$ , иногда может наблюдаться своеобразное явление, когда плоскость изогнутого вала вращается со скоростью  $\omega_{кр}$ , тогда как сам вал вращается с большей скоростью  $\omega$ . Иногда это движение имеет установившийся характер и изгиб вала остается постоянным. В других случаях изгиб стремится возрастать со временем до тех пор, пока диск не наталкивается на ограничительное устройство. Для объяснения этого явления необходимо рассмотреть несовершенство упругих свойств вала.

Опыты с циклическим растяжением—сжатием показывают, что все материалы обнаруживают некоторую гистерезисную характеристику, так что вместо прямой линии AA (рис. 154), представляющей закон Гука, обычно получается петля, ширина которой зависит от заданных в эксперименте предельных значений напряжений. Если нагружение и разгружение повторяется несколько сотен раз, форма петли в конце концов стабилизируется\*\*\*) и площадь петли дает количество энергии, рассеиваемой за цикл вследствие гистерезиса. Исследуем теперь влияние гистерезиса на изгиб вала, рассматривая вначале случай статического изгиба. Предполагаем вал вертикальным, исключим влияние силы веса; примем далее, что вал изогнут статически приложенной боковой силой  $P$ , лежащей в плоскости чертежа (рис. 155). Прогиб  $\delta$  можно принять пропорциональным силе:

$$\delta = kP, \quad (а)$$

\*) Первое исследование этой задачи устойчивости выполнено А. Феллем. См. A. Fö r r i, Civilingenieur, т. 41, стр. 333, 1895.

\*\*\*) Эксперименты такого рода были сделаны Робертсоном. См. D. R o b e r t s o n, Engineer, т. 156, стр. 152, 1933; т. 158, стр. 216, 1934; см. также его работу в Phil. Mag., сер. 7, т. 20, стр. 793, 1935 и доклад на собрании Института инженеров-механиков 31 октября 1935 г. В последних двух работах дана библиография вопроса.

\*\*\*\*) Предполагаем, что пределы нагружения лежат ниже предела выносливости материала.

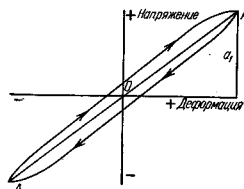


Рис. 154.

где  $k$  — коэффициент жесткости вала. В дальнейшем примем, что срединная плоскость диска является плоскостью симметрии вала, так что при изгибе диск смещается параллельно самому себе. На рис. 155, б в увеличенном масштабе показано поперечное сечение вала; перпендикулярная к плоскости изгиба линия  $ll$  указывает нейтральную ось, так что волокна вала справа от этой линии растянуты, а слева от нее сжаты.

Примем теперь, что в плоскости диска действует вращающий момент, сообщающий валу вращение против часовой стрелки, причем плоскость изгиба вала остается неизменной, т. е. изогнутая ось вала продолжает оставаться

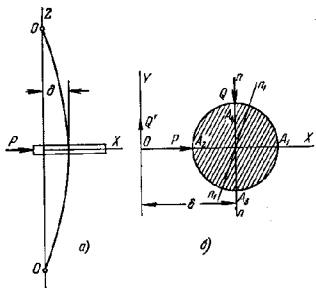


Рис. 155.

в плоскости  $XZ$ . Таким образом, продольные волокна вала будут испытывать переменные напряжения. Например, волокно  $A_1$ , расположенное с выпуклой стороны изогнутого вала, растянуто, но после половины оборота вала это волокно окажется с вогнутой стороны в положении  $A_2$  и будет сжато. В случае идеального материала, следующего закону Гука, соотношение между напряжениями и деформациями дается прямой линией  $AA$  (рис. 154) и распределение напряжений изгиба по всему поперечному сечению вала не будет зависеть от вращения. Однако будет иначе, если материал имеет гистерезисную характеристику. Из петли на рис. 154 видно, что для одной и той же деформации имеется два различных значения напряжения, соответствующих верхней (нагрузка) и нижней (разгрузка) ветвям петли. Возвращаясь к рассмотрению поперечного сечения вращающегося вала на рис. 155, б, мы видим, что в процессе движения волокна из положения  $A_2$  в положение  $A_1$  напряжение меняется от сжатия к растяжению, и соответственно нужно рассматривать верхнюю ветвь петли. Таким же образом мы заключаем, что в процессе движения от  $A_1$  к  $A_2$  нужно рассматривать нижнюю ветвь петли. Отсюда следует, что эффект гистерезиса можно учесть, наложив на статические напряжения, определяемые законом Гука, дополнительные положительные напряжения для волокон, расположенных ниже горизонтального диаметра  $A_1A_2$ , и дополнительные отрицательные напряжения для волокон, расположенных выше  $A_1A_2$ . Такая система напря-

жений соответствует изгибу вала в плоскости  $YZ$ . Физически эти напряжения представляют напряжения, вызываемые силой  $Q$ , которая должна быть приложена к валу, чтобы предотвратить вращение плоскости, содержащей изогнутую ось, при вращении вала.

Из этого рассуждения следует, что при изгибе вала в плоскости  $XZ$  напряжения изгиба создают изгибающий момент, лежащий не в той же плоскости, а в плоскости, наклоненной к плоскости  $XZ$ . Другими словами, нейтральная ось напряжений не совпадает с нейтральной осью  $ll$  деформаций, а занимает положение  $l'l_1$ , несколько наклоненное к  $ll$ . К тому же заключению можно прийти и другим путем. Если рассмотреть волокно  $A_2$  в процессе его перемещения к положению  $A_1$ , то напряжения будут меняться от сжатия к растяжению, так что следует воспользоваться верхней ветвью петли на рис. 155; отсюда видно, что нулевые деформации в положении  $A_2$  соответствуют растягивающему напряжению. Таким же образом, рассматривая нижнюю ветвь петли, найдем, что в  $A_1$  имеется сжимающее напряжение; следовательно, вертикальный диаметр  $A_2A_4$ , соответствующий точкам с нулевыми деформациями, не представляет уже нейтральной оси для напряжений и последняя должна иметь наклонное положение, например  $l_1l_1$ .

Чтобы получить представление о величине силы  $Q$ , заметим, что при вращении вала вследствие гистерезиса рассеивается некоторая энергия. Поэтому для поддержания постоянной скорости вращения диска должен действовать постоянный вращающий момент. Этот момент уравновешивается парой, составленной силой  $Q$  и соответствующими реакциями  $Q'$  подшипников (рис. 155, б). В таком случае работа, совершаемая моментом за один оборот вала, равна

$$2\pi Q\delta. \quad (b)$$

Эта работа должна быть равна энергии, рассеиваемой за цикл вследствие гистерезиса. К сожалению, нет достаточных данных, относящихся к площади петель гистерезиса, но обычно принимается, что она не зависит от частоты \*). Иногда также считают, что она пропорциональна квадрату максимальной деформации \*\*), т. е. в нашем случае энергия, рассеиваемая за цикл, может быть представлена в виде:

$$E = 2\pi D\delta^2, \quad (c)$$

где  $D$  — постоянная, зависящая от гистерезисной характеристики материала вала. Приравняв (b) и (c), находим:

$$Q = D\delta, \quad (d)$$

т. е. сила, необходимая для предотвращения вращения изогнутой оси, пропорциональна прогибу  $\delta$ , вызванному статической нагрузкой.

Если вал расположен горизонтально, то изгиб будет вызываться в вертикальной плоскости силой тяжести  $W$  диска (рис. 156). Приложив к диску вращающий момент, можно придать валу вращение и найти, что вследствие гистерезиса плоскость изгиба примет слегка наклонное положение, определяемое углом  $\varphi$ . Сила тяжести  $W$  вместе с вертикальными реакциями подшипников образует пару с плечом  $c$ , уравновешивающую момент, прило-

\*) [Обзоры многочисленных экспериментальных результатов содержатся в работах: Н. Н. Давиденков, Журнал технической физики, 1938, № 6; Г. С. Лисаренко, Рассеяние энергии при механических колебаниях, изд. АН УССР, Киев, 1962; Е. С. Сорокин, Динамический расчет несущих конструкций зданий, Гостройиздат, М., 1956.]

\*\*) См. статью: A. L. Kimball, D. E. Lovell, Trans. ASME, т. 48, стр. 479, 1926

женный к диску. Этот момент и доставляет энергию, рассеиваемую затем вследствие гистерезиса \*).

После этих предварительных рассуждений выведем дифференциальное уравнение движения центра тяжести диска на вращающемся вертикальном валу, принимая: 1) скорость  $\omega$  вращения вала больше  $\omega_{кр}$ ; 2) плоскость изгиба вала может свободно вращаться вокруг оси  $Z$  (рис. 157); 3) имеется действующий на диск момент, поддерживающий постоянную угловую скорость  $\omega$  вращения вала; 4) диск полностью уравновешен и его центр тяжести находится на оси вала. Совместим, как и выше, плоскость  $XU$  со

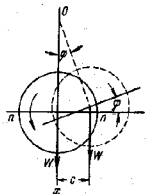


Рис. 156.

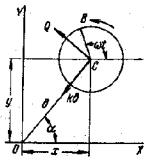


Рис. 157.

срединной плоскостью диска и направим ось  $Z$  вдоль недеформированной оси вала; допустим, что центр поперечного сечения изогнутого вала совпадает с центром тяжести диска, лежащим в точке  $C$ , так что  $OC = \delta$  представляет прогиб вала. Угол  $\alpha$  между  $OC$  и осью  $X$  определяет мгновенное положение плоскости, содержащей кривую изгиба вала. Возьмем некоторый фиксированный радиус вала  $CB$  и определим его угловое положение в процессе равномерного вращения углом  $\omega t$ , измеряемым от оси  $X$  против часовой стрелки. При записи дифференциальных уравнений движения \*\*), центра  $C$  нужно рассмотреть реакцию  $k\delta$  изогнутого вала, направленную по радиусу к оси  $O$ , и дополнительную реакцию в касательном направлении вследствие гистерезиса. Последняя реакция, очевидно, равна и противоположна силе  $Q$  на рис. 155, б, которая необходима для предотвращения плоскости изгиба вала. Примем здесь, что  $\omega > \omega_{кр}$ , так что радиус  $BC$  вращается относительно  $OC$  в направлении против часовой стрелки. Только в этом предположении сила  $Q$  имеет показанное на рис. 157 направление и стремится поддержать вращение плоскости  $OC$  против часовой стрелки. Обозначая через  $m$  массу диска и разлагая силы вдоль осей  $X$  и  $Y$ , получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -k\delta \cos \alpha - Q \sin \alpha, \\ m\ddot{y} &= -k\delta \sin \alpha + Q \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

\*) Это явление бокового изгиба нагруженного вращающегося вала вследствие гистерезиса было исследовано и полностью объяснено Мэйсоном. См. W. Mason, Engineering, т. 115, стр. 698, 1923.

\*\*) Решение этой задачи дано в цитированной на стр. 222 работе Бэкера. Влияние гистерезиса впервые введено в решение задачи о прецессии вала Кимбаллом. См. A. L. Kimball, Phys. Rev., June 1923; Phil. Mag., ser. 6, т. 49, стр. 724, 1925.

Подставляя для  $Q$  выражение (d), можно записать эти уравнения в виде:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + kx + Dy &= 0, \\ m\ddot{y} + ky - Dx &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Решая эти уравнения, примем

$$x = Ce^{pt}, \quad y = C'e^{pt}$$

и найдем обычным путем биквадратное уравнение, корни которого

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 = \pm \sqrt{\frac{-k \pm Di}{m}}$$

Вводя обозначение

$$\sqrt{\frac{-k + Di}{m}} = n + \rho_1 i,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} n &= + \sqrt{\frac{-k + \sqrt{k^2 + D^2}}{2m}}, \\ \rho_1 &= + \sqrt{\frac{k + \sqrt{k^2 + D^2}}{2m}}. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

можно представить общее решение уравнений (f) в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{nt} (-C_1 \sin \rho_1 t + C_2 \cos \rho_1 t) + e^{-nt} (C_3 \sin \rho_1 t - C_4 \cos \rho_1 t), \\ y &= e^{nt} (C_1 \cos \rho_1 t + C_3 \sin \rho_1 t) + e^{-nt} (C_3 \cos \rho_1 t + C_4 \sin \rho_1 t). \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Рассматривая это решение, следует помнить, что для таких материалов, как сталь, касательная сила  $Q$  весьма мала сравнительно с радиальной силой  $k\delta$ . Поэтому величина  $D$  мала по сравнению с  $k$ , и из формул (g) найдем, что  $n$  представляет малую величину, приблизительно равную  $\frac{D}{2\sqrt{km}}$ , и

$$\rho_1 \approx \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_{кр}$$

Пренебрегая в выражениях (h) постепенно затухающими вторыми слагаемыми и представляя тригонометрические части первых членов в виде проекций на оси  $x$  и  $y$  векторов  $C_1$  и  $C_2$ , вращающихся с постоянной скоростью

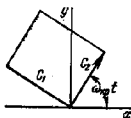


Рис. 158.

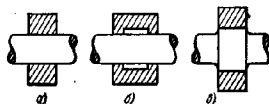


Рис. 159.

$\omega_{кр}$  (рис. 158), заключаем, что изогнутая ось вала вращается против часовой стрелки, причем прогиб, равный  $\delta = \sqrt{x^2 + y^2} = e^{nt} \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ , неограниченно увеличивается.

Необходимо, однако, отметить, что при составлении уравнений (е) мы полностью пренебрегли внешними сопротивлениями, как, например, сопротивлением воздуха. Влияние этих сил может возрасти с изгибом вала, так что в конце концов мы можем получить устойчивую прерывистую вала со скоростью, приблизительно равной  $\omega_{кр}$ .

В случае составного ротора трение между частями ротора в процессе изгиба может оказать точно такое же влияние на прерывистую ротора, как и гистерезис материала вала. Если на вал напесована втулка или ступица (рис. 159, а) и он подвержен переменному изгибу, то поверхностные волокна вала, удлиняясь и укорачиваясь, должны скользить внутри втулки, так что будет происходить некоторое рассеяние энергии вследствие трения. Иногда количество энергии, рассеиваемой вследствие такого трения, значительно превосходит рассеяние энергии вследствие гистерезиса материала и может послужить причиной значительных колебаний роторов, вращающихся со скоростями, большими их критических скоростей\*). Для уменьшения влияния трения размеры втулки в направлении оси вала должны быть уменьшены настолько это возможно; следует избегать конструкции, показанной на рис. 159, б, где опорные поверхности имеются только по концам. Улучшение достигается установкой втулки на утолщении вала (рис. 159, в), которое должно быть выполнено с плавными переходами.

\*) См. В. L. Newkirk, Gen. Elec. Rev., т. 27, стр. 169, 1924.

## ГЛАВА IV

### СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

**37. Свободные колебания систем с несколькими степенями свободы.**—В предыдущей главе мы рассматривали главным образом только системы с двумя степенями свободы. Подобным же образом могут быть рассмотрены системы с более чем двумя степенями свободы, хотя трудности быстро возрастают с увеличением числа степеней свободы. В качестве примера системы с тремя степенями свободы рассмотрим случай, представленный на рис. 160. Здесь показана материальная точка массы  $m$ , удерживаемая на месте тремя простыми пружинами, оси которых не лежат в одной плоскости. Примем, что начало координат  $O$  является положением равновесия точки. Если массу  $m$  несколько отклонить от этого положения, то она начнет колебаться; выясним характер этого движения. Поскольку для определения положения точки необходимы три координаты  $x, y, z$ , система имеет три степени свободы.

Пусть  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  и  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ —направляющие косинусы осей  $DA, DB$  и  $DC$  трех пружин и  $k_1, k_2, k_3$ —коэффициенты жесткости. Тогда для любого положения точки  $m$ , определяемого координатами  $x, y, z$ , силы дополнительного натяжения пружин будут\*):

$$S_i = -k_i (\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z) \quad (а)$$

при условии, что  $x, y, z$  малы по сравнению с длинами пружин. Таким образом, уравнения движения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= S_1\alpha_1 + S_2\alpha_2 + S_3\alpha_3, \\ m\ddot{y} &= S_1\beta_1 + S_2\beta_2 + S_3\beta_3, \\ m\ddot{z} &= S_1\gamma_1 + S_2\gamma_2 + S_3\gamma_3. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

\*) Начальные натяжения пружин, соответствующие положению  $x=y=z=0$ , не учитываются.

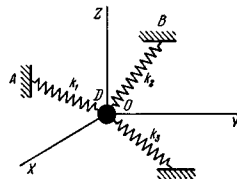


Рис. 160.

Подставляя значения  $S_1, S_2, S_3$  из формулы (а) и группируя подобные члены, легко приведем уравнения (б) к виду:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z &= 0, \\ m\ddot{y} + c_{12}x + c_{22}y + c_{23}z &= 0, \\ m\ddot{z} + c_{13}x + c_{23}y + c_{33}z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

где

$$\begin{aligned} c_{11} &= k_1\alpha_1^2 + k_2\alpha_2^2 + k_3\alpha_3^2, \\ c_{12} &= k_1\alpha_1\beta_1 + k_2\alpha_2\beta_2 + k_3\alpha_3\beta_3, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Поступая теперь так же, как и в § 31, примем решение уравнения (с) в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda_1 \sin(pt + \delta), \\ y &= \lambda_2 \sin(pt + \delta), \\ z &= \lambda_3 \sin(pt + \delta). \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (с), получаем:

$$\left. \begin{aligned} (c_{11} - mp^2)\lambda_1 + c_{12}\lambda_2 + c_{13}\lambda_3 &= 0, \\ c_{12}\lambda_1 + (c_{22} - mp^2)\lambda_2 + c_{23}\lambda_3 &= 0, \\ c_{13}\lambda_1 + c_{23}\lambda_2 + (c_{33} - mp^2)\lambda_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Эта система алгебраических уравнений может дать значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , отличные от нуля, только при том условии, что ее определитель равен нулю. Приравнявая этот определитель нулю, получим кубическое относительно  $p^2$  частотное уравнение; можно показать, что оно будет иметь три действительных положительных корня, которые мы обозначим через  $p_1^2, p_2^2$  и  $p_3^2$ . Подставляя любой из этих корней, например  $p_1^2$ , в уравнения (е), получим отношения  $\lambda'_1/\lambda'_2$  и  $\lambda'_1/\lambda'_3$ , которые определяют форму колебаний, имеющих частоту  $p_1$ . Эти колебания затем могут быть определены уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda'_1 \sin(p_1t + \delta_1), \\ y &= \lambda'_2 \sin(p_1t + \delta_1), \\ z &= \lambda'_3 \sin(p_1t + \delta_1). \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Как видно, во время движения координаты точки находятся все время в одном и том же отношении; отсюда следует, что движение происходит вдоль прямой линии, проходящей через начало координат. Если  $\alpha', \beta', \gamma'$  — направляющие косинусы этой прямой и  $A'$  — амплитуда колебаний, то можно записать:

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= \alpha' A', \quad \lambda'_2 = \beta' A', \quad \lambda'_3 = \gamma' A', \\ (A')^2 &= (\lambda'_1)^2 + (\lambda'_2)^2 + (\lambda'_3)^2. \end{aligned}$$

Как мы уже видели, уравнения (е) определяют только частоту колебаний и соответствующие отношения амплитуд. Абсолютные значения амплитуд остаются неопределенными, пока в рассмотрение не введены начальные условия движения, поэтому для упрощения можно положить амплитуду  $A' = 1$ , так что

$$\lambda'_1 = \alpha', \quad \lambda'_2 = \beta', \quad \lambda'_3 = \gamma'.$$

Тогда уравнения (f) принимают вид:

$$\begin{aligned} x &= \alpha' \sin(p_1t + \delta_1), \\ y &= \beta' \sin(p_1t + \delta_1), \\ z &= \gamma' \sin(p_1t + \delta_1). \end{aligned}$$

Таким же образом можно получить для частоты  $p_2$ :

$$\begin{aligned} x &= \alpha'' \sin(p_2t + \delta_2), \\ y &= \beta'' \sin(p_2t + \delta_2), \\ z &= \gamma'' \sin(p_2t + \delta_2). \end{aligned}$$

Если в уравнения (е) последовательно подставить амплитуды  $\alpha', \beta', \gamma'$  и  $\alpha'', \beta'', \gamma''$  этих двух нормальных форм колебаний, то получаются следующие две системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} mp_1^2\alpha' &= c_{11}\alpha' + c_{12}\beta' + c_{13}\gamma', \\ mp_1^2\beta' &= c_{12}\alpha' + c_{22}\beta' + c_{23}\gamma', \\ mp_1^2\gamma' &= c_{13}\alpha' + c_{23}\beta' + c_{33}\gamma'; \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

$$\left. \begin{aligned} mp_2^2\alpha'' &= c_{11}\alpha'' + c_{12}\beta'' + c_{13}\gamma'', \\ mp_2^2\beta'' &= c_{12}\alpha'' + c_{22}\beta'' + c_{23}\gamma'', \\ mp_2^2\gamma'' &= c_{13}\alpha'' + c_{23}\beta'' + c_{33}\gamma''. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Умножая первое из уравнений (g) на  $\alpha''$ , второе — на  $\beta''$  и третье — на  $\gamma''$  и затем, складывая их, получим такую же самую правую часть, как и после умножения уравнений (h) соответственно на  $\alpha', \beta', \gamma'$  и их сложения. Отсюда мы заключаем, что

$$mp_1^2(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'') = mp_2^2(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'').$$

Так как  $p_1^2$  и  $p_2^2$  являются двумя различными корнями частотного уравнения \*), то

$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0. \quad (i)$$

Подобный же вывод может быть получен при попарном рассмотрении форм, соответствующих  $p_1^2$  и  $p_2^2$ , а также  $p_1^2$  и  $p_3^2$ . Таким образом, поскольку выражение (i) является условием ортогональности, эти

\*) Мы не рассматриваем особый случай, когда два корня частотного уравнения равны друг другу.

колебания представляют собой колебания вдоль трех взаимно-перпендикулярных прямых линий. Направляющие косинусы этих прямых определяются из систем уравнений типа (g) и (h). Если координатные оси случайно выбраны совпадающими с тремя главными направлениями колебаний, то каждое из уравнений (c) будет содержать только одну координату; эти координаты являются главными координатами системы.

Заключение о том, что главные колебания системы, показанной на рис. 160, являются колебаниями вдоль трех взаимно-перпендикулярных прямых, может быть получено и другим путем. Положим, что точке  $m$  сообщено произвольное начальное перемещение  $s$  от положения равновесия и затем точка отпущена без начальной скорости. В общем случае получится сложное движение точки, которое состоит из некоторой комбинации указанных выше трех главных колебаний. Это следует из того, что при произвольном перемещении  $s$  равнодействующая  $R$  реакций трех пружин, как правило, не совпадает с направлением перемещения  $s$ . Таким образом, точка начнет двигаться не прямо по направлению к началу координат  $O$  и получится пространственная траектория движения.

С другой стороны, движение будет очень простым, если начальное перемещение  $s$  принято по направлению равнодействующей упругой силы, но, конечно, направлено в противоположную сторону. Если это условие выполнено, то предоставленная самой себе точка начнет двигаться вдоль линии начального перемещения, и получится простое гармоническое движение вдоль этой линии.

Таким образом, задача упрощается, если найдены надлежащие направления (существуют три таких возможных направления), по которым следует задать начальное перемещение. Чтобы найти эти направления, начнем с предположения, что такое перемещение произошло и что  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — его составляющие. Тогда из уравнений (c) заключаем, что соответствующие составляющие равнодействующей силы  $R$  равны:

$$\left. \begin{aligned} X &= -c_{11}x - c_{12}y - c_{13}z, \\ Y &= -c_{12}x - c_{22}y - c_{23}z, \\ Z &= -c_{13}x - c_{23}y - c_{33}z. \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

Так как линия действия  $R$  совпадает с перемещением  $s$ , должно также быть:

$$\left. \begin{aligned} X &= -R \frac{x}{s}, \\ Y &= -R \frac{y}{s}, \\ Z &= -R \frac{z}{s}. \end{aligned} \right\}$$

Подставляя эти значения в уравнения (j), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \left(c_{11} - \frac{R}{s}\right)x + c_{12}y + c_{13}z &= 0, \\ c_{12}x + \left(c_{22} - \frac{R}{s}\right)y + c_{23}z &= 0, \\ c_{13}x + c_{23}y + \left(c_{33} - \frac{R}{s}\right)z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (e), заключаем, что для осуществления требуемых условий составляющие  $x$ ,  $y$ ,  $z$  перемещения  $s$  должны находиться в тех же отношениях, что и амплитуды  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  главных форм колебаний. Поэтому направления перемещений  $s$ , для которых линия действия равнодействующей  $R$  может совпасть с перемещением, оказываются теми же самыми, что и найденные выше направления главных координат.

В качестве второго примера системы с тремя степенями свободы рассмотрим случай, показанный на рис. 161, а. Туго натянутая вертикальная струна несет три одинаковые частицы массы  $m$ , расположенные на равных расстояниях. Натяжение  $S$  струны предполагается столь большим, что при малых поперечных перемещениях частиц оно не меняется значительно. Тогда для любой конфигурации системы, определяемой перемещениями  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  (рис. 161, а), дифференциальные уравнения движения принимаем вид:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{y}_1 &= -\frac{S}{a}(2y_1 - y_2), \\ m\ddot{y}_2 &= -\frac{S}{a}(2y_2 - y_1 - y_3), \\ m\ddot{y}_3 &= -\frac{S}{a}(2y_3 - y_2). \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

Принимая решение в виде

$$y_1 = \lambda_1 \cos(pt - \alpha), \quad y_2 = \lambda_2 \cos(pt - \alpha), \quad y_3 = \lambda_3 \cos(pt - \alpha)$$

и подставляя в уравнения (l), находим:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1(p^2 - 2\beta) + \lambda_2\beta &= 0, \\ \lambda_1\beta + \lambda_2(p^2 - 2\beta) + \lambda_3\beta &= 0, \\ \lambda_2\beta + \lambda_3(p^2 - 2\beta) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

где

$$\beta = \frac{S}{ma}.$$

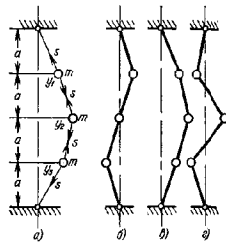


Рис. 161.





которое получается путем сложения уравнений (d), находим:

$$p^2 \{ J_1 J_2 J_3 p^4 - (J_1 J_2 + J_1 J_3) k_2 + (J_2 J_3 + J_1 J_3) k_1 \} p^2 + k_1 k_2 (J_1 + J_2 + J_3) = 0.$$

Это — кубическое уравнение относительно  $p^2$  и один из его корней  $p^2 = 0$ . Этот корень соответствует возможности вращения вала как жесткого тела без всякого кручения. Остальные два корня можно легко найти из квадратного уравнения:

$$J_1 J_2 J_3 p^4 - [k_2 (J_1 J_2 + J_1 J_3) + k_1 (J_2 J_3 + J_1 J_3)] p^2 + k_1 k_2 (J_1 + J_2 + J_3) = 0. \quad (78)$$

Пусть  $p_1^2$  и  $p_2^2$  являются двумя корнями этого уравнения. Подставляя в выражения (e)  $p_1^2$  вместо  $p^2$ , находим:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{k_1}{J_1 p_1^2 - k_1},$$

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = -\frac{k_2}{J_2 p_1^2 - k_2}.$$

Если  $p_1^2$  есть меньший корень, то одно из этих отношений положительно, а другое отрицательно; это значит, что в процессе колебаний два соседних диска вращаются в одном направлении, тогда как третий диск вращается в противоположном направлении. Соответствующая форма колебаний показана на рис. 163, б\*. Для большего корня  $p_2^2$  оба отношения становятся отрицательными и соответствующая высшей частоте форма колебаний показана на рис. 163, в. В процессе этих колебаний средний диск вращается в направлении, противоположном направлению вращения остальных двух дисков.

Рис. 163.

В случае четырех дисков в системе (с) получатся четыре уравнения; поступая, как и в предыдущем случае, мы получим уравнение четвертой степени относительно  $p^2$ . Один из корней равен нулю, так что для вычисления остальных трех корней получится кубическое уравнение. Чтобы упростить запись этого уравнения, введем

\* Предполагается, что  $\frac{J_2}{k_2} > \frac{J_1}{k_1}$ .

обозначения:

$$\frac{k_1}{J_1} = a_1, \quad \frac{k_2}{J_2} = a_2, \quad \frac{k_3}{J_3} = a_3, \quad \frac{k_4}{J_4} = a_4, \quad \frac{k_5}{J_5} = a_5, \quad \frac{k_6}{J_6} = a_6,$$

$$a_1 + a_5 = a_1, \quad a_2 + a_3 = a_2, \quad a_5 + a_6 = a_2.$$

Тогда частотное уравнение примет вид:

$$p^6 - p^4 (a_1 + a_2 + a_3) + p^2 (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 - a_2 a_5 - a_4 a_6) - (a_1 a_2 a_5 - a_5 a_3 a_6 - a_1 a_4 a_6) = 0. \quad (79)$$

Для решения этого уравнения должен быть использован один из приближенных способов вычисления корней алгебраических уравнений высокой степени\*).

Если число дисков больше четырех, то вывод частотного уравнения и его решение становятся слишком сложными и вычисление частот обычно производится одним из приближенных методов, которые будут изложены в следующем параграфе.

*Системы с зубчатыми передачами.* Иногда приходится иметь дело с системами, содержащими вместо единого вала зубчатые передачи (рис. 164, а). Общие дифференциальные уравнения колебаний

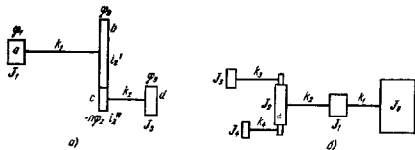


Рис. 164.

таких систем можно получить без труда. Пусть для системы, показанной на рис. 164, а,  $J_1, J_2$  — моменты инерции вращающихся масс;  $\Phi_1, \Phi_2$  — соответствующие углы поворота;  $I_1', I_2'$  — моменты инерции шестерен;  $n$  — передаточное отношение;  $\Psi_2, -n\Phi_2$  — углы поворота шестерен;  $k_1, k_2$  — коэффициенты жесткости валов.

Для дисков  $J_1$  и  $J_2$  дифференциальные уравнения движения запишем, как и выше:

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\Phi}_1 + k_1 (\Phi_1 - \Phi_2) &= 0, \\ J_2 \ddot{\Phi}_2 - k_2 (-n\Phi_2 - \Phi_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Чтобы получить третье уравнение, рассмотрим движение шестерен.

\* Такие методы изложены в упомянутой на стр. 100 книге Зандена.

Применяя принцип Даламбера, находим, что к шестерне  $I_2$  приложен момент

$$k_1(\varphi_1 - \varphi_2) - I_2''\ddot{\varphi}_2,$$

а к шестерне  $I_2$  — момент

$$k_2(n\varphi_2 + \varphi_3) + I_2'n\ddot{\varphi}_2.$$

Условие равенства моментов дает необходимое уравнение движения:

$$k_1(\varphi_1 - \varphi_2) - I_2''\ddot{\varphi}_2 = n[k_2(n\varphi_2 + \varphi_3) + I_2'n\ddot{\varphi}_2]$$

или

$$(I_2'' + n^2 I_2'')\ddot{\varphi}_2 - k_1(\varphi_1 - \varphi_2) + nk_2(n\varphi_2 + \varphi_3) = 0. \quad (g)$$

Введя обозначения

$$I_2'' + n^2 I_2' = J_2, \quad n^2 J_2 = J_2', \\ \varphi_3 = -\varphi_0', \quad k_2 n^2 = k_2',$$

приведем уравнения (f) и (g) к той же форме, что и уравнения (a); тогда, поступая как и ранее, получим нужное частотное уравнение.

Для системы, показанной на рис. 164, б, считая  $J_0$  весьма большим ( $\varphi_0 = 0$ ), а моменты инерции шестерен, связанных с диском  $J_2$ , — весьма малыми, получим следующую систему дифференциальных уравнений движения:

$$J_1\ddot{\varphi}_1 + k_1\varphi_1 - k_2(\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \\ J_2\ddot{\varphi}_2 + k_2(\varphi_2 - \varphi_1) + nk_2(\varphi_2 + n\varphi_2) + nk_2'(\varphi_2 + n\varphi_2) = 0, \\ J_3\ddot{\varphi}_3 + k_2(\varphi_3 + n\varphi_2) = 0, \\ J_4\ddot{\varphi}_4 + k_4(\varphi_4 + n\varphi_2) = 0,$$

откуда тем же способом, что и ранее, может быть получено частотное уравнение; частоты будут являться корнями этого уравнения.

### Пример

Определить собственные частоты колебаний стального вала с тремя дисками (рис. 163, а), если веса дисков равны 1350 кг, 900 кг, 450 кг, диаметры дисков равны 100 см, расстояния между дисками равны  $l_1 = l_2 = 75$  см, диаметр вала равен 13 см и модуль упругости при сдвиге  $G = 0,8 \cdot 10^8$  кг/см<sup>2</sup>. Определить отношения между угловыми отклонениями  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  для двух нормальных форм колебаний.

Решение. Произведя вычисления, найдем:

$$J_1 = 1720, \quad J_2 = 1147, \quad J_3 = 573, \quad k = 30,4 \cdot 10^6.$$

Уравнение (78) принимает вид:

$$\rho^4 - 124\,000\rho^3 + 2620 \cdot 10^6 = 0,$$

откуда

$$\rho_1^2 = 30\,000, \quad \rho_2^2 = 94\,000.$$

Соответствующие частоты равны:

$$f_1 = \frac{\rho_1}{2\pi} = 27,6 \text{ сек}^{-1}, \quad f_2 = \frac{\rho_2}{2\pi} = 48,9 \text{ сек}^{-1}.$$

Отношения амплитуд для основной формы колебаний

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1,44, \quad \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = 2,31.$$

Для высшей формы колебаний

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -0,232, \quad \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = -1,29.$$

### 39. Приближенные методы вычисления собственных частот \*). —

В практических приложениях обычно важна низшая частота или низшие две частоты колебаний вала с несколькими дисками; во многих случаях эти частоты можно приближенно вычислить, используя результаты, полученные для случаев двух или трех дисков. Возьмем в качестве первого примера вал с четырьмя дисками, моменты инерции которых равны  $J_1 = 347$  кг см сек<sup>2</sup>,  $J_2 = 100\,000$  кг см сек<sup>2</sup>,  $J_3 = 1380$  кг см сек<sup>2</sup>,  $J_4 = 0,429$  кг см сек<sup>2</sup>. Коэффициенты жесткости трех участков вала равны:  $k_1 = 363 \cdot 10^6$  кг см/рад,  $k_2 = 131,5 \cdot 10^6$  кг см/рад,  $k_3 = 1,25 \cdot 10^6$  кг см/рад. Так как  $J_1$  и  $J_4$  весьма малы, то при вычислении низшей частоты ими можно пренебречь и рассматривать только два диска  $J_2$  и  $J_3$ . Применяя к этой системе формулу (13), получим:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(J_2 + J_3)k_2}{J_2 J_3}} = 49,5 \text{ сек}^{-1}.$$

Рассматривая колебания диска  $J_1$ , можно принять диск  $J_2$  бесконечно большим и считать, что он не колеблется; тогда частота колебаний диска  $J_1$  по формуле (10) равна

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{J_1}} = 163 \text{ сек}^{-1}.$$

Замечая снова, что диск  $J_4$  весьма мал по сравнению с  $J_2$ , и пренебрегая движением последнего диска, находим:

$$f_3 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_2}{J_4}} = 273 \text{ сек}^{-1}.$$

Более трудоемкие вычисления при помощи соответствующего кубического уравнения дают в этом случае  $f_1 = 49,5$ ,  $f_2 = 163$ ,  $f_3 = 272$ , так что для данных соотношений моментов инерции и жесткости не является необходимым выполнение более точных вычислений.

\*) Сравнение различных приближенных методов было недавно выполнено Клоттером (Ing. Arch., т. 17, стр. 1—61, 1949).

В качестве второго примера рассмотрим систему, показанную на рис. 165, где даны моменты инерции генератора, маховика, шести цилиндров и двух воздушных насосов, а также расстояния между этими массами\*). Вал заменяется эквивалентным валом постоянного сечения (см. стр. 18 и 256) с крутильной жесткостью  $C = 10^{10}$  кг см<sup>2</sup>. Так как массы генератора и маховика значительно больше остальных масс, то для частоты низшей формы колебаний можно получить

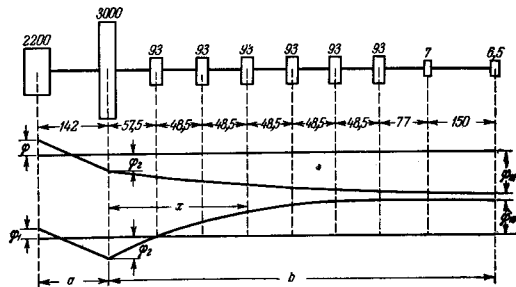


Рис. 165.

хорошее приближение путем замены всех малых масс одной массой, имеющей момент инерции  $J_3 = 93 \cdot 6 + 7 + 6,5 \approx 572$  и расположенной на расстоянии  $57,5 + 2,5 \cdot 48,5 \approx 179$  см от маховика. Приведя таким образом данную систему к системе, содержащей только три массы, можно легко вычислить частоты из уравнения (78):  $p_1^2 = 49\,000$  и  $p_2^2 = 123\,000$ . Точное решение этой задачи дает  $p_1^2 = 49\,840$  и  $p_2^2 = 141\,000$ .

После того как получено приближенное значение частоты, можно повысить точность решения методом последовательных приближений. С этой целью уравнения (с), стр. 235 нужно переписать в виде:

$$\lambda_2 = \lambda_1 - \frac{J_1 p^2}{k_1} \lambda_1, \quad (a)$$

$$\lambda_3 = \lambda_2 - \frac{p^2}{k_2} (J_1 \lambda_1 + J_2 \lambda_2), \quad (b)$$

$$\lambda_4 = \lambda_3 - \frac{p^2}{k_3} (J_1 \lambda_1 + J_2 \lambda_2 + J_3 \lambda_3), \quad (c)$$

.....

\*) Этот пример рассмотрен в книге Хольцера (см. сноску на стр. 241).

Беря теперь грубую оценку значения  $p^2$  и принимая произвольные значения для углового отклонения первого диска  $\lambda_1$ , найдем соответствующее значение  $\lambda_2$  из уравнения (a). Затем из уравнения (b) будет найдено  $\lambda_3$ , из уравнения (c) — значение  $\lambda_4$  и т. д. Если значение  $p^2$  было выбрано правильно, то должно удовлетворяться равенство

$$J_1 \lambda_1 p^2 + J_2 \lambda_2 p^2 + \dots + J_n \lambda_n p^2 = 0,$$

представляющее сумму уравнений (с), стр. 235. В противном случае углы  $\lambda_2, \lambda_3, \dots$  должны быть вычислены вновь с новой оценкой для  $p^2$ ). Удобно представить результаты этих вычислений в форме таблицы. В таблице на стр. 242 даны результаты вычислений для дизельной установки, показанной на рис. 166\*\*). В столбце 1 даны

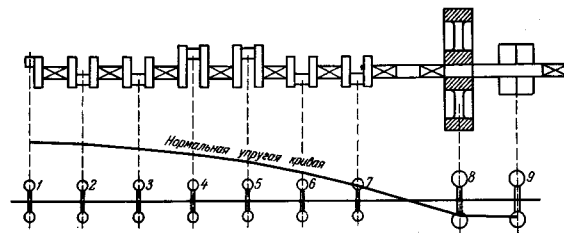


Рис. 166.

моменты инерции масс, причем в качестве единиц приняты сантиметр, килограмм и секунда. Столбец 3 начинается с произвольного значения угла поворота первой массы. Этот угол взят равным единице. Столбец 4 дает моменты сил инерции последовательных масс, а столбец 5 — полные крутящие моменты, обусловленные силами инерции всех масс, расположенных слева от рассматриваемого поперечного сечения. Разделив крутящие моменты на данные в столбце 6 коэффициенты жесткости, получим углы закручивания для последовательных участков вала (столбец 7). Последнее число в столбце 5 представляет сумму моментов сил инерции всех масс. В случае свободных колебаний эта сумма должна быть равна нулю. Взяв при составлении первой таблицы  $p = 96,2$  сек<sup>-1</sup>, найдем, что последнее

\*) Несколько примеров таких вычислений можно найти в работах: Н. Holzer, Die Berechnung der Drehschwingungen, Берлин, 1921. См. также упомянутую книгу Льюиса и Max Tolle, Regelung der Kraftmaschinen, 3-е изд., 1921.

\*\*) Эти результаты взяты из цитированной выше работы Льюиса.



Для практического применения уравнения (h) разделим все эти уравнения на произвольно взятое число  $k/J$ , имеющее размерность  $\text{сек}^{-2}$ , и введем обозначения:

$$\frac{k_1}{J_1} \cdot \frac{k}{J} = c_1, \quad \frac{k_i}{J_{i+1}} \cdot \frac{k}{J} = c'_i, \quad \rho^2 \cdot \frac{k}{J} = x, \quad (i)$$

где  $c_1, c'_i, x$  — безразмерные величины, которые можно легко вычислить для данной системы и принятого значения  $\rho^2$ . При этих обозначениях уравнения (h) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} m_2 c'_1 &= m_1 (c_1 + c'_1 - x), \\ m_3 c'_2 &= m_2 (c_2 + c'_2 - x) - m_1 c_2, \\ m_4 c'_3 &= m_3 (c_3 + c'_3 - x) - m_2 c_3, \\ &\dots \dots \dots \\ m_{n-1} c'_{n-2} &= m_{n-2} (c_{n-2} + c'_{n-2} - x) - m_{n-3} c_{n-2}, \\ m_n &= 0 = m_{n-1} (c_{n-1} + c'_{n-1} - x) - m_{n-2} c_{n-1}. \end{aligned} \right\} (j)$$

При вычислении собственных частот колебаний можно воспользоваться уравнениями (j) таким же образом, как выше мы воспользовались уравнениями (a), (b), (c). Примем произвольное значение  $m_1$ , например  $m_1 = 1$ , примем некоторое значение

$$x = \frac{\rho^2 J}{k}$$

и, пользуясь уравнениями (j), вычислим моменты  $m_2, m_3, \dots$ . Поскольку значение  $x$  было взято произвольно, последнее уравнение (j), как правило, не удовлетворится, и будет необходимо несколько раз повторить вычисления, пока с достаточной степенью точности не будет определено значение  $x$ . Правая часть последнего уравнения (j) является функцией  $x$ , и, повторяя достаточное число раз описанные выше выкладки, можно графически представить эту функцию в виде кривой. Тогда точки пересечения этой кривой с осью  $x$  определяют искомые собственные частоты колебаний системы.

Система уравнений (h) становится особенно простой для вала постоянного сечения и ряда равных и равноотстоящих дисков (однородная машина). Тогда  $J_1 = J_2 = \dots = J_n, k_1 = k_2 = \dots = k_{n-1}$ . Положив в формулах (i)  $k/J = k_1/J_1 = k_2/J_2 = \dots$ , получим:

$$c_i = c'_i = 1,$$

и уравнения (j) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} m_2 &= m_1 (2-x), \\ m_3 &= m_2 (2-x) - m_1, \\ m_4 &= m_3 (2-x) - m_2, \\ &\dots \dots \dots \\ m_{n-1} &= m_{n-2} (2-x) - m_{n-3}, \\ m_n &= m_{n-1} (2-x) - m_{n-2} = 0. \end{aligned} \right\} (k)$$

Сравнивая со значения  $m_1 = 1$ , можно последовательно вычислить крутящие моменты  $m_2, m_3, \dots$ . Мы видим, что любой момент  $m_i$  является полиномом степени  $i-1$  относительно  $x$ . Численные значения коэффициентов этих

полиномов даны в таблице на стр. 246\*). Знак члена, содержащего высшую степень  $x$ , будет  $(-1)^{i-1}$ , а знаки остальных членов чередуются, так что, пользуясь таблицей, получим, например,

$$\begin{aligned} m_3 &= x^2 - 4x + 3, \\ m_4 &= -x^3 + 6x^2 - 10x + 4, \\ m_5 &= x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 20x + 5. \end{aligned}$$

Значения корней  $x_i$  уравнений  $m_i = 0$  табулированы ниже. Используя эти корни, можно легко вычислить собственные частоты  $f_i$  для систем с одинаковыми и равноотстоящими дисками при помощи обозначений (i), которые дают:

$$\left. \begin{aligned} \rho_i &= \sqrt{\frac{x_i k}{J}} \\ f_i &= \frac{\rho_i}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{x_i k}{J}}. \end{aligned} \right\} (l)$$

С возрастанием числа дисков частоты первых форм колебаний будут приближаться к частотам, вычисленным для вала с равномерно распределенной массой. Для такого вала, как мы увидим позднее, последовательные частоты определяются формулой

$$\rho_i = i\pi \sqrt{\frac{k_0}{J_0}}, \quad (m)$$

где  $k_0$  — коэффициент жесткости, вычисленный для полной длины вала, и  $J_0$  — момент инерции вала относительно его оси. Если непрерывно распределенная масса вала заменяется  $n$  сосредоточенными дисками, как показано на рис. 167, то момент инерции каждого отдельного диска составит  $J = J_0/n$  и коэффициент жесткости участка вала между двумя соседними дисками будет  $k = k_0 n$ . При этих обозначениях для  $J$  и  $k$  формула (m) примет вид:

$$\rho_i = \frac{i\pi}{n} \sqrt{\frac{k}{J}}.$$

Сравнивая этот результат с формулой (i), заключаем, что для сплошного вала теория дает числа  $i^2 \pi^2 / n^2$  вместо величин  $x_i$ , данных выше в таблице. Принимая, например,  $n = 12$ , получим для  $i = 1, 2, 3, 4$  значения

$$\frac{i^2 \pi^2}{n^2} = 0,0685; 0,274; 0,617; 1,096.$$

Сравнивая их с числами последнего столбца таблицы, находим, что предположение о непрерывном распределении массы дает для первых двух

\*) Применение этой функции для решения задач крутильных колебаний было введено Граммелем; см. его статьи в Ing.-Arch., т. 2, стр. 228, 1931; т. 3, стр. 76 и 277, 1932; т. 5, стр. 23, 1934. См. также К. Виезено, R. Grammel, Technische Dynamik, Берлин, стр. 985, 1939. [Русский перевод: К. Виезено, Р. Граммель, Техническая динамика, ГТТИ, т. 2, 1952.]

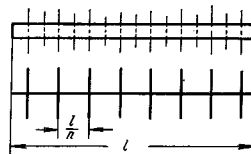


Рис. 167.



Исключая  $m_{n+1}$ , получаем:

$$m_n [(c_n + c'_n - x)(c_{n+1} + c'_{n+1} - x) - c_{n+1}c'_n] = m_{n-1}c_n(c_{n+1} + c'_{n+1} - x). \quad (q)$$

Вновь используя таблицы, можно легко найти численные значения обеих частей этого уравнения для любого принятого значения  $x$ , и корни уравнения, дающие собственные частоты системы, определяются точками пересечения двух кривых, графически представляющих две части уравнения (q).

В случае  $n$  равноотстоящих дисков с моментами инерции  $J$  и двух дополнительных дисков  $J_0$  и  $J_{n+1}$  (рис. 170) момент  $m'_{n+1}$  справа от диска  $J_{n+1}$  равен нулю, и уравнение (п) принимает вид:

$$0 = m'_n(c_n + c'_n - x) - m'_{n-1}c_n. \quad (п')$$

где

$$c_n = \frac{k_n}{J} : \frac{k}{J},$$

$$c'_n = \frac{k_n}{J_{n+1}} : \frac{k}{J}.$$

Мы используем здесь обозначения  $m'_n$  и  $m'_{n-1}$  для того, чтобы отличить эти моменты от табулированных моментов, поскольку на левом конце вала имеется диск  $J_0$ . Чтобы выразить  $m'_n$  и  $m'_{n-1}$  через табулированные моменты, будем рассуждать следующим образом. Сравнивая две системы на рис. 170, б и в, можно видеть, что они в сущности одинаковы и должны иметь одно и то же частотное уравнение. Если начать с крутящего момента, равного единице на первом участке каждого вала, то получатся одинаковые выражения для крутящих моментов справа от последнего диска, т. е.  $m'_n = m_n$ . Для вычисления  $m'_n$  можно с соответствующими изменениями использовать обозначения уравнения (п) и написать:

$$m'_n c'_0 = m'_0(c_0 + c'_0 - x) - m_{n-1}c_0, \quad m'_0 = m_{n-1}(2-x) - m_{n-2} = m_n.$$

где

$$c_0 = \frac{k_0}{J} : \frac{k}{J}, \quad c'_0 = \frac{k_0}{J_0} : \frac{k}{J}$$

и  $m_n, m_{n-1}$  — табулированные моменты.

Подобно этому, сравнивая системы (д) и (е), рис. 170, найдем:

$$m'_{n-1} = m'_{n-1}, \quad m'_{n-1}c'_0 = m'_0(c_0 + c'_0 - x) - m_{n-2}c_0.$$

$$m'_0 = m_{n-1}(2-x) - m_{n-3} = m_{n-1}.$$

Из этих выкладок имеем:

$$m_n = m'_n = m_n(c_0 + c'_0 - x) - m_{n-1}c_0.$$

$$m'_{n-1} = m'_{n-1} = m_{n-1}(c_0 + c'_0 - x) - m_{n-2}c_0.$$

Подставляя в уравнение (п) и замечая, что из последнего уравнения (k)

$$m_{n-2} = m_{n-1}(2-x) - m_n,$$

получим:

$$m_n [(c_0 + c'_0 - x)(c_n + c'_n - x) - c_0c'_n] = m_{n-1} [x(c_0c_n - c_0 - c_n) + c_0c'_n + c'_nc_0].$$

Вновь используя табличные значения  $m_n$  и  $m_{n-1}$ , легко вычислить обе части уравнения для любого принятого значения  $x$ ; искомые частоты определяются точками пересечения двух кривых, как было сказано выше.

Из этих примеров можно видеть, что в случае систем, подобных дизелям, содержащих группы равных и равноотстоящих дисков, вычисление собственных частот значительно упрощается при использовании таблицы Граммеля.

### Задачи

1. Найти собственные частоты для системы, показанной на рис. 171, если

$$\frac{k_1}{J_1} = \frac{25}{9} \cdot 10^{-1} \text{ сек}^{-2}, \quad \frac{k_1}{J_2} = \frac{2}{3} \cdot 10^8 \text{ сек}^{-2},$$

$$\frac{k_2}{J_2} = \frac{2}{9} \cdot 10^6 \text{ сек}^{-2}, \quad \frac{k_2}{J_3} = \frac{1}{63} \cdot 10^7 \text{ сек}^{-2},$$

$$\frac{k_3}{J_3} = \frac{1}{147} \cdot 10^7 \text{ сек}^{-2}, \quad \frac{k_3}{J_4} = \frac{1}{63} \cdot 10^7 \text{ сек}^{-2}.$$

Ответ:  $f_1 = 32,5 \text{ сек}^{-1}$ ,  $f_2 = 70,2 \text{ сек}^{-1}$ ,  $f_3 = 108,8 \text{ сек}^{-1}$ .

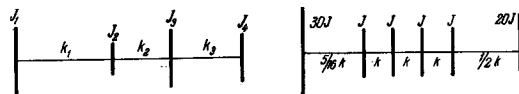


Рис. 171.

Рис. 172.

2. Найти собственные частоты для системы, показанной на рис. 172, если  $\frac{k}{J} = 4 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-2}$ .

Ответ:  $f_1 = 31,9 \text{ сек}^{-1}$ ,  $f_2 = 141 \text{ сек}^{-1}$ ,  $f_3 = 308,8 \text{ сек}^{-1}$ ,  
 $f_4 = 475,6 \text{ сек}^{-1}$ ,  $f_5 = 593,3 \text{ сек}^{-1}$ .

40. Вынужденные крутильные колебания вала с несколькими дисками. — Если к одному из дисков (рис. 173) приложен момент  $M_t \sin \omega t$ , то возникнут вынужденные колебания с периодом  $\tau = 2\pi/\omega$ ; колебания каждого диска будут вида  $\lambda \sin \omega t$ . Проиллюстрируем на примере последовательности вычисления амплитуд вынужденных колебаний.



Рассмотрим вал с четырьмя дисками (рис. 173), моменты инерции которых равны  $J_1 = 894$ ,  $J_2 = 595$ ,  $J_3 = J_4 = 150$  и коэффициенты жесткости составляют  $k_1 = 28,3 \cdot 10^8$ ,  $k_2 = k_3 = 42,3 \cdot 10^8$  (единицами служат сантиметр, килограмм и секунда). Примем, что переменный момент  $M_1 \sin \omega t$  действует на первый диск и что необходимо найти амплитуды вынужденных колебаний всех дисков для данной частоты

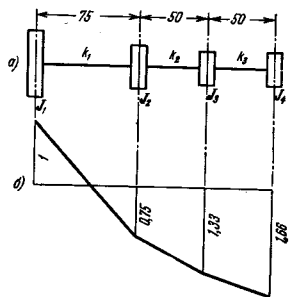


Рис. 173.

$\omega = \sqrt{31150} \text{ сек}^{-1}$ . Дифференциальные уравнения движения в данном случае имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= M_1 \sin \omega t, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - k_1 (\varphi_1 - \varphi_2) + k_2 (\varphi_2 - \varphi_3) &= 0, \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 - k_2 (\varphi_2 - \varphi_3) + k_3 (\varphi_3 - \varphi_4) &= 0, \\ J_4 \ddot{\varphi}_4 - k_3 (\varphi_3 - \varphi_4) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Подставляя в эти уравнения

$$\varphi_1 = \lambda_1 \sin \omega t, \quad \varphi_2 = \lambda_2 \sin \omega t, \quad \dots,$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} J_1 \lambda_1 \omega^2 - k_1 (\lambda_1 - \lambda_2) &= -M_1, \\ J_2 \lambda_2 \omega^2 + k_1 (\lambda_1 - \lambda_2) - k_2 (\lambda_2 - \lambda_3) &= 0, \\ J_3 \lambda_3 \omega^2 + k_2 (\lambda_2 - \lambda_3) - k_3 (\lambda_3 - \lambda_4) &= 0, \\ J_4 \lambda_4 \omega^2 + k_3 (\lambda_3 - \lambda_4) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Сложив эти уравнения, найдем:

$$\omega^2 (J_1 \lambda_1 + J_2 \lambda_2 + J_3 \lambda_3 + J_4 \lambda_4) = -M_1. \quad (c)$$

Если  $\lambda_1$  является амплитудой колебаний первого диска, то амплитуду колебаний второго диска найдем из первого уравнения (b):

$$\lambda_2 = \lambda_1 - \frac{J_1 \lambda_1}{k_1} \omega^2 - \frac{M_1}{k_1}. \quad (d)$$

Подставляя это выражение во второе уравнение (b), найдем  $\lambda_3$  и из третьего уравнения (b) найдем  $\lambda_4$ . Таким образом, все амплитуды будут выражены через  $\lambda_1$ . Подставив их в выражение (c), получим линейное уравнение относительно  $\lambda_1$ .

Все вычисления удобно расположить в виде следующей таблицы. Начнем с первой строки таблицы. Пользуясь данными численными

| 1   | 2   | 3  | 4                                       | 5  |
|-----|---|--|---|--|
| $J$ | $\lambda$                                   | $J\omega^2 \lambda$                      | $\sum J\omega^2 \lambda$                | $\frac{1}{k} \sum J\omega^2 \lambda$       |
| 894 | $\lambda_1$                                 | $27,8 \cdot 10^8 \lambda_1$              | $27,8 \cdot 10^8 \lambda_1$             | $0,984 \lambda_1$                          |
| 595 | $0,016 \lambda_1 - 3,54 \cdot 10^{-8} M_1$  | $0,295 \cdot 10^8 \lambda_1 - 0,655 M_1$ | $28,1 \cdot 10^8 \lambda_1 - 0,655 M_1$ | $0,666 \lambda_1 - 1,65 \cdot 10^{-8} M_1$ |
| 150 | $-0,655 \lambda_1 - 4,36 \cdot 10^{-8} M_1$ | $-3,02 \cdot 10^8 \lambda_1 - 0,203 M_1$ | $25,1 \cdot 10^8 \lambda_1 - 0,858 M_1$ | $0,598 \lambda_1 - 2,03 \cdot 10^{-8} M_1$ |
| 150 | $-1,24 \lambda_1 - 4,69 \cdot 10^{-8} M_1$  | $-5,89 \cdot 10^8 \lambda_1 - 0,219 M_1$ | $19,3 \cdot 10^8 \lambda_1 - 1,077 M_1$ |  |

значениями  $J_1 \omega^2$  и  $k_1$ , вычисляем  $J_1 \omega^2$  и  $J_1 \omega^2 / k_1$ . Во второй строке дано вычисление  $\lambda_2$  при помощи уравнения (d) и последнего результата, содержащегося в первой строке. Таким образом, получается выражение, стоящее во втором столбце второй строки. Умножая его на  $J_2 \omega^2$ , получим выражение, стоящее в третьем столбце второй строки. Складывая его с выражением, стоящим в четвертом столбце первой строки, и деля затем на  $k_2$ , найдем последние два члена второй строки. Имея эти величины и используя второе уравнение (b) для вычисления  $\lambda_3$ , начинаем третью строку и затем продолжаем вычисления, как и выше. Наконец, мы получим выражение, стоящее в четвертом столбце четвертой строки, которое представляет левую часть уравнения (c). Подставляя это выражение в уравнение (c), находим уравнение для вычисления  $\lambda_1$ :

$$19,3 \cdot 10^8 \lambda_1 - 1,077 M_1 = -M_1.$$

Оно дает

$$\lambda_1 = \frac{0,077 M_1}{19,3 \cdot 10^8}.$$

Если это значение  $\lambda_1$  подставить в выражения, содержащиеся во втором столбце, то получаются амплитуды вынужденных колебаний всех

дисков. Имея эти амплитуды, можно вычислить углы закручивания вала между последовательными дисками, так как они равны  $\lambda_1 - \lambda_2$ ,  $\lambda_2 - \lambda_3$  и  $\lambda_3 - \lambda_4$ . По этим значениям углов закручивания и данным размерам вала можно, применяя известную формулу сопротивления материалов, найти касательные напряжения, развивающиеся при вынужденных колебаниях.

**Влияние демпфирования на крутильные колебания при резонансе.** Если период внешнего гармонического момента совпадает с периодом одной из нормальных форм колебаний системы, то наступает резонанс. Эта форма колебаний становится весьма ясно выраженной, и для того, чтобы получить истинные значения амплитуд колебания, нужно ввести в рассмотрение силы неупругого сопротивления<sup>\*</sup>).

Принимая, что сила неупругого сопротивления пропорциональна скорости, и пренебрегая влиянием этой силы на форму колебаний, т. е. предполагая, что отношения между амплитудами установившихся вынужденных колебаний вращающихся масс такие же, как и для соответствующих форм свободных колебаний<sup>\*\*</sup>), можно вычислить приближенные значения амплитуд вынужденных колебаний следующим образом: пусть  $\varphi_m = \lambda_m \sin pt$  — угол поворота при колебаниях  $m$ -го диска, на который действует вязкое сопротивление. Тогда момент сил вязкого сопротивления равен

$$-c \frac{d\varphi_m}{dt} = -c \lambda_m p \cos pt,$$

где  $c$  — постоянная, зависящая от условий демпфирования. При резонансе сдвиг фаз между моментом, вызывающим вынужденные колебания, и угловым перемещением должен составлять  $90^\circ$ . Этот момент запишем в виде  $M_t \cos pt$ . Принимая  $\varphi_n = \lambda_n \sin pt$  для угла поворота  $n$ -й массы, на которую действует внешний момент, найдем амплитуду вынужденных колебаний из условия, что в установившемся процессе вынужденных колебаний работа, совершаемая гармоническим моментом за одно колебание, должна быть равна энергии, рассеиваемой в сечении, испытывающем действие вязкого сопротивления. Таким

<sup>\*</sup> Приближенный метод расчета вынужденных колебаний с силами неупругого сопротивления предложен Видлером. См. H. W y d l e r, Dreh-schwingungen in Kolbenmaschinenanlagen, Берлин, 1922. См. также цитированную на стр. 109 работу Льюиса; John F. Fox, Some Experiences with Torsional Vibration Problems in Diesel Engine Installations (J. Am. Soc. Nav. Engrs., 1926); G. G. E i c h e l b e r g, Torsionsschwingungsausgleich (Festschrift Prof. Dr. A. Stodola zum 70. Geburtstag, Цюрих, стр. 122, 1929); Albert Stieglitz, Neuere Ergebnisse auf dem Gebiet der Kurbelwellen Schwingungen (Jahrb. deut. Versuchsanstalt f. Luftfahrt, стр. 281, 1930; Luftfahrtforschung, т. 4, стр. 133, 1929).

<sup>\*\*</sup> [В ряде случаев форма колебаний демпфированной системы при резонансе точно совпадает с соответствующей нормальной формой той же системы без демпфирования (см. Я. Г. Пановко, Внутреннее трение при колебаниях упругих систем, Физматгиз, М., 1960, стр. 58—59).]

образом, получим:

$$\int_0^{2\pi/p} c \frac{d\varphi_m}{dt} \frac{d\varphi_m}{dt} dt = \int_0^{2\pi/p} M_t \cos pt \frac{d\varphi_n}{dt} dt,$$

или, подставляя

$$\varphi_m = \lambda_m \sin pt, \quad \varphi_n = \lambda_n \sin pt,$$

получим:

$$\lambda_m = \frac{M_t}{cp} \frac{\lambda_n}{\lambda_m}, \quad (e)$$

и амплитуда колебаний первой массы будет равна

$$\lambda_1 = \frac{M_t}{cp} \frac{\lambda_n}{\lambda_m} \frac{\lambda_1}{\lambda_m}. \quad (f)$$

Зная постоянную демпфирования  $c$  и беря отношения  $\lambda_n/\lambda_m$  и  $\lambda_1/\lambda_m$  нормальной формы колебаний (рис. 166), можно вычислить амплитуды вынужденных колебаний, вызываемых гармоническим моментом при вязком сопротивлении, действующем в определенном сечении вала.

Вновь рассмотрим пример четырех дисков, показанных на рис. 173. Методом последовательных приближений найдем с достаточной точностью, что угловая частота низшей формы колебаний приблизительно равна  $p = 235 \text{ сек}^{-1}$  и что отношение амплитуд для этой формы колебаний составляет  $\lambda_2/\lambda_1 = -0,752$ ,  $\lambda_3/\lambda_1 = -1,33$ ,  $\lambda_4/\lambda_1 = 1,66$ . Соответствующая нормальная форма колебаний показана на рис. 173, б. Примем теперь, что периодический момент  $M_t \cos pt$  приложен к первому диску и что вязкое сопротивление приложено к четвертому диску<sup>\*</sup>). Тогда из выражения (f)

$$\lambda_1 = \frac{M_t}{cp} \frac{\lambda_1}{\lambda_4} \frac{\lambda_1}{\lambda_4}.$$

Подставляя значение отношения  $\lambda_1/\lambda_4$ , соответствующее нормальной форме колебаний, находим:

$$\lambda_1 = 0,36 \frac{M_t}{cp}.$$

Отсюда можно вычислить амплитуду  $\lambda_1$  для любого данного значения момента  $M_t$  и любого данного значения коэффициента  $c$ .

Если на вал действует несколько гармонических моментов, имеющих одинаковые частоты  $\omega$ , то результирующую амплитуду  $\lambda_1$  первой массы можно получить по данной выше формуле (f) при помощи принципа наложения. Она будет равна

$$\lambda_1 = \frac{1}{cp} \frac{\lambda_1}{\lambda_m^2} \sum M_t \lambda_n, \quad (g)$$

<sup>\*</sup> Последовательность выкладки сохраняется, если вязкое сопротивление приложено к любому другому диску.

где знак суммирования обозначает векторную сумму, так что каждый момент берется соответственно его фазе.

В действительных случаях внешние моменты имеют обычно более сложную природу. Например, создаваемый отдельным цилиндром дизеля вращающий момент зависит от положения кривошипа, давления газа и сил инерции. Кривая вращающего момента каждого цилиндра может быть построена по соответствующей диаграмме давления газа с учетом сил инерции возвратно-поступательно движущихся масс. При исследовании вынужденных колебаний эта кривая должна быть представлена в виде тригонометрического ряда\*):

$$f(\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots + b_1 \sin \varphi + b_2 \sin 2\varphi + \dots, \quad (h)$$

период период кривой равен  $2\pi$ . Этот период соответствует одному обороту вала в двухтактном двигателе и двум оборотам в четырехтактном двигателе. Условия резонанса наступают каждый раз, когда частота какого-либо члена ряда (h) совпадает с частотой одной из нормальных форм колебаний вала. Таким образом, для отдельного цилиндра в двухтактном двигателе получатся критические скорости порядка 1, 2, 3, ..., причем номер указывает число циклов колебаний за один оборот вала. В случае четырехтактного двигателя критические скорости имеют порядок  $1/2, 1, 1\frac{1}{2}, \dots$  Для каждой нормальной формы колебаний существует последовательность таких критических скоростей. Амплитуду вынужденных колебаний данной формы, вызванных отдельным цилиндром, можно вычислить как было объяснено выше. Чтобы получить суммарное влияние всех цилиндров, нужно применить принцип наложения, беря в соответствующей фазе вращающий момент от каждого цилиндра. В частных случаях, когда число колебаний за оборот равно или кратно числу вспышек (главная критическая скорость), сдвиг фаз равен нулю и колебания, вызванные отдельными цилиндрами, будут попросту складываться. Несколько примеров вычисления амплитуд вынужденных колебаний можно найти в работах Видлера и Льюиса\*\*). Они содержат также значения рассеивания энергии в таких частях машин, как гребные винты, генераторы и цилиндры двигателя, а также значения энергетических потерь вследствие внутреннего трения\*\*\*). Приложение

\*) Примеры такого разложения можно найти в цитированных работах Видлера (стр. 252) и Льюиса (стр. 109). См. также работу: F. Porter, Trans. ASME, т. 50, стр. APM-25, 1928.

\*\*) См. предыдущую сноску.

\*\*\*) Библиографию этого предмета и некоторые новые значения внутреннего трения можно найти в диссертации Лера: E. Lehr, Die Abkürzungsverfahren zur Ermittlung der Schwingungsfestigkeit, Штутгарт, 1925. См. также E. Jaquet, Festschrift Prof. Dr. A. Stodola zum 70. Geburtstag, Цюрих, стр. 308, 1929; S. F. Dorey, Proc. Inst. Mech. Engrs. (Лондон), т. 123, стр. 479, 1932; G. Föppel, Iron and Steel Institute, окт. 1936.

описанного приближенного метода к частным случаям дает амплитуды вынужденных колебаний и соответствующие максимальные напряжения с достаточной точностью.

41. Крутильные колебания коленчатого вала дизеля. — До сих пор мы имели дело с прямолинейным валом, несущим несколько жестких дисков. Существуют, однако, случаи, в которых задача о крутильных колебаниях более сложна. Примером такой задачи являются крутильные колебания коленчатого вала дизеля. Вместо цилиндрического вала здесь имеется коленчатый вал сложной формы, а вместо вращающихся круглых дисков — вращающиеся кривошипы, связанные с возвратно-поступательно движущимися массами двигателя. При замене коленчатого вала эквивалентным цилиндрическим валом прежде всего нужно установить крутильную жесткость одного кривошипа (рис. 174). Эта жесткость зависит от условий закрепления в

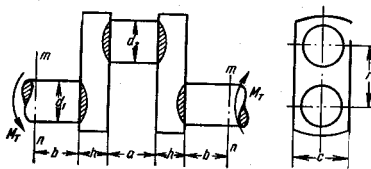


Рис. 174.

подшипниках. Угол закручивания, вызываемый парами  $M_t$ , можно легко получить, предполагая, что зазоры в подшипниках не препятствуют свободе смещений поперечных сечений  $m$  при кручении. При этом нужно учесть деформации трех видов: а) кручение шатунной шейки; б) кручение коренных шеек и в) изгиб шеек.

Пусть  $C_1 = \frac{\pi d_1^4 G}{32}$  — крутильная жесткость шатунной шейки;  $C_2 = \frac{\pi d_2^4 G}{32}$  — крутильная жесткость коренной шейки;  $B = \frac{hc^3}{12} E$  — изгибная жесткость шеек.

Чтобы учесть местные деформации вследствие кручения стенки в заштрихованных на чертеже областях, длины шатунной шейки и коренной шейки принимаются равными  $2b_1 = 2b + 0,9h$  и  $a_1 = a + 0,9h$  соответственно\*). Угол закручивания  $\theta$  вала, вызванный парами  $M_t$ ,

\*) Это предположение находится в хорошем соответствии с выполненными экспериментами См. Dr. Seelmann, Z. Ver. Deut. Ing., т. 69, стр. 601, 1925; F. Süss, Maschinenbau, т. 4, стр. 1223, 1925. См. также цитированную работу Льюиса (стр. 109).

равен

$$\theta = \frac{2b_1 M_t}{C_1} + \frac{a_1 M_t}{C_2} + \frac{2r M_t}{B}.$$

При определении крутильных колебаний коленчатого вала каждый кривошип должен быть заменен эквивалентным валом постоянного поперечного сечения, имеющим крутильную жесткость  $C$ . Длина  $l$  эквивалентного вала определяется равенством

$$\frac{M_t l}{C} = \theta,$$

в котором  $\theta$  — вычисленный выше угол закручивания. Тогда длина эквивалентного вала

$$l = C \left( \frac{2b_1}{C_1} + \frac{a_1}{C_2} + \frac{2r}{B} \right). \quad (80)$$

Другой крайний случай получится в предположении, что в подшипниках осуществляется полная заделка, соответствующая отсутствию зазоров. В этом случае длина  $l$  эквивалентного вала определяется формулой \*)

$$l = C \left\{ \frac{2b_1}{C_1} + \frac{a_1}{C_2} \left( 1 - \frac{r}{k} \right) + \frac{2r}{B} \left( 1 - \frac{r}{2k} \right) \right\}, \quad (81)$$

в которой

$$k = \frac{\frac{r(a+h)^2}{4C_3} + \frac{ar^2}{2C_2} + \frac{a^3}{24B_1} + \frac{r^3}{3B} + \frac{1,2}{G} \left( \frac{a}{2F} + \frac{r}{F_1} \right)}{\frac{ar}{2C_2} + \frac{r^2}{2B}}; \quad (82)$$

$C_3 = \frac{Gh^3}{3,6(c^2 + h^2)}$  — крутильная жесткость шейки, рассматриваемой как стержень прямоугольного сечения со сторонами  $h$  и  $c$ ;  $B_1 = \frac{\pi d_1^4 E}{64}$  — изгибная жесткость коренной шейки и шейки соответственно. Беря  $a_1 = 2b_1$  и  $C_1 = C_2$ , видим из формулы (80) и (81), что полная заделка уменьшает эквивалентную длину вала в отношении

\*) Подробное рассмотрение кручения коленчатого вала дано автором в Trans. ASME, т. 44, стр. 653, 1922. См. также S. Timoshenko, J. M. Lessells, Applied Elasticity, стр. 188, 1924. [Русский перевод: С. Тимошенко, Дж. Лессельс, Прикладная теория упругости, ГНТИ, 1931.] Дальнейшее исследование этого вопроса и библиографию можно найти в статье: R. Grammel, Ing.-Arch. т. 4, стр. 287, 1933, в докторской диссертации А. Кimmel, Stuttgart, 1935 и в работе W. A. Tuplin, The Torsional Rigidity of Crankshafts, Engineering, т. 141, стр. 275, 1937. Существуют также эмпирические формулы для вычисления эквивалентной длины, см. В. С. Carter, Engineering, т. 126, стр. 36, 1928; С. А. Norman, K. W. Stinson, SAE Journal, т. 23, стр. 83, 1928.

$\frac{1}{1 - (r/2k)}$ . В действительных условиях длина эквивалентного вала имеет промежуточное значение между рассмотренными выше двумя крайними случаями.

Другой вопрос, который нужно решить при рассмотрении крутильных колебаний коленчатого вала, состоит в вычислении инерции движущихся масс. Примем, что масса  $m$  шатуна заменена обычным способом \*) двумя массами  $m_1 = (J/I^2)$  у шатунной шейки и  $m_2 = m - (J/I^2)$  у ползуна, где  $J$  обозначает момент инерции шатуна относительно центра ползуна. Все другие движущиеся массы также могут быть заменены массами, сосредоточенными в тех же двух точках, так что, в конце концов, следует рассматривать только две массы  $M$  и  $M_1$  (рис. 175). Пусть  $\omega$  — постоянная угловая скорость;  $\omega l$  — показанный на рис. 175 угол поворота кривошипа, измеряемый от мертвой точки. Тогда скорость массы  $M_1$  равна  $\omega r$  и скорость массы  $M$ , как показано в § 17 (см. стр. 99), равна

$$\omega r \sin \omega t + \frac{r^2 \omega}{2l} \sin 2\omega t.$$

Кинетическая энергия движущихся масс одного кривошипа составляет

$$T = \frac{1}{2} M_1 \omega^2 r^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 \left( \sin^2 \omega t + \frac{r}{2l} \sin 2\omega t \right)^2.$$

Среднее значение  $T$  за время одного оборота равно

$$T_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T d(\omega t) = \frac{1}{2} \left\{ M_1 + \frac{1}{2} M \left( 1 + \frac{r^2}{4l^2} \right) \right\} \omega^2 r^2.$$

Пользуясь этим средним значением, можно заменить инерцию движущихся частей, связанных с одним кривошипом, инерцией эквивалентного диска, имеющего момент инерции

$$J = \left\{ M_1 + \frac{1}{2} M \left( 1 + \frac{r^2}{4l^2} \right) \right\} r^2.$$

При замене всех кривошипов эквивалентными участками вала и всех движущихся масс — эквивалентными дисками задача о колебаниях коленчатого вала приводится к задаче о крутильных колебаниях цилиндрического вала и критические скорости можно вычислить, как показано выше. Необходимо заметить, что такой метод исследования

\*) Более полное рассмотрение этой задачи см. в книге: S. Timoshenko, D. H. Young, Advanced Dynamics, стр. 136 и 174.

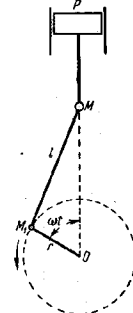


Рис. 175.

колебаний нужно рассматривать лишь как грубое приближение. Действительная задача значительно более сложна, и в простейшем случае одного колена с маховиком она приводится к задаче о крутильных колебаниях вала с двумя дисками, один из которых имеет переменный момент инерции. Более подробные исследования показывают<sup>\*)</sup>, что в таких системах *вынужденные колебания* возникают не только от давления газа на поршни. Они также вызваны неполной уравновешенностью возвратно-поступательно движущихся частей. Практически все явления, связанные с опасными критическими скоростями, могут возникать при перерыве в подаче топлива, когда двигатель вращается без сопротивления с соответствующей скоростью.

Значения критических скоростей в таких системах приблизительно такие, какие находятся обычным способом, т. е. заменой движущихся масс эквивалентными дисками<sup>\*\*)</sup>. Недавно Олберг и Липсон экспериментально исследовали напряжения, возникающие при колебаниях в коленчатых валах<sup>\*\*\*)</sup>.

42. Поглотитель колебаний с сухим трением. — Для уменьшения амплитуд крутильных колебаний коленчатых валов в двигателях внутреннего сгорания очень часто применяется поглотитель колебаний с сухим трением, обычно называемый поглотителем Ланчестера<sup>\*\*\*\*)</sup>. Поглотитель (рис. 176) состоит из двух маховиков *a*, свободно вращающихся на втулках *b* и приводимых в движение коленчатым валом через frictionные кольца *c*. Маховики прижаты к этим кольцам при помощи пружин и регулировочных винтов *d*. Если вследствие резонанса возникают значительные колебания конца вала *e* и втулки поглотителя, то инерция маховиков препятствует их участию в колебательном движении. Результирующее относительное движение втулки и маховиков приводит к возрастанию трения на контактных поверхностях и вызывает рассеивание энергии.

В § 40 (см. стр. 253) было показано, что амплитуду крутильных колебаний при резонансе легко вычислить, если известно количество энергии, рассеиваемой за цикл в поглотителе. Для вычисления этой энергии в поглотителе Ланчестера необходимо рассмотреть движение маховиков поглотителя. В условиях установившегося движения маховики вращаются со средней угловой скоростью, равной средней угловой скорости коленчатого вала. На это движение накладываются движение относительно колеблющейся

\*) См. работу: G. R. Goldsbrugh, Torsional Vibration in Reciprocating Engine Shafts, Proc. Roy. Soc. (Лондон), т. 109, стр. 99, 1929 и т. 113, стр. 259, 1927.

\*\*\*) Библиография по крутильным колебаниям дисков с переменным моментом инерции дана на стр. 175 и 234.

\*\*\*\*) См. Exptl. Stress Analysis, т. 2, часть 2, стр. 118; см. также в этом томе статьи A. Goloff и M. L. Frey.

\*\*\*\*\*) Теория этого поглотителя была развита в работе: J. P. Den Hartog, J. Ormondroyd, Trans. ASME, т. 52, стр. APM-133—1930. См. также K. Klotter, Theorie der Reibungsschwingungsdämpfer, Ing.-Arch., т. 9, стр. 137, 1938.

втулки. Оно является периодическим движением, и его частота такая же, как частота колебаний вала. Три возможных типа дополнительного движения представляются графиками скоростей на рис. 177. Синусоидальные кривые представляют угловую скорость  $\omega_d$  колеблющейся втулки. В процессе скольжения маховик подвержен действию постоянного момента трения  $M_f$ , поэтому его угловая скорость является линейной функцией времени, которая представлена на графиках прямыми линиями. Рис. 177, а соответствует условиям безостановочного скольжения маховика. Скорость  $\omega_f$  маховика изображается ломаной линией, которая показывает,

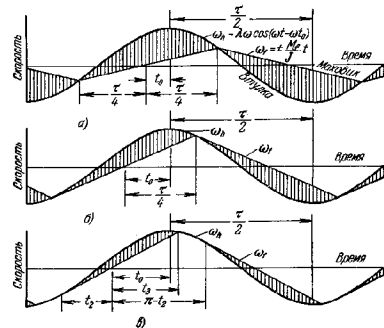


Рис. 177.

что маховик совершает периодическое симметричное движение. Скорость этого движения возрастает, когда скорость втулки  $\omega_d$  больше, чем скорость маховика  $\omega_f$ , и уменьшается, когда скорость втулки меньше скорости маховика. Наклон прямых линий равен угловому ускорению маховика  $M_f/J$ , где  $J$  — полный момент инерции маховиков поглотителя. При сжатии пружины поглотителя момент трения увеличивается и наклон прямых линий, выражающих скорости маховиков, становится более крутым. Наконец, достигаются предельные условия, когда прямая линия становится касательной к синусоиде (рис. 177, б). Это представляет предельный момент трения, ниже которого скольжение маховиков непрерывно. Если трение далее возрастает, то маховики «прилипают» к втулке до тех пор, пока ускорение втулки не станет достаточно большим, чтобы преодолеть трение (см. рис. 177, в).

В дальнейшем изложении примем, что маховики поглотителя все время скользят, и используем график рис. 177, а. Замечая, что относительная угловая скорость маховиков по отношению к втулке равна  $\omega_f - \omega_d$ , видим, что энергия, рассеиваемая за интервал времени  $dt$ , равна  $M_f(\omega_f - \omega_d) dt$ , так

\*)  $\omega_f$  и  $\omega_d$  обозначают дополнительные скорости маховика и втулки, накладываемые на постоянную среднюю скорость вращения коленчатого вала.

что энергия, рассеиваемая за цикл, может быть получена интегрированием

$$E = \int_0^{\tau} M_f (\omega_h - \omega_f) dt, \quad (a)$$

где  $\tau = 2\pi/\omega$  — период крутильных колебаний вала. Этот интеграл представлен в определенном масштабе заштрихованной площадью на рис. 177, а. Для упрощения вычисления этой площади примем за начало отсчета времени момент, когда дополнительная скорость  $\omega_f$  маховика равна нулю и должна стать положительной, и обозначим через  $t_0$  время, соответствующее максимуму дополнительной скорости  $\omega_h$  втулки. В этом случае перемещение втулки при колебательном движении равно

$$\lambda \sin \omega(t - t_0),$$

и дифференцированием получаем:

$$\omega_h = \lambda \omega \cos \omega(t - t_0). \quad (b)$$

Скорость маховика в промежутке времени  $-\tau/4 < t < \tau/4$  равна

$$\omega_f = \frac{M_f t}{J}. \quad (c)$$

Время  $t_0$  может быть найдено из условия, что при  $t = \pm \tau/4$  (рис. 177, а)  $\omega_f = \omega_h$ . Тогда, используя (b) и (c), получаем:

$$\frac{M_f \pi}{J 2\omega} = \lambda \omega \cos \left( \frac{\pi}{2} - \omega t_0 \right) = \lambda \omega \sin \omega t_0$$

и

$$\sin \omega t_0 = \frac{M_f \pi}{J 2\lambda \omega^2}. \quad (d)$$

При вычислении количества рассеиваемой за цикл энергии заметим, что обе заштрихованные на рис. 177, а площади равны друг другу. Поэтому

$$E = \int_0^{\tau} M_f (\omega_h - \omega_f) dt = 2 \int_{-\tau/4}^{+\tau/4} M_f (\omega_h - \omega_f) dt,$$

или, подставляя из (b) и (c),

$$E = 2M_f \int_{-\pi/2\omega}^{+\pi/2\omega} \left[ \lambda \omega \cos \omega(t - t_0) - \frac{M_f t}{J} \right] dt.$$

Выполняя интегрирование, получаем:

$$\dot{E} = 4M_f \lambda \cos \omega t_0$$

или, используя (d), находим окончательное выражение для количества энергии, рассеиваемой за цикл:

$$E = 4M_f \lambda \sqrt{1 - \left( \frac{M_f \pi}{J 2\lambda \omega^2} \right)^2}. \quad (e)$$

Рациональное значение момента трения  $M_f$  может быть установлено изменением положения регулировочных винтов (d). Если создаваемая пружиной сила очень мала, то сила трения также мала и влияние поглотителя на крутильные колебания вала окажется несущественным. Затягиванием регулировочных гаек можно получить другой крайний случай, когда момент трения настолько велик, что маховики вообще не будут скользить и рассеяния энергии не будет. Наиболее эффективное поглощение получится, когда момент трения имеет значение, при котором выражение (e) имеет максимум. Беря производную этого выражения по  $M_f$  и приравнявая ее нулю, найдем рациональное значение момента трения:

$$M_f = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \lambda \omega^2 J. \quad (f)$$

При этом значении  $M_f$  рассеиваемая за цикл энергия становится равной

$$E_{\max} = \frac{4}{\pi} \lambda^2 \omega^2 J. \quad (g)$$

Имея это выражение, можно вычислить амплитуду вынужденных колебаний при резонансе так же, как и в случае вязкого сопротивления, действующего на один из колеблющихся дисков (см. стр. 253). Если переменный момент  $M \cos \omega(t - t_0)$  действует на диск, амплитуда крутильных колебаний которого равна  $\lambda_m$ , то работа, совершаемая этим моментом за цикл, равна (см. стр. 253)  $M \lambda_m \pi$ . Приравнявая эту работу рассеиваемой энергии (g), находим:

$$\lambda = \frac{\pi^2 M \lambda_m}{4\omega^2 J \lambda}. \quad (h)$$

Отношение  $\lambda_m/\lambda$  можно взять из графика кривой, представляющей нормальную форму колебаний колеблющегося вала так, что если  $M$  и  $J$  заданы, то амплитуда может быть вычислена по формуле (h). Обычно формула (h) используется для определения необходимого момента инерции  $J$  поглотителя. В таком случае амплитуда  $\lambda$  должна быть взята такой величины, чтобы максимальные напряжения вследствие кручения вала были ниже допускаемых напряжений для материала вала. Тогда соответствующее значение  $J$  может быть вычислено из равенства (h).

**43. Поперечные колебания многоопорных валов.** — Аналитический метод. В нашем предыдущем изложении (§ 5) был рассмотрен простейший случай двухопорного вала и было показано, что критической скоростью вращения вала является такая скорость, при которой число оборотов в секунду равно собственной частоте поперечных колебаний невращающегося вала. В практике, однако, встречаются валы, лежащие на многих опорах; изложим различные способы, которые могут быть применены для выяснения собственных частот поперечных колебаний таких валов\*).

\* Этот вопрос подробно рассмотрен в книге: A. Stodola, Dampf- und Gasturbinen, 6-е изд., Берлин, 1924. См. также С. В. Биезенко, R. Grammel, Technische Dynamik, Берлин, стр. 807—842, 1939. [Русский перевод: К. Биценко, Р. Граммель, Техническая динамика, ГТТИ, т. 2, 1952.]

Излагаемый аналитический метод может быть без больших трудностей применен в случае вала постоянного поперечного сечения, несущего несколько дисков.

Рассмотрим сначала простой пример трехопорного вала, несущего два диска (рис. 178), веса которых равны  $W_1$  и  $W_2$ . Статические прогибы вала под этими грузами могут быть представлены выражениями:

$$\delta_1 = a_{11}W_1 + a_{12}W_2, \quad (a)$$

$$\delta_2 = a_{21}W_1 + a_{22}W_2, \quad (b)$$

где постоянные  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  и  $a_{22}$  можно вычислить следующим образом. Отбросим промежуточную опору  $C$  и рассмотрим прогибы, вызываемые только грузом  $W_2$  (рис. 178, б); тогда уравнение изогнутой оси для левой части вала получим в следующем виде:

$$y = \frac{W_2 x^2}{6IEJ} (-x^3 + l^2x - c_2^2x), \quad (c)$$

и прогиб точки  $C$  составит:

$$y_C = \frac{W_2 c_2^3}{6IEJ} (-l_1^2 + l_1^2l_1 - c_2^2l_1).$$

Определим теперь реакцию  $R_2$  так, чтобы уменьшить этот прогиб до нуля (рис. 178, в). Применяя уравнение (c) для вычисления прогиба от силы  $R_2$  и полагая этот прогиб равным полученному выше  $y_C$ , имеем:

$$\frac{W_2 c_2^3}{6IEJ} (-l_1^2 + l_1^2l_1 - c_2^2l_1) = \frac{R_2 l_1^3}{6IEJ} (-l_1^2 + l_1^2l_1 - l_1^2l_1),$$

откуда

$$R_2 = \frac{W_2 c_2 (l_1^2 - l_1^2 - c_2^2)}{2l_1 l_1^2}.$$

Таким же способом можно вычислить реакцию  $R_1$ , вызываемую грузом  $W_1$ , и получить затем полную реакцию  $R = R_1 + R_2$ . Теперь, применив уравнение (c), можно представить прогиб  $\delta_1$ , вызванный грузами  $W_1$  и  $W_2$  и реакцией  $R$ , в виде (a), где

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{24l_1^2 EJ} \{ 4l_1^2 (l_1 - c_1)^2 c_1^2 - c_1 (-c_1^3 + l_1^2 c_1 - l_1^2 c_1) (l_1^2 - l_1^2 - c_1^2) \}, \\ a_{12} &= \frac{1}{24l_1 l_2 EJ} \{ 2l_1 l_2 c_1 c_2 (l_1^2 - c_1^2 - c_2^2) - c_2 c_1 (l_1^2 - l_1^2 - c_1^2) (l_1^2 - l_1^2 - c_2^2) \}. \end{aligned} \right\} (d)$$

Меняя в этих выражениях местами  $l_2$  и  $l_1$  и  $c_2$  и  $c_1$ , получим постоянные  $a_{21}$  и  $a_{22}$ , входящие в выражение (b), причем  $a_{12} - a_{21}$ , т. е. груз, приложенный в точке  $D$ , вызывает прогиб в точке  $F$ , равный прогибу в точке  $D$ , вызванному такой же нагрузкой в точке  $F$ . Этот результат можно было ожидать на основе *теоремы взаимности*.

Рассмотрим теперь происходящие в плоскости чертежа колебания грузов  $W_1$  и  $W_2$  относительно найденных выше положений равновесия. Пусть  $y_1$  и  $y_2$  обозначают теперь переменные перемещения при колебаниях грузов  $W_1$  и  $W_2$ , считываемые от их положений равновесия. Положив для простоты  $a_{11} = a$ ,  $a_{12} = a_{21} = b$ ,  $a_{22} = c^*$ , получим из приведенных выше формул (a) и (b) следующие силы, необходимые для того, чтобы вызвать прогибы  $y_1$  и  $y_2$ :

$$P_1 = \frac{cy_1 - by_2}{ac - b^2}, \quad P_2 = \frac{ay_2 - by_1}{ac - b^2},$$

и дифференциальные уравнения движения грузов  $W_1$  и  $W_2$  принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{W_1}{g} \ddot{y}_1 + P_1 &= \frac{W_1}{g} \ddot{y}_1 + \frac{c}{ac - b^2} y_1 - \frac{b}{ac - b^2} y_2 = 0, \\ \frac{W_2}{g} \ddot{y}_2 + P_2 &= \frac{W_2}{g} \ddot{y}_2 - \frac{b}{ac - b^2} y_1 + \frac{a}{ac - b^2} y_2 = 0. \end{aligned} \right\} (e)$$

Предполагая, что вал совершает колебания одной из нормальных форм и подставляя в уравнение (e)

$$y_1 = \lambda_1 \cos pt, \quad y_2 = \lambda_2 \cos pt,$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \left( \frac{c}{ac - b^2} - \frac{W_1}{g} p^2 \right) - \frac{b}{ac - b^2} \lambda_2 &= 0, \\ -\frac{b}{ac - b^2} \lambda_1 + \lambda_2 \left( \frac{a}{ac - b^2} - \frac{W_2}{g} p^2 \right) &= 0. \end{aligned} \right\} (f)$$

Приравняв определитель этих уравнений нулю, получим следующее частотное уравнение:

$$\left( \frac{c}{ac - b^2} - \frac{W_1}{g} p^2 \right) \left( \frac{a}{ac - b^2} - \frac{W_2}{g} p^2 \right) - \frac{b^2}{(ac - b^2)^2} = 0, \quad (g)$$

откуда

$$p^2 = \frac{g}{2(ac - b^2)} \left\{ \frac{c}{W_1} + \frac{a}{W_2} \pm \sqrt{\left( \frac{c}{W_1} + \frac{a}{W_2} \right)^2 - \frac{4(ac - b^2)}{W_1 W_2}} \right\}. \quad (83)$$

Этим способом определяются два положительных корня  $p^2$ , соответствующие двум нормальным формам колебаний вала. При подстановке этих двух корней в одно из уравнений (f) получим два

\*) В любом частном случае постоянные  $a$ ,  $b$  и  $c$  можно вычислить по формулам (d).

различных значения отношения  $\lambda_1/\lambda_2$ . Для большего значения  $p^2$  отношение  $\lambda_1/\lambda_2$  оказывается положительным, т. е. оба диска при колебаниях движутся одновременно в одном и том же направлении, и форма колебаний соответствует рис. 179, а.

Если в уравнения (f) подставить меньший корень  $p^2$ , то отношение  $\lambda_1/\lambda_2$  становится отрицательным, и форма колебаний будет соответствовать рис. 179, б. Возьмем, например, частный случай, когда (рис. 178)  $W_1 = W_2$ ,  $l_1 = l_2 = l/2$  и  $c_1 = c_2 = l/4$ . Подставив в формулы (d) и воспользовавшись условиями симметрии, получим:

$$a = c = \frac{23}{48 \cdot 256} \frac{l^3}{EJ} \quad \text{и} \quad b = -\frac{9}{48 \cdot 256} \frac{l^3}{EJ}.$$

Подставляя в выражение (83), имеем:

$$p_1^2 = \frac{g}{(a-b)W} = \frac{48EJg}{W\left(\frac{l}{2}\right)^3},$$

$$p_2^2 = \frac{768EJg}{7W\left(\frac{l}{2}\right)^3}.$$

Эти две частоты можно легко получить подстановкой в формулу (4) для статических прогибов (см. стр. 11):

$$\delta_{ст}^* = \frac{W\left(\frac{l}{2}\right)^3}{48EJ} \quad \text{и} \quad \delta_{ст}^{**} = \frac{7W\left(\frac{l}{2}\right)^3}{768EJ}$$

для случаев, показанных на рис. 180.

Другой способ решения задачи о поперечных колебаниях вала состоит в применении принципа Даламбера. При применении этого принципа можно записать уравнения колебаний подобно уравнениям статики; необходимо лишь прибавить силы инерции к действующим на вал нагрузкам. Обозначая, как и выше, через  $y_1$  и  $y_2$  прогибы вала от положения равновесия под грузами  $W_1$  и  $W_2$ , получаем

$$-\left(\frac{W_1}{g}\right)\ddot{y}_1 \quad \text{и} \quad -\left(\frac{W_2}{g}\right)\ddot{y}_2.$$

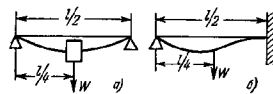


Рис. 180.

Эти силы инерции должны быть в равновесии с упругими силами, возникающими вследствие дополнительного изгиба, и два выражения, эквивалентных (a) и (b), можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -a \frac{W_1}{g} \ddot{y}_1 - b \frac{W_2}{g} \ddot{y}_2, \\ y_2 &= -b \frac{W_1}{g} \ddot{y}_1 - c \frac{W_2}{g} \ddot{y}_2. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Принимая, как и выше,

$$y_1 = \lambda_1 \cos pt, \quad y_2 = \lambda_2 \cos pt$$

и подставляя в выражения (h), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \left(1 - \frac{aW_1}{g} p^2\right) - \lambda_2 b \frac{W_2}{g} p^2 &= 0, \\ -\lambda_1 b \frac{W_1}{g} p^2 + \lambda_2 \left(1 - \frac{cW_2}{g} p^2\right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Приравняв нулю определитель этой системы уравнений, получим уравнение, сходное с полученным выше частотным уравнением (г).

Изложенный способ вычисления частот поперечных колебаний можно применять также в случаях, когда число дисков или число пролетов больше двух. Возьмем, например, случай, показанный на

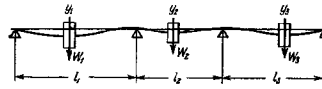


Рис. 181.

рис. 181. Применяя способ, аналогичный использованному в предыдущем примере, можно представить статические отклонения вала под дисками в виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= a_{11}W_1 + a_{12}W_2 + a_{13}W_3, \\ \delta_2 &= a_{21}W_1 + a_{22}W_2 + a_{23}W_3, \\ \delta_3 &= a_{31}W_1 + a_{32}W_2 + a_{33}W_3, \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

где  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ , ... — постоянные, зависящие от расстояний между опорами, расстояний дисков от опор и от изгибной жесткости вала. Из теоремы взаимности можно сразу заключить, что  $a_{12} = a_{21}$ ,  $a_{13} = a_{31}$  и  $a_{23} = a_{32}$ . Применяя принцип Даламбера и обозначая через  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$  перемещения дисков при колебаниях, измеряемые от положения равновесия, можно из выражений для статических



отклонений (j) вывести следующие уравнения колебаний:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -a_{11} \frac{W_1}{g} \ddot{y}_1 - a_{12} \frac{W_2}{g} \ddot{y}_2 - a_{13} \frac{W_3}{g} \ddot{y}_3, \\ y_2 &= -a_{21} \frac{W_1}{g} \ddot{y}_1 - a_{22} \frac{W_2}{g} \ddot{y}_2 - a_{23} \frac{W_3}{g} \ddot{y}_3, \\ y_3 &= -a_{31} \frac{W_1}{g} \ddot{y}_1 - a_{32} \frac{W_2}{g} \ddot{y}_2 - a_{33} \frac{W_3}{g} \ddot{y}_3, \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

откуда обычным способом можно получить кубическое относительно  $p^2$  частотное уравнение. Три корня этого уравнения дадут частоты трех нормальных форм колебаний рассматриваемой системы\*\*).

Необходимо отметить, что частотными уравнениями для поперечных колебаний валов можно воспользоваться также для вычисления критических скоростей вращения. Критическая скорость вращения есть скорость, при которой центробежные силы вращающихся масс достаточно велики, чтобы удерживать вал в изогнутом состоянии (см. § 5). Вновь возьмем случай двух дисков (рис. 178, а) и примем, что  $y_1$  и  $y_2$  — прогибы, вызываемые центробежными силами ( $W_1/g$ )  $\omega^2 y_1$  и ( $W_2/g$ )  $\omega^2 y_2$  вращающихся дисков\*\*). Такие отклонения могут возникнуть лишь в том случае, если центробежные силы удовлетворяют следующим условиям равновесия (см. выражения (а) и (b)):

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11} \frac{W_1}{g} \omega^2 y_1 + a_{12} \frac{W_2}{g} \omega^2 y_2, \\ y_2 &= a_{21} \frac{W_1}{g} \omega^2 y_1 + a_{22} \frac{W_2}{g} \omega^2 y_2. \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

Эти уравнения могут дать для  $y_1$  и  $y_2$  отличные от нуля решения только в том случае, когда равен нулю их определитель. Замечая, что уравнения (l) аналогичны приведенным выше уравнениям (i), и приравняв их определитель нулю, получим для вычисления критических скоростей вращения уравнение, совпадающее с уравнением (g).

**Графический способ.** В предшествующем изложении предполагалось, что постоянные  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ , ... вычислены аналитически. В случае вала переменного поперечного сечения выгодно воспользоваться графическим способом определения этих постоянных. Для пояснения этого способа снова рассмотрим вал, лежащий на трех опорах и имеющий один диск в каждом пролете, как показано на рис. 178. При решении этой задачи можно следовать точно по тому же пути, что и выше при аналитическом решении, и прежде всего

найти соотношения

$$\delta_1 = a_{11} W_1 + a_{12} W_2, \quad (a')$$

$$\delta_2 = a_{21} W_1 + a_{22} W_2 \quad (b')$$

между действующими силами и результирующими прогибами.

Чтобы графически получить значения постоянных  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ , ... сначала предположим, что действует только один груз  $W_1$  и что средняя опора устранена (рис. 182, а);

тогда прогибы  $y'_1$ ,  $y'_2$  и  $y'_c$  могут быть получены при помощи описанного выше (см. стр. 42) графического способа. Теперь, пользуясь тем же способом, нужно построить кривую изгиба, вызванного вертикальной силой  $R'$ , приложенной в  $C$  и действующей вверх, и измерить прогибы  $y''_1$ ,  $y''_2$  (рис. 182, б).

Учитывая, что прогиб опоры  $C$  должен быть равен нулю, найдем теперь реакцию  $R$  этой опоры из выражения\*)

$$R = R' \frac{y'_c}{y''_c}; \quad (m)$$

фактические прогибы точек  $D$  и  $E$ , вызванные грузом  $W_1$ , будут

$$\left. \begin{aligned} y_{11} &= y'_1 - y'_1 \frac{y'_c}{y''_c}, \\ y_{21} &= y'_2 - y'_2 \frac{y'_c}{y''_c}. \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

Сравнивая эти выражения с выражениями (а') и (б') при  $W_2 = 0$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} W_1 &= y'_1 - y'_1 \frac{y'_c}{y''_c}, \\ a_{21} W_1 &= y'_2 - y'_2 \frac{y'_c}{y''_c}. \end{aligned} \right\} \quad (o)$$

откуда могут быть вычислены постоянные  $a_{11}$  и  $a_{21}$ . Таким же образом в предположении, что груз  $W_1$  отсутствует, можно найти постоянные  $a_{12}$  и  $a_{22}$ . После того как определены все постоянные, входящие в выражения (а') и (б'), можно вычислить две

\*) Графический способ решения частотных уравнений предложен Сoderбергом. См. С. R. Soderberg, Phil. Mag., т. 5, стр. 47, 1928.

\*\*) Влияние веса вала на критические скорости будет рассмотрено ниже.

\*) В этом выражении берутся абсолютные значения прогибов.

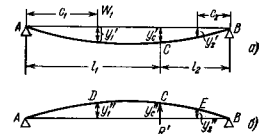


Рис. 182.

критические скорости вала при помощи формулы (83), в которой  $a = a_{11}$ ,  $b = a_{12} = a_{21}$ ;  $c = a_{22}$ .

В предыдущих выкладках за статически неопределимую величину была взята реакция  $R$  средней опоры. Если вал имеет много опор, то проще принять за статически неопределимые величины изгибающие моменты над промежуточными опорами. Для иллюстрации этого способа расчета рассмотрим установку, состоящую из мотора переменного тока и генератора постоянного тока, опертых на три подшипника\*). Размеры вала переменного поперечного сечения даны на

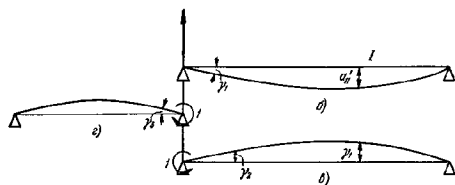
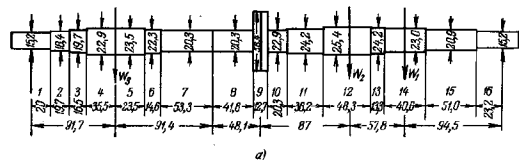


Рис. 183.

рис. 183, а. Примем, что массы якоря мотора  $W_3$ , якоря генератора  $W_2$ , а также коммутатора постоянного тока  $W_1$  сосредоточены в их центрах тяжести (рис. 183, а). Для учета массы вала половина массы левого пролета вала добавлена к массе мотора, а половина массы правого пролета вала поровну разделена между якорем генератора и коммутатором. Таким образом, задача приведена к случаю трех степеней свободы; за координаты будут приняты прогибы  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  под грузами  $W_1$ ,  $W_2$  и  $W_3$  при колебаниях. Статические прогибы под действием грузов  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  могут быть представлены выражениями (j), а постоянные  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ , ... этих выражений опре-

\* Численные значения представляют действительный случай, рассчитанный Дж. Ден-Гартогом.

делим, приняв теперь за статически неопределимую величину изгибающий момент над промежуточной опорой. Чтобы получить  $a_{11}$ , допустим, что вал разрезан на две части над промежуточной опорой и что правый пролет нагружен силой  $1 \text{ кг}$  в том поперечном сечении, где приложен груз  $W_1$  (рис. 183, б). Графическим способом, описанным в § 5, получим прогиб под нагрузкой  $a'_{11} = 13,7 \cdot 10^{-6} \text{ см}$  и угол поворота крайнего левого сечения  $\gamma_1 = 13,1 \cdot 10^{-8} \text{ рад}$ . Приложив теперь изгибающий момент  $1 \text{ кг}\cdot\text{см}$  у промежуточной опоры и применив тот же графический способ, получим углы поворота  $\gamma_2 = 3,67 \cdot 10^{-9}$  (рис. 183, в) и  $\gamma_3 = 3,04 \cdot 10^{-9}$  (рис. 183, г). Из теоремы взаимности следует, что в данном случае прогиб в точке  $W_1$  численно равен углу поворота  $\gamma_1$  для случая, показанного на рис. 183, б. Изгибающий момент  $M$  у промежуточной опоры, вызванный нагрузкой  $1 \text{ кг}$ , приложенной в точке  $W_1$ , найдется теперь из условия, что над средней опорой кривые изгиба обоих пролетов должны иметь общую касательную. Следовательно,  $\gamma_1 - M\gamma_2 = M\gamma_3$ , что дает

$$M = \frac{\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_3} \text{ кг}\cdot\text{см.}$$

Тогда прогиб под грузом  $W_1$  равен

$$a_{11} = a'_{11} - \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2 + \gamma_3} = 111 \cdot 10^{-7}.$$

Поступая таким же образом с другими постоянными выражений (j), получим следующие численные значения:

$$\begin{aligned} a_{22} &= 109 \cdot 10^{-7}, & a_{33} &= 42,4 \cdot 10^{-7}, & a_{12} &= a_{21} = 101 \cdot 10^{-7}, \\ a_{13} &= a_{31} = -19,5 \cdot 10^{-7}, & a_{23} &= a_{32} = -25,7 \cdot 10^{-7}. \end{aligned}$$

Подставляя теперь в выражения (j) вместо нагрузок  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  центробежные силы  $W_1\omega^2 y_1/g$ ,  $W_2\omega^2 y_2/g$  и  $W_3\omega^2 y_3/g$ , найдем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (1 - a_{11} \frac{W_1 \omega^2}{g}) y_1 - a_{12} \frac{W_2 \omega^2}{g} y_2 - a_{13} \frac{W_3 \omega^2}{g} y_3 &= 0, \\ -a_{21} \frac{W_1 \omega^2}{g} y_1 + (1 - a_{22} \frac{W_2 \omega^2}{g}) y_2 - a_{23} \frac{W_3 \omega^2}{g} y_3 &= 0, \\ -a_{31} \frac{W_1 \omega^2}{g} y_1 - a_{32} \frac{W_2 \omega^2}{g} y_2 + (1 - a_{33} \frac{W_3 \omega^2}{g}) y_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (p)$$

Если приравнять нулю определитель этой системы и использовать найденные выше значения постоянных  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ , ..., то получим следующее частотное уравнение для вычисления критических скоростей:

$$(\omega^2 \cdot 10^{-7})^3 - 3,76 (\omega^2 \cdot 10^{-7})^2 + 1,93 (\omega^2 \cdot 10^{-7}) - 0,175 = 0,$$

откуда критические числа оборотов равны:

$$n_1 = \frac{\omega_1 \cdot 60}{2\pi} = 1070,$$

$$n_2 = \frac{\omega_2 \cdot 60}{2\pi} = 2240,$$

$$n_3 = \frac{\omega_3 \cdot 60}{2\pi} = 5620.$$

Критические скорости вращающегося вала можно найти также часто графическим способом. Этот способ изложим сначала для случая вала со свободно опертными концами (рис. 33).

Предположим некоторый *начальный изгиб* вращающегося вала, удовлетворяющий граничным условиям, где  $y_1, y_2, \dots$  — прогибы у дисков  $W_1, W_2, \dots$ . Примем также некоторую угловую скорость вращения  $\omega$ ; тогда соответствующие центробежные силы будут равны  $(W_1/g)\omega^2 y_1, (W_2/g)\omega^2 y_2, \dots$ . Рассматривая эти силы как статическую нагрузку для вала, можно графически получить кривую изгиба, как было изложено в § 5. Если наше предположение о форме начального изгиба было верным, то прогибы  $y_1, y_2, \dots$ , найденные *графически*, должны быть пропорциональны принятым сначала прогибам  $y_1, y_2, \dots$ , и критическая скорость найдется из соотношения

$$\omega_{кр} = \omega \sqrt{\frac{y_1}{y_1'}} \quad \text{или} \quad \omega_{кр} = \omega \sqrt{\frac{y_2}{y_2'}}. \quad (84)$$

Это можно объяснить следующим образом.

Принимая при вычислении центробежных сил вместо  $\omega$  величину  $\omega_{кр}$  по формуле (84), мы увеличиваем все эти силы в  $y_1/y_1'$  раз; графически найденные прогибы также будут увеличены в таком же отношении, и полученная графически кривая изгиба совпадет теперь с *первоначально принятой* кривой изгиба. Это означает, что при скорости, определяемой формулой (84), центробежные силы достаточны для того, чтобы удерживать вращающийся вал в изогнутом состоянии. Такая скорость называется *критической скоростью* (см. стр. 40).

Выше предполагалось, что найденная графически кривая изгиба имеет ординаты, пропорциональные прогибам первоначально взятой кривой. Если имеется значительное различие между формами этих двух кривых и требуется лучшее приближение для  $\omega_{кр}$ , то должно быть повторено описанное выше построение, причем графически полученная кривая принимается за начальную кривую\*).

Этот способ может быть применен и в более сложных случаях. Рассматривая, например, показанный на рис. 179 двухпролетный вал,

мы сначала задаемся как начальной кривой изгиба, удовлетворяющей условиям на опорах (рис. 179, а и б), так и определенной угловой скоростью  $\omega$ . Тогда действующие на вал центробежные силы будут равны

$$\frac{W_1}{g} \omega^2 y_1 \quad \text{и} \quad \frac{W_2}{g} \omega^2 y_2.$$

Графическим способом можно построить кривую изгиба, вызываемую этими двумя силами, и если исходная кривая изгиба была выбрана правильно, то построенная кривая имеет прогибы  $y_1', y_2'$ , пропорциональные исходным прогибам  $y_1, y_2$ , и критическая скорость получается из формулы (84). Если обнаружится значительное различие в формах этих двух кривых, то построение должно быть повторено, причем полученная кривая изгиба принимается за начальную кривую\*).

Этот способ может быть применен также в случае нескольких дисков и в случаях, когда приходится учитывать массу вала. Начнем

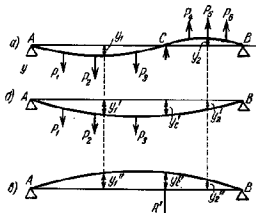


Рис. 184.

можно получить кривую изгиба, вызванного действующей вверх вертикальной силой  $R'$ , приложенной в точке  $C$  (рис. 184, а); после этого при помощи уравнения (м) может быть вычислена реакция  $R$  средней опоры, вызываемая нагружением левого пролета вала. Прогиб любой точки от нагружения левой части вала можно затем найти, пользуясь уравнениями, подобными уравнению (п).

Взяв, например, сечения, в которых исходная кривая имеет наибольшие прогибы  $y_1$  и  $y_2$  (рис. 184, а), получим прогибы этих

\* При рассмотрении метода Рэлея (§ 4) было указано, что значительная ошибка в форме исходной кривой оказывает лишь малое влияние на значение  $\omega_{кр}$  при условии, что удовлетворены условия на концах.

\* Можно доказать, что этот процесс сходится, если вычисляется низшая критическая скорость; повторяя описанное выше построение, мы приближаемся к истинной критической скорости. См. упомянутую на стр. 261 книгу Стодола.

сечений от нагрузки, действующей на левый пролет вала:

$$\left. \begin{aligned} y_{1a} &= y_1' - y_1 \frac{y_c'}{y_c''}, \\ y_{2a} &= y_2' - y_2 \frac{y_c'}{y_c''}. \end{aligned} \right\} \quad (q)$$

Таким же образом можно получить прогибы  $y_{1b}$  и  $y_{2b}$ , вызванные в тех же сечениях при нагружении правого пролета вала, и вычислить полные прогибы  $y_{1a} + y_{1b}$  и  $y_{2a} + y_{2b}$ \*). Если принята исходная кривая изгиба была выбрана правильно, то должно выполняться следующее равенство:

$$\frac{y_{1a} + y_{1b}}{y_{2a} + y_{2b}} = \frac{y_1}{y_2}, \quad (r)$$

и критическая скорость будет определяться формулой

$$\omega_{кр} = \omega \sqrt{\frac{y_1}{y_{1a} + y_{1b}}}. \quad (85)$$

Если отклонение от условия (r) окажется значительным, то необходимо вычислить второе приближение, для чего можно принять следующую последовательность действий\*\*). Легко видеть, что найденные выше прогибы  $y_{1a}$  и  $y_{2a}$  должны быть пропорциональны  $\omega^2$  и начальному прогибу  $y_1$ , так что можно написать:

$$y_{1a} = a_1 y_1 \omega^2,$$

$$y_{2a} = a_2 y_1 \omega^2,$$

откуда можно вычислить постоянные  $a_1$  и  $a_2$ . Таким же образом из соотношений

$$y_{1b} = b_1 y_2 \omega^2,$$

$$y_{2b} = b_2 y_2 \omega^2$$

можно найти постоянные  $b_1$  и  $b_2$ .

Если исходная кривая изгиба была выбрана правильно и если  $\omega = \omega_{кр}$ , то должны удовлетворяться следующие равенства:

$$y_1 = y_{1a} + y_{1b} = a_1 y_1 \omega^2 + b_1 y_2 \omega^2,$$

$$y_2 = y_{2a} + y_{2b} = a_2 y_1 \omega^2 + b_2 y_2 \omega^2,$$

\*) Прогибы вниз считаются положительными.

\*\*\*) Этот способ был предложен в диссертации: Bogowicz, Beiträge zur Berechnung krit. Geschwindigkeiten zwei und mehrfach gelagerter Wellen, Мюнхен, 1910. См. также E. Rausch, Ing.-Arch., т. 1, стр. 203, 1930; K. Karas, Die kritischen Drehzahlen wichtiger Rotormformen, Вена, 1935.

которые можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} (1 - a_1 \omega^2) y_1 - b_1 \omega^2 y_2 &= 0, \\ -a_2 y_1 \omega^2 + (1 - b_2 \omega^2) y_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (s)$$

Уравнение для вычисления критической скорости получим теперь, приравняв нулю определитель системы (s):

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) \omega^4 - (a_1 + b_2) \omega^2 + 1 = 0.$$

Корень этого уравнения, который делает отрицательным отношение  $y_1/y_2$ , соответствует принятой форме кривой (рис. 184, а) и дает низшую критическую скорость. Для достижения лучшего приближения получаемое из уравнений (s) отношение  $y_1/y_2$  должно быть использовано для построения новой формы исходной кривой, с помощью которой следует повторить графическое решение. В практических случаях это следующее приближение часто не является необходимым.

Описанный графический способ дает удовлетворительные результаты для вычисления низшей критической скорости. Если требуется найти высшие критические скорости, то необходимо прибегнуть к описанному ранее аналитическому способу. При большом числе вращающихся дисков вывод и решение частотного уравнения сложны, и расчет можно упростить, применяя метод последовательных приближений, описанный в предыдущей главе\*).

#### 44. Влияние гироскопического эффекта на критические скорости вращающихся валов. — Общие замечания.

В предшествующих рассуждениях по поводу критических скоростей вращающихся валов были приняты во внимание только центробежные силы вращающихся масс. При определенных условиях существенное значение имеют не только эти силы, но и моменты сил инерции, возникающие вследствие угловых перемещений осей вращающихся масс; при вычислении критических скоростей эти моменты следует принимать во внимание. В дальнейшем рассматривается простейший случай одного круглого диска на валу (рис. 185).

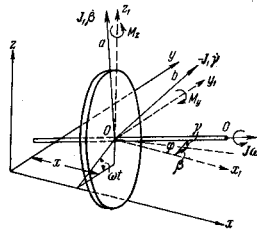


Рис. 185.

Если принять, что прогибы  $y$  и  $z$  вала при колебаниях весьма малы и что центр тяжести  $O$  диска совпадает с осью вала, то

\*) Численный пример применения этого способа дан в цитированной книге Бишено и Граммеля. См. также статью: N. A. Voukidis, R. J. Ruggiero, J. Aeronaut. Sci., т. 11, стр. 319, 1944.

положение диска будет полностью определяться координатами  $u$  и  $v$  его центра и углами  $\beta$  и  $\gamma$ , которые образуют ось  $OO$ , перпендикулярная к плоскости диска, и касательная к изогнутой оси вала с неподвижными взаимно-перпендикулярными плоскостями  $xz$  и  $xy$ , проходящими через ось  $x$ , соединяющую центры подшипников. Полагая вес диска равным  $W$  и учитывая только упругие реакции вала<sup>\*)</sup>, получим дифференциальные уравнения движения центра тяжести диска:

$$\frac{W}{g} \ddot{y} = Y, \quad \frac{W}{g} \ddot{z} = Z, \quad (a)$$

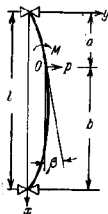


Рис. 186.

где  $Y$  и  $Z$  — составляющие реакции вала в направлениях  $y$  и  $z$ . Эти реакции являются линейными функциями координат  $y$ ,  $z$  и углов  $\beta$ ,  $\gamma$  и могут быть определены, если обратиться к рассмотрению изогнутого вала.

Рассмотрим, например, изгиб вала со свободно опертыми концами в плоскости  $xy$  (рис. 186) под действием силы  $P$  и пары  $M$ .

Рассматривая обычным способом изогнутую ось вала, получим прогиб в точке  $O^{**})$

$$y = \frac{Pa^2b^3}{3IB} + \frac{Mab(a-b)}{3IB} \quad (b)$$

и угол наклона касательной в той же точке

$$\beta = \frac{Pab(b-a)}{3IB} - \frac{M(a^2-ab+b^2)}{3IB}, \quad (c)$$

где  $B$  — изгибная жесткость вала.

Из уравнений (b) и (c), получим:

$$P = 3IB \left( \frac{a^2-ab+b^2}{a^2b^3} y + \frac{a-b}{a^2b^2} \beta \right), \quad (d)$$

$$M = 3IB \left( \frac{b-a}{a^2b^2} y - \frac{1}{ab} \beta \right). \quad (e)$$

Пользуясь выражением (d), придадим дифференциальным уравнениям движения (a) центра тяжести диска следующий вид:

$$\frac{W}{g} \ddot{y} + my + n\beta = 0, \quad \frac{W}{g} \ddot{z} + mz + n\gamma = 0, \quad (86)$$

\*) Принятые условия соответствуют случаю вертикального вала, когда вес диска не влияет на прогибы вала. Влияние этого веса будет рассмотрено далее (см. стр. 281).

\*\*) См. книгу автора Strength of Materials, 2-е изд., т. 1, стр. 160, 1940. [Русский перевод: С. П. Тимошенко, Сопротивление материалов, т. I, ГТТИ, 1946.]

где

$$m = 3IB \frac{a^2-ab+b^2}{a^2b^3}, \quad n = 3IB \frac{a-b}{a^2b^2}. \quad (f)$$

При рассмотрении относительного движения диска около его центра тяжести примем, что момент действующих на диск внешних сил относительно оси  $OO$  всегда равен нулю; тогда угловая скорость  $\omega$  относительно этой оси остается постоянной. Моменты  $M_y$  и  $M_z$ , взятые относительно осей  $y_1$  и  $z_1$ , параллельных осям  $y$  и  $z$  (рис. 185), и представляющие действие упругих сил вала на диск, можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} M_y &= -m'z + n'\gamma, \\ M_z &= m'y - n'\beta, \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

где  $m'$  и  $n'$  — постоянные, которые можно получить из кривой изгиба вала<sup>\*)</sup>. Положительные направления углов  $\beta$  и  $\gamma$  и моментов  $M_y$  и  $M_z$  указаны на чертеже.

В рассмотренном выше случае (см. выражение (e)) имеем:

$$m' = 3IB \frac{b-a}{a^2b^2}, \quad n' = \frac{3IB}{ab}. \quad (h)$$

Дифференциальные уравнения относительного движения диска около его центра тяжести получатся теперь при помощи закона изменения момента количества движения, который устанавливает, что производная по времени полного момента количества движения любой движущейся системы относительно любой неподвижной оси равна полному моменту внешних сил относительно той же оси. При вычислении производной момента количества движения относительно поступательно движущихся осей, проходящих через мгновенное положение центра тяжести  $O$ , мы учтем только относительное движение<sup>\*\*)</sup>.

При определении составляющих момента количества движения возьмем главные оси инерции диска. Ось вращения  $OO$  является одной из этих осей. Двумя другими осями являются два взаимно-перпендикулярных диаметра диска. Один из этих диаметров  $Oa$  лежит в плоскости  $OOz_1$  (рис. 185). Он составляет малый угол  $\gamma$  с осью  $Oz_1$ . Другой диаметр  $Ob$  составляет угол  $\beta$  с осью  $Oy_1$ .

Пусть  $J$  — момент инерции диска относительно оси  $OO$  и  $J_1 = \frac{J}{2}$  — момент инерции диска относительно диаметра<sup>\*\*\*)</sup>. Тогда составляющая момента количества движения относительно оси  $OO$  будет  $J\omega$  и составляющие относительно диаметров  $Oa$  и  $Ob$  будут  $J_1\dot{\beta}$  и

\*) Предполагается, что жесткость вала, включающая и жесткость его опор, одинакова в обоих направлениях.

\*\*) См. Advanced Dynamics, стр. 123.

\*\*\*) [Равенство  $J_1 = J/2$  справедливо лишь для тонкого диска.]

— $J_1 \dot{\gamma}$  соответственно \*). Положительные направления этих составляющих момента количества движения показаны на рис. 185. Проектируя эти составляющие на поступательно движущиеся оси  $Oy_1$  и  $Oz_1$ , проходящие через мгновенное положение центра тяжести  $O$ , получим  $J\omega\beta - J_1 \dot{\gamma}$  и  $J_1 \dot{\beta}$  соответственно. Тогда из закона изменения момента количества движения имеем:

$$\frac{d}{dt}(J\omega\beta - J_1 \dot{\gamma}) = M_y \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}(J\omega\gamma + J_1 \dot{\beta}) = M_z,$$

или, пользуясь выражениями (g),

$$\left. \begin{aligned} J\omega\dot{\beta} - J_1 \ddot{\gamma} &= -m'z + n'\gamma, \\ J\omega\dot{\gamma} + J_1 \dot{\beta} &= m'y - n'\beta. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Четыре уравнения (86) и (87), описывающие движение диска, удовлетворяются подстановкой

$$y = A \sin pt, \quad z = B \cos pt, \quad \beta = C \sin pt, \quad \gamma = D \cos pt. \quad (i)$$

Таким образом, получаются четыре линейных однородных уравнения относительно  $A, B, C, D$ . Приравнявая определитель этой системы уравнений нулю, получим уравнение для вычисления частот  $p$  собственных колебаний \*\*). Рассмотрим теперь несколько частных случаев.

В качестве первого примера рассмотрим случай, когда перпендикулярная плоскости диска главная ось  $OO$  все время остается в плоскости, содержащей ось  $x$  и вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , с которой вращается также и диск. Обозначая через  $r$  прогиб вала и через  $\varphi$  — угол между осями  $OO$  и  $x$  (рис. 185), получим для этого частного случая:

$$\left. \begin{aligned} y &= r \cos \omega t, & z &= r \sin \omega t, \\ \beta &= \varphi \cos \omega t, & \gamma &= \varphi \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

Рис. 187.

Считая  $r$  и  $\varphi$  постоянными и рассматривая то мгновенное состояние, когда плоскость изогнутой оси вала совпадает с плоскостью  $xy$  (рис. 187), получим из уравнений (j):

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \varphi, & \dot{\beta} &= 0, & \ddot{\beta} &= -\varphi\omega^2, \\ \gamma &= 0, & \dot{\gamma} &= \varphi\omega, & \ddot{\gamma} &= 0, \\ y &= r, & \dot{y} &= 0, & \ddot{y} &= -r\omega^2, \\ z &= 0, & \dot{z} &= r\omega, & \ddot{z} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

\*) Предполагается, как и выше, что углы  $\beta$  и  $\gamma$  малы. Тогда  $\dot{\beta}$  и  $-\dot{\gamma}$  будут являться приближенными значениями угловых скоростей относительно диаметров  $Oa$  и  $Ob$ .

\*\*\*) См. А. Stodola, Z. ges. Turbinenwesen, стр. 253, 1918; стр. 1, 1920.

Подставляя в уравнения (86) и (87), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{W}{g} \ddot{y} + my + n\beta &= 0, \\ (J - J_1) \beta \omega^2 &= m'y - n'\beta. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Как видно, вал изгибается не только центробежной силой, но также и моментом  $M = (J - J_1) \beta \omega^2$ , который выражает гироскопический эффект вращающегося диска, делающий в данном случае вал более жестким. Подставляя

$$y = r \cos \omega t, \quad \beta = \varphi \cos \omega t$$

в уравнения (k), получаем:

$$\left. \begin{aligned} (m - \omega^2 \frac{W}{g}) r + n\varphi &= 0, \\ -m'r + \{n' + (J - J_1) \omega^2\} \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

Предположенный выше изгиб вала становится возможным, если уравнения (l) имеют отличные от нуля корни  $r$  и  $\varphi$ , т. е. если угловая скорость  $\omega$  обращает определитель этих уравнений в нуль. Таким образом, найдем следующее уравнение для определения критических скоростей:

$$(m - \omega^2 \frac{W}{g}) \{n' + (J - J_1) \omega^2\} + nm' = 0, \quad (m)$$

или, вводя обозначения

$$\frac{mg}{W} = p^2, \quad \frac{n'}{J - J_1} = q^2$$

и замечая из уравнений (f) и (h), что

$$nm' = -cmn',$$

где

$$c = \frac{(a-b)^2}{a^2 - ab + b^2}.$$

получим:

$$(p^2 - \omega^2)(q^2 + \omega^2) - cp^2q^2 = 0$$

или

$$\omega^4 - (p^2 - q^2)\omega^2 - p^2q^2(1 - c) = 0. \quad (n)$$

Легко видеть, что поскольку  $c < 1$ , уравнение (n) имеет только один положительный корень для  $\omega^2$ , а именно:

$$\omega^2 = \frac{1}{2}(p^2 - q^2) + \sqrt{\frac{1}{4}(p^2 - q^2)^2 + (1 - c)p^2q^2}. \quad (o)$$

Когда гироскопическим эффектом можно пренебречь, в (m) следует подставить  $J - J_1 = 0$ , и мы получим:

$$\frac{\omega^2 W}{g} = \frac{mn' + nm'}{n'} = \frac{3IB}{a^2 b^2},$$

откуда

$$\omega_{kp} = \sqrt{\frac{3gIB}{a^2 b^2 W}}$$

или

$$\omega_{kp} = \sqrt{\frac{g}{\delta}},$$

где

$$\delta = \frac{a^2 b^2 W}{3IB}$$

представляет статический прогиб вала под грузом  $W$ . Этот результат полностью совпадает с результатом, найденным выше (см. § 5) при рассмотрении диска на валу как системы с одной степенью свободы.

Выше было предположено, что угловая скорость вращения плоскости изогнутого вала совпадает с угловой скоростью вращения диска. Однако не исключена возможность, что эти две скорости различны. Полагая, например, что угловая скорость вращения плоскости изогнутого вала равна  $\omega_1$ , и подставляя

$$y = r \cos \omega_1 t, \quad z = r \sin \omega_1 t, \quad \beta = \varphi \cos \omega_1 t, \quad \gamma = \varphi \sin \omega_1 t$$

в уравнения (86) и (87), получаем вместо уравнений (k):

$$\left. \begin{aligned} \frac{W}{g} \ddot{y} + my + n\beta &= 0, \\ (J\omega\omega_1 - J_1\omega_1^2)\beta &= m'y - n'\beta. \end{aligned} \right\} \quad (k')$$

Положив  $\omega_1 = \omega$ , получим прежний результат. Если  $\omega_1 = -\omega$ , то из второго уравнения (k') получим:

$$-(J + J_1) \omega^2 \beta = m'y - n'\beta. \quad (p)$$

Это показывает, что если плоскость изогнутого вала вращается со скоростью  $\omega$  в направлении, противоположном вращению диска, то гироскопический эффект представляется моментом

$$M = -(J + J_1) \omega^2 \beta.$$

Знак минус указывает, что при этих условиях гироскопический момент действует в направлении увеличения изгиба вала и поэтому понижает критическую скорость вала. Если вал с диском из состояния покоя довести до скорости  $\omega$ , то обычно имеет место условие

$\omega_1 = \omega$ . Однако, если имеются возмущающие силы той же частоты, что и критическая скорость, отвечающая условию  $\omega_1 = -\omega$ , то может иметь место вращение плоскости изогнутого вала в направлении, противоположном вращению диска \*).

*Колебания жесткого ротора на податливых подшипниках.* Уравнения (86) и (87) можно использовать также при изучении колебаний жесткого ротора, имеющего подшипники на податливых опорах (рис. 188). Пусть  $y_1, z_1$  и  $y_2, z_2$  — малые перемещения подшипников при колебаниях. Принимая эти перемещения центра за координаты колеблющегося ротора, получим следующие перемещения центра ротора (рис. 188):

$$y_0 = y_1 \frac{l_2}{l} + y_2 \frac{l_1}{l},$$

$$z_0 = z_1 \frac{l_2}{l} + z_2 \frac{l_1}{l},$$

$$\beta = \frac{y_2 - y_1}{l},$$

$$\gamma = \frac{z_2 - z_1}{l}.$$

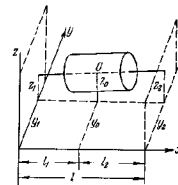


Рис. 188.

Пусть  $c_1, c_2, d_1$  и  $d_2$  — коэффициенты жесткости опор в горизонтальном и вертикальном направлениях так, что  $-c_1 y_1, -c_2 y_2$  — представляют горизонтальные и  $-d_1 z_1, -d_2 z_2$  — вертикальные реакции подшипников, вызванные малыми перемещениями  $y_1, y_2, z_1$  и  $z_2$  в направлениях  $y$  и  $z$ . Дифференциальные уравнения движения центра тяжести (86) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{W}{g} \ddot{y}_0 (l_2 \ddot{y}_1 + l_1 \ddot{y}_2) + c_1 y_1 + c_2 y_2 &= 0, \\ \frac{W}{g} \ddot{z}_0 (l_2 \ddot{z}_1 + l_1 \ddot{z}_2) + d_1 z_1 + d_2 z_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (q)$$

В этом случае уравнения (87), описывающие повороты ротора относительно осей  $y$  и  $z$ , будут:

$$\left. \begin{aligned} J\omega \frac{\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1}{l} - J_1 \frac{\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1}{l} &= z_2 d_2 l_2 - z_1 d_1 l_1, \\ J\omega \frac{\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1}{l} + J_1 \frac{\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1}{l} &= -y_2 c_2 l_2 + y_1 c_1 l_1. \end{aligned} \right\} \quad (r)$$

\* См. цитированную книгу: A. Stodola, Dampf- und Gasturbinen, стр. 367. Для дальнейшего изучения гироскопического эффекта см. R. B. Green, J. Appl. Mech., т. 15, стр. 369, 1948, а также упоминаемую на стр. 272 работу Караса.

Четыре уравнения (q) и (r) полностью описывают свободные колебания жесткого ротора на податливых опорах. Подставляя в эти уравнения

$$y_1 = A \sin pt, \quad y_2 = B \sin pt, \quad z_1 = C \cos pt, \quad z_2 = D \cos pt,$$

получим четыре однородных линейных уравнения для  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Приравняв определитель этих уравнений нулю, получим частотное уравнение, из которого можно вычислить частоты четырех нормальных форм колебаний ротора.

Рассмотрим теперь вынужденные колебания ротора, вызываемые некоторой эксцентрично прикрепленной массой. Влияние этой неуравновешенности эквивалентно действию возмущающей силы с составляющими

$$Y = A \cos \omega t, \quad Z = B \sin \omega t,$$

приложенной в центре тяжести, и пары с составляющими

$$M_y = C \sin \omega t, \quad M_z = D \cos \omega t.$$

Вместо уравнений (q) и (r) получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{W}{gl} (I_2 \ddot{y}_1 + I_1 \ddot{y}_2) + c_1 y_1 + c_2 y_2 &= A \cos \omega t, \\ \frac{W}{gl} (I_2 \ddot{z}_1 + I_1 \ddot{z}_2) + d_1 z_1 + d_2 z_2 &= B \sin \omega t, \\ J_0 \frac{\ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1}{l} - J_1 \frac{\ddot{\alpha}_2 - \ddot{\alpha}_1}{l} = z_2 d_2 l_2 - z_1 d_1 l_1 + C \sin \omega t, \\ J_0 \frac{\ddot{\alpha}_2 - \ddot{\alpha}_1}{l} + J_1 \frac{\ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1}{l} &= -y_2 c_2 l_2 + y_1 c_1 l_1 + D \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (s)$$

Частное решение этих уравнений, представляющее вынужденные колебания ротора, имеет вид:

$$y_1 = A' \cos \omega t, \quad y_2 = B' \cos \omega t, \quad z_1 = C' \sin \omega t, \quad z_2 = D' \sin \omega t.$$

Подставляя это решение в уравнения (s), найдем амплитуду вынужденных колебаний. При этих колебаниях ось ротора описывает поверхность, определяемую уравнениями:

$$\begin{aligned} y &= (a + bx) \cos \omega t, \\ z &= (c + dx) \sin \omega t, \end{aligned}$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  — постоянные. Как видно, каждая точка оси описывает эллипс, уравнение которого

$$\frac{y^2}{(a + bx)^2} + \frac{z^2}{(c + dx)^2} = 1.$$

Для двух точек этой оси, а именно для

$$x_1 = -\frac{a}{b} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{c}{d},$$

эллипсы вырождаются в прямые линии и общая форма поверхности, описываемой осью ротора, будет такой, как показано на рис. 189. Очевидно, что перемещения точки оси ротора зависят не только

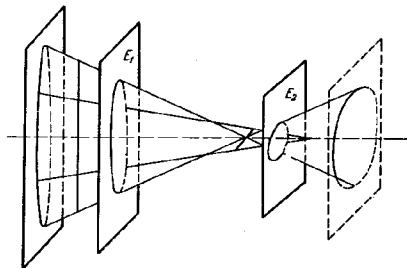


Рис. 189.

от величины возмущающей силы (величины неуравновешенности), но также от положения точки вдоль оси и от направления, в котором измеряется перемещение.

В общем случае неуравновешенность можно представить двумя эксцентрично расположенными массами (см. § 10) и вынужденные колебания ротора можно получить наложением двух колебаний рассмотренного выше вида и имеющих определенный сдвиг фаз\*). Из линейности уравнений (s) можно также заключить, что всегда можно устранить неуравновешенность, помещая уравновешивающие грузы в двух плоскостях; нужно только выбрать уравновешивающие грузы таким образом, чтобы соответствующие центробежные силы находились в равновесии с возмущающими силами, вызванными неуравновешенностью\*\*).

**45. Влияние веса вала и дисков на критическую скорость.** — В нашем предыдущем изложении предположение о вертикальности вала позволило исключить влияние веса вращающихся дисков. В го-

\* Этот вопрос детально рассмотрен в статье V. Bläss, Über den Massenausgleich raschumlaufender Körper, Z. Angew. Math. u. Mech., т. 6, стр. 429, 1926; см. также упомянутую работу Смита (стр. 206).

\*\* Влияние податливости вала будет рассмотрено далее (см. § 46).



горизонтальных валах веса дисков нужно рассматривать как возмущающие силы, которые при определенной скорости вызывают значительные колебания вала. Эта скорость обычно называется *критической скоростью второго порядка*\*). Для определения этой скорости необходимо более подробное изучение движения дисков. В дальнейшем рассматривается простейший случай одиночного диска и предполагается, что диск установлен в том поперечном сечении вала, в котором касательная к изогнутой оси вала остается параллельной осевой линии подшипников. Таким образом исключается рассмотренный в предыдущем параграфе гироскопический эффект; движение диска необходимо рассматривать только в его плоскости. Начнем со случая вертикального вала. Тогда  $xu$  представляет горизонтальную плоскость диска и  $O$  — центр вертикального вала в его недеформированном состоянии (рис. 190). Пусть при колебаниях  $S$  — мгновенное положение центра вала и  $C$  — мгновенное положение центра тяжести диска, так что  $CS = e$  — эксцентриситет, с которым диск установлен на валу. Остальные обозначения следующие:  $m$  — масса диска;  $mI^2$  —

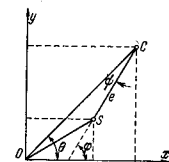


Рис. 190.

момент инерции диска относительно оси, проходящей через точку  $C$  и перпендикулярной к плоскости диска;  $k$  — коэффициент жесткости вала, равный силе в плоскости  $xu$ , необходимой для образования единичного прогиба в этой плоскости;  $\omega_{кр} = \sqrt{k/m}$  — критическая скорость первого порядка (см. § 5);  $x, y$  — координаты центра тяжести диска при движении;  $\varphi$  — угол поворота диска, равный углу между радиусом  $SC$  и осью  $x$ ;  $\theta$  — угол поворота вертикальной плоскости  $OC$ ;  $\psi$  — угол поворота диска относительно плоскости  $OC$ . Тогда  $\varphi = \psi + \theta$ . Координаты  $x$  и  $y$  центра тяжести  $C$  и угол поворота  $\varphi$  примем за координаты, определяющие положение диска в плоскости  $xu$ .

Дифференциальные уравнения движения центра тяжести  $C$  легко написать обычным путем, если заметить, что на диск в плоскости  $xu$  действует только одна сила упругой реакции вала. Эта сила пропорциональна прогибу  $OS$  вала и ее составляющие в направлениях  $x$  и  $y$  пропорциональны координатам точки  $S$  и соответственно равны  $-k(x - e \cos \varphi)$  и  $-k(y - e \sin \varphi)$ . Тогда дифференциальные уравнения движения центра  $C$  будут:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k(x - e \cos \varphi), \\ m\ddot{y} &= -k(y - e \sin \varphi). \end{aligned}$$

\*) Эту задачу впервые рассмотрел А. Стодола. Литературу по этому вопросу можно найти в указанной выше его книге, стр. 929. См. также Т. Pöschl, Z. angew. Math. u. Mech., т. 3, стр. 297, 1923 и С. R. Soderberg, Trans. ASME, стр. APM—45, 1932.

или

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= ke \cos \varphi, \\ m\ddot{y} + ky &= ke \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Третье уравнение получим, используя закон изменения момента количества движения. Момент количества движения диска относительно оси  $O$  состоит из: 1) момента количества движения  $mI^2\dot{\varphi}$  диска, вращающегося с угловой скоростью  $\dot{\varphi}$  вокруг его центра тяжести, и 2) момента количества движения  $m(x\dot{y} - y\dot{x})$  массы  $m$  диска, сосредоточенной в его центре тяжести. Тогда закон изменения момента количества движения дает уравнение

$$\frac{d}{dt} \{mI^2\dot{\varphi} + m(x\dot{y} - y\dot{x})\} = M,$$

или

$$mI^2\ddot{\varphi} + m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) = M, \quad (b)$$

где  $M$  — крутящий момент, передаваемый диску валом.

Уравнения (a) и (b) полностью описывают движение диска. Если  $M=0$ , то частное решение уравнений (a) и (b) получится в предположении, что центр тяжести диска  $C$  остается в плоскости  $OS$  изогнутой оси вала и описывает, вращаясь с постоянной угловой

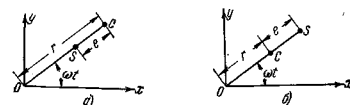


Рис. 191.

скоростью  $\dot{\varphi} = \omega$ , окружность радиуса  $r$ . Тогда, подставляя в уравнения (a)  $x = r \cos \omega t$ ,  $y = r \sin \omega t$  и принимая  $\varphi = \omega t$  для случая, показанного на рис. 191, а, и  $\varphi = \omega t + \pi$  для случая, показанного на рис. 191, б, получим:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{ke}{k - m\omega^2} = \frac{e\omega_{кр}^2}{\omega_{кр}^2 - \omega^2} \quad \text{для } \omega < \omega_{кр}, \\ r_0 &= -\frac{ke}{k - m\omega^2} = \frac{e\omega_{кр}^2}{\omega^2 - \omega_{кр}^2} \quad \text{для } \omega > \omega_{кр}. \end{aligned}$$

Эти результаты совпадают с полученными выше при элементарном рассмотрении (см. § 5).

Рассмотрим теперь случай, когда крутящий момент  $M$  отличается от нуля и равен\*)

$$M = m(x\ddot{y} - y\ddot{x}). \quad (c)$$

Тогда из уравнения (b) заключаем, что

$$\dot{\varphi} = \omega = \text{const},$$

и интегрируя, получаем:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad (d)$$

где  $\varphi_0$  — постоянная, определяющая начальное значение угла  $\varphi$ .

Подставляя (d) в уравнения (a) и пользуясь обозначением  $\omega_{кр}^2 = k/m$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_{кр}^2 x &= \omega_{кр}^2 e \cos(\omega t + \varphi_0), \\ \ddot{y} + \omega_{кр}^2 y &= \omega_{кр}^2 e \sin(\omega t + \varphi_0). \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Легко показать подстановкой, что выражения

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{M_1}{ek} \cos(\omega_{кр} t + \gamma_1 + \varphi_0) + \frac{e\omega_{кр}^2}{\omega_{кр}^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \varphi_0), \\ y &= -\frac{M_1}{ek} \sin(\omega_{кр} t + \gamma_1 + \varphi_0) + \frac{e\omega_{кр}^2}{\omega_{кр}^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

представляют решение уравнений (e).

Подставляя (f) в выражение (c), получим:

$$M = M_1 \sin\{(\omega_{кр} - \omega)t + \gamma_1\}. \quad (g)$$

Отсюда можно заключить, что под действием переменного момента (g) диск вращается с постоянной угловой скоростью и в то же время его центр тяжести совершает сложное колебательное движение, представленное уравнениями (f).

Таким же образом можно показать, что под действием переменного момента

$$M = M_2 \sin\{(\omega_{кр} + \omega)t + \gamma_2\}$$

диск также вращается с постоянной скоростью  $\omega$  и его центр совершает колебательное движение, описываемое уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{M_2}{ek} \cos(\omega_{кр} t + \gamma_2 - \varphi_0) + \frac{e\omega_{кр}^2}{\omega_{кр}^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \varphi_0), \\ y &= -\frac{M_2}{ek} \sin(\omega_{кр} t + \gamma_2 - \varphi_0) + \frac{e\omega_{кр}^2}{\omega_{кр}^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \varphi_0). \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Объединяя решения (f) и (h), получим полное решение уравнений (c), содержащее четыре произвольные постоянные  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Используем теперь этот результат для выявления колебаний, вызываемых собственным весом диска.

Примем, что вал находится в горизонтальном положении и ось  $u$  направлена вверх; тогда при добавлении веса диска вместо рис. 190 получится рис. 192. Уравнения (a) и (b) в этом случае заменятся следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= ke \cos \varphi, \\ m\ddot{y} + ky &= ke \sin \varphi - mg, \\ mI^2\ddot{\varphi} + m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) &= M - mgx. \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Сместим начало координат из точки  $O$  в точку  $O_1$ , как показано на чертеже; тогда, положив

$$y_1 = y + \frac{mg}{k},$$

можно представить уравнения (i) в виде:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= ke \cos \varphi, \\ m\ddot{y}_1 + ky_1 &= ke \sin \varphi, \\ mI^2\ddot{\varphi} + m(x\ddot{y}_1 - y_1\ddot{x}) &= M - mge \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

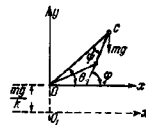


Рис. 192.

Эта система уравнений совпадает с системой уравнений (a) и (b), и влияние веса диска выражается переменным крутящим моментом  $-mge \cos \varphi$ . Предположим теперь, что  $M = 0$  и что вал вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = \frac{1}{2} \omega_{кр}$ . Тогда влияние веса диска можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} -mge \cos \varphi &= -mge \cos(\omega t) = mge \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= mge \sin\left\{(\omega_{кр} - \omega)t - \frac{\pi}{2}\right\}. \end{aligned} \quad (k)$$

Этот возмущающий момент имеет точно такой же вид, что и момент, определяемый формулой (g), и можно заключить, что при скорости  $\omega = \frac{1}{2} \omega_{кр}$  переменный момент, вызываемый весом диска, вызовет колебания вала, выражаемые формулами (f). Это и есть так называемая критическая скорость второго порядка, которая наблюдалась во многих действительных случаях\*). Следует заметить, однако, что

\*) См. O. Föppl, Z. Ver. deutsch. Ing. т. 63, стр. 867, 1919.

\*) Этот случай подробно рассмотрен в диссертации P. Schröder, Die kritischen Zustände zweiter Art raschumlaufender Wellen, Штуттгарт, 1924.

колебания той же частоты могут быть вызваны также переменной податливостью вала (см. стр. 168), и весьма возможно, что в некоторых случаях наблюдавшееся появление критической скорости второго порядка было вызвано этой последней причиной.

#### 46. Влияние деформируемости валов на уравновешивание роторов.

В наших предыдущих рассуждениях об уравновешивании машин (см. § 10) предполагалось, что ротор представляет собой абсолютно твердое тело. В таком случае полное уравновешивание может быть выполнено установкой уравновешивающих грузов в двух произвольно выбранных плоскостях. Предположение о возможности пренебречь деформируемостью вала достаточно точно для малых скоростей вращения; однако для высокоскоростных машин и особенно для машин, работающих при скоростях выше критической, может иметь существенное влияние изгиб, и вследствие этого ротор можно уравновесить только для одной определенной скорости, а при некоторых условиях вообще невозможно уравновесить, поэтому неизбежны неприятности, связанные с колебаниями.

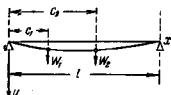


Рис. 193.

Влияние деформируемости вала поясним на простом примере двухопорного вала, несущего два диска (рис. 193). Прогиб вала  $y_1$  под грузом  $W_1$  зависит не только от величины этого груза, но также и от величины груза  $W_2$ . Та-

кое же заключение справедливо для прогиба  $y_2$  под грузом  $W_2$ . Пользуясь уравнением изогнутой оси двухопорного вала, получим следующие выражения для прогибов:

$$y_1 = a_{11}W_1 + a_{12}W_2, \quad y_2 = a_{21}W_1 + a_{22}W_2, \quad (a)$$

где  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  и  $a_{22}$  — постоянные для данного вала и данных положений грузов. Эти выражения можно теперь использовать для определения прогибов вала, вызванных центробежными силами, обусловленными эксцентриситетами дисков.

Пусть  $m_1$ ,  $m_2$  — массы дисков I и II,  $\omega$  — угловая скорость,  $y_1$ ,  $y_2$  — прогибы под дисками I и II,  $c_1$ ,  $c_2$  — расстояния от левой опоры до дисков I и II,  $Y_1$ ,  $Y_2$  — действующие на вал центробежные силы. Принимая, что определенный эксцентриситет  $e_1$  имеет только диск I, и беря прогиб в плоскости этого эксцентриситета, получим действующие на вал центробежные силы:

$$Y_1 = (e_1 + y_1) m_1 \omega^2, \quad Y_2 = y_2 m_2 \omega^2,$$

или, воспользовавшись для  $y_1$  и  $y_2$  уравнениями, подобными уравнениям (а), получим:

$$Y_1 = e_1 m_1 \omega^2 + m_1 \omega^2 (a_{11} Y_1 + a_{12} Y_2), \quad Y_2 = m_2 \omega^2 (a_{21} Y_1 + a_{22} Y_2),$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \frac{e_1 m_1 \omega^2 (1 - a_{22} m_2 \omega^2)}{(1 - a_{11} m_1 \omega^2) (1 - a_{22} m_2 \omega^2) - m_1 m_2 a_{12} a_{21} \omega^4}, \\ Y_2 &= \frac{e_1 a_{21} m_1 m_2 \omega^4}{(1 - a_{11} m_1 \omega^2) (1 - a_{22} m_2 \omega^2) - m_1 m_2 a_{12} a_{21} \omega^4} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Как видно, вместо центробежной силы  $m_1 e_1 \omega^2$ , которую мы имели для жесткого вала, на деформируемый вал действуют две силы  $Y_1$  и  $Y_2$ . Неуравновешенность будет такая же, как и для жесткого вала, на который действует сила  $R_1 = Y_1 + Y_2$ , приложенная на расстоянии

$$l_1 = \frac{Y_1 c_1 + Y_2 c_2}{Y_1 + Y_2} \quad (c)$$

от левой опоры.

Из уравнений (b) можно видеть, что  $l_1$  не зависит от эксцентриситета  $e_1$ , а зависит только от упругих свойств вала, положения и величин масс  $m_1$  и  $m_2$  и скорости  $\omega$  машины.

Так же как и выше, можно рассмотреть влияние эксцентриситета диска II и, пользуясь принципом наложения, получить влияние эксцентриситетов обоих дисков. Отсюда можно заключить, что при данной скорости неуравновешенность двух дисков, находящихся на деформируемом валу, динамически эквивалентна неуравновешенностям в двух определенных плоскостях



Рис. 194.

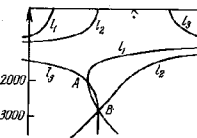


Рис. 195.

жесткого вала. Положение этих плоскостей можно определить, пользуясь формулой (с) для одной плоскости и подобной же формулой для второй плоскости.

Подобные же заключения можно сделать для деформируемого вала с любым числом  $n$  дисков\*; можно показать, что неуравновешенность этих дисков эквивалентна неуравновешенности жесткого вала в  $n$  определенных плоскостях. Эти плоскости остаются неизменными при данной скорости вращения вала, и уравновешивание можно выполнить установкой уравновешивающих грузов в двух произвольно выбранных плоскостях. При любой другой скорости эти плоскости изменяют свое положение и ротор вновь становится неуравновешенным. Этим объясняется, почему ротор, полностью

\* Общее исследование влияния деформируемости вала на уравновешивание можно найти в упомянутой на стр. 281 статье Вязса. Из этой статьи заимствованы рис. 194 и 195. См. также упомянутую на стр. 206 работу Смита.

уравновешенный на балансировочной машине при сравнительно малой скорости, становится неуравновешенным при эксплуатационных скоростях. Поэтому необходимо уравновешивание в условиях практической работы. Ниже показано перемещение плоскостей неуравновешенности с изменением скорости для двух частных случаев. На рис. 194 представлен вал, несущий три диска. Изменения расстояний  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  плоскостей неуравновешенности эквивалентного жесткого вала в зависимости от скорости показаны на чертеже кривыми  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ . Как видно, с возрастанием скорости эти кривые сначала сближаются, затем проходят через общую точку при критической скорости и далее расходятся. Если исключить область вблизи критической скорости, то ротор можно уравновесить при любой скорости при помощи установки уравновешивающих грузов на любых двух дисках из трех. Более трудные условия показаны на рис. 195. Как видно, при скорости около 2150 об/мин кривые  $l_1$  и  $l_3$  проходят через общую точку А. Две плоскости эквивалентного жесткого вала совпадают, и становится невозможным уравновесить машину установкой уравновешивающих грузов на дисках I и III. Практически в значительной области около точки А условия таковы, что трудно добиться удовлетворительной балансировки, и можно ожидать неприятностей, связанных с сильными колебаниями.

## ГЛАВА V

### КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

При рассмотрении колебаний упругих тел будем полагать, что материал тела однороден, изотропен и следует закону Гука. Дифференциальные уравнения движения, установленные в предыдущей главе для системы частиц, будем применять также и здесь.

Однако в случае упругих тел вместо нескольких сосредоточенных масс мы имеем систему, состоящую из бесконечно большого числа частиц, между которыми действуют силы упругости. Для определения положения такой системы требуется бесконечно большое число координат, и поэтому она имеет бесконечно большое число степеней свободы, так как за возможное или виртуальное перемещение можно принять любое малое перемещение, удовлетворяющее условию непрерывности, т. е. не вызывающее разрывов в теле. Поэтому любое упругое тело имеет бесконечно большое число форм собственных колебаний.

В случае тонких стержней и пластинок задача колебаний может быть значительно упрощена. Эти задачи, которые имеют большое значение в технических приложениях, рассмотрены в настоящей главе более подробно\*).

**47. Свободные продольные колебания призматических стержней.** Дифференциальное уравнение продольных колебаний. Последующее рассмотрение основано на допущении, что при продольных колебаниях призматического стержня его поперечные сечения

\* Более полное рассмотрение задач о колебаниях упругих систем можно найти в известной книге: Rayleigh, Theory of Sound, 2-е изд., 1894—1896. [Русский перевод: Рэлей, Теория звука, 1-е изд., ГТИ, 1940; 2-е изд., ГТИ, 1955.] См. также H. Lamb, The Dynamical Theory of Sound, London, 1925 [русский перевод: Г. Лэмб, Динамическая теория звука, Физматгиз, 1960]; A. E. A. Love, Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge, 4-е изд., 1927. [Русский перевод: Ляв, Математическая теория упругости, ОНТИ, 1935.] Handbuch der Physik, т. 6, 1928; Barré de Saint-Venant, Théorie de l'élasticité des corps solides, Paris, 1883 и книгу: C. V. Biezeno, R. Grammel, [Русский перевод: К. Биенен, Р. Граммель, Техническая динамика, ГТИ, т. 1, 1950; т. 2, 1952.]

остаются плоскими, и частицы, лежащие в этих сечениях, совершают движение только в направлении оси стержня. Продольные деформации растяжения и сжатия, которые имеют место при колебаниях стержня, конечно, сопровождаются некоторыми поперечными деформациями, однако в дальнейшем будут рассматриваться только такие случаи, в которых длина продольных волн велика сравнительно с размерами поперечного сечения стержня. В этих случаях поперечными перемещениями при продольных колебаниях можно пренебречь без существенных ошибок\*).

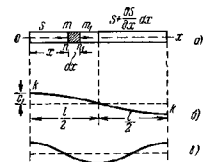


Рис. 196.

Пусть  $u$  — продольное перемещение произвольного поперечного сечения  $mn$  стержня при колебаниях;  $e$  — относительное удлинение;  $E$  — модуль упругости;  $A$  — площадь поперечного сечения;  $S = AEe$  — продольная растягивающая сила;  $\gamma$  — вес единицы объема материала;  $l$  — длина стержня. Тогда относительное удлинение и растягивающая сила в произвольном поперечном сечении стержня составляют:

$$e = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad S = AE \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Для смежного сечения растягивающая сила равна

$$S + dS = AE \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right).$$

Учитывая, что сила инерции элемента  $mm_1n_1$  стержня равна

$$-\frac{A\gamma dx}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

и применяя принцип Даламбера, получим следующее дифференциальное уравнение движения элемента  $mm_1n_1$ :

$$-\frac{A\gamma}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (88)$$

\* Полное решение задачи о продольных колебаниях цилиндрического стержня кругового сечения с учетом поперечных перемещений дано в работе: L. Rochhammer, J. Math. (Clieve), т. 81, стр. 324, 1876. См. также E. Giebe, E. Bleichschmidt, Ann. Physik, сер. 5, т. 18, стр. 457, 1933.

где\*)

$$a^2 = \frac{E\gamma}{\gamma}. \quad (89)$$

Решение в виде тригонометрического ряда. Перемещение  $u$ , зависящее от координаты  $x$  и времени  $t$ , должно быть такой функцией  $x$  и  $t$ , которая удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных (88). Частное решение этого уравнения легко найти, приняв во внимание: 1) что в общем случае любые колебания системы можно разложить по собственным формам колебаний и 2) когда система совершает колебания одной из собственных форм, все точки совершают простые гармонические колебания и движутся в общем темпе, одновременно проходя через положения равновесия. Допустим теперь, что стержень совершает колебания одной из собственных форм, частота которых равна  $p/2\pi$ ; тогда решение уравнения (88) следует взять в виде

$$u = X(A \cos pt + B \sin pt), \quad (a)$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные и  $X$  — некоторая функция только координаты  $x$ , определяющая форму рассматриваемых колебаний и называемая *нормальной функцией*. Эту функцию нужно определить в каждом частном случае таким образом, чтобы удовлетворить условиям на концах стержня. В качестве примера рассмотрим теперь продольные колебания стержня со свободными концами. В этом случае при колебаниях растягивающая сила на концах должна равняться нулю, и мы получаем следующие условия на концах (рис. 196):

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = 0. \quad (b)$$

Подставляя выражение (a) в уравнение (88), получаем:

$$-p^2 X = a^2 \frac{d^2 X}{dx^2},$$

откуда

$$X = C \cos \frac{px}{a} + D \sin \frac{px}{a}. \quad (c)$$

Чтобы удовлетворить первому из условий (b), необходимо положить  $D=0$ . Второе условие (b) будет удовлетворено, если

$$\sin \frac{pl}{a} = 0. \quad (90)$$

Это — *частотное уравнение* для рассматриваемого случая, позволяющее вычислить собственные частоты продольных колебаний стержня

\*) На стр. 404 показано, что  $a$  есть скорость распространения волн вдоль стержня.

со свободными концами; уравнение (90) будет удовлетворяться при

$$\frac{pl}{a} = i\pi, \quad (d)$$

где  $i$  — целое число. Полагая  $i = 1, 2, 3, \dots$ , получим частоты различных форм колебаний. Частота основной формы колебаний получается при подстановке  $i = 1$  в условие (d); это дает

$$p_1 = \frac{a\pi}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}. \quad (91)$$

Соответствующий период колебаний равен

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{p_1} = 2l \sqrt{\frac{\gamma}{Eg}}. \quad (92)$$

Форма колебаний, получаемая из уравнения (c), представлена на рис. 196, б кривой  $kk$ , ординаты которой равны

$$X_1 = C_1 \cos \frac{p_1 x}{a} = C_1 \cos \frac{\pi x}{l}.$$

На рис. 196, в представлена вторая форма колебаний, для которой

$$\frac{pl}{a} = 2\pi \text{ и } X_2 = C_2 \cos \frac{2\pi x}{l}.$$

Общий вид частного решения (a) уравнения (88) будет:

$$u = \cos \frac{i\pi x}{l} \left( A_i \cos \frac{i\pi a t}{l} + B_i \sin \frac{i\pi a t}{l} \right). \quad (e)$$

Путем наложения подобных частных решений можно представить любые продольные колебания стержня в следующем виде\*):

$$u = \sum_{i=1}^{i=\infty} \cos \frac{i\pi x}{l} \left( A_i \cos \frac{i\pi a t}{l} + B_i \sin \frac{i\pi a t}{l} \right). \quad (93)$$

Постоянные  $A_i, B_i$  всегда можно выбрать так, чтобы удовлетворить любым начальным условиям.

Положим, например, что в начальный момент  $t = 0$  перемещения  $u$  заданы уравнением  $(u)_{t=0} = f(x)$ , а начальные скорости — уравнением  $(\dot{u})_{t=0} = f_1(x)$ . Подставляя  $t = 0$  в уравнение (93), получаем:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \cos \frac{i\pi x}{l}. \quad (i)$$

\* ) Перемещение стержня как жесткого тела здесь не рассматривается.

Подставляя  $t = 0$  в выражение для производной от  $u$  (уравнение (93)) по  $t$ , получаем:

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{i\pi a}{l} B_i \cos \frac{i\pi x}{l}. \quad (g)$$

Коэффициенты  $A_i$  и  $B_i$  в выражениях (f) и (g) теперь можно определить так, как это пояснено выше (см. § 17):

$$A_i = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{i\pi x}{l} dx, \quad (h)$$

$$B_i = \frac{2}{i\pi a} \int_0^l f_1(x) \cos \frac{i\pi x}{l} dx. \quad (i)$$

Для примера рассмотрим теперь случай, когда призматический стержень сжат силами, приложенными по концам, и в начальный момент  $t = 0$  внезапно освобождается от этого сжатия. Принимая\*)

$$(u)_{t=0} = f(x) = \frac{\varepsilon l}{2} - \varepsilon x, \quad f_1(x) = 0,$$

где  $\varepsilon$  — относительное укорочение в момент  $t = 0$ , получаем из уравнений (h) и (i):  $A_i = \frac{4\varepsilon l}{\pi^2 i^2}$  для нечетного  $i$ ,  $A_i = 0$  для четного  $i$ ,  $B_i = 0$ , и общее решение (93) принимает вид:

$$u = \frac{4\varepsilon l}{\pi^2} \sum_{i=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\cos \frac{i\pi x}{l} \cos \frac{i\pi a t}{l}}{i^2}.$$

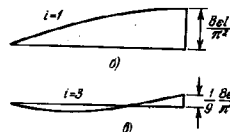


Рис. 197.

В это решение входят только члены с нечетными значениями  $i$  и колебания симметричны относительно среднего поперечного сечения стержня.

На общее решение (93), представляющее колебания стержня, может быть наложено любое продольное перемещение стержня как жесткого тела.

В качестве второго примера рассмотрим продольные колебания стержня, один конец которого закреплен, а второй — свободен (рис. 197). В этом случае условия на концах следующие:

$$(u)_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = 0. \quad (j)$$

\* ) Предполагается, что середина стержня неподвижна.

Чтобы удовлетворить первому из этих условий, примем  $C=0$  в общем выражении (с) для нормальных функций. Тогда второе условие даст частотное уравнение

$$\cos \frac{\pi l}{a} = 0,$$

из которого получаются частоты и периоды различных форм колебаний:

$$p_i = \frac{i\pi a}{2l}, \quad \tau_i = \frac{2\pi}{p_i} = \frac{4l}{ia}, \quad i = 1, 3, 5, \dots \quad (k)$$

Общее выражение (а) для различных форм колебаний принимает вид:

$$u_i = \sin \frac{i\pi x}{2l} \left( A_i \cos \frac{i\pi at}{2l} + B_i \sin \frac{i\pi at}{2l} \right). \quad (l)$$

Общее выражение для продольных колебаний получится при помощи наложения:

$$u = \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \sin \frac{i\pi x}{2l} \left( A_i \cos \frac{i\pi at}{2l} + B_i \sin \frac{i\pi at}{2l} \right). \quad (m)$$

Постоянные  $A_i$  и  $B_i$  должны быть определены в каждом частном случае из условий, относящихся к моменту  $t=0$ .

Примем, например, что стержень был растянут продольной силой  $P$ , приложенной к свободному концу, и в момент  $t=0$  внезапно освобожден. Пользуясь обозначением  $\epsilon$  для начального относительного удлинения  $P/AE$ , запишем начальные условия в виде:

$$(u)_{t=0} = \epsilon x, \quad (\dot{u})_{t=0} = 0.$$

Второе из этих условий будет удовлетворено при  $B_i=0$ . Для определения постоянных  $A_i$  имеем уравнение

$$\sum_{i=1, 3, 5, \dots} A_i \sin \frac{i\pi x}{2l} = \epsilon x.$$

Пользуясь формулами, подобными формуле (h), находим:

$$A_i = \frac{2\epsilon}{l} \int_0^l x \sin \frac{i\pi x}{2l} dx = \frac{8\epsilon l}{\pi^2 i^2} \left( -1 \right)^{\frac{i-1}{2}},$$

и выражение (m) дает:

$$u = \frac{8\epsilon l}{\pi^2} \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{i^2} \sin \frac{i\pi x}{2l} \cos \frac{i\pi at}{2l}. \quad (n)$$

На рис. 197, б и в графически представлены первые две формы колебаний. Можно заметить, что амплитуды различных форм коле-

баний быстро уменьшаются с увеличением  $i$ . Перемещения свободного конца стержня получаются путем подстановки  $x=l$  в выражение (n). Для  $t=0$  это дает:

$$(u)_{x=l} = \frac{8\epsilon l}{\pi^2} \left( 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) = \frac{8\epsilon l}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} = \epsilon l,$$

как и должно быть.

### Примеры

1. Найти нормальные функции продольных колебаний стержня длиной  $l$ , если оба конца закреплены.

*Решение.* Условия на концах в данном случае:

$$(u)_{x=0} = (u)_{x=l} = 0.$$

Чтобы удовлетворить этим условиям, положим  $C=0$  в общем выражении (с), тогда получим частотное уравнение

$$\sin \frac{\pi l}{a} = 0,$$

из которого найдем:

$$p_i = \frac{i\pi a}{l}.$$

Следовательно, нормальные функции будут:

$$X_i = A_i \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

2. На стержень с заделанными концами действует постоянная осевая сила  $P$ , приложенная посредине (рис. 198). Какие колебания будут вызваны, если сила  $P$  внезапно исчезнет?

*Решение.* Относительное удлинение левой части стержня, равное относительному укорочению правой части, равно

$$\epsilon = \frac{P}{2AE}.$$

Начальное перемещение  $(u)_{t=0}$ :

$$f(x) = \epsilon x \quad \text{для } 0 < x < \frac{l}{2},$$

$$f(x) = \epsilon(l-x) \quad \text{для } \frac{l}{2} < x < l,$$

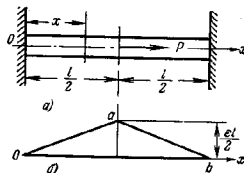


Рис. 198.

представлено треугольником  $Oab$  на рис. 198, б. Из предыдущего примера известно, что нормальные функции в этом случае:

$$X_i = A_i \sin \frac{\pi i x}{a} = A_i \sin \frac{\pi i x}{l},$$

и общее выражение для колебаний, удовлетворяющих начальному условию  $(\dot{u})_{t=0} = 0$ , имеет вид

$$u = \sum_{i=1, 2, 3, \dots} A_i \sin \frac{i\pi x}{l} \cos \frac{i\pi at}{l}.$$

Постоянные  $A_i$  определяются из второго начального условия, которое требует, чтобы

$$f(x) = \sum A_i \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Тогда

$$A_i = \frac{2}{l} \left[ \int_0^{l/2} e x \sin \frac{i\pi x}{l} dx + \int_{l/2}^l e (l-x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx \right] = \\ = \frac{4el}{\pi^2} \frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i^2} \text{ для } i=1, 3, 5, \dots, A_i=0 \text{ для } i=2, 4, \dots$$

и

$$u = \frac{4el}{\pi^2} \sum_{i=1, 3, \dots} (-1)^{(i-1)/2} \frac{1}{i^2} \sin \frac{i\pi x}{l} \cos p_i t.$$

3. Конец  $x=0$  стержня, движущегося вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $v$ , внезапно останавливается (рис. 197, а), так что начальные условия имеют вид:  $(u)_{t=0} = 0$ ;  $(\dot{u})_{t=0} = v$ . Определить последующие колебания.

*Решение.* Общее выражение для перемещений дано выражением (м). Так как начальные перемещения отсутствуют, примем  $A_0=0$  в этом выражении. Постоянные  $B_i$  определяются из уравнения

$$(\dot{u})_{t=0} = \sum_{i=1, 3, \dots} B_i \frac{i\pi a}{2l} \sin \frac{i\pi x}{2l} = v,$$

которое дает

$$B_i = \frac{8vl}{\pi^2 i^2 a}.$$

Поэтому

$$u = \frac{8vl}{\pi^2 a} \sum_{i=1, 3, \dots} \frac{1}{i^2} \sin \frac{i\pi x}{2l} \sin p_i t.$$

Пользуясь этой формулой, можно вычислить перемещение любого поперечного сечения стержня в любой момент. Взяв, например, свободный конец стержня ( $x=l$ ) и полагая  $t=l/a$ , что представляет собой время прохождения звука расстояния  $l$ , получим:

$$(u)_{x=l/a} = \frac{8vl}{\pi^2 a} \left( 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) = \frac{vl}{a}.$$

Относительное удлинение стержня при колебаниях равно

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{8vl}{\pi^2 a} \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{i^2} \frac{i\pi}{2l} \cos \frac{i\pi x}{2l} \sin p_i t.$$

Для закрепленного конца ( $x=0$ ) получим:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{4v}{\pi a} \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi a t}{2l} = \frac{v}{a} \text{ для } 0 < \frac{\pi a t}{2l} < \frac{\pi}{2}.$$

Мы видим, что волна растяжения, возникающая у левого конца стержня в момент остановки ( $t=0$ ), движется вдоль стержня со скоростью  $a$  и в момент  $t=l/2a$  она достигает свободного конца стержня. В этот момент скорости всех частиц стержня равны нулю и в то же время стержень равномерно растянут, причем относительное удлинение  $v=v/a$ .

48. **Вынужденные продольные колебания призматических стержней.** — Начнем с рассмотрения призматического стержня, верхний конец которого закреплен (рис. 199) и к нижнему концу которого приложена возмущающая сила  $P$ . Мы уже исследовали свободные колебания такого стержня и нашли, что нормальные функции в данном случае (см. уравнение (м) предыдущего параграфа) имеют вид:

$$X_i = A_i \sin \frac{i\pi x}{2l}, \quad i=1, 3, 5, \dots \quad (a)$$

Любое перемещение  $u=f(x)$  можно получить наложением перемещений, соответствующих нормальным формам колебаний (а), и колебания, вызванные возмущающей силой  $P$ , можно представить рядом

$$u = \varphi_1 \sin \frac{\pi x}{2l} + \varphi_2 \sin \frac{3\pi x}{2l} + \varphi_3 \sin \frac{5\pi x}{2l} + \dots, \quad (b)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  — некоторые неизвестные функции времени. В случае свободных колебаний эти функции представляются выражениями в скобках уравнения (м) предыдущего параграфа. Чтобы найти эти функции для случая вынужденных колебаний, применим принцип Даламбера совместно с принципом виртуальных работ. Мы должны рассмотреть здесь три вида сил: силы инерции, приложенные к каждому элементу колеблющегося стержня, уругие силы, возникающие при деформации стержня, и возмущающую силу. За виртуальное перемещение можно взять любое продольное перемещение  $\delta u$ , удовлетворяющее условию непрерывности и условию на закрепленном конце ( $\delta u_{x=0} = 0$ ). Для нашего последующего анализа целесообразно принять, что различные типы виртуальных перемещений представлены нормальными функциями (а). Таким образом,

$$\delta u_i = A_i \sin \frac{i\pi x}{2l}. \quad (c)$$

Замечая, что масса элемента, расположенного между двумя смежными поперечными сечениями стержня, равна  $\frac{A\gamma}{g} dx$ , найдем, что работа, совершаемая силами инерции на принятом виртуальном перемещении, равна

$$-\int_0^l \frac{A\gamma}{g} \ddot{u} A_i \sin \frac{i\pi x}{2l} dx.$$

Подставляя для  $u$  ряд (b) и замечая, что

$$\int_0^l \sin \frac{i\pi x}{2l} \sin \frac{j\pi x}{2l} dx = 0, \quad \int_0^l \sin^2 \frac{i\pi x}{2l} dx = \frac{l}{2},$$



Рис. 199.



получаем:

$$-\frac{A\gamma}{g} \cdot \frac{1}{2} A_i \ddot{\varphi}_i \quad (d)$$

Для вычисления виртуальной работы, совершаемой упругими силами, целесообразно воспользоваться выражением энергии деформации колеблющегося стержня. Эта энергия равна

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l AE \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Подставляя для  $u$  ряд (b) и замечая, что

$$\int_0^l \cos \frac{i\pi x}{2l} \cdot \cos \frac{j\pi x}{2l} dx = 0, \quad \int_0^l \cos^2 \frac{i\pi x}{2l} dx = \frac{l}{2},$$

найдем энергию деформации:

$$V = \frac{i^2 \pi^2 AE}{16l} \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \varphi_i^2 \quad (e)$$

Мы видим, что энергия деформации стержня в любой момент зависит от величин  $\varphi_i$ , определяющих перемещение (b) стержня. Если мы дадим одной из этих величин, например  $\varphi_i$ , приращение  $\delta\varphi_i$ , то соответствующее перемещение будет

$$\delta\varphi_i \sin \frac{i\pi x}{2l} \quad (f)$$

и соответствующее приращение энергии деформации равно

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \delta\varphi_i = \frac{i^2 \pi^2 AE}{8l} \varphi_i \delta\varphi_i \quad (g)$$

Эта величина, взятая со знаком минус, представляет работу упругих сил на перемещении (f). Чтобы получить работу упругих сил на виртуальном перемещении (c), нужно лишь заменить  $\delta\varphi_i$  на  $A_i$ . Таким образом, мы получим для этой работы выражение

$$-\frac{i^2 \pi^2 AE}{8l} \varphi_i A_i \quad (h)$$

Чтобы найти виртуальную работу приложенной к концу возмущающей силы, заметим, что виртуальное перемещение этого конца получится подстановкой в выражение (c) длины пролета  $l$  вместо  $x$ ; соответствующая виртуальная работа окажется равной

$$PA_i \sin \frac{i\pi}{2} = PA_i (-1)^{\frac{i-1}{2}} \quad (i)$$

Суммирование выражений (d), (h) и (i) даст полную виртуальную работу. Приравнявая ее нулю, получаем:

$$\frac{A\gamma}{2g} \ddot{\varphi}_i + \frac{i^2 \pi^2 AE}{8l} \varphi_i = P(-1)^{\frac{i-1}{2}},$$

или

$$\ddot{\varphi}_i + \frac{i^2 \pi^2 a^2}{4l^2} \varphi_i = \frac{2g}{A\gamma l} P(-1)^{\frac{i-1}{2}}, \quad (j)$$

где  $a^2 = Eg/\gamma$  и  $i = 1, 3, 5, \dots$

Мы видим, что каждую величину  $\varphi_i$  ряда (b) можно легко получить из уравнения (j), если  $P$  является известной функцией времени. Если начальные скорости и перемещения равны нулю и нужно рассмотреть только колебания, вызванные возмущающей силой  $P$ , то решение уравнения (j) следует взять в форме, данной на стр. 105. Тогда

$$\varphi_i = \frac{4g(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{a^2 i \gamma A} \int_0^t P \sin \left[ \frac{i\pi a}{2l} (t-t_1) \right] dt_1.$$

Подставив  $\varphi_i$  в выражение (b), получим уравнение вызванных возмущающей силой колебаний в следующем виде:

$$u = \frac{4g}{a^2 i \gamma A} \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{i} \sin \frac{i\pi x}{2l} \int_0^t P \sin \left[ \frac{i\pi a}{2l} (t-t_1) \right] dt_1 \quad (k)$$

Возьмем в качестве частного примера случай колебаний стержня, вызванных постоянной силой  $P$ , внезапно приложенной в момент  $t=0$ . В этом случае интегралы, входящие в ряд (k), легко вычисляются, и мы получим:

$$u = \frac{8glP}{a^2 \pi^2 \gamma A} \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{i^2} \sin \frac{i\pi x}{2l} \left( 1 - \cos \frac{inat}{2l} \right).$$

Подставляя сюда  $x=l$ , получим перемещение конца стержня:

$$(u)_{x=l} = \frac{8glP}{a^2 \pi^2 \gamma A} \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{i^2} \left( 1 - \cos \frac{inat}{2l} \right).$$

Как видно, при внезапном приложении силы  $P$  возникают все формы колебаний стержня. Наибольшее отклонение достигается при  $t = 2l/a$ . В этот момент

$$1 - \cos \frac{inat}{2l} = 2,$$

и мы получаем:

$$(u)_{x=l} = \frac{16glP}{a^2 \pi^2 \gamma A} \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{i^2}.$$

Замечая, что

$$\sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{и} \quad a^2 = \frac{Eg}{\gamma},$$

найдем:

$$(u)_{x=l} = \frac{2lP}{AE}.$$

Таким образом, мы заключаем, что внезапно приложенная сила вызывает вдвое большее перемещение, чем постепенно возрастающая сила.

В качестве второго примера рассмотрим продольные колебания стержня со свободными концами (рис. 19б), вызванные продольной силой  $P$ , внезапно приложенной к концу  $x=l^*$ . Поступая как и в предыдущем примере и используя нормальные функции для стержня со свободными концами (см. уравнение (93), стр. 292), можно представить продольные перемещения колеблющегося стержня в виде ряда:

$$u = \varphi_0 + \varphi_1 \cos \frac{\pi x}{l} + \varphi_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + \varphi_3 \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots, \quad (1)$$

в котором первый член представляет движение стержня как твердого тела. На это движение накладываются различные формы продольных колебаний стержня. Для определения функции  $\varphi_0$  мы располагаем уравнением

$$\frac{\gamma l A}{g} \ddot{\varphi}_0 = P. \quad (m)$$

Функции  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  найдем, как и выше, пользуясь принципом виртуальных работ совместно с принципом Даламбера. Принимая виртуальное перемещение

$$\delta u = A_i \cos \frac{i\pi x}{l}, \quad (n)$$

найдем, что работа сил инерции на этом перемещении равна

$$-\int_0^l \frac{\gamma A}{g} \ddot{u} A_i \cos \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{\gamma A}{g} \cdot \frac{1}{2} A_i \ddot{\varphi}_i. \quad (o)$$

\* Подобная задача встречается при исследовании колебаний, возникающих во время подъема длинных буровых штанг, которые применяются в глубоких нефтяных скважинах. Эта задача рассмотрена в работе: В. F. Langer, E. H. Lamberger, J. Appl. Mech., т. 10, стр. 1, 1943.

Энергия деформации колеблющегося стержня в любой момент времени равна

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l AE \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{\pi^2 AE}{4l} \sum_{i=1, 3, 5, \dots} i^2 \varphi_i^2, \quad (p)$$

а работа упругих сил на перемещении  $(n)$  равна

$$-\frac{i^2 \pi^2 AE}{2l} \varphi_i A_i.$$

Наконец, работа силы  $P$  на перемещении  $(n)$  равна

$$PA_i \cos i\pi = A_i P (-1)^i. \quad (q)$$

Приравняв нулю сумму выражений (o), (p) и (q), получим уравнение

$$\ddot{\varphi}_i + \frac{i^2 \pi^2 a^2}{l^2} \varphi_i = \frac{2g}{\gamma A} P (-1)^i. \quad (r)$$

Из этого уравнения и уравнения (m), получим:

$$\varphi_0 = \frac{g l^2 P}{2\gamma l A},$$

$$\varphi_i = (-1)^i \frac{2g}{i^2 \pi^2 \gamma A} \int_0^l P \sin \left[ \frac{i\pi a}{l} (t - t_1) \right] dt_1 = \frac{(-1)^i 2g l P}{i^2 \pi^2 a^2 \gamma A} \left( 1 - \cos \frac{i\pi a t}{l} \right).$$

Подставляя в выражение (1), находим:

$$u = \frac{g l^2 P}{2\gamma l A} + \frac{2g l P}{\pi^2 a^2 \gamma A} \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{(-1)^i}{i^2} \cos \frac{i\pi x}{l} \left( 1 - \cos \frac{i\pi a t}{l} \right). \quad (s)$$

Чтобы получить перемещение конца стержня, к которому приложена сила  $P$ , подставим  $x=l$  в решение (s); это дает:

$$(u)_{x=l} = \frac{g l^2 P}{2\gamma l A} + \frac{2g l P}{\pi^2 a^2 \gamma A} \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{i^2} \left( 1 - \cos \frac{i\pi a t}{l} \right). \quad (t)$$

Для  $t=l/a$  получим:

$$(u)_{x=l} = \frac{Pl}{2AE} + \frac{4Pl}{\pi^2 AE} \left( 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) = \frac{Pl}{AE}. \quad (u)$$

Таким образом, перемещение в этот момент равно удлинению стержня под действием постоянной продольной силы  $P$ .

Теория вынужденных продольных колебаний стержней со свободными концами была применена Викандером к исследованию усилий в сцепных устройствах длинных товарных поездов\*).

\* См. Trans. ASME, т. 57, стр. 317, 1935.

## Примеры

1. Найти вынужденные колебания стержня, неподвижно закрепленного на одном конце и свободного на другом (рис. 199), вызванные гармонической осевой силой  $P = P_0 \sin \omega t$ , действующей на свободном конце стержня.

Решение. В данном случае уравнение (j) принимает вид:

$$\ddot{\Phi}_i + \frac{i^2 \mu^2 a^2}{4i^2} \Phi_i = \frac{2g(-1)^i}{A\gamma l} P_0 \sin \omega t,$$

и соответствующие вынужденные колебания будут:

$$\Phi_i = \frac{P_0}{\gamma l A} \cdot \frac{2g(-1)^i}{(\rho_1^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

Подставляя  $\Phi_i$  в выражение (b), получим искомые вынужденные колебания стержня. Как видно, если  $\omega$  приближается к значению одной из собственных частот стержня, то амплитуда соответствующей формы колебаний неограниченно возрастает.

2. Буровая штанга представляет собой стальную трубу длиной 1220 м. Рассматривая трубу как стержень со свободными концами, найти период  $\tau$  основной формы колебаний. Найти перемещение  $\delta$  конца  $x=l$  при  $t=\tau/2$ , вызванное растягивающими напряжениями  $\sigma = P/A = 200 \text{ кг/см}^2$ , внезапно приложенными к этому концу. Принять  $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/м}^2$ ,  $\gamma = 0,0077 \text{ кг/см}^3$ .

Решение. Скорость звука в таком стержне равна

$$a = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} = 5050 \text{ м/сек.}$$

Период основной формы колебаний составляет

$$\tau = \frac{2l}{a} = 0,483 \text{ сек.}$$

Искомое перемещение по формуле (u) равно

$$\delta = \frac{200 \cdot 122000}{2 \cdot 10^8} = 12,2 \text{ см.}$$

3. Найти колебания, вызванные в стержне, заделанном на одном конце и свободном на другом, внезапно приложенными осевыми силами  $q$ , равномерно распределенными по длине стержня.

Указание. Виртуальная работа, совершаемая силами  $q$ , равна

$$\int_0^l q A_i \sin \frac{i\pi x}{2l} dx = \frac{2ql}{i\pi} A_i.$$

чтобы определить искомые колебания, нужно подставить  $2ql/i\pi$  вместо

$P(-1)^i$  в выкладки на стр. 298—299.

49. Колебания стержня с грузом на конце. — Свободные колебания. Задача о колебаниях стержня с грузом на конце (рис. 200) может иметь практическое применение не только в случае призматических стержней, но

также когда груз подвешен на винтовой пружине, как в случае пружины индикатора (см. стр. 56). Если масса стержня или пружины мала по сравнению с массой конусового груза, то ею можно пренебречь и задача сведется к системе с одной степенью свободы (см. рис. 1). В последующем изложении подробно рассмотрено влияние массы стержня\*). Обозначая через  $u$  продольное перемещение от положения равновесия и используя выведенное в § 47 дифференциальное уравнение (88), получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (88')$$

где

$$a^2 = \frac{Eg}{\gamma}$$

для призматического стержня и

$$a^2 = \frac{klg}{\omega}$$

для винтовой пружины. В последнем случае  $k$  — коэффициент жесткости, т. е. груз, вызывающий удлинение пружины, равно единице,  $l$  — длина пружины и  $\omega$  — вес единицы длины пружины. Условия на концах следующие: у заделанного конца перемещение при колебаниях должно быть равно нулю:

$$(u)_x=0 = 0; \quad (a)$$

на нижнем конце, где прикреплен груз, растягивающая сила в стержне должна равняться силе инерции колеблющегося груза  $W^{**}$ :

$$AE \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = - \frac{W}{g} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=l}. \quad (b)$$

Полагая, что система совершает колебания одной из главных форм, получаем:

$$u = X(A \cos pt + B \sin pt), \quad (c)$$

где  $X$  — нормальная функция только  $x$ , определяющая форму этих колебаний.

Подставляя (c) в уравнение (88'), получим:

$$a^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + p^2 X = 0,$$

откуда

$$X = C \cos \frac{px}{a} + D \sin \frac{px}{a}, \quad (d)$$

где  $C$  и  $D$  — постоянные интегрирования.

Чтобы удовлетворить условию (a), в решении (d) следует принять  $C=0$ . Из условия (b) получим:

$$AE \frac{p}{a} \cos \frac{pl}{a} = \frac{W}{g} p^2 \sin \frac{pl}{a}. \quad (b')$$

\* См. работы автора: Изв. Киевского политехнического института, 1910; 2. Math. u. Phys., т. 59, стр. 163, 1911. См. также А. Н. Крылов, Дифференциальные уравнения математической физики, СПб, стр. 308, 1913.

\*\* Постоянный вес  $W$  равномерно растягивает стержень в положении равновесия и не влияет на запись условия на концах.

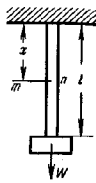


Рис. 200.

Пусть  $\alpha = A\gamma l/W$  — отношение веса стержня к весу груза  $W$  и  $\beta = pl/a$ . Тогда уравнение (б') принимает вид:

$$\alpha = \beta \operatorname{tg} \beta. \quad (94)$$

Это — частотное уравнение для рассматриваемого случая; корни уравнения легко найти графически, если известно отношение  $\alpha$ . Основная форма колебаний является обычно наиболее важной для практических приложений и значения  $\beta_1$  наименьшего корня уравнения (94) для различных значений  $\alpha$  даны в следующей таблице:

|           |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |       |          |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|----------|
| $\alpha$  | 0,01 | 0,10 | 0,30 | 0,50 | 0,70 | 0,90 | 1,00 | 1,50 | 2,00 | 3,00 | 4,00 | 5,00 | 10,0 | 20,0 | 100,0 | $\infty$ |
| $\beta_1$ | 0,10 | 0,32 | 0,52 | 0,65 | 0,75 | 0,82 | 0,86 | 0,98 | 1,05 | 1,20 | 1,27 | 1,32 | 1,42 | 1,52 | 1,568 | $\pi/2$  |

Если вес стержня мал по сравнению с весом груза  $W$ , то величина  $\alpha$  и корень  $\beta_1$  будут малы и уравнение (94) можно упростить, положив  $\operatorname{tg} \beta = \beta$ : тогда

$$\beta^2 = \alpha = \frac{A\gamma l}{W},$$

и мы получим:

$$\beta = \frac{pl}{a} = \sqrt{\frac{A\gamma l}{W}} \quad (e)$$

и

$$p = \frac{a}{l} \sqrt{\frac{A\gamma l}{W}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}}. \quad (f)$$

где  $\delta_{ст} = W/lAE$  представляет статическое удлинение стержня под действием груза  $W$ .

Этот результат совпадает с полученным ранее для системы с одной степенью свободы (см. уравнение (4), стр. 11). Лучшее приближение получится при подстановке в уравнение (94)  $\operatorname{tg} \beta = \beta + \frac{\beta^3}{3}$ . Тогда

$$\beta \left( \beta + \frac{\beta^3}{3} \right) = \alpha,$$

или

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha}{1 + \frac{\beta^2}{3}}}. \quad (g)$$

Подставляя первое приближение (e) вместо  $\beta$  в правую часть этой формулы, получаем:

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha}{3}}} \quad \text{и} \quad p = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст} \left( 1 + \frac{\alpha}{3} \right)}}. \quad (h)$$

Сравнивая (h) и (f), можно заключить, что лучшее приближение получится при прибавлении одной трети веса стержня к весу груза. Это хорошо известное приближенное решение получено выше методом Рэлея (см. стр. 31).

Сравнивая приближенное решение (h) с данными таблицы на стр. 304, можно заключить, что при  $\alpha=1$  ошибка, происходящая вследствие применения приближенной формулы, менее 1% и во всех случаях, когда вес стержня меньше веса груза, приближенная формула (h) достаточна для практических приложений.

Допустим, что для данного значения  $\alpha$  вычислены последовательные корни  $\beta_1, \beta_2, \dots$  частотного уравнения (94), тогда подставив  $\beta_i a/l$  вместо  $p$  в решение (c), получим:

$$u_i = \sin \frac{\beta_i x}{l} \left( A_i \cos \frac{\beta_i a t}{l} + B_i \sin \frac{\beta_i a t}{l} \right).$$

Это решение представляет  $i$ -е главное колебание нашей системы  $i$ -го порядка. Наложением таких колебаний можно получить любые колебания стержня с грузом на конце в виде ряда

$$u = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sin \frac{\beta_i x}{l} \left( A_i \cos \frac{\beta_i a t}{l} + B_i \sin \frac{\beta_i a t}{l} \right), \quad (i)$$

постоянные  $A_i$  и  $B_i$  в котором должны быть определены из начальных условий.

Положим, например, что стержень находится в покое под действием растягивающей силы  $P$ , приложенной к нижнему концу, и что в момент  $t=0$  эта сила внезапно устранена. Для этого случая все коэффициенты  $B_i$  в уравнении (i) должны быть приняты равными нулю, так как начальные скорости равны нулю. Коэффициенты  $A_i$  следует определить так, чтобы представить начальную конфигурацию системы. Из условия равномерного растяжения стержня в момент  $t=0$  получаем:

$$(u)_{t=0} = \frac{Px}{AE}.$$

Уравнение (i) при  $t=0$  дает

$$(u)_{t=0} = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \sin \frac{\beta_i x}{l}.$$

Коэффициенты  $A_i$  следует определить так, чтобы удовлетворить уравнению

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \sin \frac{\beta_i x}{l} = \frac{Px}{AE}. \quad (j)$$

При определении этих коэффициентов поступим точно так же, как было указано в § 17. Для определения любого коэффициента  $A_i$  обе части предыдущего уравнения следует умножить на  $\sin(\beta_i x/l)$   $dx$  и проинтегрировать от  $x=0$  до  $x=l$ . Интегрируя, получаем:

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\beta_i x}{l} dx = \frac{l}{2} \left( 1 - \frac{\sin 2\beta_i l}{2\beta_i l} \right),$$

$$\frac{P}{AE} \int_0^l \sin x \frac{\beta_i x}{l} dx = \frac{Pl^2}{AE} \left( -\frac{\cos \beta_i l}{\beta_i l} + \frac{\sin \beta_i l}{\beta_i^2 l} \right),$$

а также, учитывая уравнение (94), имеем для любых неравных друг другу целых чисел  $m$  и  $i$ ,

$$\int_0^l \sin \frac{\beta_i x}{l} \sin \frac{\beta_m x}{l} dx = -\frac{W}{A\gamma} \sin \beta_i \sin \beta_m = -\frac{l}{\alpha} \sin \beta_i \sin \beta_m.$$

Затем умножив уравнение (j) на  $\sin \left( \frac{\beta_i x}{l} \right) dx$  и проинтегрировав, получим:

$$\int_0^l \sin \frac{\beta_i x}{l} \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \sin \frac{\beta_i x}{l} dx = \frac{P}{AE} \int_0^l x \sin \frac{\beta_i x}{l} dx,$$

или

$$A_i \frac{l}{2} \left( 1 - \frac{\sin 2\beta_i l}{2\beta_i l} \right) - \frac{l}{\alpha} \sin \beta_i \left\{ \sum_{m=1, 2, 3, \dots, i-1, i+1, \dots}^{m=\infty} A_m \sin \beta_m \right\} = \frac{Pl^2}{AE} \left( -\frac{\cos \beta_i}{\beta_i} + \frac{\sin \beta_i}{\beta_i^2} \right).$$

Вспомня, что из уравнения (i)

$$\sum_{i=1, 2, 3, \dots, i-1, i+1, \dots}^{i=\infty} A_m \sin \beta_m = (u)_{x=l} - A_i \sin \beta_i = \frac{Pl}{AE} - A_i \sin \beta_i,$$

получим:

$$A_i \frac{l}{2} \left( 1 - \frac{\sin 2\beta_i l}{2\beta_i l} \right) - \frac{l}{\alpha} \sin \beta_i \left( \frac{Pl}{AE} - A_i \sin \beta_i \right) = \frac{Pl^2}{AE} \left( -\frac{\cos \beta_i}{\beta_i} + \frac{\sin \beta_i}{\beta_i^2} \right),$$

откуда, учитывая, что из уравнения (94)

$$\frac{l}{\alpha} \sin \beta_i = \frac{l \cos \beta_i}{\beta_i},$$

найдем:

$$A_i = \frac{4Pl \sin \beta_i}{AE \beta_i (2\beta_i + \sin 2\beta_i)}.$$

Начальные перемещения равно:

$$(u)_{t=0} = \frac{Px}{AE} = \frac{4Pl}{AE} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \beta_i \sin \frac{\beta_i x}{l}}{\beta_i (2\beta_i + \sin 2\beta_i)}. \quad (95)$$

и колебания стержня в данном случае представляются следующим рядом:

$$u = \frac{4Pl}{AE} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \beta_i \sin \frac{\beta_i x}{l} \cos \frac{\beta_i t}{l}}{\beta_i (2\beta_i + \sin 2\beta_i)}. \quad (96)$$

**Вынужденные колебания.** При исследовании вынужденных колебаний поступим, как и в предыдущем параграфе, и будем искать перемещение

в виде ряда

$$u = \varphi_1 \sin \frac{\beta_1 x}{l} + \varphi_2 \sin \frac{\beta_2 x}{l} + \dots, \quad (k)$$

где  $\sin \frac{\beta_i x}{l}$  — нормальные функции для нашего случая и  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  — неизвестные функции времени. Для определения последних воспользуемся, как и выше, принципом Даламбера совместно с принципом виртуальных работ. Полагая, что возмущающая сила  $P$  приложена к нижнему концу стержня, найдем, что работа этой силы на виртуальном перемещении

$$\delta u = A_i \sin \frac{\beta_i x}{l}$$

равна  $PA_i \sin \beta_i$  и дифференциальное уравнение для определения функций  $\varphi_i$  принимает вид:

$$\frac{\gamma l}{2g} \left( 1 + \frac{\sin 2\beta_i l}{2\beta_i l} \right) \ddot{\varphi}_i + \frac{E}{2l} \beta_i^2 \left( 1 + \frac{\sin 2\beta_i l}{2\beta_i l} \right) \varphi_i = \frac{P \sin \beta_i}{A}. \quad (l)$$

Рассматривая только колебания, вызванные возмущающей силой и пренебрегая свободными колебаниями, вызванными начальными перемещениями и начальными импульсами, получим решение уравнения (l)\*:

$$\varphi_i = \frac{2g}{A\gamma l} \cdot \frac{l}{\alpha \beta_i} \frac{2\beta_i}{2\beta_i + \sin 2\beta_i} \int_0^t P \sin \beta_i \sin \frac{\alpha \beta_i}{l} (t-t_1) dt_1,$$

где, как и выше,

$$\alpha = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}.$$

Подставляя значения  $\alpha$  в ряд (k), получим общее решение задачи:

$$u = \frac{4g}{A\alpha^2 \gamma} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{\beta_i x}{l}}{2\beta_i + \sin 2\beta_i} \int_0^t P \sin \beta_i \sin \frac{\alpha \beta_i}{l} (t-t_1) dt_1. \quad (97)$$

В каждом частном случае следует подставлять в это решение соответствующее выражение возмущающей силы. Подставляя затем  $x=l$ , получим перемещение груза  $W$  при колебаниях.

**Внезапно приложенная сила.** Рассмотрим в качестве примера колебания, вызванные постоянной силой  $P$ , внезапно приложенной к нижнему концу стержня. Подставляя  $x=l$  в уравнение (97) и рассматривая  $P$  как постоянную, получим для перемещения груза  $W$  следующее выражение:

$$(u)_{x=l} = \frac{4gPl}{A\alpha^2 \gamma} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin^2 \beta_i}{\beta_i (2\beta_i + \sin 2\beta_i)} \left( 1 - \cos \frac{\alpha \beta_i t}{l} \right). \quad (98)$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда груз  $W$  на конце стержня уменьшается до нуля и условия приближаются к условиям, рассмотренным в предыдущем параграфе. В этом случае величина  $\alpha$  в уравнении (94) становится бесконечно большой и корни этого трансцендентного уравнения

\* См. уравнение (46), стр. 105.

будут

$$\beta_i = \frac{(2i-1)\pi}{2}.$$

Подставляя  $\beta_i$  в выражение (98), получим тот же результат, что и в предыдущем параграфе.

В другом крайнем случае груз  $W$  очень велик по сравнению с весом стержня и величина  $\alpha$  в уравнении (94) стремится к нулю. Тогда корни этого уравнения приближаются к значениям

$$\beta_i = (i-1)\pi.$$

Все члены ряда (98), кроме первого, стремятся к нулю, и система приближается к системе с одной степенью свободы. Перемещение нижнего конца стержня определяется в этом случае первым членом (98) и равно

$$(u)_x=t = \frac{4gPl}{Aa^2\gamma} \frac{\sin^2 \beta_1}{\beta_1 (2\beta_1 + \sin 2\beta_1)} \left(1 - \cos \frac{a\beta_1 t}{l}\right).$$

или, подставляя  $\sin \beta_1 = \beta_1$  и  $\sin 2\beta_1 = 2\beta_1$ , получим:

$$(u)_x=t = \frac{gPl}{Aa^2\gamma} \left(1 - \cos \frac{a\beta_1 t}{l}\right).$$

Это выражение достигает максимума, когда

$$\cos \frac{a\beta_1 t}{l} = -1;$$

тогда

$$(u)_{\max} = \frac{2gPl}{Aa^2\gamma} = \frac{2Pl}{AE}.$$

Это показывает, что наибольшее перемещение, вызванное внезапно приложенной силой, вдвое больше удлинения, вызванного статической силой такой же величины.

Это заключение сохраняется также в случае, когда  $W=0$  (см. стр. 300), но оно не верно для общего случая, представленного уравнением (98). Чтобы доказать это, необходимо заметить, что в двух рассмотренных выше частных случаях система в конце полупериода основной формы колебаний находится в условиях мгновенного покоя. В этот момент кинетическая энергия обращается в нуль и работа, совершенная внезапно приложенной постоянной силой, полностью превращается в потенциальную энергию деформации, и из статического рассмотрения можно заключить, что перемещение точки приложения силы должно быть вдвое больше, чем в состоянии равновесия.

В общем же случае, представленном уравнением (98), корни уравнения (94) несоизмеримы и система никогда не проходит через состояние, которому соответствует наличие лишь потенциальной энергии. Часть энергии всегда остается в виде кинетической энергии, и перемещение точки приложения силы будет превышать перемещение, соответствующее состоянию равновесия, меньше чем вдвое.

Если вместо постоянной силы  $P$  приложена гармоническая сила  $P \sin \omega t$ , то вместо  $P$  следует подставить в ряд (97)  $P \sin \omega t$ . Выполнив интегрирование, получим:

$$(u)_{x=t} = \frac{2gP}{A\gamma l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_i \left(\sin \omega t - \frac{\omega l}{a\beta_i} \sin \frac{a\beta_i t}{l}\right)}{\left(1 + \frac{\sin 2\beta_i}{2\beta_i}\right) \left(\frac{a^2 \beta_i^2}{l^2} - \omega^2\right)} \quad (m)$$

Как видно из (m), колебания состоят из двух частей: 1) вынужденных колебаний, пропорциональных  $\sin \omega t$  и имеющих тот же период, что и возмущающая сила, и 2) свободных колебаний, пропорциональных  $\sin(a\beta_i t/l)$ . Когда частота возмущающей силы приближается к одной из собственных частот,  $\omega$  приближается к  $a\beta_i/l$  для соответствующей формы колебаний и имеет место состояние резонанса. Амплитуда колебаний соответствующего члена ряда (m) неограниченно возрастает, как было пояснено выше (см. стр. 46 и 203). Чтобы приблизиться к статическим условиям, нужно рассмотреть величину  $\omega$ , как малую по сравнению с  $a\beta_i/l$  в ряде (m). Пренебрегая членами, содержащими множитель  $\omega/a\beta_i$ , получим для весьма медленного изменения гармонической силы:

$$(u)_x=t = \frac{4Pl \sin \omega t}{AE} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_i}{\beta_i (2\beta_i + \sin 2\beta_i)}, \quad (n)$$

что представляет статическое удлинение стержня (см. уравнение (95)). Различие между статическими и динамическими перемещениями можно установить путем сравнения рядов (n) и (m). Как видно, удовлетворительную запись давления пара или газа можно получить только в том случае, когда частота основной формы колебаний индикатора велика по сравнению с частотой гармонической силы.

### 50. Крутильные колебания круглых валов. — Свободные колебания.

В предыдущих рассуждениях о крутильных колебаниях (см. стр. 17 и 234) мы пренебрегали массой вала или считали ее малой по сравнению с массами вращающихся дисков, прикрепленных к валу\*\*. Ниже дается более полная теория крутильных колебаний круглого вала с двумя концевыми дисками\*\*\*, на основании которой можно оценить точность нашего предыдущего решения. В дальнейшем предполагается, что круглые поперечные сечения вала



Рис. 201.

остаются при колебаниях в своей плоскости и что радиусы этих поперечных сечений остаются прямыми\*\*\*\*. Пусть  $GJ_p = C$  — крутильная жесткость вала;  $\gamma$  — вес единицы объема вала;  $\theta$  — угол поворота любого поперечного сечения  $mn$  (рис. 201) при крутильных колебаниях;  $J_1, J_2$  — моменты инерции концевых дисков относительно

\* [На стр. 307 после получения уравнения (1) прямо утверждается, что в последующем решении свободные колебания не представлены. Дело в том, что на стр. 307 под свободными колебаниями подразумеваются колебания, порождаемые ненулевыми начальными условиями, а здесь идет речь о колебаниях, вызванных возмущающей силой, но происходящих с собственными частотами; в сноске на стр. 46 уже отмечалось, что в этом случае термин «свободные колебания» нельзя принять вполне удачным.]

\*\* [Точнее говоря, момент инерции вала относительно оси предполагается пренежимо малым по сравнению с моментами инерции дисков.]

\*\*\* См. работы автора: Известия С.-Петербургского политехнического института, 1905; Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe, Z. Math. u. Phys., т. 59, стр. 163, 1911.

\*\*\*\* Более полную теорию можно найти в упомянутой на стр. 290 работе Л. Pochhammer'a.

оси вала. Рассматривая элемент вала между смежными поперечными сечениями  $mn$  и  $m_1n_1$ , получим крутящие моменты в этих сечениях

$$GJ_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{и} \quad GJ_p \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx \right).$$

Дифференциальное уравнение вращательного движения элементарного диска  $mm_1n_1$  (рис. 201) при крутильных колебаниях будет:

$$\frac{\gamma J_p \partial^2 \theta}{g \partial t^2} = GJ_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2},$$

или, пользуясь обозначением

$$\frac{Gg}{\gamma} = a^2, \quad (99)$$

получаем:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (100)$$

Это уравнение совпадает с полученным выше уравнением (88) для продольных колебаний, и результаты предыдущих выкладок можно использовать в различных частных случаях. Например, в случае вала со свободными концами частотное уравнение идентично уравнению (90) и общее решение будет (см. уравнение (93)):

$$\theta = \sum_{i=1}^{i=\infty} \cos \frac{i\pi x}{l} \left( A_i \cos \frac{i\pi a t}{l} + B_i \sin \frac{i\pi a t}{l} \right). \quad (101)$$

В случае вала с дисками на концах (рис. 202) задача становится более сложной. Из условия, что закручивание вала на концах вызвано силами инерции дисков, получим:

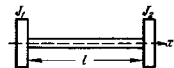


Рис. 202.

$$J_1 \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right)_{x=0} = GJ_p \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0}, \quad (a)$$

$$J_2 \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right)_{x=l} = -GJ_p \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=l}. \quad (b)$$

Допустим, что вал совершает одно из главных колебаний, так что

$$\theta = X(A \cos pt + B \sin pt), \quad (c)$$

где  $X$  — функция только  $x$ , определяющая форму рассматриваемых колебаний.

Подставляя (c) в уравнение (100), получаем:

$$a^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + p^2 X = 0,$$

откуда

$$X = C \cos \frac{px}{a} + D \sin \frac{px}{a}. \quad (d)$$

Постоянные  $C$  и  $D$  должны быть определены таким образом, чтобы удовлетворялись условия на концах. Подставляя (d) в уравнения (a) и (b), получаем:

$$\left. \begin{aligned} -Cp^2 J_1 = D \frac{p}{a} GJ_p, \\ J_1^2 \left( C \cos \frac{pl}{a} + D \sin \frac{pl}{a} \right) J_2 = \frac{p}{a} GJ_p \left( -C \sin \frac{pl}{a} + D \cos \frac{pl}{a} \right). \end{aligned} \right\} (e)$$

Исключив постоянные  $C$  и  $D$ , получим следующее частотное уравнение:

$$p^2 \left( \cos \frac{pl}{a} - \frac{paJ_1}{GJ_p} \sin \frac{pl}{a} \right) J_2 = -\frac{p}{a} GJ_p \left( \sin \frac{pl}{a} + \frac{paJ_1}{GJ_p} \cos \frac{pl}{a} \right). \quad (f)$$

Полагая

$$\frac{pl}{a} = \beta, \quad \frac{J_1 g}{\gamma l J_p} = \frac{J_1}{J_0} = m, \quad \frac{J_2}{J_0} = n, \quad (g)$$

где  $J_0 = \frac{\gamma l J_p}{g}$  — момент инерции вала относительно его осей, получим из уравнения (f) частотное уравнение в виде:

$$\beta n (1 - m \beta \operatorname{tg} \beta) = -(\operatorname{tg} \beta + m \beta),$$

или

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{(m+n)\beta}{mn\beta^2 - 1}. \quad (102)$$

Пусть  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$  — последовательные корни этого трансцендентного уравнения; тогда из уравнений (d) и (e) соответствующие нормальные функции будут:

$$X_i = C_i \left( \cos \frac{\beta_i x}{l} - m \beta_i \sin \frac{\beta_i x}{l} \right),$$

и мы получим общее решение для данного случая:

$$\theta = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left( \cos \frac{\beta_i x}{l} - m \beta_i \sin \frac{\beta_i x}{l} \right) \left( A_i \cos \frac{\beta_i a t}{l} + B_i \sin \frac{\beta_i a t}{l} \right). \quad (103)$$

Если моменты инерции  $J_1$  и  $J_2$  дисков малы по сравнению с моментом инерции  $J_0$  вала, то величины  $m$  и  $n$  в выражении (102) становятся малыми, последовательные корни этого уравнения приближаются к значениям  $\pi, 2\pi, \dots$ , и общее уравнение (103) приближается к данному выше решению (101) для вала со свободными концами.

Рассмотрим теперь другой предельный случай, более интересный с практической точки зрения, когда  $J_1$  и  $J_2$  велики по сравнению с  $J_0$ ; тогда величины  $m$  и  $n$  будут большими числами. В этом случае в знаменателе правой части выражения (102) единицей можно

пренебречь по сравнению с  $m\beta^2$ , и вместо (102) мы получим:

$$\beta \operatorname{tg} \beta = \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right). \quad (104)$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и (94) (см. стр. 304) для продольных колебаний. Его правая часть представляет собой малую величину, и приближенное решение для первого корня получится подстановкой  $\operatorname{tg} \beta_1 = \beta_1$ . Тогда

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}. \quad (h)$$

Период соответствующей формы колебаний согласно (103) равен

$$\tau_1 = 2\pi \cdot \frac{\beta_1 a}{l} = \frac{2\pi l}{\beta_1 a},$$

или на основании формул (99), (g) и (h)

$$\tau_1 = 2\pi \sqrt{\frac{IJ_1 J_2}{GJ_p (J_1 + J_2)}}. \quad (105)$$

Этот результат совпадает с формулой (12) (см. стр. 20), полученной при рассмотрении подобной системы, но без учета массы вала.

Приближенные значения последовательных корней уравнения (104) будут:

$$\beta_2 = \pi + \frac{1}{n} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right), \quad \beta_3 = 2\pi + \frac{1}{2n} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right), \dots$$

Мы видим, что все эти корни велики сравнительно с  $\beta_1$  и частоты соответствующих форм колебаний будут весьма высокими по сравнению с частотой основной формы колебаний.

Чтобы получить лучшее приближение для первого корня уравнения (102), подставим  $\operatorname{tg} \beta_1 = \beta_1 + \frac{\beta_1^3}{3}$ ; тогда

$$\beta_1 + \frac{1}{3} \beta_1^3 = \frac{\beta_1 (m+n)}{mn\beta_1^2 - 1},$$

$$\beta_1^2 = \frac{m+n}{\left( mn - \frac{1}{\beta_1^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \beta_1^2 \right)}.$$

Подставляя в правую часть этой формулы значение  $\beta_1$  из выражения (h) и пренебрегая малыми величинами высших порядков, получаем:

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} - \frac{1}{mn} \right)},$$

и соответствующая частота основной формы колебаний будет:

$$f_1 = \frac{\beta_1 a}{2\pi l} = \frac{a}{2\pi l} \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} - \frac{1}{mn} \right)}. \quad (106)$$

Тот же результат получится, если в первое приближение для частоты

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GJ_p (J_1 + J_2)}{IJ_1 J_2}},$$

полученное из уравнения (105), подставить

$$J_1 + \frac{J_0}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1 + J_2} \quad \text{и} \quad J_2 + \frac{J_0}{3} \cdot \frac{J_1}{J_1 + J_2}$$

вместо  $J_1$  и  $J_2$ . Это значит, что второе приближение (106) совпадает с результатом, который мог быть получен методом Рэлея (см. § 4, стр. 35). Согласно этому методу, к моменту инерции каждого диска следует прибавить одну треть момента инерции части вала, расположенной между этим диском и узловым поперечным сечением. В практических приложениях это приближение всегда достаточно для вычисления частоты основной формы колебаний\*).

**Вынужденные колебания.** При исследовании вынужденных колебаний вала с двумя дисками поступим таким же образом, как и при исследовании продольных колебаний (§ 48). Общее выражение для угла закручивания  $\theta$  возьмем в виде

$$\theta = \sum_{i=1, 2, 3, \dots} \varphi_i \left( \cos \frac{\beta_i x}{l} - m\beta_i \sin \frac{\beta_i x}{l} \right), \quad (107)$$

где выражения в скобках представляют нормальные функции для нашего случая и  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  — функции времени. Чтобы получить дифференциальное уравнение для функций  $\varphi_i$ , воспользуемся принципом Даламбера совместно с принципом возможных перемещений. Беря возможное перемещение в виде

$$\delta\theta = A_i \left( \cos \frac{\beta_i x}{l} - m\beta_i \sin \frac{\beta_i x}{l} \right)$$

и предполагая, что возмущающий крутящий момент  $M$  действует на конец  $x=l$ , найдем, что виртуальная работа этого момента равна

$$MA_i (\cos \beta_i l - m\beta_i \sin \beta_i l),$$

и для  $\varphi_i$  получим уравнение

$$\ddot{\varphi}_i + \frac{a^2 \beta_i^2}{l^2} \varphi_i = \frac{4\beta_i}{J_0 N_i} M (\cos \beta_i l - m\beta_i \sin \beta_i l), \quad (108)$$

\* Графический способ определения собственных частот крутильных колебаний валов с дисками предложен в работах: F. M. Lewis, Torsional Vibrations of Irregular Shafts, J. Am. Soc. Nav. Engrs., стр. 857, ноябрь 1919; F. M. Lewis, Critical Speeds of Torsional Vibration, J. Soc. Automotive Engrs., стр. 413, ноябрь 1920.



в котором

$$N_i = 2\beta_i (1 + m^2\beta_i^2) - \sin 2\beta_i + m^2\beta_i^2 \sin 2\beta_i + 2\beta_i m (1 - \cos 2\beta_i). \quad (109)$$

Рассматривая только колебания, вызванные возмущающим моментом  $M$ , получим из уравнения (108):

$$\varphi_i = \frac{4I}{aJ_0 N_i} \int_0^l (M \cos \beta_i - m\beta_i \sin \beta_i) \sin \left[ \frac{a\beta_i}{l} (t - t_1) \right] dt_1 \quad (110)$$

Подставляя это выражение в ряд (107), получим общее выражение для колебаний, вызываемых возмущающим моментом  $M$ . В каждом частном случае остается лишь подставить вместо  $M$  соответствующую функцию времени и вычислить интеграл, указанный в выражении (110).

**51. Свободные поперечные колебания призматических стержней.** — Дифференциальное уравнение поперечных колебаний. Предполагая, что стержень имеет плоскость симметрии и что колебания происходят в этой плоскости, воспользуемся теперь известным дифференциальным уравнением кривой изгиба (рис. 203)

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -M, \quad (111)$$

где  $EJ$  — изгибная жесткость, а  $M$  — изгибающий момент в произвольном поперечном сечении. Направления осей и положительные направления изгибающих моментов и поперечных сил  $Q$  показаны на рис. 203. Дважды

дифференцируя уравнение (111), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) &= -\frac{dM}{dx} = -Q, \\ \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) &= -\frac{dQ}{dx} = -\omega. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Это последнее уравнение, представляющее дифференциальное уравнение изгиба стержня, нагруженного распределенной нагрузкой интенсивности  $\omega$ , можно также использовать для получения уравнения поперечных колебаний. Необходимо лишь применить принцип Даламбера и представить себе, что колеблющийся стержень нагружен силами инерции, интенсивность которых изменяется вдоль стержня и задана в виде

$$-\frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (b)$$

где  $\gamma$  — вес единицы объема материала стержня, а  $A$  — площадь поперечного сечения.

Подставляя (b) вместо  $\omega$  в уравнение (a), получим общее уравнение поперечных колебаний стержня\*):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = -\frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (112)$$

В частном случае призматического стержня изгибная жесткость  $EJ$  остается постоянной по всей длине стержня и из уравнения (112) имеем:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

или

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad (113)$$

где

$$a^2 = \frac{EJg}{\gamma A}. \quad (114)$$

Начнем с изучения *нормальных норм* колебаний. Если стержень совершает колебания одной из нормальных форм, то перемещение любой точки гармонически изменяется со временем и может быть представлено следующим образом:

$$y = X(A \cos pt + B \sin pt), \quad (c)$$

где  $X$  — функция координаты  $x$ , определяющая нормальную форму колебаний, т. е. *нормальная функция*. Подставляя (c) в уравнение (113), имеем:

$$\frac{d^4 X}{dx^4} = \frac{p^2}{a^2} X, \quad (115)$$

откуда можно получить нормальные функции для каждого частного случая.

Пользуясь обозначением

$$\frac{p^2}{a^2} = \frac{p^2 A \gamma}{EJg} = k^4, \quad (116)$$

легко проверить, что  $\sin kx$ ,  $\cos kx$ ,  $\text{sh } kx$ ,  $\text{ch } kx$  будут частными решениями уравнения (115) и общее решение этого уравнения получится в виде:

$$X = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \text{sh } kx + C_4 \text{ch } kx, \quad (117)$$

где  $C_1, \dots, C_4$  — постоянные, которые нужно определить в каждом частном случае из условий на концах стержня. На свободно опертом

\* Дифференциальное уравнение, учитывающее демпфирование, выведено в работе: H. Holzer, Z. angew. Math. u. Mech., т. 8, стр. 272, 1928; см. также K. Sezawa, Z. angew. Math. u. Mech., т. 12, стр. 275, 1932.

конце, где прогиб и изгибающий момент равны нулю, имеем:

$$X = 0, \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = 0. \quad (d)$$

На закрепленном конце равны нулю прогиб и угол наклона касательной к кривой изгиба, и мы имеем:

$$X = 0, \quad \frac{dX}{dx} = 0. \quad (e)$$

На свободном конце равны нулю изгибающий момент и поперечная сила, и мы получаем:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 X}{dx^3} = 0. \quad (f)$$

На двух концах колеблющегося стержня всегда имеются четыре конечных условия, из которых можно получить отношения между постоянными общего решения (117) и частотное уравнение. Таким образом, будут установлены формы свободных колебаний и их частоты. Общее выражение свободных поперечных колебаний получится наложением всех возможных нормальных колебаний (с):

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} X_i (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t) \dots \quad (118)$$

Приложение этой общей теории к частным случаям будет рассмотрено позднее.

Для нашего дальнейшего изучения поперечных колебаний призматических стержней целесообразно рассмотреть некоторые общие свойства нормальных функций.

Пусть  $X_m$  и  $X_n$  — две нормальные функции, соответствующие нормальным формам колебаний порядка  $m$  и  $n$ , имеющим частоты  $p_m/2\pi$  и  $p_n/2\pi$ . Подставляя в уравнение (115), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 X_m}{dx^4} &= \frac{p_m^2}{a^2} X_m, \\ \frac{d^4 X_n}{dx^4} &= \frac{p_n^2}{a^2} X_n. \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

Умножая первое из этих уравнений на  $X_n$  и второе на  $X_m$ , вычитая одно из другого и интегрируя, имеем:

$$\frac{p_n^2 - p_m^2}{a^2} \int_0^l X_m X_n dx = \int_0^l \left( X_m \frac{d^4 X_n}{dx^4} - X_n \frac{d^4 X_m}{dx^4} \right) dx, \quad (120)$$

откуда при интегрировании по частям следует:

$$\begin{aligned} \frac{p_n^2 - p_m^2}{a^2} \int_0^l X_m X_n dx = \\ = \left[ X_m \frac{d^3 X_n}{dx^3} - X_n \frac{d^3 X_m}{dx^3} + \frac{dX_m}{dx} \frac{d^2 X_n}{dx^2} - \frac{dX_n}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right]_0^l. \quad (121) \end{aligned}$$

Из конечных условий (d), (e) и (f) можно заключить, что во всех случаях правая часть этого уравнения равна нулю; поэтому

$$\int_0^l X_m X_n dx = 0, \quad \text{когда } m \neq n. \quad (122)$$

Это — условие ортогональности нормальных функций. Мы встречаем уже это условие в случае систем с несколькими степенями свободы (см. стр. 281), а также в случае продольных колебаний стержней (см. § 47). Вследствие этого свойства свободные колебания, названные любыми начальными условиями, можно легко разложить в ряд нормальных колебаний, а анализ вынужденных колебаний сводится к решению того же дифференциального уравнения, что и для колебаний систем с одной степенью свободы.

Равенство (121) можно использовать также для вычисления интегралов

$$\int_0^l X_m^2 dx \quad \text{и} \quad \int_0^l \left( \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (g)$$

которые будут необходимы при дальнейшем изучении поперечных колебаний.

Легко видеть, что необходимые результаты нельзя получить прямой подстановкой  $m = n$  в равенство (121), так как обе части равенства обратятся в нуль. Поэтому для вычисления интегралов (g) нужно поступить следующим образом. Подставим вместо  $X_n$  в равенство (121) функцию, весьма близкую к функции  $X_m$ , которая получится из уравнений (115) и (116), если дать величине  $k$  бесконечно малое приращение  $\delta k$ , так что  $X_n$  стремится к  $X_m$ , когда  $\delta k$  стремится к нулю. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{p_n^2}{a^2} &= (k + \delta k)^2 = k^2 + 4k\delta k, \\ \frac{p_n^2 - p_m^2}{a^2} &= 4k\delta k, \quad X_n = X_m + \frac{dX_m}{dk} \delta k. \end{aligned}$$

Подставляя в равенство (121) и пренебрегая малыми величинами высших порядков, получаем:

$$4k^3 \int_0^l X_m^2 dx = \left| X_m \frac{d}{dk} \frac{d^2 X_m}{dx^2} - \frac{dX_m}{dk} \frac{d^2 X_m}{dx^2} + \frac{d}{dk} \left( \frac{dX_m}{dx} \right) \frac{d^2 X_m}{dx^2} - \frac{dX_m}{dx} \frac{d}{dk} \left( \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) \right|_0^l. \quad (h)$$

В дальнейшем обозначим через  $X'$ ,  $X''$ , ... последовательные производные  $X$  по  $kx$ ; тогда

$$\frac{dX_m}{dx} = kX_m', \quad \frac{dX_m}{dk} = xX_m'.$$

При этих обозначениях получится

$$X'''' = X,$$

и равенство (h) примет следующий вид:

$$4k^3 \int_0^l X_m^2 dx = \left| 3X_m k^2 X_m'''' + k^2 x X_m^2 - k^2 x X_m' X_m'''' + k^2 X_m (X_m' + kx X_m'') - kX_m' (2kX_m'' + k^2 x X_m''') \right|_0^l,$$

или

$$4k \int_0^l X_m^2 dx = \left| 3X_m X_m'''' + kx X_m^2 - 2kx X_m' X_m'''' - X_m X_m'''' + kx (X_m'')^2 \right|_0^l. \quad (i)$$

Из условий на концах (d), (e) и (f) можно видеть, что члены, содержащие произведения  $X_m X_m''''$  и  $X_m' X_m''''$ , равны нулю при любом способе закрепления концов; поэтому

$$\int_0^l X_m^2 dx = \frac{1}{4} \left| x \{ X_m^2 - 2X_m X_m'''' + (X_m'')^2 \} \right|_0^l = \frac{1}{4} \{ X_m^2 - 2X_m X_m'''' + (X_m'')^2 \}_{x=l}. \quad (123)$$

Из этого равенства можно легко вычислить первый из интегралов (g) для любого вида конечных условий. Если правый конец ( $x=l$ ) стержня свободен, то

$$(X_m)_{x=l} = 0, \quad (X_m'')_{x=l} = 0,$$

и из (123) получим:

$$\int_0^l X_m^2 dx = \frac{l}{4} (X_m'')_{x=l}. \quad (124)$$

Если этот конец закреплен, то получится:

$$\int_0^l X_m^2 dx = \frac{l}{4} (X_m'')_{x=l}. \quad (125)$$

Для шарнирно закрепленного конца получим:

$$\int_0^l X_m^2 dx = -\frac{l}{2} (X_m' X_m'')_{x=l}. \quad (126)$$

При определении второго интеграла (g) нужно воспользоваться уравнением (115). Умножая это уравнение на  $X$  и интегрируя вдоль всей длины стержня, имеем:

$$\frac{p^2}{a^2} \int_0^l X^2 dx = \int_0^l \frac{d^4 X}{dx^4} X dx.$$

Интегрируя по частям правую часть уравнения, получим:

$$\int_0^l \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{p^2}{a^2} \int_0^l X^2 dx. \quad (127)$$

Этот результат вместе с равенством (123) дает второй из интегралов (g). Равенства (123) и (127) весьма полезны при исследовании вынужденных колебаний стержней с условиями на концах, отличными от условий шарнирного опирания.

*Влияние поперечной силы и инерции вращения.* В предыдущем рассмотрении размеры поперечных сечений стержня предполагались малыми по сравнению с его длиной и для кривой изгиба было взято простое уравнение (111). Введем теперь поправки, учитывающие влияние размеров поперечных сечений на частоту. Эти поправки могут иметь большое значение при изучении форм колебаний с высокими частотами, когда колеблющийся стержень подразделяется на узловые поперечными сечениями на сравнительно короткие участки.

*Инерция вращения\*).* Легко видеть, что элементы стержня, подобные  $ml_1, \tau_1$  (см. рис. 203), совершают при колебаниях не только поступательное движение, но также и вращательное. Переменный угол поворота, равный углу наклона касательной к кривой изгиба, выражается через  $\partial y / \partial x$ , и соответствующая угловая скорость и угловое ускорение равны

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \text{ и } \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2}$$

Поэтому момент сил инерции элемента  $ml_1, \tau_1$  относительно оси, проходящей через его центр тяжести перпендикулярно к плоскости  $xy$ , равен\*\*)

$$-\frac{JY}{g} \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} dx.$$

\*). См. Рэлей, Теория звука, § 186.

\*\*). Положительным считается момент, направленный по часовой стрелке.

Этот момент следует учесть при рассмотрении изменения изгибающего момента вдоль оси стержня. Тогда вместо первого из уравнений (а), стр. 314 получим:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q - \frac{J\gamma}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t^2}. \quad (j)$$

Подставляя это выражение  $\partial M/\partial x$  в уравнение кривой изгиба

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{d^2 M}{dx^2}$$

и используя выражение (b), стр. 314, получаем:

$$EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^4} = -\frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{J\gamma}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (128)$$

— дифференциальное уравнение поперечных колебаний призматических стержней, в котором второй член правой части представляет влияющие вращения.

Если принять во внимание не только инерцию вращения, но также прогибы, вызванные сдвигом, то получится еще более точное дифференциальное уравнение\*). Угол наклона касательной к кривой изгиба зависит не только от поворота поперечных сечений стержня, но также от сдвига. Пусть  $\psi$  обозначает угол наклона касательной к кривой изгиба при пренебрежении сдвигом и  $\beta$  — угол сдвига на уровне нейтральной оси в том же поперечном сечении; тогда полный угол наклона касательной к кривой изгиба равен

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \psi + \beta.$$

Из элементарной теории изгиба известны следующие выражения изгибающего момента и поперечной силы:

$$\left. \begin{aligned} M &= -EJ \frac{d\psi}{dx}, \\ Q &= k'\beta AG = k' \left( \frac{dy}{dx} - \psi \right) AG. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

где  $k'$  — численный коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения,  $A$  — площадь поперечного сечения и  $G$  — модуль сдвига. Дифференциальное уравнение вращения  $\psi$  (рис. 203) будет:

$$-\frac{\partial M}{\partial x} dx + Q dx = \frac{J\gamma}{g} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} dx.$$

Подставляя (k), получаем:

$$EJ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k' \left( \frac{dy}{dx} - \psi \right) AG - \frac{J\gamma}{g} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (l)$$

\*) См. статью автора в Phil. Mag., сер. 6, т. 41, стр. 744 и т. 43, стр. 125, 1921 и его книгу «Теория упругости», СПб, т. 2, стр. 206, 1916. Об экспериментальной проверке влияния сдвига см.: E. Goens, Ann. Physik, сер. 5, т. 11, стр. 649, 1931; см также R. M. Davies, Phil. Mag., сер. 7, т. 23, стр. 1129, 1937. Необходимость учета сдвига при действии удара на балку была указана в работе: W. Flügge, Z. angew. Math. u. Mech., т. 22, стр. 312, 1942.

Дифференциальное уравнение поступательного движения того же элемента в вертикальном направлении:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx = \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx,$$

или

$$\frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - k' \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) AG = 0. \quad (m)$$

Исключая  $\psi$  из уравнений (l) и (m), получим следующее более полное дифференциальное уравнение поперечных колебаний призматических стержней:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \left( \frac{J\gamma}{g} + \frac{EJ\gamma}{gk'G} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{J\gamma}{g} \frac{\gamma}{gk'G} \frac{\partial^2 y}{\partial t^4} = 0. \quad (129)$$

В следующем параграфе показано использование этого уравнения для определения частот.

**52. Свободные колебания стержня с шарнирно опертыми концами.** — *Общее решение.* При рассмотрении частных случаев колебаний стержней полезно представить общее решение (117) в следующем виде:

$$X = C_1 (\cos kx + \operatorname{ch} kx) + C_2 (\cos kx - \operatorname{ch} kx) + C_3 (\sin kx + \operatorname{sh} kx) + C_4 (\sin kx - \operatorname{sh} kx). \quad (130)$$

В случае шарнирного опирания концов условия на концах будут:

$$\left. \begin{aligned} 1) (X)_{x=0} &= 0, & 2) \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)_{x=0} &= 0, \\ 3) (X)_{x=l} &= 0, & 4) \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)_{x=l} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Из первых двух условий (а) можно заключить, что постоянные  $C_1$  и  $C_2$  в решении (130) следует положить равными нулю. Из условий 3) и 4) получим  $C_3 = C_4$  и

$$\sin kl = 0, \quad (131)$$

что является частотным уравнением для рассматриваемого случая. Последовательные корни этого уравнения равны

$$kl = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \quad (132)$$

Угловые частоты последовательных форм колебаний получаются из уравнения (116):

$$P_1 = ak_1^2 = \frac{a\pi^2}{l^2}, \quad P_2 = \frac{4a\pi^2}{l^2}, \quad P_3 = \frac{9a\pi^2}{l^2}, \dots, \quad (133)$$

и частота  $f_n$  любой формы колебаний найдется из выражения

$$f_n = \frac{p_n}{2\pi} = \frac{n^2 g l}{2l^2} = \frac{\pi n^2}{2l^2} \sqrt{\frac{EJg}{A\gamma}}. \quad (134)$$

Соответствующий период колебаний равен

$$\tau_n = \frac{1}{f_n} = \frac{2l^2}{\pi n^2} \sqrt{\frac{A\gamma}{EJg}}. \quad (135)$$

Отсюда видно, что период колебаний пропорционален квадрату длины и обратно пропорционален радиусу инерции поперечного сечения. Для геометрически подобных стержней периоды колебаний возрастают в том же отношении, что и линейные размеры.

В случае вращающихся круглых валов постоянного поперечного сечения вычисленные по формуле (134) частоты представляют критические числа оборотов в секунду. Когда скорость вращения вала приближается к одной из частот (134), следует ожидать значительных поперечных колебаний вала.

Форма кривой изгиба для различных форм колебаний определяется нормальной функцией (130). Было показано, что в рассматриваемом случае  $C_1 = C_2 = 0$  и  $C_3 = C_4$ , поэтому нормальная функция имеет вид:

$$X = D \sin kx, \quad (b)$$

где  $D$  — постоянная. Подставляя вместо  $k$  его значения из (132), получим:

$$X_1 = D_1 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad X_2 = D_2 \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad X_3 = D_3 \sin \frac{3\pi x}{l}, \dots$$

Как мы видим, кривая изгиба при колебаниях является синусоидой с числом полуволн, равным 1, 2, 3, ... для последовательных форм колебаний. Любые свободные колебания, возникающие при произвольных начальных условиях, можно представить путем наложения таких синусоидальных колебаний. Подставляя (b) в общее решение (118), получаем:

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} (C_i \cos p_i t + D_i \sin p_i t). \quad (136)$$

Постоянные  $C_i$ ,  $D_i$  этого решения следует определить в каждом частном случае так, чтобы удовлетворить начальным условиям. Положим, например, что начальные перемещения и начальные скорости заданы вдоль оси стержня уравнениями:

$$(y)_{t=0} = f(x) \quad \text{и} \quad (\dot{y})_{t=0} = f_1(x).$$

Подставляя  $t=0$  в выражение (136) и в его производную по времени  $t$ , получаем:

$$(y)_{t=0} = f(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} C_i \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad (c)$$

$$(\dot{y})_{t=0} = f_1(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} p_i D_i \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad (d)$$

Теперь можно обычным путем определить постоянные  $C_i$  и  $D_i$ , умножая (c) и (d) на  $\sin \frac{i\pi x}{l} dx$  и интегрируя обе части этих уравнений от  $x=0$  до  $x=l$ . Таким образом мы получим:

$$C_i = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx, \quad (e)$$

$$D_i = \frac{2}{lp_i} \int_0^l f_1(x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx. \quad (f)$$

Положим, например, что в начальный момент  $t=0$  ось стержня прямолинейна, но вследствие удара задана начальная скорость  $v$  короткому участку  $\delta$  стержня, расположенному на расстоянии  $c$  от левой опоры. Тогда  $f(x)=0$  и  $f_1(x)$  также равно нулю повсюду, кроме точки  $x=c$ , в которой  $f_1(c)=v$ . Подставив это в равенства (e) и (f), получим:

$$C_i = 0, \quad D_i = \frac{2}{lp_i} v \delta \sin \frac{i\pi c}{l}.$$

Подставляя в уравнение (136), имеем:

$$y = \frac{2v\delta}{l} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{p_i} \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin p_i t. \quad (137)$$

Если  $c=l/2$ , т. е. удар произведен посередине пролета, получим:

$$y = \frac{2v\delta}{l} \left( \frac{1}{p_1} \sin \frac{\pi x}{l} \sin p_1 t - \frac{1}{p_3} \sin \frac{3\pi x}{l} \sin p_3 t + \frac{1}{p_5} \sin \frac{5\pi x}{l} \sin p_5 t - \dots \right) = \frac{2v\delta}{\pi x^2} \left( \frac{1}{1} \sin \frac{\pi x}{l} \sin p_1 t - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{l} \sin p_3 t + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi x}{l} \sin p_5 t - \dots \right). \quad (g)$$

Таким образом, в этом случае возникнут только симметричные относительно середины формы колебаний и амплитуды последовательных форм колебаний, входящих в уравнение (g), убывают в отношении  $1/i^2$ .

*Влияние инерции вращения и сдвига.* Чтобы найти более точные значения частот, необходимо воспользоваться вместо уравнения (113) уравнением (129). Разделив уравнение (129) на  $A\gamma/g$  и введя обозначение

$$r^2 = \frac{J}{A}, \quad (h)$$

получим

$$a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - r^2 \left( 1 + \frac{E}{k'G} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2 \partial t^2} + r^2 \frac{\gamma}{gk'G} \frac{\partial^2 y}{\partial t^4} = 0. \quad (138)$$

Это уравнение и условия на концах удовлетворяются при

$$y = C \sin \frac{m\pi x}{l} \cos p_m t. \quad (i)$$

Подставляя (i) в уравнение (138), получаем следующее уравнение для определения частот:

$$a^2 \frac{m^4 \pi^4}{l^4} - p_m^2 m - p_m^2 m \frac{m^2 \pi^2 r^2}{l^2} - p_m^2 m \frac{m^2 \pi^2 r^2}{l^2} \frac{E}{k'G} + \frac{r^2 \gamma}{gk'G} p_m^4 = 0. \quad (139)$$

Учитывая только первые два члена этого уравнения, имеем:

$$p_m = a \frac{m^2 \pi^2}{l^2} = \frac{a\pi^2}{\lambda^2}, \quad (j)$$

где  $\lambda = l/m$  — длина полуволны, на которые подразделяется стержень при колебаниях.

Это совпадает с полученным выше результатом (133). Взяв первые три члена в уравнении (139) и рассматривая  $\pi^2 r^2 / \lambda^2$  как малую величину, получим:

$$p_m = \frac{a\pi^2}{\lambda^2} \left( 1 - \frac{\pi^2 r^2}{2\lambda^2} \right). \quad (k)$$

Таким образом, учтено влияние инерции вращения; как видим, поправка становится все более и более существенной с уменьшением  $\lambda$ , т. е. с увеличением частоты колебаний.

Чтобы оценить влияние сдвига, нужно в уравнении (139) учесть все члены. Подставляя первое приближение (j) для  $p_m$  в последний член уравнения, можно показать, что этот член является малой величиной второго порядка по сравнению с малой величиной  $\pi^2 r^2 / \lambda^2$ . Пренебрегая этим членом, получим:

$$p_m = \frac{a\pi^2}{\lambda^2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 r^2}{\lambda^2} \left( 1 + \frac{E}{k'G} \right) \right\}. \quad (140)$$

Полагая  $E = 8G/3$  и рассматривая стержень прямоугольного поперечного сечения, для которого  $k' = 0,833$  \*), имеем:

$$\frac{E}{k'G} = 3,2.$$

Поправка на сдвиг в 3,2 раза больше поправки на инерцию вращения \*\*).

Полагая, что длина волны  $\lambda$  в десять раз больше высоты балки, получим:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2 r^2}{\lambda^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{1}{100} = 0,004,$$

и общая поправка на инерцию вращения и сдвиг будет около 2%.

### Задачи

1. Найти частоты колебаний двутавровой балки со свободно опертыми концами, колеблющейся в плоскости наибольшей жесткости, если  $l = 10$  м,  $E = 2 \cdot 10^6$  кс/см<sup>2</sup>,  $J = 91$  060 см<sup>4</sup> и вес 137 кг/м.

Отвеч.  $f_1 = 18,1$  i<sup>2</sup> сек<sup>-1</sup>.

2. Свободно опертая балка изгибается силой  $P$ , приложенной посередине. Какие колебания балки возникнут, если сила  $P$  внезапно будет снята?

Отвеч.

$$y = \frac{2P\beta}{\pi^4 E J} \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{i^4} \cos p_i t \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

3. Решить предыдущую задачу, принимая, что сила  $P$  приложена на расстоянии  $s$  от конца  $x=0$ .

Отвеч.

$$y = \frac{2P\beta}{\pi^4 E J} \sum_{i=1, 2, 3, \dots} \frac{1}{i^4} \sin \frac{\pi c}{l} \cos p_i t \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

4. Свободно опертая балка несет равномерно распределенную нагрузку интенсивностью  $w$ . Найти колебания, которые возникнут после внезапной разгрузки.

Отвеч.

$$y = \frac{4w\beta^4}{\pi^4 E J} \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{i^5} \cos p_i t \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

5. Найти колебания свободно опертой балки, которой сообщена начальная поперечная скорость  $v$  во всех точках, кроме концевых.

Отвеч.

$$y = \frac{4v}{\pi} \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{i^3} \sin p_i t \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

\*) Несколько иное значение  $k'$  предложено в работе: R. G. Olsson, Z. angew. Math. u. Mech., т. 15, стр. 245, 1935.

\*\*\*) Относительно решения уравнения (138) см. доклад R. A. Anderson, представленный полугодовому собранию ASME, Los-Angeles, Calif., 1953 и Julius Miklowitz, Navord Report 2049, 1953, Underwater Ordnance Department.

53. Свободные колебания стержней с другими условиями на концах. — Стержень со свободными концами. В этом случае мы имеем следующие условия на концах:

$$\left. \begin{aligned} 1) \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)_{x=0} = 0, & \quad 2) \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)_{x=l} = 0, \\ 3) \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)_{x=0} = 0, & \quad 4) \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)_{x=l} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Чтобы удовлетворить условиям 1) и 2), нужно принять в общем решении (130)

$$C_2 = C_4 = 0,$$

так что

$$X = C_1 (\cos kx + \operatorname{ch} kx) + C_3 (\sin kx + \operatorname{sh} kx). \quad (b)$$

Тогда из условий 3) и 4) получим:

$$\left. \begin{aligned} C_1 (-\cos kl + \operatorname{ch} kl) + C_3 (-\sin kl + \operatorname{sh} kl) = 0, \\ C_1 (\sin kl + \operatorname{sh} kl) + C_3 (-\cos kl + \operatorname{ch} kl) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Отличное от нуля решение для постоянных  $C_1$  и  $C_3$  получится только в случае равенства нулю определителя системы уравнений (c). Таким образом получается частотное уравнение

$$(-\cos kl + \operatorname{ch} kl)^2 - (\operatorname{sh}^2 kl - \sin^2 kl) = 0$$

или, вспоминая, что

$$\operatorname{ch}^2 kl - \operatorname{sh}^2 kl = 1,$$

$$\cos^2 kl + \sin^2 kl = 1,$$

получим:

$$\cos kl \operatorname{ch} kl = 1. \quad (141)$$

Первые шесть корней этого уравнения следующие:

| $k_1 l$ | $k_2 l$ | $k_3 l$ | $k_4 l$ | $k_5 l$ | $k_6 l$ |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0       | 4,730   | 7,853   | 10,996  | 14,137  | 17,279  |

Теперь с помощью уравнения (116) можно определить частоты:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = \frac{p_2}{2\pi} = \frac{k_2^2 a}{2\pi}, \quad f_3 = \frac{p_3}{2\pi} = \frac{k_3^2 a}{2\pi}, \dots$$

Подставляя последовательные корни уравнения (141) в уравнения (c), можно определить отношения  $C_1 : C_3$  для соответствующих форм

колебаний; тогда форма кривой изгиба при колебаниях получится из уравнения (b). На рис. 204 показаны первые три формы колебаний, соответствующие частотам  $f_2$ ,  $f_3$  и  $f_4$ . На эти колебания может быть наложено смещение стержня как твердого тела. Это смещение соответствует корню  $k_1 l = 0$ , для которого  $p = 0$ , и правая часть уравнения (115) обращается в нуль. Интегрируя уравнение (115) и учитывая условия на концах (a), получим:

$$X = a + bx,$$

Рис. 204.

что представляет поступательное перемещение и поворот, которые могут быть наложены на свободные колебания.

Стержень с заделанными концами. Условия на концах в этом случае следующие:

$$\left. \begin{aligned} 1) (X)_{x=0} = 0, & \quad 2) \left( \frac{dX}{dx} \right)_{x=0} = 0, \\ 3) (X)_{x=l} = 0, & \quad 4) \left( \frac{dX}{dx} \right)_{x=l} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Первые два условия будут удовлетворены, если в общем решении (130) принять

$$C_1 = C_3 = 0.$$

Из двух остальных условий получаются следующие уравнения:

$$C_2 (\cos kl - \operatorname{ch} kl) + C_4 (\sin kl - \operatorname{sh} kl) = 0,$$

$$C_2 (\sin kl - \operatorname{sh} kl) + C_4 (-\cos kl + \operatorname{ch} kl) = 0,$$

откуда можно вывести то же самое уравнение (141), что и в предыдущем случае. Это значит, что последовательные частоты колебаний для стержня с заделанными концами те же, что и для такого же стержня со свободными концами\*).

Стержень с одним заделанным и другим свободным концом. Полагая, что заделан левый конец ( $x = 0$ ), получим следующие концевые условия:

$$1) (X)_{x=0} = 0, \quad 2) \left( \frac{dX}{dx} \right)_{x=0} = 0,$$

$$3) \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)_{x=l} = 0, \quad 4) \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)_{x=l} = 0.$$

\* Из условий на концах и из уравнения (115) можно заключить, что в этом случае отсутствует движение, соответствующее равенству  $k_1 l = 0$ .

Из первых двух условий заключаем, что в общем решении (130)  $C_1 = C_3 = 0$ . Остальные два условия дают следующее частотное уравнение:

$$\cos kl \operatorname{ch} kl = -1.$$

Последовательные корни этого уравнения следующие:

| $k_1 l$ | $k_2 l$ | $k_3 l$ | $k_4 l$ | $k_5 l$ | $k_6 l$ |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1,875   | 4,694   | 7,855   | 10,996  | 14,137  | 17,279  |

Отсюда видно, что с возрастанием частоты значения этих корней приближаются к найденным выше значениям для стержня со свободными концами. Частота колебаний любого порядка:

$$f_i = \frac{p_i}{2\pi} = \frac{ak_i^2}{2\pi}.$$

Взяв, например, основную форму колебаний, получим:

$$f_1 = \frac{a}{2\pi} \left( \frac{1,875}{l} \right)^2.$$

Соответствующий период колебаний

$$\tau_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi}{a} \frac{l^2}{1,875^2} = 3,515 \sqrt{\frac{A\gamma l^4}{EJg}}$$

отличается меньше чем на 1,5% от приближенного решения, полученного методом Рэлея (см. стр. 33).

*Стержень с одним заделанным, а другим опертым концом.* В этом случае частотное уравнение

$$\operatorname{tg} kl = \operatorname{th} kl.$$

Последовательные корни этого уравнения:

| $k_1 l$ | $k_2 l$ | $k_3 l$ | $k_4 l$ | $k_5 l$ |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 3,927   | 7,069   | 10,210  | 13,352  | 16,493  |

Эти корни с удовлетворительной степенью точности определяются формулой

$$k_i l = \left( i - \frac{1}{4} \right) \pi.$$

Для всех рассмотренных концевых условий существуют таблицы нормальных функций и их последовательных производных\*. При помощи этих таблиц решение задач о колебаниях стержней значительно упрощается. Позднее мы воспользуемся этими таблицами при рассмотрении вынужденных колебаний. Здесь мы покажем приложение этих таблиц для определения статических прогибов балок.

Так как наложение нормальных форм колебаний позволяет положить любую форму колеблющейся балки, можно использовать нормальные функции также для представления статической кривой изгиба балки и принять эту кривую в виде ряда\*\*):

$$y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \dots, \quad (e)$$

где  $X_1, X_2, \dots$  — нормальные функции, соответствующие заданным условиям на концах; постоянные  $a_1, a_2, \dots$  должны быть определены из рассмотрения энергии деформации изгиба  $V$ . Замечая (см. стр. 317), что

$$\int_0^l X_m X_n dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^l \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{p^2}{a^2} \int_0^l X^2 dx,$$

найдем

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{EJ}{2} \sum_{i=1, 2, 3, \dots} a_i^2 \int_0^l \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{EJ}{2} \sum_{i=1, 2, 3, \dots} k_i^2 a_i^2 \int_0^l X_i^2 dx. \quad (f)$$

Теперь можно найти постоянные  $a_1, a_2, \dots$ , пользуясь принципом виртуальных работ, согласно которому при любом виртуальном перемещении  $\delta a_i X_i$  работа, совершаемая внешними силами, должна быть равна приращению энергии деформации. Возьмем в качестве простого примера случай балки с заделанными концами, нагруженной посередине силой  $P$ . Нормальные функции в этом случае на основании уравнений (b) и (c) равны

$$X_i = \operatorname{ch} k_i x - \cos k_i x - \alpha_1 (\operatorname{sh} k_i x - \sin k_i x), \quad (g)$$

где  $\alpha_1 = 0,9825, \alpha_2 = 1,0008, \alpha_3 \approx 1, \alpha_4 \approx 1, \dots$  Уравнение виртуальных работ для приложенной посередине силы  $P$ :

$$P \delta a_i (X_i)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{\partial V}{\partial a_i} \delta a_i = EJ k_i^4 a_i \delta a_i \int_0^l (X_i)^2 dx, \quad (h)$$

\* Эти таблицы составлены Янгом и Фельгаром. См. Dana Young, R. P. Felgar, Univ. Texas Publ., № 4913, 1949.

\*\* О развитии этого метода см. работу автора в Известиях Киевского политехнического института, 1909.



и мы получим

$$a_i = \frac{P(X_i)_{x=\frac{l}{2}}}{EJk_i^4 \int_0^l (X_i)^2 dx} \quad (i)$$

Из этого равенства видно, что прогиб, определяемый рядом (е), не изменится, если умножить функции  $X_i$  на произвольные коэффициенты. В упомянутых выше таблицах эти коэффициенты выбраны так, что

$$\int_0^l (X_i)^2 dx = l.$$

Тогда

$$a_i = \frac{PI^3 (X_i)_{x=\frac{l}{2}}}{EJ (k_i l)^4}.$$

Подставляя в ряд (е), получим:

$$y = \frac{PI^3}{EJ} \sum_{i=1,2,3,\dots} \frac{(X_i)_{x=\frac{l}{2}}}{(k_i l)^4} X_i.$$

Для прогиба середины найдем:

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{PI^3}{EJ} \sum_{i=1,2,3,\dots} \frac{(X_i)^2_{x=\frac{l}{2}}}{(k_i l)^4}.$$

Используя теперь данные в упомянутых таблицах значения нормальных функций и значения  $k_i l$ , данные в таблице на стр. 326, получим:

$$\begin{aligned} (y)_{x=\frac{l}{2}} &= \frac{PI^3}{EJ} \left( \frac{(1,588)^2}{(4,730)^4} + \frac{(1,406)^2}{(10,906)^4} + \frac{(1,415)^2}{(17,279)^4} + \dots \right) = \\ &= \frac{PI^3}{EJ} (5037 \cdot 10^{-6} + 135 \cdot 10^{-6} + 23 \cdot 10^{-6} + \dots) = \\ &= 5195 \cdot 10^{-6} \frac{PI^3}{EJ}. \end{aligned} \quad (j)$$

Сравнивая этот результат с точным решением

$$\frac{PI^3}{192EJ} = 5208 \cdot 10^{-6} \frac{PI^3}{EJ},$$

заключаем, что первый член ряда (j) дает прогиб с ошибкой около 3,6%, первые два члена ряда дают уже точность выше 1%, так что для практических приложений нет необходимости вычислять много членов ряда (е).

### Задачи

1. Найти нормальные функции для стержня с одним заделанным и другим свободно опертым концом и построить кривые изгиба для первой и второй форм колебаний.

*Ответ.* Выражение для нормальных функций из уравнения (130), стр. 321

$$X_i = \text{ch } k_i x - \cos k_i x - \alpha_i (\text{sh } k_i x - \sin k_i x).$$

Корни частотного уравнения (стр. 328):

$$k_1 l = 3,927, \quad k_2 l = 7,069, \quad \alpha_1 = 1,00078, \quad \alpha_2 = 1,00000.$$

По этим численным значениям можно построить искомые кривые.

2. Решить предыдущую задачу при условии, что конец  $x=0$  стержня заделан, а конец  $x=l$  свободен.

*Ответ.* Нормальная функция в этом случае

$$X_i = \text{ch } k_i x - \cos k_i x - \alpha_i (\text{sh } \beta_i x - \sin \beta_i x).$$

Пользуясь таблицей на стр. 328, получим:

$$k_1 l = 1,875, \quad k_2 l = 4,694, \quad \alpha_1 = 0,734, \quad \alpha_2 = 1,018.$$

3. Найти выражение для свободных колебаний стержня с заделанными концами, если вначале стержень изогнут сосредоточенной силой  $P$ , приложенной на расстоянии  $c$  от конца  $x=0$ , и в момент  $t=0$  сила внезапно устраняется.

*Ответ.* Коэффициенты  $a_i$  ряда (е) даются формулой

$$a_i = \frac{PI^3 (X_i)_{x=c}}{EJ (k_i l)^4},$$

и выражение для колебаний

$$y = \frac{PI^3}{EJ} \sum_{i=1,2,3,\dots} \frac{(X_i)_{x=c}}{(k_i l)^4} X_i \cos p_i t.$$

4. Решить предыдущую задачу для консоли. Начальный изгиб вызван силой  $P$ , приложенной к свободному концу.

**54. Свободные колебания неразрезных балок\*).** — Рассмотрим  $n$ -пролетную неразрезную балку, свободно опертую на концах и на  $n-1$  промежуточных опорах. Пусть  $l_1, l_2, \dots, l_n$  — длины последовательных пролетов, причем изгибная жесткость балки одинакова во всех пролетах. Для определения формы кривой изгиба каждого пролета при колебаниях используем решение (117), стр. 315, принимая начало координат на левом конце соответствующего пролета. Рассматривая  $r$ -й пролет и замечая, что прогиб левого конца ( $x=0$ )

\* См. E. R. Darnley, Phil. Mag., т. 41, стр. 81, 1921. См. также D. M. Smith, Engineering, т. 120, стр. 808, 1925; К. Hohenemser, W. Prager, Dynamik der Stabwerke, Берлин, стр. 127, 1933. [Русский перевод: К. Гогенемзер и Прагер, Динамика сооружений, ОНТИ, 1936.] К. Federhofer, Bautechnik, т. 11, стр. 647, 1933; F. Stüssi, Schweiz. Bauzeitung, т. 104, стр. 189, 1934; W. Mudrak, Ing.-Arch., т. 7, стр. 51, 1936.



Если отношение длин пролетов стремится к единице, то наименьший корень стремится к  $kl_1 = kl_2 = \pi$ . При основной форме колебаний каждый пролет будет находиться в условиях стержня с шарнирными концами. Другая форма колебаний получится из условия, что касательная над промежуточной опорой должна оставаться горизонтальной; тогда каждый пролет будет находиться в условиях стержня с одним закрепленным и с другим свободно опертым концом.

В случаях трех пролетов получим из системы (1):

$$\begin{aligned} -a_2(\varphi_1 + \varphi_2) + a_3\varphi_2 &= 0, \\ a_2\varphi_2 - a_3(\varphi_2 + \varphi_3) &= 0, \end{aligned}$$

и частотное уравнение принимает вид:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_2 + \varphi_3) - \varphi_2^2 = 0. \quad (п)$$

Имея таблицы функций  $\varphi$  и  $\varphi^*$ , можно из уравнения (п) найти частоту основной формы колебаний путем пробных попыток.

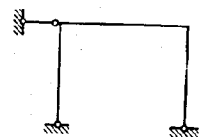


Рис. 206.

Изложенный здесь способ определения частот колебаний неразрезных балок можно применить при исследовании колебаний рам. Если боковое перемещение узлов рамы исключено соответствующими связями (рис. 206), то колебания системы совпадают с колебаниями трехпролетной неразрезной балки и можно применить изложенную выше теорию. Если же возможны боковые перемещения узлов, то теорию неразрезных балок непосредственно применить нельзя и необходимо дополнительное исследование\*\*. Основную форму колебаний можно приближенно найти методом Рэлея\*\*\*).

### 55. Вынужденные колебания балки с опертыми концами.—

*Общие замечания.* При рассмотрении вынужденных поперечных колебаний стержней воспользуемся способом, который был применен в случае продольных колебаний. Положим, что поперечные коле-

бания вызваны внешней возмущающей силой, представленной в виде ряда

$$y = \varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2 + \varphi_3 X_3 + \dots, \quad (а)$$

в котором  $X_1, X_2, \dots$  — нормальные функции, соответствующие условиям на концах колеблющегося стержня, и  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  — определенные функции времени. Уравнения для определения этих функций легко получить, применяя принцип Даламбера совместно с принципом виртуальных работ.

В случае стержня со свободно опертыми концами нормальные формы колебания определяются синусоидами  $\sin \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots$ , и ряд (а) принимает вид:

$$y = \sum_{j=1, 2, 3, \dots} \varphi_j \sin \frac{j\pi x}{l}. \quad (б)$$

Интенсивность сил инерции, распределенных по длине колеблющегося стержня, равна

$$-\frac{\gamma A}{g} \ddot{y} = -\frac{\gamma A}{g} \sum_{j=1, 2, 3, \dots} \ddot{\varphi}_j \sin \frac{j\pi x}{l}.$$

Принимая виртуальное перемещение в виде

$$\delta y = \delta \varphi_j \sin \frac{j\pi x}{l},$$

найдем виртуальную работу сил инерции:

$$\begin{aligned} -\frac{\gamma A}{g} \int_0^l \ddot{y} \delta y \, dx &= -\frac{\gamma A}{g} \sum_{j=1, 2, 3, \dots} \ddot{\varphi}_j \delta \varphi_j \int_0^l \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{j\pi x}{l} \, dx = \\ &= -\frac{\gamma A l}{g} \sum \ddot{\varphi}_j^2. \quad (в) \end{aligned}$$

Энергия деформации изгиба стержня в любой момент равна

$$\begin{aligned} V &= \frac{EJ}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{EJ}{2} \frac{\pi^4}{l^3} \int_0^l \left( \sum_{j=1, 2, 3, \dots} \varphi_j j^2 \sin \frac{j\pi x}{l} \right)^2 dx = \\ &= \frac{\pi^4 EJ}{4l^3} \sum_{j=1, 2, 3, \dots} j^4 \varphi_j^2, \quad (142) \end{aligned}$$

и для виртуальной работы упругих сил получим:

$$-\frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i = -\frac{\pi^4 EJ}{2l^3} j^4 \varphi_i \delta \varphi_i. \quad (д)$$

\* Такие таблицы даны в статье E. R. Dagnley (см. сноску на стр. 331). Другой способ, основанный на номограммах, дан в статье D. M. Smith (см. сноску на стр. 331), в которой показано приложение этой задачи к колебаниям труб конденсатора. Применение метода динамической податливости для определения частот колебаний неразрезных балок предложено в работе: W. Dunsan, Phil. Mag., сер. 7, т. 34, стр. 49, 1943. Частоты колебаний равнопролетных балок рассмотрены в работе: R. S. Auye, L. S. Jacobsen, J. Appl. Mech., т. 17, стр. 391, 1950.

\*\* См. W. Prager, S. Gradstein, Ing.-Arch., т. 2, стр. 622, 1932.

\*\*\* См. T. Pöschl, Ing.-Arch., т. 1, стр. 469, 1930.

Если колебания вызываются некоторой возмущающей силой  $P$ , приложенной на расстоянии  $c$  от конца стержня (рис. 207), то виртуальная работа этой силы равна

$$P(\delta y)_{x=c} = P \delta \varphi_i \sin \frac{i\pi c}{l}. \quad (e)$$

Складывая выражения (c), (d) и (e), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\gamma A}{g} \frac{1}{2} \ddot{\varphi}_i + \frac{\pi^4 EJ i^4}{2l^3} \varphi_i = P \sin \frac{i\pi c}{l}, \quad (f)$$

или, используя обозначение (114):

$$\ddot{\varphi}_i + \frac{i^4 \pi^4 a^2}{i^4} \varphi_i = \frac{2Pg}{A\gamma l} \sin \frac{i\pi c}{l}. \quad (143)$$

Общее решение уравнения (143) имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_i = & A_i \cos \frac{i^2 \pi^2 a t}{i^2} + B_i \sin \frac{i^2 \pi^2 a t}{i^2} + \\ & + \frac{i^2}{i^2 \pi^4 a} \frac{2g}{A\gamma l} \int_0^t P \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i^2 \pi^2 a (t-t_1)}{i^2} dt_1. \quad (g) \end{aligned}$$

Первые два члена этого решения представляют свободные колебания, определяемые начальными условиями, а третий член представляет колебания, вызванные возмущающей силой.

В качестве примера рассмотрим теперь случай гармонической силы  $P = P_0 \sin \omega t$ , приложенной на расстоянии  $c$  от левой опоры (рис. 207).

Рис. 207.

Подставляя  $P$  в выражение (g) и рассматривая только часть колебаний, вызванную гармонической силой, получим после интегрирования:

$$\varphi_i = \frac{2g}{A\gamma} P_0 \sin \frac{i\pi c}{l} \left( \frac{i^3}{i^4 \pi^4 a^2 - \omega^2 i^4} \sin \omega t - \frac{\omega i^3}{i^2 \pi^4 a (i^4 \pi^4 a^2 - \omega^2 i^4)} \sin \frac{i^2 \pi^2 a t}{i^2} \right). \quad (h)$$

Подставляя это в (b), имеем:

$$\begin{aligned} y = & \frac{2g P_0 i^3}{A\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^4 \pi^4 a^2 - \omega^2 i^4} \sin \omega t - \\ & - \frac{2g \omega P_0 i^3}{A\gamma \pi^4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^2 (i^4 \pi^4 a^2 - \omega^2 i^4)} \sin \frac{i^2 \pi^2 a t}{i^2}. \quad (144) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что первый ряд представляет решение, пропорциональное  $\sin \omega t$ . Оно имеет период возмущающей силы и представляет *вынужденные колебания* балки. Второй ряд представляет *свободные колебания* балки, вызванные приложением силы<sup>\*</sup>). Вследствие различных неупругих сопротивлений свободные колебания постепенно затухают; практическое значение имеют только вынужденные колебания, определяемые уравнением

$$y = \frac{2g P_0 i^3}{A\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^4 \pi^4 a^2 - \omega^2 i^4} \sin \omega t. \quad (i)$$

Если гармоническая сила  $P$  изменяется очень медленно, то  $\omega$  является весьма малой величиной и в знаменателе ряда (i) можно пренебречь слагаемым  $\omega^2 i^4$ ; тогда

$$y = \frac{2g P_0 i^3}{A\gamma \pi^4 a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad (j)$$

или, воспользовавшись обозначением (114):

$$y = \frac{2P P_0}{E J \pi^4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad (k)$$

Это выражение представляет кривую статического изгиба, вызванного силой  $P^{**}$ ). В частном случае, когда сила  $P$  приложена посередине,  $c = l/2$ , и мы получим:

$$y = \frac{2P P_0}{E J \pi^4} \left( \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^4} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^4} \sin \frac{5\pi x}{l} - \dots \right). \quad (l)$$

Этот ряд быстро сходится, и удовлетворительное приближение для прогибов получится при сохранении только первого члена. Таким образом, найдем прогиб середины:

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{2P P_0}{E J \pi^4} = \frac{P P_0}{48.7 E J}.$$

Ошибка этого приближения около 1,5%.

Обозначая через  $\alpha$  отношение частоты возмущающей силы к частоте основной формы свободных колебаний, получим:

$$\alpha = \frac{\omega^2}{a^2}.$$

<sup>\*</sup>) [См. сноску на стр. 46.]

<sup>\*\*</sup>) См. Timoshenko, Lessels, Applied Elasticity, стр. 131. [Русский перевод первого издания: С. Тимошенко, Дж. Лессельс, Прикладная теория упругости, ГИИТ, 1931.] Timoshenko, Strength of Materials, 2-изд., т. 2, стр. 417, 1941. [Русский перевод: С. П. Тимошенко, Сопротивление материалов, т. 2, ГИИТ, 1946.]

и ряд (i), представляющий вынужденные колебания, принимает вид:

$$y = \frac{2P_0 l^3 \sin \omega t}{EJ\pi^4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^4 - \alpha^2}. \quad (\text{ш})$$

Если гармоническая сила приложена посередине, получим:

$$y = \frac{2P_0 l^3 \sin \omega t}{EJ\pi^4} \left( \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1 - \alpha^2} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^4 - \alpha^2} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{l}}{5^4 - \alpha^2} + \dots \right). \quad (\text{п})$$

При малых значениях  $\alpha$  прогиб с хорошей точностью представляется первым членом этого ряда; сравнивая (п) и (i), можно заключить, что отношение динамического прогиба к статическому приближенно равно

$$\frac{y_d}{y_{ст}} = \frac{1}{1 - \alpha^2}. \quad (\text{о})$$

Если, например, частота возмущающей силы в четыре раза меньше частоты основной формы колебаний, то динамический прогиб примерно на 6% больше статического прогиба.

Из ряда (i) можно получить также вынужденные колебания, вызванные гармоническим моментом, приложенным к концу ( $x=0$ ). К условиям таких колебаний мы приблизимся тем более точно, чем меньше расстояние  $c$  точки приложения гармонической силы от конца  $x=0$ . Взяв весьма малое значение  $c$  и рассматривая только первые несколько членов ряда (i), можно принять

$$\sin \frac{i\pi c}{l} \approx \frac{i\pi c}{l}.$$

Подставляя это в ряд и пользуясь обозначением  $M = P_0 c$ , получим:

$$y = \frac{2\pi M l^3}{A\gamma} \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{i}{i^4 \pi^4 \alpha^2 - \omega^2 l^4} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \omega t, \quad (\text{р})$$

что представляет вынужденные колебания, вызванные гармоническим моментом  $M \sin \omega t$ .

Вследствие того, что колебания стержней представляются *линейными* дифференциальными уравнениями, к ним применим *принцип наложения*, и если на балку действует несколько гармонических сил, то результирующие колебания можно получить наложением колебаний, вызванных каждой отдельной силой. Таким же образом можно решить задачу в случае непрерывно распределенной гармонической нагрузки, но суммирование должно быть заменено интегрированием вдоль длины балки. Положим, например, что балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности

$$w = w_0 \sin \omega t.$$

Такие условия нагружения возникают, например, в спарниках локомотива под действием поперечных сил инерции. Чтобы определить эти колебания, нужно подставить в уравнение (i)  $w_0 dc$  вместо  $P_0$  и затем проинтегрировать это уравнение по  $c$  в пределах от  $c=0$  до  $c=l$ . Таким образом, получим:

$$y = \frac{4gw_0 l^4}{A\gamma\pi^4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l}}{i(i^4 \pi^4 \alpha^2 - \omega^2 l^4)} \sin \omega t, \quad i=1, 3, 5, \dots \quad (\text{q})$$

Если частота нагрузки весьма мала по сравнению с частотой основной формы колебаний стержня, то в знаменателях ряда (q) можно пренебречь членом  $\omega^2 l^4$ , и мы получим:

$$y = \frac{4w l^4}{EJ\pi^4} \left( \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1^4} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^4} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{l}}{5^4} + \dots \right). \quad (\text{т})$$

Этот быстро сходящийся ряд представляет статический изгиб балки, вызванный равномерно распределенной нагрузкой  $w$ . Взяв  $x=l/2$ , получим прогиб середины

$$(y)_x=\frac{l}{2} = \frac{4w l^4}{EJ\pi^4} \left( 1 - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \dots \right). \quad (\text{с})$$

Если удержать только первый член этого ряда, то ошибка в значении прогиба середины составит около 1/4%. Если частота гармонической нагрузки недостаточно мала, чтобы считать нагрузку статической, то можно использовать тот же способ, который был дан для случая сосредоточенной силы, и мы приходим к тому же заключению, которое представлено уравнением (о)\*).

В более общем случае интенсивность распределенной возмущающей нагрузки может меняться вдоль пролета балки, а также быть функцией времени, отличной от  $\sin \omega t$ . Тогда мы имеем (\*\*)

$$w = I(t) f_1(x)$$

и представим  $f_1(x)$  в виде ряда

$$f_1(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots$$

где

$$a_i = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx.$$

\* [Во всех рассмотренных частных случаях, начиная со случая действия силы  $P_0 \sin \omega t$  (рис. 207), результат может быть получен значительно проще и без применения рядов, если искать решение в виде  $y = A(x) \sin \omega t$  и не пользоваться разложением по нормальным формам колебаний.]

\*\* [В самом общем случае произвольную нагрузку нельзя представить в виде произведения двух функций от  $x$  и  $t$ .]

Таким образом, общее выражение распределенной возмущающей нагрузки примет вид:

$$w = f(t) \sum a_i \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Чтобы вывести для этого общего случая уравнение, определяющее функции  $\varphi_i$ , входящие в ряд (b), заметим, что виртуальная работа возмущающей силы равна

$$\int_0^l w \delta \varphi_i \sin \frac{i\pi x}{l} dx = f(t) \delta \varphi_i \int_0^l \left( \sum a_i \sin \frac{i\pi x}{l} \right) \sin \frac{i\pi x}{l} dx = f(t) \frac{a_i l}{2} \delta \varphi_i.$$

При выводе уравнения для  $\varphi_i$  нужно пользоваться этим выражением вместо (e); тогда вместо уравнения (143) получим:

$$\ddot{\varphi}_i + \frac{i^4 \pi^4 a^2}{l^4} \varphi_i = \frac{a_i g}{A \gamma} f(t).$$

Рассматривая колебания, вызванные только возмущающей нагрузкой, получим:

$$\varphi_i = \frac{l^2}{i^2 \pi^2 a^2} \frac{a_i g}{A \gamma} \int_0^t f(t) \sin \frac{i^2 \pi^2 a(t-t_1)}{l^2} dt_1.$$

В каждом частном случае для данной функции  $f(t)$  можно получить выражение  $\varphi_i$ ; подставляя его в ряд (b), найдем искомые колебания. Если функция  $f(t)$  задана графически, можно также определить приближенные выражения для  $\varphi_i$ .

**Движущаяся постоянная сила.** Если вдоль балки с горизонтальной осью движется постоянная вертикальная сила  $P$ , то она вызывает колебания, которые можно определить указанным выше способом. Пусть  $v$  обозначает постоянную\* скорость движущейся силы и пусть сила находится над левой опорой в начальный момент  $t=0$ ; тогда в любой другой момент  $t=t_1$  расстояние этой силы от левой опоры составит  $v t_1$ .

Виртуальная работа этой силы на перемещении  $\delta \varphi_i \sin i\pi x/l$  равна  $P \delta \varphi_i \sin \frac{i\pi v t_1}{l}$ . Сравнивая это выражение с выражением (e), видим, что  $\sin \frac{i\pi v t_1}{l}$  занимает место  $\sin \frac{i\pi c}{l}$ . Подставив в третий член выражения (g)  $\sin \frac{i\pi v t_1}{l}$  вместо  $\sin \frac{i\pi c}{l}$ , найдем следующее выражение для

колебаний, вызванных движущейся силой\*\*):

$$y = \frac{2gPl^2}{A\gamma\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l}}{i^3 (i^2 \pi^2 a^2 - v^2 l^2)} \sin \frac{i\pi v t}{l} - \frac{2gPl^2 v}{A\gamma\pi^2 a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l}}{i^3 (i^2 \pi^2 a^2 - v^2 l^2)} \sin \frac{i^2 \pi^2 a t}{l^2}. \quad (145)$$

Первый ряд, входящий в это решение, представляет вынужденные колебания, а второй ряд — свободные колебания балки.

Если скорость  $v$  движущейся силы весьма мала, то можно в приведенном решении положить  $v=0$  и  $v t = c$ ; тогда

$$y = \frac{2gPl^2}{A\gamma\pi^2 a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Это — статический прогиб балки, вызванный силой  $P$ , приложенной на расстоянии  $c$  от левой опоры (см. уравнение (j)). Используя обозначение

$$\alpha^2 = \frac{v^2 l^2}{a^2 \pi^2}, \quad (t)$$

найдем для вынужденных колебаний в общем решении (145):

$$y = \frac{2Pl^2}{EJ\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi v t}{l}}{i^3 (i^2 - \alpha^2)}. \quad (u)$$

Интересно отметить, что этот прогиб полностью совпадает со статическим прогибом балки\*\*, к которой, кроме силы  $P$ , приложена на расстоянии  $c = v t$  от левой опоры продольная сжимающая сила  $S$ , такая, что

$$\frac{S}{S_{кр}} = \frac{Sl^2}{EJ\pi^2} = \alpha^2. \quad (v)$$

Здесь  $S_{кр}$  обозначает известную критическую силу для балки.

\* Эта задача имеет практический интерес в связи с изучением колебаний мостов. Первое решение этой задачи дано А. Н. Крыловым (Матем. сборник, СПб, 61, 1905). См. также статью автора в Известиях Киевского политехнического института, 1908 (немецкий перевод в Z. Math. u. Phys., т. 59, стр. 163, 1911). К тем же результатам пришел Инглис (см. С. Е. Inglis, Proc. Inst. Civil Engrs., London, т. 218, 1924). Если вместо силы по балке движется массивный груз, то задача становится более сложной. См. Н. Н. Jeffcott, Phil. Mag., сер. 7, т. 8, стр. 66, 1929; Н. Steudling, Ing.-Arch., т. 5, стр. 275, 1934; A. Schallenkamp, Ing.-Arch., т. 8, стр. 182, 1937; T. A. Odman, Bull. Swedish Cement and Concrete Research Inst., № 14, 1948.

\*\* См. Timoshenko, Lessels, Applied Elasticity (см. сноску на стр. 337), стр. 163. Сумму ряда (u) в конечном виде можно получить, используя известное выражение для статической кривой изгиба

\* Случай переменн<sup>ой</sup> скорости рассмотрен в статье: A. N. Lowan, Phil. Mag., сер. 7, т. 19, стр. 708, 1935.

Из уравнений (v) и (t) получим:

$$\frac{S l^2}{E I \pi^2} = \frac{v^2 l^2}{a^2 \pi^2}$$

или

$$S = \frac{v^2 A \gamma}{g} \quad (w)$$

Влияние этой силы на статический прогиб балки, нагруженной силой  $P$ , эквивалентно влиянию скорости движущейся силы  $P$  на прогибы (u), представляющие вынужденные колебания.

При возрастании скорости  $v$  достигаются такие условия, что один из знаменателей ряда (145) обращается в нуль и наступает резонанс. Пусть, например,

$$a^2 \pi^2 = v^2 l^2 \quad (x)$$

В этом случае период основной формы колебаний балки, равный  $2l/v$  рад, становится равным  $2l/v$ , т. е. вдвое больше времени, необходимого для того, чтобы сила  $P$  прошла всю длину балки. При условии (x) знаменатели первых членов обоих рядов, входящих в (145), обращаются в нуль и сумма этих двух членов

$$\frac{2PgPl^2}{A\gamma\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} \frac{\sin \frac{\pi vt}{l} - \frac{lv}{\pi a} \sin \frac{\pi^2 at}{l^2}}{\pi^2 a^2 - v^2 l^2}$$

имеет вид  $0/0$  и может быть преобразована обычным путем к виду:

$$-\frac{Pg}{\gamma A \pi v} t \cos \frac{\pi vt}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{Pgl}{\gamma A \pi^2 v^2} \sin \frac{\pi vt}{l} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (y)$$

Это выражение имеет максимум при  $t=l/v$ , равный

$$\frac{Pgl}{\gamma A \pi^2 v^2} \left( \sin \frac{\pi vt}{l} - \frac{\pi vt}{l} \cos \frac{\pi vt}{l} \right)_{t=l/v} = \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{Pl^2}{E I \pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (z)$$

Учитывая, что выражение (y) представляет удовлетворительное приближение для динамического прогиба, данного выражением (145), можно заключить, что наибольший динамический прогиб при резонансном условии (x) примерно на 50% больше наибольшего статического прогиба  $\frac{Pl^2}{48EJ}$ .

Интересно отметить, что динамический прогиб становится наибольшим, когда сила  $P$  сходит с балки. В этот момент прогиб под силой равен нулю; поэтому работа, совершенная этой силой

за время прохождения через балку, также равна нулю. Чтобы объяснить источник энергии, накопленной в колеблющейся балке за время прохода силы  $P$ , нужно учесть, что трение отсутствует и балка создает реакцию  $R$  в направлении нормали (рис. 208). В этом случае из условия равновесия следует, что должна существовать горизонтальная сила, равная  $P(dy/dx)$ . Работа, совершаемая этой силой за время прохода силы  $P$  по балке, равна

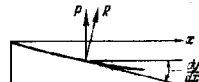


Рис. 208.

$$E = - \int_0^l P \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=vt} v dt.$$

Подставляя вместо  $y$  выражение (y), получим такую формулу:

$$E = - \frac{P^2 g l}{\gamma A \pi v^2} \int_0^l \left( \sin \frac{\pi vt}{l} - \frac{\pi vt}{l} \cos \frac{\pi vt}{l} \right) \cos \frac{\pi vt}{l} v dt = \frac{P^2 g l}{\gamma A \pi^2 v^2} \frac{\pi^2}{4} l,$$

или, учитывая выражения (x) и (114):

$$E = \frac{\pi^2}{4} \frac{P^2 l^3}{E I \pi^4}.$$

Эта величина работы очень близка \*) к потенциальной энергии изгиба в момент  $t = \frac{l}{v}$  \*\*).

В случае мостов время, необходимое для прохода через мост, обычно велико сравнительно с периодом основной формы колебаний и величина  $a^2$ , данная выражением (t), мала. Тогда, удерживая только первые члены рядов, входящих в (145), и принимая, что в наиболее неблагоприятном случае амплитуды вынужденных и свободных колебаний накладываются, получим для максимального прогиба:

$$y_{\max} = \frac{2gPl^2}{8A\pi^2} \left( \frac{1}{\pi^2 a^2 - v^2 l^2} + \frac{vl}{a} \frac{1}{\pi^2 a^2 - v^2 l^2} \right) = \frac{2Pl^2}{E I \pi^4} \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha^2} = \frac{2Pl^2}{E I \pi^4} \frac{1}{1 - \alpha} \quad (146)$$

\*) Потенциальная энергия балки, изгибаемой силой  $P$ , приложенной посередине, равна  $V = \frac{P^2 l^2}{96EJ}$  и  $\frac{E}{V} = 2.43$ . Это отношение весьма близко к квадрату отношения наибольших прогибов в динамических и статических условиях, который равен  $(48/l^2)^2 = 2.38$ . Расхождение следует приписать высшим гармоникам кривой изгиба.

\*\*\*) Для дальнейшего изучения вопроса см. работу F. H. Lee, Quarterly of Appl. Math., т. 10, стр. 290, 1952.

Это — несколько преувеличенное значение наибольшего динамического прогиба, так как выше мы совершенно пренебрегли демпфированием. Пользуясь принципом наложения, без труда можно получить решение задачи в случае движения системы сосредоточенных сил и в случае движущейся распределенной нагрузки\*\*).

**Движущаяся гармоническая сила\*\*).** Рассмотрим теперь случай, когда вдоль балки с постоянной скоростью  $v$  движется гармоническая сила. Подобные условия могут быть, например, когда через мост проходит неполовностью уравновешенный локомотив (рис. 209). Вертикальная составляющая центробежной силы  $P^{***}$ , вызванной неуравновешенностью, равна  $P \cos \omega t_1$ , где  $\omega$  — угловая скорость ведущего

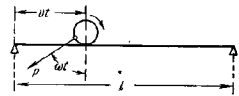


Рис. 209.

колеса. Пользуясь тем же способом, что и выше, найдем, что виртуальная работа движущейся гармонической силы на перемещении  $\delta \varphi_1 \sin \frac{\pi x}{l}$  равна  $P \cos \omega t_1 \delta \varphi_1 \sin \frac{\pi v t_1}{l}$ . Подставляя  $P \cos \omega t_1 \sin \frac{\pi v t_1}{l}$  вместо  $P \sin \frac{\pi c}{l}$  в выражение (g), найдем  $\varphi_1$ , и ряд (b) даст:

$$y = \frac{P l^3}{E J \pi^4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \sin \frac{i \pi x}{l} \left\{ \frac{\sin \left( \frac{i \pi v}{l} + \omega \right) t}{i^4 - (\beta + i \alpha)^2} + \frac{\sin \left( \frac{i \pi v}{l} - \omega \right) t}{i^4 - (\beta - i \alpha)^2} - \frac{\alpha}{i} \left( \frac{\sin \frac{i^2 \pi^2 \alpha t}{l^2}}{-i^2 \alpha^2 + (i^2 - \beta)^2} + \frac{\sin \frac{i^2 \pi^2 \alpha t}{l^2}}{-i^2 \alpha^2 + (i^2 + \beta)^2} \right) \right\}, \quad (147)$$

где  $\alpha = v l / \pi a$  — отношение периода  $\tau_1 = 2l^2 / \pi a$  основной формы колебаний балки к удвоенному времени  $\tau_1 = l/v$ , необходимому для того, чтобы сила  $P$  прошла всю длину балки;  $\beta = \tau_1 / \tau_2$  — отношение периода основной формы колебаний балки к периоду  $\tau_2 = 2\pi / \omega$  гармонической силы.

Когда период  $\tau_2$  гармонической силы равен периоду  $\tau$  основной формы колебаний балки,  $\beta = 1$  и наступает состояние резонанса. Амплитуда колебаний при движении гармонической силы будет постепенно возрастать и достигнет своего максимума в момент  $t = l/v$ , когда первый член (для  $i = 1$ ) ряда в правой части выражения (147), являющийся наиболее существенной частью  $y$ , может быть приведен к виду:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{2 P l^3}{E J \pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \omega t,$$

\*) См. работу автора, указанную на стр. 341.

\*\*) См. работу автора, Phil Mag., т. 43, стр. 1018, 1922.

\*\*\*) Предполагается, что в начальный момент  $t = 0$  центробежная сила направлена вниз.

и наибольший прогиб выражается формулой

$$\delta_{\max} = \frac{1}{\alpha} \frac{2 P l^3}{E J \pi^4} = \frac{2 \tau_1}{\alpha} \frac{2 P l^3}{E J \pi^4}. \quad (148)$$

Вследствие того, что в реальных условиях интервал  $\tau_1 = l/v$  велик сравнительно с периодом  $\tau$  свободных колебаний, наибольший динамический прогиб, вызванный гармонической силой  $P$ , будет во много раз больше прогиба  $2 P l^3 / E J \pi^4$ , вызываемого той же силой в случае ее статического приложения к середине балки. Некоторые приложения формулы (148) к определению динамического действия на мосты даны в следующем параграфе.

### Задачи

1. Свободно опертая балка нагружена посередине силой  $P$ ; прогиб под силой равен 1 см. Какую амплитуду колебаний вызовет приложенная посередине гармоническая сила  $P \sin \omega t$ , если частота  $\omega$  равна половине основной собственной частоты балки?

**Решение.** Подставляя в выражение (n)  $\alpha = 0,5$ ,  $x = 0,5l$ ,  $\omega t = \pi/2$ , получим наибольший динамический прогиб

$$(y)_{x=l/2} = \frac{2 P l^3}{48 E J} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{3^2 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{5^2 - \frac{1}{4}} + \dots \right).$$

Удерживая только первые три члена ряда и замечая, что

$$\frac{P l^3}{48 E J} = 1 \text{ см},$$

найдем:

$$(y)_{x=l/2} = \frac{96}{\pi^4} (1,347) = 1,328 \text{ см}.$$

Динамический прогиб приблизительно на 33% больше статического прогиба.

2. На балку, рассмотренную в предыдущей задаче, действуют две гармонические силы, приложенные, как показано на рис. 210. Найти амплитуду вынужденных колебаний середины балки, если сила имеет ту же величину и частоту, что и в предыдущей задаче.

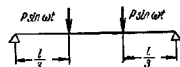


Рис. 210.

**Решение.** Из условий симметрии заключаем, что амплитуда будет вдвое большей, чем амплитуда колебаний, вызванных одной из сил. Пользуясь выражением (1), стр. 337, найдем амплитуду вынужденных колебаний:

$$(y)_{x=l/2} = \frac{4 P l^3}{\pi^4 E J} \left( \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{\sin \frac{5\pi}{3}}{5^2 - \frac{1}{4}} - \frac{\sin \frac{7\pi}{3}}{7^2 - \frac{1}{4}} + \dots \right) = 2,225 \text{ см}.$$



3. Найти амплитуду вынужденных колебаний середины свободно опертой балки при действии в пределах половины пролета распределенной гармонической нагрузки интенсивностью  $\omega_0 \sin \omega t$ .

Ответ.

$$(y_{\Delta})_{x=l/2} = \frac{2\omega_0 l^4}{\pi^2 EJ} \sum_i \frac{(-1)^i}{i^4(i^4 - \alpha^2)},$$

4. Найти колебания свободно опертой балки, вызванные силой  $P$ , внезапно приложенной к середине пролета.

Ответ.

$$y = \frac{2P l^3}{\pi^4 EJ} \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{(-1)^i}{i^4} (1 - \cos p_i t) \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

5. Найти вынужденные колебания свободно опертой балки, вызванные распределенной гармонической нагрузкой  $w = \omega_0 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \omega t$ .

Ответ.

$$y = \frac{\omega_0 l^4}{\pi^4 EJ} \frac{\sin \omega t}{1 - \frac{\omega^2 l^4}{\pi^4 \alpha^2}} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

56. Колебания мостов. — Хорошо известно, что движущийся груз вызывает большие напряжения и большие прогибы моста или балки, чем та же нагрузка, действующая статически. Такое динамическое действие подвижной нагрузки на мосты имеет большое практическое значение, и над решением этой проблемы работали многие инженеры \*. Из различных причин, вызывающих динамические эффекты в мостах, будут рассмотрены следующие: 1) динамическое действие нагрузки, движущейся без толчков; 2) динамическое действие противовесов ведущих колес локомотива; 3) динамическое влияние неровностей пути и износа бандажей.

Динамическое действие груза, катящегося без толчков. Эта задача будет рассмотрена для двух предельных случаев: 1) когда масса движущегося груза велика сравнительно с массой балки и 2) когда масса движущегося груза мала сравнительно с массой моста. В первом случае можно пренебречь массой балки. Тогда прогиб балки под грузом при любом его положении будет пропорционален давлению  $R$ , которое катящийся груз оказывает на балку (рис. 211); этот

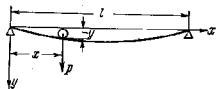


Рис. 211.

\*) История этого вопроса обстоятельно изложена в известной книге: А. Слейбша, *Theorie der Elastizität fester Körper*, перевод на французский язык Сеп-Венана (Париж, 1883). См. примечание к § 61, стр. 597.

прогиб можно определить из известного выражения для статического прогиба:

$$y = \frac{R x^2 (l-x)^2}{3lEJ}. \quad (a)$$

Чтобы определить давление  $R$ , пужно к весу катящегося груза  $P$  прибавить силу инерции  $-P \frac{d^2 y}{dt^2}$ . Полагая, что груз движется вдоль балки с постоянной скоростью  $v$ , получим:

$$\frac{dy}{dt} = v \frac{dy}{dx}; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 y}{dx^2},$$

и давление на балку равно

$$R = P \left( 1 - \frac{v^2}{g} \frac{d^2 y}{dx^2} \right). \quad (b)$$

Подставив в уравнение (а), получим:

$$y = P \left( 1 - \frac{v^2}{g} \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \frac{x^2 (l-x)^2}{3lEJ}. \quad (149)$$

Это дифференциальное уравнение определяет траекторию точки соприкосновения катящегося груза с балкой \*. Приближенное решение уравнения (149) получится в предположении, что эта траектория такая же, как и при нулевой скорости ( $v=0$ ), и при подстановке в правую часть этого уравнения

$$\frac{P x^2 (l-x)^2}{3lEJ}$$

вместо  $y$ . Тогда простыми выкладками можно показать, что  $y$  достигает максимума, когда груз находится посередине балки и наибольшее давление равно

$$R_{\max} = P \left( 1 + \frac{v^2}{g} \frac{Pl}{3EJ} \right). \quad (c)$$

Наибольший прогиб середины балки возрастет в том же отношении, что и давление, так что

$$\delta_{\Delta} = \delta_{\text{ст}} \left( 1 + \frac{v^2}{g} \frac{Pl}{3EJ} \right). \quad (150)$$

Это приближенное решение, как показывает сравнение со строгим

\*) Это уравнение получено Виллисом. См. R. Willis, Appendix to the Report of the Commissioners ... to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures, Лондон, 1849. Эта работа перепечатана в книге: P. Barlow, Treatise on the Strength of Timber, Cast Iron and Malleable Iron, Лондон, 1851.

решением уравнения (149)\*, достаточно точно для большинства практических приложений. Дополнительный член в скобках обычно весьма мал, и поэтому можно заключить, что рассматриваемое динамическое действие в случае малых балок не имеет практического значения.

Во втором случае, когда масса груза мала по сравнению с массой моста, можно заменить груз с достаточной точностью движущейся силой и использовать результаты, полученные в § 55. Примем для примера, что для трех однопутных железнодорожных мостов с пролетами 18,3, 36,6 и 109,8 м собственные частоты имеют следующие значения\*\*)

|                                  |               |                |                |
|----------------------------------|---------------|----------------|----------------|
| $l, \text{ м}$                   | 18,3          | 36,6           | 109,8          |
| $f, \text{ сек}^{-1}$            | 9             | 5              | 2              |
| $(\alpha)v = 36,6 \text{ м/сек}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{12}$ |

Принимая далее, что скорость  $v = 36,6 \text{ м/сек}$ , получим значения  $\alpha$ , представляющие отношение основного периода свободных колебаний к удвоенному времени  $l/v$ , необходимому для прохода силы по мосту (с. третью строку таблицы). Теперь на основании решения (146) можно заключить\*\*\*), что для принятой весьма большой скорости и пролета 18,3 м увеличение прогиба из-за динамического действия

\*) Точное решение уравнения (143) получено Стоксом, см.: G. G. Stokes, *Mathematical and Physical Papers*, Кембридж, т. 2, стр. 179. Та же задача рассмотрена в книге: H. Zimmert, *Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last.*, Берлин, 1896. Нужно отметить, что интегрирование уравнения (149) можно выполнять численным способом, изложенным выше на стр. 141. Этим способом Н. П. Петровым получены решения для балки на упругих опорах и для неразрезных балок. См. Записки Имп. Русского технического общества, 1903.

\*\*) Некоторые экспериментальные данные по колебаниям мостов можно найти в следующих работах: А. Вühler, *Stoßwirkungen bei eisernen Eisenbahnbrücken*. Druckschrift Intern. Congr. Brückenbau, Цюрих, 1926; W. Hört, *Stoßbeanspruchungen und Schwingungen*... Bautechnik, 1928. См. также N. Streletzky, *Ergebnisse der experimentellen Brückenuntersuchungen*, Берлин, 1928; С. E. Inglis, *A. Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges*, Кембридж, 1934. Колебания двухпролетной балки, вызванные движущейся силой, были теоретически и экспериментально изучены в работе: R. S. Ayre, G. Ford, L. S. Jacobsen, *J. Appl. Mech.*, т. 17, стр. 1 и 391, 1950.

\*\*\*) Мост рассматривается здесь как простая балка с постоянным поперечным сечением. Колебания ферм рассмотрены в работах: H. Reissner, *Z. Baut.*, т. 53, стр. 135, 1903; E. Pohlhausen, *Z. angew. Math. u. Mech.*, т. 1, стр. 28, 1921; K. Federhofer, *Der Stahlbau*, № 1, 1934. Об экспериментальных исследованиях колебаний ферм см. J. V. Hunley, *Bull. Am. Railway Eng. Assos.*, т. 37, стр. 1, 1935.

нагрузки составляет около 12%, а для меньших скоростей и больших пролетов — еще меньше. Если на мост действует несколько движущихся грузов, то колебания, вызванные каждым из них, должны быть наложены друг на друга. Лишь в исключительном случае синхронности этих колебаний результирующий эффект равняется сумме эффектов отдельных грузов, и увеличение прогиба произойдет в том же отношении, как и для одиночного груза. Из этих примеров можно заключить, что динамический эффект движущейся без толчков нагрузки не является существенным фактором и что в наиболее неблагоприятных случаях он едва ли превышает 10%. Как мы увидим, значительно более серьезное влияние могут оказать переменные силы, возникающие при вращении противовесов паровозов.

*Динамическое действие неуравновешенных грузов.* Наиболее неблагоприятные условия наступают в случае резонанса, когда число оборотов в секунду ведущих колес равно собственной частоте колебаний моста. Для мостов малых пролетов собственная частота обычно столь высока, что синхронность переменной силы и собственных колебаний невозможна при любых практически возможных скоростях. Принимая, например, 6 об/сек как самый верхний предел для ведущих колес и беря собственные частоты из данной выше таблицы, можно заключить, что резонансные условия едва ли возможны для пролетов, меньших чем 30 м. Для больших пролетов необходимо учитывать резонанс и определять динамическое влияние по уравнению (148).

Пусть  $P_1$  — наибольшее общее давление на рельс, вызванное противовесами, когда ведущие колеса совершают 1 об/сек;  $n$  — полное число оборотов ведущих колес за время прохода через мост. Тогда из уравнения (148) получим следующий дополнительный прогиб, вызванный динамическим влиянием:

$$\delta_{\max} = \frac{2n}{\sqrt{3}} \frac{2P_1 l^3}{EJ\pi^4} \quad (151)$$

Как видно, при вычислении динамического действия неуравновешенных грузов необходимо принять во внимание: 1) статический прогиб, вызванный силой  $P_1$ ; 2) период  $t$  свободных колебаний моста; 3) число оборотов  $n$ . Все эти величины обычно не учитываются в формулах, оценивающих динамическое действие и применяемых в работе мостов.

Чтобы получить некоторое представление о величине этого динамического влияния, применим формулу (151) к численному примеру\*) — случаю локомотива, проходящего через мост с пролетом 36,6 м. Принимая, что вес локомотива эквивалентен нагрузке 21,8 т/м, равномерно распределенной на длине 4,6 м, и что вес поезда эквивалентен равномерно распределенной по всему мосту нагрузке 8,2 т/м, найдем,

\*) Пример заимствован из упомянутой на стр. 341 статьи С. E. Inglis'a.

что наибольший прогиб середины каждой фермы приблизительно равен  $(2P^2/EJ\pi^4) \cdot 125$ . Прогиб середины, когда локомотив достигает опоры и поезда полностью занимает весь мост, составляет приблизительно  $(2P^2/EJ\pi^4) \cdot 93$ . Принимая число оборотов  $n = 8$  (диаметр колеса 1,45 м) и наибольшее переменное давление на каждую ферму при резонансе  $P_1/\pi^2 = 8,5$  т, найдем дополнительный прогиб  $(2P^2/EJ\pi^4) \cdot 136$ , вычисленный по формуле (151). Прибавляя это значение к вычисленному выше статическому прогибу для случая, когда локомотив достигнет конца моста, получим полный прогиб середины  $229 \frac{2P^2}{EJ\pi^4}$ . Сравнивая это значение с вычисленным выше наибольшим статическим прогибом середины  $125 \frac{2P^2}{EJ\pi^4}$ , можно заключить, что увеличение прогиба вследствие динамичности составляет в данном случае около 84%. Принимая число оборотов  $n$  равным 6 (диаметр ведущих колес 1,98 м) и вновь предполагая наличие резонанса, получим для того же численного примера увеличение прогиба на 56%.

Для мостов меньших пролетов, когда частота свободных колебаний значительно больше числа оборотов в секунду ведущих колес, можно получить удовлетворительное приближение, беря только первый член ряда (147) и принимая наиболее неблагоприятные условия, когда  $\sin(\pi\omega/l + \omega)t$  и  $\sin(\pi\omega/l - \omega)t$  становятся равными  $+1$  и  $\sin(\pi^2 a l^2/l^2)$  равным  $-1$  в момент  $t = l/2v$ , когда переменная сила достигает середины пролета. Тогда из (147) получим дополнительный прогиб

$$y = \frac{P\beta}{EJ\pi^4} \left( \frac{1}{1 - (\beta + \alpha)^2} + \frac{1}{1 - (\beta - \alpha)^2} + \frac{\alpha}{(1 - \beta)^2 - \alpha^2} + \frac{\alpha}{(1 + \beta)^2 - \alpha^2} \right) = \\ = \frac{2P\beta}{EJ\pi^4} \frac{1 - \alpha}{\left(1 - \beta \left[1 + \frac{\alpha}{\beta}\right]\right) \left(1 + \beta \left[1 - \frac{\alpha}{\beta}\right]\right)}. \quad (152)$$

Рассмотрим, например, мост пролетом 18,3 м и предположим тот же вид нагружения, что и в предыдущем примере; тогда наибольший статический прогиб приблизительно равен  $78,4 \frac{2P^2}{EJ\pi^4}$ . Если ведущие колеса имеют длину окружности 6,1 м и совершают 6 об/сек, то максимальная сила, действующая на мост вниз, составит  $8,5(6/5)^2 = 12,2$  т. Принимая собственную частоту колебаний моста равной  $9 \text{ сек}^{-1}$ , получим из уравнения (152):

$$\delta = \frac{2P^2}{EJ\pi^4} (12,2 \cdot 2,57) = \frac{2P^2}{EJ\pi^4} 31,4.$$

Поэтому

$$\frac{\text{динамический прогиб}}{\text{статический прогиб}} = \frac{78,4 + 31,4}{78,4} = 1,40.$$

В данном случае динамическое действие противовесов доходит до 40%.

В целом из приведенной теории можно видеть, что наибольшее динамическое действие получается для наиболее коротких пролетов, которые могут оказаться в условиях резонанса (пролеты около 30 м при сделанном выше предположении), так как в этом случае резонансу соответствует наибольшая величина переменной возмущающей силы. С увеличением пролета уменьшается как критическая скорость, так и величина переменной силы, вызывающей динамическое действие. Для очень больших пролетов, когда основная частота колебаний мала, становится теоретически возможной синхронность переменной силы и второй формы колебаний, имеющей узел посередине пролета; из-за этого может произойти увеличение динамического действия при скорости, приблизительно в 4 раза большей, чем первая критическая скорость.

Следует заметить, что все наши выкладки были основаны на допущении, что вдоль моста движется гармоническая сила. В действительности имеются катящиеся массы, вследствие чего не является собственной частота моста соответственно переменному положению грузов. Эта переменность, особенно заметная при коротких пролетах, весьма благоприятна, так как резонанс становится невозможным в течение всего времени прохождения груза через мост, и динамическое действие не будет столь заметным, как это дает изложенная выше теория. Из экспериментов, выполненных в Индийской комиссии железнодорожных мостов\*), следует, что наибольший прогиб в среднем достигается в момент, когда локомотив прошел около двух третей пролета, причем максимальное динамическое действие составляет всего одну треть величины, данной формулой (151). Необходимо заметить также, что динамический эффект пропорционален силе  $P_1$  и зависит от типа машины и от способа уравновешивания. В то время как в плохо уравновешенном двухцилиндровом паровозе сила  $P_1$  может достигнуть величины, большей чем 450 кг\*\*), в электровозах может быть получено полное уравновешивание, не вызывающее пульсирующего давления на рельс. Это отсутствие динамического действия может компенсировать увеличение нагрузки на ось в современных тяжелых электровозах. Для коротких балок, имеющих очень высокие собственные частоты, можно с достаточной точностью определить влияние противовесов на прогибы и напряжения, не учитывая колебаний и пользуясь статической формулой, при применении которой нужно прибавить к статическому давлению на рельс центробежные силы давления на рельс. Влияние этих центробежных сил особенно

\*) См. отчет Мостовой подкомиссии, 1925, Government of India Central Publication Branch, Techn. Paper No. 247, Калькутта, 1925. Подобные же заключения получены в книге: С. E. Inglis, Vibrations in Bridges, 1934.

\*\*) Некоторые данные о значениях  $P_1$  для различных типов паровозов даны в упомянутом отчете Мостовой подкомиссии.

заметно в случае коротких пролетов, когда одновременно на балке может находиться лишь небольшое число колес.

*Динамическое действие, вызываемое неровностями пути и износом бандажей.* Такие неровности пути, как небольшие выбоины рельсов и рельсовые стыки, а также износ бандажей и т. п. могут явиться причиной значительных динамических эффектов, которые особенно заметны для малых пролетов. Если форма неровностей пути или изношенных бандажей представляется плавной кривой, то для вычисления дополнительного давления колеса на рельс можно воспользоваться способом, рассмотренным ранее при определении влияния неровностей дороги на колебания экипажей и влияния малых неровностей на прогиб рельса (см. стр. 111). Это дополнительное давление пропорционально массе, непосредственно связанной с колесом (не через рессоры), и квадрату скорости поезда. Оно может достигнуть значительной величины и иметь практическое значение в случае коротких мостов и балок. Этот дополнительный динамический эффект оправдывает высокий динамический коэффициент, обычно принимаемый при расчете мостов малых пролетов. Влияние этих неровностей может быть уменьшено, а условия работы значительно улучшены, если устранить на мостах рельсовые стыки и применять проезжую часть с балластом или solidным деревянным настилом.

**57. Вынужденные колебания балок с различными условиями на концах.** — В предыдущих двух параграфах были рассмотрены различные случаи вынужденных колебаний стержня со свободными концами.

Рассмотрим теперь другие случаи, когда нормальные функции не являются простыми синусоидами, а имеют более сложный вид. В качестве примера рассмотрим балку с заделанными концами и примем, что вынужденные колебания вызваны гармонической силой  $P_0 \sin \omega t$ .

В качестве примера рассмотрим балку с заделанными концами и примем, что вынужденные колебания вызваны гармонической силой  $P_0 \sin \omega t$ . В качестве примера рассмотрим балку с заделанными концами и примем, что вынужденные колебания вызваны гармонической силой  $P_0 \sin \omega t$ . В качестве примера рассмотрим балку с заделанными концами и примем, что вынужденные колебания вызваны гармонической силой  $P_0 \sin \omega t$ .

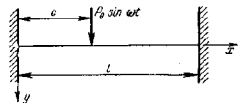


Рис. 212.

приложенной на расстоянии  $c$  от левого конца (рис. 212). Общее выражение для кривой изгиба возьмем, как и выше, в виде ряда

$$y = \sum_{j=1, 2, 3, \dots} \Phi_j X_j, \quad (a)$$

где  $X_j$  — нормальные функции для стержня с заделанными концами (см. стр. 327) и  $\Phi_j$  — функции времени, дифференциальные уравнения для которых мы выведем, используя принцип Даламбера совместно с принципом виртуальных работ. Принимая виртуальные перемещения

$$\delta y = \delta \Phi_j X_j \quad (b)$$

и замечая, что

$$\int_0^l X_i X_j dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^l X_i^2 dx = l,$$

найдем виртуальную работу сил инерции:

$$-\frac{\gamma A}{g} \int_0^l \left( \sum_{j=1, 2, 3, \dots} \ddot{\Phi}_j X_j \right) \delta \Phi_i X_i dx = -\frac{\gamma A l}{g} \ddot{\Phi}_i \delta \Phi_i. \quad (c)$$

Для определения виртуальной работы упругих сил воспользуемся выражением для энергии деформации стержня:

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{EJ}{2} \sum_{j=1, 2, 3, \dots} k_j^4 \Phi_j^2 \int_0^l X_j^2 dx,$$

или, беря

$$\int_0^l X_j^2 dx = l,$$

получим:

$$V = \frac{EJ}{2l^3} \sum_{j=1, 2, 3, \dots} (k_j l)^4 \Phi_j^2. \quad (d)$$

Таким образом, виртуальная работа упругих сил равна

$$-\frac{\partial V}{\partial \Phi_i} \delta \Phi_i = -\frac{EJ}{l^3} (k_i l)^4 \Phi_i \delta \Phi_i. \quad (e)$$

Виртуальная работа гармонической силы равна

$$P_0 \sin \omega t \delta \Phi_i (X_i)_{x=c}. \quad (f)$$

Складывая выражения (c), (e) и (f) и приравнявая их сумму нулю, получим уравнение для определения  $\Phi_i$ :

$$\ddot{\Phi}_i + \frac{EJg}{A\gamma l^4} (k_i l)^4 \Phi_i = \frac{P_0 g}{A\gamma l} \sin \omega t (X_i)_{x=c}, \quad (g)$$

или, применяя обозначение (114):

$$\ddot{\Phi}_i + \frac{a^2 (k_i l)^4}{l^4} \Phi_i = \frac{F_0 g}{A\gamma l} \sin \omega t (X_i)_{x=c}.$$

Пренебрегая свободными колебаниями, вызываемыми начальными условиями, и рассматривая только колебания, вызванные гармонической

силы, получим решение:

$$\varphi_i = \frac{l^3}{(k_i l)^2 a} \frac{g}{A \gamma l} P_0(X_i)_{x=c} \int_0^t \sin \omega t_1 \sin \frac{(k_i l)^2 a (t-t_1)}{l^3} dt_1 = \\ = \frac{g}{A \gamma} P_0(X_i)_{x=c} \left\{ \frac{l^3}{(k_i l)^2 a^2 - \omega^2 l^3} \sin \omega t - \frac{\omega l^3 \sin \frac{(k_i l)^2 a t}{l^3}}{(k_i l)^2 a [(k_i l)^2 a^2 - \omega^2 l^3]} \right\}. \quad (h)$$

Подставляя это решение в ряд (а), получим кривую изгиба колеблющегося стержня в виде двух рядов. Первый ряд содержит множитель  $\sin \omega t$  и представляет вынужденные колебания балки. Второй ряд представляет свободные колебания, вызванные возмущающей силой. Эти последние колебания вследствие различных видов неупругого сопротивления, постепенно затухают, поэтому следует рассматривать только вынужденные колебания\*):

$$y = \frac{P_0 g l^3 \sin \omega t}{A \gamma} \sum_{i=1, 2, 3, \dots} \frac{X_i(X_i)_{x=c}}{(k_i l)^2 a^2 - \omega^2 l^3}. \quad (i)$$

Если угловая частота  $\omega$  гармонической силы мала сравнительно с основной частотой колебаний стержня, то можно пренебречь вторым членом в знаменателях ряда, и мы получим статический прогиб в форме, которая была уже указана выше на стр. 337.

Если частота гармонической силы меньше основной частоты колебаний стержня и сила действует посередине, то приближенное выражение для динамического прогиба получится при учете одного первого члена ряда (i). Мы можем заключить, таким образом, что отношение динамического прогиба к статическому прогибу приблизительно равно

$$\frac{y_d}{y_{ст}} = \frac{1}{1 - \alpha^2}, \quad (j)$$

где  $\alpha = \omega/k_1^2 a$  — отношение частоты гармонической силы к частоте основного тона колебаний стержня.

Если частота гармонической силы приближается к одной из собственных частот стержня, то соответствующий член ряда (i) неограниченно возрастает. Чтобы найти колебания в этих условиях резонанса, нужно учесть оба члена в скобках выражения (i) и выполнить анализ, подобный приведенному на стр. 342.

Случай действия на стержень нескольких гармонических сил может быть рассмотрен при помощи метода наложения.

В общем случае, когда возмущающая сила распределена вдоль пролета, примем

$$\omega = l(t) f_1(x) \quad (k)$$

\* ) Случай резонанса будет рассмотрен позднее.

и представим  $f_1(x)$  в виде ряда

$$f_1(x) = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \dots$$

в котором \*)

$$a_i = \frac{1}{l} \int_0^l f_1(x) X_i dx.$$

Виртуальная работа этой силы равна

$$\int_0^l \delta \varphi_i X_i \omega dx = \delta \varphi_i l(t) \int_0^l X_i \sum a_j X_j dx = \delta \varphi_i l(t) a_i l.$$

Сравнивая это результат с выражением (f), заключаем, что в случае распределенной возмущающей силы (к) нужно заменить  $P_0 \sin \omega t (X_i)_{x=c}$  на  $a_i l f_1(t)$ . Произведя в дифференциальном уравнении (g) эту замену, получим:

$$\varphi_i = \frac{l^3}{(k_i l)^2 a} \frac{g}{A \gamma l} a_i l \int_0^t f_1(t_1) \sin \frac{(k_i l)^2 a (t-t_1)}{l^3} dt_1.$$

Выполняя в каждом частном случае указанное интегрирование, найдем функции  $\varphi_i$  и, подставляя их в ряд (а), получим выражения для искомого колебаний.

Хотя в наших выкладках предполагалось, что концы стержня заделаны, но выражения (h) и (i) можно применить и для других условий на концах. Нужно только в каждом случае пользоваться соответствующими нормальными функциями  $X_i$  и соответствующими частотами  $k_i l$ . Например, чтобы применить ряд (i) к случаю стержня со свободно опертными концами, заметим, что в этом случае нормальными формами колебаний являются синусоиды, и примем

$$X_i = \sqrt{2} \sin \frac{i \pi x}{l}, \quad k_i l = i \pi. \quad (l)$$

Множитель  $\sqrt{2}$  введен, чтобы удовлетворить требованию

$$\int_0^l (X_i)^2 dx = l.$$

Подставляя выражения (l) в ряд (i), получим уже найденный ранее результат (см. стр. 337).

\*) Предполагается, что нормальные функции взяты так, что

$$\int_0^l X_i^2 dx = l.$$

## Задача

1. Определить вынужденные колебания консоли, нагруженной на свободном конце силой  $P_0 \sin \omega t$  (рис. 213).

Ответ

$$y = \frac{P_0 g l^3 \sin \omega t}{A Y} \sum_{i=1, 2, 3, \dots} \frac{X_i(X_i)_{x=l}}{(k_i l)^4 a^2 - \omega^2 l^4}$$

где  $X_i$  — нормальные функции для консоли и  $k_i l$  — угловые частоты нормальных форм колебаний для этого случая.

2. Найти прогиб конца консоли (рис. 213), вызванный силой  $P_0$ , статически приложенной к концу. Использовать ряд, полученный в предыдущей задаче.

Решение.

$$(y)_{x=l} = \frac{P_0 g l^3}{A Y} \sum_{i=1, 2, 3, \dots} \frac{(X_i)_{x=l}^2}{(k_i l)^4 a^2}$$

Из табл. находим:

$$(X_i)_{x=l} = 2(-1)^{i+1}$$

Рис. 213.

Беря теперь значения  $k_i l$  из таблицы на стр. 328 и используя обозначение (114), стр. 315, получим:

$$(y)_{x=l} = \frac{4P_0 g l^3}{E J} \left( \frac{1}{(1,875)^4} + \frac{1}{(4,694)^4} + \frac{1}{(7,855)^4} + \dots \right) = \frac{4P_0 g l^3}{E J} (0,08071 + 0,00206 + 0,00026 + \dots) = 0,3321 \frac{P_0 g l^3}{E J}$$

При учете трех членов ряда ошибка составляет менее 0,5%.

3. Найти вынужденные колебания балки с одним закрепленным и другим свободно опертм концом, если к середине пролета приложена гармоническая сила  $P_0 \sin \omega t$ .

4. Вычислить прогиб середины балки, указанной в предыдущем примере, принимая следующие численные значения:

$$(X_1)_{x=\frac{l}{2}} = 1,4449, \quad (X_2)_{x=\frac{l}{2}} = 0,5704,$$

$$(X_3)_{x=\frac{l}{2}} = -1,3005, \quad (X_4)_{x=\frac{l}{2}} = -0,5399, \quad (X_5)_{x=\frac{l}{2}} = -1,3068.$$

Частоты свободных колебаний даны на стр. 328.

58. Колебания, вызываемые заданным движением некоторых поперечных сечений стержня. — Выше всюду предполагалось, что вынужденные колебания вызываются заданными силами, изменяющимися со временем. В практике встречаются также случаи [кинематического возмущения], когда колебания вызываются некоторым заданным

движением определенных точек оси или заданным вращением определенных поперечных сечений балки. Проиллюстрируем простыми примерами способ решения таких задач\*.

В качестве первого примера рассмотрим свободно опертую балку длиной  $2l$ , средняя точка  $C$  которой совершает движение (рис. 214)

$$(y)_{x=l} = \delta(1 - \cos \omega t). \quad (a)$$

Рис. 214.

Рассматривая в этом симметричном случае половину балки и используя общее дифференциальное уравнение поперечных колебаний:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad \text{где } a^2 = \frac{E J g}{A Y}, \quad (b)$$

видим, что условия на концах в данном случае имеют вид:

$$(y)_{x=0} = \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=l} = 0. \quad (c)$$

Кроме того, имеется условие (a).

Общее решение уравнения (b) возьмем в виде:

$$y = \delta \left( \frac{3x}{2l} - \frac{1}{2} \frac{x^3}{l^3} \right) + X \cos \omega t, \quad (d)$$

где первый член выражает кривую статического прогиба балки при  $(y)_{x=l} = \delta$  и  $X$  во втором члене является функцией  $x$ , которую нужно выбрать таким образом, чтобы выражение (d) удовлетворяло уравнению (b) и условиям на концах (a) и (c). Подставляя выражение (d) в уравнение (b), получим:

$$\frac{d^4 X}{dx^4} = \frac{\omega^2}{a^2} X. \quad (e)$$

Полагая

$$\frac{\omega^2}{a^2} = \alpha^4, \quad (f)$$

используем ранее полученное общее решение уравнения (130), стр. 321

$$X = C_1 (\cos \alpha x + \operatorname{ch} \alpha x) + C_2 (\cos \alpha x - \operatorname{ch} \alpha x) + C_3 (\sin \alpha x + \operatorname{sh} \alpha x) + C_4 (\sin \alpha x - \operatorname{sh} \alpha x). \quad (g)$$

\* Несколько примеров такого рода рассмотрено в упомянутой на стр. 289 книге Сен-Венана. Использование Сен-Венаном способ был предложен в работе: E. Phillips, J. mathématiques, т. 9, стр. 25, 1864. Обобщение метода дано в статье: R. D. Mindlin, L. E. Goodman, J. Appl. Mech., т. 17, стр. 377, 1950; см. также G. A. Nothmann, J. Appl. Mech., т. 15, стр. 327, 1948.

Чтобы удовлетворить условию на конце  $x=0$ , нужно принять  $C_1 = C_3 = 0$ . Условие  $(\partial y / \partial x)_{x=0} = 0$  требует, чтобы

$$C_4 = -C_2 \frac{\cos al + \operatorname{ch} al}{\cos al - \operatorname{ch} al},$$

и мы получим:

$$X = C (\operatorname{ch} al \sin ax - \cos al \operatorname{sh} ax).$$

Чтобы удовлетворить условию (а), положим:

$$C (\operatorname{ch} al \sin al - \cos al \operatorname{sh} al) = -\delta.$$

Тогда решение (d) принимает вид:

$$y = \delta \left( \frac{3x}{2l} - \frac{1}{2} \frac{x^3}{l^3} \right) - \delta \frac{\operatorname{ch} al \sin ax - \cos al \operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch} al \sin al - \cos al \operatorname{sh} al} \cos \omega t. \quad (h)$$

Это выражение представляет вынужденные колебания, вызываемые заданным движением (а) среднего поперечного сечения  $C$  балки. Для полного решения задачи нужно на эти вынужденные колебания (h) наложить свободные колебания, определив их таким образом, чтобы удовлетворить начальным условиям движения балки. Положим, что в начальный момент (при  $t=0$ ) балка не изогнута и находится в полном покое. Второе условие удовлетворяется выражением (h), так как его производная по времени обращается в нуль при  $t=0$ . Чтобы удовлетворить первому условию, нужно к выражению (h) прибавить свободные колебания. Пусть  $y_1$  обозначает прогибы, соответствующие свободным колебаниям, и  $f(x)$  обозначает выражение (h) при  $t=0$ . Тогда  $y_1$  должно удовлетворять уравнению (b) и конечным условиям (с). Кроме того, оно должно обращаться в нуль при  $x=l$ , так что условие (а), удовлетворяемое выражением (h), не будет нарушено. Отсюда заключаем, что формы свободных колебаний являются теми же, что и для балки с одним свободно опертым концом и другим заделанным концом. Обозначая нормальные функции через  $X_i$  (см. стр. 331), можно представить свободные колебания рядом

$$y_1 = \sum_{i=1, 2, 3, \dots} X_i (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t). \quad (i)$$

Начальные условия для  $y_1$ :

$$(y_1)_{t=0} + f(x) = 0; \quad (\dot{y}_1)_{t=0} = 0.$$

Из этих условий заключаем, что

$$\sum_{i=1, 2, 3, \dots} X_i A_i = -f(x); \quad B_i = 0.$$

Теперь можно обычным путем определить коэффициенты  $A_i$ :

$$A_i = -\frac{\int_0^l f(x) X_i dx}{\int_0^l X_i^2 dx}. \quad (j)$$

Этими значениями  $A_i$  полностью определяются свободные колебания (i); накладывая их на вынужденные колебания (h), получим полное решение задачи.

В качестве второго примера рассмотрим случай консоли (рис. 215), левый конец которой совершает заданное вертикальное движение

$$(y)_{x=0} = f(t). \quad (k)$$

Снова воспользуемся кривой статического изгиба консоли и примем как часть искомого решения выражение

$$y_1 = f(t) \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{x}{l} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{l^3} \right). \quad (l)$$

Это выражение удовлетворяет условиям на концах

$$(y_1)_{x=0} = f(t), \quad \left( \frac{d^2 y_1}{dx^2} \right)_{x=0} = 0, \quad (y_1)_{x=l} = 0, \quad \left( \frac{dy_1}{dx} \right)_{x=l} = 0, \quad (m)$$

но не удовлетворяет дифференциальному уравнению (b), так как, взяв кривую статического изгиба (l), мы не учли распределенные вдоль оси балки силы инерции, интенсивность которых равна

$$-\frac{A\gamma}{g} f(t) \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{x}{l} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{l^3} \right). \quad (n)$$

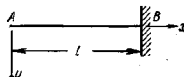


Рис. 215.

Чтобы получить полное решение задачи, нужно прибавить к движению, представленное выражением (l), колебания, вызываемые силами (n). Чтобы не нарушить условий на концах (m), эти последние колебания должны быть такими же, как в случае балки, свободно опертой на конце  $x=0$  и заделанной на конце  $x=l$ . Эти колебания представим в виде ряда

$$y_2 = \sum_{i=1, 2, 3, \dots} \varphi_i X_i, \quad (o)$$

где  $\varphi_i$  — функции времени и  $X_i$  — нормальные функции  $x$  для балки с указанными выше конечными условиями. Функции  $X_i$  легко получить из общего решения (117) в виде:

$$X_i = \operatorname{sh} k_i l \sin k_i x - \sin k_i l \operatorname{sh} k_i x. \quad (p)$$

Значения  $k_i$  вычисляются из частного уравнения

$$\operatorname{th} k_i l = \operatorname{tg} k_i l \quad (q)$$

и приведены на стр. 328.

При выводе уравнения для функций  $\varphi_i$  поступим, как и выше, и рассмотрим виртуальное перемещение

$$\delta y_1 = \delta \varphi_i X_i.$$

Тогда виртуальная работа сил инерции равна

$$-\frac{A\gamma}{g} \ddot{\Phi}_i \delta\Phi_i \int_0^l X_i^2 dx,$$

а виртуальная работа упругих сил равна

$$-\frac{\partial V}{\partial \Phi_i} \delta\Phi_i = -EJ \Phi_i \delta\Phi_i \int_0^l \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right) dx = -EJ \Phi_i \delta\Phi_i k_i^4 \int_0^l X_i^2 dx.$$

При определении виртуальной работы распределенной возмущающей нагрузки (п) поступим, как и выше (см. стр. 336), и представим эту нагрузку в виде ряда

$$-\frac{A\gamma}{g} \ddot{\xi}(t) \left( 1 - \frac{3x}{2l} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{l^3} \right) = -\frac{A\gamma}{g} \ddot{\xi}(t) \sum_{i=1, 2, 3, \dots} b_i X_i, \quad (r)$$

где коэффициенты  $b_i$  получаются из формулы

$$b_i = \frac{\int_0^l X_i \left( 1 - \frac{3x}{2l} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{l^3} \right) dx}{\int_0^l X_i^2 dx}.$$

Подставляя выражение (p) вместо  $X_i$  и выполняя интегрирование, получим:

$$\int_0^l X_i \left( 1 - \frac{3x}{2l} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{l^3} \right) dx = \frac{1}{k_i} (\sin k_i l + \operatorname{sh} k_i l),$$

$$\int_0^l X_i^2 dx = \frac{l}{2} (\operatorname{sh}^2 k_i l - \sin^2 k_i l).$$

Поэтому

$$b_i = \frac{2}{k_i l (\operatorname{sh} k_i l - \sin k_i l)}. \quad (s)$$

Пользуясь рядом (r), представим виртуальную работу возмущающей силы в виде:

$$-\frac{A\gamma}{g} \ddot{\xi}(t) b_i \delta\Phi_i \int_0^l X_i^2 dx.$$

Приравняв нулю полную виртуальную работу, получим уравнение

$$\ddot{\Phi}_i + \frac{EJgk_i^4}{A\gamma} \Phi_i = -b_i \ddot{\xi}(t),$$

общее решение которого будет:

$$\Phi_i = A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t - \frac{b_i}{p_i} \int_0^t \ddot{\xi}(t_1) \sin p_i (t - t_1) dt_1, \quad (t)$$

где, как и выше, использованы обозначения

$$\frac{EJg}{A\gamma} = a^2; \quad a k_i^2 = p_i.$$

Подставляя  $\Phi_i$  в ряд (o), получим колебания  $y_2$ , которые нужно наложить на прогибы (l), чтобы получить полное решение:

$$y = y_1 + y_2 = f(t) \left( 1 - \frac{3x}{2l} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{l^3} \right) + \sum \Phi_i X_i. \quad (u)$$

Постоянные  $A_i$  и  $B_i$  нужно в каждом частном случае определять из начальных условий. Полагая, что начальные прогибы и начальные скорости заданы функциями

$$(\eta)_{t=0} = u(x), \quad (\dot{\eta})_{t=0} = w(x),$$

и замечая, что из решения (t)

$$(\Phi_i)_{t=0} = A_i, \quad (\dot{\Phi}_i)_{t=0} = B_i p_i,$$

запишем начальные условия в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= (\eta_1)_{t=0} + (\eta_2)_{t=0} = \\ &= f(0) \left( 1 - \frac{3x}{2l} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{l^3} \right) + \sum_{i=1, 2, 3, \dots} A_i X_i, \\ w(x) &= (\dot{\eta}_1)_{t=0} + (\dot{\eta}_2)_{t=0} = \\ &= \dot{f}(0) \left( 1 - \frac{3x}{2l} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{l^3} \right) + \sum_{i=1, 2, 3, \dots} B_i p_i X_i. \end{aligned} \right\} \quad (v)$$

Принимая, например, что начальные смещения и начальные скорости равны нулю, и замечая из уравнения (r), что

$$1 - \frac{3x}{2l} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{l^3} = \sum_{i=1, 2, 3, \dots} b_i X_i,$$

находим:

$$A_i = -f(0) b_i; \quad B_i = -\frac{1}{p_i} \dot{f}(0) b_i.$$

Тогда общее решение (u) принимает вид:

$$y = f(t) \left( 1 - \frac{3x}{2l} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{l^3} \right) - f(0) \sum b_i X_i \cos p_i t - \\ - \dot{f}(0) \sum \frac{b_i}{p_i} X_i \sin p_i t - \sum \frac{b_i}{p_i} X_i \int_0^t \ddot{\xi}(t_1) \sin p_i (t - t_1) dt_1. \quad (w)$$



Это решение может быть несколько упрощено при помощи формулы интегрирования по частям, которая дает:

$$\int_0^t \ddot{\gamma}(t_1) \sin p_i(t-t_1) dt_1 = \\ = -\dot{\gamma}(0) \sin p_i t + p_i \dot{\gamma}(0) \cos p_i t - p_i^2 \int_0^t \gamma(t_1) \sin p_i(t-t_1) dt_1.$$

Подставляя в решение (w), наконец, получим:

$$y = i(t) \left( 1 - \frac{3x}{2l} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{l^3} \right) - \sum_{i=1, 2, 3, \dots} b_i X_i \dot{\gamma}(t) + \\ + \sum_{i=1, 2, 3, \dots} b_i X_i p_i \int_0^t \gamma(t_1) \sin p_i(t-t_1) dt_1.$$

**59. Влияние осевых сил на поперечные колебания.**—Если колеблющийся стержень подвергается действию осевых сжимающих сил  $S$  (рис. 216), то дифференциальное уравнение кривой изгиба при статической поперечной нагрузке имеет вид:

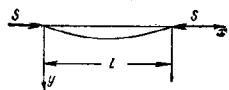


Рис. 216.

где  $M$ —изгибающий момент, вызванный поперечной нагрузкой. Дважды дифференцируя это уравнение, получим:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \omega - S \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (153)$$

Чтобы получить дифференциальное уравнение поперечных колебаний, подставим вместо  $\omega$  силы инерции:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{A\gamma}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

В случае призматического стержня получим:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{A\gamma}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (154)$$

Полагая, что стержень совершает колебания по одной из нормальных форм, возьмем решение уравнения (154) в виде:

$$y = X(A \cos pt + B \sin pt), \quad (a)$$

где  $X$ —функция  $x$ .

Подставляя (a) в (154), находим:

$$EJ \frac{d^4 X}{dx^4} + S \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{A\gamma}{g} p^2 X. \quad (b)$$

Решения этого уравнения, удовлетворяющие заданным условиям на концах, представляются нормальными функциями, соответствующими этим условиям. В простейшем случае концы стержня свободно оперты. Указанные условия удовлетворяются, если взять

$$X_i = \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad (c)$$

где  $i$ —целое число.

Подставляя это выражение в уравнение (b), получим соответствующую угловую частоту колебаний:

$$p_i = \frac{a i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{1 - \frac{S l^2}{i^2 E J \pi^2}}, \quad (d)$$

где, как и выше,  $a^2 = EJg/A\gamma$ .

Эта частота меньше, чем полученная выше (см. формулы (133)) для случая отсутствия осевой силы  $S$ . Значение частоты зависит от величины отношения  $S l^2/EJ\pi^2$ , представляющего отношение осевой силы к эйлеровой критической силе. Если это отношение стремится к единице, то частота нижней формы колебаний стремится к нулю и происходит потеря устойчивости.

Подставляя выражения (c) и (d) в решение (a), получим нормальную форму колебаний в виде синусоиды с  $i$  полуволнами. Суммируя такие колебания, получим общее решение для свободных колебаний сжатого призматического стержня со свободно опертыми концами:

$$y = \sum_{i=1, 2, 3, \dots} \sin \frac{i\pi x}{l} (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t).$$

Если заданы начальные прогибы и начальные скорости, то постоянные  $A_i$  и  $B_i$  вычисляются тем же способом, что и ранее (см. стр. 323).

Если вместо сжимающей силы на стержень действует растягивающая сила  $S$ , то частоты свободных колебаний увеличиваются и их значения получим, заменяя в выражении (d)  $S$  на  $-S$ :

$$p_i = \frac{a i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{1 + \frac{S l^2}{i^2 E J \pi^2}}. \quad (e)$$

Если весьма гибкий стержень (например, провод), подвержен сильно натяжению, то второй член под корнем в выражении (e) становится весьма большим по сравнению с единицей и для

небольших значений  $l^2$  можно принять

$$\rho_i \approx \frac{a i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{S l^2}{i^2 E J \pi^4}} = \frac{i \pi}{l} \sqrt{\frac{S g}{A \gamma}},$$

что представляет формулу для собственных частот натянутой струны.

При изучении вынужденных поперечных колебаний свободно опертого призматического стержня, растянутого осевыми силами  $S$ , поступим, как и выше (см. стр. 334) в случае отсутствия силы  $S$ , и положим, что колебания представляются рядом

$$y = \sum_{i=1, 2, 3, \dots} \varphi_i \sin \frac{i \pi x}{l}. \quad (f)$$

Взяв виртуальное перемещение

$$\delta y = \delta \varphi_i \sin \frac{i \pi x}{l}$$

и применив принцип виртуальных работ, получим для определения функций  $\varphi_i$  уравнение

$$\ddot{\varphi}_i + p_i^2 \varphi_i = \frac{2g}{A \gamma l} Q_i, \quad (g)$$

где  $p_i$  определяется формулой (e), а  $Q_i \delta \varphi_i$  представляет виртуальную работу возмущающей силы. Если, например, колебания вызваны гармонической силой  $P_0 \sin \omega t$ , приложенной на расстоянии  $x$  от левого конца  $x=0$ , то

$$Q_i = P_0 \sin \omega t \sin \frac{i \pi x}{l}.$$

Общее решение уравнения (g) возьмем в виде:

$$\varphi_i = A_i \sin p_i t + B_i \cos p_i t + \frac{2g}{A \gamma l p_i} \int_0^t (Q_i)_{t=t_1} \sin [p_i (t-t_1)] dt_1.$$

Отсюда можно определить  $\varphi_i$  для любого данного выражения  $Q_i$ . Подставляя  $\varphi_i$  в ряд (f), получим общее решение задачи. Таким образом, например, можно получить решение в случае, когда вдоль натянутой струны движется с постоянной скоростью поперечная сосредоточенная сила. Подобные условия приблизительно имеют место в случае колебаний электрического провода под действием токоснимателя электровоза. Исследования показывают<sup>\*)</sup>, что вблизи конца  $x=l$  могут появиться опасные колебания при скорости движения, приближающейся к значению  $v_{кр} = \sqrt{\frac{gS}{A \gamma}}$ . Чтобы исключить эти

\*) См. статью автора в сборнике, посвященном юбилею Теодора Кармана, 1941.

колебания, необходимо увеличивать натяжение провода, чтобы указанная критическая скорость оказалась намного выше наибольшей эксплуатационной скорости.

**60. Колебания балок на упругом основании.**— Допустим, что балка с шарнирно закрепленными концами вдоль всей своей длины лежит на сплошном упругом основании, жесткость которого определяется величиной  $k$ —коэффициента постели;  $k$ —погонная нагрузка, вызывающая осадку основания, равную единице. Если массой основания можно пренебречь, то колебания такой балки легко исследовать, применив тот же метод, что и выше.

В данном случае дифференциальное уравнение для статического изгиба имеет вид:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = \omega - ky,$$

где  $\omega$ —интенсивность внешней распределенной нагрузки. Заменяя ее силами инерции, получим дифференциальное уравнение поперечных колебаний:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + ky = -\frac{A \gamma}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (a)$$

Свободные колебания примем в виде

$$y = X (A \cos pt + B \sin pt).$$

Подставляя  $y$  в уравнение (a), найдем уравнение для функции  $X$ :

$$EJ \frac{d^4 X}{dx^4} + kX = \frac{A \gamma p^2}{g} X. \quad (b)$$

Рассматривая простейший случай балки со свободно опертыми концами, примем функцию

$$X_i = \sin \frac{i \pi x}{l},$$

которая удовлетворяет всем конечным условиям этого случая. Подставляя в уравнение (b), найдем:

$$p_i^2 = \frac{a^2 \pi^4}{l^4} (i^4 + \beta), \quad (c)$$

где

$$a^2 = \frac{EJg}{A \gamma}, \quad \beta = \frac{kl^4}{EJ \pi^4}. \quad (d)$$

Тогда общее уравнение свободных колебаний балки будет:

$$y = \sum_{i=1, 2, 3, \dots} X_i (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t).$$

Постоянные  $A_i$  и  $B_i$  можно вычислить в каждом частном случае по известным начальным прогибам и начальным скоростям прежним способом (см. стр. 323).

При изучении вынужденных колебаний балки примем прогибы в виде ряда

$$y = \sum_{i=1, 2, 3, \dots} \varphi_i \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad (e)$$

Дифференциальное уравнение для  $\varphi_i$  получается, как и выше (см. стр. 335), путем применения принципа виртуальных работ. При вычислении энергии деформации упругая энергия основания

$$\frac{1}{2} \int_0^l ky^2 dx$$

должна быть прибавлена к энергии изгиба балки. При этом единственном изменении в выводе получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi}_i + p_i^2 \varphi_i = \frac{2g}{A\gamma l} Q_i, \quad (f)$$

в котором выражения  $Q_i$  должны быть определены в каждом частном случае из условия, что  $Q_i \delta \varphi_i$  представляет виртуальную работу возмущающей силы.

Общее решение уравнения (f) будет:

$$\varphi_i = A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t + \frac{2g}{\gamma A} \frac{1}{p_i} \int_0^t Q_i \sin p_i (t - t_1) dt_1. \quad (g)$$

Первые два члена этого решения представляют свободные колебания балки, зависящие от начальных условий. Третий член представляет колебания, вызванные возмущающей силой.

Как видно из формулы (с), частоты свободных колебаний зависят не только от жесткости балки, но и от жесткости основания.

В качестве примера рассмотрим случай, когда к балке приложена на расстоянии  $s$  от левой опоры гармоническая сила  $P = P_0 \sin \omega t$  (рис. 207). В этом случае величина  $Q_i$  равна

$$Q_i = P_0 \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \omega t. \quad (h)$$

Подставляя в уравнение (g) и рассматривая только колебания, вызванные возмущающей силой, получим:

$$\varphi_i = \frac{2g}{\gamma A} P_0 \sin \frac{i\pi c}{l} \left\{ \frac{P}{\pi^2 a^2 (i^2 + \beta) - \omega^2 l^2} \sin \omega t - \frac{\omega}{l p_i (p_i^2 - \omega^2)} \sin p_i t \right\}.$$

Подстановка этого выражения в ряд (e) дает:

$$y = \frac{2g P_0 l^3}{\gamma A} \sum_{i=1}^{i=\infty} \left\{ \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \omega t}{\pi^2 a^2 (i^2 + \beta) - \omega^2 l^2} - \frac{\omega \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin p_i t}{l^2 p_i (p_i^2 - \omega^2)} \right\}. \quad (i)$$

Здесь первый член представляет вынужденные колебания, а второй член — свободные колебания балки. Полагая  $P = P_0 \sin \omega t$  и  $\omega = 0$ , получим прогиб балки под действием постоянной силы  $P$ :

$$y = \frac{2P l^3}{E J \pi^4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^4 + \beta}. \quad (155)$$

Принимая  $s = l/2$ , получим следующее выражение для прогиба от силы, приложенной посередине:

$$y = \frac{2P l^3}{E J \pi^4} \left( \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1 + \beta} - \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^4 + \beta} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{l}}{5^4 + \beta} - \dots \right). \quad (156)$$

Сравнивая (156) с выражением (1), стр. 337, можно заключить, что дополнительный член  $\beta$  в знаменателях представляет влияние упругого основания на прогибы балки.

Сравнивая вынужденные колебания

$$y = \frac{2g P_0 l^3 \sin \omega t}{\gamma A} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{\pi^2 a^2 (i^2 + \beta) - \omega^2 l^2} = \frac{2P l^3}{E J \pi^4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^4 + \beta - \frac{\omega^2 l^2}{\pi^2 a^2}}$$

со статическим прогибом (155), видим, что динамические прогибы можно получить из статической формулы; нужно только замесить  $\beta$  на  $\beta - \frac{\omega^2 l^2}{\pi^2 a^2}$ .

Используя обозначение (d), получим

$$\beta - \frac{\omega^2 l^2}{\pi^2 a^2} = \frac{k l^4}{E J \pi^4} - \frac{\omega^2 l^4 \gamma A}{\pi^4 E J g} = \frac{l^4}{E J \pi^4} \left( k - \frac{\gamma \omega^2 A}{g} \right).$$

Это значит, что динамические прогибы можно получить из статической формулы, заменив действительный коэффициент постели уменьшенной величиной  $k - \frac{\gamma \omega^2 A}{g}$  этого коэффициента. Это заключение остается справедливым также и в случае бесконечно длинной балки на упругом основании. Используя этот результат, можно определить прогибы рельса, вызванные гармонической нагрузкой \*).

\* См статью автора: Statical and Dynamical Stresses in Rails, Proc. Intern. Cong. Appl. Mech., Цюрих, стр. 407, 1926. [Пренебрежение массой упругого основания является наиболее уязвимым допущением вложенной теории.]

61. Метод Ритца \*). — Для нескольких случаев уже показано (см. § 4), что к определению частоты основной формы колебаний сложных систем может быть применен приближенный метод Рэлея. Для применения этого метода необходимо сделать некоторые предположения о форме кривой изгиба колеблющейся балки или вала. Тогда соответствующая частота найдется из рассмотрения энергии системы. Выбор определенной формы кривой изгиба в этом методе эквивалентен введению некоторых дополнительных связей, которые приводят заданную систему к системе с одной степенью свободы. Такие дополнительные связи могут только увеличить жесткость системы и несколько повысить получаемую по методу Рэлея частоту колебаний по сравнению с ее истинным значением. Лучшие приближения для основной частоты, а также частот высших форм колебаний можно получить методом Ритца, который является дальнейшим развитием метода Рэлея \*\*). При использовании этого метода нужно взять уравнение кривой изгиба, представляющее форму колебаний, с несколькими параметрами и величины последних выбрать так, чтобы обратиться в минимум частоту колебаний. Способ выбора формы кривой изгиба и порядок вычисления последовательных частот покажем на простом примере однородной струны (рис. 217). Положим, что  $S$  — сила натяжения струны,  $w$  — вес единицы длины струны,  $2l$  — длина струны. Если струна совершает колебания по одной из нормальных форм, то отклонения можно представить уравнением

$$y = X \cos pt, \quad (a)$$

где  $X$  — функция  $x$ , определяющая форму колеблющейся струны, и  $p$  — угловая частота колебаний. Полагая, что отклонения весьма малы, можно пренебречь изменениями силы натяжения  $S$  при колебаниях, а увеличение потенциальной энергии деформации вследствие отклонений получится путем умножения  $S$  на удлинение струны. Таким образом получим следующее выражение для потенциальной энергии (потенциальная энергия в положении равновесия принята равной

нулю \*)):

$$V = S \int_0^l \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Наибольшая потенциальная энергия достигается в том случае, когда колеблющаяся струна занимает крайнее положение. В этом положении  $\cos pt = 1$  и

$$V = S \int_0^l \left( \frac{dX}{dx} \right)^2 dx. \quad (b)$$

Кинетическая энергия колеблющейся струны равна

$$T = \frac{w}{g} \int_0^l (\dot{y})^2 dx.$$

Ее максимум достигается, когда струна находится в среднем положении, т. е. когда  $\cos pt = 0$ ; тогда

$$T = \frac{p^2 w}{g} \int_0^l X^2 dx. \quad (c)$$

Предполагая, что рассеяние энергии отсутствует, можно приравнять (b) и (c) и таким образом получить

$$p^2 = \frac{gS}{w} \frac{\int_0^l \left( \frac{dX}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^l X^2 dx}. \quad (d)$$

Зная различные формы колебаний и подставляя в (d) соответствующие выражения для  $X$ , можно легко вычислить частоты этих форм. В случае однородной струны кривые изгиба при колебаниях являются синусоидами, и для первых трех форм, показанных на рис. 217, имеем:

$$X_1 = a_1 \cos \frac{\pi x}{2l}, \quad X_2 = a_2 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad X_3 = a_3 \cos \frac{3\pi x}{2l}.$$

Подставляя в (d), получим:

$$p_1^2 = \frac{\pi^2}{4l^2} \frac{gS}{w}, \quad p_2^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \frac{gS}{w}, \quad p_3^2 = \frac{9}{4} \frac{\pi^2}{l^2} \frac{gS}{w}, \quad (e)$$

\*) См. Walter Ritz, *Gesammelte Werke*, Париж, стр. 265, 1911.  
\*\*) Рэлея использовал метод только для приближенного определения основной частоты колебаний сложных систем и сомневался (см. его статьи, *Phil. Mag.*, т. 47, стр. 566, 1899; т. 22, стр. 225, 1911) относительно применимости метода к исследованию высших форм колебаний.

\*) Как для симметричных, так и для антисимметричных форм колебаний достаточно рассмотреть одну половину струны.

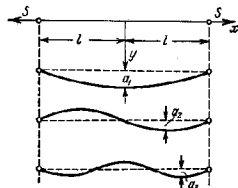


Рис. 217.

и соответствующие частоты равны:

$$f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{gS}{w}}, \quad f_2 = \frac{2}{4l} \sqrt{\frac{gS}{w}}, \quad f_3 = \frac{3}{4l} \sqrt{\frac{gS}{w}}. \quad (1)$$

Применим теперь метод Ритца к определению основной частоты  $f_1$  из выражения (d). Первый шаг при применении этого метода состоит в выборе подходящего выражения для кривой изгиба. Пусть  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ , ... — ряд функций, удовлетворяющих условиям на концах и подходящих для представления функции  $X$ . Тогда, принимая

$$X = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + a_3\varphi_3(x) + \dots, \quad (g)$$

получим кривую изгиба колеблющейся струны.

Мы знаем, что, беря в выражении (g) конечное число членов, мы налагаем определенные ограничения на возможные формы кривой изгиба струны, и поэтому вычисленная из (d) частота будет выше действительного значения частоты. Чтобы получить возможно более хорошее приближение, Ритц предложил выбирать коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, \dots$  в выражении (g) так, чтобы обратить выражение (d) в минимум. Таким образом получается система уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \frac{\int_0^l \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 dx}{\int_0^l X^2 dx} = 0. \quad (h)$$

Выполняя указанное дифференцирование, имеем:

$$\int_0^l X^2 dx \frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^l \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 dx - \int_0^l \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 dx \frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^l X^2 dx = 0, \quad (i)$$

или, замечая, что из (d)

$$\int_0^l \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 dx = \frac{p^2 w}{gS} \int_0^l X^2 dx,$$

получаем:

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^l \left\{ \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 - \frac{p^2 w}{gS} X^2 \right\} dx = 0. \quad (j)$$

Подставляя вместо  $X$  выражение (g) и выполняя указанные выкладки, получим систему уравнений, однородных и линейных относительно  $a_1, a_2, a_3, \dots$ ; число уравнений равно числу коэффициентов  $a_1, a_2, a_3, \dots$  в выражении (g). Такая система уравнений может дать

для  $a_1, a_2, a_3, \dots$  различные от нуля решения лишь при условии, что определитель этих уравнений равен нулю. Это условие дает частотное уравнение, из которого можно вычислить частоты различных форм колебаний.

Рассмотрим формы колебаний натянутой струны, симметричные относительно середины. Легко видеть, что в данном случае подходящей является функция  $l^2 - x^2$ , представляющая симметричную параболу, удовлетворяющую условиям на концах ( $y|_{x=\pm l} = 0$ ). Умножая эту функцию на  $x^2, x^4, \dots$ , получим ряд симметричных кривых, удовлетворяющих условиям на концах. Таким образом, мы приходим к следующему выражению для кривой изгиба колеблющейся струны:

$$X = a_1(l^2 - x^2) + a_2 x^2(l^2 - x^2) + a_3 x^4(l^2 - x^2) + \dots \quad (k)$$

Чтобы показать, насколько быстро возрастает точность наших вычислений с увеличением числа членов в выражении (k), начнем с одного члена и примем

$$X_1 = a_1(l^2 - x^2).$$

Тогда

$$\int_0^l (X_1)^2 dx = \frac{8}{15} a_1^2 l^6, \quad \int_0^l \left(\frac{dX_1}{dx}\right)^2 dx = \frac{4}{3} a_1^2 l^4.$$

Подставляя в (d), получим:

$$p_1^2 = \frac{5}{2l^2} \frac{gS}{w}.$$

Из сравнения этого результата с точным решением (e) видно, что вместо  $\pi^2/4$  получилось  $5/2$  и ошибка в значении частоты составляет всего 0,66%.

Нужно заметить, что, беря только один член в выражении (k), мы полностью определяли форму кривой и система оказалась приведенной к системе с одной степенью свободы, как и в приближенном методе Рэлея.

Чтобы получить следующее приближение, возьмем в выражении (k) два члена. Тогда мы будем иметь два параметра  $a_1$  и  $a_2$ , и, изменяя отношение между этими величинами, можем в известных пределах менять форму кривой. Наилучшее приближение получится, когда это отношение таково, что выражение (d) становится минимальным; это требует выполнения условий (j).

Взяв в качестве второго приближения

$$X_2 = a_1(l^2 - x^2) + a_2 x^2(l^2 - x^2),$$

получим:

$$\int_0^l X_2^2 dx = \frac{8}{15} a_1^2 l^5 + \frac{16}{105} a_1 a_2 l^7 + \frac{8}{315} a_2^2 l^9,$$

$$\int_0^l \left( \frac{dX_2}{dx} \right)^2 dx = \frac{4}{3} a_1^2 l^3 + \frac{8}{15} a_1 a_2 l^5 + \frac{44}{105} a_2^2 l^7.$$

Подставляя в уравнение (j) и беря производные по  $a_1$  и  $a_2$ , получим:

$$a_1 \left( 1 - \frac{2}{5} k^2 l^2 \right) + a_2 l^2 \left( \frac{1}{5} - \frac{2}{35} k^2 l^2 \right) = 0,$$

$$a_1 \left( 1 - \frac{2}{7} k^2 l^2 \right) + a_2 l^2 \left( \frac{11}{7} - \frac{2}{21} k^2 l^2 \right) = 0, \quad (1)$$

где

$$k^2 = \frac{p^2 \omega}{gS}. \quad (m)$$

Определитель уравнений (1) обращается в нуль, когда

$$k^4 l^4 - 28k^2 l^2 + 63 = 0.$$

Два корня этого уравнения равны

$$k_1^2 l^2 = 2,46744, \quad k_2^2 l^2 = 25,6.$$

Вспомнивая, что рассматриваются только формы колебаний, симметричные относительно середины, и используя выражение (m), получим для первой и третьей форм колебаний:

$$p_1^2 = \frac{2,46744 gS}{l^2 \omega}, \quad p_3^2 = \frac{25,6 gS}{l^2 \omega}.$$

Сравнивая их с точными решениями (e)

$$p_1^2 = \frac{\pi^2 gS}{4l^2 \omega} = \frac{2,467401 gS}{l^2 \omega}, \quad p_3^2 = \frac{9 \pi^2 gS}{4 l^2 \omega} = \frac{22,207 gS}{l^2 \omega},$$

можно заключить, что точность, с которой получается основная частота, весьма высока (ошибка меньше 0,001%). Ошибка в значении частоты третьей формы колебаний около 6,5%. Беря три члена в выражении (k), получим частоту третьей формы колебаний с ошибкой, меньшей 0,5%.

Как видно, применяя метод Ритца и беря достаточное число членов в выражении кривой изгиба, можно получить с хорошей точностью не только основную частоту, но и высшие частоты. В следующем параграфе показано применение этого метода к исследованию балок с переменным поперечным сечением.

\* См. упомянутую на стр. 368 работу Ритца.

**62. Колебания балок переменного поперечного сечения.** — Обшире замечания. В предшествующем изложении рассмотрены различные задачи, относящиеся к колебаниям призматических стержней. Существуют, однако, некоторые технические задачи, при рассмотрении которых необходимо обратиться к теории колебаний стержня переменного поперечного сечения (колебания турбинных лопаток, судовых корпусов, балок переменной высоты и т. д.). Дифференциальное уравнение колебаний такого стержня было дано раньше (см. стр. 315) и имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \frac{A\gamma}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (157)$$

где  $J$  и  $A$  — некие функции  $x$ . Представление нормальных функций через известные функции возможно лишь в частных случаях, которые будут рассмотрены позднее. Поэтому при решении таких задач для определения собственных частот колебаний применяются приближенные способы, как метод Рэлея — Ритца или метод численного интегрирования. Используя метод Ритца, возьмем прогиб стержня при колебаниях в виде

$$y = X \cos pt, \quad (a)$$

где  $X$  определяет форму колебаний. Таким образом, получим следующие выражения для наибольшей потенциальной и наибольшей кинетической энергии:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (b)$$

$$T = \frac{p^2}{2g} \int_0^l A\gamma X^2 dx, \quad (c)$$

откуда

$$p^2 = \frac{EJ}{\gamma} \frac{\int_0^l J \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l A X^2 dx}. \quad (d)$$

Точному решению для частоты основной формы колебаний соответствует минимум выражения (d). Чтобы получить приближенное решение, поступим, как в предыдущем параграфе, и примем форму кривой изгиба в виде ряда

$$X = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + a_3 \varphi_3(x) + \dots, \quad (e)$$

где каждая из функций  $\varphi$  удовлетворяет условиям на концах стержня. Подставляя ряд (е) в выражение (д), получим условие минимума в виде

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \frac{\int_0^l J \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l AX^2 dx} = 0, \quad (f)$$

или

$$\int_0^l AX^2 dx \frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^l J \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l J \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx \frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^l AX^2 dx = 0. \quad (g)$$

Из (g) и (д) получим:

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^l \left[ J \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 - \frac{\rho^2 A \gamma}{Eg} X^2 \right] dx = 0. \quad (158)$$

Таким образом, задача сводится к определению таких значений постоянных  $a_1, a_2, a_3, \dots$  в выражении (е), которые обращают в минимум интеграл

$$S = \int_0^l \left[ J \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 - \frac{\rho^2 A \gamma}{Eg} X^2 \right] dx. \quad (h)$$

Уравнения (158) однородны и линейны относительно  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , и их число равно числу членов в выражении (е). Приравняв нулю определитель этих уравнений, получим *частотное уравнение*, из которого можно вычислить частоты различных форм колебаний. Рассмотрим теперь несколько частных случаев.

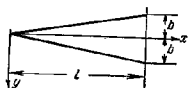


Рис. 218.

Колесания клина. Для клина единичной толщины с одним свободным и другим заделанным концом (рис. 218) имеем:

$$A = \frac{2bx}{l},$$

$$J = \frac{1}{12} \left( \frac{2bx}{l} \right)^3,$$

где  $l$  — длина консоли и  $2b$  — высота сечения у заделанного конца. Концевые условия:

$$1) \left( EJ \frac{d^2 X}{dx^2} \right)_{x=0} = 0, \quad 2) \frac{d}{dx} \left( EJ \frac{d^2 X}{dx^2} \right)_{x=0} = 0,$$

$$3) (X)_{x=l} = 0, \quad 4) \left( \frac{dX}{dx} \right)_{x=l} = 0.$$

Чтобы удовлетворить условиям на концах, возьмем кривую изгиба в виде ряда

$$X = a_1 \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2 + a_2 \frac{x}{l} \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2 + a_3 \frac{x^2}{l^2} \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2 + \dots \quad (i)$$

Легко видеть, что каждый член этого ряда и его производной по  $x$  обращается в нуль при  $x=l$ . Поэтому будут удовлетворены приведенные выше условия на концах 3) и 4). Условия 1) и 2) также удовлетворяются, так как  $J$  и  $dJ/dx$  равны нулю при  $x=0$ .

Примем в качестве первого приближения

$$X_1 = a_1 \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2;$$

подставив в выражение (д), получим:

$$\rho^2 = 10 \frac{Eg}{\gamma} \frac{b^3}{l^4}, \quad f = \frac{\rho}{2\pi} = \frac{5,48}{2\pi} \frac{b}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3\gamma}}. \quad (j)$$

Чтобы получить лучшее приближение, возьмем два члена ряда (i); тогда

$$X_2 = a_1 \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2 + a_2 \frac{x}{l} \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2.$$

Подставляя в (h), получим:

$$S_2 = \frac{2}{3} \frac{b^3}{l^3} \left[ (a_1 - 2a_2)^2 + \frac{24}{5} a_2 (a_1 - 2a_2) + 6a_2^2 \right] - \frac{2b\gamma l \rho^2}{Eg} \left[ \frac{a_1^2}{30} + \frac{2a_1 a_2}{105} + \frac{a_2^2}{280} \right].$$

Теперь из условий

$$\frac{\partial S_2}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial a_2} = 0$$

получим два следующих линейных уравнения:

$$\left( \frac{Eg}{\gamma} \frac{b^3}{3l^4} - \frac{\rho^2}{30} \right) a_1 + \left( \frac{2}{5} \frac{Eg}{\gamma} \frac{b^3}{3l^4} - \frac{\rho^2}{105} \right) a_2 = 0,$$

$$\left( \frac{2}{5} \frac{Eg}{\gamma} \frac{b^3}{3l^4} - \frac{\rho^2}{105} \right) a_1 + \left( \frac{2}{5} \frac{Eg}{\gamma} \frac{b^3}{3l^4} - \frac{\rho^2}{280} \right) a_2 = 0.$$

Приравняв нулю определитель этих уравнений, получим:

$$\left( \frac{Eg}{\gamma} \frac{b^3}{3l^4} - \frac{\rho^2}{30} \right) \left( \frac{2}{5} \frac{Eg}{\gamma} \frac{b^3}{3l^4} - \frac{\rho^2}{280} \right) - \left( \frac{2}{5} \frac{Eg}{\gamma} \frac{b^3}{3l^4} - \frac{\rho^2}{105} \right)^2 = 0. \quad (k)$$

Из этого уравнения можно определить  $\rho^2$ . Меньший из двух корней уравнения:

$$f = \frac{\rho}{2\pi} = \frac{5,319}{2\pi} \frac{b}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3\gamma}}. \quad (l)$$

Интересно заметить, что для рассматриваемого случая имеется точное решение, в котором нормальные функции выражены через функции Бесселя\*). Это точное решение дает:

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{5,315}{2\pi} \frac{b}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3\gamma}}. \quad (159)$$

Сравнивая (j) и (l), заключаем, что точность первого приближения составляет около 3%, ошибка второго приближения менее 0,1%, а дальнейшее увеличение числа членов в выражении (e) необходимо лишь в случае, когда нужно определить частоты высших форм колебаний.

Для сравнения заметим, что для призматической консоли, имеющей то же сечение, что и основание клина, получается следующий результат (см. стр. 33):

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{a1,875^2}{2\pi l^2} = \frac{3,515b}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3\gamma}}.$$

Изложенный метод можно применять также в тех случаях, когда  $A$  и  $J$  не являются непрерывными функциями  $x$ . Эти функции могут иметь несколько точек разрыва и могут представляться различными аналитическими выражениями на различных участках длины  $l$ . В этих случаях интеграл (h) должен вычисляться по отдельным участкам, в каждом из которых  $J$  и  $A$  могут быть представлены непрерывными функциями\*\*. Этот метод также может быть применен, если функции  $A$  и  $J$  определяются графиком или таблицей; при этом необходимо применить какой-либо из приближенных способов вычисления интегралов (h).

Вычисление можно упростить, применяя вторую форму метода Ритца\*\*\*), где вместо определения энергии деформации и кинетиче-

\*) См. G. R. Kirchhoff, Monatsberichte, Берлин, стр. 815, 1879 или Gesammelte Abhandlungen, Лейпциг, стр. 339, 1882; см. также J. Goddard, K. Pearson, A History of the Theory of Elasticity, Кембридж, т. 2, ч. 2, стр. 92.

\*\*) Примеры такого рода рассмотрены в работе: К. А. Трапнел, Ing.-Arch., т. 1, стр. 499, 1930.

\*\*\*) Такая форма была использована в § 27. Этот метод иногда приписывают Галеркину, но впервые он был введен Ритцем; см. его упомянутую книгу, стр. 228.

[В указанном месте (и ранее, на стр. 200) у Ритца встречается запись типа уравнений метода Бубнова—Галеркина в связи с задачей о колебаниях пластинок. Однако эта запись получена в результате формальных преобразований при минимизации известного функционала для энергии в частной задаче изгиба пластинки, тем самым в изложении Ритца эти уравнения не носят характера самостоятельного аппарата. В то же время предложенный И. Г. Бубновым и Б. Г. Галеркиным метод по своей природе не обязательно связан с какой-либо вариационной задачей и остается справедливым в общем случае, когда метод Ритца неприменим. См. С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, ГТИ, 1957, стр. 376.]

ской энергии колеблющейся системы непосредственно используется дифференциальное уравнение колебаний. Возьмем, например, известный случай колебаний консоли постоянного поперечного сечения, когда дифференциальное уравнение, определяющее нормальные функции, имеет вид (см. уравнение (115)):

$$EJ \frac{d^4 X}{dx^4} - \frac{A\gamma}{g} p^2 X = 0 \quad (m)$$

при условиях на концах:

$$(X)_{x=0} = \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{d^2 X}{dx^2}\right)_{x=l} = \left(\frac{d^3 X}{dx^3}\right)_{x=l} = 0. \quad (n)$$

Применяя метод Ритца, вновь примем  $X$  в виде ряда (e). Так как этот ряд не является точным решением, то уравнение (m) не будет удовлетворено, и после подстановки (e) в левую часть уравнения получится величина, отличная от нуля и представляющая некоторую распределенную по длине консоли нагрузку  $q$ . Теперь определим коэффициенты  $a_1, a_2, \dots$  ряда (e) из условия, что работа нагрузки  $q$  на виртуальных перемещениях

$$\delta a_i \varphi_i(x)$$

должна равняться нулю. Таким образом, получим уравнения вида:

$$\int_0^l \left( EJ \frac{d^4 X}{dx^4} - \frac{A\gamma}{g} p^2 X \right) \varphi_i(x) dx = 0. \quad (o)$$

После подстановки ряда (e) и интегрирования получим систему линейных уравнений для  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , и, как выше, частотное уравнение получим путем приравнивания нулю определителя этих уравнений. Удерживая только два члена ряда (c), можно принять в нашем случае

$$X = a_1 (6l^2 x^2 - 4lx^3 + x^4) + a_2 (20l^3 x^2 - 10l^2 x^3 + x^5). \quad (p)$$

Выражения, стоящие в скобках, представляют с точностью до постоянного множителя уравнение изогнутой оси консоли соответственно под равномерно распределенной нагрузкой и под нагрузкой, изменяющейся по закону треугольника; оба выражения удовлетворяют конечным условиям (n). Подставляя выражение (p) в уравнение (o) и выполняя интегрирование, получим:

$$\left( \frac{104}{45} \frac{p l^4}{a^2} - \frac{144}{5} \right) a_1 + \left( \frac{2644}{315} \frac{p l^4}{a^2} - 104 \right) a_2 = 0,$$

$$\left( \frac{2644}{315} \frac{p l^4}{a^2} - 104 \right) a_1 + \left( \frac{21128}{693} \frac{p l^4}{a^2} - \frac{2640}{7} \right) a_2 = 0.$$



Приравняв нулю определитель этих двух уравнений, получим:

$$p_1^2 = 12,37 \frac{a}{l^2} = \frac{12,37}{l^2} \sqrt{\frac{EJg}{A\gamma}}, \quad p_2^2 = \frac{518,8}{l^2} \sqrt{\frac{EJg}{A\gamma}}.$$

Значение  $p_1$  получается с высокой точностью. Ошибка в величине  $p_2$ , как можно видеть из стр. 328, составляет около 3%.

По результатам этого простого примера можно оценить значительную простоту второй формы метода Ритца, не требующей определения энергии деформации, выполненного в наших предыдущих примерах.

**Колебания конического стержня.** Задача о колебаниях конического стержня со свободной вершиной и закрепленным основанием впервые рассмотрена Кирхгофом\*). Для основной формы он получил в этом случае

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{4,359}{2\pi} \frac{r}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}, \quad (160)$$

где  $r$  — радиус основания и  $l$  — длина стержня.

Для сравнения здесь нужно вспомнить, что цилиндрический стержень той же длины и той же площади основания имеет частоту

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{a}{2\pi} \frac{1,875^2}{l^2} = \frac{1,758}{2\pi} \frac{r}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}.$$

Таким образом, частоты основных форм колебаний конического и цилиндрического стержней находятся в отношении 4,359:1,758. Частоты высших форм колебаний конического стержня можно вычислить по формуле

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{a}{2\pi} \frac{r}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}, \quad (161)$$

в которой  $a$  имеет следующие значения\*\*):

| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | $\alpha_6$ |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 4,359      | 10,573     | 19,225     | 30,339     | 43,921     | 59,956     |

Другие случаи колебаний консоли переменного поперечного сечения. В общем случае частота поперечных колебаний консоли

может быть выражена формулой

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{l}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}, \quad (162)$$

в которой  $i$  — радиус инерции закрепленного сечения,  $l$  — длина консоли,  $\alpha$  — постоянная, зависящая от формы стержня и формы колебаний.

Приведем значения постоянной  $\alpha$  для некоторых частных случаев, имеющих практическую ценность.

1. Если площадь и момент инерции поперечного сечения можно выразить в виде:

$$A = ax^m, \quad J = bx^n, \quad (163)$$

где  $x$  измеряется от свободного конца, то  $l$  остается постоянным вдоль всей консоли и постоянная  $\alpha$  в формуле (162) для основной формы колебаний может быть представлена с достаточной точностью формулой\*)

$$\alpha = 3,47(1 + 1,05m).$$

2. Если площадь и момент инерции поперечного сечения можно выразить в виде:

$$A = a(1 - c \frac{x}{l}), \quad J = b(1 - c \frac{x}{l}), \quad (164)$$

где  $x$  измеряется от закрепленного конца, то  $l$  остается постоянным вдоль всего стержня и величина  $\alpha$  определяется таблицей\*\*)

|          |       |       |       |       |      |
|----------|-------|-------|-------|-------|------|
| $c$      | 0     | 0,4   | 0,6   | 0,8   | 1,0  |
| $\alpha$ | 3,515 | 4,098 | 4,585 | 5,398 | 7,16 |

**Стержень переменного поперечного сечения со свободными концами.** Рассмотрим случай колеблющегося в поперечном направлении стержня со свободными концами, состоящего из двух одинаковых частей, соединенных толстыми концами (рис. 219), причем левая половина образована вращением кривой

$$y = ax^n \quad (g)$$

вокруг оси  $x$ . В данном случае для определенных значений  $n$ \*\*\*) получено точное решение в виде функций Бесселя, и частоты основной формы колебаний можно представить в виде:

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{\alpha r}{4\pi l^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}, \quad (165)$$

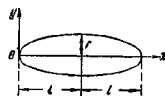


Рис. 219.

\*) См. его работу, указанную в сноске на стр. 376.

\*\*) См. Dorothy Winch, Proc. Roy. Soc. (Лондон), т. 101, стр. 493, 1922.

\*) См. Akimasa Ono, J. Soc. Mech. Engrs. (Токио), т. 27, стр. 467, 1924.

\*\*) См. Akimasa Ono, J. Soc. Mech. Engrs. (Токио), т. 28, стр. 429, 1925.

\*\*\*) См. J. W. Nicholson, Proc. Roy. Soc. (Лондон), т. 93, стр. 506, 1917.

где  $r$  — радиус наибольшего поперечного сечения,  $2l$  — длина стержня  $\alpha$  — постоянная, зависящая от формы кривой ( $q$ ) и определяемая значениями, данными в таблице:

| $n$      | 0     | 0,25  | 0,50  | 0,75  | 1,00   |
|----------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $\alpha$ | 5,593 | 6,957 | 8,203 | 9,300 | 10,173 |

Применение интегральных уравнений к исследованию поперечных колебаний стержней с переменным поперечным сечением было дан Шверином \*).

**63. Колебания судовых корпусов.** — В качестве другого примера приложения теории колебаний стержней переменного сечения рассмотрим задачу о колебаниях судового корпуса \*\*). В данном случае возмущающая сила обычно возникает от неуравновешенности двигателя или действия гребного винта \*\*\*) и, если частота возмущающей силы совпадает с частотой одной из нормальных форм колебаний корпуса, то могут возникнуть большие колебания. Если принять корпус судна за балку переменного поперечного сечения свободными концами и использовать метод Ритца (см. § 61), то уравнения (158) всегда можно с достаточной степенью точности определить частоты различных форм колебаний.

Чтобы упростить задачу, допустим, что балка симметрична относительно среднего поперечного сечения и что площади и моменты инерции поперечных сечений изменяются, следуя зависимостям (начало координат в среднем сечении):

$$A = A_0(1 - cx^2), \quad J = J_0(1 - bx^2),$$

где  $A_0$  и  $J_0$  обозначают площадь и момент инерции среднего поперечного сечения соответственно. Разумеется, что  $x$  может изменяться в пределах от  $x = -l$  до  $x = +l$ , где  $2l$  — длина корпуса.

Примем далее, что прогибы при колебаниях можно представить в виде

$$y = X \cos pt,$$

\*) См. E. Schwerin, Über Transversalschwingungen von Stäben v. änderlichen Querschnitts, Z. techn. Phys., т. 8, стр. 264, 1927.

\*\*) Обзор литературы, относящейся к колебаниям судовых корпусов дан П. Ф. Палквичем («Прикладная математика и механика», № стр. 97, 1933).

\*\*\*) Колебания гребных винтов рассмотрены в работе Льюиса, пред. вложенной Обществу судостроителей и морских инженеров в ноябре 1935

где  $X$  принимается в форме ряда

$$X = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + a_3 \varphi_3(x) + \dots \quad (b)$$

В качестве  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  мы должны выбрать функции, удовлетворяющие конечным условиям. Тогда отношения между коэффициентами  $a_1, a_2, \dots$  и частоты получим из уравнений (158).

Удовлетворительное приближение для частоты основной формы колебаний можно получить \*), принимая в качестве  $\varphi(x)$  нормальные функции призматического стержня со свободными концами:

$$X_i = C_i (\cos k_i x \operatorname{ch} k_i l + \operatorname{ch} k_i x \cos k_i l).$$

Для упрощения вычислений произвольную постоянную возьмем в виде:

$$C_i = \frac{2}{\sqrt{\cos^2 k_i l + \operatorname{ch}^2 k_i l}}.$$

Нормальная функция, соответствующая первому корню  $k_1 l = 0$ , представляется в виде прямой, параллельной оси  $x$ , а соответствующее ей движение представляет смещение стержня как твердого тела в направлении оси  $Y$ . Эта постоянная будет принята равной  $1/\sqrt{2}$ .

Принимая полученные таким образом нормальные функции за подходящие функции  $\varphi(x)$  в ряде (b), имеем:

$$X = a_1 \frac{1}{\sqrt{2}} + a_2 \frac{\cos k_2 x \operatorname{ch} k_2 l + \operatorname{ch} k_2 x \cos k_2 l}{\sqrt{\cos^2 k_2 l + \operatorname{ch}^2 k_2 l}} + \dots \quad (c)$$

Подставляя это в уравнение (158), получим:

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \left\{ J_0 \int_{-l}^{+l} (1 - bx^2) \sum_{i=1, 2, 3, \dots} \sum_{j=1, 2, 3, \dots} a_i a_j \varphi_i' \varphi_j' dx - \frac{p^2 A_0 \gamma}{Eg} \int_{-l}^{+l} (1 - cx^2) \sum_{i=1, 2, 3, \dots} \sum_{j=1, 2, 3, \dots} a_i a_j \varphi_i \varphi_j dx \right\} = 0; \quad (d)$$

вводя обозначения

$$\int_{-l}^{+l} (1 - bx^2) \varphi_i' \varphi_j' dx = \alpha_{ij}, \quad \int_{-l}^{+l} (1 - cx^2) \varphi_i \varphi_j dx = \beta_{ij}, \quad (e)$$

находим из (d):

$$\sum_{i=1, 2, 3, \dots} a_i (\alpha_{in} - \lambda \beta_{in}) = 0, \quad (f)$$

\*) См. книгу автора «Теория упругости», СПб, т. 2, стр. 229, 1916, а также работу: N. W. Akimoff, Trans. Soc. Nav. Architects and Marine Engrs., т. 26, 1918. Дальнейшее исследование вопроса содержится в статье Тейлора (J. Lockwood Taylor, Trans. North-East Coast Inst. Engrs. Shipbuild., 1928, Trans. Inst. Nav. Architects and Marine Engrs., 1930).

где

$$\lambda = \frac{\rho^2 A_0 \gamma}{E J_0 g}. \quad (g)$$

Для определения основной формы колебаний практически достаточны два члена ряда (с). В этом случае уравнения (f) принимаю вид:

$$\begin{cases} a_1(\alpha_{11} - \lambda\beta_{11}) + a_2(\alpha_{21} - \lambda\beta_{21}) = 0, \\ a_1(\alpha_{12} - \lambda\beta_{12}) + a_2(\alpha_{22} - \lambda\beta_{22}) = 0. \end{cases} \quad (h)$$

В нашем случае

$$\Phi_1^* = 0, \quad \Phi_2^* = k_2^2 \frac{-\cos k_2 x \operatorname{ch} k_2 l + \operatorname{ch} k_2 x \cos k_2 l}{V \cos^2 k_2 l + \operatorname{ch}^2 k_2 l}.$$

Подставляя эти выражения в формулы (e) и выполняя интегрирование, получим:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 0, & \alpha_{12} &= 0, & \alpha_{21} &= 0, \\ \alpha_{22} &= \int_{-l}^{+l} (1 - bx^2)(\Phi_2^*)^2 dx = \frac{31,28}{l^3} (1 - 0,087bl^3), \\ \beta_{11} &= l(1 - 0,333cl^2), & \beta_{12} &= \beta_{21} = 0,297cl^2, \\ \beta_{22} &= l(1 - 0,481cl^2). \end{aligned} \quad (i)$$

После подстановки этих значений в уравнения (h) и приравняв нулю определитель этих уравнений, получим частотное уравнение

$$\lambda^2 \left( 1 - \frac{\beta_{12}^2}{\beta_{11}\beta_{22}} \right) - \lambda \frac{\alpha_{22}}{\beta_{22}} = 0. \quad (k)$$

Первый корень этого уравнения ( $\lambda = 0$ ) соответствует перемещению стержня как твердого тела. Второй корень

$$\lambda = \frac{\alpha_{22}}{\beta_{22}} \frac{1}{1 - \frac{\beta_{12}^2}{\beta_{11}\beta_{22}}} \quad (l)$$

определяет частоту основной формы колебаний. Эта частота равна

$$f_1 = \frac{\rho}{2\pi} = \frac{V\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{E J_0 g}{A_0 \gamma}}. \quad (m)$$

*Численный пример.* Пусть  $2l = 100$  м,  $J_0 = 20$  м<sup>4</sup>,  $A_0 \gamma = 7 \cdot 9,81$  Т/м\*,  $b = c = 0,0003$  м<sup>-3</sup>. Тогда вес корабля

$$Q = 2A_0 \gamma \int_0^l (1 - cx^2) dx = 5150 \text{ Т}.$$

Из выражений (i) и (j) получим:

$$\alpha_{22} = 23,40 \cdot 10^{-6}, \quad \beta_{11} = 37,50, \quad \beta_{12} = 11,14, \quad \beta_{22} = 31,95;$$

тогда по формуле (l) будет:

$$\lambda = 0,817 \cdot 10^{-6}.$$

Принимая  $E = 2 \cdot 10^7$  Т/м<sup>2</sup>, получим:

$$\rho = \sqrt{\frac{20}{7} \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 0,817 \cdot 10^{-6}} = 21,6.$$

Число колебаний в минуту равно

$$N = \frac{60\rho}{2\pi} = 206.$$

Принятые выше функции  $\Phi(x)$  можно также использовать в случаях, когда зависимости, определяющие изменения  $J$  и  $A$ , отличаются от зависимостей (a) и когда  $J$  и  $A$  заданы в графической форме. В каждом случае необходимо лишь вычислить интегралы (e), что всегда возможно с помощью того или иного приближенного способа.

**64. Численные методы определения частот поперечных колебаний.** — *Общие замечания.* Мы видели, что определение собственных частот поперечных колебаний стержней с переменным поперечным сечением требует решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \frac{A\gamma}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (a)$$

Принимая решение в виде

$$y = X \cos pt$$

и подставляя его в уравнение (a), получим дифференциальное уравнение для определения функции  $X$ :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 X}{dx^2} \right) = \frac{A\gamma p^2}{g} X. \quad (b)$$

Это уравнение совпадает с дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{A\gamma p^2}{g} y \quad (c)$$

\*) Чтобы учесть пульсационное движение воды вследствие колебаний, нужно прибавить к массе корабля некоторую массу воды. Этот вопрос рассмотрен в статьях: F. E. Lewis, Proc. Soc. Nav. Architects and Marine Engrs., ноябрь 1923; E. B. Moulin, A. D. Brown, Proc. Cambridge Phil. Soc., т. 24, стр. 400 и 531, 1928; A. D. Brown, E. B. Moulin, A. J. Perkins, Proc. Cambridge Phil. Soc., т. 26, стр. 258, 1930 и J. J. Koch, Ing.-Arch., т. 4, стр. 103, 1933.

для статического изгиба балки переменного поперечного сечения под действием распределенной нагрузки интенсивностью  $\frac{A \rho p^2 y}{g}$ . Так как точное решение уравнения (с) в общем случае представляло затруднения, предложены различные приближенные способы решения задачи. Эти предложения связаны главным образом с исследованием поперечных колебаний судовых корпусов, а приближенные решения получены при помощи численного интегрирования. Мы можем принять решение уравнения (с) в виде:

$$y = Cf(x) + C_1 f_1(x), \quad (4)$$

где функции  $f(x)$  и  $f_1(x)$  выбраны так, чтобы удовлетворить условиям на одном конце, например

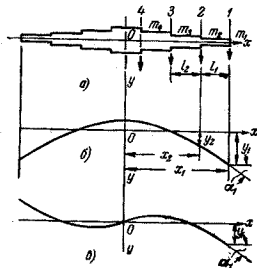


Рис. 220.

Балка со свободными концами

В качестве первого примера рассмотрим случай симметричной балки со свободными концами, которая для численного выкладки заменяется ступенчатой балкой (рис. 220, а). Чтобы получить удовлетворительные результаты, численные результаты нужно брать

по крайней мере, вдвое больше, чем число собственных частот, подлежащих определению. Для этого непрерывно распределенные массы нужно заменить сосредоточенными в отдельных точках массами  $m_1, m_2, \dots$ ; тогда

соответствующие силы инерции будут  $m_1 p^2 y_1, m_2 p^2 y_2, \dots$ . Начиная с рассмотрения симметричных форм колебаний (рис. 220, б), обозначим через  $x_1, x_2, \dots$  расстояния масс  $m_1, m_2, \dots$  от оси симметрии  $y$  и получим для любого поперечного сечения  $n$  следующие значения поперечной силы  $Q_n$  и изгибающего момента  $M_n$ :

$$Q_n = \sum_{i=1}^n m_i p^2 y_i,$$

$$M_n = \sum_{i=1}^{n-1} m_i p^2 y_i (x_i - x_n). \quad (e)$$

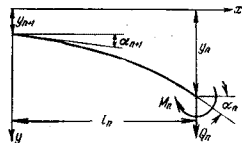


Рис. 221.

Положительные направления  $Q_n$  и  $M_n$  показаны на рис. 221, представляющем изгиб одного участка балки, расположенного между поперечными сечениями  $n$  и  $n+1$ . Пользуясь известными формулами для изгиба консоли, получим:

$$\alpha_n = \alpha_{n+1} + \frac{Q_n l_n^2}{2EJ_n} + \frac{M_n l_n}{EJ_n},$$

$$y_n = y_{n+1} + \alpha_{n+1} l_n + \frac{Q_n l_n^3}{3EJ_n} + \frac{M_n l_n^2}{2EJ_n}.$$

Вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} \frac{l_n^2}{2EJ_n} &= k_n, & \frac{l_n}{EJ_n} &= k'_n, \\ \frac{l_n^3}{3EJ_n} &= g_n, & \frac{l_n^2}{2EJ_n} &= g'_n, \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

перепишем эти уравнения в следующей форме:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - k_n Q_n - k'_n M_n,$$

$$y_{n+1} = y_n - \alpha_{n+1} l_n - g_n Q_n - g'_n M_n.$$

Тогда, используя выражение (e), получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \alpha_n - k_n \sum_{i=1}^n m_i p^2 y_i - k'_n \sum_{i=1}^{n-1} m_i p^2 y_i (x_i - x_n), \\ y_{n+1} &= y_n - \alpha_{n+1} l_n - g_n \sum_{i=1}^n m_i p^2 y_i - g'_n \sum_{i=1}^{n-1} m_i p^2 y_i (x_i - x_n). \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Задав некоторые значения  $\alpha_1$  и  $y_1$  для угла поворота и прогиба свободного конца, можно из уравнений (g) определить углы поворота и прогибы всех последовательных сечений 2, 3, 4. Из уравнений (g) можно заключить, что эти величины линейно зависят

\* Гюмбель пользовался графическим интегрированием (L. Gumbel, Jahrb. Schiffbautechn. Ges., стр. 211, 1901); А. Н. Крылов применил способ Адамса—Штермера для численного интегрирования (Известия Российской Академии наук, стр. 915, 1918). Инглед заменил балку с непрерывным изменением момента инерции «ступенчатой» балкой и вывел алгебраическое выражение для кривой изгиба (см. С. Е. Inglis, Trans. Inst. Nav Architects, Лондон, т. 71, стр. 145, 1929). Весьма полезная схема численного интегрирования для ступенчатой балки предложена в работ N. O. Muckelstad, J. Aeronaut. Sci., т. 11, стр. 153, 1944. Эта схема дана в последующем изложении. См. также статьи: М. А. Прохил, J. Appl. Mech., т. 12, стр. 142, 1945; А. I. Bellin, J. Appl. Mech., т. 14, стр. 1, 1947

от принятых значений  $\alpha_1$ ,  $y_1$  и могут быть представлены в виде:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= \alpha_1 \varphi_n - y_1 \varphi'_n, \\ y_n &= -\alpha_1 \psi_n + y_1 \psi'_n, \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

где  $\varphi_n, \dots, \psi'_n, \dots$  — некоторые функции  $x_1, x_2, \dots$ , которые должны удовлетворять следующим условиям на свободном конце:

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi'_1 = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad \psi'_1 = 1. \quad (i)$$

Чтобы установить вид этих функций, подставим выражения (h) в первое из уравнений (g):

$$\begin{aligned} \alpha_1 \varphi_{n+1} - y_1 \varphi'_{n+1} &= \alpha_1 \varphi_n - y_1 \varphi'_n - k_n \sum_{i=1}^n m_i p^2 (-\alpha_1 \psi_i + y_1 \psi'_i) - \\ &\quad - k'_n \sum_{i=1}^{n-1} m_i p^2 (-\alpha_1 \psi_i + y_1 \psi'_i)(x_i - x_n). \end{aligned}$$

Так как это равенство должно выполняться для любых принятых значений  $\alpha_1$  и  $y_1$ , можно сначала положить  $y_1 = 0$ ; тогда члены, содержащие множитель  $\alpha_1$ , дают уравнение

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + k_n \sum_{i=1}^n m_i p^2 \psi_i + k'_n \sum_{i=1}^{n-1} m_i p^2 \psi_i (x_i - x_n). \quad (j)$$

Полагая  $\alpha_1 = 0$  и рассматривая члены, содержащие  $y_1$ , получаем:

$$\varphi'_{n+1} = \varphi'_n + k_n \sum_{i=1}^n m_i p^2 \psi'_i + k'_n \sum_{i=1}^{n-1} m_i p^2 \psi'_i (x_i - x_n). \quad (k)$$

Подобно этому, рассматривая второе уравнение (g), получим:

$$\psi_{n+1} = \psi_n + l_n \varphi_{n+1} - g_n \sum_{i=1}^n m_i p^2 \psi_i - g'_n \sum_{i=1}^{n-1} m_i p^2 \psi_i (x_i - x_n), \quad (l)$$

$$\psi'_{n+1} = \psi'_n + l_n \varphi'_{n+1} - g_n \sum_{i=1}^n m_i p^2 \psi'_i - g'_n \sum_{i=1}^{n-1} m_i p^2 \psi'_i (x_i - x_n). \quad (m)$$

Уравнения (j), ..., (m) можно упростить, вводя обозначения

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i p^2 \psi_i &= B_n, \\ \sum_{i=1}^n m_i p^2 \psi'_i &= C_n. \end{aligned} \quad (n)$$

Обозначив  $m_i p^2 \psi'_i = A_i$ , получим:

$$m_i p^2 \psi'_i (x_i - x_n) = A_i \sum_{i=1}^{n-1} l_j;$$

суммируя последние члены уравнений (k) и (m), найдем:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} m_i p^2 \psi'_i (x_i - x_n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \left( A_i \sum_{i=1}^{n-1} l_j \right) = \\ &= A_1 (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1}) + A_2 (l_2 + l_3 + \dots + l_{n-1}) + \dots + A_{n-1} l_{n-1} = \\ &= l_1 A_1 + l_2 (A_1 + A_2) + \dots + l_{n-1} (A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left( l_i \sum_{i=1}^i A_j \right) = \sum_{i=1}^{n-1} l_i G_i = G_n. \end{aligned} \quad (o)$$

Поступая так же при суммировании последних членов уравнений (j) и (l), получим:

$$\sum_{i=1}^{n-1} m_i p^2 \psi_i (x_i - x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} l_i B_i = B'_n. \quad (p)$$

При этих обозначениях уравнения (j), ..., (m) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n + k_n B_n + k'_n B'_n, \\ \varphi'_{n+1} &= \varphi'_n + k_n C_n + k'_n C'_n, \\ \psi_{n+1} &= \psi_n + l_n \varphi_{n+1} - g_n B_n - g'_n B'_n, \\ \psi'_{n+1} &= \psi'_n + l_n \varphi'_{n+1} - g_n C_n - g'_n C'_n. \end{aligned} \right\} \quad (q)$$

Исходя из условий (i) на свободном конце и пользуясь равенствами (q), можно вычислить последовательные значения функций  $\varphi$ ,  $\varphi'$ ,  $\psi$ ,  $\psi'$  для поперечных сечений 2, 3, ... при любом принятом значении  $p^2$ . Пусть  $\varphi_0$ ,  $\varphi'_0$ ,  $\psi_0$  и  $\psi'_0$  — значения функций в среднем поперечном сечении 0 балки на рис. 220. Замечая, что при симметричных колебаниях для середины балки  $\alpha = 0$ , получим из первого из уравнений (h):

$$0 = \alpha_1 \varphi_0 - y_1 \varphi'_0,$$

т. е.

$$\frac{\alpha_1}{y_1} = \frac{\varphi'_0}{\varphi_0}.$$

По этому значению отношения  $\alpha_1/y_1$  определим теперь прогибы балки из второго уравнения (h):

$$y_n = y_1 \left( \psi'_n - \frac{\varphi'_0}{\varphi_0} \psi_n \right).$$

Подставляя в первое из выражений (е), получим поперечную силу

$$Q_n = y_1 \sum_{i=1}^n m_i p^2 \left( \psi_i' - \frac{\psi_0'}{\psi_0} \psi_i \right) = y_1 \left( G_n - \frac{y_0}{\psi_0} B_n \right).$$

Для середины балки это уравнение дает:

$$Q_0 = y_1 \left( G_0 - \frac{\psi_0'}{\psi_0} B_0 \right).$$

Как можно видеть из равенства (п), выражение в скобках зависит от принятого значения  $p$ . Повторяя выкладки при различных значениях  $p$ , можно построить кривую, подобную показанной на рис. 222 и представляющую  $Q_0$  в функции  $p^*$ .

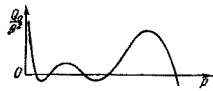


Рис. 222.

Если балка совершает колебания по одной из симметричных нормальных форм, то поперечная сила в среднем сечении балки равна нулю. Отсюда заключаем, что точки пересечения кривой рис. 222 с горизонтальной осью определяют угловые частоты симметричных форм колебаний балки.

При определении частот антисимметричных форм колебаний (рис. 220, в) поступим, как и в предыдущем случае, и после вычисления значений  $\psi_0, \dots, \psi_0'$  для среднего сечения балки используем условие, что  $y=0$  в среднем сечении балки. Тогда из второго уравнения (h) получим:

$$\frac{\alpha_1}{y_1} = \frac{\psi_0'}{\psi_0}.$$

По этому значению отношения  $\alpha_1/y_1$  определим теперь прогибы из второго уравнения (h):

$$y_n = y_1 \left( \psi_n - \frac{\psi_0'}{\psi_0} \psi_n \right).$$

Подставляя это во второе уравнение (е), получим изгибающие моменты

$$M_n = y_1 \sum_{i=1}^{n-1} m_i p^2 \left( \psi_i' - \frac{\psi_0'}{\psi_0} \psi_i \right) (x_i - x_n),$$

или в обозначениях (о) и (р):

$$M_n = y_1 \left( G_n' - \frac{\psi_0'}{\psi_0} B_n' \right).$$

\* При этом построении принимается, что  $y_1=1$  и по оси ординат откладываются значения  $Q_0/p^2$ .

Применяя эту формулу к среднему сечению  $O$  балки, найдем частоты антисимметричных форм колебаний, так как изгибающий момент в этом сечении равен нулю:

$$0 = G_0' - \frac{\psi_0'}{\psi_0} B_0'.$$

Чтобы получить искомые частоты, вычислим значения правой части этого равенства при различных значениях  $p$  и представим результаты в виде кривой, как это было сделано в предыдущем случае. Точки пересечения этой кривой с горизонтальной осью определяют искомые частоты.

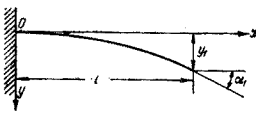


Рис. 223.

**Консоль.** Тот же способ вычислений можно использовать и для консоли (рис. 223). Пользуясь уравнениями (q), определим  $\psi_0, \dots, \psi_0'$  для закрепленного конца и из условия, что прогиб этого конца равен нулю, получим:

$$0 = -\alpha_1 \psi_0 + y_1 \psi_0'; \quad \frac{\alpha_1}{y_1} = \frac{\psi_0'}{\psi_0}.$$

Подставляя найденные выражения в первое из уравнений (h) и замечая, что угол поворота закрепленного сечения равен нулю, получим частотное уравнение

$$0 = \frac{\psi_0'}{\psi_0} \varphi_0 - \varphi_0,$$

которое, как уже было объяснено, можно решить графически. Балка с открытыми концами. В случае балки с свободно открытыми концами (рис. 224) снова разделим заданную балку на участки

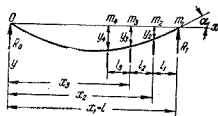


Рис. 221.

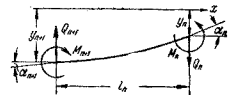


Рис. 225.

и заменим их массы сосредоточенными массами. Рассматривая участок балки между массами  $m_n$  и  $m_{n+1}$  и принимая положительные направления моментов и поперечных сил соответственно рис. 225, получим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \alpha_n + k_n Q_n - k_n' M_n, \\ y_{n+1} &= y_n + \alpha_{n+1} l_n - g_n Q_n + g_n' M_n, \end{aligned} \right\} (r)$$

где коэффициенты  $k_n, \dots, g'_n$  имеют прежние значения ( $f$ ), а поперечные силы  $Q_n$  и изгибающие моменты  $M_n$  определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= \sum_{i=1}^n m_i y_i p^2 - R_1, \\ M_n &= R_1 \sum_{i=1}^{n-1} l_i - \sum_{i=1}^{n-1} m_i y_i p^2 (x_i - x_n), \end{aligned} \right\} \quad (s)$$

в которых  $R_1$  обозначает реакцию на конце  $x=0$  балки. Подставляя выражения  $Q_n$  и  $M_n$  в равенства (г), получим выражения, определяющие угол поворота сечения  $\alpha$  и прогиб  $y$  любого поперечного сечения балки, если приняты некоторые значения угла поворота  $\alpha_1$  и реакции  $R_1$ . Замечая, что эти выражения линейны относительно  $\alpha_1$  и  $R_1$ , возьмем их в виде:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= \alpha_1 \varphi_n - R_1 \psi_n, \\ y_n &= \alpha_1 \Phi_n - R_1 \Psi_n, \end{aligned} \right\} \quad (t)$$

где  $\varphi_n, \dots, \psi_n$  — функции от  $x$ , удовлетворяющие следующим условиям на концах:

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi'_1 = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad \psi'_1 = 0. \quad (u)$$

Поступая, как и выше, получим уравнения для определения этих функций:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n + k_n B_n + k'_n B'_n, \\ \varphi'_{n+1} &= \varphi'_n + k_n D_n + k'_n D'_n, \\ \psi_{n+1} &= \psi_n + l_n \varphi_{n+1} - g_n B_n - g'_n B'_n, \\ \psi'_{n+1} &= \psi'_n + l_n \varphi'_{n+1} - g_n D_n - g'_n D'_n, \end{aligned} \right\} \quad (v)$$

где  $B_n$  и  $B'_n$  имеют прежние выражения (п) и (р), а

$$\left. \begin{aligned} D_n &= 1 + \sum_{i=1}^n m_i p^2 \psi_i, \\ D'_n &= \sum_{i=1}^{n-1} l_i D_i. \end{aligned} \right\} \quad (w)$$

Удовлетворяя теперь начальные значения (u), используя выражения (v) и выполняя последовательное суммирование, мы, наконец, получим значения  $\varphi_0, \varphi'_0, \psi_0, \psi'_0$  для левого конца  $O$  балки; замечая, что прогиб точки  $O$  должен равняться нулю, найдем из второго уравнения (t):

$$0 = \alpha_1 \psi_0 - R_1 \psi'_0,$$

что даст:

$$\frac{\alpha_1}{R_1} = \frac{\psi'_0}{\psi_0}$$

и

$$y_n = R_1 \left( \frac{\psi'_0}{\psi_0} \psi_n - \psi'_n \right). \quad (x)$$

При этом значении  $y_n$  изгибающий момент по выражению (s) становится равным

$$\begin{aligned} M_0 &= R_1 \sum_{i=1}^0 l_i - R_1 \frac{\psi'_0}{\psi_0} \sum_{i=1}^0 m_i p^2 \psi_i x_i + \\ &+ R_1 \sum_{i=1}^{n-1} m_i p^2 \psi'_i x_i = R_1 \left( -\frac{\psi'_0}{\psi_0} B'_0 + D'_0 \right). \quad (y) \end{aligned}$$

Для определения собственных частот колебаний поступим, как и выше; определим численные значения выражений в скобках для нескольких значений  $p^2$  и представим результаты в виде кривой. Точки пересечения этой кривой с горизонтальной осью дают искомые частоты.

В качестве простого примера применения численного способа определения частот рассмотрим случай призматической свободно опертой балки, несущей три одинаковые массы  $m$  (рис. 226, а). Примем, что  $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 25$  см,  $EJ = 114 \cdot 10^6$  кг·см<sup>2</sup>,  $m = 0,275$  кг·сек<sup>2</sup>·см<sup>-1</sup>; необходимо найти частоту второй формы колебаний (рис. 226, б). Эту частоту можно легко определять, пользуясь схемой свободно опертой балки длиной 50 см, если со средним сечением балки связан груз  $mg$ . Статический прогиб под грузом равен  $\delta = mg \cdot 25^3 / 6EJ$ , и угловая частота равна

$$p = \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \sqrt{\frac{6EJ}{m \cdot 25^3}} = 400 \text{ сек}^{-1}.$$

Проверим это значение описанным выше численным методом. С этой целью мы должны последовательно вычислить функции  $\varphi$ ,  $\varphi'$ ,  $\psi$  и

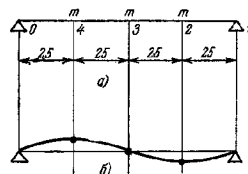


Рис. 226.

$\psi''$ , определяемые уравнениями (v). Эти вычисления приводятся в следующей таблице:

| $n$ | $\frac{mp^2}{10^6}$ | $\psi_n$ | $B_n$ | $B'_n$ | $\psi_{n+1}$ | $\psi'_n$ | $D_n$ | $D'_n$ | $\psi''_{n+1}$ |
|-----|---------------------|----------|-------|--------|--------------|-----------|-------|--------|----------------|
| 1   | 0                   | 0        | 0     | 0      | 1            | 0         | 1     | 0      | 2,74           |
| 2   | 0,044               | 25       | 1,10  | 0      | 4            | 22,8      | 2     | 25     | 13,7           |
| 3   | 0,044               | 74,7     | 4,40  | 27,5   | 22           | 205       | 11    | 75     | 60,2           |
| 4   | 0,044               | 349      | 19,8  | 137    | 106          | 1000      | 55    | 350    | 288            |
| 0   | 0                   | 1720     | 19,8  | 632    |              | 4730      | 55    | 1725   |                |

Пользуясь найденным выше значением  $p$ , заполним второй столбец и с помощью формул (f) найдем

$$k = 2,74 \cdot 10^{-6} \text{ кгз}^{-1}; \quad k' = 0,219 \cdot 10^{-6} \text{ кгз}^{-1} \text{ см}^{-1}; \\ g = 45,710^{-6} \text{ кгз}^{-1} \text{ см}; \quad g' = 2,7410^{-6} \text{ кгз}^{-1}.$$

Теперь заполним следующие столбцы, начиная с первой строки таблицы. Используя условия на концах (u) и выражения (n), (p), (w), получаем  $\psi_1 = B_1 = B'_1 = \psi'_1 = D'_1 = 0$ ,  $D_1 = 1$ , а из первых двух выражений (v) находим  $\psi_2 = 1$  и  $\psi'_2 = 2,74$ ; эти значения внесены в первую строку. Таким образом, первая строка заполнена; следующие строки таблицы можно легко заполнить при помощи выражений (v), (n), (p) и (w). Имея значения функций  $\psi$  и  $\psi'$ , получим из (x) форму кривой изгиба. Соответствующие изгибающие моменты можно найти из выражения (y). На левом конце  $O$  балки последнее уравнение дает для момента нулевое значение; этим подтверждается, что предположенное значение  $p$  является истинным значением искомой частоты.

В практических задачах приложение численного метода требует более сложных вычислений, поскольку изгибная жесткость  $EJ$  и массы  $m$  обычно меняются от участка к участку, и прежде всего необходимо вычислить таблицу коэффициентов  $k$ ,  $k'$ ,  $g$ ,  $g'$ . Чтобы с удовлетворительной степенью точности получить искомые частоты, нужно выполнять все промежуточные вычисления с четырьмя или более значащими цифрами, что требует применения вычислительных машин. Некоторые примеры таких вычислений можно найти в упомянутой на стр. 384 статье Майклстэда и в его книге «Vibration Analysis».

65. Совместные изгибно-крутильные колебания балок. — Выше, при рассмотрении поперечных колебаний балок, всюду предполагалось, что балка колеблется в плоскости ее симметрии. В других случаях

поперечные колебания сопровождаются обычно крутильными колебаниями. В качестве примера таких совместных колебаний рассмотрим случай колебаний швеллера (рис. 227) в плоскости  $xy$ , перпендикулярной к плоскости симметрии. При рассмотрении поперечного изгиба швеллера под действием статических нагрузок замечаем, что изгиб будет происходить в вертикальной плоскости и не будет сопровождаться кручением только в том случае, когда вертикальные грузы распределены вдоль оси центров изгиба  $OO$ , лежащей в плоскости симметрии балки и параллельной оси центра тяжести. Эта ось принимается за ось  $x$ . Ее расстояние  $e$  от срединной плоскости стенки дается формулой \*

$$e = \frac{b^2 h^2 t}{4J_x}, \quad (a)$$

в которой  $b$  — ширина полок,  $h$  — расстояние между серединами полок,  $t$  — толщина полок и стенки. При этом нагружении дифференциальное уравнение кривой изгиба имеет вид

$$EJ_x \frac{d^4 y}{dx^4} = w, \quad (b)$$

где  $w$  — интенсивность распределенной нагрузки,  $EJ_x$  — изгибная жесткость стержня в вертикальной плоскости.

Если нагрузка распределена вдоль оси центров тяжести, всегда можно поступить, как это пояснено схемой на рис. 227, д, т. е. заменить заданную нагрузку такой же нагрузкой, распределенной вдоль оси центров изгиба  $x$ , и распределенными вдоль той же оси крутящими моментами интенсивностью  $w\epsilon$ . В таком случае получается комбинация: 1) изгиба, определяемого уравнением (b), и 2) кручения относительно оси центра изгиба  $x$ . Так как кручение не является свободным, то связь переменного крутящего момента  $M_t$  с углом закручивания  $\varphi$  дается уравнением \*

$$M_t = C \frac{d\varphi}{dx} - C_1 \frac{d^3 \varphi}{dx^3}, \quad (c)$$

где  $C$  — жесткость при свободном кручении, а  $C_1$  — секториальная жесткость. Дифференцируя это уравнение по  $x$  и замечаем, что

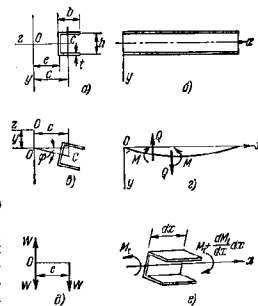


Рис. 227.

\* См. книгу автора Strength of Materials, 2-е изд., т. 2, стр. 88, 1941.



крутящие моменты имеют положительное направление (см. рис. 227, е), получим:

$$C \frac{d^2\varphi}{dx^2} - C_1 \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\omega c. \quad (d)$$

Уравнения (b) и (d) определяют совместный изгиб и кручение балки, когда нагрузка распределена вдоль оси центров тяжести.

В случае колебаний балки нужно учесть: 1) силы инерции, возникающие при поступательном перемещении; эти силы имеют интенсивность

$$-\frac{A\gamma}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} (y + c\varphi),$$

где  $\frac{A\gamma}{g}$  — масса единицы длины балки; и 2) силы инерции, возникающие при вращении, определяемые инерционными моментами интенсивностью

$$-\frac{J_p \gamma}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

где  $J_p$  — полярный момент инерции площади поперечного сечения относительно оси центра тяжести.

Подставляя в уравнения (b) и (d) силы инерции и их моменты вместо статической нагрузки, получаем следующие дифференциальные уравнения для совместных изгибно-крутильных колебаний:

$$\left. \begin{aligned} EJ_z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -\frac{A\gamma}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{A\gamma c}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \\ C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - C_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{A\gamma c}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c\varphi + \frac{J_p \gamma}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Предполагая, что балка совершает колебания одной из нормальных форм, примем

$$y = X \sin pt, \quad \varphi = X_1 \sin pt, \quad (f)$$

где  $p$  — угловая частота колебаний,  $X$  и  $X_1$  — нормальные функции. Подставляя (f) в уравнения (e), получим следующие дифференциальные уравнения для определения функций  $X$  и  $X_1$ :

$$\left. \begin{aligned} EJ_z X^{IV} &= \frac{A\gamma p^2}{g} (X + cX_1), \\ C_1 X_1^{IV} - CX_1'' &= \frac{A\gamma p^2 c}{g} (X + cX_1) + \frac{J_p \gamma p^2}{g} X_1. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

В каждом частном случае нужно найти решения  $X$  и  $X_1$ , удовлетворяющие как уравнениям (g), так и заданным условиям на концах балки.

Простейшим примером служит случай балки со свободными опертными концами, для которой условия на конце имеют вид:

$$y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{для } x=0 \quad \text{и } x=l.$$

Эти требования удовлетворяются, если принять

$$X = y_0 \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad X_1 = \varphi_0 \sin \frac{i\pi x}{l},$$

где  $y_0$  и  $\varphi_0$  — постоянные.

Подставляя эти значения в уравнения (g) и пользуясь обозначениями

$$\frac{EJ_z i^4 \pi^4 g}{l^4 A\gamma} = \omega_0^2, \quad \frac{(C_1 i^2 \pi^2 + C_1 i^4 \pi^4) g}{l^4 \gamma (J_p + Ac^2)} = \omega_1^2, \quad \frac{Ac}{J_p + Ac^2} = \lambda, \quad (h)$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} (\omega_0^2 - p^2) y_0 - p^2 c \varphi_0 &= 0, \\ -\lambda p^2 y_0 + (\omega_1^2 - p^2) \varphi_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Эти уравнения могут дать отличные от нуля решения для  $y_0$  и  $\varphi_0$  только в том случае, если определитель этих уравнений равен нулю; частное уравнение будет

$$(\omega_0^2 - p^2)(\omega_1^2 - p^2) - \lambda p^4 c = 0, \quad (j)$$

откуда получаем:

$$p^2 = \frac{(\omega_1^2 + \omega_0^2) \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda c \omega_1^2 \omega_0^2}}{2(1 - \lambda c)}. \quad (k)$$

Подобный же результат получится во всех других случаях балок, имеющих одну плоскость симметрии и колеблющихся перпендикулярно этой плоскости.

Если  $c=0$  и центр изгиба совпадает с центром тяжести, то получим:

$$p^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_0^2}{2} \pm \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2},$$

что дает две частоты:

$$p_1^2 = \omega_0^2, \quad p_2^2 = \omega_1^2. \quad (l)$$

Как можно видеть из обозначений (h), эти частоты соответствуют несвязанным крутильным и изгибным колебаниям, которые в данном случае не зависят друг от друга. Если  $c \neq 0$ , то из решения (k) получим два значения  $p^2$ , одно из которых больше, а другое меньше значений (l). Из уравнений (l) находим, что  $y_0$  и  $\varphi_0$  при большем

значении  $P^2$  имеют разные знаки, а при меньшем значении  $P^2$  — одинаковые знаки. Соответствующие две конфигурации показаны на рис. 226. Подобные же результаты получаются также в случае балки с другими условиями на концах. Решение уравнений ( $g$ ) становится тогда более сложным, но методом Рэлея — Ритца \*) можно вычислить приближенные значения частот этих двух форм совместных колебаний.

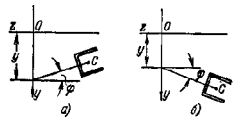


Рис. 226.

В случае балок, не имеющих плоскостей симметрии, задача становится более трудной \*\*). Крутильные колебания связаны с изгибными колебаниями в двух главных плоскостях, и вместо двух уравнений получаются три дифференциальных уравнения того же типа, что и уравнения (е).

В практических приложениях встречаются более сложные задачи о совместных крутильных и изгибных колебаниях несимметричных стержней переменного поперечного сечения. Такие задачи возникают, например, при исследовании колебаний турбинных лопаток, самолетных крыльев и лопастей воздушных винтов. Для решения этих задач обычно пользуются приближенными способами. Например, в случае турбинных лопаток обычно рассматриваются только изгибные колебания, хотя в действительности кручение может иметь значительное влияние на частоту колебаний \*\*\*).

### 66. Поперечный удар по балке. — Приближенное решение.

Большое практическое значение имеет задача о напряжениях и прогибах, вызываемых при падении тела на балку. Точное решение этой задачи требует исследования поперечных колебаний балки. В случаях, когда масса балки пренебрежимо мала по сравнению с массой падающего тела, можно легко получить приближенное решение, предположив, что кривая изгиба балки в процессе удара имеет форму соответствующей статической кривой изгиба. Тогда наибольший прогиб и наибольшее напряжения определяются из рассмотрения энергии системы. Возьмем, например, балку, опертую на концах, на которую посередине между опорами падает груз  $W$ . Если  $\delta$  обозна-

чает прогиб середины балки, то между прогибом и действующей на балку силой  $P$  существует соотношение

$$\delta = \frac{PP}{48EJ},$$

и потенциальная энергия деформации будет:

$$V = \frac{P\delta}{2} = \frac{24EJ\delta^2}{l^3}. \quad (a)$$

Если груз  $W$  падает с высоты  $h$ , то работа, совершаемая этим грузом при падении, равна

$$W(h + \delta_n) \quad (b)$$

и динамический прогиб  $\delta_n$  определяется из уравнения

$$W(h + \delta_n) = \frac{24EJ\delta_n^2}{l^3}, \quad (c)$$

откуда

$$\delta_n = \delta_{ст} + \sqrt{\delta_{ст}^2 + 2h\delta_{ст}}, \quad (d)$$

где

$$\delta_{ст} = \frac{Wl^3}{48EJ}$$

представляет статический прогиб балки под действием груза  $W$ .

В этом рассуждении мы пренебрегли массой балки и приняли, что кинетическая энергия падающего груза  $W$  полностью превращается в потенциальную энергию деформации балки. В действительности часть кинетической энергии будет потеряна при ударе. Следовательно, приведенные выше выкладки дают верхний предел для динамического прогиба и динамических напряжений. Чтобы получить более точное решение, нужно учесть массу балки, подвергавшейся удару.

Если происходит центральный удар тела, имеющего массу  $W/g$  и скорость  $v_0$ , по неподвижному телу массы  $W_1/g$  и если деформация точки соприкосновения полностью неупруга, то конечная скорость  $v$  после удара (общая для обоих тел) может быть определена из уравнения

$$\frac{W}{g} v_0 = \frac{W + W_1}{g} v,$$

откуда

$$v = v_0 \frac{W}{W + W_1}. \quad (e)$$

Следует отметить, что в момент удара скорости  $v$  тела  $W$  и балки одинаковы только в точке соприкосновения. Другие точки балки могут иметь скорости, отличные от  $v$ , а у опор балки эти скорости

\*) Этим путем Гарланд исследовал совместные изгибно-крутильные колебания консоли. См. С. F. Garland, J. Appl. Mech., т. 7, стр. 97, 1940.

\*\*) Дифференциальные уравнения для общего случая рассмотрены в работе: K. Federhofer, Sitzber. Acad. Wiss., Вена, часть IIa, т. 156, стр. 343, 1947. [Впервые общий случай рассмотрел В. З. Власов; см. его книгу «Тонкостенные упругие стержни», Стройиздат, 1940.]

\*\*\*) Подробное исследование поперечных колебаний турбинных лопаток содержится в книге: С. В. Вейзен, R. Grammel, стр. 726—771, 1939. [Русский перевод: К. Биццоли, Р. Граммель, Техническая динамика, т. 2, стр. 154—222, 1952.]

равны нулю. Поэтому в формулу (е) для определения скорости  $v$  должна быть подставлена не вся масса балки, а некоторая *приведенная масса*. Величина этой приведенной массы зависит от формы кривой изгиба и может быть приближенно определена так же, как и в методе Рэлея, т. е. в предположении, что кривая изгиба такая же, как и статическая кривая. Тогда

$$v = v_0 \frac{W}{W + \frac{17}{35} W_1},$$

где  $\frac{17}{35} W_1$  — *приведенный вес* балки. Кинетическая энергия системы равна

$$\frac{(W + \frac{17}{35} W_1) v^2}{2g} = \frac{W v_0^2}{2g} \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \frac{W_1}{W}}.$$

Чтобы учесть влияние массы балки, эту величину нужно подставить в выражение (с) вместо входящей туда величины  $\frac{W v_0^2}{2g} = Wh$ . Тогда динамический прогиб окажется равным

$$\delta_d = \delta_{ст} + \sqrt{\delta_{ст}^2 + 2\delta_{ст} \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \frac{W_1}{W}}}. \quad (166)$$

Этот же способ можно использовать во всех других случаях удара, где перемещение конструкции в точке удара пропорционально силе \*).

*Удар и колебания.* Описанный способ дает достаточно точные результаты в случаях тонких стержней и балок, если масса падающего тела велика по сравнению с массой балки. В противном случае становится необходимым рассмотрение колебаний балки и местных деформаций в окрестности точки удара.

Поперечные колебания, вызванные в балке ударом движущегося с заданной скоростью тела, были рассмотрены Сен-Венаном \*\*). Полагая, что после удара падающее тело не отделяется от балки, можно исследовать колебания, представив прогиб в виде суммы ряда нормальных функций. Постоянные коэффициенты этого ряда следует определить таким образом, чтобы удовлетворить заданным начальным условиям. Таким путем Сен-Венану удалось показать, что данное

\*) Этот способ предложен Коксом. См. H. Cox, Trans. Cambridge Phil. Soc., т. 9, стр. 73, 1850, а также упомянутую на стр. 376 книгу Тодхантера и Пирсона, т. 1, стр. 895.

\*\*) См. книгу, упомянутую на стр. 289, последнее примечание к § 61, стр. 490, а также W. H. Norris, J. Appl. Mech., т. 15, стр. 125, 1948 и т. 17, стр. 409, 1950.

выше приближенное решение для практических приложений достаточно точно.

Предположение о том, что падающее тело не отделяется от балки, является произвольным, и для получения более точной картины явления удара нужно исследовать местные деформации балки и падающего тела в области соприкосновения. Приведем некоторые результаты подобного исследования для случая падения шара на плоскую поверхность балки прямоугольного сечения \*). Местные деформации в этом случае определяются известным решением Герца \*\*). Пусть  $\alpha$  обозначает вызванное этой деформацией перемещение ударяющего шара относительно оси балки и  $P$  — соответствующее давление шара на балку; тогда

$$\alpha = kP^{1/2}, \quad (f)$$

где  $k$  — постоянная, зависящая от упругих свойств тел и величины радиуса шара. В процессе удара давление  $P$  будет изменяться со временем и вызовет прогибы балки, которые можно выразить общим решением (g) § 45. Если балка испытывает удар посередине, то выражение прогиба середины, вызванного давлением, имеет вид \*\*\*):

$$y = \sum_{i=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \frac{l^2}{\pi^2 a} \frac{2g}{\gamma A l} \int_0^t P \sin \frac{i^2 \pi^2 a (t - t_1)^2}{l^2} dt_1. \quad (g)$$

Полное перемещение шара с момента удара ( $t=0$ ) равно

$$d = \alpha + y. \quad (h)$$

Это же перемещение можно найти, рассматривая движение шара. Если  $v_0$  — скорость шара в момент удара ( $t=0$ ), то скорость  $v$  в произвольный момент  $t = t_1$  будет равна

$$v = v_0 - \frac{1}{m} \int_0^{t_1} P dt_1, \quad (i)$$

где  $m$  — масса шара и  $P$  — переменная во времени реакция балки. Перемещение шара в направлении удара будет равно

$$d = v_0 t - \int_0^t \frac{dt_1}{m} \int_0^{t_1} P dt_1. \quad (j)$$

\*) См. статью автора в Z. Math. u. Phys., т. 62, стр. 198, 1913.

\*\*) H. R. Hertz, J. Math. (Crelle), т. 92, 1881; см. также упомянутую на стр. 289 книгу Льва. Случай пластических деформаций при ударе исследовал D. Tabor, Engineering, т. 167, стр. 145, 1949. [См. также книгу: Н. А. Кнудчевский, Соударение твердых тел, ГТТИ, 1950.]

\*\*\*) Здесь пренебрегается влиянием сдвигов на прогиб балки при ударе. Это влияние рассмотрено в работе Кристоферсона (D. G. Christophererson), представленной Обществу инженеров-механиков, Лондон, 1951. См. также M. A. Dangler, M. G. Land, Proc. First U. S. National Congress of Applied Mechanics, 1951.

Приравнявая (h) и (j), получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} v_0 i - \int_0^i \frac{dt_1}{m} \int_0^{t_1} P dt_1 = \\ = kP^3 + \sum_{i=1, 2, 3, 4, \dots}^{\infty} \frac{1}{i^3} \frac{l^2}{\pi^2 a} \frac{2g}{\gamma Al} \int_0^{t_1} P \sin \frac{i^2 \pi^2 a (t-t_1)}{l^2} dt_1. \end{aligned} \quad (k)$$

Это уравнение можно решить численно, разделив на малые элементы интервал времени от 0 до  $t$  и вычисляя шаг за шагом перемещения шара. Ниже даны результаты подобных вычислений для двух численных примеров.

### Примеры

1. Рассмотрим стальной стержень квадратного поперечного сечения  $1 \times 1$  см и длиной 15,35 см. Стальной шар радиуса 1 см ударяет по стержню со скоростью  $v = 1$  см/сек. Приняв  $E = 2,2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup> и  $\gamma = 7,96$  г/см<sup>3</sup>, получим период основной формы колебаний равным  $\tau = 0,001$  сек. При численном решении уравнения (k) этот период был разделен на 180 равных частей,

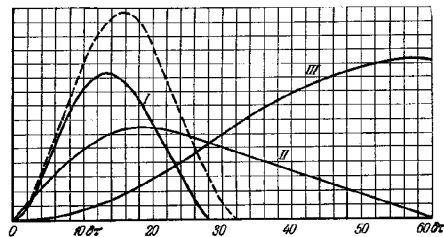


Рис. 229.

так что  $\delta t = \frac{\tau}{180}$ . Кривая I на рис. 229 представляет вычисленные значения давления  $P$ . Для сравнения на том же рисунке штриховой линией показано изменение давления для случая, когда шар ударяется о плоскую границу полубесконечного тела. Как видно, шар остается в соприкосновении со стержнем только в течение времени, равного  $2\delta t$ , т. е. около  $\frac{1}{90}$  т. Перемещения шара представлены кривой II, а прогибы середины стержня — кривой III.

2. Более сложный случай представлен на рис. 230. В этом случае длина стержня и радиус шара взяты вдвое большими, чем в предыдущем примере. Период  $\tau$  основной формы колебаний стержня в четыре раза больше, чем

в предыдущем случае, причем изменение давления  $P$  представляется более сложной кривой I. Таким образом, шар остается в соприкосновении с балкой в течение времени от  $t = 0$  до  $t = 19,5$  ( $\delta t$ ). Затем он снова ударяется о стержень в момент  $t = 60$  ( $\delta t$ ) и остается в соприкосновении со стержнем до  $t = 80$  ( $\delta t$ ). Прогибы стержня представлены кривой II.

Из рассмотренных примеров видно, что явление упругого удара значительно сложнее рассмотренного Сен-Венаном явления неупругого удара\*).

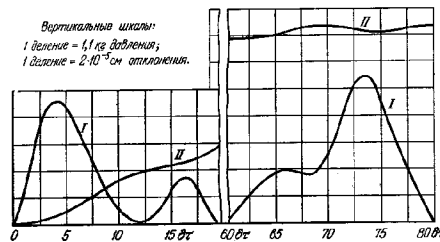


Рис. 230.

**67. Продольный удар по призматическому стержню.** *Общие замечания.* — Для приближенного вычисления напряжений и перемещений, вызываемых при продольном ударе движущегося тела по призматическому стержню, можно воспользоваться приближенным способом, изложенным в предыдущем параграфе, но для более точного решения задачи необходимо рассмотреть продольные колебания стержня.

Томас [Юнг первым\*\*] указал на необходимость более детального рассмотрения влияния массы стержня при продольном ударе. Он показал также, что всякое небольшое абсолютно твердое тело вызовет при ударе пластическую деформацию, если отношение скорости  $v_1$  движения ударяющего тела к скорости  $v$  распространения звуковых волн в стержне больше, чем деформация, соответствующая пределу упругости при сжатии материала. Для доказательства этого он

\* ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ИЗЛОЖЕННОЙ ТЕОРИИ ДАНА В РАБОТАХ: H. L. Mason, J. Appl. Mech., т. 3, стр. 55, 1936; R. N. Arnold, Proc. Inst. Mech. Engrs., Лондон, т. 137, стр. 217, 1937; E. H. Lee, J. Appl. Mech., т. 7, стр. 129, 1940.

\*\* См. книгу: T. Young, Lectures on Natural Philosophy, т. 1, стр. 144. История решения задачи о продольном ударе подробно изложена в упомянутой на стр. 386 книге Клебша, переведенной Сен-Венаном (см. последнее примечание к § 60, стр. 480 а и приложение).

предположил, что в момент удара (рис. 231) произойдет местное сжатие \*) у поверхности соприкосновения движущегося тела и стержня; это сжатие распространяется вдоль стержня со скоростью звука. Возьмем весьма малый интервал времени, равный  $t$ , такой, что в этом интервале скорость ударяющего тела можно считать постоянной. Тогда перемещение тела будет  $v_1 t$  и длина сжатого участка стержня равна  $at$ .

Следовательно, относительное укорочение будет равно  $v_1/v$  (отсюда следует приведенное выше утверждение).

Продольные колебания призматического стержня при ударе были рассмотрены Навье\*\*). В своем исследовании он принимал, что после удара движущееся тело не отделяется от стержня, по крайней мере, в течение полупериода основной формы колебаний. Таким образом, задача об ударе становится эквивалентной задаче о колебаниях груза, прикрепленного к призматическому стержню и имеющего в начальный момент заданную скорость (см. § 49). Данное выше решение этой задачи в виде бесконечного ряда неприменимо для вычисления наибольших напряжений при ударе; далее рассмотрено более полное решение, предложенное Сен-Венаном\*\*\*) и Буссиеском\*\*\*\*).

Стержень, закрепленный на одном конце и испытывающий удар по другому концу\*\*\*\*\*). Рассмотрим сначала стержень, закрепленный на одном конце и испытывающий продольный удар по другому концу (рис. 231), пользуясь уже известным дифференциальным уравнением для продольных колебаний (стр. 290). Это—уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (a)$$

где  $u$ —продольное перемещение при колебаниях, измеряемое от положения равновесия, и

$$a^2 = \frac{Eg}{\gamma}. \quad (b)$$

Условие на закрепленном конце будет:

$$(u)_{x=0} = 0. \quad (c)$$

\*) Предполагается, что поверхности соприкосновения представляют две параллельные гладкие плоскости.

\*\*\*) Rapport ... et mémoire sur les ponts suspendus, 1823.

\*\*\*\*) См. упомянутую на стр. 346 книгу.

\*\*\*\*\*) Applications des potentiels, Париж, стр. 508, 1885.

\*\*\*\*\*) См. цитированную на стр. 289 книгу Лява, стр. 431.

Условие на свободном конце, где продольная сила в сечении стержня должна быть равна силе инерции ударяющего тела, имеет вид:

$$AE \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = -\frac{W}{g} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=l} \quad (d)$$

Обозначая через  $m$  отношение веса  $W$  ударяющего тела к весу  $A\gamma l$  стержня, получим из (d):

$$m l \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=l} = -a^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} \quad (e)$$

Условия в начальный момент  $t=0$ , когда тело ударяется о стержень, имеют вид:

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (f)$$

для всех значений  $x$  между  $x=0$  и  $x=l$ ; при этом на конце  $x=l$ , имеющем в момент удара скорость ударяющего тела,

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = -v. \quad (g)$$

Теперь задача состоит в отыскании такого решения уравнения (a), которое удовлетворяет граничным условиям (c) и (e) и начальным условиям (f) и (g).

Общее решение этого уравнения можно принять в виде:

$$u = f(at-x) + f_1(at+x), \quad (h)$$

где  $f$  и  $f_1$ —произвольные функции.

Чтобы удовлетворить граничному условию (c), следует потребовать выполнения равенства

$$f(at) + f_1(at) = 0$$

или

$$f_1(at) = -f(at) \quad (i)$$

для любого значения аргумента  $at$ . Поэтому решение (h) можно записать в виде

$$u = f(at-x) - f(at+x). \quad (j)$$

Если штрих указывает дифференцирование по аргументам  $(at-x)$  или  $(at+x)$  и если выполняется равенство (i), то можно положить:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{\partial f}{\partial x} = f'(at-x), & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(at-x), \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial t} = af'(at-x), & \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 f''(at-x), \end{aligned}$$

откуда видно, что выражение (j) удовлетворяет уравнению (a).

Решение (j) имеет весьма простой физический смысл, который можно легко выяснить следующим образом. Возьмем первый член  $f(at-x)$  правой части уравнения (j) и рассмотрим определенный момент времени  $t$ . Функцию  $f$  можно представить в этот момент кривой  $nsr$  (рис. 232), форма которой зависит от вида функции  $f$ . Легко видеть, что по истечении промежутка времени  $\Delta t$  аргумент  $at-x$  функции  $f$  останется неизменным лишь при том условии, что абсцисса за этот интервал времени получает приращение  $\Delta x$ , равное  $a\Delta t$ . Геометрически это означает, что в течение промежутка времени  $\Delta t$  кривая  $nsr$  смещается без искажения формы в новое положение, показанное на рисунке штриховой линией. Отсюда следует, что первый член правой части уравнения (j) представляет волну, движущуюся вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью, равной

Рис. 232.

$$a = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}, \quad (167)$$

которая является также скоростью распространения звуковых волн вдоль стержня. Таким же образом можно показать, что второй член правой части уравнения (j) представляет волну, движущуюся со скоростью  $a$  в отрицательном направлении оси  $x$ . Общее решение (j) получится наложением двух таких волн одинаковой формы, движущихся с одинаковыми скоростями в противоположных направлениях. Ударяющее тело создает в процессе удара непрерывную серию таких волн, которые движутся к закрепленному концу и отражаются от него. Форму этих последовательных волн можно теперь установить, пользуясь начальными условиями и граничным условием на конце  $x=l$ .

Для начального момента ( $t=0$ ) имеем из уравнения (j):

$$\begin{aligned} (u)_{t=0} &= f(-x) - f(+x), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{t=0} &= -f'(-x) - f'(x), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} &= af'(-x) - af'(x). \end{aligned}$$

Используя теперь начальные условия (i), получим для  $0 < x < l$ :

$$\left. \begin{aligned} -f'(-x) - f'(x) &= 0, \\ f'(-x) - f'(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Рассматривая  $f$  как функцию аргумента  $z$ , который можно полагать равным  $+x$  или  $-x$ , заключаем из (k), что  $f'(z) = 0$ , когда  $-l < z < l$ , так как только при этом условии можно одновременно

удовлетворить обоим уравнениям (k); поэтому  $f(z)$  — постоянная, которую можно принять равной нулю, и мы получаем:

$$f(z) = 0, \quad \text{когда } -l < z < l. \quad (l)$$

Теперь при помощи концевое условия (e) можно определить значения функции  $f(z)$  для значений  $z$ , находящихся вне интервала  $-l < z < l$ .

Подставляя (j) в уравнение (e), получим:

$$ml[f''(at-l) - f''(at+l)] = f'(at-l) + f'(at+l),$$

или, полагая  $at+l = z$ :

$$f''(z) + \frac{1}{ml}f'(z) = f''(z-2l) - \frac{1}{ml}f'(z-2l). \quad (m)$$

Пользуясь этим уравнением, можно последовательно построить функцию  $f(z)$  следующим образом.

Из (l) известно, что в интервале  $l < z < 3l$  правая часть уравнения (m) равна нулю. Интегрируя это уравнение, получим функцию  $f(z)$  для этого интервала  $l < z < 3l$ . Тогда становится известной правая часть уравнения (m) в интервале  $3l < z < 5l$ . Соответственно интегрирование этого уравнения даст функцию  $f(z)$  для интервала  $3l < z < 5l$ . Поступая таким образом, можно определить функцию  $f(z)$  для всех значений  $z$  больших, чем  $-l$ .

Рассматривая уравнение (m), как уравнение относительно  $f'(z)$ , получим общее решение этого линейного уравнения первого порядка:

$$f'(z) = Ce^{-z/ml} + e^{-z/ml} \int e^{z/ml} \left[ f''(z-2l) - \frac{1}{ml}f'(z-2l) \right] dz, \quad (n)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Для интервала  $l < z < 3l$  правая часть уравнения (m) обращается в нуль, и мы получаем:

$$f'(z) = Ce^{-z/ml}.$$

Теперь из условия (g) имеем:

$$a[f'(-l+0) - f'(l+0)] = -v$$

или

$$f'(l+0) = Ce^{-l/m} = \frac{v}{a}, \quad C = e^{l/m} \frac{v}{a},$$

и для интервала  $l < z < 3l$  получаем:

$$f'(z) = \frac{v}{a} e^{-\frac{z-l}{ml}}. \quad (o)$$

Когда  $3l < z < 5l$ , из уравнения (о) имеем:

$$f'(z-2l) = \frac{v}{a} e^{-\frac{z-2l}{ml}}$$

и

$$f''(z-2l) - \frac{1}{ml} f'(z-2l) = -\frac{2}{ml} \frac{v}{a} e^{-\frac{z-2l}{ml}}$$

Теперь решение (п) можно представить в виде:

$$f'(z) = C e^{-\frac{z}{ml}} - \frac{2}{ml} \frac{v}{a} (z-3l) e^{-\frac{z-3l}{ml}} \quad (p)$$

Постоянная интегрирования  $C$  определяется из условия непрерывности скорости конца  $x=l$  в момент  $t=2l/a$ . Это условие имеет вид:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=\frac{2l}{a}} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=\frac{2l}{a}+0},$$

или на основании уравнения (j):

$$f'(l-0) - f'(3l-0) = f'(l+0) - f'(3l+0).$$

Пользуясь теперь уравнениями (1), (о) и (p), получаем:

$$-\frac{v}{a} e^{-2l/m} = \frac{v}{a} - C e^{-2l/m},$$

откуда

$$C = \frac{v}{a} (e^{2l/m} + e^{2l/m}),$$

и для интервала  $3l < z < 5l$  имеем:

$$f'(z) = \frac{v}{a} e^{-\frac{z-l}{ml}} + \frac{v}{a} \left[1 - \frac{2}{ml}(z-3l)\right] e^{-\frac{z-3l}{ml}} \quad (q)$$

Зная  $f'(z)$  в интервале  $3l < z < 5l$  и пользуясь уравнением (м), можно получить выражение для  $f'(z)$  в интервале  $5l < z < 7l$  и т.д.

Функцию  $f(z)$  можно определить интегрированием известной функции  $f'(z)$ , причем постоянная интегрирования определяется из условия непрерывности перемещения  $u$  при  $x=l$ . Таким образом, получаются следующие результаты: для  $l < z < 3l$

$$f(z) = \frac{mlv}{a} \left(1 - e^{-\frac{z-l}{ml}}\right), \quad (r)$$

а для  $3l < z < 5l$

$$f(z) = -\frac{mlv}{a} e^{-\frac{z-l}{ml}} + \frac{mlv}{a} \left[1 + \frac{2}{ml}(z-3l)\right] e^{-\frac{z-3l}{ml}} \quad (s)$$

Зная  $f(z)$ , можно определить перемещения и напряжения в любом поперечном сечении стержня, подставляя в уравнение (j) соответствующие значения функций  $f(at-x)$  и  $f(at+x)$ . Когда  $0 < t < \frac{l}{a}$ , член  $f(at-x)$  в уравнении (j) согласно (1) равен нулю, и поэтому имеется только волна  $f(at+x)$ , перемещающаяся в отрицательном направлении оси  $x$ . Форма этой волны получается из (r) подстановкой  $at+x$  вместо  $z$ . При  $t=l/a$  эта волна отразится от закрепленного конца и в интервале  $\frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a}$  мы будем иметь две волны: волну  $f(at-x)$ , движущуюся в положительном направлении оси  $x$ , и волну  $f(at+x)$ , движущуюся в отрицательном направлении. Обе волны можно получить из (r) подстановкой вместо  $z$  аргументов  $(at-x)$  и  $(at+x)$  соответственно. Продолжая идти этим путем, можно получить полную картину явления продольного удара\*).

Приведенное решение отражает реальные условия лишь до тех пор, пока существует положительное давление между ударяющим телом и стержнем, т. е. пока относительное удлинение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} = -f'(at-l) - f'(at+l) \quad (t)$$

остается отрицательным. При  $0 < at < 2l$ , правая часть уравнения (t) представляется функцией (о) со знаком минус и остается отрицательной. При  $2l < at < 4l$ , правая часть уравнения (t) становится равной

$$-\frac{v}{a} e^{-\frac{at}{m}} \left[1 + 2e^{\frac{2}{m}} \left(1 - \frac{at-2l}{ml}\right)\right].$$

Она обращается в нуль, когда

$$1 + 2e^{\frac{2}{m}} \left(1 - \frac{at-2l}{ml}\right) = 0$$

или

$$\frac{2at}{ml} = \frac{4}{m} + 2 + e^{-2/m}. \quad (u)$$

Это уравнение может иметь корень в интервале  $2l < at < 4l$  только в том случае, если

$$2 + e^{-2/m} < \frac{4}{m},$$

что возможно при  $m < 1,73$ .

\* Явление продольного удара с большими подробностями рассмотрено в докторской диссертации Дюпеля (Мичиганский университет). См. также его статью: L. H. Duplell, Trans. ASME, т. 52, стр. 153, 1930.

Поэтому, если отношение веса ударяющего тела к весу стержня меньше, чем 1,73, то удар прекращается в один из моментов интервала  $2l < at < 4l$ ; этот момент можно вычислить из уравнения (и). Для больших значений отношения  $m$  необходимо исследовать, прекращается ли удар в какой-либо момент интервала  $4l < at < 6l$  и т. д.

Наибольшие сжимающие напряжения при ударе достигаются у закрепленного конца и для больших значений  $m$  ( $m > 24$ ) их можно вычислять с достаточной точностью по следующей приближенной формуле:

$$\sigma_{\max} = E \frac{v}{a} (\sqrt{m} + 1). \quad (168)$$

Для сравнения интересно отметить, что, пользуясь приближенным способом предыдущего параграфа и пренебрегая  $\delta_{ст}$  по сравнению с  $h$  в формуле (d), стр. 397, мы приходим к уравнению

$$\sigma_{\max} = E \frac{v}{a} \sqrt{m}. \quad (169)$$

Когда  $5 < m < 24$ , нужно вместо (168) пользоваться формулой

$$\sigma_{\max} = E \frac{v}{a} (\sqrt{m} + 1,1). \quad (170)$$

Для  $m < 5$  Сен-Венан вывел следующую приближенную формулу:

$$\sigma_{\max} = 2E \frac{v}{a} (1 + e^{-2,5m}). \quad (171)$$

При помощи изложенного способа можно рассмотреть случай стержня, свободного на одном конце и испытывающего продольный удар на другом конце, и случай продольного соударения двух призматических стержней\*). Следует отметить, что проведенное выше исследование продольного удара основано на предположении, что поверхности соприкосновения ударяющего тела и стержня являются двумя идеально гладкими параллельными плоскостями. В реальных условиях всегда имеются некоторые неровности и требуется определенный промежуток времени, чтобы произошло их выравнивание. Если этот промежуток того же порядка, что и время прохождения звуковой волны вдоль стержня, то нельзя ожидать удовлетворительного соответствия теории и эксперимента\*\*). Значительно лучшие результаты получаются, если время  $l/a$  сравнительно велико. Например, заменив сплошной стержень спиральной пружиной, Рамзауер полу-

чил\*) весьма хорошее соответствие теории и эксперимента. На этом основании можно также ожидать удовлетворительных результатов применения этой теории к исследованию распространения ударных волн в длинных равномерно нагруженных железнодорожных поездах. Такая задача может иметь практическое значение при изучении сил, действующих на сцепку между вагонами\*\*).

Другой способ получения лучшего соответствия между теорией и опытом состоит в принятии более определенных условий соприкосновения. Взяв, например, стержень с закругленным концом и комбинируя теорию Герца для местной деформации в зоне соприкосновения с теорией Сен-Венана о волнах, движущихся вдоль стержня, Сирс\*\*\*) получил очень хорошее соответствие между теоретическими и экспериментальными результатами.

**68. Колебания кругового кольца\*\*\*\*).**—Задача о колебаниях кругового кольца встречается при исследовании частот колебаний различного рода вращающихся рам во вращающихся электрических машинах, что, например, необходимо при изучении причин шума, производимого такими машинами. В дальнейшем рассматривается несколько простых задач о колебаниях кругового кольца постоянного поперечного сечения в предположении, что размеры поперечных сечений кольца малы по сравнению с радиусом осевой окружности и что каждое поперечное сечение имеет ось симметрии, расположенную в плоскости кольца.

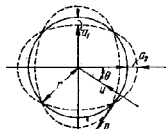


Рис. 233.

Чисто радиальные колебания. В этом случае осевая линия кольца представляет окружность с периодически изменяющимся радиусом и все поперечные сечения движутся в радиальных направлениях без поворотов.

Обращаясь к рис. 233, примем, что  $r$ —радиус осевой линии недеформированного кольца,  $u$ —радиальное перемещение, принятое положительным по направлению к центру и одинаковое для всех поперечных сечений,  $A$ —площадь поперечного сечения кольца. Тогда относительное удлинение кольца в окружном направлении равно  $-u/r$ .

\*) C. Ramsauer, Ann. Phys., т. 30, стр. 416, 1909.

\*\*) Этот вопрос был изучен в упомянутой на стр. 301 работе Викандера.

\*\*\*) J. E. Sears, Trans. Cambridge Phil. Soc., т. 21, стр. 49, 1908. Дальнейшие эксперименты описаны в работе: J. E. P. Wagstaff, Proc. Roy. Soc. A, т. 105, стр. 544, 1924. См. также W. A. Prowse, Phil. Mag., сер. 7, т. 22, стр. 209, 1936.

\*\*\*\*) См. Zasek, Radial and Torsional Vibrations of Rings, Phil. Mag., т. 26, стр. 164, 1938.

\*) См. упомянутую выше книгу Лява, стр. 431.

\*\*) Такие эксперименты со сплошными стальными стержнями были выполнены Фойгтом, см. W. Voigt, Ann. Phys., т. 19, стр. 43, 1883.



Потенциальная энергия деформации, состоящая в данном случае из энергии простого растяжения, определяется выражением

$$V = \frac{AEu^2}{2r^2} 2\pi r. \quad (a)$$

Кинетическая энергия колебаний равна

$$T = \frac{A\gamma}{2g} \dot{u}^2 2\pi r. \quad (b)$$

Из (a) и (b) получим:

$$\ddot{u} + \frac{Eg}{\gamma} \frac{1}{r^2} u = 0,$$

откуда

$$u = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt,$$

где

$$p = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma r^2}}.$$

Поэтому частота чисто радиальных колебаний равна \*)

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma r^2}}. \quad (172)$$

Круговое кольцо обладает также формами колебаний, аналогичными продольным колебаниям призматических стержней. Если  $i$  обозначает число волн по окружности, то частоты высших форм колебаний растяжения кольца определяются формулой \*\*)



Рис. 234.

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma r^2}} \sqrt{1+i^2}. \quad (173)$$

*Крутильные колебания.* Рассмотрим

теперь простейший вид крутильных колебаний, при которых осевая линия

кольца остается недеформированной и все поперечные сечения кольца поворачиваются при колебаниях на один и тот же угол (рис. 234). Вследствие этого поворота точка  $M$ , удаленная на расстояние  $u$  от срединной плоскости кольца, получит радиальное перемещение  $u\varphi$ , и соответствующее удлинение по окружности можно принять приблизительно равным  $u\varphi/r$ . Теперь можно определить потенциальную

\*) Если имеется какая-либо дополнительная нагрузка, которую можно считать равномерно распределенной вдоль осевой линии кольца, необходимо лишь в приведенных выкладках (уравнение (b)) заменить  $A\gamma$  на  $A\gamma + \psi$ , где  $\psi$  — дополнительный вес на единицу длины осевой линии кольца.

\*\*) См. упомянутую выше книгу Лява, стр. 454.

энергию деформации кольца следующим образом:

$$V = 2\pi r \int_A \frac{E}{2} \left( \frac{u\varphi}{r} \right)^2 dA = \frac{\pi E J_x \varphi^2}{r}, \quad (c)$$

где  $J_x$  — момент инерции поперечного сечения относительно оси  $x$ .  
Кинетическая энергия колебаний равна

$$T = 2\pi r \frac{J_p \gamma}{2g} \dot{\varphi}^2, \quad (d)$$

где  $J_p$  — полярный момент инерции поперечного сечения.

Из (c) и (d) получим:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Eg}{\gamma r^2} \frac{J_x}{J_p} \varphi = 0,$$

откуда

$$\varphi = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt,$$

где

$$p = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma r^2} \frac{J_x}{J_p}}.$$

Тогда частота крутильных колебаний определится формулой

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma r^2} \frac{J_x}{J_p}}. \quad (174)$$

Сравнивая этот результат с формулой (172), можно заключить, что частоты крутильных и чисто радиальных колебаний находятся в отношении  $\sqrt{J_x/J_p}$ . Для случая кругового поперечного сечения кольца частоты высших форм крутильных колебаний определяются формулой \*)

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eg}{2\gamma r^2}} \sqrt{1+i^2}. \quad (175)$$

Замечая, что

$$\sqrt{\frac{Eg}{\gamma r^2}} = \frac{a}{r},$$

где  $a$  — скорость распространения звука вдоль стержня, можно заключить, что рассмотренные крутильные колебания и колебания растяжения имеют обычно высокие частоты. Значительно более низкие частоты получаются из рассмотренных изгибных колебаний кольца.

*Изгибные колебания кругового кольца.* Изгибные колебания кругового кольца распадаются на два типа: изгибные колебания в плоскости кольца и изгибные колебания, состоящие из перемещений,

\*) См. книгу Лява, стр. 453.

перпендикулярных к плоскости кольца, и кручения\*). При рассмотрении изгибных колебаний в плоскости кольца (рис. 233) примем, что  $\theta$  — угол, определяющий положение точки осевой линии,  $u$  — радиальное перемещение, принимаемое положительным по направлению к центру,  $v$  — касательное перемещение, положительное в направлении возрастания  $\theta$ ,  $J$  — момент инерции поперечного сечения относительно главной оси, перпендикулярной к плоскости кольца.

Относительное удлинение осевой линии в любой точке, вызванное перемещениями  $u$  и  $v$ , равно

$$\epsilon = -\frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\partial\theta}; \quad (e)$$

изменение кривизны можно представить уравнением\*\*)

$$\frac{1}{r + \Delta r} - \frac{1}{r} = \frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{u}{r^2}. \quad (f)$$

В самом общем случае изгибных колебаний радиальное перемещение  $u$  можно представить в виде тригонометрического ряда\*\*\*):

$$u = a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \dots + b_1 \sin \theta + b_2 \sin 2\theta + \dots \quad (g)$$

в котором коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  — функции времени.

Рассматривая изгибные колебания, не сопровождаемые растяжением оси\*\*\*\*), имеем из (e):

$$u = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad (h)$$

откуда\*\*\*\*\*)

$$v = a_1 \sin \theta + \frac{1}{2} a_2 \sin 2\theta + \dots - b_1 \cos \theta - \frac{1}{2} b_2 \cos 2\theta - \dots \quad (i)$$

Изгибающий момент в любом поперечном сечении кольца равен

$$M = \frac{EJ}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u \right).$$

Отсюда получим потенциальную энергию изгиба

$$V = \frac{EJ}{2r^4} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u \right)^2 r d\theta,$$

\*) См. книгу Лява, стр. 451.

\*\*) Это уравнение было установлено в работе: J. Boussinesq, Comptes rend., т. 97, стр. 843, 1888.

\*\*\*)) Постоянный член ряда, соответствующий чисто радиальным колебаниям, опущен.

\*\*\*\*)) Исследование изгибных колебаний с учетом растяжения оси см. в статьях: F. W. W. Walking, Ing.-Arch., т. 5, стр. 429, 1934; K. Federhofer, Sitzber. Akad. Wiss. Wien, ч. IIa, т. 145, стр. 29, 1936.

\*\*\*\*\*)) Постоянная интегрирования, представляющая поворот кольца в его плоскости как твердого тела, в выражении (i) опущена.

или, подставляя ряд (g) вместо  $u$  и пользуясь формулами:

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin m\theta \sin n\theta d\theta = 0 \quad \text{при } m \neq n,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \sin n\theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 m\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 m\theta d\theta = \pi,$$

получаем:

$$V = \frac{EJ\pi}{2r^4} \sum_{i=1}^{\infty} (1 - i^2)^2 (a_i^2 + b_i^2). \quad (j)$$

Кинетическая энергия колеблющегося кольца равна

$$T = \frac{A\gamma}{2g} \int_0^{2\pi} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) r d\theta.$$

Подставляя (g) и (i) вместо  $u$  и  $v$ , найдем:

$$T = \frac{\pi r A \gamma}{2g} \sum_{i=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{i^2} \right) (\dot{a}_i^2 + \dot{b}_i^2). \quad (k)$$

Поступая, как и в случае прямой балки и рассматривая виртуальное перемещение

$$\delta u = \delta a_i \cos i\theta, \quad \delta v = \frac{\delta a_i}{i} \sin i\theta,$$

получим следующие дифференциальные уравнения движения для любой формы колебаний:

$$\frac{\pi r A \gamma}{g} \left( 1 + \frac{1}{i^2} \right) \ddot{a}_i + \frac{EJ\pi}{r^4} (1 - i^2)^2 a_i = 0$$

или

$$\ddot{a}_i + \frac{Eg}{\gamma} \frac{J}{Ar^4} \frac{i^2(1-i^2)^2}{1+i^2} a_i = 0.$$

Отсюда частота любой формы колебаний определяется выражением

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma} \frac{J}{Ar^4} \frac{i^2(1-i^2)^2}{1+i^2}}. \quad (176)$$

При  $i=1$  получим  $f_1=0$ . В этом случае  $u = a_1 \cos \theta$ ,  $v = a_1 \sin \theta$  и кольцо движется как твердое тело, причем  $a_1$  — перемещение в отрицательном направлении оси  $x$  (рис. 233). При  $i=2$  кольцо совершает изгибные колебания, соответствующие основной нормальной

форме. Крайние положения кольца при этих колебаниях показаны штриховой линией на рис. 233.

В случае изгибных колебаний кольца кругового поперечного сечения, состоящих из перемещений, перпендикулярных к плоскости кольца, и кручения, частоты главных форм колебаний можно определить из выражения \*):

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma} \frac{J}{Ar^4} \frac{i^2(i^2-1)^2}{i^2+1+\nu}}, \quad (177)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Сравнивая выражения (176) и (177), можно заключить, что даже при низкой форме ( $i=2$ ) частоты обоих типов изгибных колебаний отличаются очень мало \*\*).

**Неполное кольцо.** Если ось стержня имеет форму части дуги окружности, то задача определения собственных частот колебаний становится очень сложной \*\*\*). Полученные до сих пор результаты можно применить только в случае, когда длина дуги мала по сравнению с радиусом кривизны. В таких случаях эти результаты показывают, что собственные частоты несколько ниже собственных частот прямого стержня из такого же материала, такой же длины и поперечного сечения. Так как в общем случае точное решение задачи исключительно сложно, то до сих пор получены только приближенные значения нижней собственной частоты, причем для их определения применялся метод Рэлея — Ритца \*\*\*\*).

**69. Колебания мембран.** — *Общие замечания.* В дальнейшем изложении принимается, что мембрана является абсолютно гибкой и бесконечно тонкой пластинкой из однородного материала, имеющей постоянную толщину. Кроме того, предполагается, что она равномерно растянута во всех направлениях, причем натяжение настолько велико, что можно пренебречь его изменениями, вызванными малыми проги-

\* ) См. упомянутую книгу Лява, стр. 453.

\*\* ) Экспериментальное исследование колебаний колец в связи с изучением шума в зубчатых передачах дано в статье: R. E. Peterson, Trans. ASME, т. 52, стр. APM-1, 1930.

\*\*\* ) Эта задача рассмотрена в статье: H. Lamb, Proc. London Math. Soc., т. 19, стр. 365, 1888. См. также упомянутую на стр. 412 статью Уолкинга, стр. 409.

\*\*\*\* ) См. J. P. Den Hartog, The Lowest Natural Frequency of Circular Arcs, Phil. Mag., т. 5, стр. 400, 1928, а также Vibration of Frames of Electrical Machines, Trans. ASME, т. 50, APM-6, 1928. Дальнейшее исследование вопроса дано в статьях: K. Federhofer, Ing.-Arch., т. 4, стр. 110 и 276, 1933; Sitzber. Akad. Wiss. Wien, ч. II а, т. 151, стр. 89, 1942. См. также E. Maier, Ing.-Arch., т. 11, стр. 73, 1940; W. Wuest, Ing.-Arch., т. 17, стр. 265, 1949. Исследование той же задачи в связи с вопросом о потере устойчивости арки дано в работе: K. Federhofer, Sitzber. Akad. Wiss. Wien, ч. II а, т. 143, стр. 131, 1934.

бами при колебаниях. Совмещая плоскость мембраны с плоскостью  $xy$ , введем обозначения:  $v$  — прогиб любой точки мембраны при колебаниях, перпендикулярных к плоскости  $xy$ ,  $S$  — равномерное натяжение на единицу длины контура,  $w$  — вес единицы площади мембраны. Увеличение потенциальной энергии мембраны при ее изгибе найдем, как обычно, путем умножения равномерного натяжения  $S$  на увеличение площади поверхности мембраны. Площадь поверхности мембраны в изогнутом состоянии равна

$$A = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

или, принимая, что прогибы при колебаниях очень малы:

$$A = \iint \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right\} dx dy.$$

Тогда увеличение потенциальной энергии равно

$$V = \frac{S}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right\} dx dy. \quad (a)$$

Кинетическая энергия мембраны при колебаниях равна

$$T = \frac{w}{2g} \iint \dot{v}^2 dx dy. \quad (b)$$

Как будет показано на некоторых частных случаях, используя (a) и (b), можно вычислить частоты нормальных колебаний.

**Колебания прямоугольной мембраны.** Пусть  $a$  и  $b$  обозначают длины сторон мембраны и пусть оси расположены, как показано на рис. 235. Какой бы функцией координат ни была функция  $v$ , ее всегда можно представить в прямоугольной области двойным рядом:

$$v = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (c)$$

коэффициенты  $\varphi_{mn}$  которого являются функциями времени. Легко видеть, что каждый член ряда (c) удовлетворяет граничным условиям, а именно,  $v=0$  при  $x=0$  и  $x=a$  и  $v=0$  при  $y=0$  и  $y=b$ .

Подставляя (c) в выражение (a) потенциальной энергии, получим:

$$V = \frac{S\pi^2}{2} \iint_{0,0}^{a,b} \left\{ \left( \sum \varphi_{mn} \frac{m}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right)^2 + \left( \sum \varphi_{mn} \frac{n}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right)^2 \right\} dx dy.$$

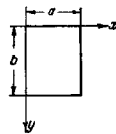


Рис. 235.

Интегрируя это выражение по всей площади мембраны, найдем, пользуясь формулами § 17 (см. стр. 100):

$$V = \frac{S}{2} \frac{ab\pi^2}{4} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \varphi^2 m n. \quad (d)$$

Применив теперь принцип Даламбера и рассматривая виртуальное перемещение

$$\delta v = \delta \varphi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

получим дифференциальное уравнение для нормальных колебаний:

$$\frac{w}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + S \frac{ab\pi^2}{4} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \varphi_{mn} = 0, \quad (e)$$

откуда

$$f_{mn} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gS}{w} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}. \quad (178)$$

Нижший тип колебаний получим, подставляя  $m = n = 1$ . Тогда

$$f_{11} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gS}{w} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}. \quad (f)$$

В этом случае изогнутая поверхность мембраны имеет вид

$$v = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (g)$$

Таким же образом можно получить высшие формы колебаний. Возьмем, например, случай квадратной мембраны, когда  $a = b$ . Частота нижней формы равна

$$f_{11} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{gS}{2w}}. \quad (179)$$

Частота прямо пропорциональна квадратному корню из натяжения и обратно пропорциональна длине сторон мембраны и квадратному корню из нагрузки на единицу площади.

Следующие две высшие формы колебаний получим, принимая одно из чисел  $m$  и  $n$  равным 2, а другое равным 1. Эти две формы имеют одинаковые частоты, но различные формы изогнутой поверхности. На рис. 236, а и б показаны узловые линии этих двух форм колебаний. Так как их частоты одинаковы, можно наложить эти две поверхности при любом соотношении их наибольших прогибов. Такая комбинация выражается суммой

$$v = C \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + D \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a},$$

где  $C$  и  $D$  — произвольные величины. Четыре частных случая таких комбинированных колебаний показаны на рис. 236. При  $D = 0$  получаются рассмотренные выше колебания, показанные на рис. 236, а. Мембрана при колебаниях подразделяется вертикальной узловой линией на две равные части. При  $C = 0$  мембрана подразделяется

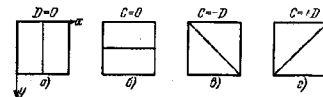


Рис. 236.

горизонтальной узловой линией, показанной на рис. 236, б. При  $C = D$  получаем:

$$\begin{aligned} v &= C \left( \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} \right) = \\ &= 2C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \left( \cos \frac{\pi x}{a} + \cos \frac{\pi y}{a} \right). \end{aligned}$$

Это выражение обращается в нуль, когда

$$\sin \frac{\pi x}{a} = 0 \quad \text{или} \quad \sin \frac{\pi y}{a} = 0$$

или когда

$$\cos \frac{\pi x}{a} + \cos \frac{\pi y}{a} = 0.$$

Первые два уравнения дают стороны контура; из третьего уравнения получаем:

$$\frac{\pi x}{a} = \pi - \frac{\pi y}{a},$$

или

$$x + y = a.$$

Это есть уравнение одной из диагоналей квадрата, показанной на рис. 236, г. Рис. 236, в представляет случай  $C = -D$ . В последних двух случаях каждую половину мембраны можно рассматривать как мембрану, имеющую вид равнобедренного прямоугольного треугольника. Основная частота колебаний такой мембраны равна согласно формуле (178)

$$f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gS}{w} \left( \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} \right)} = \frac{\sqrt{5}}{2a} \sqrt{\frac{gS}{w}}. \quad (180)$$

Таким же образом можно рассмотреть высшие формы колебаний квадратной или прямоугольной мембраны\*).

В случае вынужденных колебаний мембраны дифференциальное уравнение движения (е) принимает вид:

$$\frac{w}{g} \frac{ab}{4} \Phi_{mn}'' + S \frac{ab\pi^2}{4} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \Phi_{mn} = Q_{mn}, \quad (h)$$

где  $Q_{mn}$  выбирается так, чтобы произведение  $Q_{mn}\Phi_{mn}$  представляло виртуальную работу возмущающих сил.

В качестве примера рассмотрим случай гармонической силы  $P = P_0 \cos \omega t$ , действующей в центре мембраны. Придавая приращение  $\delta\Phi_{mn}$  координате  $\Phi_{mn}$  в выражении (с), найдем работу, совершаемую силой  $P$ :

$$P_0 \cos \omega t \delta\Phi_{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2},$$

откуда видно, что если  $m$  и  $n$  нечетные, то  $Q_{mn} = \pm P_0 \cos \omega t$ , в других случаях  $Q_{mn} = 0$ . Подставляя в уравнение (h) и используя уравнение (46), стр. 105, получим:

$$\begin{aligned} \Phi_{mn} &= \pm \frac{4g}{abw} \frac{P_0}{p_{mn}} \int_0^t \sin p_{mn}(t-t_1) \cos \omega t_1 dt_1 = \\ &= \pm \frac{4g}{abw} \frac{P_0}{p_{mn}^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos p_{mn} t), \end{aligned} \quad (i)$$

где

$$p_{mn}^2 = \frac{gS\pi^2}{w} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right).$$

Подставляя (i) в выражение (с), получим колебания, вызываемые возмущающей силой  $P_0 \cos \omega t$ .

Если на мембрану действует распределенная возмущающая сила интенсивностью  $Z$ , то

$$Q_{mn} = \int_0^b \int_0^a Z \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (j)$$

Положим, например, что в начальный момент  $t=0$  к мембране внезапно приложено равномерно распределенное давление  $Z$ ; тогда из (j)

$$Q_{mn} = Z \frac{ab}{m\pi n} (1 - \cos m\pi) (1 - \cos n\pi).$$

\* Более подробное рассмотрение этой задачи можно найти в упомянутой выше книге Рэлея, стр. 306. См. также: G. Lamé, Leçons sur ... l'élasticité des corps solides, Париж, 1852.

Если  $m$  и  $n$  нечетные, имеем:

$$Q_{mn} = \frac{4ab}{m\pi n} Z; \quad (k)$$

в противном случае  $Q_{mn} = 0$ .

Подставляя (k) в уравнение (h) и принимая начальное условие  $\Phi_{mn} = 0$  при  $t=0$ , получим:

$$\Phi_{mn} = \frac{16g}{w\pi^2} \frac{Z(1 - \cos p_{mn}t)}{p_{mn}^2}, \quad (l)$$

следовательно, колебания, вызванные внезапно приложенным давлением  $Z$ , определяются законом

$$v = \frac{16gZ}{\pi^2 w} \sum \sum \frac{1 - \cos p_{mn}t}{m\pi p_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (m)$$

где  $m$  и  $n$  — нечетные.

*Метод Рэлея—Ритца.* Для определения собственных частот колебаний мембран очень полезен метод Рэлея—Ритца. Применяя этот метод, положим, что прогибы мембраны при колебаниях описываются уравнением

$$v = v_0 \cos pt, \quad (n)$$

где  $v_0$  — подходящая функция координат  $x$  и  $y$ , определяющая форму изогнутой мембраны, т. е. форму колебаний. Подставляя (n) в выражение (а) потенциальной энергии, находим:

$$V_{\max} = \frac{S}{2} \iint \left\{ \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy. \quad (o)$$

Из (b) получим наибольшую кинетическую энергию:

$$T_{\max} = \frac{w}{2g} p^2 \iint v_0^2 dx dy. \quad (p)$$

Приравнявая (o) и (p), имеем:

$$p^2 = \frac{Sg}{w} \frac{\iint \left\{ \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy}{\iint v_0^2 dx dy}. \quad (q)$$

Пользуясь методом Рэлея—Ритца, примем выражение  $v_0$  изогнутой поверхности мембраны в виде ряда

$$v_0 = a_1 \Phi_1(x, y) + a_2 \Phi_2(x, y) + a_3 \Phi_3(x, y) + \dots, \quad (r)$$

каждый член которого удовлетворяет граничным условиям. (Прогибы на контуре мембраны должны быть равны нулю.) Коэффициенты  $a_1, a_2, \dots$  этого ряда нужно выбрать так, чтобы выражение (q) было минимальным, т. е. так, чтобы удовлетворялись

все уравнения вида

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \iint \left\{ \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = 0,$$

или

$$\iint v_0^2 dx dy \frac{\partial}{\partial a_n} \iint \left\{ \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \iint \left\{ \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \frac{\partial}{\partial a_n} \iint v_0^2 dx dy = 0.$$

Используя (а), получим последнее уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \iint \left\{ \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 - \frac{p^2 w}{gS} v_0^2 \right\} dx dy = 0. \quad (s)$$

Таким образом мы получим столько уравнений типа (s), сколько имеется коэффициентов в ряде (r). Все эти уравнения линейны относительно  $a_1, a_2, a_3, \dots$ ; приравняв нулю определитель системы этих уравнений, получим частотное уравнение для мембраны.



Рассматривая, например, формы колебаний квадратной мембраны, симметричной относительно осей  $x$  и  $y$  (рис. 237), можно взять ряд (r) в следующей форме:

$$\text{Рис. 237. } v_0 = (a^2 - x^2)(a^2 - y^2)(a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2 + a_4 x^2 y^2 + \dots).$$

Легко видеть, что каждый член этого ряда обращается в нуль при  $x = y = \pm a$ . Таким образом, условия на контуре удовлетворяются.

В случае выпуклого многоугольника граничные условия будут удовлетворены, если принять

$$v_0 = (a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2) \dots \dots (a_n x + b_n y + c_n) \sum \sum a_{mn} x^m y^n,$$

где  $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \dots$  — уравнения сторон многоугольника. Обычно можно получить удовлетворительное приближение для основной формы колебаний, взяв только первый член ( $m=0, n=0$ ) этого ряда. Для определения частот высших форм колебаний необходимо брать больше членов.

**Круглая мембрана.** Рассмотрим простейший случай колебаний, когда изогнутая поверхность мембраны симметрична относительно центра окружности. В этом случае профили зависят только от радиального расстояния  $r$  и граничные условия будут удовлетворены, если взять

$$v_0 = a_1 \cos \frac{\pi r}{2a} + a_2 \cos \frac{3\pi r}{2a} + \dots, \quad (t)$$

где  $a$  обозначает радиус контура.

Так как мы пользуемся полярными координатами, уравнение (о) должно быть заменено в этом случае уравнением

$$V_{\max} = \frac{S}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial v_0}{\partial r} \right)^2 2\pi r dr. \quad (o')$$

Вместо (p) получим

$$T_{\max} = \frac{w}{2g} p^2 \int_0^a v_0^2 2\pi r dr, \quad (p')$$

и уравнение (s) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^a \left\{ \left( \frac{\partial v_0}{\partial r} \right)^2 - \frac{p^2 w}{gS} v_0^2 \right\} 2\pi r dr = 0. \quad (s')$$

Взяв только первый член ряда (t) и подставляя  $v_0 = a_1 \cos \frac{\pi r}{2a}$  в уравнение (s'), получим:

$$\frac{\pi^2}{4a^2} \int_0^a \sin^2 \frac{\pi r}{2a} r dr = \frac{p^2 w}{gS} \int_0^a \cos^2 \frac{\pi r}{2a} r dr,$$

откуда

$$\frac{\pi^2}{4a^2} \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \right) = \frac{p^2 w}{gS} \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \right)$$

или

$$p = \frac{2,415}{a} \sqrt{\frac{gS}{w}}.$$

Точное решение\*) дает в этом случае

$$p = \frac{2,404}{a} \sqrt{\frac{gS}{w}}. \quad (181)$$

Ошибка первого приближения меньше, чем  $1/2\%$ .

Чтобы получить более точное приближение для основной формы, а также для частот высших форм колебаний, нужно взять большее число членов ряда (t). Эти высшие формы колебаний будут иметь одну, две, три, ... узловые окружности, на которых при колебаниях перемещения  $v$  равны нулю.

Кроме форм колебаний, симметричных относительно центра, круглая мембрана может также иметь формы с одним, двумя, тремя, ...

\*) Задача о колебаниях круговых мембран подробно исследована Рэлеем; см. его книгу, § 200.

диаметрами, являющимися *узловыми линиями*, вдоль которых прогибы при колебаниях равны нулю. Несколько форм колебаний круглой мембраны показано на рис. 238, где штриховыми линиями даны узловые окружности и узловые диаметры.

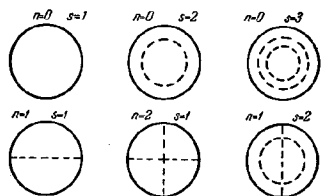


Рис. 238.

Во всех случаях определяющую частоты величину  $p$  можно представить в виде:

$$p_{ns} = \frac{\alpha_{ns}}{a} \sqrt{\frac{gS}{w}}; \quad (182)$$

постоянные  $\alpha_{ns}$  даны в следующей таблице \*. В этой таблице  $n$  обозначает число узловых диаметров и  $s$  — число узловых окружностей (включая окружность контура).

| $s \backslash n$ | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1                | 2,404  | 3,832  | 5,135  | 6,379  | 7,556  | 8,780  |
| 2                | 5,520  | 7,016  | 8,417  | 9,760  | 11,064 | 12,339 |
| 3                | 8,654  | 10,173 | 11,620 | 13,017 | 14,373 | 15,700 |
| 4                | 11,792 | 13,323 | 14,796 | 16,224 | 17,616 | 18,982 |
| 5                | 14,931 | 16,470 | 17,960 | 19,410 | 20,827 | 22,220 |
| 6                | 18,071 | 19,616 | 21,117 | 22,583 | 24,018 | 25,431 |
| 7                | 21,212 | 22,763 | 24,270 | 25,749 | 27,200 | 28,628 |
| 8                | 24,353 | 25,903 | 27,421 | 28,909 | 30,371 | 31,813 |

Выше предполагалось, что мембрана имеет форму полного круга и что она закреплена только по окружности, но легко видеть, что полученные результаты содержат также решение других задач, например о колебаниях мембран, ограниченных двумя concentрическими окружностями и двумя радиусами или мембран в форме сектора. Возьмем, например, мембрану в виде полукруга. Все возможные формы колебаний этой мембраны будут заключаться в числе форм,

которые может иметь круглая мембрана. Нужно только рассматривать как закрепленный край один из узловых диаметров круглой мембраны. Если контур мембраны имеет приближенно форму окружности, то низшая частота колебаний такой мембраны близка к частоте колебаний круговой мембраны, имеющей ту же площадь и то же значение  $Sg/w$ . Представим уравнение, определяющее основную частоту колебаний мембраны, в виде:

$$p = \alpha \sqrt{\frac{gS}{wA}}, \quad (183)$$

где  $A$  — площадь мембраны; тогда  $\alpha$  — коэффициент, значения которого приведены в следующей таблице \*, показывает влияние большего или меньшего отклонения от круговой формы.

Круг

$$\alpha = 2,404 \sqrt{\pi} = 4,261.$$

Квадрат

$$\alpha = \pi \sqrt{2} = 4,443.$$

Четверть круга

$$\alpha = \frac{5,135}{2} \sqrt{\pi} = 4,551.$$

Круговой сектор с центральным углом  $60^\circ$ 

$$\alpha = 6,379 \sqrt{\frac{\pi}{6}} = 4,616.$$

Прямоугольник с отношением сторон 3:2

$$\alpha = \sqrt{\frac{13}{6}} \pi = 4,624.$$

Равносторонний треугольник

$$\alpha = 2\pi \sqrt{\lg 30^6} = 4,774.$$

Полукруг

$$\alpha = 3,832 \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 4,803.$$

Прямоугольник с отношением сторон 2:1

$$\alpha = \pi \sqrt{\frac{5}{2}} = 4,567.$$

Прямоугольник с отношением сторон 3:1

$$\alpha = \pi \sqrt{\frac{10}{3}} = 5,736.$$

В случаях, когда контур отличается от рассмотренных выше, исследование колебаний представляет математические трудности и только

\* Эта таблица вычислена Бурже. См. Ann. l'école normale, т. 3, 1866.

\* Таблица взята из упомянутой книги Рэля, § 211.

в случае эллиптического контура было полностью дано Матье\*). Полное изложение теории колебаний мембран с математической точки зрения дано в книге Покельса\*\*).

**70. Колебания пластин.**— *Общие замечания.* В дальнейшем изложении принимается, что материал пластины идеально упругий, однородный и изотропный и что она имеет постоянную толщину  $h$ , рассматриваемую как малая величина по сравнению с другими размерами пластины. Возьмем плоскость  $xy$  в срединной плоскости пластины и примем, что при малых прогибах\*\*\*) боковые грани элемента, выделенного из пластины сечениями, параллельными плоскостям  $xz$  и  $yz$  (рис. 230), остаются плоскими и нормальными к срединной поверхности пластины. Тогда деформации заштрихованного тонкого слоя, находящегося на расстоянии  $z$  от срединной плоскости, можно получить из простых геометрических соображений и представить следующими выражениями\*\*\*\*):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{z}{R_1} = -z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{z}{R_2} = -z \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\ \varepsilon_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

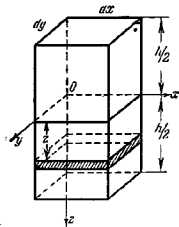


Рис. 230.

где  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  — относительные удлинения в направлениях  $x$  и  $y$ ;  $\varepsilon_{xy}$  — сдвиг в плоскости  $xy$ ;  $v$  — прогиб пластины;  $\frac{1}{R_1}$ ,  $\frac{1}{R_2}$  — кривизна в плоскостях  $xz$  и  $yz$ ;  $h$  — толщина пластины.

Тогда соответствующие напряжения получатся из известных выражений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \\ \tau &= G \varepsilon_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

\*) M. Mathieu, J. Math. (Liouville), т. 13, 1868;

\*\*) F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung  $\Delta u + ku = 0$ , Лейпциг, 1891.

\*\*\*) Эти прогибы считаются малыми по сравнению с толщиной пластины.

\*\*\*\*) Предполагается, что срединная плоскость не испытывает растяжения.

Потенциальная энергия, накопленная при деформации в заштрихованном слое элемента, равна

$$dV = \left( \frac{\varepsilon_{xx} \sigma_x}{2} + \frac{\varepsilon_{yy} \sigma_y}{2} + \frac{\varepsilon_{xy} \tau}{2} \right) dx dy dz,$$

или с учетом выражений (a) и (b)

$$dV = \frac{Ez^3}{2(1-\nu^2)} \left\{ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy dz, \quad (c)$$

откуда, интегрируя, получим потенциальную энергию изгиба пластины

$$V = \iiint dV = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy, \quad (184)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  — изгибная жесткость пластины.

Кинетическая энергия колеблющейся пластины равна

$$T = \frac{\gamma h}{2g} \iint \dot{v}^2 dx dy, \quad (185)$$

где  $\gamma h/g$  — масса единицы площади пластины.

Из этих выражений для  $V$  и  $T$  можно получить дифференциальное уравнение колебаний пластины.

*Колебания прямоугольной пластины.* В случае прямоугольной пластины (рис. 235) со свободно открытыми краями можно поступить как в случае прямоугольной мембраны и взять прогибы пластины при колебаниях в виде двойного ряда

$$v = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \Psi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (d)$$

Легко видеть, что каждый член этого ряда удовлетворяет краевым условиям, требующим, чтобы  $w$ ,  $\partial^2 w / \partial x^2$ ,  $\partial^2 w / \partial y^2$  обращались на контуре в нуль.

Подставляя (d) в выражение (184), получим следующее выражение для потенциальной энергии:

$$V = \frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \Psi_{mn}^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (186)$$

Кинетическая энергия равна

$$T = \frac{\gamma h}{2g} \frac{ab}{4} \sum \sum \dot{\Psi}_{mn}^2. \quad (187)$$



Поступая, как и выше, и рассматривая виртуальное перемещение

$$\delta\varphi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

получим дифференциальное уравнение нормальных колебаний:

$$\frac{\gamma h}{g} \ddot{\varphi}_{mn} + \pi^4 D \varphi_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = 0,$$

откуда

$$\varphi_{mn} = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt,$$

где

$$p = \pi^2 \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right). \quad (188)$$

Отсюда можно легко вычислить частоты низшей формы и высших форм колебаний. Взяв, например, квадратную пластину, получим для низшей формы колебаний

$$f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = \frac{\pi}{\alpha^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}. \quad (189)$$

При рассмотрении высших форм колебаний и их узловых линий можно использовать прежние рассуждения, относящиеся к колебаниям прямоугольной мембраны. Без всяких затруднений также можно получить решение для случая вынужденных колебаний прямоугольной пластины со свободно опертыми краями. Нужно отметить, что без больших математических трудностей могут быть исследованы также случаи колебаний прямоугольной пластины со свободно опертыми двумя противоположными краями и двумя другими краями, свободными или защемленными\*).

Однако задачи о колебаниях прямоугольной пластины, все стороны которой свободны или защемлены, оказываются гораздо более сложными. Для решения этих задач весьма полезным оказался метод Ритца\*\*). Применяя этот метод, положим

$$v = v_0 \cos pt, \quad (e)$$

где  $v_0$  — функция  $x$  и  $y$ , определяющая форму колебаний. Подставив (e) в выражения (184) и (185), получим следующие выражения

для наибольшей потенциальной и кинетической энергии колебаний:

$$V_{\max} = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy,$$

$$T_{\max} = \frac{\gamma h}{2g} p^2 \iint v_0^2 dx dy,$$

откуда

$$p^2 = \frac{2g}{\gamma h} \frac{V_{\max}}{\iint v_0^2 dx dy}. \quad (190)$$

Возьмем теперь функции  $v_0$  в виде ряда

$$v_0 = a_1 \varphi_1(x, y) + a_2 \varphi_2(x, y) + \dots \quad (f)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  — подходящие функции  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие условиям на контуре пластины. Остается только определить коэффициенты  $a_1, a_2, \dots$  таким образом, чтобы обратить в минимум правую часть выражения (190). Таким путем мы придем к системе уравнений типа:

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \iint \left\{ \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{p^2 \gamma h}{gD} v_0^2 \right\} dx dy = 0, \quad (191)$$

линейных относительно постоянных  $a_1, a_2, \dots$ ; приравняв нулю определитель этих уравнений, можно приближенно вычислить частоты различных форм колебаний.

Ритц применил этот метод к изучению колебаний квадратной пластины со свободными краями\*). В этом случае ряд (f) был взят в виде

$$v_0 = \sum \sum a_{mn} u_m(x) v_n(y), \quad (f')$$

где  $u_m(x)$  и  $v_n(y)$  — нормальные функции колебаний для призматического стержня со свободными концами (см. стр. 326). Тогда частоты низшей и высших форм колебаний определяются выражением

$$p = \frac{\alpha}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}, \quad (192)$$

где  $\alpha$  — постоянная, зависящая от формы колебаний. Для трех низших форм колебаний значения этой постоянной следующие\*\*):

$$\alpha_1 = 14,10, \quad \alpha_2 = 20,56, \quad \alpha_3 = 23,91.$$

\* W. Voigt, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, стр. 225, 1893.

\*\* См. W. Ritz, Ann. Physik, т. 28, стр. 737, 1909. Точность метода Ритца исследована в работе: S. Tomatika, Phil. Mag., сер. 7, т. 21, стр. 745, 1935. См. также A. Weinstein, Wei-Zang-Chien, Quart. Appl. Math., т. 1, стр. 61, 1943.

\* См. упомянутую в предыдущей ссылке работу Ритца. Приложения метода Ритца к некоторым другим крайним условиям даны в работе: Dana Young, J. Appl. Mech., т. 17, стр. 448, 1950. См. также статью: G. V. Vainburg, Institution Mechanical Engrs., Лондон, 1954.

\*\* Коэффициент Пуассона принят равным 0,225.

Соответствующие формы колебаний представлены их узловыми линиями на рис. 240. Подробное изучение узловых линий для этого случая и сравнение с экспериментальными результатами даны в упомянутой статье Ритца\*).

Из выражения (192) можно вывести некоторые общие заключения, справедливые также и для других случаев колебаний пластины:

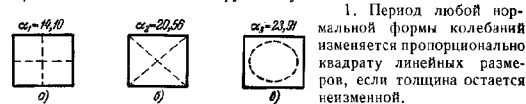


Рис. 240.

1. Период любой нормальной формы колебаний изменяется пропорционально квадрату линейных размеров, если толщина остается неизменной.

2. Если все размеры пластины, включая толщину, увеличить в одинаковое число раз, то период увеличивается пропорционально увеличению линейных размеров.

3. Период изменяется обратно пропорционально квадратному корню из модуля упругости и прямо пропорционально квадратному корню из плотности материала.

*Колебания круглых пластин.* Задача о колебаниях круглых пластин была решена Кирхгофом\*\*, который вычислил также частоты нескольких форм колебаний для пластины со свободным контуром.

Точное решение этой задачи требует использования функций Бесселя. Ниже дается приближенное решение при помощи метода Рэлея—Ритца, который обычно дает высокую частоту с точностью, достаточной для практических приложений. При пользовании этим методом полезно преобразовать к полярным координатам выражения (184) и (185) потенциальной и кинетической энергии. Выбрав систему координат так, как это показано на рис. 241, и придав координате  $x$  малое приращение  $dx$ , из элементарного треугольника  $mns$  получим:

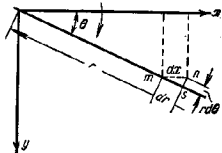


Рис. 241.

$$dr = dx \cos \theta, \quad d\theta = -\frac{dx \sin \theta}{r}.$$

\* Техника получения фигур Хладни была недавно значительно усовершенствована путем применения для возбуждения твердой углекислоты; см. Mary D. Waller, Proc. Phys. Soc. (London), т. 49, стр. 522, 1937.

\*\* J. Math. (Crelle), т. 40, 1850; Gesammelte Abhandlungen, Лейпциг, стр. 237, 1882 или Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik, Лейпциг, Vorlesung 30, 1876.

Далее, рассматривая прогиб  $v$  как функцию  $r$  и  $\theta$ , получим:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}.$$

Таким же образом найдем:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}.$$

Продолжая процесс дифференцирования, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \left( \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + \\ &\quad + 2 \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}, \end{aligned} \quad (g)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} - \\ &\quad - 2 \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2}, \end{aligned} \quad (h)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r^2} - \\ &\quad - \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2}, \end{aligned} \quad (i)$$

откуда найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^2 &= \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) - \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right\}^2. \end{aligned}$$

Подставив в выражение (184) и взяв начало координат в центре пластины, получим:

$$\begin{aligned} V &= \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right\}^2 \right] r dr d\theta, \end{aligned} \quad (193)$$

где  $a$  — радиус пластины.

Если изгиб пластины симметричен относительно центра, то  $v$  будет функцией только  $r$  и выражение (193) примет вид:

$$V = \pi D \int_0^a \left\{ \left( \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{d^2 v}{dr^2} \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right\} r dr. \quad (194)$$

В случае заземленной по контуру пластины интеграл

$$\int_0^a \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) - \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right\}^2 \right] r dr d\theta$$

обращается в нуль, и из (193) получим:

$$V = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right)^2 r d\theta dr. \quad (195)$$

Если изгиб такой пластины симметричен относительно центра, то имеем:

$$V = \pi D \int_0^a \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 r dr. \quad (196)$$

Выражение для кинетической энергии в полярных координатах имеет вид:

$$T = \frac{\gamma h}{2g} \int_0^{2\pi} \int_0^a \dot{v}^2 r d\theta dr, \quad (197)$$

а в случае симметричных колебаний

$$T = \frac{\pi \gamma h}{g} \int_0^a \dot{v}^2 r dr. \quad (198)$$

Пользуясь найденными выражениями для потенциальной и кинетической энергии, можно определить собственные частоты колебаний круглой пластины для различных частных случаев<sup>\*</sup>.

*Круглая пластина, заземленная по контуру.* Задача о заземленной по контуру круглой пластине имеет практический интерес в связи с приложением к телефону и другим устройствам. Применяя метод Рэлея — Ритца, примем

$$v = v_0 \cos pt, \quad (j)$$

где  $v_0$  — функция  $r$  и  $\theta$ .

<sup>\*</sup> Вынужденные колебания круглых пластин изучены в работе: W. Flügge, Z. techn. Physik, т. 13, стр. 139, 1932.

При низкой форме колебаний изогнутой поверхности пластины симметрична относительно ее центра и  $v_0$  будет функцией только  $r$ . Если взять  $v_0$  в виде ряда

$$v_0 = a_1 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 + a_2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^3 + \dots, \quad (k)$$

то условие симметрии будет удовлетворено. Условия на контуре также удовлетворяются, так как каждый член ряда (k) и его первая производная обращаются в нуль при  $r = a$ .

Дифференциальное уравнение (191) в рассматриваемом случае принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^a \left\{ \left( \frac{d^2 v_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_0}{dr} \right)^2 - \frac{p^2 \gamma h}{gD} v_0^2 \right\} r dr = 0. \quad (199)$$

Взяв только один член ряда (k) и подставив его в (199), получим:

$$\frac{96}{9a^2} - \frac{p^2 \gamma h a^2}{gD} = 0,$$

откуда

$$p = \frac{10,33}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}. \quad (200)$$

Чтобы получить лучшее приближение, возьмем два члена ряда (k), тогда

$$\int_0^a \left( \frac{d^2 v_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_0}{dr} \right)^2 r dr = \frac{96}{9a^2} \left( a_1^2 + \frac{3}{2} a_1 a_2 + \frac{9}{10} a_2^2 \right),$$

$$\int_0^a v_0^2 r dr = \frac{a^2}{10} \left( a_1^2 + \frac{5}{3} a_1 a_2 + \frac{5}{7} a_2^2 \right).$$

Уравнения (199) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \left( \frac{192}{9} - \frac{x}{5} \right) + a_2 \left( \frac{144}{9} - \frac{x}{6} \right) &= 0, \\ a_1 \left( \frac{144}{9} - \frac{x}{6} \right) + a_2 \left( \frac{96}{5} - \frac{x}{7} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

где

$$x = a^4 p^2 \frac{\gamma h}{gD}. \quad (m)$$

Приравняв нулю определитель системы уравнений (l), получим:

$$x^2 - \frac{204,48}{5} x + 768 \cdot 36 \cdot 7 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 104,3, \quad x_2 = 1854.$$

Подставив в (м), получим:

$$p_1 = \frac{10,21}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}, \quad p_2 = \frac{43,04}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}, \quad (201)$$

где  $p_1$  представляет собой второе приближение к частоте нижней формы колебаний пластины, а  $p_2$  дает грубое приближение к частоте второй формы колебаний, когда колеблющаяся пластина имеет одну узловую окружность. Используя этот метод, можно также исследовать формы колебаний с узловыми диаметрами.

Во всех случаях частота колебаний определяется выражением

$$p = \frac{\alpha}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}. \quad (202)$$

Значения постоянной  $\alpha$  для данного числа  $s$  узловых окружностей и данного числа  $n$  узловых диаметров приведены в следующей таблице:

| $s \backslash n$ | 0     | 1     | 2     |
|------------------|-------|-------|-------|
| 0                | 10,21 | 21,22 | 34,84 |
| 1                | 39,78 | —     | —     |
| 2                | 88,90 | —     | —     |

В случае тонких пластин на частоту заметно повлиять масса воздуха или жидкости, в которой колеблется пластина. Чтобы учесть это для нижней формы колебаний, следует заменить приведенную выше формулу (202) формулой \*)

$$p_1 = \frac{10,21}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}, \quad (203)$$

где

$$\beta = 0,6689 \frac{\gamma_1}{\gamma} \frac{a}{h},$$

а  $\gamma_1/\gamma$ —отношение плотности жидкости к плотности материала пластины.

Взяв, например, стальную пластину диаметром 14 см и толщиной 0,25 см, колеблющуюся в воде, получим:

$$\beta = 0,6689 \frac{1}{7,8} 28 = 2,40; \quad \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} = 0,542.$$

Частота нижней формы колебаний уменьшается до 0,542 своего первоначального значения.

*Другие типы граничных условий.* Частоты колебаний колеблющихся круглых пластин во всех случаях можно вычислять по формуле (202). Численные значения множителя  $\alpha$  даны в нижеприведенных таблицах.

Для свободной круглой пластины с  $n$  узловыми диаметрами и  $s$  узловыми окружностями  $\alpha$  имеет следующие значения \*):

| $s \backslash n$ | 0     | 1     | 2     | 3     |
|------------------|-------|-------|-------|-------|
| 0                | —     | —     | 5,251 | 12,23 |
| 1                | 9,076 | 20,52 | 35,24 | 52,91 |
| 2                | 38,52 | 59,86 | —     | —     |

Для круглой пластины с закрепленным центром, имеющей  $s$  узловых окружностей,  $\alpha$  имеет следующие значения \*\*):

| $s$      | 0    | 1     | 2     | 3     |
|----------|------|-------|-------|-------|
| $\alpha$ | 3,75 | 20,91 | 60,63 | 119,7 |

Частоты колебаний с узловыми диаметрами такие же, как и в случае свободной пластины.

*Влияние растягивающих (цепных) усилий в срединной поверхности пластины.* В изложенной теории было принято, что прогибы пластины малы по сравнению с ее толщиной. Если колеблющаяся пластина находится под действием настолько значительного статического давления, что прогибы, вызванные этим давлением, не малы по сравнению с толщиной пластины, то при вычислении частот нужно учесть растягивающие (цепные) усилия в срединной поверхности пластины. Вследствие сопротивления пластины эти усилия, жесткость пластины и частота колебаний возрастают с увеличением

\*) Коэффициент Пуассона взят равным  $1/2$ .

\*\*\*) См. статью: R. V. Southwell, Proc. Roy. Soc. (Лондон), А, т. 101, стр. 133, 1922; в этих вычислениях взято  $\nu=0,3$ .

\*) Эта задача рассмотрена в работе: H. Lamb, Proc. Roy. Soc. (Лондон), т. 93, стр. 205, 1921.

давления на пластину\*). Чтобы установить, как влияют на частоту растягивающие усилия в срединной поверхности, вновь рассмотрим случай круглой пластины, защемленной по контуру, и примем, что прогибы пластины при равномерно распределенном давлении определяются уравнением\*\*)

$$v_0 = a_1 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right). \quad (k')$$

Кроме перемещений  $v_0$ , перпендикулярных к плоскости пластины, точки срединной плоскости пластины имеют радиальные перемещения  $u$ , равные нулю в центре и на защемленном контуре пластины. Относительное изменение срединной поверхности в радиальном направлении, возникающее от перемещений  $v_0$  и  $u$ , равно

$$\epsilon_r = \frac{1}{2} \left( \frac{dv_0}{dr} \right)^2 + \frac{du}{dr}. \quad (n)$$

Относительное удлинение в окружном направлении

$$\epsilon_t = \frac{u}{r}. \quad (o)$$

Для приближенного решения задачи примем, что радиальные перемещения представляются рядом

$$u = r(a-r)(c_1 + c_2 r + c_3 r^2 + \dots), \quad (p)$$

каждый член которого удовлетворяет граничным условиям.

Взяв только первые два члена ряда (p) и подставляя (p) и (k) в выражения (n) и (o), получим деформацию срединной поверхности; теперь можно определить энергию, соответствующую растяжению срединной поверхности, в виде:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\pi E h}{1-\nu^2} \int_0^a (\epsilon_r^2 + \epsilon_t^2 + 2\nu \epsilon_r \epsilon_t) r dr = \\ &= \frac{\pi E h a^2}{1-\nu^2} \left( 0,250 c_1^2 a^2 + 0,1167 c_2^2 a^4 + 0,300 c_1 c_2 a^3 - \right. \\ &\quad \left. - 0,00846 c_1 a \frac{8a_1^2}{a^2} + 0,00682 c_2 a^2 \frac{8a_1^2}{a^2} + 0,00477 \frac{64a_1^4}{a^4} \right). \quad (q) \end{aligned}$$

Определив постоянные  $c_1$  и  $c_2$  так, чтобы обратить  $V_1$  в минимум, получим из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial c_1} &= 0, & \frac{\partial V_1}{\partial c_2} &= 0, \\ c_1 &= 1,185 \frac{a_1^2}{a^2}, & c_2 &= -1,75 \frac{a_1^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Подставляя в выражение (q), найдем:

$$V_1 = 2,59 \pi D \frac{a_1^4}{a^2 h^3}.$$

Прибавив эту энергию растяжения к энергии изгиба (196), получим

$$V = \frac{32}{3} \pi D \frac{a_1^2}{a^2} + 2,59 \pi D \frac{a_1^4}{a^2 h^3} = \frac{32}{3} \pi D \frac{a_1^2}{a^2} \left( 1 + 0,244 \frac{a_1^2}{h^2} \right). \quad (r)$$

Второй член в скобках представляет поправку на растяжение срединной поверхности пластины. Легко видеть, что эта поправка мала и ею можно пренебречь, если только прогиб  $a_1$  центра пластины мал по сравнению с толщиной  $h$ . Статический прогиб пластины под действием равномерно распределенного давления  $w$  можно теперь найти из уравнения виртуальных перемещений

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} \delta a_1 = 2\pi w \delta a_1 \int_0^a \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 r dr = \delta a_1 \frac{\pi w a^2}{3},$$

откуда

$$a_1 = \frac{w a^4}{64 D} \frac{1}{1 + 0,488 \frac{a_1^2}{h^2}}. \quad (204)$$

Последний множитель в правой части выражает влияние растяжения срединной поверхности. Вследствие этого влияния прогиб  $a_1$  уже не пропорционален  $w$  и жесткость пластины увеличивается с ростом прогиба. Взяв, например,  $a_1 = 0,5h$ , получим из (204):

$$a_1 = 0,89 \frac{w a^4}{64 D}.$$

Этот прогиб на 11% меньше, чем прогиб, полученный без учета растяжения срединной поверхности.

Из выражения (r) потенциальной энергии, которое содержит не только квадрат, но и четвертую степень прогиба  $a_1$ , можно сразу заключить, что колебания пластины относительно ее плоской конфигурации не являются *изохронными* и частота будет увеличиваться с возрастанием амплитуды колебаний. Рассмотрим теперь малые колебания пластины относительно изогнутого состояния, определяемого уравнением (k'). Предполагается, что этот изгиб вызван некоторым

\*) Такое возрастание частоты было установлено экспериментально. См. статью: J. H. P. o w e l l, J. H. T. R o b e r t s, Proc. Phys. Soc. (Лондон), т. 35, стр. 170, 1923.

\*\*) Это уравнение представляет прогибы при пренебрежении растягивающими усилиями в срединной поверхности. Оно может быть также использовано для приближенной оценки влияния растягивающих усилий.

постоянным, равномерно распределенным статическим давлением  $\omega$ . Если  $\Delta$  обозначает амплитуду этих колебаний, то увеличение потенциальной энергии деформации вследствие дополнительного изгиба пластины получится из выражения ( $\gamma$ ) и равно\*)

$$\delta V = \frac{32}{3} \frac{\pi D}{a^2} \left[ 2a_1 \Delta + \Delta^2 + \frac{0,244}{h^2} (4a_1^2 \Delta + 6a_1^2 \Delta^2) \right].$$

Работа, совершаемая постоянным давлением  $\omega$  при этом увеличении прогиба, равна

$$\delta W = \frac{\pi a^2 \omega \Delta}{3} = \frac{\pi \omega^2 \Delta}{3} \frac{64 a_1 D \left( 1 + 0,438 \frac{a_1^2}{h^2} \right)}{a^4}.$$

Полное изменение потенциальной энергии системы

$$\delta V - \delta W = \frac{32 \pi D \Delta^2}{3} \frac{1 + 1,464 \frac{a_1^2}{h^2}}{a^2}.$$

Приравняв ее наибольшей кинетической энергии

$$T_{\max} = \frac{\pi \Delta^2 \rho^2 \gamma h}{g} \int_0^a \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^4 r dr = \frac{\pi \Delta^2 a^2 \gamma h}{10g} \rho^2,$$

получим:

$$\rho = \frac{10,33}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}} \sqrt{1 + 1,464 \frac{a_1^2}{h^2}}. \quad (205)$$

Сравнивая этот результат с формулой (200), можно заключить, что последний множитель в правой части выражения (205) представляет поправку на растяжение срединной поверхности пластины.

Нужно отметить, что в изложенной теории было использовано уравнение ( $k'$ ) для прогиба пластины и не было учтено влияние растяжения на форму изогнутой поверхности. Поэтому формула (205) будет достаточно точной только при не слишком больших прогибах, например  $a_1 \leq h$ . В противном случае нужно учесть влияние растяжения срединной поверхности на форму изогнутой поверхности\*\*).

**71. Колебания турбинных дисков.**— *Общие замечания.* Теперь с полной ясностью установлено, что поломки, которые происходят в турбинных дисках и которые нельзя объяснить дефектами материала или чрезмерными напряжениями, вызванными центробежными силами, следует отнести на счет изгибных колебаний этих дисков. В этом отношении можно отметить, что прямые эксперименты пока-

зали\*), что такие колебания при определенных скоростях турбины становятся весьма заметными и вызывают значительные дополнительные изгибные напряжения, которые могут привести к усталости металла и постепенному развитию трещин, начинающихся обычно у контура отверстий для подачи пара и в других местах нарушения непрерывности турбинного диска, где имеется концентрация напряжений.

Существуют различные причины, которые могут вызвать эти изгибные колебания турбинных дисков, но наиболее важной является неравномерность давления пара. Местное давление, действующее на периферии вращающегося диска, достаточно, чтобы при определенных скоростях поддерживать поперечные колебания диска; эксперименты показывают, что приложение местной нагрузки всего в несколько фунтов ободу вращающегося диска (как, например, действия небольшого электромагнита) заставляет диск сильно колебаться при ряде критических скоростей.

Допустим теперь, что в соплах существуют некоторые нарушения, которые вызывают неравномерность давления пара, и пусть турбинный диск вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  в поле такого давления. Тогда для определенного участка обода диска давление будет изменяться вместе с углом поворота диска, что можно представить периодической функцией, период которой равен времени одного оборота диска. В самом общем случае эта функция может быть представлена тригонометрическим рядом:

$$\omega = a_0 + a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + \dots + b_1 \cos \omega t + b_2 \cos 2\omega t + \dots$$

Беря только один член ряда, например  $a_1 \sin \omega t$ , получаем периодическую возмущающую силу, которая может вызвать большие поперечные колебания диска, если частота  $\omega/2\pi$  силы совпадает с одной из собственных частот  $p/2\pi$  диска. Отсюда ясно, что определение собственных частот диска может иметь большое практическое значение.

Вращающийся диск, как и круглая пластина, может иметь различные формы колебаний, которые можно разделить на два класса.

1. Колебания, симметричные относительно центра, с узловыми линиями в виде концентрических окружностей.

2. Несимметричные колебания с узловыми диаметрами.

Эксперименты показывают, что симметричные колебания встречаются очень редко и повреждения дисков нельзя связывать с этим классом колебаний.

\*) Члены, содержащие  $\Delta^3$  и  $\Delta^4$ , в этом выражении опущены.

\*\*). Этот вопрос рассмотрен в работе: K. Federhofer, Österr. Ing.-Arch., т. 2, стр. 325, 1948.

\*) См. статья: Wilfred Campbell, Trans. ASME, т. 46, стр. 31, 1924; J. von Freudenreich, Engineering, т. 119, стр. 2, 1925.

рассмотрении несимметричных колебаний можно принять, что диск имеет форму

$$v = v_0 \sin n\theta \cos pt, \quad (a)$$

и выше,  $v_0$  — функция только радиального расстояния  $r$ ,  $\theta$  — угловое положение рассматриваемой точки и  $n$  — предельное число узловых диаметров.

можно также принять в форме

$$v = v_0 \cos n\theta \sin pt. \quad (a')$$

из (a) и (a'), получаем

$$v = v_0 (\sin n\theta \cos pt \pm \cos n\theta \sin pt) = v_0 \sin (n\theta \pm pt),$$

т. е. движение, описывающее систему бегущих волн. Угловая скорость смещения этих волн, движущихся вокруг диска, найдется из

$$n\theta \pm pt = \text{const}$$

$$\theta = \pm \frac{p}{n} t + \text{const}.$$

Из (a) и (a'), мы получим две скорости  $-p/n$  и  $+p/n$ , которые соответствуют направлениям движения волн, движущихся навстречу друг другу. Эксперименты Кэмпбелла\*) доказали наличие этих двух серий вращающихся дисков и показали также, что амплитуды колебаний, движущихся по направлению вращения диска, больше, чем амплитуды, движущихся по направлению вращения диска. В случае резонанса, когда скорость этих волн точно совпадает со скоростью вращения диска, т. е. когда эти волны становятся неподвижными в пространстве. Эксперименты показывают, что колебания и является в большинстве случаев причиной разрушения дисков.

Изменение частот колебаний диска. Для определения частот колебаний турбинных дисков очень полезен метод Стодола (\*\*). Применяя этот метод, примем, что изгиб диска имеет форму

$$v = v_0 \sin n\theta \cos pt. \quad (a'')$$

\* Сноску на стр. 437.

\*\* Стодола, Schweiz Bauzeitung, т. 63, стр. 112, 1914). Дальнейшее развитие вопроса см. в работе: I. Maikín, J. Franklin Inst., 355, 1942.

В частном случае колебаний, симметричных относительно центра, прогиб будет

$$v = v_0 \cos pt. \quad (b)$$

Для этого частного случая, имеем из (194) наибольшую потенциальную энергию деформации

$$V_{\max} = \pi \int_b^a D \left\{ \left( \frac{d^2 v_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_0}{dr} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{d^2 v_0}{dr^2} \frac{1}{r} \frac{dv_0}{dr} \right\} r dr, \quad (c)$$

где  $a$ ,  $b$  — внешний и внутренний радиусы диска,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  — изгибная жесткость диска, которая в этом случае будет переменной из-за переменной толщины диска.

При рассмотрении колебаний вращающегося диска нужно учитывать не только энергию деформации, но и энергию, соответствующую работе, совершаемой при изгибе центробежными силами. Легко видеть, что центробежные силы создают дополнительное сопротивление изгибу диска, чем вызывается увеличение собственной частоты колебаний. Для вычисления работы, совершаемой центробежными силами, выделим из диска элемент  $dr$  двумя цилиндрическими поверхностями, имеющими радиусы  $r$  и  $r+dr$  (рис. 242). Радиальное перемещение этого элемента по направлению к центру, вызванное изгибом, равно

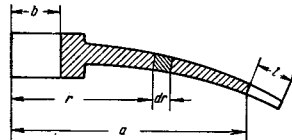


Рис. 242.

$$\frac{1}{2} \int_b^r \left( \frac{dv_0}{dr} \right)^2 dr.$$

Масса элемента составляет

$$\frac{2\pi r h \gamma}{g} dr,$$

а работа, совершаемая при изгибе действующими на этот элемент центробежными силами, равна

$$-\frac{2\pi r^3 \omega^2 h \gamma}{g} dr \frac{1}{2} \int_b^r \left( \frac{dv_0}{dr} \right)^2 dr. \quad (d)$$

Энергия, соответствующая этой работе центробежных сил, получится суммированием выражений (d) в следующей форме:

$$(V_1)_{\max} = \int_b^a \frac{\pi r^3 \omega^2 h \gamma}{g} dr \int_b^r \left( \frac{dv_0}{dr} \right)^2 dr. \quad (e)$$

Наибольшая кинетическая энергия определится выражением

$$T = \int_b^a \frac{2\pi r \gamma h}{2g} \dot{v}^2 dr.$$

Подставив сюда выражение (b) вместо  $v$ , получим:

$$T_{\max} = \frac{\pi \gamma p^2}{g} \int_b^a h v_0^2 dr. \quad (f)$$

Теперь из уравнения

$$V_{\max} + (V_1)_{\max} = T_{\max}$$

найдем:

$$p^2 = \frac{V_{\max} + (V_1)_{\max}}{\frac{\pi \gamma}{g} \int_b^a h v_0^2 dr}. \quad (g)$$

При вычислении собственной частоты кривая изгиба  $v_0$  должна быть выбрана так, чтобы выражение (g) стало минимальным. Это можно выполнить графически, принимая для  $v_0$  подходящую кривую, из которой можно получить для ряда равноотстоящих точек значения  $v_0$ ,  $dv_0/dr$  и  $d^2v_0/dr^2$ ; тогда можно вычислить выражения (c), (e) и (f). Постепенно меняя форму кривой  $v_0$ , из выражения (g) можно получить удовлетворительное приближение для низшей частоты \*).

Чтобы учесть влияние лопаток на собственные частоты колебаний, интегрирование в выражениях (e) и (f) для работы центробежных сил и кинетической энергии нужно распространить от  $b$  до  $a+l$ , где  $l$  обозначает длину лопатки. При этих вычислениях лопатки можно считать остающимися прямыми в процессе колебаний диска, так что не потребуются никакого дополнения к потенциальной энергии (c).

Для аналитического вычисления низшей частоты колеблющегося диска возьмем  $v_0$  в виде ряда

$$v_0 = a_1 (r-b)^2 + a_2 (r-b)^3 + a_3 (r-b)^4 + \dots,$$

который удовлетворяет условиям заделки на внутреннем контуре диска, где  $v_0$  и  $dv_0/dr$  обращаются в нуль. Коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, \dots$  нужно выбрать так, чтобы обратил выражение (g) в минимум. Поступая, как пояснено в предыдущем параграфе (см. стр. 427), можно

\* Подобный графический способ был предложен Стодолой; см. предыдущую сноску. Этот способ применен также в работе: E. Oehler, Z. Ver. leit. Ing., т. 69, стр. 335, 1925 и дал хорошие совпадения с экспериментальными результатами.

получить систему уравнений, линейную относительно  $a_1, a_2, a_3, \dots$  и подобную уравнениям (193). Приравняв нулю определитель этих уравнений, получим частотное уравнение.

В случае, когда форма колебаний имеет узловые диаметры, для приблигов нужно использовать выражение ( $a''$ ) вместо (b). Потенциальная энергия найдется из выражения (193); нужно только учесть, что в турбинных дисках толщина и изгибная жесткость  $D$  меняются с радиальным расстоянием  $r$ , так что величина  $D$  должна быть оставлена под знаком интеграла. Затем можно найти выражения  $V_1$  и  $T$  и, в конце концов, определить частоту из уравнения (g) точно таким же образом, как это пояснено выше для случая симметричной формы колебаний \*).

Если диск неподвижен, то величина  $V_1$  равна нулю и из выражения (g) получим:

$$p_1^2 = \frac{V_{\max}}{\frac{\pi \gamma}{g} \int_b^a h v_0^2 dr}, \quad (g')$$

что определит частоту колебаний при действии только упругих сил.

Другой предельный случай получается, когда диск весьма гибок и восстанавливающие силы при колебаниях вызываются только центробежными силами. Такие условия встречаются, например, при экспериментах с гибкими резиновыми дисками. В этом случае частота определится выражением

$$p_2^2 = \frac{(V_1)_{\max}}{\frac{\pi \gamma}{g} \int_b^a h v_0^2 dr}. \quad (g'')$$

Из выражения (g) имеем:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2. \quad (h)$$

Если каким-либо способом определены частоты  $p_1$  и  $p_2$ , то результирующая частота колебаний диска найдется из выражения (h). Для диска постоянной толщины, закрепленного в центре, точное решение для  $p_1$  и  $p_2$  получил Саусвелл \*\*).

Он дал для  $p_1^2$  выражение

$$p_1^2 = \frac{\alpha Dg}{a^2 \gamma h}. \quad (i)$$

\* Формулы для этих вычислений подробно вывел Стодола; см. сноску на стр. 438.

\*\* См. его работу, упомянутую на стр. 423.



Значения постоянной  $\alpha$  для данного числа  $n$  узловых диаметров и данного числа  $s$  узловых окружностей\*):

|  |     |      |      |      |     |
|--|-----|------|------|------|-----|
| $\begin{array}{c ccc} & n & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline s & & & & & \end{array}$ | 0   | 14.1 | 0    | 29   | 156 |
| 1  | 438 | 422  | 1210 | 2840 |     |

Формула для вычисления  $p_2^2$  будет

$$p_2^2 = \lambda \omega^2, \quad (j)$$

где  $\omega$  — угловая скорость и  $\lambda$  — постоянная, которая берется из следующей таблицы:

|  |     |      |      |      |      |
|--|-----|------|------|------|------|
| $\begin{array}{c ccc} & n & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline s & & & & & \end{array}$ | 0   | 0    | 1    | 2,35 | 4,05 |
| 1  | 3,3 | 5,95 | 8,95 | 12,3 |      |

Определив  $p_1^2$  и  $p_2^2$  по формулам (i) и (j), найдем частоту колебаний вращающегося диска по формуле (h\*\*).

В изложенной выше теории не учитывалось влияние неравномерного нагрева диска. При работе турбины обод диска имеет более высокую температуру, чем стенка диска. Вследствие этого возникают сжимающие напряжения в обode и растягивающие напряжения в стенке, что может значительно повлиять на собственные частоты. Эксперименты и вычисления\*\*\*) показывают, что при таком неравномерном нагреве частота колебаний без узловых диаметров или с одним узловым диаметром увеличивается, а при большем числе узловых диаметров частота уменьшается.

\*) Все другие обозначения остаются теми же, что и для круглых пластин (см. стр. 430). Коэффициент Пуассона был взят равным 0,3.

\*\*) Дифференциальное уравнение колебаний диска переменной толщины дано в работе: F. D. u. b. o. i. s., Schweiz. Bauzeitung, т. 89, стр. 149, 1927.

\*\*\*) См. упомянутую на стр. 437 работу Фрейденрейха.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоколебания 119  
 Амплитуда колебаний 13  
 Амплитудомер 24
- Балансировка машин см. Уравновешивание
- Балки, изгибно-крутильные колебания 392  
 — на упругом основании 305  
 — неразруная, свободные колебания 331  
 — переменного поперечного сечения 373  
 — с опертными концами 334, 389
- Бинния 200  
 Бубнова — Галеркина метод 376
- Вал колесчатый, крутильные колебания 255  
 — круглый, крутильные колебания 309  
 — митохонорный, поперечные колебания 261  
 — с несколькими дисками 249  
 — эквивалентный 18, 240
- Вес балки приведенный 398
- Выбор 59  
 Виброграф 55  
 Виброметр Фуллартота 61
- Гаситель колебаний динамический 204  
 Генератор 89
- Давление колеса локомотива на рельс 61  
 — неустойчивое 77  
 — упругое 77
- Декарт логарифмический 76  
 Демпфирование 69  
 — влияние на крутильные колебания при резонансе 252  
 — критическая величина 76
- Деформируемость вала, влияние на уравновешивание роторов 286
- Динамомашинка однофазная 89  
 Диски турбинные 436  
 — эквивалентные 257
- Жесткость пластин изгибаемая 425  
 — при свободном кручении 393  
 — секторальная 393
- Закон Кулона — Мора 69  
 Затухание отрицательное 77, 172
- Индикатор паровых машин 61
- Клино, колебания 374  
 Колебания вынужденные 45, 46, 49, 79, 201, 249, 297, 352, 356  
 — — нелинейные 156  
 — — с вязким сопротивлением 78  
 — — с сухим трением и другими видами демпфирования 93
- Колебания гармонические 11  
 — изгибно-крутильные 392  
 — крутильные 17, 249, 255, 309, 410  
 — нелинейные, графический метод 135  
 — поперечные 261, 314  
 — радиальные 409  
 — с демпфированием 69, 76, 181, 252  
 — самовозбуждающиеся 119  
 — свободные (собственные) 9, 186, 229, 289, 314, 321, 331
- Колебания свободные, метод последовательных приближений 148  
 — — нелинейные, численное решение 141  
 — с вязким сопротивлением 72  
 — с сухим трением 80
- Кольцо круглое 409  
 — — колебания изгибные 411  
 — — — крутильные 410  
 — — — радиальные 409
- Консоль 378, 389  
 Координаты главные 191  
 Корпус судовой, колебания 380  
 Коэффициент динамический 46, 80, 94  
 — жесткости 9, 19, 56  
 — — приведенный 25  
 — передачи сил 88  
 — постели 365  
 — трения 69
- Кривая амплитудная 158  
 Кулона — Мора закон 69
- Линия узловая 422  
 — электропередачи, колебания 122
- Масса приведенная 24, 398  
 Машинка балластическая 64  
 — — Акимова 87  
 — — Вестингауза 64, 67  
 — — Лавача — Хейманна 65  
 — — Зодерберга — Трамлера 58
- Маятник 26  
 — — двойной сферический 185  
 — — маятник двойной физической 194  
 — — математический 153  
 — — переменной длины 171  
 — — маятники связанные простые 192
- Мсбарина 414  
 — — круглая 420  
 — — прямоугольная 415
- Метод Бубнова — Галеркина 376  
 — графический 135  
 — последовательных приближений 148  
 — Рунда 162, 368  
 — Рунда 30, 368  
 — усреднения 163
- Методы приближенные вычисления собственных частот 239  
 — — численные определения частот поперечных колебаний 383
- Мосты, колебания 346

- Неуравновешенность статическая 63  
 Неустойчивость систем с переменными упругими характеристиками 175  
 Ортогональность нормальных функций 317  
 Отклонение статическое 94  
 Передачи зубчатые 237  
 Период колебаний 11  
 Пластина 424  
 — круглая 428  
 — прямоугольная 425  
 Поглотитель колебаний с сухим трением (поглотитель Ланчестера) 258  
 Подвеска автомобильного двигателя 90  
 — машины с демпфированием 87  
 — упругая 54  
 Препрессия вращающегося вала, вызванная гистерезисом 223  
 Принцип наложения 338  
 Прогиб рельса 110  
 Процесс переходный 50  
 Равновесие динамическое 216  
 — статическое 216  
 Режим установившийся 46, 156  
 Резонанс 47  
 — субгармонический 161  
 Рельс, прогиб 110  
 Ритца метод 162, 365  
 Ротор на подаваемых пластинках 279  
 Рэлея метод 30, 368  
 Сдвиг фазы 13  
 Сечание поперечное узловое 19, 319  
 Сила возмущающая 45  
 — вязкого трения 70  
 — движущаяся вдоль балки 340, 344  
 — критическая для балки 342  
 Система с двумя степенями свободы 184, 186, 201  
 — с нелинейными характеристиками 124  
 — с несколькими степенями свободы 229 и д.  
 — с одной степенью свободы 9  
 Системы с зубчатыми передачами 237  
 Скорость вращения критическая 39, 265, 270  
 — второго порядка 282, 285  
 Сопротивление вязкое 72, 78  
 — эквивалентное 72, 93  
 Степени свободы 184  
 Стержень конический 378  
 — приватический 289, 297, 314, 321, 400  
 —, колебания продольные вынужденные 297  
 —, — свободные 289 и д.  
 Стержень с грузом на конце 302  
 — с концами заделанными 327  
 — — свободными 326  
 Тахометр Фрама 60  
 Тело упругое 289 и д.  
 Теоремы взаимности 263  
 Трение внутреннее материала вала 71  
 — вязкое 70  
 —, коэффициент 69  
 — сухое 90, 93  
 Удар поперечный 396  
 — продольный 400  
 Уравнение связей 185  
 — частотное 187, 230, 235, 291, 311, 316, 321, 371  
 — энергии 22  
 Уравновешивание вращающихся машин 62  
 — роторов 286  
 Условия неустойчивости систем с переменными упругими характеристиками 175  
 — резонанса 46  
 Устойчивость движения 77  
 — устанавливается 216, 219  
 Участки вала эквивалентные 257  
 Флаттер самолета 222  
 Форма колебаний 253  
 — колебания высшая 234  
 — — главная 188  
 — — вторая 188  
 — — первая 188  
 — — нормальная 253, 315  
 — — основная 234  
 Фрама тахометр 60  
 Функции нормальные 291  
 —, ортогональность 317  
 Характеристика гистерезисная 223  
 Частота колебаний 11  
 — угловая 12  
 Шимми автомобильного колеса 222  
 Экипажи, колебания их 196  
 Энергия потенциальная деформации пружины 23  
 Эффект гироскопический вращающегося диска 277

Станан Прокофьевич Тимошенко. Колебания в инженерном деле

М., 1967 г., 444 стр. с илл.

Редактор Н. И. Розвальская

Техн. редактор К. Ф. Брудно

Корректор Н. В. Герасюкина

Сдан в набор 2/1 1967 г. Подписано к печати 16/VI 1967 г. Бумага 60×90<sup>1/2</sup>, физ. печ. л. 27,75. Условн. печ. л. 27,75. Уч.-изд. л. 27,15. Тираж 15 000 экз. Цена книги 2 р. 20 к. Заказ 1305.

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Орден Трудового Красного Знамени  
 Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова  
 Главноиздательство Комитета по печати при Совете Министров СССР  
 Москва, Ж-54, Валовая, 23.