

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Основные положения, допущения и обозначения

Уравнения равновесия элементарного параллелепипеда и элементарного тетраэдра. Нормальные и касательные напряжения по наклонной площадке

Определение главных напряжений и наибольших касательных напряжений в точке. Напряжения по октаэдрическим площадкам

Понятие о перемещениях. Зависимости между деформациями и перемещениями. Относительная линейная деформация в произвольном направлении

Уравнения совместности деформаций. Закон Гука для изотропного тела

Плоская задача в прямоугольных координатах

Плоская задача в полярных координатах

Возможные решения задач теории упругости. Решения задач в перемещениях и напряжениях

Наличие температурного поля. Краткие выводы по разделу

ПРОСТЕЙШИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

Уравнения в цилиндрических координатах

Уравнения в цилиндрических координатах (продолжение)

Деформация толстостенного сферического сосуда

Сосредоточенная сила, действующая на плоскость

Частные случаи загрузки упругого полупространства: равномерная загрузка по площади круга, загрузка на площади круга по "полушару", обратная задача

Вдавливание абсолютно жесткого шара в упругое полупространство. Задача об упругом смятии шаров

ТОЛСТОСТЕННЫЕ ТРУБЫ

Общие сведения. Уравнение равновесия элемента трубы

Исследование напряжений при давлении на одном из контуров. Условия прочности при упругой деформации

Напряжения в составных трубах. Понятие о расчете многослойных труб

Примеры расчетов

ПЛАСТИНЫ, МЕМБРАНЫ

Основные определения и гипотезы

Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины в прямоугольных координатах

Цилиндрический и сферический изгиб пластины

Изгибающие моменты при осесимметричном изгибе круглой пластины. Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности круглой пластины

Граничные условия в круглых пластинах. Наибольшие напряжения и прогибы. Условия прочности. Температурные напряжения в пластинах

Определение усилий в мембранах. Цепные усилия и напряжения. Приближенное определение прогибов и напряжений в круглых мембранах

Примеры расчетов

Примеры расчетов (продолжение)

1.1 Основные положения, допущения и обозначения

Теория упругости имеет целью аналитическое изучение напряженно-деформированного состояния упругого тела. С помощью теории упругости могут быть проверены решения, полученные с использованием допущений сопротивления

материалов, и установлены границы применимости этих решений. Иногда разделы теории упругости, в которых, как и в сопротивлении материалов, рассматривается вопрос о пригодности детали, но с использованием достаточно сложного математического аппарата (расчет пластин, оболочек, массивов), относят к прикладной теории упругости.

В настоящей главе изложены основные понятия математической линейной теории упругости. Применение математики к описанию физических явлений требует их схематизации. В математической теории упругости задачи решаются с возможно меньшим числом допущений, что усложняет математические приемы, применяемые для решения. В линейной теории упругости предполагается существование линейной зависимости между составляющими напряжениями и деформациями. Для ряда материалов (резина, некоторые сорта чугуна) такая зависимость даже при малых деформациях не может быть принята: диаграмма $\sigma - \varepsilon$ в пределах упругости имеет одинаковые очертания как при нагружении, так и при разгрузке, но в обоих случаях криволинейна. При исследовании таких материалов необходимо пользоваться зависимостями нелинейной теории упругости.

В математической линейной теории упругости исходят из следующих допущений:

1. О непрерывности (сплошности) среды. При этом атомистическая структура вещества или наличие каких-либо пустот не учитывается.
2. О естественном состоянии, на основании которого начальное напряженное (деформированное) состояние тела, возникшее до приложения силовых воздействий, не учитывается, т. е. предполагается, что в момент нагружения тела деформации и напряжения в любой его точке равны нулю. При наличии начальных напряжений это допущение будет справедливым, если только к результирующим напряжениям (сумме начальных и возникших от из воздействий) могут быть применены зависимости линейной теории упругости.
3. Об однородности, на основании которого предполагается, что состав тела одинаков во всех точках. Если применительно к металлам это допущение не дает больших погрешностей, то в отношении бетона при рассмотрении малых объемов оно может привести к значительным погрешностям.
4. О шаровой изотропности, на основании которого считается, что механические свойства материала одинаковы по всем направлениям. Кристаллы металла не обладают таким свойством, но для металла в целом, состоящего из большого числа мелких кристаллов, можно считать, что эта гипотеза справедлива. Для материалов, обладающих различными механическими свойствами в разных направлениях, как, например, для слоистых пластиков, разработана теория упругости ортотропных и анизотропных материалов.
5. Об идеальной упругости, на основании которого предполагается полное исчезновение деформации после снятия нагрузки. Как известно, в реальных телах при любом нагружении возникает остаточная деформация. Поэтому допущение

следует считать применимым, если остаточная деформация не превышает условно заданной нормы.

6. О линейной зависимости между составляющими деформациями и напряжениями.

7. О малости деформаций, на основании которого предполагается, что относительные линейные и угловые деформации малы по сравнению с единицей. Для таких материалов, как резина, или таких элементов, как спиральные пружины, создана теория больших упругих деформаций.

При решении задач теории упругости пользуются теоремой о единственности решения: *если заданные внешние поверхностные и объемные силы находятся в равновесии, им соответствует одна единственная система напряжений и перемещений*. Положение о единственности решения справедливо, если только справедливы допущение о естественном состоянии тела (иначе возможно бесчисленное количество решений) и допущение о линейной зависимости между деформациями и внешними силами.

При решении задач теории упругости часто пользуются принципом Сен-Венана: *если внешние силы, приложенные на небольшом участке упругого тела, заменить действующей на том же участке статически эквивалентной системой сил (имеющей тот же главный вектор и тот же главный момент), то эта замена вызовет лишь изменение местных деформаций*.

В точках, достаточно удаленных от мест приложения внешних нагрузок, напряжения мало зависят от способа их приложения. Нагрузка, которая в курсе сопротивления материалов схематически выражалась на основании принципа Сен-Венана в виде силы или сосредоточенного момента, на самом деле представляет собой нормальные и касательные напряжения, распределенные тем или иным способом на определенном участке поверхности тела. При этом одной и той же силе или паре сил может соответствовать различное распределение напряжений. На основании принципа Сен-Венана можно считать, что изменение усилий на участке поверхности тела почти не отражается на напряжениях в точках, удаленных на достаточно большое расстояние от места приложения этих усилий (по сравнению с линейными размерами нагруженного участка).

Положение исследуемой площадки, выделенной в теле (рис. 1), определяется направляющими косинусами нормали N к площадке в выбранной системе прямоугольных осей координат x , y и z .

Если ΔP — равнодействующая внутренних сил, действующих по элементарной площадке ΔF , выделенной у точки A , то полное напряжение p_N в этой точке по площадке с нормалью N определяется как предел отношения в

следующей форме:

$$p_N = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta P}{\Delta F} \right)$$

Вектор p_N можно разложить в пространстве на три взаимно перпендикулярные составляющие.

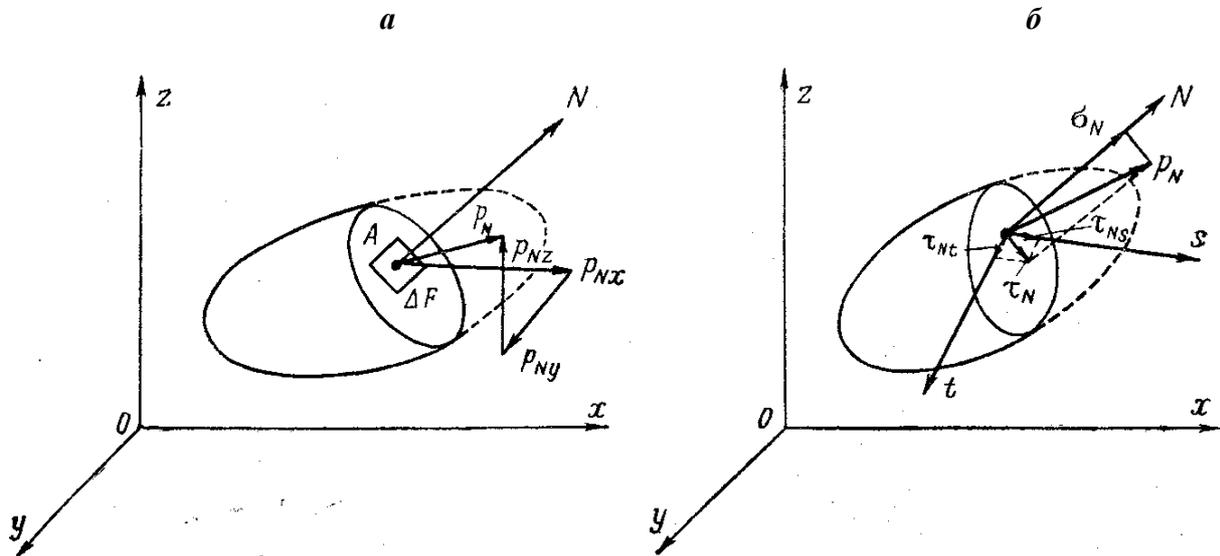


Рис. 1

1. На составляющие p_{Nx} , p_{Ny} и p_{Nz} по направлениям трех осей (рис. 1, а). Эти составляющие положительны, если совпадают по направлению с положительными направлениями соответствующих осей. Согласно рис. 1, а

$$p_N = \sqrt{p_{Nx}^2 + p_{Ny}^2 + p_{Nz}^2} \quad (1.1,а)$$

2. На составляющие σ_N , τ_{Ns} и τ_{Nt} по направлениям нормали к площадке (нормальное напряжение) и двух взаимно перпендикулярных осей s и t (рис. 1, б), лежащих в плоскости площадки (касательные напряжения). Согласно рис.1, б

$$p_N = \sqrt{\sigma_N^2 + \tau_N^2} = \sqrt{\sigma_N^2 + \tau_{Ns}^2 + \tau_{Nt}^2} \quad (1.1,б)$$

Если сечение тела или площадка ΔF параллельны одной из плоскостей координат, например yOz (рис. 2), то нормалью к этой площадке будет третья ось координат x и составляющие напряжения будут иметь обозначения σ_x , τ_{xy} и τ_{xz} .

Нормальное напряжение положительно, если оно растягивающее, и отрицательно, если оно сжимающее. Знак касательного напряжения определяется с помощью следующего правила: *если положительное (растягивающее) нормальное напряжение по площадке дает положительную проекцию, то касательное*

напряжение по той же площадке считается положительным при условии, что оно тоже дает положительную проекцию на соответствующую ось; если же растягивающее нормальное напряжение дает отрицательную проекцию, то положительное касательное напряжение тоже должно давать отрицательную проекцию на соответствующую ось.

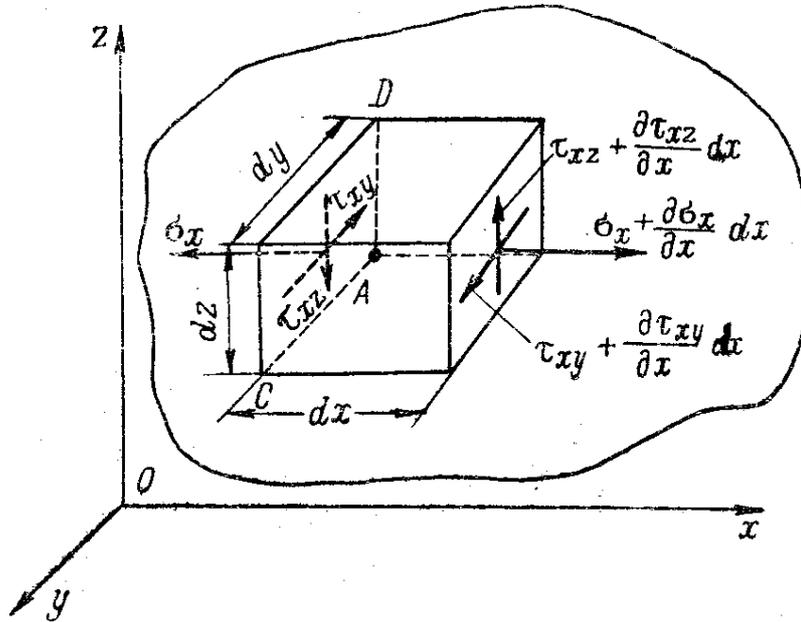


Рис. 2

На рис. 3, например, все составляющие напряжения, действующие по граням элементарного параллелепипеда, совпадающим с плоскостями координат, положительны.

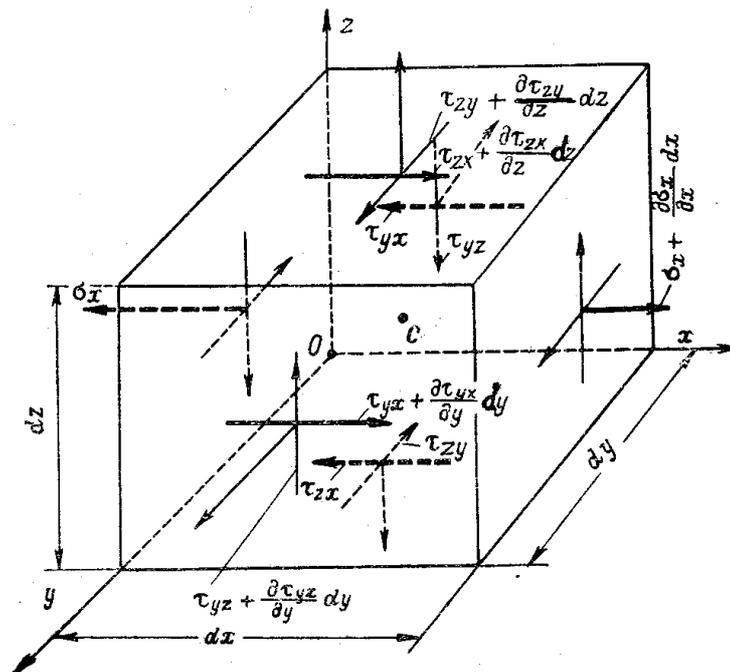


Рис. 3

Чтобы определить напряженное состояние в точке упругого тела, необходимо знать полные напряжения p_N по трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через эту точку. Так как каждое полное напряжение можно разложить на три составляющие, напряженное состояние будет определено, если будут известны девять составляющих напряжений. Эти составляющие можно записать в виде матрицы

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix},$$

называемой *матрицей компонентов тензора напряжений в точке*.

В каждой горизонтальной строчке матрицы записаны три составляющих напряжения, действующих по одной площадке, так как первые значки (название нормали) у них одинаковые. В каждом вертикальном столбце тензора записаны три напряжения, параллельных одной и той же оси, так как вторые значки (название оси, параллельно которой действует напряжение) у них одинаковые.

1.2 Уравнения равновесия элементарного параллелепипеда и элементарного тетраэдра

Выделим у исследуемой точки A (с координатами x , y и z) напряженного упругого тела тремя взаимно перпендикулярными парами плоскостей элементарный параллелепипед с размерами ребер dx , dy и dz (рис. 2). По каждой из трех взаимно перпендикулярных граней, примыкающих к точке A (ближайших к плоскостям координат), будут действовать три составляющих напряжения – нормальное и два касательных. Считаем, что по граням, примыкающим к точке A , они положительны.

При переходе от грани, проходящей через точку A , к параллельной грани напряжения меняются и получают приращения. Например, если по грани CAD , проходящей через точку A , действуют составляющие напряжения $\sigma_x = f_1(x, y, z)$, $\tau_{xy} = f_2(x, y, z)$, $\tau_{xz} = f_3(x, y, z)$, то по параллельной грани, вследствие приращения только одной координаты x при переходе от одной грани к другой, будут действовать

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \quad \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx, \quad \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx.$$

составляющие напряжения. Можно определить напряжения на всех гранях элементарного параллелепипеда, как показано на рис. 3.

Кроме напряжений, приложенных к граням элементарного параллелепипеда, на него действуют объемные силы: силы веса, инерционные. Обозначим проекции этих сил, отнесенных к единице объема, на оси координат через X , Y и Z . Если приравнять нулю сумму проекций на ось x всех нормальных, касательных и объемной сил,

действующих на элементарный параллелепипед, то после сокращения на произведение $dxdydz$ получим уравнение

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

Составив аналогичные уравнения проекций сил на оси y и z , напишем три дифференциальных уравнения равновесия элементарного параллелепипеда, полученных Коши,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

При уменьшении размеров параллелепипеда до нуля он превращается в точку, а σ и τ представляют собой составляющие напряжения по трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через точку A .

Если приравнять нулю сумму моментов всех сил, действующих на элементарный параллелепипед, относительно оси x_c , параллельной оси x и проходящей через его центр тяжести, получим уравнение

$$\tau_{yz} dxdydz + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dydxdz \frac{dy}{2} - \tau_{xy} dxdydz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dzdxdy \frac{dz}{2} = 0$$

или, с учетом того, что второй и четвертый члены уравнения высшего порядка малости по сравнению с остальными, после сокращения на $dxdydz$

$$\tau_{yz} - \tau_{zy} = 0 \text{ или } \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Составив аналогичные уравнения моментов относительно центральных осей y_c и z_c , получим три уравнения закона парности касательных напряжений

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yx} = \tau_{xy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (1.3)$$

Этот закон формулируется так: *касательные напряжения, действующие по взаимно перпендикулярным площадкам и направленные перпендикулярно к линии пересечения площадок, равны по величине и одинаковы по знаку.*

Таким образом, из девяти составляющих напряжений матрицы тензора $T\sigma$ шесть попарно равны друг другу, и для определения напряженного состояния в точке достаточно найти лишь следующие шесть составляющих напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Но составленные условия равновесия дали нам всего лишь три уравнения (1.2), из которых шесть неизвестных найдены быть не могут. Таким образом, прямая задача определения напряженного состояния в точке в общем случае статически неопределима. Для раскрытия этой статической неопределимости необходимы дополнительные геометрические и физические зависимости.

Рассечем элементарный параллелепипед у точки A плоскостью, наклоненной к его граням; пусть нормаль N к этой плоскости имеет направляющие косинусы l , m и n . Получившаяся геометрическая фигура (рис. 4) представляет собой пирамиду с треугольным основанием – элементарный тетраэдр. Будем считать, что точка A совпадает с началом координат, а три взаимно перпендикулярные грани тетраэдра – с плоскостями координат.

Составляющие напряжения, действующие по этим граням тетраэдра, будем считать положительными. Они показаны на рис. 4. Обозначим через P_N , P_{Nx} и P_{Ny} проекции полного напряжения p_N , действующего по наклонной грани BCD тетраэдра, на оси x , y и z . Площадь наклонной грани BCD обозначим dF . Тогда площадь грани ABC будет $dF \cdot n$, грани ACD – $dF \cdot l$ и грани ADB – $dF \cdot m$.

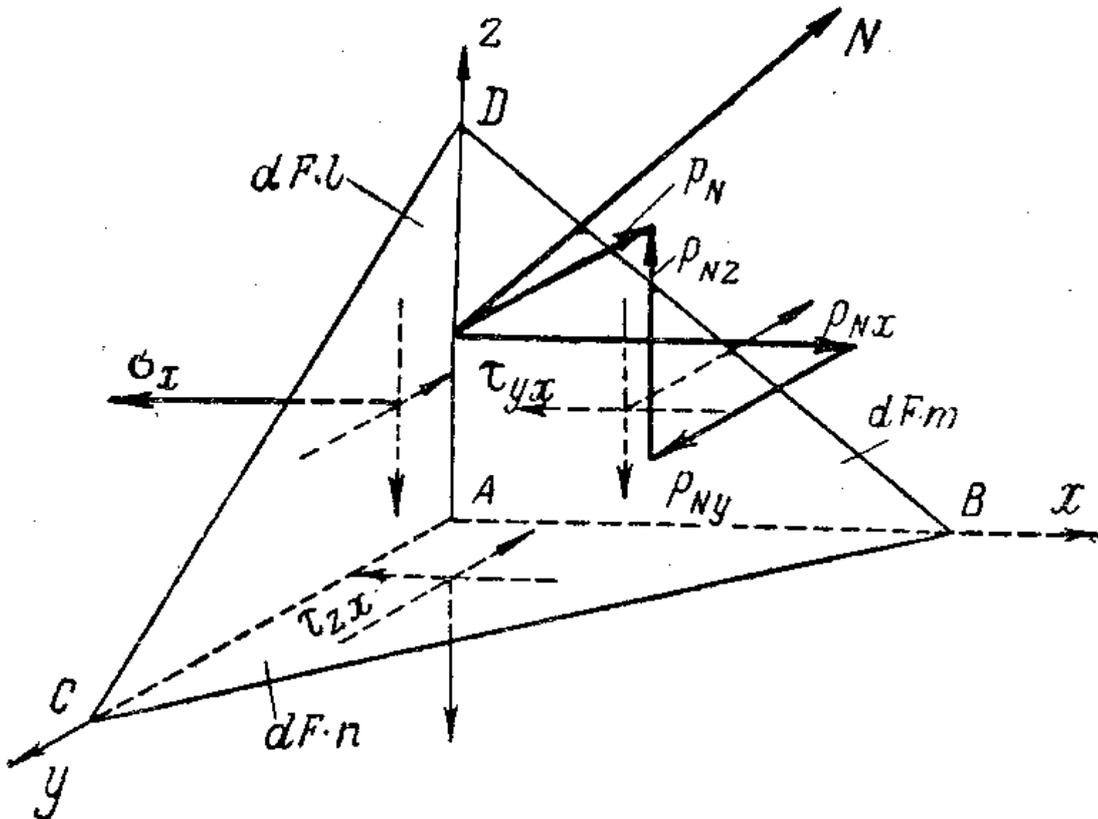


Рис. 4

Составим уравнение равновесия тетраэдра, спроектировав все силы, действующие по его граням, на ось x ; проекция объемной силы в уравнение проекций не входит, так

как представляет собой величину высшего порядка малости по сравнению с проекциями поверхностных сил:

$$-\sigma_x dF \cdot l - \tau_{yx} dF \cdot m - \tau_{zx} dF \cdot n + p_{Nx} dF = 0$$

откуда

$$p_{Nx} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n$$

Составив уравнения проекции сил, действующих на тетраэдр, на оси y и z , получим еще два аналогичных уравнения. В результате будем иметь три уравнения равновесия элементарного тетраэдра

$$\left. \begin{aligned} p_{Nx} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ p_{Ny} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ p_{Nz} &= \tau_{xz} l + \sigma_z m + \tau_{yz} n \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

По известным трем проекциям найдем полное напряжение

$$p_N = \sqrt{p_{Nx}^2 + p_{Ny}^2 + p_{Nz}^2} \quad (1.5)$$

Разделим пространственное тело произвольной формы системой взаимно перпендикулярных плоскостей xOy , yOz и xOz (рис. 5) на ряд элементарных параллелепипедов. У поверхности тела при этом образуются элементарные

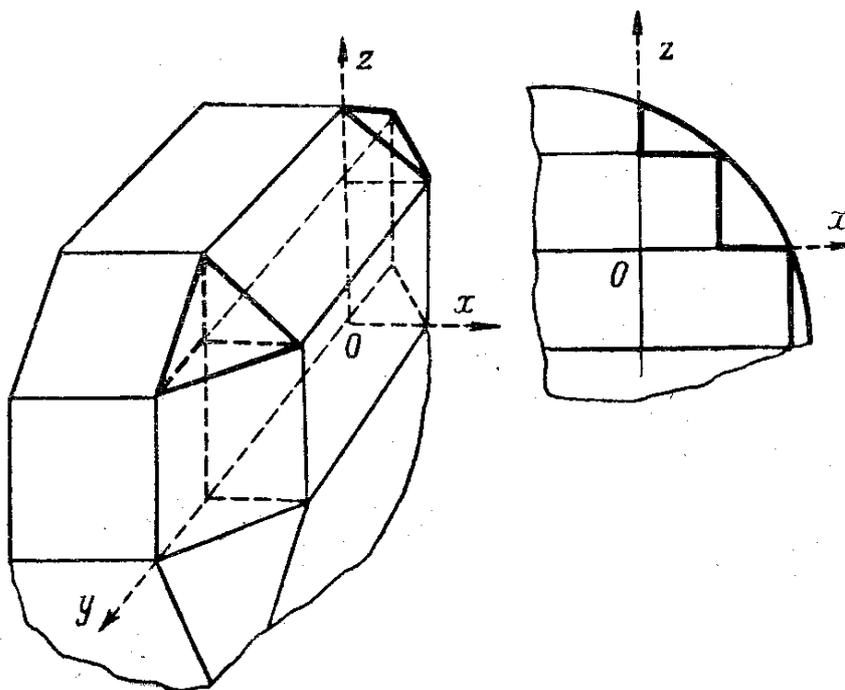


Рис. 5

тетраэдр, (криволинейные участки поверхности ввиду их малости можно заменить плоскостями). В таком случае p_N будет представлять нагрузку на поверхности, а уравнения (1.4) будут связывать эту нагрузку с напряжениями σ и τ в теле, т. е. будут представлять граничные условия задачи теории упругости. Условия, определяемые этими уравнениями, называют *условиями на поверхности*.

Следует отметить, что в теории упругости внешние нагрузки представляются нормальными и касательными напряжениями, приложенными по какому-либо закону к площадкам, совпадающим с поверхностью тела.

• 1.3 Нормальные и касательные напряжения по наклонной площадке

Рассмотрим элементарный тетраэдр $ABCD$, три грани которого параллельны координатным плоскостям, а нормаль N к четвертой грани составляет с координатными осями углы, косинусы которых равны l , m и n (рис. 6). Будем считать заданными составляющие нормальные и касательные напряжения, действующие по площадкам, лежащим в координатных плоскостях, и определим напряжения на площадке BCD . Выберем новую систему прямоугольных осей координат x_1 , y_1 и z_1 , так чтобы ось x_1 совпадала с нормалью N ,

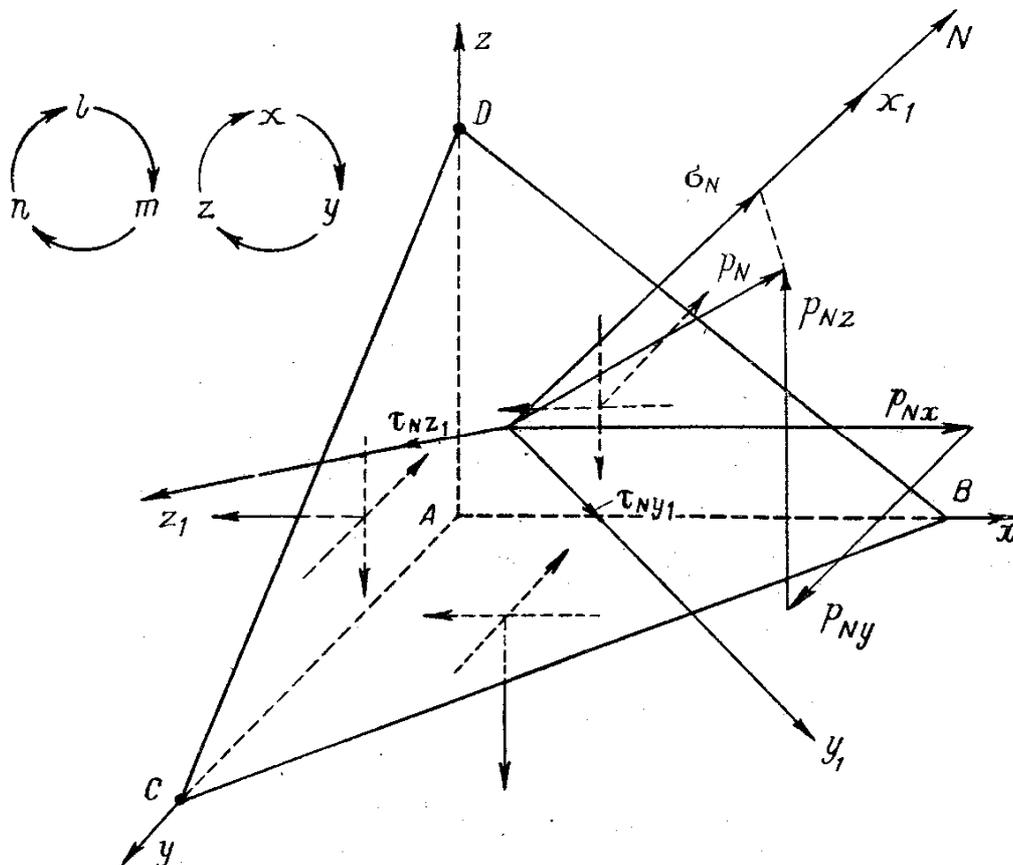


Рис. 6

а оси y_1 и z_1 лежали в плоскости площадки BCD . Каждая из этих осей будет иметь в системе осей x, y, z свои направляющие косинусы, указанные в табл. 1.

Таблица 1

Оси	x	y	z
x_1	l_1	m_1	n_1
y_1	l_2	m_2	n_2
z_1	l_3	m_3	n_3

Полное напряжение p_N , действующее по площадке BCD , разложим на составляющие p_{Nx} , p_{Ny} и p_{Nz} . Нормальное напряжение действующее по площадке BCD , можно рассматривать как проекцию на ось N (или x_1) полного напряжения p_N , действующего по площадке BCD , а полное напряжение p_N – как равнодействующую трех его проекций. Так как проекция равнодействующей равна сумме проекций составляющих, то

$$\sigma_N = \sigma_{x_1} = p_{Nx}l_1 + p_{Ny}m_1 + p_{Nz}n_1.$$

Подставив выражения (1.4) и произведя необходимые сокращения, запишем

$$\sigma_N = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl. \quad (1.6)$$

Спроектировав составляющие p_{Nx} , p_{Ny} и p_{Nz} на ось y_1 (рис. 6), получим

$$\tau_{N_{y_1}} = p_{Nx}l_2 + p_{Ny}m_2 + p_{Nz}n_2,$$

а заменив их выражениями (1.4) и приведя подобные члены, –

$$\begin{aligned} \tau_{N_{y_1}} = & \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy}(l_1 m_2 + m_1 l_2) + \\ & + \tau_{yz}(m_1 n_2 + n_1 m_2) + \tau_{zx}(n_1 l_2 + l_1 n_2). \end{aligned} \quad (1.7,a)$$

Аналогично из суммы проекций на ось z_1 найдем выражение для третьего составляющего касательного напряжения

$$\begin{aligned} \tau_{N_{z_1}} = & \sigma_x l_1 l_3 + \sigma_y m_1 m_3 + \sigma_z n_1 n_3 + \tau_{xy}(l_1 m_3 + m_1 l_3) + \\ & + \tau_{yz}(m_1 n_3 + n_1 m_3) + \tau_{zx}(n_1 l_3 + l_1 n_3). \end{aligned} \quad (1.7,б)$$

С помощью формул (1.6) и (1.7) можно преобразовать составляющие тензора напряжений при переходе от одной системы координат x, y, z к новой системе координат x_1, y_1, z_1 .

Для записи (1.6), (1.7) и ряда других формул теории упругости можно установить последовательность чередования индексов у составляющих напряжений и чередования направляющих косинусов, показанную схематически на рис. 6.

1.4 Определение главных напряжений и наибольших касательных напряжений в точке

В курсах математической теории упругости доказывается, что в любой точке тела можно найти три взаимно перпендикулярные *главные площадки*, на которых

отсутствуют касательные напряжения. Нормальные напряжения по этим площадкам называются *главными напряжениями*. Одно из них представляет собой наибольшее напряжение в данной точке, другое – наименьшее, а третье имеет величину, промежуточную между первыми двумя.

Предположим, что наклонная грань BCD тетраэдра, выделенного у точки A напряженного тела (рис. 7), — главная площадка. Обозначим направляющие косинусы нормали к главной площадке l, m и n . Полное напряжение p_v , действующее по главной площадке, направлено по нормали v и равно главному нормальному напряжению. Касательное напряжение равно нулю.

Составим по формулам (1.4) выражения для проекций напряжения p_v на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} p_{vx} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ p_{vy} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{xy} n \\ p_{vz} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\}$$

С другой стороны, те же проекции $p_{vx} = p_v l$; $p_{vy} = p_v m$; $p_{vz} = p_v n$.

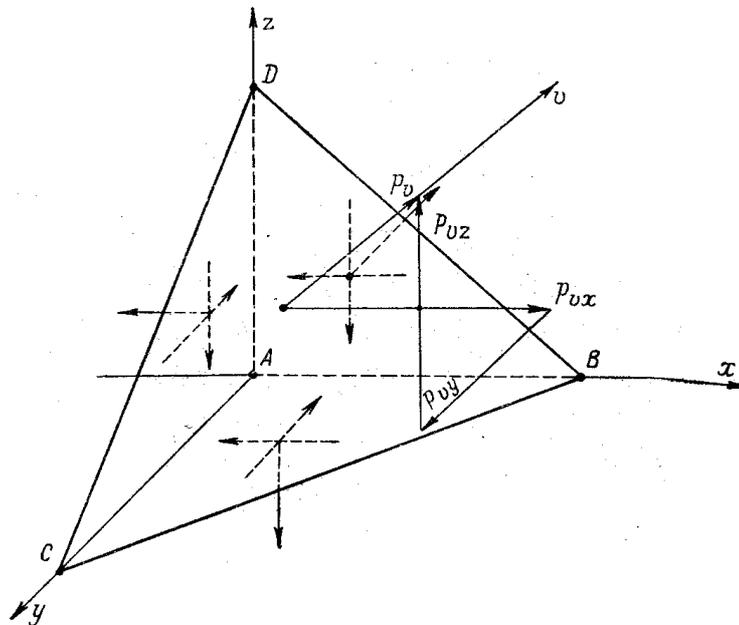


Рис. 7

Так как левые части в уравнениях равны, приравниваем правы части и получаем систему

$$\left. \begin{aligned} (p_v - \sigma_x) l - \tau_{yx} m - \tau_{zx} n &= 0 \\ -\tau_{xy} l + (p_v - \sigma_y) m - \tau_{zy} n &= 0 \\ -\tau_{xz} l - \tau_{yz} m + (p_v - \sigma_z) n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

в которой четыре неизвестных: главное напряжение p_v и три направляющих косинуса. Четвертое недостающее уравнение системы — условие равенства единице суммы квадратов направляющих косинусов:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (1.9)$$

Из соотношения следует, что направляющие косинусы не могут все одновременно быть равны нулю, поэтому система уравнений с неизвестными l, m и n должна иметь

решения, отличные от нуля, а значит ее определитель должен равняться нулю. Раскрыв этот определитель, получим

$$p_v^3 - a_1 p_v^2 + a_2 p_v - a_3 = 0,$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ a_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ a_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\}$$

Решив кубическое уравнение, получим три значения его корня, т. е. три главных напряжения, из которых алгебраически наибольшее назовем σ_1 , наименьшее σ_3 , а промежуточное σ_2 . Величины главных напряжений в точке, не зависят от выбора осей координат, а зависят от формы и размеров тела и его нагружения.

Следовательно, коэффициенты a_1 и a_2 и свободный член a_3 в этом уравнении также не должны зависеть от выбора осей координат. Поэтому функции a_1 и a_2 составляющих напряжений и свободный член a_3 , называются *инвариантами системы осей координат*.

Так как число главных площадок равно трем, должно быть найдено девять направляющих косинусов. Чтобы найти, например, направляющие косинусы l_1, m_1, n_1 нормали к площадке, по которой действует главное напряжение σ_1 , надо подставить значение σ_1 в какие-нибудь два уравнения (1.8).

Решив эти два уравнения, найдем значения двух направляющих косинусов, например l_1 и m_1 , выраженные через n_1 . Подставив найденные значения l_1 и m_1 в уравнение (1.9), найдем третий направляющий косинус n_1 первой главной площадки.

Рассмотрим снова элементарный тетраэдр у точки A (рис. 8). Предположим, что три взаимно перпендикулярные его грани представляют собой главные площадки в точке A .

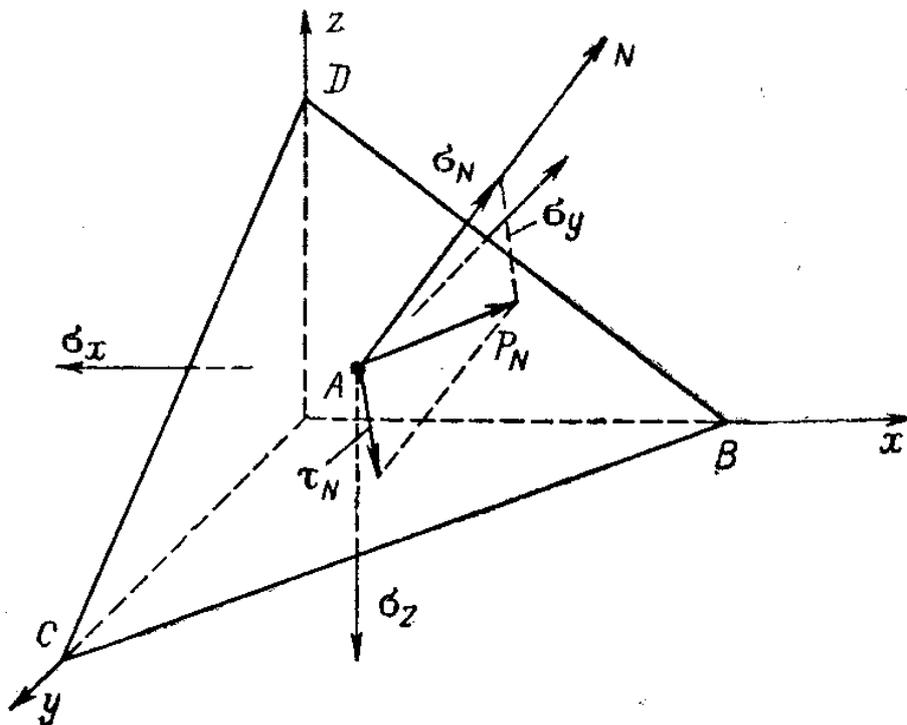


Рис. 8

Составим выражение для касательного напряжения τ , действующего по наклонной грани BCD тетраэдра, имеющей направляющие косинусы l , m и n , и найдем экстремальные значения этого напряжения и положение площадок, по которым они действуют. На основании формулы (1.1,б) квадрат касательного напряжения по площадке BCD

$$\tau_N^2 = p_N^2 - \sigma_N^2.$$

Ввиду того, что грани тетраэдра ACD , ACB и ABD — главные площадки, подстановка в это уравнение выражений для p_N , σ_N вычисленных по формулам (1.1,а), (1.4) и (1.6), дает

$$\tau_N^2 = (\sigma_x^2 l^2 + \sigma_y^2 m^2 + \sigma_z^2 n^2) - (\sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2)^2.$$

Из соотношения (1.9)

$$n^2 = 1 - l^2 - m^2,$$

тогда

$$\tau_N^2 = [(\sigma_x^2 - \sigma_z^2)l^2 + (\sigma_y^2 - \sigma_z^2)m^2 + \sigma_z^2] - [(\sigma_x - \sigma_z)l^2 + (\sigma_y - \sigma_z)m^2 + \sigma_z]^2.$$

Наибольшее значение касательного напряжения τ_N найдется из условий

$$\frac{\partial(\tau_N^2)}{\partial l} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial(\tau_N^2)}{\partial m} = 0,$$

дающих два уравнения с двумя неизвестными l и m .

Предположим, что $\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z$ обозначены соответственно $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, тогда последние два уравнения примут вид двух уравнений третьей степени относительно l и m

$$\left. \begin{aligned} l \{ (\sigma_1 - \sigma_3) - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2] \} &= 0 \\ m \{ (\sigma_2 - \sigma_3) - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2] \} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Если отбросить не отвечающие исходным условиям задачи решения системы уравнений, останутся следующие значения двух групп направляющих косинусов:

$$1) \ l = 0; \ m = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}; \ n = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}; \quad 2) \ m = 0; \ l = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}; \ n = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Первая группа при положительных m и n определяет нормаль, лежащую в плоскости yOz и составляющую с этими осями углы в 45° , или площадку, делящую пополам прямой угол между главными площадками, по которым действуют напряжения σ_2 и σ_3 . При отрицательных m и n первая группа определяет нормаль и площадку соответственно перпендикулярные к первым (рис. 9, а).

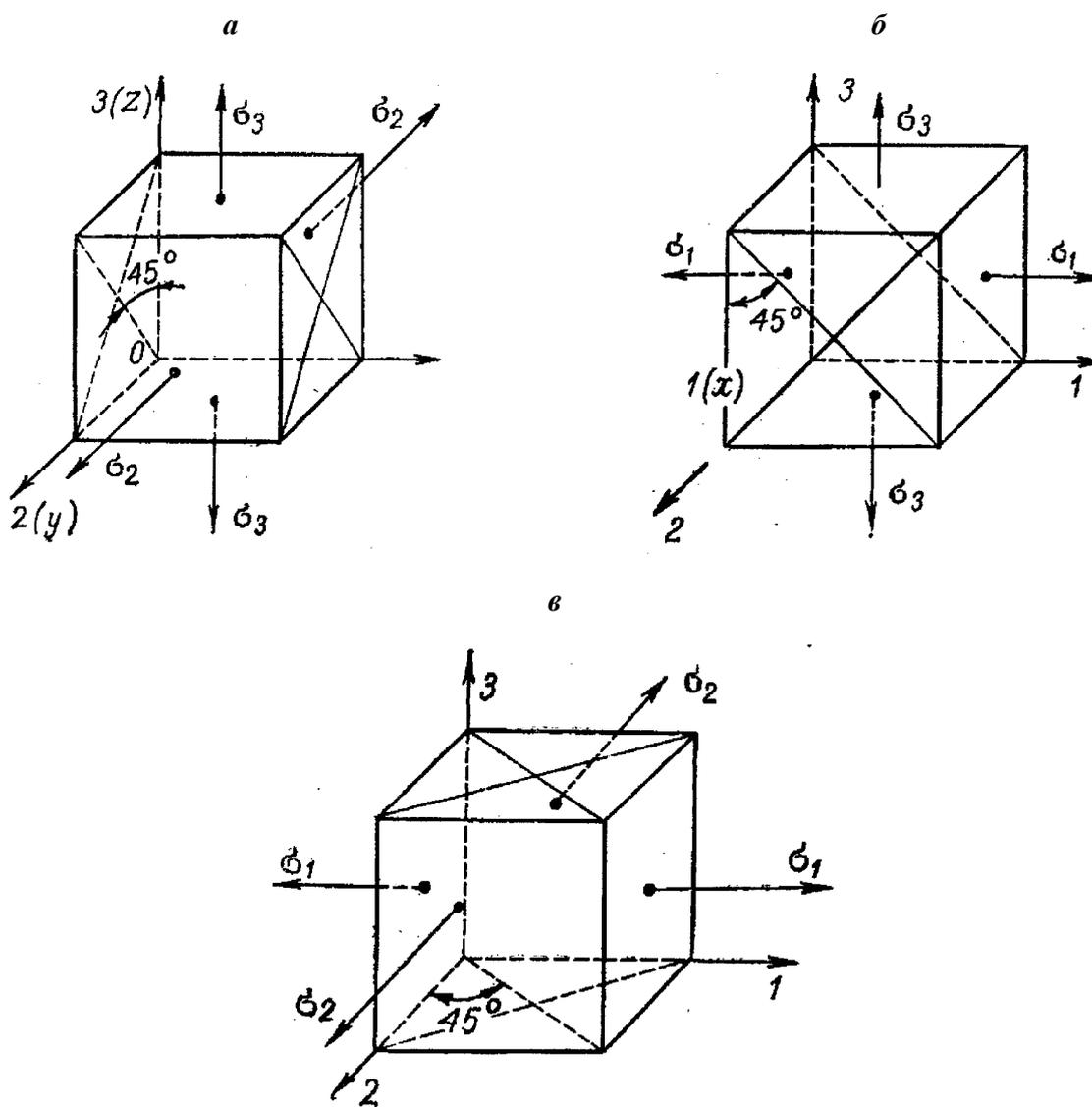


Рис. 9

Вторая группа определяет две площадки, делящие пополам прямые углы между главными площадками, по которым действуют σ_1 и σ_3 (рис. 9, б).

Можно получить новую систему кубических уравнений, из которой можно найти третью группу направляющих косинусов:

$$3) \quad n = 0; \quad l = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}; \quad m = \pm \sqrt{\frac{1}{2}},$$

определяющих еще две взаимно перпендикулярные площадки (рис. 9, в).

Таким образом, найдены три пары взаимно перпендикулярных площадок. По каждой из этих пар касательные напряжения одинаковы и представляют наибольшее напряжение для определенной группы площадок.

Величина трех наибольших касательных напряжений получается путем подстановки значений l , m и n первой, второй и третьей групп в уравнение для τ_N^2 . Каждое из них равно полуразности двух главных напряжений:

$$\tau_{\max 1} = \tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{\max 2} = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{\max 3} = \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (1.10)$$

1.5 Напряжения по октаэдрическим площадкам

Выделим у точки A площадками, равнонаклоненными к главным площадкам, элементарный октаэдр (рис. 10). При уменьшении размеров октаэдра его грани, лежащие в накрест расположенных четвертях, сольются, и мы получим четыре площадки, проходящие через точку A , называемые *октаэдрическими*.

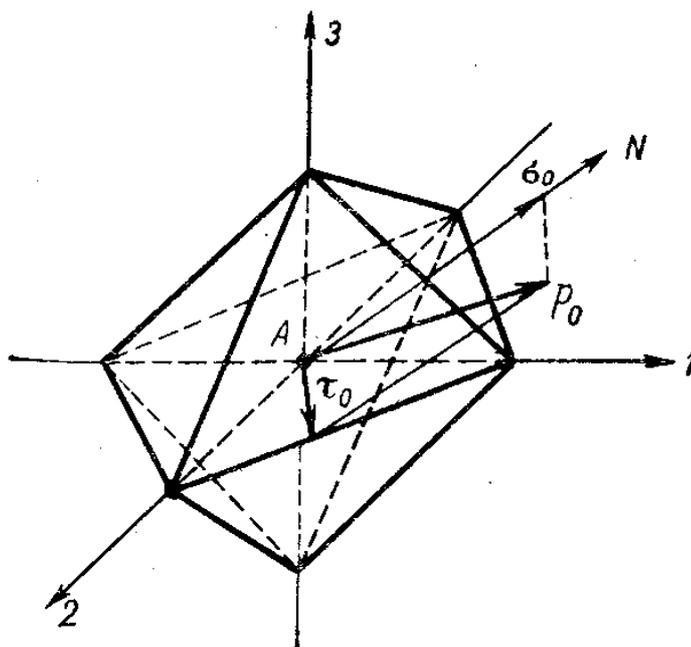


Рис. 10

Вычислим нормальные и касательные напряжения, действующие по октаэдрической площадке. Так как в главных осях $1, 2, 3$ все три направляющих косинуса нормали к октаэдрической площадке одинаковы, а сумма их квадратов равна единице, то

$$3l^2 = 1 \text{ и } l = m = n = \sqrt{\frac{1}{3}}. \quad (1.11)$$

Подставляя эти значения в формулу (1.6) и учитывая инвариантность суммы нормальных напряжений по трем взаимно перпендикулярным площадкам, находим нормальное напряжение по октаэдрической площадке

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}. \quad (1.12)$$

Полное напряжение по октаэдрической площадке на основании формул (1.1,а) и (1.4)

$$P_0 = \sqrt{P_{0x}^2 + P_{0y}^2 + P_{0z}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3}}$$

Касательное напряжение по октаэдрической площадке

$$\tau_0 = \sqrt{P_0^2 - \sigma_0^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3} - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9}}$$

Приведя подкоренное выражение к общему знаменателю, найдем

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2}, \quad (1.13)$$

или, с учетом выражения (1.10),

$$\tau_0 = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{\max 1}^2 + \tau_{\max 2}^2 + \tau_{\max 3}^2} \quad (1.13,а)$$

1.6 Понятие о перемещениях. Зависимости между деформациями и перемещениями

Предположим, что упругое тело закреплено и не может перемещаться в пространстве. Тогда его точки могут изменять положение в пространстве только за счет деформации тела.

Пусть какая-нибудь точка A упругого тела (рис. 11), имевшая до деформации координаты x, y и z , вследствие деформации тела оказалась в

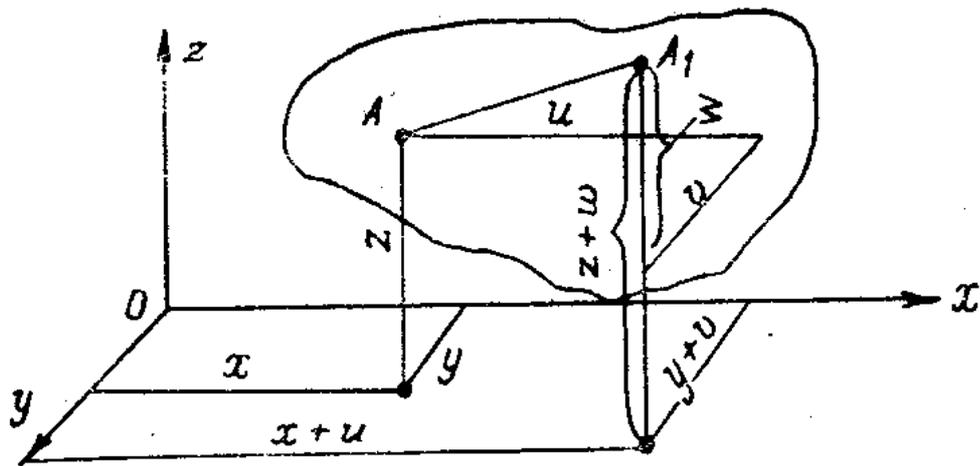


Рис. 11

положении A_1 с координатами $x + u$, $y + v$ и $z + w$. Отрезок AA_1 называется линейным перемещением точки A , а отрезки u , v и w — проекциями этого перемещения на оси координат. Перемещения и их проекции для разных точек различны; они представляют собой непрерывные (по условиям сплошности) функции координат точки:

$$u = f_1(x, y, z); v = f_2(x, y, z); w = f_3(x, y, z).$$

Деформированное состояние в точке A (рис. 12, *a*) будет известно, если будут известны деформации всех трех проекций элементарного параллелепипеда. Для этого надо знать: относительные линейные деформации трех взаимно перпендикулярных ребер ε_x , ε_y и ε_z и изменения прямых углов между ребрами в плоскостях трех его граней, параллельных плоскостям координат (относительные сдвиги или относительные угловые деформации γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx}).

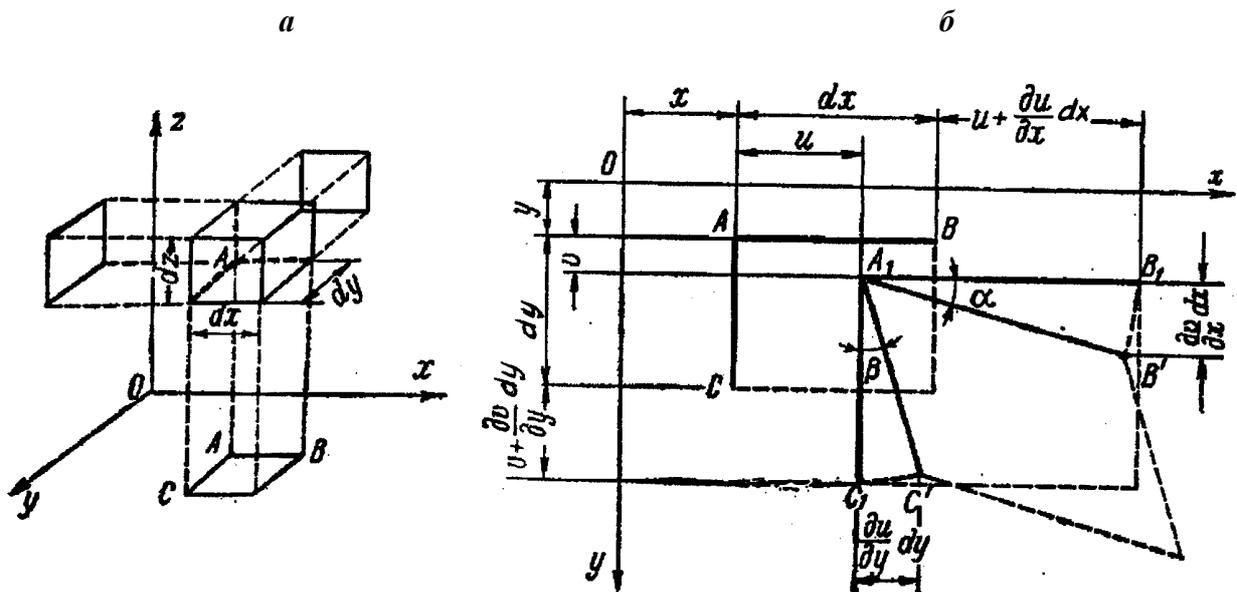


Рис. 12

Относительное изменение объема элементарного параллелепипеда при деформации

$$\Delta = \frac{\Delta v}{v} = \frac{v_1 - v}{v} = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1.$$

Если отбросить величины второго и третьего порядка малости,

$$\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\varepsilon_{cp}, \quad (1.14)$$

где средняя относительная линейная деформация

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}.$$

Найдем зависимости между составляющими деформациями и проекциями перемещения на оси координат. Для этого рассмотрим проекцию элементарного параллелепипеда на плоскость xOy . Пусть заданы первоначальные координаты точки A — x и y и длины проекций ребер dx и dy (рис. 12, б). После деформации тела точка A перейдет в положение A_1 , а точка B — в положение B_1 .

Линейное перемещение точки B вдоль оси x равно сумме линейного перемещения точки A и его приращения, вызванного изменением координаты x при переходе от точки A к точке B . Это приращение равно частному дифференциалу функции $u = f_1$

(x, y, z) по переменной x . Поэтому линейное перемещение точки B равно $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$.

Кроме того, вследствие изменения первоначального прямого угла BAC на величину α точка B_1 займет положение B' . Отрезок $B_1 B'$ представляет изменение перемещения v точки A при переходе от точки A к точке B вдоль оси x .

Относительная деформация ε_x ребра AB

$$\varepsilon_x = \frac{A_1 B_1 - AB}{AB} = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + dx - u - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x};$$

аналогично найдем

$$\varepsilon_y = \frac{A_1 C_1 - AC}{AC} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Изменение γ_{xy} прямого угла BAC в плоскости xOy получим, заменив углы α и β их тангенсами,

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \approx \frac{B_1 B_1'}{A_1 B_1} + \frac{C_1 C_1'}{A_1 C_1} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1\right) dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{\left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1\right) dy}.$$

Если пренебречь в скобках частными производными, которые малы по сравнению с единицей, то

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Из проекций элементарного параллелепипеда на две другие плоскости координат найдем выражение для относительной линейной деформации ε_z и относительных сдвигов γ_{yz} и γ_{zx} . В результате получим следующие шесть зависимостей между относительными деформациями и перемещениями:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Зависимости (1.15) получены Коши. Исходя из геометрического смысла частных производных, стоящих в правой части, можно установить правила знаков: положительное значение относительных линейных деформаций соответствует удлинению, положительное значение относительных сдвигов соответствует уменьшению прямых углов xOy , yOz и zOx .

1.7 Относительная линейная деформация в произвольном направлении

Наметим внутри упругого тела две точки $A(x, y, z)$ и $B(x + dx, y + dy, z + dz)$, находящиеся на расстоянии dr друг от друга (рис. 13). Направляющие косинусы отрезка dr обозначим l , m и n .

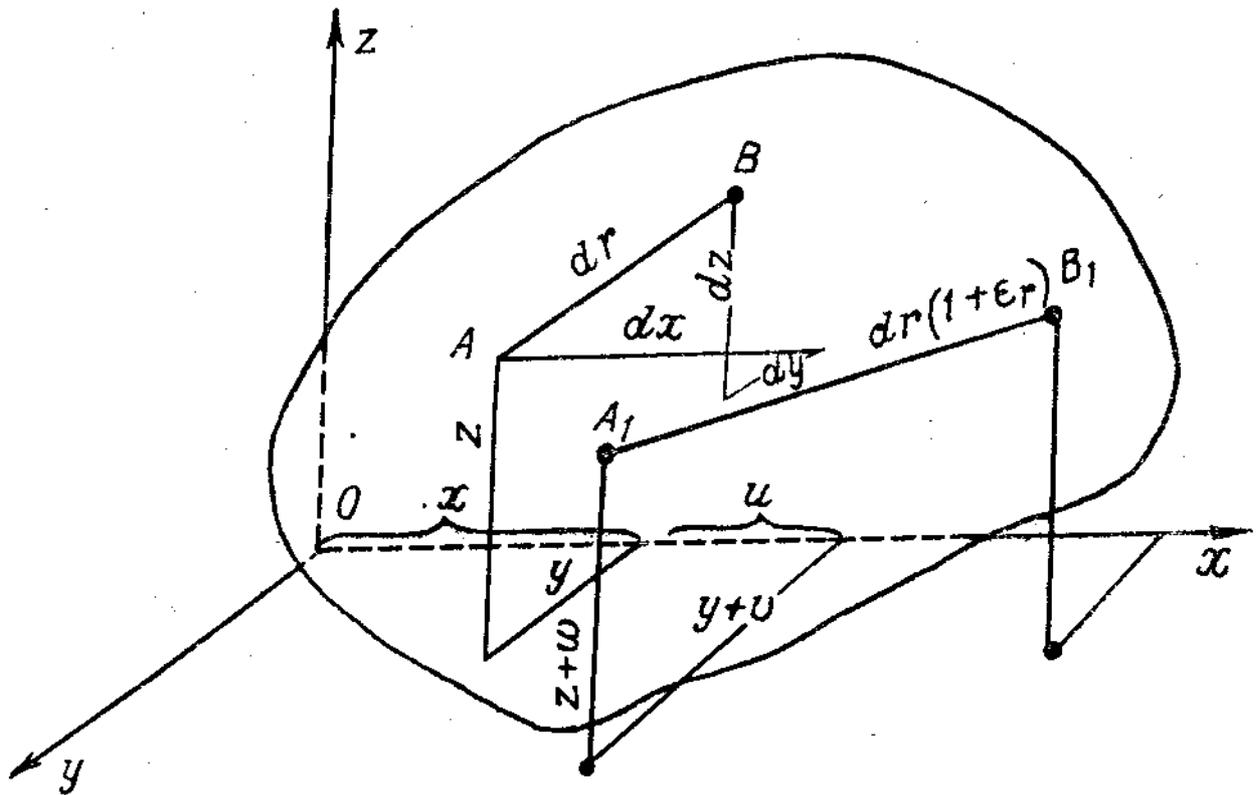


Рис. 13

При деформации тела под влиянием внешней нагрузки, точка A перейдет в положение A_1 , точка B в положение B_1 , а отрезок dr получит приращение Δdr . Новая длина отрезка AB

$$A_1B_1 = dr + \Delta dr = dr \left(1 + \frac{\Delta dr}{dr} \right) = dr(1 + \epsilon_r)$$

где ϵ_r – искомая относительная линейная деформация.

Проекции перемещения AA_1 точки A на оси координат обозначаем u , v и w . Тогда проекции перемещения BB_1 точки B на оси координат $u + du$, $v + dv$, $w + dw$.

С одной стороны

$$(A_1B_1)^2 = dr^2(1 + \epsilon_r)^2 \approx dr^2(1 + 2\epsilon_r).$$

С другой стороны, квадрат отрезка A_1B_1 равен сумме квадратов трех его проекций на оси координат:

$$(A_1B_1)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dxdu + 2dydv + 2dzdw.$$

Тогда получим

$$1 + 2\varepsilon_r = \left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + \frac{1}{dr^2}(2dxdu + 2dydv + 2dvdw)$$

Подставив выражения для полных дифференциалов перемещений u , v и w , и заметив, что

$$\frac{\partial x}{\partial r} = l, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = m, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = n,$$

учитывая, что $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, сокращая на 2, и используя зависимости (1.15), получаем

$$\varepsilon_r = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl \quad (1.16)$$

Сравнение выражений (1.16) для линейной деформаций ε_r и (1.6) для нормального напряжения σ_N в том же направлении, показывает, что они по структуре одинаковы и выражение (1.16) может быть получено из формулы (1.6) путем замены с

сохранением значков σ на ε и τ на $\frac{1}{2}\gamma$. Пользуясь такой заменой, можно получить все формулы теории деформации из аналогичных формул теории напряжений. В частности, деформированное состояние в точке упругого тела определяется матрицей компонентов тензора деформаций:

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \cdot \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}$$

1.8. Уравнения совместности деформаций

Из уравнений (1.15) видно, что если заданы три функции u , v и w , то все шесть составляющих деформаций будут определены однозначно. Но задать эти шесть составляющих произвольно нельзя. Они должны быть связаны дополнительными зависимостями — *уравнениями совместности*.

Из допущения о сплошности тела следует, что перемещения в его точках должны представлять собой непрерывные и однозначные функции от координат. Для таких функций величина их производных не зависит от порядка дифференцирования.

Поэтому, если дифференцировать по различным переменным координатам уравнения перемещений, после математических преобразований можно получить искомые зависимости между составляющими относительных линейных и угловых деформаций. Так как эти зависимости связаны с условиями сплошности тел, они называются также *уравнениями неразрывности*.

Если эти уравнения не соблюдены, то из малых параллелепипедов и тетраэдров, на которые можно разделить упругое тело (рис. 14,*а*), после деформации каждого из них, зависящей от шести составляющих (рис. 14,*б*), может оказаться невозможным сложить непрерывное деформированное тело (рис. 14, *в*).

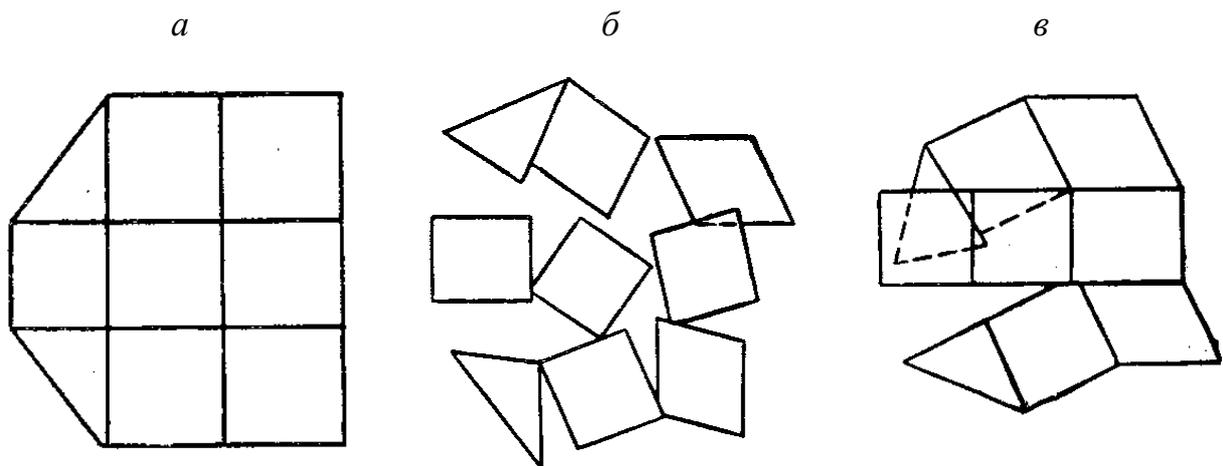


Рис. 14

Дифференцируя первые два уравнения (1.15) для линейных деформаций, находим

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x^2}$$

Складывая эти выражения и учитывая выражение для угловой деформации γ_{xy} , получаем

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Произведя круговую подстановку индексов, можно получить еще два аналогичных уравнения, которые составят первую группу уравнений неразрывности

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.17,a)$$

Дифференцируем уравнения для угловых деформаций (1.15), складываем первые два уравнения и вычитаем третье:

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}$$

Дифференцируем это уравнение по y :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y \partial z} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}$$

После круговой подстановки можно получить еще два аналогичных уравнения, которые составят вторую группу уравнений неразрывности

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1.17,б)$$

Шесть условий (1.17,а) и (1.17,б) будут удовлетворены, если при решении задачи теории упругости удастся по заданным нагрузкам, действующим на тело, найти выражения для u , v и w . Если затем вычислить деформации по уравнениям (1.15), то уравнения совместности, превратятся в тождества, так как они выведены из тех же уравнений (1.15).

Если же при решении задачи по нагрузкам найдем напряжения, а затем деформации, необходимо проверить, удовлетворяют ли найденные деформации уравнениям совместности.

Можно доказать, что уравнения совместности представляют собой необходимые условия для того, чтобы по уравнениям (1.15) можно было найти составляющие перемещения по заданным составляющим деформациям.

Таким образом, зависимости (1.17,а и 17,б) являются необходимыми и достаточными условиями интегрируемости формул (1.15), обеспечивающими одновременно однозначность перемещений. Это справедливо, если тело ограничено односвязной областью, т. е. областью, в пределах которой любая замкнутая кривая может быть непрерывной деформацией стянута в точку без пересечения контура области.

1.9 Закон Гука для изотропного тела

Опытами установлено, что для упругих тел при напряжениях меньше предела упругости компоненты матрицы тензора деформаций T_e представляют собой линейные функции составляющих тензора напряжений. Они могут быть в общем случае представлены следующими линейными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{xy} + a_{15}\tau_{yz} + a_{16}\tau_{xz} \\ \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\tau_{xy} + a_{25}\tau_{yz} + a_{26}\tau_{xz} \\ \varepsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{34}\tau_{xy} + a_{35}\tau_{yz} + a_{36}\tau_{xz} \\ \gamma_{xy} &= a_{41}\sigma_x + a_{42}\sigma_y + a_{43}\sigma_z + a_{44}\tau_{xy} + a_{45}\tau_{yz} + a_{46}\tau_{xz} \\ \gamma_{yz} &= a_{51}\sigma_x + a_{52}\sigma_y + a_{53}\sigma_z + a_{54}\tau_{xy} + a_{55}\tau_{yz} + a_{56}\tau_{xz} \\ \gamma_{zx} &= a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + a_{63}\sigma_z + a_{64}\tau_{xy} + a_{65}\tau_{yz} + a_{66}\tau_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Можно доказать, что для системы линейных уравнений (1.18) коэффициенты, расположенные симметрично относительно главной диагонали, должны быть равны:

$$a_{nm} = a_{mn}. \text{ Поэтому в этих уравнениях отпадает } \frac{36 - 6}{2} = 15 \text{ коэффициентов и остается } 36 - 15 = 21.$$

Коэффициенты a_{11}, \dots, a_{66} , число которых 21, зависят от свойств материала и представляют собой *упругие постоянные любого анизотропного материала*, обладающего различными упругими свойствами в различных направлениях.

Для тела из однородного изотропного упругого материала число произвольных постоянных может быть сокращено. Можно считать, что линейные деформации у этих материалов зависят только от нормальных напряжений, а угловые – только от касательных. Вследствие этого уравнения (1.18) разобьются на две системы из трех

уравнений, каждая из которых содержит три неизвестных. Всего останется 18 коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z; & \gamma_{xy} &= a_{44}\tau_{xy} + a_{45}\tau_{yz} + a_{46}\tau_{zx} \\ \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z; & \gamma_{yz} &= a_{54}\tau_{xy} + a_{55}\tau_{yz} + a_{56}\tau_{zx} \\ \varepsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z; & \gamma_{zx} &= a_{64}\tau_{xy} + a_{65}\tau_{yz} + a_{66}\tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1.18,a)$$

Коэффициенты, расположенные симметрично относительно главных диагоналей,

равны друг другу. Поэтому отпадает $2 \frac{(9-3)}{2} = 6$ коэффициентов и остается $18 - 6 = 12$.

При заданных напряжениях τ и σ деформации ε и γ не должны зависеть от выбора осей координат. Это будет соблюдаться, если еще ряд коэффициентов будет равен нулю. Например, при показанном на рис. 15,а направлении касательного напряжения τ_{zx} оно отрицательно. Если же направление оси x изменить на обратное, (рис. 15,б), знак напряжения τ_{zx} станет положительным и равенство между левой и правой частями четвертого уравнения (1.18а) нарушится. Этого не будет лишь в случае, когда $a_{46} = 0$; $a_{64} = 0$.

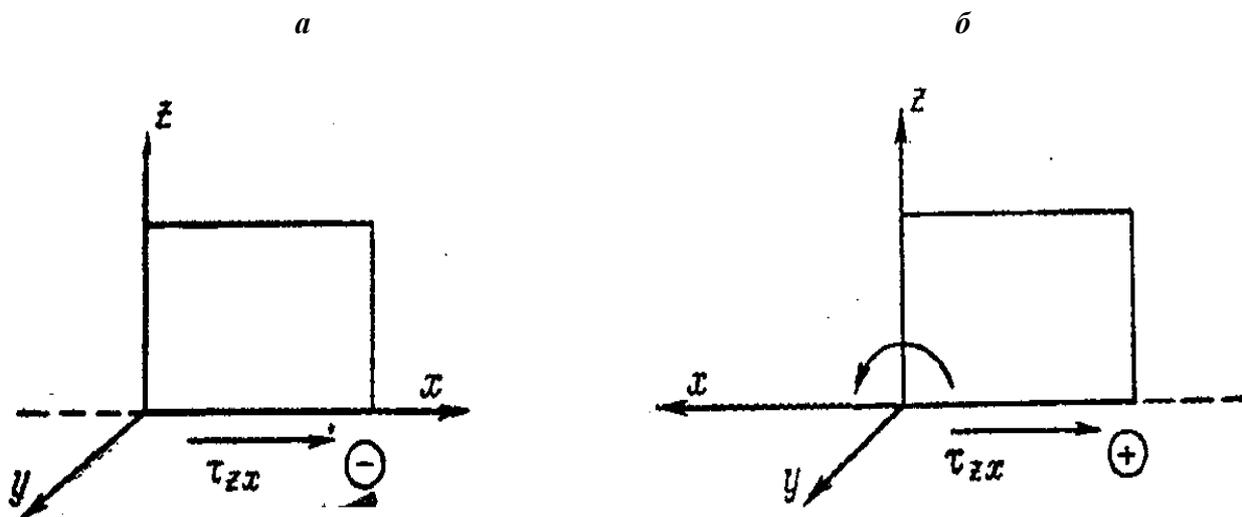


Рис. 15

Если повернуть таким же образом ось y , а затем ось z , можно установить, что

$$a_{45} = a_{54} = 0 \text{ и } a_{56} = a_{65} = 0.$$

Если повернуть одновременно оси x и y по часовой стрелке на 90° , т. е. заменить ось Oy на Ox , а ось Ox на Oy , то в первом уравнении (1.18,а) напряжения σ_x и σ_y поменяются местами. При этом равенство между левой и правой частями не

нарушится лишь при условии $a_{11} = a_{13}$. Аналогично во втором и третьем уравнениях (1.18,a) должно быть $a_{21} = a_{22}$ и $a_{31} = a_{32}$.

Если повернуть другие оси, т. е. заменить ось Oy на Oz , затем ось Oz на Ox , можно найти еще равенства

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} \text{ и } a_{44} = a_{55} = a_{66}.$$

В результате число постоянных для изотропного тела сокращается до трех, известных из курса сопротивления материалов. Из них только две независимы.

Независимыми упругими постоянными могут быть любые две из следующих четырех величин: модуль продольной упругости E , модуль сдвига G , объемный модуль упругости k и коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона) μ . Они связаны между собой линейной зависимостью

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad (1.19)$$

а также зависимостью (1.22).

Уравнения, связывающие составляющие тензора деформаций и составляющие тензора напряжений (закон Гука) для однородного изотропного упругого материала, могут быть представлены следующим образом:

1. Известными из курса сопротивления материалов выражениями для составляющих деформаций

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

2. Выражением, связывающим объемные характеристики. Для этого к первому из уравнений (1.20) прибавим в скобках $+\mu\sigma_x$ и $-\mu\sigma_x$, ко второму $+\mu\sigma_y$ и $-\mu\sigma_y$ и к третьему $+\mu\sigma_z$ и $-\mu\sigma_z$. Сложим все три уравнения и, с учетом формул (1.12) и (1.14), получим

$$\Delta = \frac{1}{E} [3\sigma_0(1 + \mu) - 9\mu\sigma_0] = \frac{3\sigma_0(1 - 2\mu)}{E}$$

или

$$\Delta = \frac{\sigma_0}{k}, \quad (1.21)$$

где

$$k = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (1.22)$$

называется *объемным модулем упругости*.

1. Уравнениями, решенными относительно составляющих напряжений. Для этого первое уравнение (1.20) представим, используя формулу (1.21), в виде

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x(1+\mu) - 3\mu\sigma_0] = \frac{1}{E} [\sigma_x(1+\mu) - 3\mu\Delta k]$$

Решив это уравнение относительно σ_x с учетом формулы (1.19), найдем

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu} \varepsilon_x + \frac{3\mu\Delta k}{1+\mu} = 2G\varepsilon_x + \lambda\Delta,$$

где

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \text{ и } \lambda = \frac{3\mu k}{1+\mu} = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \frac{2G\mu}{1-2\mu} \quad (1.23)$$

представляют собой величины, зависящие только от упругих постоянных E и μ материала, и называются *коэффициентами Ламе*.

Таким же преобразованием двух следующих уравнений (1.20) получим выражения для σ_x и σ_y , а решением трех последних уравнений (1.20) - выражения для τ . Итак:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\Delta; & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\Delta; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\Delta; & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

1.10 Плоская задача в прямоугольных координатах

Большая категория задач теории упругости допускает значительное упрощение математического решения. Это задачи, в которых можно считать, что внешние воздействия лежат в плоскостях, параллельных какой-либо плоскости xOy , и что

вызываемые ими напряжения и перемещения одинаковы для всех точек любой оси z , перпендикулярной этой плоскости. Напряжения по площадкам xOy и перемещения по направлению оси z или отсутствуют, или представляют собой функции напряжений и перемещений, возникающих в плоскости xOy . Такие задачи объединяются общим названием — *плоские задачи*. Различают две разновидности плоской задачи: плоское деформированное и плоское напряженное состояния.

При плоском деформированном состоянии точки тела не могут перемещаться вдоль оси z (рис. 16,а) из-за препятствия со стороны соседних элементов (вдали от торцов при большой длине тела). Нагрузка, действующая на тело, постоянна вдоль оси z , но может меняться в плоскости xOy при условии, что она в этой плоскости уравновешена. В таком случае любой элемент толщиной, равной единице, вырезанный двумя параллельными сечениями, перпендикулярными оси z , на известном расстоянии $z = a$ от торцов (рис. 16,б) находится в одинаковых условиях с соседними и испытывает плоское деформированное состояние. Перемещения w вдоль оси z отсутствуют ($w = 0$), а два других (u и v) не зависят от координаты z .

При плоском напряженном состоянии размеры тела вдоль оси z малы (рис. в), а боковые плоскости xOy свободны от нагрузки, т. е. напряжения σ_z , τ_{zx} и τ_{zy} этим плоскостям равны нулю. Ввиду малой толщины можно предположить, что и внутри тела, по плоскостям, параллельным xOy , напряжения пренебрежимо малы, а напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} не зависят от координаты z . Перемещения w вдоль оси z происходят, но они представляют собой функцию напряжений σ_x и σ_y .

Основные уравнения теории упругости, применительно к указанным разновидностям плоской задачи упрощаются следующим образом:

1. Плоское деформированное состояние.

Перемещения $u = f_1(x, y)$, $v = f_2(x, y)$ и $w = 0$.

Деформации из уравнений Коши (1.15)

$$\varepsilon_x = \varphi_1(x, y); \quad \varepsilon_y = \varphi_2(x, y); \quad \gamma_{xy} = \varphi_3(x, y); \quad \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0.$$

Напряжение σ_x , σ_y , σ_z и τ_{xy} не равны нулю; $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$.

Перейдем к уравнениям закона Гука. По третьей формуле (1.20)

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0,$$

откуда

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y), \tag{1.25}$$

т.е. напряжение $\sigma_z \neq 0$.

Подставив в формулу (1.20) выражение (1.25), получим

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E'} (\sigma_x - \mu' \sigma_y)$$

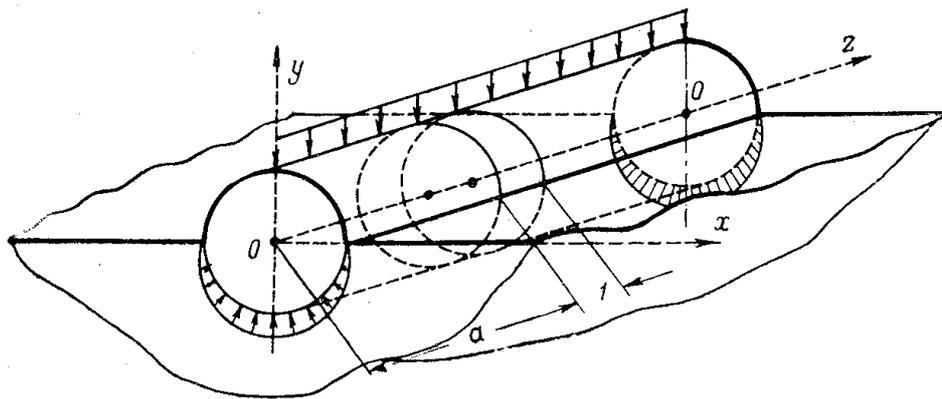
где приведенный модуль упругости

$$E' = \frac{E}{1 - \mu^2};$$

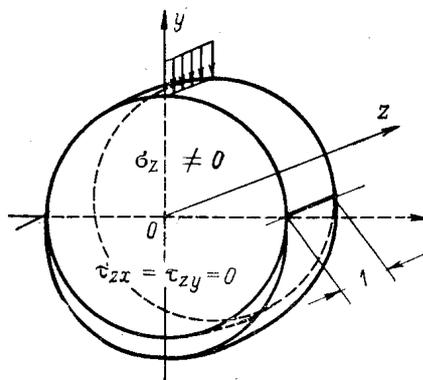
приведенный коэффициент Пуассона

$$\mu' = \frac{\mu}{1 - \mu}.$$

a



б



в

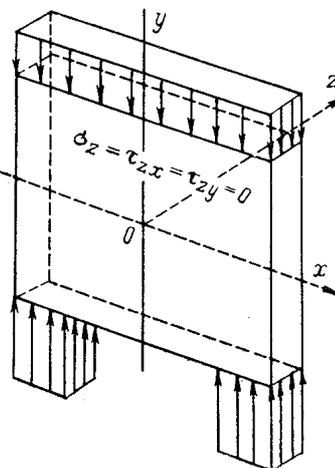


Рис. 16

Аналогично можно преобразовать вторую формулу (1.20).

Приведенный модуль сдвига

$$G' = \frac{E'}{1(1 + \mu')}. \quad (1.26)$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E'}(\sigma_x - \mu'\sigma_y), & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E'}(\sigma_y - \mu'\sigma_x), & \gamma_{yz} &= 0 \\ \varepsilon_z &= 0, & \gamma_{zx} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.27)$$

2. Плоское напряженное состояние.

Перемещения $u = f_1(x, y)$; $v = f_2(x, y)$ и $w = f_3(x, y)$.

Деформации $\varepsilon_x = \varphi_1(x, y)$; $\varepsilon_y = \varphi_2(x, y)$; $\varepsilon_z = \varphi_3(x, y)$;

$\gamma_{xy} = \varphi_4(x, y)$; $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$.

Напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} не равны нулю; $\sigma_x = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$.

Уравнения закона Гука

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), & \gamma_{yz} &= 0 \\ \varepsilon_z &= -\frac{\mu}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), & \gamma_{zx} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.28)$$

3. Уравнения, одинаковые для плоского деформированного и напряженного состояний.

Из трех уравнений равновесия (1.2) ввиду того, что все напряжения не зависят от z , а τ_{yz} и τ_{zx} равны нулю, остается два:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.29)$$

Условия на поверхности (1.4) примут вид

$$\left. \begin{aligned} p_{N_x} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m \\ p_{N_y} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m \\ p_{N_z} &= \sigma_z \end{aligned} \right\}. \quad (1.30)$$

Для плоского напряженного состояния $p_{Nz} = 0$, так как $\sigma_z = 0$. Из шести уравнений совместности (1.16) вследствие того, что ε_x , ε_y и γ_{xy} не зависят от z , ε_z равно нулю или тоже не зависит от z , а γ_{yz} и γ_{zx} равны нулю, останется одно

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (1.31, a)$$

Если в уравнении (1.31, a) заменить деформации напряжениями, пользуясь формулами (1.28), и получившуюся в правой части уравнения удвоенную

производную $2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$ заменить выражением

$$-\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2},$$

полученным из уравнений (1.29) при условии отсутствия объемных сил, то уравнение совместности деформации может быть представлено в напряжениях

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \text{ или } \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (1.31, б)$$

где ∇^2 – оператор Лапласа.

Путем совместного решения уравнений (1.29) и (1.31, б) могут быть найдены напряжения в случае плоской задачи. Так как в эти уравнения не входят упругие постоянные, можно заключить, что напряженное состояние не зависит от материала.

В случае, если объемные силы имеют потенциал, три составляющих напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} могут быть выражены через одну функцию, называемую *функцией*

напряжений. Если объемная сила имеет только одну проекцию $Y = \delta$ (например, собственный вес), то три составляющих напряжения выражаются через функцию напряжений следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \delta x.$$

Можно убедиться, что эти выражения удовлетворяют уравнениям равновесия (1.29). Подставив в уравнение (1.31,б), получим *бигармоническое уравнение плоской задачи*

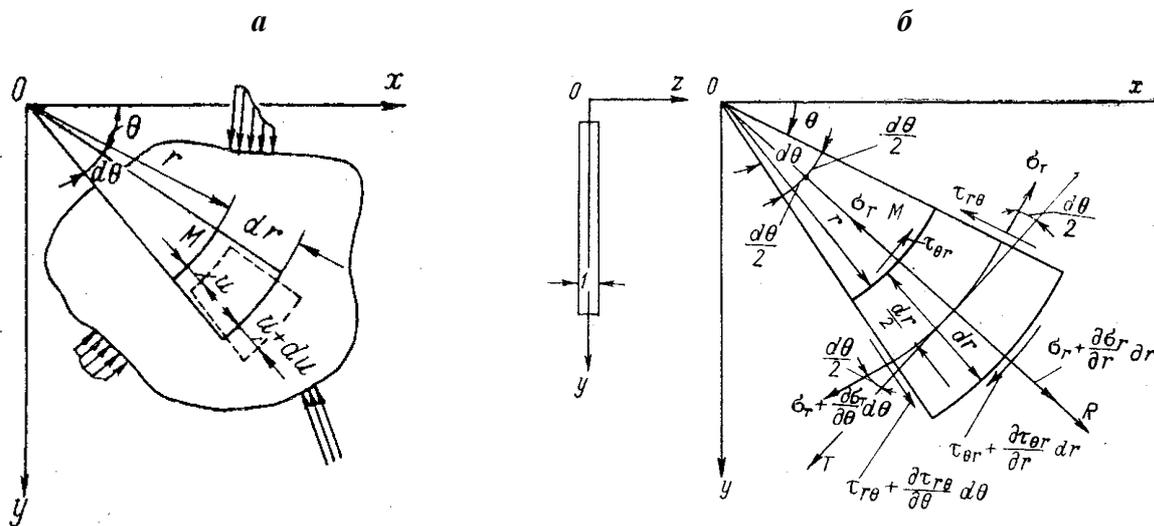
$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \nabla^2 (\nabla^2 \varphi) = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Решение плоской задачи сводится к подысканию функции φ , удовлетворяющей этому уравнению и условиям на поверхности.

1.11 Плоская задача в полярных координатах

Если тело имеет форму кругового цилиндра или ограничено радиальными и круговыми сечениями цилиндра, плоскую задачу проще решать не в прямоугольных, а в полярных координатах.

Выделим у точки M тела произвольной формы, имеющего постоянную толщину в направлении оси z , равную единице, и находящегося под действием взаимно уравновешивающихся нагрузок (рис. 17,а), элемент двумя радиальными и двумя окружными сечениями и составим условия его равновесия. На элемент действуют радиальные и окружные нормальные напряжения σ_r и σ_θ касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{\theta r}$. Действующие по граням выделенного элемента напряжения, с учетом их приращения вследствие изменения переменных θ и r , показаны на рис. 17,б.



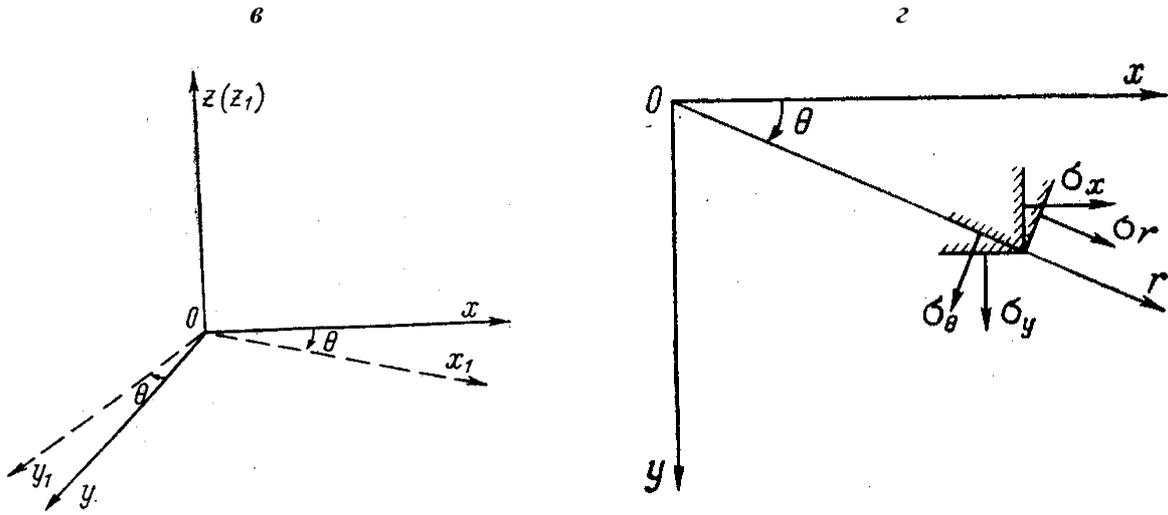


Рис. 17

Составим уравнения равновесия, приравняв нулю суммы проекций всех сил, действующих на элемент, на биссектрису R угла θ и на касательную T к окружности

радиусом $r + \frac{dr}{2}$:

$$\begin{aligned} \sum R = & \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \sigma_r r d\theta - \tau_{r\theta} dr + \\ & + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \sigma_r dr \frac{d\theta}{2} - \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{d\theta}{2} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum T = & -\sigma_r dr + \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \tau_{\theta r} r d\theta + \\ & + \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} dr \right) + \tau_{r\theta} dr \frac{d\theta}{2} + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{d\theta}{2} = 0. \end{aligned}$$

Выполняя перемножение, откидывая величины высшего порядка малости, сокращая подобные члены и деля на $rdrd\theta$, получаем по этим формулам *дифференциальные уравнения равновесия в полярных координатах*

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_r}{r} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{r} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.32, a)$$

Учитывая, что $r d\theta = ds$ находим, что первые два члена в уравнениях (1.32,а) и (1.29) соответствуют друг другу. Последние члены в каждом из уравнений (1.32,а) выражают особенности полярных координат по сравнению с прямоугольными. Чем

ближе элемент к началу координат, тем они больше. Для точки в начале координат при $r = 0$ уравнения (1.32,а) неприменимы.

Закон Гука для плоского напряженного состояния

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r) \\ \gamma_{\theta r} &= \frac{\tau_{\theta r}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

Для плоского деформированного состояния модуль упругости E , модуль сдвига G и коэффициент Пуассона μ в формулах (1.33) заменяются приведенными величинами E' , G' и μ' .

Уравнение совместности в полярных координатах при постоянных объемных силах получается из уравнения (1.31,а) путем перехода от декартовых координат к полярным. Координаты r и θ можно представить в виде функций координат x и y :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Поэтому первые частные производные какой-либо функции r и θ по x и y

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

Пользуясь выражениями для r и θ , вычисляем входящие в последние формулы производные и после подстановки этих производных, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \right\}$$

Дифференцируя эти выражения, находим вторые производные. Складывая эти производные, получаем для первой скобки уравнения (1.31,а)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Для того, чтобы выразить вторую скобку уравнения (1.31,б) в напряжениях σ_r и σ_θ , соответствующих полярным координатам, воспользуемся формулой (1.6). Площадки, по которым действуют нормальные напряжения σ_r и σ_θ , находим, поворачивая оси координат x и y на угол θ вокруг оси z , как показано на рис. 17,в. Направляющие косинусы для повернутых осей даны в табл. 2.

Таблица 2

Оси	x	y	z
x_1	$l_1 = \cos \theta$	$m_1 = \sin \theta$	$n_1 = 0$
y_1	$l_2 = -\sin \theta$	$m_2 = \cos \theta$	$n_2 = 0$
z_1	$l_3 = 0$	$m_3 = 0$	$n_3 = 1$

Подставляя в формулу (1.6) соответствующие значения косинусов, получаем для напряжений в полярных координатах (рис. 17,з)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + 2\tau_{xy} l_1 m_1 = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_\theta &= \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + 2\tau_{xy} l_2 m_2 = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

Сложение этих формул показывает, что $\sigma_r + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y$. Тогда уравнение совместности (1.31,б) в полярных координатах принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \quad (1.34,а)$$

Если объемные силы имеют потенциал, все три составляющих напряжения σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$ в полярных координатах могут быть выражены через одну функцию $\varphi(r, \theta)$ напряжений. При отсутствии объемных сил, напряжения выражаются через функцию φ следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\}$$

При подстановке этих выражений в дифференциальные уравнения (1.32,а) последние превращаются в тождества.

Уравнение совместности (1.34,а), выраженное через функцию напряжений, примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) = 0 \quad (1.34,б)$$

В случае осесимметричной плоской задачи при нагрузке, симметричной относительно оси z , касательные напряжения по граням элемента отсутствуют и дифференциальные уравнения равновесия (1.32,а) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r - \sigma_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} &= 0, \text{ т.е. } \sigma_\theta = \text{const} \\ \tau_{\theta r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.32,б)$$

Перемещение в случае осесимметричной плоской задачи происходит только в радиальном направлении (u на рис. 17, а) и не зависит от θ . В окружном направлении в этом случае перемещение отсутствует.

Относительная линейная деформация в радиальном направлении

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta dr}{dr} = \frac{u + du - u}{dr} = \frac{du}{dr} \quad (1.33,а)$$

Относительная линейная деформация в окружном направлении

$$\varepsilon_\theta = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{(r + u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r} \quad (1.33,б)$$

Относительный сдвиг $\gamma_{\theta r} = 0$.

1.12 Возможные решения задач теории упругости

В 15 уравнениях (1.2), (1.15), (1.24) являются неизвестными шесть компонентов напряжений ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$), шесть компонентов деформации ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$) и три компонента перемещений (u, v, w), т. е. всего 15 неизвестных. Таким образом, с математической точки зрения задача сводится к нахождению 15 функций, удовлетворяющих 15 уравнениям, а также условиям на контуре.

При прямом решении задачи, когда в решении участвуют все 15 уравнений, уравнения неразрывности деформаций, как вытекающие из (1.15) не нужны и могут исполнять роль контрольных уравнений.

Решение указанных трех групп уравнений можно вести разными путями в зависимости от того, что интересует в первую очередь. В связи с этим можно отметить три направления.

1. Принять за основные неизвестные перемещения точек упругого тела; тогда имеем три неизвестных функции

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z), \quad w = f_3(x, y, z). \quad (1.36)$$

Для получения решений надлежит в физические уравнения (1.24) подставить геометрические соотношения (1.15), т. е. выразить напряжения через перемещения, и затем полученные выражения подставить в уравнения равновесия, в результате чего получим три уравнения

$$\psi_1(u, v, w) = 0, \quad \psi_2(u, v, w) = 0, \quad \psi_3(u, v, w) = 0. \quad (1.37)$$

решение которых приведет к выражениям типа (1.36). Назовем этот метод *методом перемещений*.

2. Принять за неизвестные напряжения; тогда имеем шесть неизвестных функций

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \Phi_1(x, y, z), \quad \sigma_y = \Phi_2(x, y, z), \quad \sigma_z = \Phi_3(x, y, z), \\ \tau_{xy} &= \Phi_4(x, y, z), \quad \tau_{yz} = \Phi_5(x, y, z), \quad \tau_{zx} = \Phi_6(x, y, z). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Так как напряжения из уравнений равновесия непосредственно не определяются, надо обратиться к уравнениям деформаций. Используя, например, уравнения неразрывности деформаций (1.17,а) и (1.17,б) с помощью (1.2) и (1.24) можно получить уравнения в форме:

$$F_1(\sigma_x, \dots, \tau_{zx}) = 0 \quad \dots \quad F_e(\sigma_x, \dots, \tau_{zx}) = 0. \quad (1.39)$$

дальнейшее решение которых приведет к выражениям типа (1.38). Назовем этот метод *методом сил*.

3. Очевидно, возможен *смешанный, метод*, когда за основные неизвестные приняты некоторые из перемещений и некоторые из напряжений.

Что касается способов математического решения полученной системы уравнений, то здесь можно указать несколько направлений.

а) *Точное решение прямой задачи*, т. е. непосредственное интегрирование уравнений (1.37) или (1.39).

Основные затруднения при решении прямой задачи теории упругости заключаются обычно в точном удовлетворении решения (1.36) или (1.38) граничным условиям. Эти трудности снимаются при решении обратной задачи.

б) *Решение обратной задачи*, является сравнительно простым (так как связано лишь с дифференцированием функций).

Так, например, задаются перемещениями как функциями координат точки (x, y, z) и разыскивают на основании условий (1.15) деформации, а по ним с помощью (1.24) напряжения; знание последних дает возможность с помощью (1.4) установить поверхностные условия, т. е. внешние нагрузки, которым соответствуют заданные перемещения.

Располагая несколькими решениями обратных задач, каждая из которых соответствует своим граничным условиям, можно комбинированием таких решений получить решение и для некоторых прямых задач.

в) Оказался вполне удобным *полуобратный способ Сен-Венана*, согласно которому задают часть внешних сил и часть перемещений и разыскивают остальные факторы из условия удовлетворения соответствующих уравнений указанных выше групп.

Для облегчения решения некоторых уравнений теории упругости оказывается целесообразным способ последовательных приближений.

Одной из разновидностей такого способа оказывается использование в некоторых задачах вначале тех решений, которые являются каким-либо элементарным решением, например, найденным в курсе сопротивления материалов. Подстановка этих решений в уравнения теории упругости приводит к некоторым несоответствиям, из анализа которых можно найти путь корректировки предварительного решения, если и не дающий в итоге точного решения задачи, то приводящий к удовлетворительному для практики приближенному решению (более строгому, чем исходное элементарное решение).

1.13 Решение задач в перемещениях

Из уравнения (1.24) с помощью (1.15) имеем:

$$\sigma_x = 2G \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \Delta; \quad \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad \tau_{zx} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (1.40)$$

где $\Delta = 3\varepsilon_{cp}$.

Дифференцируя (1.40) и внося производные в первое уравнение (1.2), имеем:

$$\lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial z} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X = 0 \quad (1.41)$$

Выражение в первой скобке может быть записано так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \Delta}{\partial x}$$

Аналогично можно преобразовать и другие два уравнения (1.2), но можно и сразу написать результат, сделав круговую подстановку букв.

Итак, приходим к следующей системе основных уравнений метода перемещений теории упругости:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + G \nabla^2 u + X &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + G \nabla^2 v + X &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + G \nabla^2 w + X &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

Эти уравнения носят название *уравнений Ляме*. Они являются синтезом статического, геометрического и физического обследований задачи.

Поверхностные условия также можно преобразовать, выразив напряжения через перемещения.

Подставив в первое уравнение (1.4) на место напряжений выражения для них в форме (1.40), имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 p_{xv} &= \lambda \Delta \cos l + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos l + \frac{\partial u}{\partial y} \cos m + \frac{\partial u}{\partial z} \cos n \right) + \\
 &\quad + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos l + \frac{\partial v}{\partial x} \cos m + \frac{\partial w}{\partial x} \cos n \right); \\
 p_{yv} &= \lambda \Delta \cos m + G \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos l + \frac{\partial v}{\partial y} \cos m + \frac{\partial v}{\partial z} \cos n \right) + \\
 &\quad + G \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cos l + \frac{\partial v}{\partial y} \cos m + \frac{\partial w}{\partial y} \cos n \right); \\
 p_{zv} &= \lambda \Delta \cos n + G \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos l + \frac{\partial w}{\partial y} \cos m + \frac{\partial w}{\partial z} \cos n \right) + \\
 &\quad + G \left(\frac{\partial u}{\partial z} \cos l + \frac{\partial v}{\partial z} \cos m + \frac{\partial w}{\partial z} \cos n \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

Уравнения (1.42) совместно с условиями на поверхности (1.43) позволяют перейти к решению задач теории упругости в перемещениях.

1.14 Решения задач в напряжениях

В противоположность приему, принятому в предыдущем разделе, когда во всех преобразованиях преследовали цель выразить неизвестные через перемещения, можно поставить другую: все выражать через напряжения. Сообщим окончательные результаты и ограничимся случаем статического равновесия тела при условии отсутствия объемных сил или их постоянства.

Трех условий равновесия (1.2) недостаточно, и надо обратиться к условиям неразрывности деформаций (1.17,а) и (1.17,б). Так как в последние входят деформации, их необходимо выразить через напряжения с помощью (1.24). Выполнив эту подстановку и пользуясь одновременно уравнениями равновесия (1.2), уравнения неразрывности преобразуют к следующему виду (уравнения Бельтрами):

$$\left. \begin{aligned}
 (1 + \mu)\nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} &= 0 \\
 (1 + \mu)\nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} &= 0 \\
 (1 + \mu)\nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= 0 \\
 (1 + \mu)\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \cdot \partial y} &= 0 \\
 (1 + \mu)\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \cdot \partial z} &= 0 \\
 (1 + \mu)\nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z \cdot \partial x} &= 0
 \end{aligned} \right\}, \tag{1.44}$$

где $\sigma = 3\sigma_{cp.} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$.

Таким образом, для решения задачи придется проинтегрировать девять уравнений (1.2), (1.44), а входящие в общие решения этих уравнений произвольные функции определить из условий на поверхности (1.4).

1.15 Случай температурного поля

Если элементарный параллелепипед, предположить подверженным только тепловому воздействию, то его деформация характеризовалась бы следующими компонентами:

$$\varepsilon'_x = \varepsilon'_y = \varepsilon'_z = aT; \quad \gamma'_{xy} = \gamma'_{yz} = \gamma'_{zx} = 0,$$

где a – коэффициент линейного теплового расширения и T — температура. Будем полагать, что рассматриваемое температурное поле не слишком высокое, чтобы могли измениться упругие характеристики материала (в частности – модуль упругости).

При одновременном наличии компонентов напряжений и теплового эффекта, компоненты деформации, используя (1.20), запишем так:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + aT; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] + aT; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + aT; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

Если в первых трех выражениях aT перевести в левую часть равенств и обозначить

$$\varepsilon_x - aT = \varepsilon_x^*; \quad \varepsilon_y - aT = \varepsilon_y^*; \quad \varepsilon_z - aT = \varepsilon_z^*,$$

то уравнения (1.45) примут вид, сходный с (1.20) с заменой ε_x на ε_x^* , ε_y на ε_y^* и ε_z на ε_z^* .

В таком случае можно использовать вариант обобщенного закона Гука. Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x^* + \lambda\Delta^*; \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y^* + \lambda\Delta^*; \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z^* + \lambda\Delta^*; \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

где $\Delta^* = 3\varepsilon_{cp}^* = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 3aT$.

Компоненты уравнений теории упругости для решения такой задачи будут складываться из прежних дифференциальных уравнений равновесия (1.2), прежних геометрических уравнений (1.15), прежних условий на границе (1.4) и новых физических уравнений (1.45) или (1.46), составленных для случая теплового эффекта.

Эти уравнения можно переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left[\varepsilon_x + \frac{3\mu}{1-2\mu} \varepsilon_{cp} - \frac{1+\mu}{1-2\mu} aT \right]; & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= 2G \left[\varepsilon_y + \frac{3\mu}{1-2\mu} \varepsilon_{cp} - \frac{1+\mu}{1-2\mu} aT \right]; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= 2G \left[\varepsilon_z + \frac{3\mu}{1-2\mu} \varepsilon_{cp} - \frac{1+\mu}{1-2\mu} aT \right]; & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

Если теперь проделать выкладки, как в разделе 1.13, то взамен (1.42) придем к уравнениям

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + G \nabla^2 u + \left[X - \frac{2(1 + \mu)}{1 - 2\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (aT) \right] &= 0; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + G \nabla^2 v + \left[Y - \frac{2(1 + \mu)}{1 - 2\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (aT) \right] &= 0; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + G \nabla^2 w + \left[Z - \frac{2(1 + \mu)}{1 - 2\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (aT) \right] &= 0. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Сравнивая (1.48) с (1.47), можно заключить, что при вычислении перемещений неравномерность нагрева тела как бы равносильна добавлению к реальным объемным силам (X, Y, Z) некоторых фиктивных объемных сил, пропорциональных

градиентам температур, т. е. пропорциональных $\frac{\partial}{\partial x}(aT), \frac{\partial}{\partial y}(aT), \frac{\partial}{\partial z}(aT)$, а при вычислении напряжений (1.47) появлению дополнительных членов, пропорциональных температуре.

1.15 Краткие выводы

1. Цель математической теории упругости – определить напряжения и деформации при любых нагрузках на границе и внутри упругого тела любой формы.

В отличие от сопротивления материалов, базирующегося на гипотезе плоских сечений и других упрощенных предположениях, теория упругости ставит целью относительно строгое решение задачи при минимальном количестве исходных гипотез.

Задачей точного решения в теории упругости является получение такой системы функций напряжений, смещений и деформаций, чтобы в каждой точке внутри тела были обеспечены условия равновесия и условия непрерывности (сплошности) тела, а у границы тела внутренние силы находились бы в равновесии с внешними силами, действующими на поверхностях (на границе) тела.

2. Для этой цели теория упругости располагает следующими группами уравнений:

а) *три статических уравнения*, справедливыми для каждой точки внутри тела, из которых следует, что интенсивности изменения (градиенты) нормальных и касательных напряжений вдоль координатных осей и сами напряжения между собой не являются независимыми и подчинены определенным дифференциальным соотношениям (1.2).

б) *шестью геометрическими уравнениями* (1.15), справедливыми для каждой точки внутри тела, из которых, с одной стороны, следует, что компоненты деформации (удлинения и сдвиги) связаны дифференциальными соотношениями с функциями смещений, а с другой стороны (как следствие), интенсивности изменения деформаций вдоль координатных осей и сами деформации между собой не являются независимыми и подчинены определенным дифференциальным соотношениям, именуемым уравнениями неразрывности деформации (1.17,а) и (1.17,б).

в) *шестью физическими уравнениями* (1.24), справедливыми для каждой точки внутри тела и связывающими компоненты напряжений в каждой точке с компонентами деформации для той же точки.

Иначе говоря, в каждом конкретном теле (со своими упругими характеристиками) указанные непрерывные функции для компонентов напряжений, деформаций и смещений оказываются взаимосвязанными, т. е. существует связь не только между функциями, входящими в каждую отдельную группу, но одной группы уравнений с уравнениями другой группы. Эта взаимосвязь предопределяется физической природой исследуемого тела.

3. В указанные три группы уравнений, составляющие в итоге пятнадцать уравнений, входят пятнадцать неизвестных функций. Принципиально может быть найдено бесчисленное множество решений, каждое из которых обратило бы в тождество все перечисленные уравнения, т. е. обеспечило бы равновесие и непрерывность тела в окрестности любой точки внутри тела. Однако каждое из таких решений соответствовало бы своим особым статическим условиям (внешним нагрузкам) и кинематическим условиям на поверхности тела (наличие или отсутствие тех или иных связей). Поэтому истинным решением задачи будет то, которое увязано с конкретными, заданными граничными условиями и потому конкретное решение должно удовлетворять действительным граничным условиям. Часто эти условия задаются в статическом плане и для каждой точки на границе тела представляются тремя граничными условиями (1.4).

ПРОСТЕЙШИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

2.1 Уравнения в цилиндрических координатах

Представим тело вращения, к которому приложены силы, расположенные симметрично относительно оси этого тела (рис.18). Примерами могут быть круглый цилиндр, усеченный конус, деформирующийся под действием равномерного внутреннего или наружного давления или сил, равномерно приложенных по торцевым сечениям.

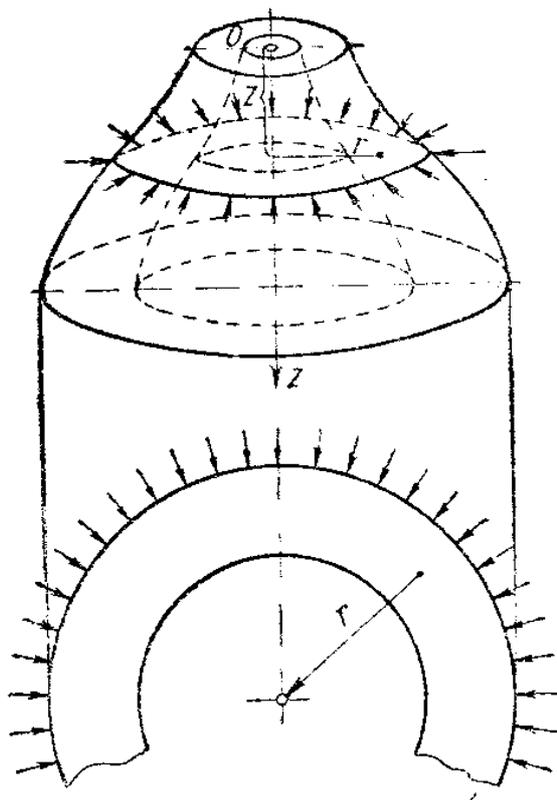


Рис. 18

За ось вращения примем ось z , ось же перпендикулярную к ней, обозначим через r . Двух координат z и r вполне достаточно, так как все точки с одинаковыми такими координатами находятся в одинаковых условиях.

Так как каждая меридиональная плоскость $z\theta r$ представляет плоскость симметрии как в отношении формы, так и в отношении нагрузки тела, то в меридиональных плоскостях касательных напряжений быть не может. Поэтому для каждой точки тела, расположенной на меридиональной плоскости, площадка, содержащая эту точку, является главной площадкой рассматриваемого напряженного состояния. Главное напряжение, действующее по этой площадке, обозначим через σ_θ .

Кроме меридионального сечения через точку с координатами z , r проведем еще второе сечение, перпендикулярное к оси z , и третье сечение, перпендикулярное к двум первым. Следы этих двух секущих плоскостей на меридиональной плоскости будут параллельны соответственно осям r и z .

Вследствие симметрии в обеих секущих плоскостях, в точке z , r могут действовать лишь такие касательные напряжения, которые параллельны меридиональной плоскости (рис. 19). Нормальные напряжения, действующие в секущих плоскостях, обозначим через σ_z и σ_r , касательные — через τ_{rz} и τ_{zr} . Эти напряжения надо считать функциями от z и r .

Указанные выше условия задачи характеризуют случай, когда основные уравнения упругого равновесия можно представить в такой же простой форме, как и в случае

плоской задачи, и потому можем ограничиться рассмотрением соотношений, имеющих место для точек одной и той же плоскости.

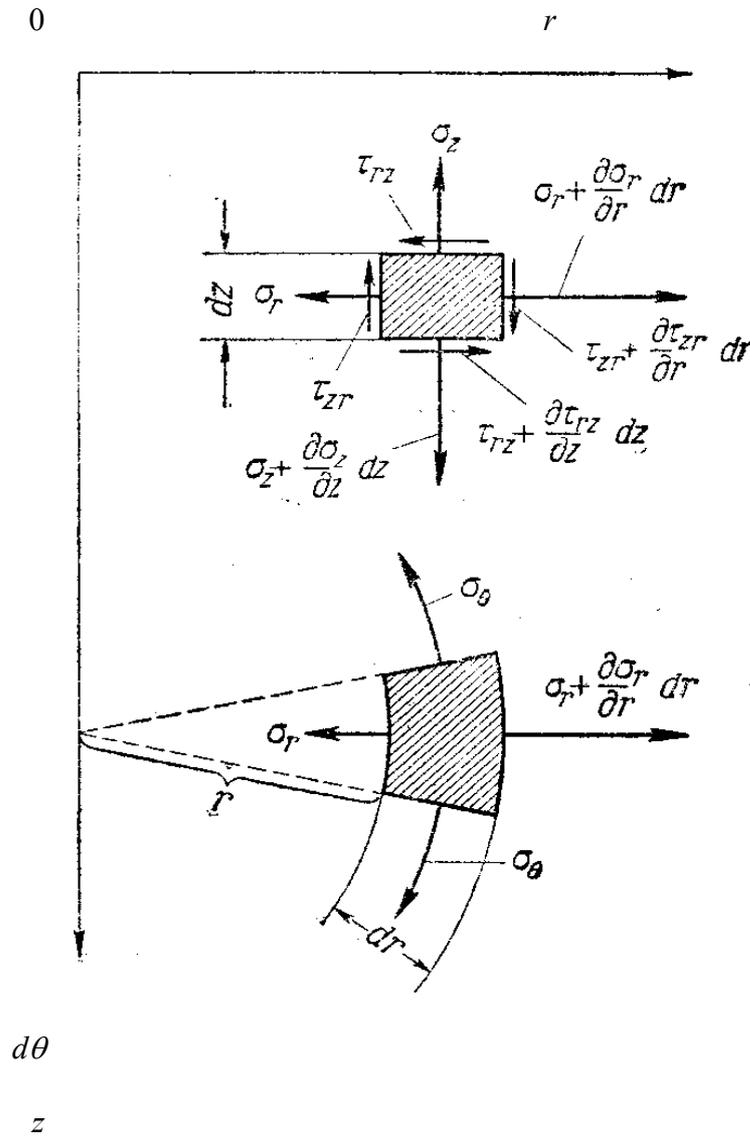


Рис. 19

Проектируя все усилия, принадлежащие элементарному объему на оси z и r , имеем уравнения равновесия в виде:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} r \cdot d\theta \cdot dz \cdot dr - \tau_{rz} \cdot r \cdot d\theta \cdot dz + \left(\tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta \cdot dz = 0,$$

$$-\sigma_r \cdot r d\theta \cdot dr + \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta \cdot dz + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} dz \cdot r \cdot d\theta \cdot dr - \sigma_\theta dr \cdot dz \cdot d\theta = 0.$$

После сокращения на общий множитель $drdzd\theta$ статические уравнения запишутся:

$$\begin{aligned} \frac{r\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) - \sigma_\theta + r\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Обозначая упругие перемещения точки в направлении оси z через w , в направлении радиуса через u (в тангенциальном направлении перемещение отсутствует), *геометрические уравнения* для данного случая можем представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r}, & \gamma_{rz} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Наконец, физические уравнения, согласно (1.24)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= 2G\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\Delta \\ \sigma_r &= 2G\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\Delta \\ \sigma_\theta &= 2G\frac{u}{r} + \lambda\Delta \\ \tau_{rz} &= G\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

При решении задачи в перемещениях объемное расширение

$$\Delta = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}$$

может быть переписано в виде

$$\Delta = \frac{\partial w}{\partial z} + \bar{D}u, \quad (2.4)$$

где под \bar{D} надо понимать обозначение следующей операции:

$$\bar{D} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right)$$

Подставляя (2.4) в физические уравнения (2.3), и, далее, в уравнения равновесия (2.1), придаем последним вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \cdot \bar{D} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{2(1-\mu)} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \bar{D} u = 0; \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \bar{D} u + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\mu)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \cdot \partial z} = 0 \quad (2.6)$$

Таким образом, задача определения напряжений в теле вращения, нагруженном симметрично относительно оси, сводится к нахождению двух функций w и u , которые должны удовлетворять в каждой точке уравнениям (2.5) и (2.6) и одновременно граничным условиям на поверхности тела. Если, кроме того, ввести оператор \bar{D}^2 , положив

$$\bar{D}^2 = \frac{\partial}{\partial r} \bar{D} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right),$$

то из уравнений (2.5) и (2.6), исключая из них w , дифференцируя (2.5) по z и r и

подставляя $\frac{\partial^2 w}{\partial r \cdot \partial z}$ из (2.6), получим:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2\bar{D}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \bar{D}^2 \cdot \bar{D}^2 u = 0 \quad (2.7)$$

Аналогично можно составить дифференциальное уравнение, которому должно удовлетворять перемещение w , если к уравнению (2.6) сначала применить операцию

$\frac{\partial}{\partial z} \bar{D}$, а затем вставить $\frac{\partial}{\partial z} \bar{D} u$ из уравнения (2.5):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \cdot \bar{D} \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\bar{D} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 w = 0 \quad (2.8)$$

Уравнения в цилиндрических координатах (продолжение).

Установленные уравнения теории упругости в напряжениях (уравнения неразрывности деформаций, выраженные через напряжения), написанные в декартовых координатах, можно преобразовать к цилиндрическим координатам,

Для этой цели надлежит выразить напряжения σ_r и σ_θ через σ_x и σ_y по известным формулам перехода

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta; \quad \sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta,$$

заменяв запись суммы другой:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z = \sigma,$$

но учесть, что σ_r и σ_θ не зависят от угла θ , тогда как σ_x и σ_y являются функциями θ . Запишем окончательные результаты для уравнений совместности, которых ввиду осесимметричного характера деформаций останется четыре:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nabla}^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} &= 0 \\ \bar{\nabla}^2 \sigma_\theta - \frac{2}{r^2}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial r} &= 0 \\ \bar{\nabla}^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= 0 \\ \bar{\nabla}^2 \tau_{rz} - \frac{\tau_{rz}}{r^2} + \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r \cdot \partial z} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.9)$$

где введен символ

$$\bar{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.10)$$

Заметим, что одновременно с уравнениями неразрывности должны быть удовлетворены уравнения равновесия (2.1) и условия на контуре.

Подобно тому, как в плоской задаче теории упругости удалось все компоненты напряжений выразить через одну функцию напряжений, так и в разбираемом осесимметричном пространственном случае имеется такая же возможность.

В самом деле, если задаться

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \bar{\nabla}^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \bar{\nabla}^2 \varphi - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \mu) \bar{\nabla}^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \mu) \bar{\nabla}^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \right\}, \quad (2.11)$$

где φ – произвольная функция, и подставить (2.11) в первое уравнение равновесия (2.1), то оно обратится в тождество. Второе уравнение равновесия и все уравнения неразрывности будут удовлетворены, если принять φ согласно уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) = 0 \quad (2.12)$$

Можно подобрать много решений уравнения (2.12). Вот некоторые из них:

$$\varphi = C_1 \ln r + C_2 z \ln r + C_3 z^2 \ln r + C_4 z \ln r, \quad (2.13)$$

$$\varphi = C_1 z + C_2 r^2 + C_3 z^2 + C_4 r^2 z + C_5 z^3. \quad (2.14)$$

Так как эти выражения φ удовлетворяют уравнению (2.12) при любых значениях коэффициентов C , следовательно, любой член их также удовлетворяет уравнению (2.12). Например, может быть

$$\varphi = Cz \ln \left(\frac{\sqrt{r^2 + z^2} - z}{\sqrt{r^2 + z^2} + z} \right). \quad (2.15)$$

Если в числе прочих причиной, вызывающих напряженное и деформированное состояния тела, является возникновение температурного поля, в общем случае неравномерного вдоль координаты z и вдоль радиуса r , т. е.

$$T = T(z, r),$$

то надлежит внести дополнения в физические уравнения (2.3), а именно, они должны быть записаны [(по аналогии с (1.47), но в цилиндрических координатах] следующим образом:

$$\sigma_z = 2G \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \Delta - \eta T; \quad (2.16)$$

$$\sigma_r = 2G \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \Delta - \eta T; \quad (2.17)$$

$$\sigma_\theta = 2G \frac{u}{r} + \lambda \Delta - \eta T, \quad (2.18)$$

где, введено обозначение:

$$\eta = 2G\alpha \frac{1-\mu}{1-2\mu}$$

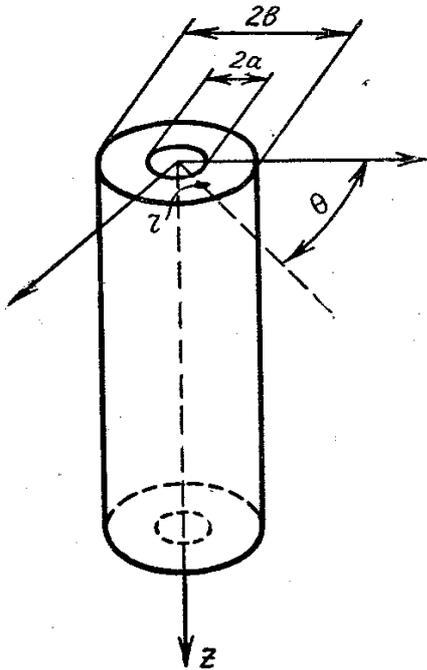


Рис. 20

В качестве примера рассмотрим длинную толстостенную трубу (рис. 20) с радиальным перепадом температур, т. е. считается заданным закон $T = T(r)$.

Пренебрегая влиянием торцов, можно считать, что все сечения трубы, перпендикулярные к ее оси, остаются плоскими и все работают в одинаковых условиях. Таким образом, радиальное перемещение u зависит только от r , перемещение v в направлении θ отсутствует, относительное удлинение по направлению оси z следует считать постоянным, т. е.

$$\sigma_z = \frac{\partial w}{\partial z} = const. \quad (2.19)$$

Для относительных удлинений в радиальном

и тангенциальном направлениях возможно использовать соотношения (1.35,а), (1.35,б) т. е.

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (2.20)$$

Очевидно в рассматриваемой задаче сохраняется уравнение равновесия из (1.32,б) т.е.

$$\sigma_r - \sigma_\theta + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (2.21)$$

Использование (2.19) (2.20) в (2.16) и (2.18) с последующей подстановкой в (2.21) приводит к разрешающему уравнению следующего вида:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{(1+\mu)}{1-\mu} \alpha \frac{dT}{dr} \quad (2.22)$$

Решением (2.22) является выражение

$$u = Ar + \frac{B}{r} + \frac{1-\mu}{r} \alpha \int_a^r T(\rho) \rho \cdot d\rho \quad (2.23)$$

где ρ - переменная интегрирования.

Далее, очевидно, подлежит подставить (2.23) в (2.17), (2.18), а для определения

постоянных A , B и $\epsilon_z = \frac{dw}{dz}$ использовать граничные уравнения. Так, если внутренняя и наружная поверхности трубы свободны, то, следовательно:

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0, \quad (\sigma_r)_{r=b} = 0.$$

Если труба не имеет осевой нагрузки, то

$$\int_a^b \sigma_z 2\pi r dr = 0.$$

Приведем окончательные выражения для напряжений на внутренней и наружной поверхности трубы для случая, когда на этих поверхностях поддерживаются постоянные температуры T_a и T_b и, следовательно, для такого установившегося потока распределение температур по толщине стенки выражается формулой:

$$T = \frac{T_a \ln \frac{b}{a} + T_b \ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \quad (2.24)$$

Тогда на внутренней и наружной поверхностях:

$$(\sigma_\theta)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=a} = \frac{E\alpha(T_b - T_a)}{1-\mu} \cdot \left[\frac{b^2}{b^2 - a^2} - \frac{1}{2 \ln \frac{b}{a}} \right], \quad (2.25)$$

$$(\sigma_\theta)_{r=b} = (\sigma_z)_{r=b} = \frac{E\alpha(T_b - T_a)}{1-\mu} \cdot \left[\frac{a^2}{b^2 - a^2} - \frac{1}{2 \ln \frac{b}{a}} \right]. \quad (2.26)$$

2.2 Деформация толстостенного сферического сосуда

При решении некоторых задач, когда многие компоненты напряжений и деформаций отсутствуют, можно не прибегать к общим уравнениям теории упругости (в

перемещениях или в напряжениях), которые должны значительно упроститься, а все три необходимые стороны исследования (геометрическую, физическую и статическую) выполнить непосредственно применительно к рассматриваемому частному случаю.

Представим себе шаровой сосуд, подвергающийся действию внутреннего и внешнего равномерных давлений. Пусть a и b обозначают соответственно внутренний и наружный радиусы шара (рис. 21), а p_a и p_b – внутреннее и наружное давления газов.

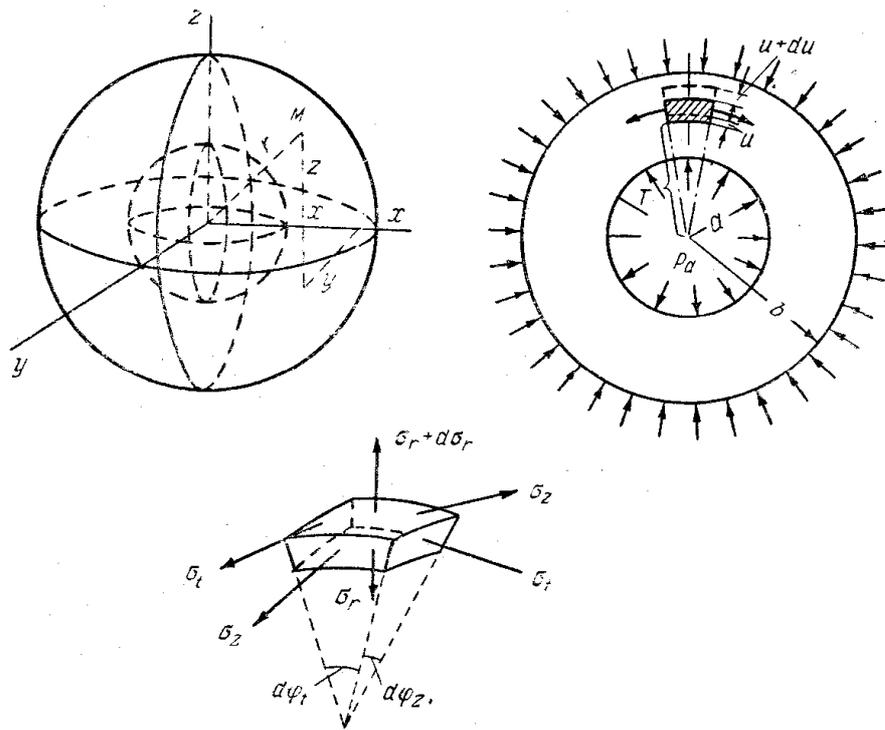


Рис. 21

Начнем со статического обследования. Вырежем для исследования бесконечно малый элемент двумя парами взаимно перпендикулярных меридиональных сечений и двумя концентрическими сферическими поверхностями. Действие отброшенных частей сосуда заменим тангенциальными (σ_t , σ_z) и радиальными (σ_r) напряжениями. Так как в рассматриваемом случае напряжения зависят только от радиуса r , то напряжения по двум бесконечно близким друг к другу

$$\frac{d\sigma_r}{dr} dr = d\sigma_r$$

концентрическим поверхностям будут отличаться на величину $\frac{d\sigma_r}{dr} dr$ и не будут зависеть от угла θ – другого параметра, определяющего местоположение рассматриваемого элемента. Проектируя все силы на нормаль к элементу, имеем уравнение равновесия в виде:

$$-\sigma_r (rd\varphi_r)(rd\varphi_z) + (\sigma_r + d\sigma_r)(r+dr)^2 d\varphi_1 d\varphi_2 - \sigma_t (rdrd\varphi_z) d\varphi_1 - \sigma_z (rd\varphi_1 dr) d\varphi_2 = 0$$

Имея в виду равенство $\sigma_t = \sigma_z$ и производя сокращения, получаем уравнение равновесия:

$$2(\sigma_r - \sigma_t) + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (2.27)$$

Переходим к геометрическому обследованию. Из рассмотрения перемещений и формоизменения элемента заключаем, что относительное тангенциальное удлинение:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_z = \frac{(r+u)d\varphi_t - rd\varphi_t}{dr} = \frac{u}{r}, \quad (2.28)$$

а относительное радиальное удлинение:

$$\varepsilon_r = \frac{(u+du) - (u)}{dr} = \frac{du}{dr}. \quad (2.29)$$

Выполним физическое обследование. Зависимость напряжений от деформаций в данном случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{1}{E} [\sigma_t - \mu(\sigma_z + \sigma_r)]; \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_t + \sigma_z)]. \end{aligned}$$

Напряжения через деформации выражаются (принимая во внимание равенство $\varepsilon_t = \varepsilon_z$ и $\sigma_t = \sigma_z$) так:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= \frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} (\varepsilon_t + \mu\varepsilon_r), \\ \sigma_r &= \frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} [2\mu\varepsilon_t + (1 - \mu)\varepsilon_r]. \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Данные геометрического обследования используем для преобразования полученных физических зависимостей, т. е. подставляем (2.28) и (2.29) в (2.30). Имеем выражения для напряжений:

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} \left[\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right]; \quad (2.31)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} \left[2\mu \frac{u}{r} + (1 - \mu) \frac{du}{dr} \right]. \quad (2.32)$$

Выражения (2.31) и (3.32) подставляем в уравнение статики(12.27). Тогда после сокращений получаем выражение

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{du}{dr} - 2 \frac{u}{r^2} = 0, \quad (2.33)$$

которое представляет собой уравнение, объединяющее в себе все три стороны исследования (геометрическую, физическую и статическую).

Общий интеграл дифференциального уравнения (2.33) имеет вид

$$u = \frac{A}{r^2} + Br \quad (2.34)$$

Дифференцируя (2.34), находим

$$\frac{du}{dr} = -\frac{2A}{r^3} + B; \quad \frac{d^2u}{dr^2} = \frac{6A}{r^4} \quad (2.35)$$

Подставляя (2.34) и (2.35) в (2.31) и (2.32), получаем вместо дифференциальной формы выражения для напряжений в алгебраической форме:

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} \left[\frac{A}{r^3} (1 - 2\mu) + B(1 + \mu) \right]; \quad (2.36)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} \left[-\frac{2A}{r^3} (1 - 2\mu) + B(1 + \mu) \right] \quad (2.37)$$

Постоянные интегрирования A и B определим из поверхностных условий:

$$(\sigma_r)_{r=a} = -p_a \quad \text{и} \quad (\sigma_r)_{r=b} = -p_b.$$

Тогда, в силу (2.37), имеем:

$$\frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} \left\{ -\frac{2A}{a^3} (1 - 2\mu) + B(1 + \mu) \right\} = -p_a;$$

$$\frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} \left\{ -\frac{2A}{b^3} (1 - 2\mu) + B(1 + \mu) \right\} = -p_b,$$

откуда

$$A = \frac{(p_a - p_b) a^2 b^2 (1 - \mu - 2\mu^2)}{E(1 + \mu)(b^2 - a^2)}, \quad B = \frac{(p_a a^3 - p_b b^3)(1 - \mu - 2\mu^2)}{E(1 + \mu)(b^3 - a^3)}. \quad (2.38)$$

Подставляя (2.38) в (2.36) и (2.37), окончательно получим:

$$\sigma_t = p_a \frac{a^3 (2r^3 + b^3)}{2r^3 (b^3 - a^3)} - p_b \frac{b^3 (2r^3 + a^3)}{2r^3 (b^3 - a^3)},$$

$$\sigma_r = p_a \frac{a^3 (2r^3 + b^3)}{r^3 (b^3 - a^3)} + p_b \frac{b^3 (a^3 + r^3)}{r^3 (b^3 - a^3)}.$$

Для случая одного внутреннего давления p_a наибольшее растягивающее тангенциальное напряжение будет на внутренней поверхности сосуда (при $r = a$):

$$\sigma_{\max} = p_a \frac{2a^3 + b^3}{2(b^3 - a^3)},$$

а минимальное на наружной поверхности (при $r = b$):

$$\sigma_{\min} = p_a \frac{3a^3}{2(b^3 - a^3)}.$$

Приведенное здесь решение задачи теории упругости получено применением метода перемещений.

2.3. Сосредоточенная сила, действующая на плоскость

Пусть плоскость $z = 0$ является гранью полубесконечного сплошного тела пусть на эту плоскость действует сосредоточенная сила P по оси z (рис. 22). В литературе эта задача именуется задачей Буссинеска.

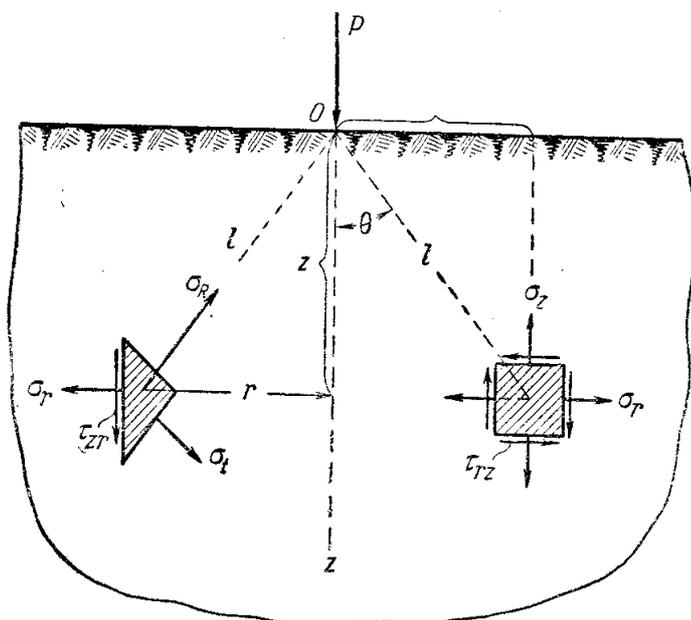


рис. 22

Для радиального напряжения можно принять в качестве первой попытки

$$\sigma_R = -kP \frac{\cos \theta}{l^2}$$

Переходя к цилиндрическим координатам, по формулам перехода должны получить

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_R \cos^2 \theta \\ \tau_{rz} &= \frac{1}{2} \sigma_R \sin 2\theta \end{aligned} \right\}$$

Заменяя $\cos \theta = \frac{z}{l}$, $\sin \theta = \frac{r}{l}$, $\frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{rz}{l^2}$ и $l^2 = z^2 + r^2$, имеем:

$$\sigma_z = -kP \frac{z^3}{l^5}, \quad (2.39)$$

$$\tau_{rz} = -kP \frac{z^2 r}{l^2} \quad (2.40)$$

Для определения коэффициента k составим уравнение равновесия по какому-либо горизонтальному сечению $z = a$. Для элементарной площадки в виде бесконечно тонкого кольца шириной dr и радиуса r имеем элементарную внутреннюю силу

$$\sigma_z dF = 2\pi \sigma_z r dr$$

Со всех таких элементарных площадок, т. е. со всего сечения $z = a$, имеем сумму внутренних усилий

$$2\pi \int_0^{\infty} \sigma_z r dr = -2\pi k P z^3 \int_0^{\infty} \frac{r dr}{l^5} \quad (2.41)$$

Так как $l^2 = (z^2 + r^2)$, то, дифференцируя, имеем $2l dl = 2r dr$. Таким образом, (2.41) переписывается:

$$-2\pi k P r^3 \int \frac{dl}{l^4} = -\frac{2}{3} \pi k P$$

Уравнение равновесия по сечению $z = a$ (сумма проекций на ось z) приводит к выражению

$$-\frac{2}{3} \pi k P + P = 0$$

откуда $k = \frac{3}{2\pi}$.

То, что выражения (2.39) и (2.40) дают точное решение задачи, можно доказать путем использования функции напряжений. Выполнение этой операции позволит определить нам также и другие компоненты напряжений (σ_θ , σ_r).

На основании (2.13, 2.14, 2.15)

$$\varphi = C_1 z \ln r + C_2 (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + C_3 z \ln \left(\frac{\sqrt{r^2 + z^2} - z}{\sqrt{r^2 + z^2} + z} \right)$$

Окончательно формулы для напряжений примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{P}{\pi} \cdot \frac{z^2}{l^5} \\ \sigma_r &= -\frac{P}{2\pi} \left[\frac{1-2\mu}{l(l+z)} - \frac{3zr^2}{l^5} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{P}{2\pi} (1-2\mu) \left[\frac{z}{l^3} - \frac{1}{l(l+z)} \right] \\ \tau_{rz} &= -\frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{z^2 r}{l^5} \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

Для определения перемещений используем уравнения (2.2). Компонента смещения вдоль радиуса r

$$u = \varepsilon_\theta r = \frac{r}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \quad (2.43)$$

После подстановки в (2.43) выражений (2.42) и преобразований получаем

$$u = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{rz}{l^3} - (1-2\mu) \frac{r}{l^2 + lz} \right]$$

При $l = \infty$, как и следует ожидать, $u = 0$. На основании этого

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)]$$

откуда

$$w = \frac{1}{E} \int [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)] dz + f(r) \quad (2.44)$$

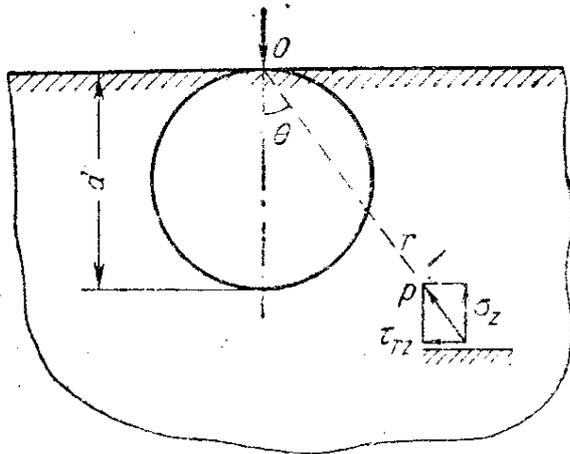
После подстановки в (2.44) выражений (2.42) и интегрирования, принимая также, что $w_{r=\infty} = 0$, получаем:

$$f(r) = 0 \text{ и } w = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{2(1-\mu)}{l} + \frac{z^2}{l^3} \right]$$

Для вертикальных перемещений точек на граничной плоскости $z = 0$ для так называемой “дневной поверхности” получим выражение:

$$w_{z=0} = \frac{P(1-\mu^2)}{\pi Er} \quad (2.45)$$

У начала координат, как это было и в плоской задаче, перемещения и напряжения становятся бесконечно большими, и потому, необходимо представить, что у начала координат в области пластических деформаций материал вырезан полусферической поверхностью малого радиуса, а сосредоточенная сила P заменена статически эквивалентными усилиями, распределенными по этой поверхности.



Полное напряжение в любой точке горизонтальной площадки (т.е. равнодействующая напряжений σ_z и τ_{rz} на рис. 23)

$$P = \frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{l^2}$$

Если, далее, очертить произвольным диаметром d сферу, касающуюся граничной плоскости в той же точке O , то по всем горизонтальным площадкам, размещенным на поверхности этой сферы, полные напряжения

$$P = \frac{3P}{2\pi d^2}$$

2.4 Частные случаи загрузки упругого полупространства

а) Равномерная загрузка по площади круга. Имея решение для сосредоточенной силы, действующей на плоскую грань упругого полупространства, найдем перемещения и напряжения, возникающие под действием распределенной нагрузки, если применим принцип сложения действия сил. Пусть нагрузка общим весом P равномерно распределена на "дневной" поверхности полубесконечного тела по площади круга радиуса a . Интенсивность нагрузки

$$q = \frac{P}{\pi a^2}$$

Составим выражения для перемещения точки C , находящейся на "дневной" поверхности, но в пределах загруженного круга (рис. 24).

Проведем через точку C секущую MC , а в бесконечной близости другую – M_1C и рассмотрим влияние на "прогиб" точки C нагрузки, расположенной на элементарной площадке, заштрихованной на рис. 24. Эта площадка равна $dF = sd\varphi ds$, а нагрузка, на нее приходящаяся,

$$dP = qdF = qsd\varphi ds. \quad (2.46)$$

От такой нагрузки точка C должна опуститься согласно (2.45) на

$$dw = \frac{dP(1 - \mu^2)}{\pi Es}$$

и тогда получим

$$dw = \frac{1 - \mu^2}{\pi E} q ds d\varphi$$

Полное перемещение точки C от всей нагрузки

$$w = \frac{1 - \mu^2}{\pi E} q \int ds \int d\varphi$$

Из рис. 24 ясно, что взятый по всей длине секущей интеграл

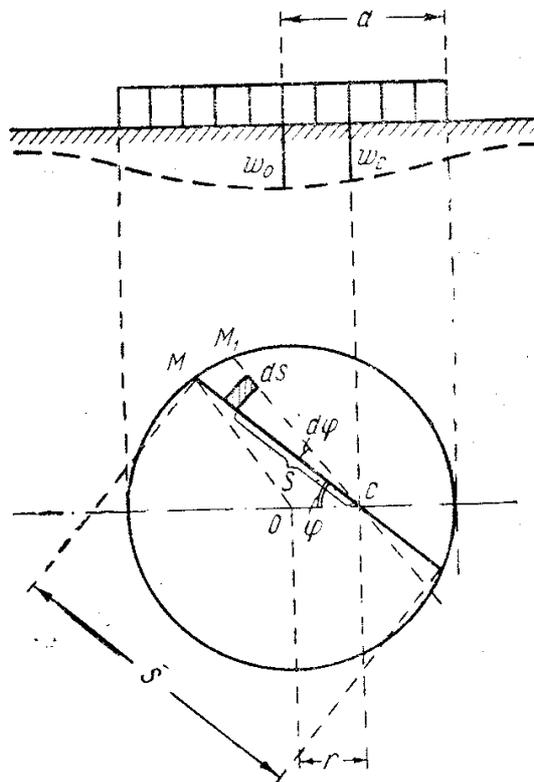


Рис. 24

$$\int ds = \bar{s} = 2\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \quad (2.47)$$

Тогда окончательно

$$w = 4q \frac{(1 - \mu^2)^{\frac{\pi}{2}}}{\pi E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi$$

Для “прогиба” в центре круга, т. е. при $r = 0$, имеем:

$$w_0 = \frac{2(1 - \mu^2)}{E} qa = \frac{2(1 - \mu^2)}{\pi a E} P$$

Таким образом, зная a , избавимся от бесконечности, получаемой по формуле (2.45).

Для “прогиба” точек, лежащих на контуре загруженного круга, т. е. при $r = a$, получим:

$$w_a = \frac{4(1 - \mu^2)}{\pi E} qa$$

Отношение перемещений двух характерных точек

$$\frac{w_0}{w_a} = \frac{\pi}{2} = 1,57.$$

Перемещение точек, лежащих внутри загруженного круга, но не в центре его, могут быть вычислены на основании (2.48) с помощью таблиц эллиптических интегралов.

б) Загрузка на площади круга по “полушару”. Рассмотрим случай, когда на площади круга радиуса a расположена нагрузка в виде шапки (рис. 25) таким образом, что в любой точке загруженной территории интенсивность нагрузки

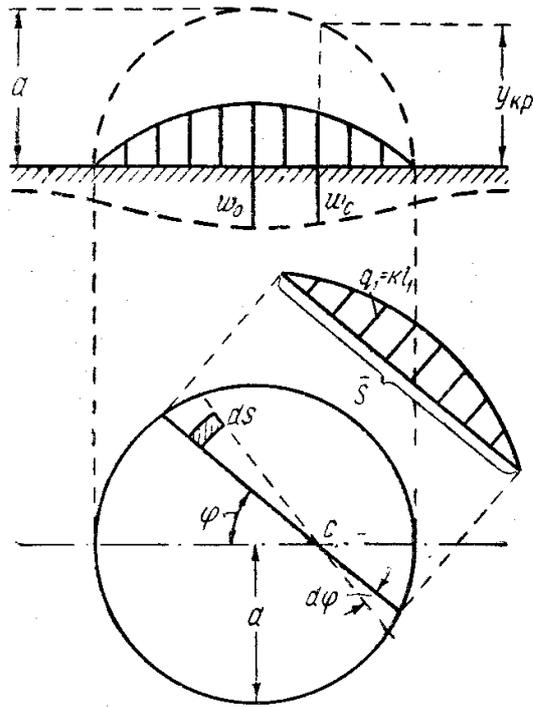


Рис. 25

пропорциональна ординате полусферы, имеющей радиус a и основанием которой служит упомянутая площадь круга. Иначе говоря, интенсивность нагрузки в любой точке согласно обозначениям рис. 24 записывается так:

$$q = kY_{кр.};$$

здесь $Y_{кр.}$ – ордината круга, имеющего радиус a , k – коэффициент нагрузки, т. е.

$$k = \frac{q_0}{a},$$

а q_0 – наибольшая интенсивность нагрузки (т. е. в центре загруженной территории), причем q_0 может быть выражена через общий вес:

$$q_0 = \frac{P}{\frac{2}{3}\pi a^2}$$

Для вычисления перемещения точки C , поступая аналогично предыдущему примеру, имеем:

$$w = \frac{1 - \mu^2}{\pi E} \int d\varphi \int q ds$$

Выясним геометрический смысл последнего интеграла. Из рассмотрения рис. 25 следует, что

$$\int q ds = Q,$$

где Q - площадь эпюры нагрузки на длине \bar{s} . Но так как, рассекая сферу любой плоскостью, мы всегда в разрезе будем получать круг, то и в данном случае, рассекая нагрузку, в общем изображаемую “полушаром”, мы всегда в разрезе должны получить “полукруг” (этой фигурой в разрезе будет полуэллипс). Таким образом, можем записать

$$Q = \frac{\pi s^{-2}}{8} k,$$

где k – коэффициент, позволяющий перейти от геометрического полукруга к “полукругу” в кавычках. Итак,

$$\int q ds = \frac{\pi s^{-2}}{8} \cdot \frac{q_0}{a}$$

или, на основании (2.47),

$$\int q ds = \frac{\pi}{2} (a^2 - r^2 \sin^2 \varphi) \frac{q_0}{a}.$$

Теперь для полного перемещения точки С имеем:

$$w = 2 \frac{1 - \mu^2}{\pi E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q_0}{a} \cdot \frac{\pi}{2} (a^2 - r^2 \sin^2 \varphi) d\varphi$$

После интегрирования получаем:

$$w = w_0 - \beta r^2, \tag{2.49}$$

где обозначено

$$w_0 = \frac{1}{2} k_1 \pi^2 q_0 a, \quad \beta = \frac{k_1 \pi^2}{4a} q_0, \quad k_1 = \frac{1 - \mu^2}{\pi E}.$$

Если радиус изогнутой поверхности граничной плоскости будет велик по сравнению с радиусом загруженного круга, то выражение (2.49) можно практически считать уравнением некоторой сферической поверхности.

в) Обратная задача. Очевидно, можно решать и обратные задачи, когда задано уравнение изогнутой "дневной" поверхности и требуется найти уравнение нагрузки, вызвавшей такую деформацию.

Возьмем, например, абсолютно жесткий штамп в виде круглого цилиндра, вдавливаемого в плоскую грань упругого полупространства. В этом случае перемещение w для всех точек будет постоянным по круглой подошве штампа; распределение давлений не будет постоянным и должно определяться в результате решения интегрального уравнения

$$w_0 = \frac{1}{2} k_1 \pi^2 q_0 a, \quad \beta = \frac{k_1 \pi^2}{4a} q_0, \quad k_1 = \frac{1-\mu^2}{\pi E}.$$

Решение такого уравнения приводит к результату:

$$q = \frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}},$$

где P – полная нагрузка на штамп, a – радиус штампа и r – радиус круга, на который действует давление q . Это распределение неравномерно и наименьшее его значение в центре ($r = 0$), где

$$q_{\min} = \frac{P}{2\pi a^2},$$

т. е. наименьшее давление равно половине среднего давления по круговой площади подошвы штампа. На контуре этой площади ($r = a$) давление становится бесконечно большим.

Перемещение штампа выразится формулой

$$w_0 = \frac{P(1-\mu^2)}{2Ea}.$$

Если предположить, что края штампа имеют некоторое закругление, как это показано на рис. 26, то распределение напряжений у краев штампов может существенно измениться. Такая сложная контактная задача была поставлена И. Я. Штаерманом и привела к ответу, представленному графиком на рис. 26.

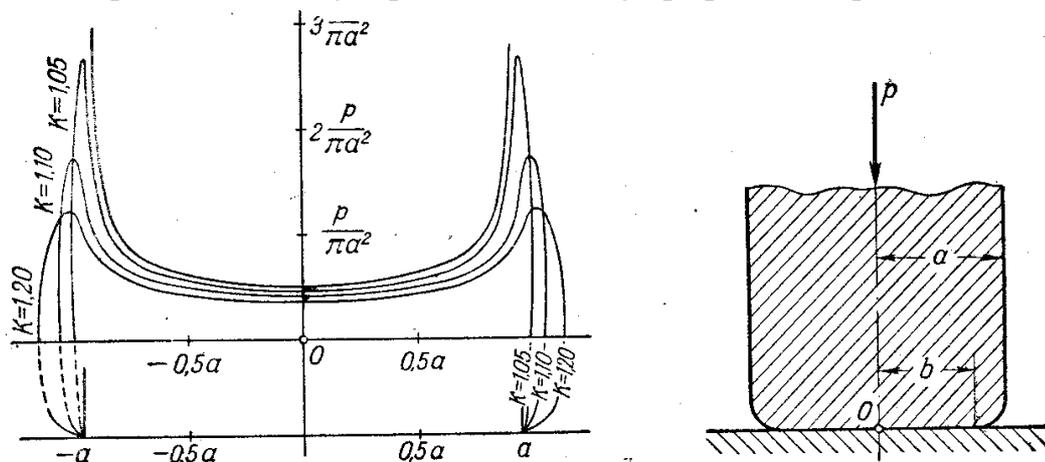


Рис. 26

В частности, это решение свободно от бесконечно больших напряжений, не

имеющих реального значения. На указанном графике $k = \frac{a}{b}$.

2.5 Вдавливание абсолютно жесткого шара в упругое полупространство

Представим, что на упругом полупространстве покоится жесткий шар радиуса R (рис. 27). Если нет давления на этот шар и исключить влияние

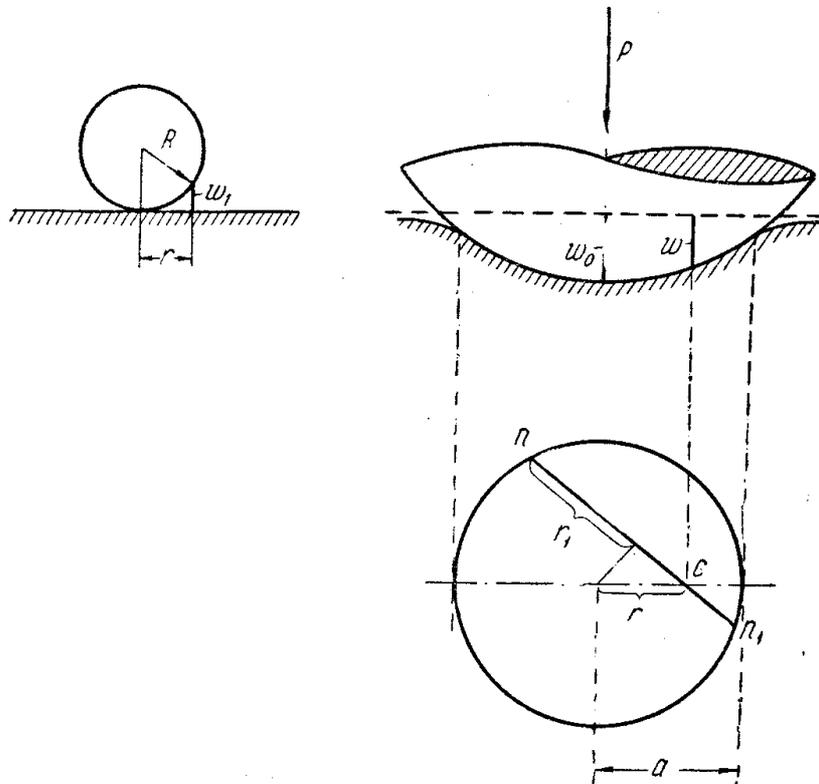


Рис. 27

собственного веса, то касание шара с граничной плоскостью полупространства будет в точке. На расстоянии от точки касания, малом по сравнению с R , зазор между шаром и граничной плоскостью может быть, как известно, с достаточным приближением определен формулой:

$$w_1 = \frac{r^2}{2R}$$

Если к шару будет приложена нагрузка, нормальная к первоначальной граничной плоскости и проходящая через центр шара, то вследствие упругости полупространства граничная плоскость изогнется и шар опустится, как это показано на рис. 26 (справа).

Ввиду симметрии деформации относительно оси, совпадающей с направлением силы, площадка контакта шара с деформированной граничной поверхностью упругого полупространства будет представлять в плане круг некоторого радиуса a ; закон распределения давления под шаром не известен, (подлежит определению). Очевидно, эпюра этого давления должна представлять фигуру, симметричную относительно оси, совпадающей с силой.

Проведя через точку C в плане бесконечно близкие секущие, вычислим нагрузку, приходящуюся на бесконечно малую площадку dp , отстоящую на расстоянии s от точки C . Если напряжение смятия у этой площадки обозначим через q , то элементарная сила на площадке dF соответствует (2.45). Влияние этой силы на опускание точки E определится, согласно (2.45), таким образом:

$$\frac{dP(1 - \mu^2)}{\pi E s}$$

или, после подстановки (2.46),

$$q d\varphi ds \frac{1 - \mu^2}{\pi E}$$

Влияние на прогиб рассматриваемой точки C всех элементарных давлений со всей площади контакта шара и упругого полупространства оценится интегралом:

$$w = k_1 \iint q d\varphi ds, \quad (2.50)$$

В выражении (2.50) неизвестными являются w и функция распределения давления q . С другой стороны, из чисто геометрических соображений, поскольку шар не деформируется, следует (рис. 27) что

$$w = w_0 - w_1, \quad (2.51)$$

где w_0 – опускание шара (и одновременно “прогиб” полупространства) в центре касания, а w_1 – первоначальный зазор между шаром и граничной плоскостью. Тогда исследуемый прогиб

$$w = w_0 - \beta_1 r^2, \quad (2.52)$$

где введено обозначение:

$$\beta_1 = \frac{1}{2R}$$

Уравнение (2.51) выражает условие, что “упругая” поверхность полупространства представляет под шаром часть поверхности этого шара. Объединяя (2.50) и (2.52), имеем:

$$k_1 \iint q d\varphi ds = w_0 - \beta_1 r^2. \quad (2.53)$$

В выражении (2.53) неизвестная функция q входит под знак интеграла и, следовательно, (2.53) является интегральным уравнением. Но именно такое же

уравнение имелось и выше, где, наоборот, была известна нагрузка (она была задана по “полушару”), а определялся характер изгиба граничной плоскости.

На основании сходства правых частей (2.53) и (2.49) заключаем, что эпюра распределения давления по площади контакта представляет “полушар”. Таким образом, если давление в центре контакта обозначим через q_0 , то на расстоянии r от этого центра давление

$$q = q_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}},$$

а при $r = a$ (на контуре круга касания) обращается в нуль.

Все выражения предыдущего раздела целиком относятся и к данной задаче, т. е.

$$w_0 = \frac{1}{2} k_1 \pi^2 q_0 a, \quad \frac{k_1 \pi^2}{4a} q_0 = \beta_1, \quad P = \frac{2}{3} \pi a^2 q_0. \quad (2.54)$$

Решая (2.54) относительно a , q_0 и w_0 , имеем:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{8} \cdot \frac{k_1 P}{\beta_1}}; \quad q_0 = \sqrt[3]{\frac{24}{\pi^5} \left(\frac{\beta_1}{k_1}\right)^2 P}; \quad w_0 = \sqrt{\frac{9\pi^2}{8} \beta_1 k_1^2 P^2} \quad (2.55)$$

2.6. Задача об упругом смятии шаров

Представим, что абсолютно жесткий шар радиуса R_1 покоится на упругом теле сферической формы, имеющей очень большой радиус R_2 , и в дальнейшем подвергается действию силы P (рис. 28). При вычислении глубины вдавливания

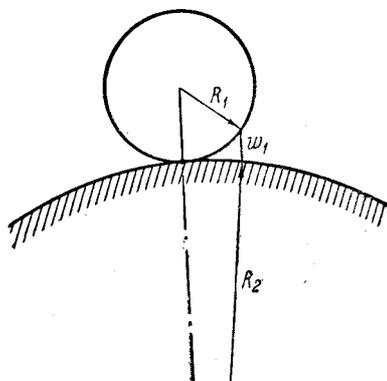


Рис. 28

радиуса площадки контакта и наибольшего напряжения смятия под указанным шаром можно использовать формулы (2.55), введя вместо прежнего β_1 новое значение β_2 , определяемое выражением:

$$\beta_2 = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2}$$

Последнее вытекает из зависимости, составляемой для выбираемого первоначального зазора w_1 в случае касания двух сферических тел (рис. 28), и в данном случае имеем:

$$w_1 = \frac{r^2}{2R_1} + \frac{r^2}{2R_2} = \beta_2 r^2$$

Таким образом, при вдавливании жесткого шара в “почти бесконечную” сферу, получаем

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{R_1 R_2 k_1}{R_1 + R_2} P}; \quad (2.56)$$

$$q_0 = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi^5 k_1^2} \cdot \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2} P}; \quad (2.57)$$

$$w_0 = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2 k_1^2}{16} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} P^2}. \quad (2.58)$$

Полученные формулы могут употребляться лишь в случае, если радиус площадки смятия a будет весьма малым по сравнению с радиусом сферы R_2 , вследствие чего последнюю можно при небольших размерах вдавливаемого шара считать “полубесконечным” телом, закон деформации которого был положен в основание вывода формул (2.55).

Если теперь представить случай двух упругих “почти бесконечных” сфер, взаимно вдавливаемых силами P (рис. 29), т. е. верхнюю сферу считать не абсолютно жесткой, а способной деформироваться, то в этом случае можно

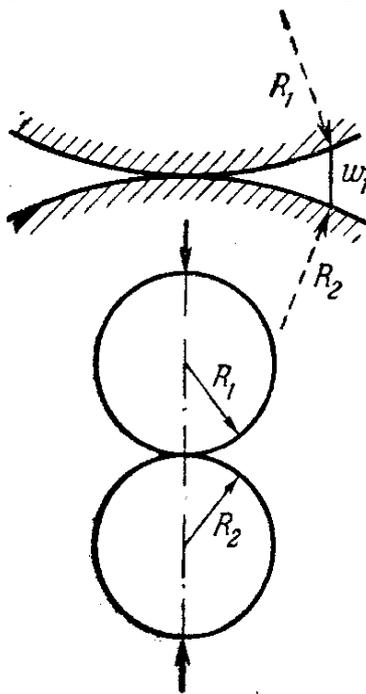


Рис. 29

воспользоваться выводами предыдущей задачи, если ввести изменение в коэффициент, зависящий от упругих свойств материалов, т. е. вместо k_1 подставить

$$k = k_1 + k_2, \quad (2.59)$$

где

$$k_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1}; \quad k_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{\pi E_2},$$

E_1 и μ_1 – упругие характеристики материала верхней сферы; E_2 и μ_2 то же для нижней сферы.

Возможность такого простого перехода от формул (2.56), (2.57), (2.58) вытекает из тех соображений, что в данной задаче ввиду деформаций обеих сфер исходное уравнение деформации (2.53) должно быть записано в виде:

$$k_1 \iint q d\varphi ds + k_2 \iint q d\varphi ds = w_0 - \beta r^2$$

Последнее после введения обозначения (2.59), приводится к виду (2.53) с заменой k_1 и k_2 .

Так как при сжатии упругих шаров радиус площадки смятия оказывается очень малым по сравнению с радиусами самих шаров, то рассмотренная сейчас задача о сжатии двух “почти бесконечных” сфер может быть практически использована и в задаче об упругом сжатии шаров (задача Герца). Итак, при сжатии шаров имеем:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{(k_1 + k_2)R_1R_2}{R_1 + R_2} P} ; \quad (2.60)$$

$$q_0 = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi^5(k_1 + k_2)^2} \cdot \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 \cdot R_2^2} P} ; \quad (2.61)$$

$$w_0 = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2(k_1 + k_2)^2(R_1 + R_2)}{16R_1R_2} P^2} . \quad (2.62)$$

Зная закон распределения давления по поверхности контакта, можно перейти к вычислению напряжений внутри шаров, используя для этой цели (2.42) и применяя принцип наложения.

Большой практический интерес представляет нахождение внутри сжимаемых шаров точек, имеющих большие касательные напряжения. Исследование этого вопроса приводит к выводу, что точка, где касательное напряжение является наибольшим, лежит на оси z на глубине, равной примерно половине радиуса поверхности касания. Такую точку и следует рассматривать как самую опасную (в свете третьей теории прочности) для таких пластичных материалов, как сталь. Наибольшее касательное напряжение в этой точке (при $\mu = 0,3$) составляет примерно $0,31q_0$.

Из (2.60), (2.61), (2.62) следует, что радиус площадки смятия, взаимное вдавливание и напряжения смятия не находятся в линейной зависимости от силы P . При увеличении силы P напряжения и деформации шаров возрастают медленнее, чем возрастает сила.

Таким образом, в контактной задаче принятие в основу исследования линейной связи между компонентами напряжений и компонентами деформации в каждой точке упругого тела (обобщенный закон Гука) повлекло за собой *нелинейную зависимость между силой и перемещениями*.

ТОЛСТОСТЕННЫЕ ТРУБЫ

3.1 Общие сведения. Уравнение равновесия элемента трубы

Если толщина стенки трубы, нагруженной радиальной нагрузкой, превышает $0,1$ радиуса геометрической оси стенки, труба считается толстостенной. Распределение напряжений по толщине стенки такой трубы нельзя считать равномерным; радиальные перемещения отдельных точек стенки трубы зависят от их расстояния r до оси трубы.

С помощью теории расчета толстостенных труб определяются напряжения и перемещения в точках стенок цилиндров машин, стволов орудий, при температурных или прессовых посадках рубашек, муфт и ступиц на валы, а также в облицовках тоннелей и стволов, подверженных горному давлению.

Рассмотрим отрезок трубы длиной, равной единице, вырезанный двумя сечениями, нормальными к оси трубы (рис. 30,а). Труба нагружена на внутренней и наружной поверхностях радиальной сжимающей нагрузкой; интенсивности p_B и p_H этой нагрузки постоянны как вдоль оси трубы, так и по ее окружности. Любой такой отрезок на некотором расстоянии от торцов трубы находится в плоском деформированном состоянии.

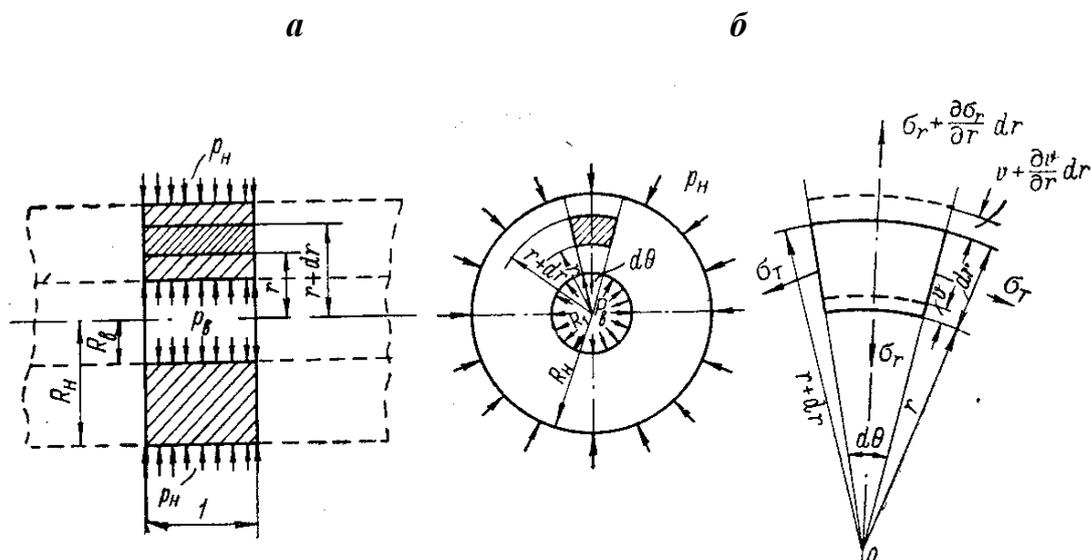


Рис. 30

Составим уравнение равновесия элемента трубы, выделенного двумя радиальными сечениями, составляющими между собой угол $d\theta$, и двумя окружными сечениями, радиусы которых r и $r + dr$ (рис. 30,б). По граням этого элемента действуют радиальные и окружные напряжения σ_r и σ_θ . Радиальное напряжение при

изменении радиуса r получает приращение $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr$, а окружное напряжение σ_T в силу осевой симметрии задачи при изменении угла θ не меняется.

Дифференциальное уравнение равновесия (1.32,б) для осесимметричной задачи имеет вид

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r - \sigma_T = 0 \quad (3.1)$$

Напряжения σ_r и σ_T выразим через относительные линейные деформации ε_r и ε_T с помощью закона Гука:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_T) \quad \text{и} \quad \sigma_T = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_T + \mu \varepsilon_r), \quad (3.2)$$

а относительные деформации заменим их выражениями через радиальное перемещение v (рис. 30,б), пользуясь зависимостями

$$\varepsilon_r = \frac{\partial v}{\partial r} \quad \text{и} \quad \varepsilon_T = \frac{2\pi(r+v) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{v}{r}.$$

Подставив эти выражения в формулу (3.2), а выражения (3.2) в формулу (3.1), получим выражения для напряжений и дифференциальное уравнение равновесия элемента трубы в перемещениях

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \mu \frac{v}{r} \right) \\ \sigma_T &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{v}{r} + \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} = 0 \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = const.$$

Этому уравнению удовлетворяет решение

$$v = Ar + \frac{B}{r}. \quad (3.5)$$

Заменяя в формулах (3.3) перемещение v его выражением (3.5), получим для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[A(1+\mu) - \frac{B}{r^2}(1-\mu) \right] \\ \sigma_\tau &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[A(1+\mu) + \frac{B}{r^2}(1-\mu) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Граничные условия для определения постоянных A и B составляем из условий на внутренней и наружной поверхностях трубы:

$$1) r = R_B, \sigma_r = -p_B; 2) r = R_H, \sigma_r = -p_H.$$

Учет этих условий в первом уравнении (3.6) дает систему двух уравнений, содержащих A и B , решив которую, найдем

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_B^2 p_B - R_H^2 p_H}{R_H^2 - R_B^2} \\ B &= \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{(p_B - p_H) R_B^2 R_H^2}{R_H^2 - R_B^2} \end{aligned} \right\}.$$

Подстановка найденных значений A и B в уравнения (3.6) дает следующие выражения для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{R_B^2 p_B - R_H^2 p_H}{R_H^2 - R_B^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{(p_B - p_H) R_B^2 R_H^2}{R_H^2 - R_B^2} = C_1 - \frac{1}{r^2} C_2 \\ \sigma_\tau &= \frac{R_B^2 p_B - R_H^2 p_H}{R_H^2 - R_B^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{(p_B - p_H) R_B^2 R_H^2}{R_H^2 - R_B^2} = C_1 + \frac{1}{r^2} C_2 \end{aligned} \right\}, \quad (3.7)$$

а подстановка в уравнение (3.5) – выражение для радиального перемещения

$$\begin{aligned}
v &= \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{(R_B^2 p_B - R_H^2 p_H)}{R_H^2 - R_B^2} r + \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{(p_B - p_H) R_B^2 R_H^2}{R_H^2 - R_B^2} \cdot \frac{1}{r} = \\
&= \frac{(1-\mu)C_1}{E} r + \frac{(1+\mu)C_2}{Er}.
\end{aligned}
\tag{3.8}$$

В формулах (3.7) и (3.8)

$$C_1 = \frac{R_B^2 p_B - R_H^2 p_H}{R_H^2 - R_B^2}; \quad C_2 = \frac{(p_B - p_H) R_B^2 R_H^2}{R_H^2 - R_B^2}.$$

Из формул (3.7) видно, что

$$\sigma_r + \sigma_\tau = 2C_1 = const,$$

т. е. сумма радиального и окружного напряжений в любой точке есть постоянная величина, не зависящая от радиуса r .

По формулам (3.7) и (3.8) можно вычислить напряжения и радиальные перемещения для сплошного вала, подверженного наружному радиальному давлению, если положить $R_B = 0$. В таком случае

$$(\sigma_r)_{R_B=0} = (\sigma_\tau)_{R_B=0} = -p_H \quad \text{и} \quad v = -\frac{1-\mu}{E} p_H r,$$

откуда видно, что материал вала испытывает однородное напряженное состояние.

3.2 Исследование напряжений при давления на одном из контуров

1. *Сжимающее радиальное давление на наружном контуре.* По формулам (3.7), положив в них $p_B = 0$, найдем

$$\sigma_{r,\tau} = -\frac{R_H^2 p_H}{R_H^2 - R_B^2} \left(1 \mp \frac{R_B^2}{r^2} \right).
\tag{3.9}$$

Второй член в скобке формулы (3.9) равен единице или меньше ее, поэтому напряжения σ_r и σ_τ во всех точках отрицательные, сжимающие. Окружное напряжение по абсолютной величине всегда больше радиального. Наибольшее нормальное радиальное напряжение σ_r возникает на наружной поверхности трубы ($r = R_H$) и равно $-p_H$, а наибольшее окружное напряжение σ_τ – на

внутренней поверхности ($r = R_B$) и равно $-\frac{2R_H^2 p_H}{R_H^2 - R_B^2}$. Как видно из формулы (3.9), напряжения меняются вдоль радиуса по криволинейному закону. Эпюры

напряжений σ_r и σ_Γ показаны на рис. 31,а. Уменьшение наружного радиуса может быть определено по формуле (3.8) для перемещения v , если положить в ней $p_B = 0$, а $r = R_B$. Тогда

$$v_{r=R_H} = -\frac{p_H R_H}{E} \left(\frac{R_H^2 + R_B^2}{R_H^2 - R_B^2} - \mu \right) \quad (3.10)$$

2. Сжимающее радиальное давление на внутреннем контуре. По формуле (3.7), положив в $p_H = 0$, найдем

$$\sigma_{r,\Gamma} = \frac{R_B^2 p_B}{R_H^2 - R_B^2} \left(1 \mp \frac{R_H^2}{r^2} \right) \quad (3.11)$$

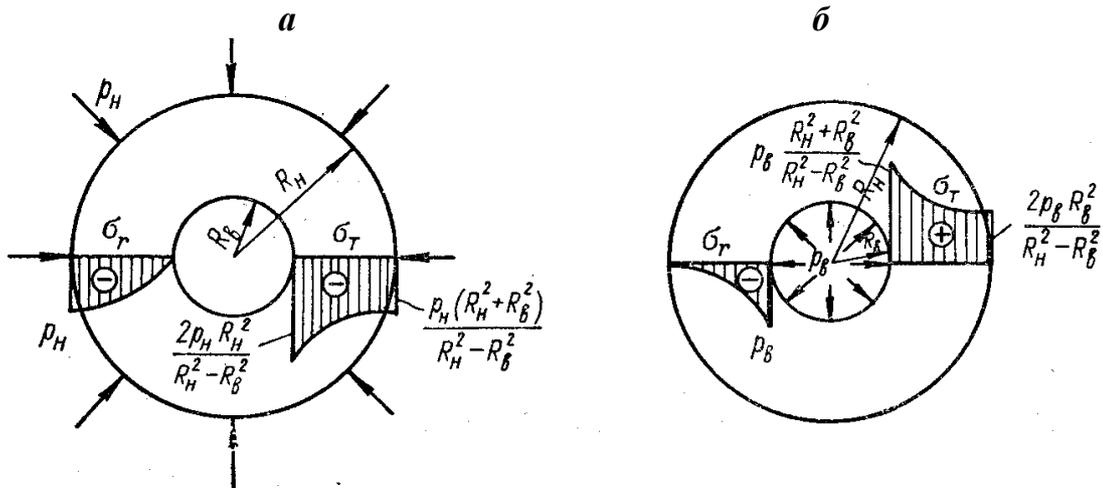


Рис. 31

Второй член в скобке формулы (3.11) равен единице или больше ее, поэтому напряжения σ_r во всех точках трубы отрицательны, а σ_Γ – положительны.

Наибольшее нормальное радиальное напряжение σ_r возникает на внутренней поверхности ($r = R_B$) и равно $-p_B$, наибольшее окружное σ_Γ – также на внутренней (r

$= R_B$), оно растягивающее и равно $p_B \frac{R_H^2 + R_B^2}{R_H^2 - R_B^2}$.

Закон изменения напряжений вдоль радиуса тоже криволинейный [см. формулу

(3.11)]. Эпюры напряжений σ_r и σ_Γ показаны на рис. 31,б. Увеличение внутреннего радиуса может быть получено по формуле (3.8) для перемещений v , если положить в ней $p_H = 0$, а $r = R_B$:

$$v_{r=R_B} = \frac{p_B R_B}{E} \left(\frac{R_H^2 + R_B^2}{R_H^2 - R_B^2} + \mu \right) \quad (3.12)$$

Соотношение окружных напряжений, вычисленных по формуле (3.11) при $r = R_B$ и $r = R_H$,

$$\frac{(\sigma_\Gamma)_{r=R_B}}{(\sigma_\Gamma)_{r=R_H}} = \frac{(\sigma_\Gamma)_{\max}}{(\sigma_\Gamma)_{\min}} = p_B \frac{R_H^2 + R_B^2}{R_H^2 - R_B^2} : 2 p_B \frac{R_B^2}{R_H^2 - R_B^2} = \frac{R_H^2 + R_B^2}{2 R_B^2} \quad (3.13)$$

Из формулы (3.13) видно, что чем меньше толщина кольца, т. е. чем ближе друг к другу значения R_B и R_H , тем ближе отношение (3.13) к единице, т. е. тем

равномернее распределяются напряжения σ_T по толщине трубы. Например, при $R_B = 0,95$, отношение

$$\frac{(\sigma_T)_{\max}}{(\sigma_T)_{\min}} = \frac{R_H^2(1 + 0,95^2)}{2 \cdot 0,95^2 \cdot R_H^2} = 1,05$$

и окружные напряжения можно считать равномерно распределенными по толщине кольца. При большой толщине трубы напряжения σ_r и σ_T в точках, удаленных от внутренней поверхности, сближаются по величине и в пределе, при $R_H \rightarrow \infty$, становятся одинаковыми и противоположными по знаку.

Представим формулу (3.11) в виде

$$(\sigma_{r,T})_{R_H \rightarrow \infty} = \left[\frac{R_B^2 p_B \left(\frac{1}{R_H^2} \mp \frac{1}{r^2} \right)}{1 - \frac{R_B^2}{R_H^2}} \right]_{R_H \rightarrow \infty} = \mp \frac{R_B^2 p_B}{r^2}$$

Следовательно, если $r > 4R_B$, напряжения σ_r и σ_T будут равны и будут составлять меньше 6% от внутреннего давления. На этом основании по формуле (3.11) можно определять радиальные и окружные напряжения в случае плоской деформации тела, имеющего отверстия, нагруженные радиальным давлением, расположенные друг от друга на расстоянии больше $8R_B$ (рис. 32). Внешний контур тела не имеет значения и может быть произвольного очертания.

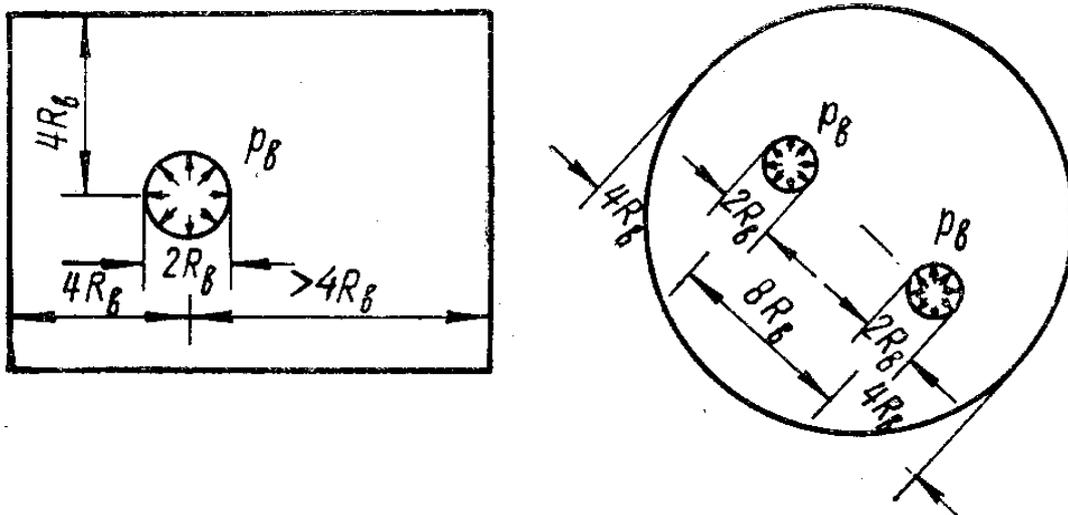


Рис. 32

3.3 Условия прочности при упругой деформации

Составим условия прочности для толстостенной трубы, испытывающей внутреннее давление p_B . В зависимости от принятого предельного состояния для наиболее напряженной точки на внутренней поверхности трубы получим следующие выражения:

1. Для хрупких материалов (чугун, бетон) по первой теории прочности

$$\sigma_1 \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad (\sigma_T)_{r=R_B} \leq [\sigma] \quad (3.14)$$

По формуле (3.11) при $r = R_B$ расчетное напряжение

$$\sigma_3 = p_B \frac{R_H^2 + R_B^2}{R_H^2 - R_B^2} \leq [\sigma]$$

или

$$-R_H^2(p_B - [\sigma]) \leq R_B^2(p_B + [\sigma]),$$

откуда

$$\frac{R_H}{R_B} = \sqrt{\frac{p_B + [\sigma]}{[\sigma] - p_B}} \quad (3.15)$$

Выражение (3.15) показывает, что при внутреннем давлении, приближающемся по величине к допускаемому напряжению $[\sigma]$, отношение

$\frac{R_H}{R_B}$ стремится к бесконечности, т. е. никаким увеличением наружного радиуса R_H нельзя удовлетворить условию прочности (3.14).

2. Для пластичных материалов (сталь, медь) по третьей теории прочности

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad (\sigma_T)_{r=R_B} - (\sigma_r)_{r=R_B} \leq [\sigma] \quad (3.16)$$

По формуле (3.11) при $r = R_B$ расчетное напряжение

$$\sigma_3 = p_B \frac{R_H^2 + R_B^2}{R_H^2 - R_B^2} - (-p_B) \leq [\sigma]$$

или

$$R_H^2(2p_B - [\sigma]) \leq -R_B^2[\sigma],$$

откуда

$$\frac{R_H}{R_B} = \sqrt{\frac{[\sigma]}{[\sigma] - 2p_B}} \quad (3.17)$$

Выражение (3.17) показывает, что при внутреннем давлении p_B , приближающемся по

величине к половине допускаемого напряжения $[\sigma]$, отношение $\frac{R_H}{R_B}$ стремится к бесконечности и увеличением наружного радиуса R_H удовлетворить условию прочности (3.16) нельзя.

3.4 Напряжения в составных трубах.

Имеются конструкции, представляющие собой составные толстостенные оболочки или трубы (например, стволы артиллерийских орудий, облицовки пустотелых гребных винтов) (рис. 33,а). В этих случаях наружные оболочки насаживаются на внутренние с натягом Δ (рис. 33,б). Геометрическое условие совместности деформаций внутренней и наружной трубы имеет вид

$$v_H + v_B = \Delta,$$

где v_B – уменьшение наружного радиуса внутренней трубы;

v_H – увеличение внутреннего радиуса наружной трубы.

Подставив в уравнение (3.18) абсолютные величины радиальных перемещений v_B и v_H по формулам (3.12) и (3.10) с учетом обозначений, принятых для

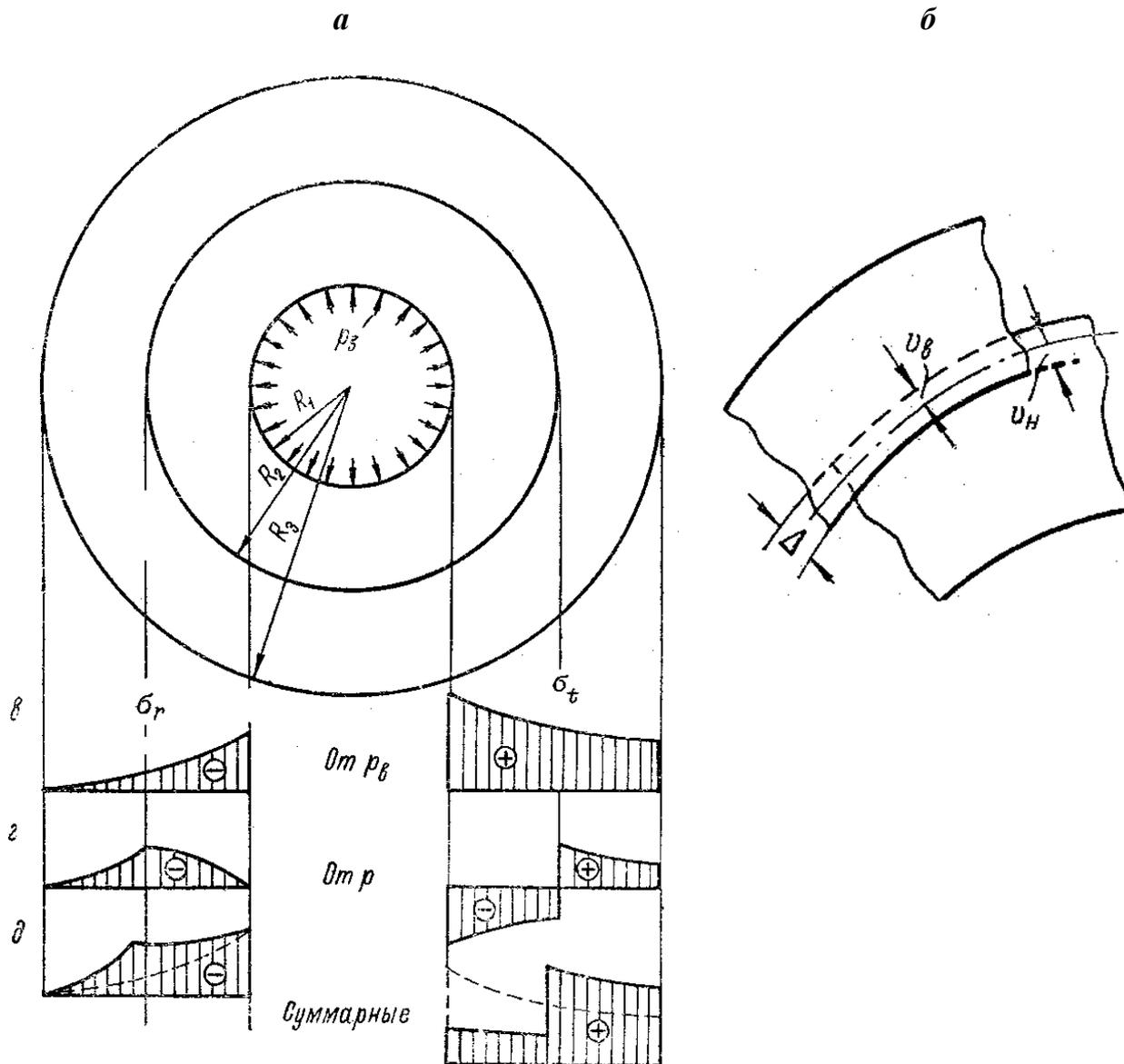


Рис. 33

радиусов на рис. 33, получим

$$\Delta = \frac{pR_2}{E_B} \left(\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - \mu \right) + \frac{pR_2}{E_H} \left(\frac{R_3^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} + \mu \right), \quad (3.19)$$

где p – междутрубное давление, действующее на поверхности соприкосновения труб;

E_B и E_H – модули упругости материала внутренней и наружной труб.

Применительно к трубам, выполненным из одинакового материала с модулем упругости E , формула (3.19) примет вид

$$(3.20)$$

где введено обозначение

$$C = \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{R_3^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

Решение уравнения (3.20) дает следующее выражение для междутрубного давления:

$$p = \frac{\Delta E}{CR_2} = \frac{\Delta E}{2R_2^3} \cdot \frac{(R_2^2 - R_1^2)(R_3^2 - R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)} \quad (3.21)$$

При заданном натяге Δ для возможности насадки наружной трубы на внутреннюю нужно или нагреть наружную трубу или охладить внутреннюю.

Натяг Δ связан с температурой t соотношением

$$\Delta = \alpha t R_2 \quad (3.22)$$

Приравняв правые части уравнений (3.20) и (3.22), получим междутрубное давление после насадки

$$p = \frac{\alpha t E}{C} \quad (3.23)$$

Напряжения в составной трубе вычисляются на основании принципа сложения действия сил путем алгебраического суммирования рабочих напряжений от внутреннего давления p_B сплошной трубы с внутренним радиусом R_1 и наружным R_3 (соответствующие эпюры показаны на рис. 33,в) и напряжений от междутрубного давления p . Для внутренней трубы междутрубное давление представляет собой наружную радиальную сжимающую нагрузку, а для наружной – внутреннюю радиальную сжимающую нагрузку. Эпюры от междутрубного давления p показаны на рис. 33,г, а суммарные эпюры напряжений σ_r и σ_T на рис. 33,д.

Пользуясь одной из теорий прочности, можно при заданном наружном радиусе R_2 внутренней трубы определить величину возможного полного радиального давления p , действующего по поверхности соприкосновения труб, из условия, что расчетное напряжение σ_s по выбранной теории прочности в наиболее напряженных точках A и B (рис. 34) трубы равняется допускаемому напряжению $[\sigma]$.

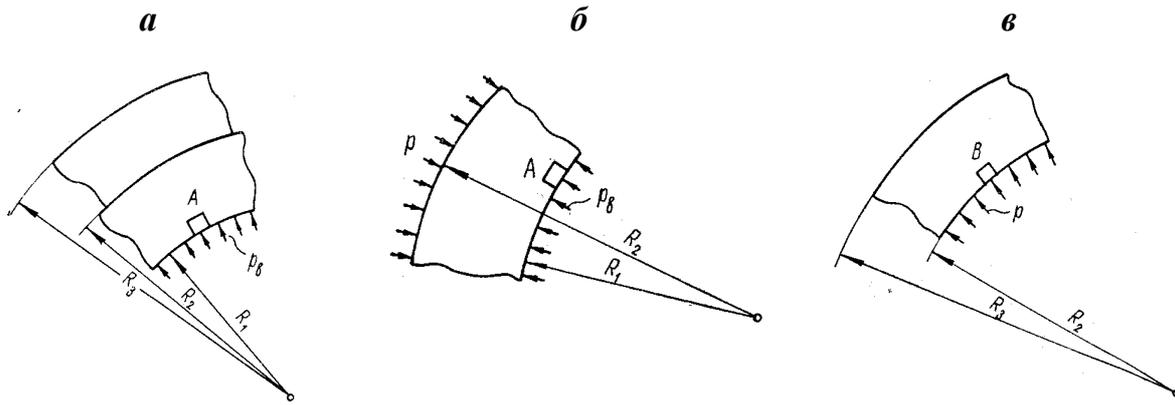


Рис. 34

В точке A

$$\sigma_z = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_r - \sigma_r = p_B \frac{R_3^2 + R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} - p \frac{2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} - (-p_B) \quad (3.24)$$

В точке B

$$\begin{aligned} \sigma_z = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_r - \sigma_r = & \frac{p_B R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_3^2}{R_2^2} \right) + \\ & + p \frac{R_3^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_1^2} - \frac{p_B R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} \cdot \left(1 - \frac{R_3^2}{R_2^2} \right) - (-p) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Если приравнять выражение (3.24) для напряжения σ_z в точке A допускаемому напряжению $[\sigma]$, полное радиальное давление p на поверхности соприкосновения труб получится из уравнения

$$p \frac{2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = p_B \left[\frac{R_3^2 + R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} + 1 \right] - [\sigma]$$

следующим:

$$p = p_B + \frac{[\sigma](R_1^2 - R_2^2)}{2R_2^2} \quad (3.26)$$

Наружный радиус R_3 наружной трубы определяется при известной величине давления p из условия прочности для элемента, выделенного у точки B на внутренней поверхности наружной трубы (рис. 34,в). По третьей теории прочности аналогично (3.16)

$$\sigma_r = [\sigma] - p, \quad (3.27)$$

а по формуле (3.11) при радиусах $R_B = R_2$, $R_H = R_3$ и $r = R_2$

$$\sigma_r = \frac{pR_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \cdot \frac{R_2^2 + R_3^2}{R_2^2} = p \frac{R_2^2 + R_3^2}{R_3^2 - R_2^2}. \quad (3.28)$$

Приравняв выражения (3.27) и (3.28), найдем

$$([\sigma] - p)(R_3^2 - R_2^2) = p(R_2^2 + R_3^2),$$

откуда

$$R_3^2 = R_2^2 \frac{[\sigma]}{[\sigma] - 2p}. \quad (3.29)$$

Условие равнопрочности труб в точках A и B получится путем приравнивания выражений (3.23) и (3.24) для напряжения в этих точках:

$$p_B \frac{R_3^2(R_2^2 - R_1^2)}{R_2^2(R_3^2 - R_1^2)} = p \left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} + \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \right).$$

Если подставить выражение (3.21) для междурубного давления в формулу (3.24) для расчетного напряжения, σ , последняя получит вид:

$$\sigma_s = p_B \frac{2R_3^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[1 - \frac{1}{\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} + \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}} \right].$$

Расчетное напряжение σ , для составной трубы будет иметь наименьшее значение. Тогда, когда отрицательное слагаемое в квадратных скобках будет наибольшим. Это

произойдет при значении $R_2 = \sqrt{R_1 R_3}$; при этом квадратная скобка будет равна $\frac{R_3 + R_1}{2R_3}$, а наименьшее расчетное напряжение

$$\sigma_{s,\min} = p_B \frac{R_3}{R_3 - R_1}.$$

В разделе 3.3 по третьей теории прочности была получена формула для расчетного напряжения σ_z сплошной трубы, подверженной внутреннему давлению. Насколько уменьшается это напряжение у составной трубы, показывает соотношение

$$\frac{\sigma_{z,\min}}{\sigma_z} = \frac{R_3 + R_1}{2R_3}$$

При малом внутреннем радиусе R_1 это отношение приближается к 0,5. Если же наружный радиус R_3 близок по значению внутреннему радиусу R_1 , т. е. труба

тонкостенная, отношение $\frac{\sigma_{z,\min}}{\sigma_z}$ становится близким к единице, т. е. составная труба не имеет прочностных преимуществ по сравнению со сплошной.

3.5 Понятие о расчете многослойных труб

Выражение (3.8), полученное для радиальных перемещений v трубы, подверженной радиальным давлениям на наружное и внутреннем контурах, может быть использовано для определения междутрубных давлений p_m в многослойных трубах (рис. 35,а), возникающих от посадки. Рассмотрим два последовательных слоя k и $k+1$ многослойной трубы (рис. 35,б). Каждый слой представляет собой трубу, находящуюся в условиях, соответствующих схеме нагружения на рис. 35,а, и радиальное давление на наружном контуре каждого слоя (трубы) является сжимающим. Поэтому в формуле для перемещения v давление p_H нужно считать положительным. Для каждой поверхности соприкосновения между k -м и $(k+1)$ -м слоями можно написать уравнение совместности деформации

$$v_{r=R_{k+1}}^k + v_{r=R_{k+1}}^{k+1} = \Delta_{k,k+1}$$

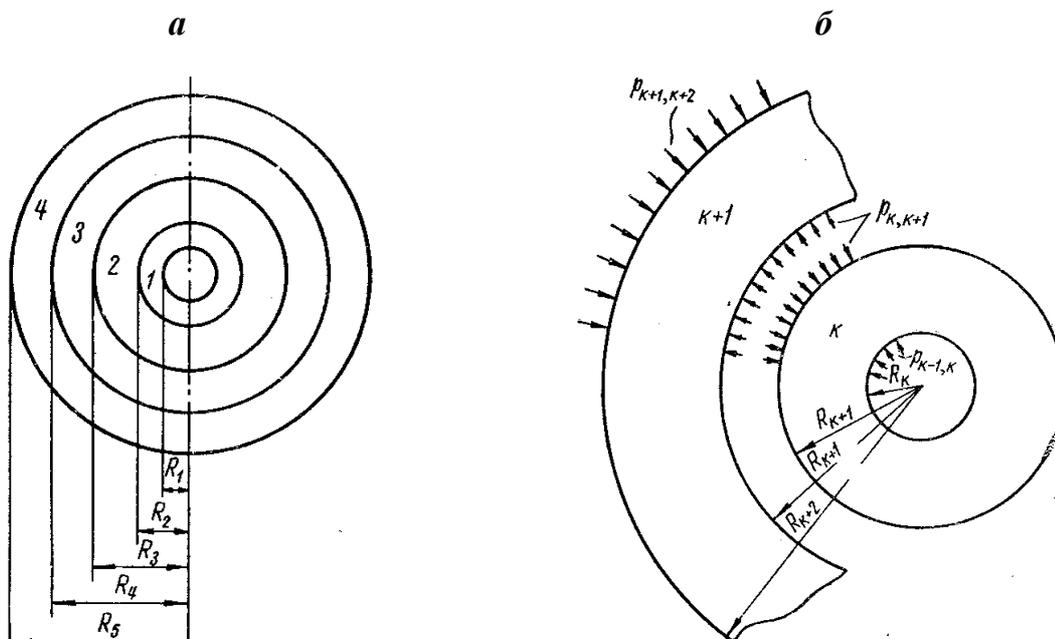


Рис. 35

Уравнение (3.30) выражает условие равенства суммы укорочения $v_{r=R_{k+1}}^k$ наружного радиуса внутреннего слоя k и удлинения $v_{r=R_{k+1}}^{k+1}$ внутреннего радиуса наружного слоя $k+1$ величине натяга $\Delta_{k,k+1}$ между слоями k и $k+1$. Для вычисления перемещения $v_{r=R_{k+1}}^k$ в формулу для перемещения (3.8) нужно подставить

$$R_B = R_k, \quad R_H = R_{k+1}, \quad p_B = p_{k,k-1}, \quad p_H = p_{k,k+1}, \quad r = R_{k+1}.$$

Для вычисления перемещения $v_{r=R_{k+1}}^{k+1}$ в формулу (3.8) нужно подставить

$$R_B = R_{k+1}, \quad R_H = R_{k+2}, \quad p_B = p_{k,k+1}, \quad p_H = p_{k,k+1,k+2}, \quad r = R_{k+1}.$$

После подстановки и некоторых упрощений для труб, выполненных из одного материала (E и μ одинаковы), уравнение совместности (3.30) примет вид

$$\frac{p_{k,k+1}R_k^2}{R_{k+1}^2 - R_k^2} - \frac{p_{k,k+1}R_{k+1}^2(R_{k+2}^2 - R_k^2)}{(R_{k+2}^2 - R_{k+1}^2)(R_{k+1}^2 - R_k^2)} + \frac{p_{k+1,k+2}R_{k+2}^2}{R_{k+2}^2 - R_{k+1}^2} = -\frac{\Delta_{k,k+1}E}{2R_{k+1}}. \quad (3.31)$$

Уравнение (3.31) называется *уравнением трех давлений*. Если число слоев составной трубы равно n , то число уравнений (3.31), составляемых для каждой поверхности соприкосновения слоев, будет $n - 1$. Число содержащихся в них неизвестных междутрубных давлений будет тоже $n - 1$, следовательно, путем совместного решения уравнений системы давления могут быть всегда найдены. Следует отметить, что для ненагруженных внутренней и наружной поверхностей составной трубы, состоящей из n слоев, давления $p_{0,1}$ и $p_{n,n+1}$ равны нулю.

После определения междутрубных давлений, напряжения в каждом промежуточном слое, возникающие от натяга, определяются по формулам (3.7), во внутреннем слое – по формулам (3.9), а в наружном – по формулам (3.11). К полученным напряжениям следует алгебраически добавить напряжения, полученные для сплошной трубы, имеющей такую же толщину, как и составная, от внутреннего или наружного давления, которому подвергается составная труба.

3.6 Примеры расчетов

Пример 3.1. Определить, пользуясь третьей теорией прочности (наибольших касательных напряжений), наружный радиус R_3 составной трубы (рис. 36,а), подверженной внутреннему давлению $p_B = 80 \text{ Мн/м}^2$, если допускаемое напряжение $[\sigma]$ не должно превышать 150 Мн/м^2 . Построить эпюры радиальных и окружных напряжений по сечению $A - C$.

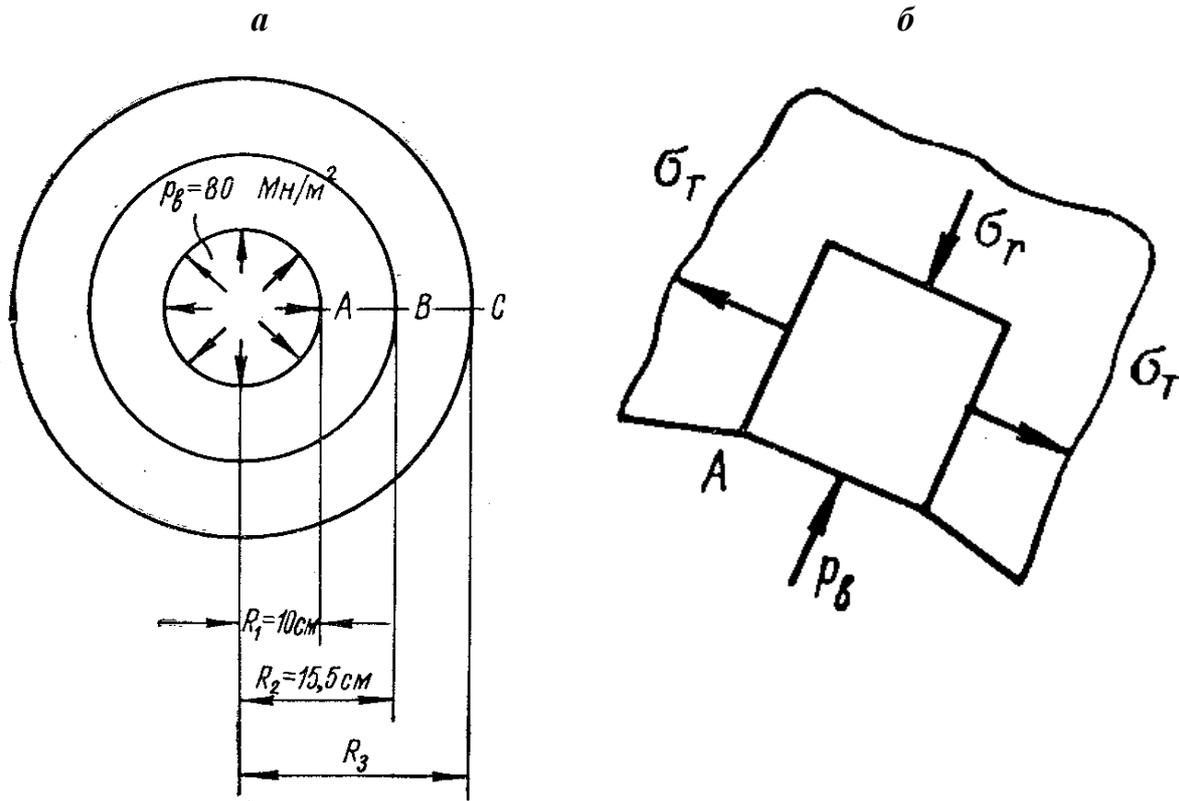


Рис. 36

Решение. Материал трубы испытывает плоскую деформацию. Для внутренней трубы наиболее напряженными являются точки на внутренней поверхности, в которых радиальное и окружное главные напряжения, (рис. 36,б) одновременно достигают наибольшей величины. Так как в этих точках окружное напряжение больше, чем радиальное, а радиальное – сжимающее и равно внутреннему давлению p_B , то

$$\sigma_1 = \sigma_T, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \sigma_r = -p_B = -80 \text{ МН/м}^2$$

Окружное напряжение в точке A на внутренней поверхности согласно формуле (3.24)

$$\sigma_T = [\sigma] - p_B = 150 - 80 = 70 \text{ МН/м}^2$$

Полное давление p по поверхности соприкосновения труб, соответствующее при заданном радиусе R_2 допускаемому напряжению $[\sigma]$ в точке A , по формуле (3.26)

$$p = \frac{[\sigma](R_1^2 - R_2^2)}{2R_2^2} + p_B = \frac{150(10^2 - 15,5^2)}{2 \cdot 15,5^2} + 80 = 36,2 \text{ МН/м}^2.$$

Наружный радиус R_3 наружной трубы по формуле (3.29)

$$R_3 = R_2 \sqrt{\frac{[\sigma]}{[\sigma] - 2p}} = 15,5 \sqrt{\frac{150}{150 - 2 \cdot 36,2}} = 21,5 \text{ см.}$$

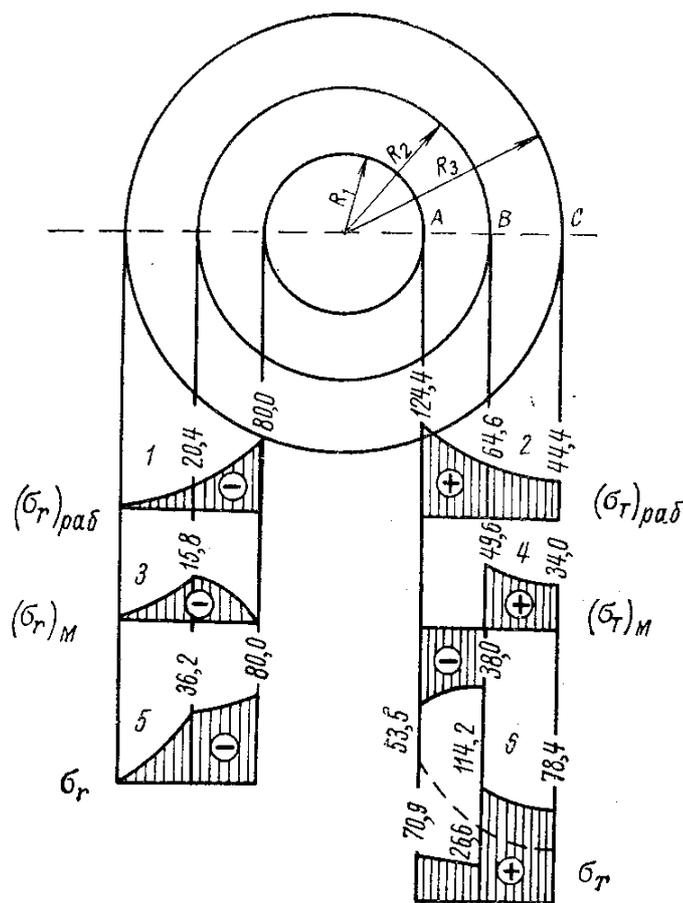


Рис. 37

Эпюры напряжений строятся отдельно (рис. 37):

- 1) для радиальных и окружных рабочих напряжений $(\sigma_r)_{раб}$ и $(\sigma_t)_{раб}$ от внутреннего давления p_B в сплошной трубе, имеющей толщину стенки $R_3 - R_1$ (эпюры 1 и 2);
- 2) для напряжении $(\sigma_r)_м$ и $(\sigma_t)_м$ от междутрубного сжимающего давления p_m , возникающего от насадки: у внутренней трубы – наружного радиального и у наружной трубы – внутреннего радиального (эпюры 3 и 4).

Полные эпюры напряжений σ_r и σ_t (эпюры 5 и 6) получаются сложением ординат указанных двух эпюр с учетом их знаков

$$\sigma_r = (\sigma_r)_{раб} + (\sigma_r)_м; \quad \sigma_t = (\sigma_t)_{раб} + (\sigma_t)_м.$$

Величина междутрубного давления p_m определяется из условия, что по поверхности соприкосновения труб полное радиальное напряжение σ_r равно сумме междутрубного давления $(\sigma_r)_м$ и рабочего напряжения $(\sigma_r)_{раб}$, возникающего в этом месте сплошной трубы, имеющей толщину стенки $R_3 - R_1$, от внутреннего давления p_B . Но так как $(\sigma_r)_м$ в точке B равно p_m , а σ_r равно p , то

$$p = p_m + (\sigma_r)_{раб}$$

откуда

$$p_m = p - (\sigma_r)_{раб}$$

Напряжение $(\sigma_r)_{раб}$ вычисляется по формуле (3.11) для радиального напряжения по поверхности с радиусом $r = 15,5 \text{ см}$ в сплошной трубе толщиной $R_3 - R_1$, подверженной одному внутреннему давлению $p_B = 80 \text{ МН/м}^2$,

$$(\sigma_r)_{раб} = \frac{p_B R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_3^2}{r^2} \right) = \frac{80 \cdot 10^2}{21,5^2 - 10^2} \left(1 - \frac{21,5^2}{15,5^2} \right) = -20,4 \text{ МН/м}^2.$$

По формуле (3.22)

$$p_m = (\sigma_r)_m = p - (\sigma_r)_{раб} = -36,2 - (-20,4) = -15,8 \text{ МН/м}^2.$$

По этим значениям $(\sigma_r)_{раб}$ и $(\sigma_r)_m$ построены эпюры 1 и 3 на рис. 37. Алгебраическое сложение ординат этих эпюр дает ординаты эпюры 5 полного радиального напряжения.

Определим окружное напряжение $(\sigma_T)_m$ от междутрубного давления p_m по поверхности соприкосновения труб. Для наружной трубы, испытывающей внутреннее давление p_m , оно определяется по формуле (3.11):

– в точке B ($r = R_2$)

$$(\sigma_r) = \frac{p_m R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \left(1 + \frac{R_3^2}{R_2^2} \right) = \frac{15,8 \cdot 15,5^2}{21,5^2 - 15,5^2} \left(1 + \frac{21,5^2}{15,5^2} \right) = 49,6 \text{ МН/м}^2;$$

– в точке C ($r = R_3$)

$$(\sigma_r)_m = 2 \frac{p_m R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} = 2 \frac{15,8 \cdot 15,5^2}{21,5^2 - 15,5^2} = 34,0 \text{ МН/м}^2.$$

Для внутренней трубы, испытывающей наружное давление p_m , $(\sigma_T)_m$, оно определяется по формуле (3.9):

– в точке B ($r = R_2$)

$$(\sigma_T)_m = -\frac{p_m R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) = -\frac{15,6 \cdot 15,5^2}{15,5^2 - 10^2} \left(1 + \frac{10^2}{15,5^2} \right) = -38,0 \text{ МН/м}^2;$$

– в точке A ($r = R_1$)

$$(\sigma_r)_m = -2 \frac{p_m R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = -2 \frac{15,6 \cdot 15,5^2}{15,5^2 - 10^2} = -53,5 \text{ МН/м}^2.$$

Окружное напряжение $(\sigma_T)_{раб}$ от давления p_B вычисляем по формуле (3.11), приняв в ней $R_B = R_1$, $R_H = R_3$:

$$(\sigma_T)_{раб} = \frac{p_m R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_3^2}{r^2} \right) = \frac{80 \cdot 10^2}{21,5^2 - 10^2} \left(1 + \frac{21,5^2}{r^2} \right) = 22,2 \left(1 + \frac{462,2}{r^2} \right). \quad (3.32)$$

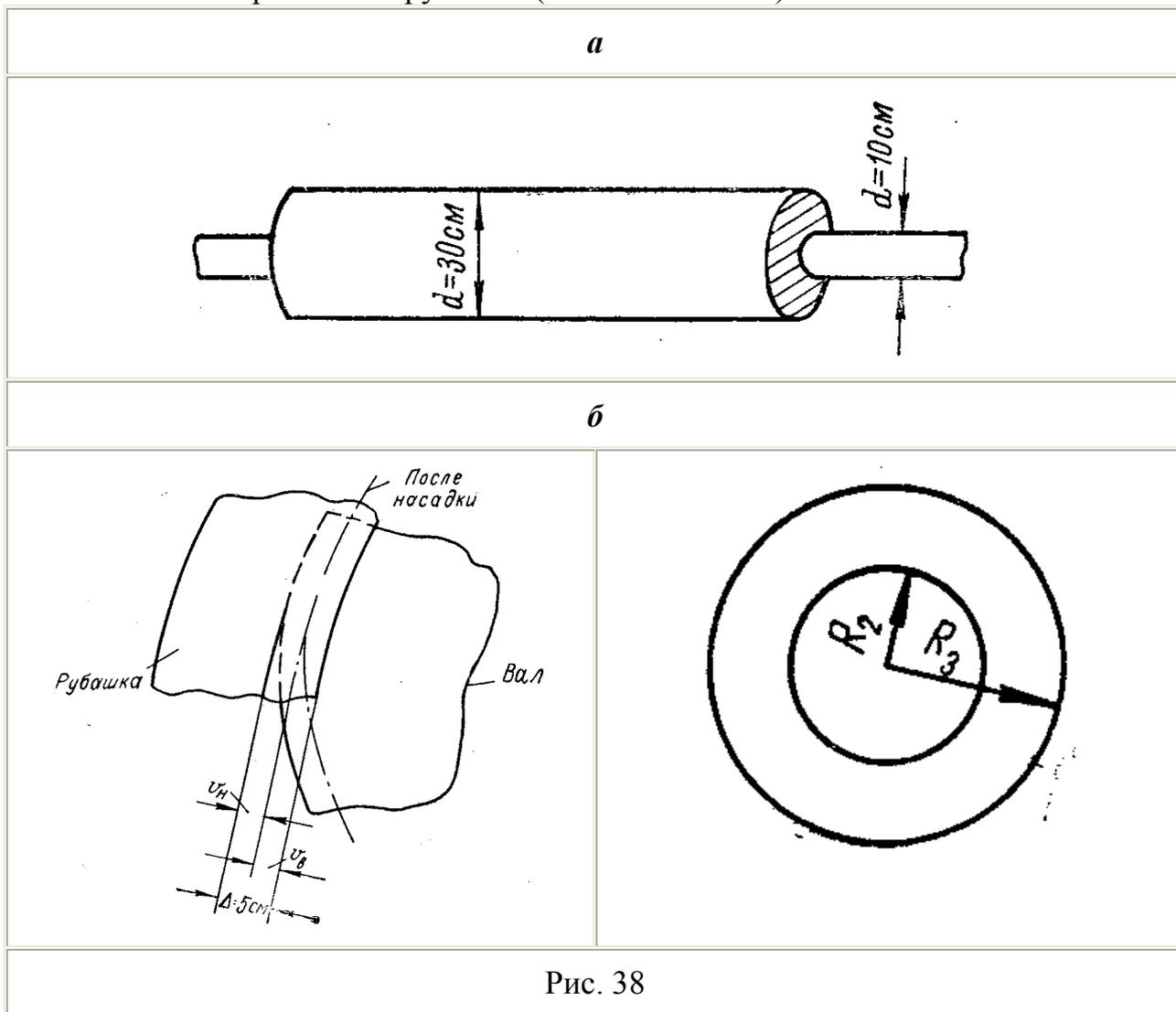
По формуле (3.32) вычисляем:

– в точке A при $r = 10 \text{ см}$ $(\sigma_T)_{раб} = 124,4 \text{ МН/м}^2$;

- в точке B при $r = 15,5 \text{ см}$ $(\sigma_T)_{раб} = 64,6 \text{ Мн/м}^2$;
- в точке C при $r = 21,5 \text{ см}$ $(\sigma_T)_{раб} = 44,4 \text{ Мн/м}^2$.

По этим значениям $(\sigma_T)_{раб}$ и $(\sigma_T)_м$ построены эпюры 2 и 4. Алгебраическое сложение ординат этих эпюр дает ординаты эпюры 6 полного окружного напряжения σ_T .

Пример 3.2. На вал диаметром $d = 10 \text{ см}$ в горячем состоянии надета рубашка (рис. 38, а), внутренний диаметр которой до нагревания был на $0,001d$ меньше диаметра вала. Толщина стенок рубашки 10 см . Вал и рубашка стальные. Определить наибольшие напряжения в рубашке ($E = 2 \cdot 10^5 \text{ Мн/м}^2$).



Решение. Уменьшение радиуса вала и увеличение внутреннего радиуса рубашки в сумме должны дать величину зазора Δ между рубашкой и валом до нагревания, равного (рис. 38,б)

$$\Delta = \frac{1}{2} 0,001d = 0,0005 \cdot 10 = 0,005 \text{ см.}$$

Для решения задачи следует использовать формулы для составных труб, полагая внутренний радиус внутренней трубы R_1 равным нулю, $R_2 = 5 \text{ см}$ и $R_3 = 15 \text{ см}$.

Давление, передающееся от рубашки на вал после насадки, по формуле (3.20)

$$p = \frac{\Delta E}{R_2} \cdot \frac{1}{C},$$

где

$$C = \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{R_3^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} = 1 + \frac{15^2 + 5^2}{15^2 - 5^2} = 2,25,$$

тогда

$$p = \frac{0,005 \cdot 2 \cdot 10^5}{5 \cdot 2,25} = 89,0 \text{ Мн/м}^2.$$

Наибольшее по абсолютной величине радиальное напряжение в рубашке возникает по поверхности соприкосновения с валом:

$$\sigma_r = -p = -89,0 \text{ Мн/м}^2.$$

Наибольшее окружное напряжение в рубашке возникает на ее внутренней поверхности [см. формулу (3.11)]:

$$\sigma_r = \frac{p R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \left(1 + \frac{R_3^2}{R_2^2} \right) = \frac{89,0 \cdot 5^2}{15^2 - 5^2} \left(1 + \frac{15^2}{5^2} \right) = +111,2 \text{ Мн/м}^2.$$

ПЛАСТИНЫ, МЕМБРАНЫ

4.1 Основные определения и допущения

Пластиной называется тело призматической или цилиндрической формы, у которого один размер (толщина h) значительно меньше других (a и b), измеренных в плоскостях оснований (рис. 39). В технике широко используются круглые и прямоугольные пластины; иногда встречаются пластины и других очертаний в плане. Толщина пластины может быть как постоянной, так и переменной.

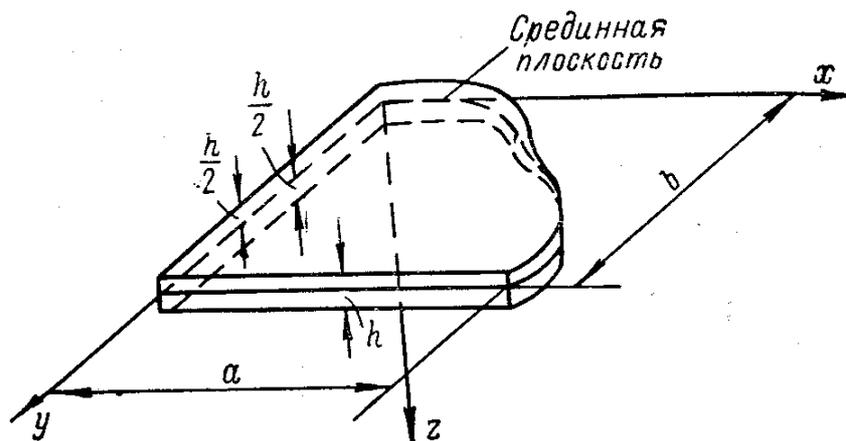


Рис. 39

Примером круглой пластины может служить днище D цилиндрического сосуда – бака, котла, трубы (рис. 40,а) – или поршень $П$, движущийся в цилиндре (рис. 40,б). Примером прямоугольной пластины, защемленной одной кромкой, может служить каждая из вертикальных стенок c сечения, составленного из листов, при значительной жесткости полки n (рис. 40,в), а примером пластины, упруго защемленной тремя кромками, – стенка прямоугольного резервуара (рис. 40,г).

Плоскость, находящаяся на равных расстояниях от верхнего и нижнего оснований и делящая пополам толщину h пластины постоянной толщины (рис. 39), называется *срединной плоскостью*. После изгиба срединная плоскость превращается в *срединную поверхность изогнутой пластины*.

При изучении пластин принимается система координат, при которой начало координат и оси x и y лежат в недеформированной срединной плоскости пластины, а ось z направлена перпендикулярно к срединной плоскости. В общем случае на пластину могут действовать различно направленные силы. Каждую из этих сил можно разложить на две составляющие: действующую в срединной плоскости и перпендикулярную к ней. Совокупность составляющих усилий в срединной плоскости, называемых *цепными усилиями*, вызывает деформацию только в этой плоскости, а совокупность составляющих, перпендикулярных к срединной плоскости, изгибает пластину. В дальнейшем предполагается, что нагрузка, испытываемая пластиной, перпендикулярна к ее срединной плоскости, т. е. составляющие нагрузки в срединной плоскости равны нулю.

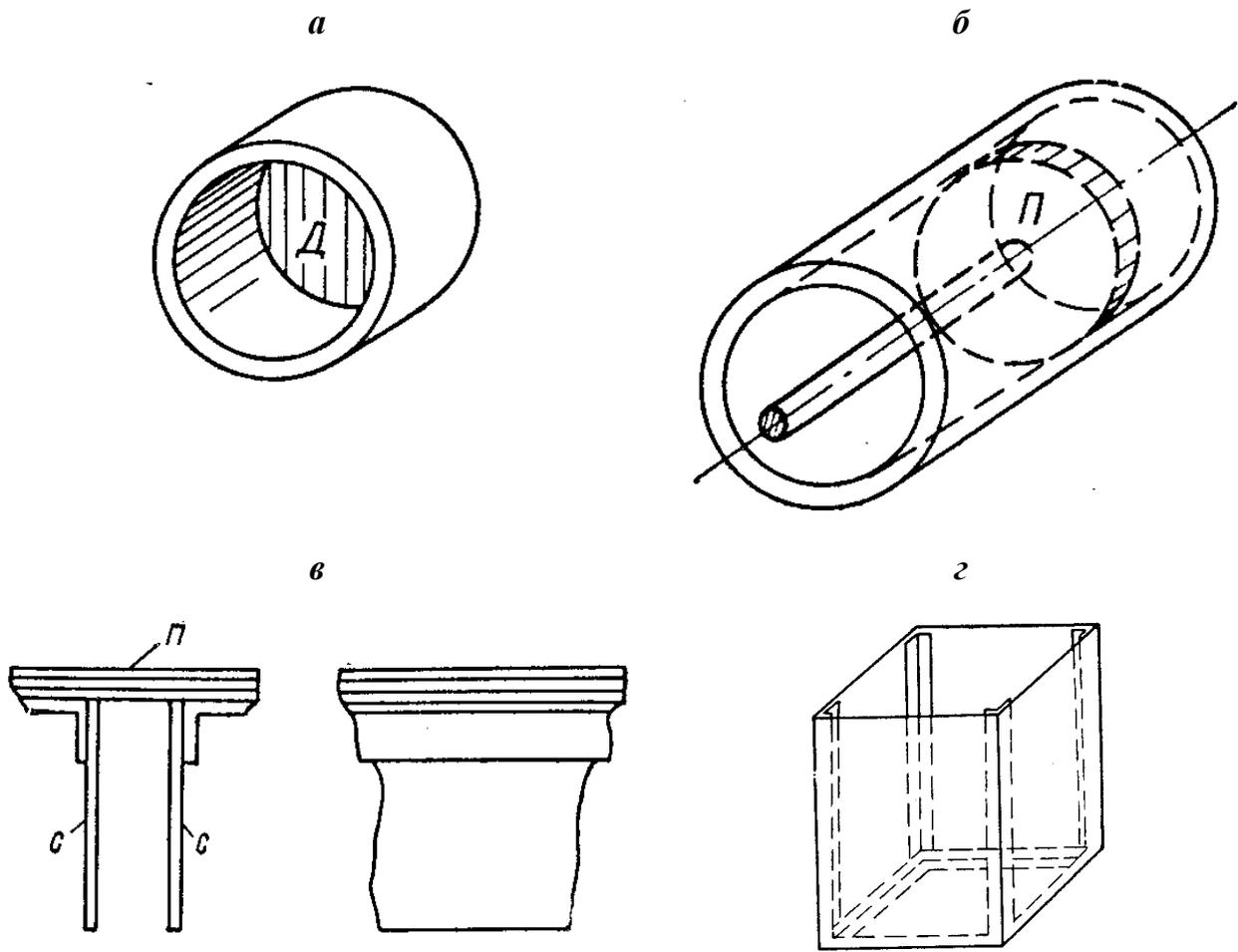


Рис. 40

При определении усилий и деформаций для пластин средней толщины принимаются следующие допущения:

1. Перпендикуляр AD к срединной плоскости, опущенный из любой точки D пластины (рис. 41), остается после изгиба прямым и нормальным к изогнутой срединной поверхности (A_1D_1). Это допущение, называемое *допущением о прямых нормалях*, соответствует гипотезе плоских сечений, на которой основана теория изгиба балок.

Влияние на величину перемещений некоторого искривления нормали, происходящего вследствие сдвигов, не учитывается. Оно значительно меньше, чем

перемещения $z \frac{\partial w}{\partial x}$ или $z \frac{\partial w}{\partial y}$, вызываемые поворотом нормали вследствие искривления срединной плоскости при изгибе.

2. Нормальными напряжениями σ_z , действующими по площадкам, параллельным срединной плоскости, можно пренебречь по сравнению с другими напряжениями и принять

$$\sigma_z = 0. \quad (4.1)$$

Это допущение называется *допущением об отсутствии поперечного давления*.

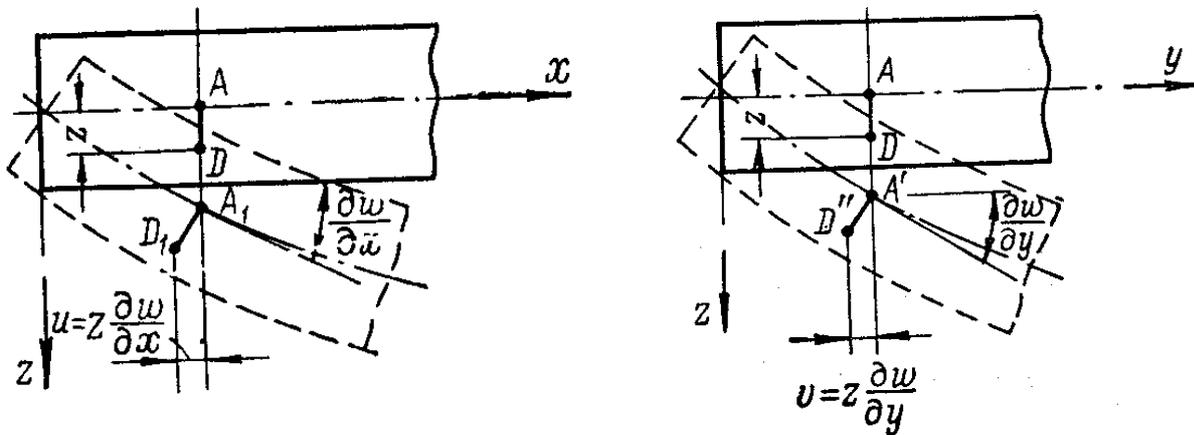


Рис. 41

Для относительных деформаций можно использовать формулы

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

При изучении поперечного изгиба пластины средней толщины считаем: 1) срединную плоскость свободной от цепных усилий, 2) линейные и угловые деформации в срединной поверхности изогнутой пластины – отсутствующими. Перечисленные допущения применимы только при малом прогибе пластины.

Пластину можно условно отнести к тому или иному виду в зависимости от отношения толщины h к наименьшему размеру a пластины в плане (рис. 39). Существует три вида пластин, принципиально отличающихся друг от друга характером распределения напряжений и способом расчета:

1. Плиты – толстые пластины, имеющие отношение

$$\frac{h}{a} > \frac{1}{5}.$$

У этих пластин (рис. 42) высота настолько велика по сравнению с пролетом

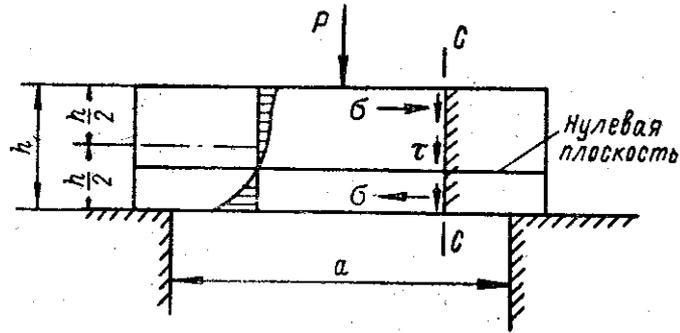


Рис. 42

и они настолько жестки, что касательные напряжения τ , возникающие по сечениям $C - C$ от перерезывания под действием нагрузки, имеют тот же порядок, что и нормальные напряжения σ , вызванные изгибом. Плоскость, свободная от цепных усилий и от деформаций, смещается по отношению к срединной плоскости, а нормальные напряжения распределяются по высоте сечения уже не по прямолинейному, а по криволинейному закону.

Допущения, перечисленные выше, при расчете плит неприменимы.

2. Пластины средней толщины, имеющие отношение

$$\frac{1}{40} < \frac{h}{a} < \frac{1}{5}.$$

Под действием сил, перпендикулярных к срединной плоскости, пластина изгибается, но вследствие достаточной жесткости прогиб w (рис. 43) не превосходит толщины h и опертая пластина способна нести вертикальную нагрузку. Эпюра нормальных напряжений в сечениях, перпендикулярных к срединной плоскости, прямолинейна. Характерная особенность изгиба пластин нагрузкой, нормальной к срединной плоскости, заключается в том, что он нередко сопровождается кручением.

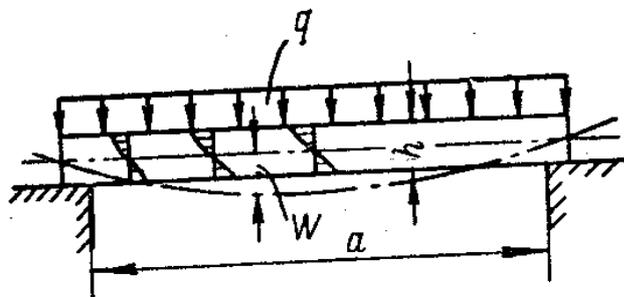


Рис. 43

3. Мембраны – пластины, имеющие отношение

$$\frac{h}{a} < \frac{1}{40}$$

Мембраны тонки и гибки, поэтому, чтобы они могли нести нагрузку, нормальную к срединной поверхности, их часто закрепляют на контуре (рис. 44).

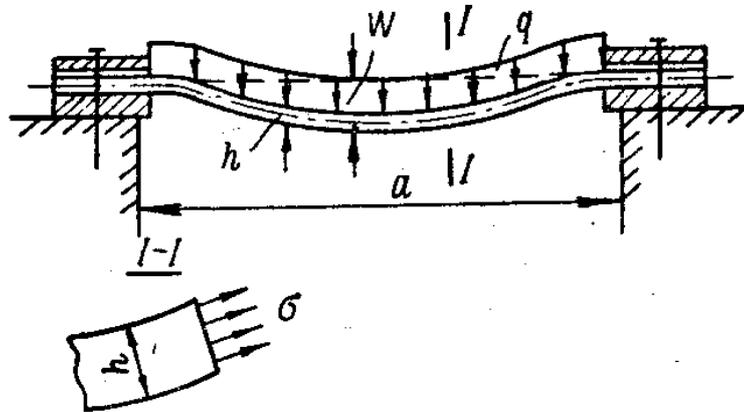


Рис. 44

При этом нагрузка поддерживается мембраной в основном не за счет ее изгиба, а за счет растяжения по всей толщине. Таким образом, можно считать, что нормальные напряжения распределяются равномерно по толщине мембраны и срединная поверхность не свободна от напряжений. Прогибы w мембраны велики и могут в несколько раз превышать ее толщину h .

Мембраны широко применяются в различных акустических аппаратах и гидравлических устройствах.

В зависимости от характера конструкции любая кромка пластины (рис. 45)

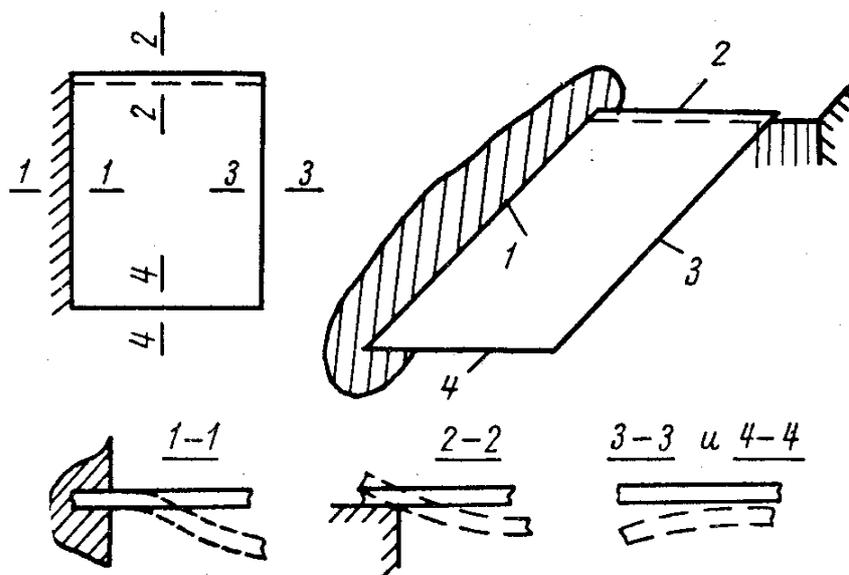


Рис. 45

может быть защемлена (кромка 1), свободно оперта (кромка 2) или свободна от закреплений (кромки 3 и 4). Возможно также упругое закрепление кромки пластины, промежуточное между свободной кромкой и защемлением, которое дает возможность срединной поверхности под действием нагрузки в той или иной степени поворачиваться на упруго защемленной кромке. Примыкание кромки пластины 1 к любому упругому элементу 2 (рис. 46) представляет собой упругое ее закрепление; возможный угол поворота φ на кромке обратно пропорционален жесткости элемента 2, к которому она прикреплена.

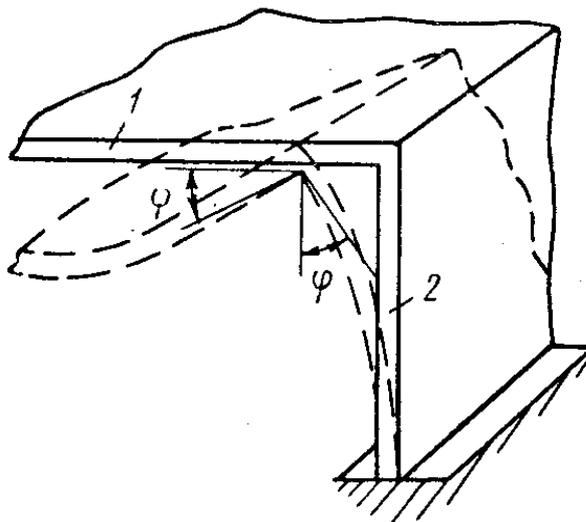


Рис. 46

Указанный выше признак деления пластин на плиты, пластины средней толщины и мембраны следует считать условным. Главное различие между этими классами заключается в соотношении между величиной цепных и изгибных усилий, которое может быть установлено только расчетом. Одна и та же пластина в зависимости от величины отношения продольных сил к изгибающим моментам и от способа закрепления на контуре может быть отнесена к тому или иному классу.

Цепные продольные усилия, вызывающие равномерно распределенные по толщине напряжения, могут появиться при поперечном нагружении пластины, закрепленной на контуре, вследствие препятствий, которые оказывают опоры сближению кромок пластины.

Наличие продольных усилий сказывается на элементах изгиба: прогибы,

$$\frac{h}{a}$$

изгибающие моменты и поперечные силы тем больше, чем меньше отношение $\frac{h}{a}$. Растягивающие продольные силы уменьшают, а сжимающие увеличивают элементы изгиба от заданной поперечной нагрузки. Это влияние для защемленной на контуре пластины меньше, чем для опертой.

4.2 Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины в прямоугольных координатах

В общем случае изгиба пластины произвольного очертания нагрузкой $q(x, y)$, распределенной на ее поверхности по произвольному закону (рис. 47),

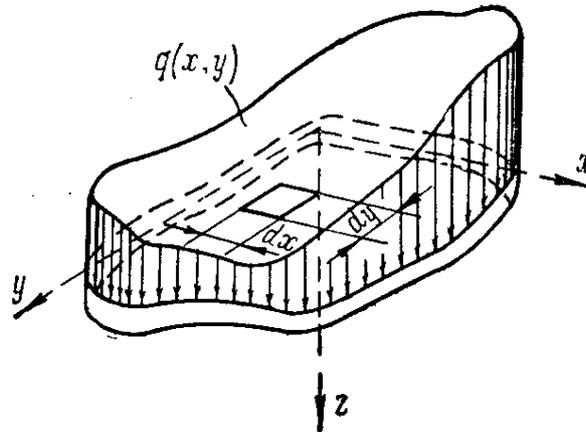


Рис. 47

по граням прямоугольного элемента, имеющего размеры dx и dy в плане, выделенного из пластины двумя парами сечений, действуют погонные изгибающие моменты M_x и M_y , погонные поперечные силы Q_x и Q_y и погонные крутящие моменты H_x и H_y (рис. 48).

Возникновение крутящих моментов можно объяснить так. Если рассечь опертую по контуру пластину на ряд полос 1, 2, 3, ... (рис. 49,а), каждая из которых представляет собой балку, опертую по концам, то сила P , приложенная к точке A пластины, вызовет прогиб только той балки 2, к которой относится точка A . В пластине, не рассеченной на полосы, полоса 2 поддерживается соседними полосами 1 и 3, которые в свою очередь испытывают со стороны полосы 2 направленные вниз усилия P' (рис. 49,б). Со стороны примыкающих к полосам 1 и 3 частей a пластины эти полосы испытывают поддерживающее усилие P'' . Усилия P' и P'' , действующие на каждую из полос 1 и 3, можно привести к равнодействующей R , приложенной в центре тяжести сечения полосы, и к паре H , скручивающей полосу (рис. 49,б).

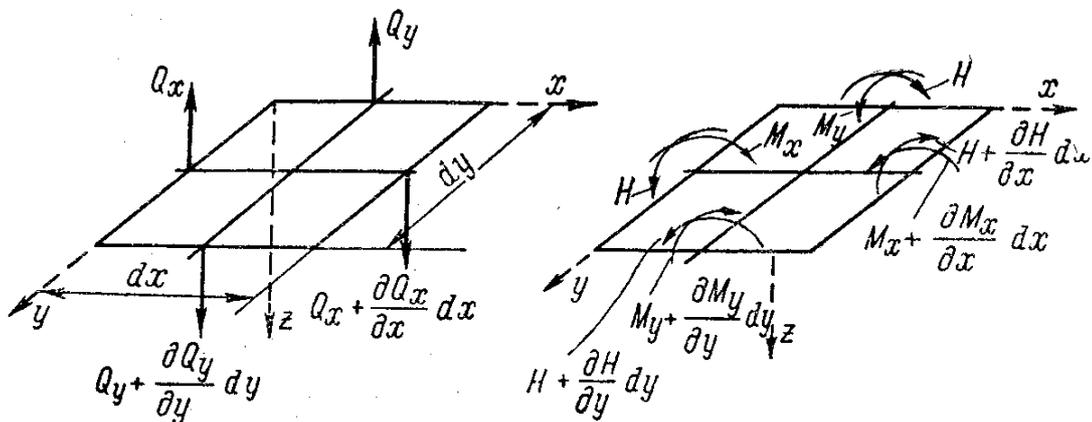


Рис. 48

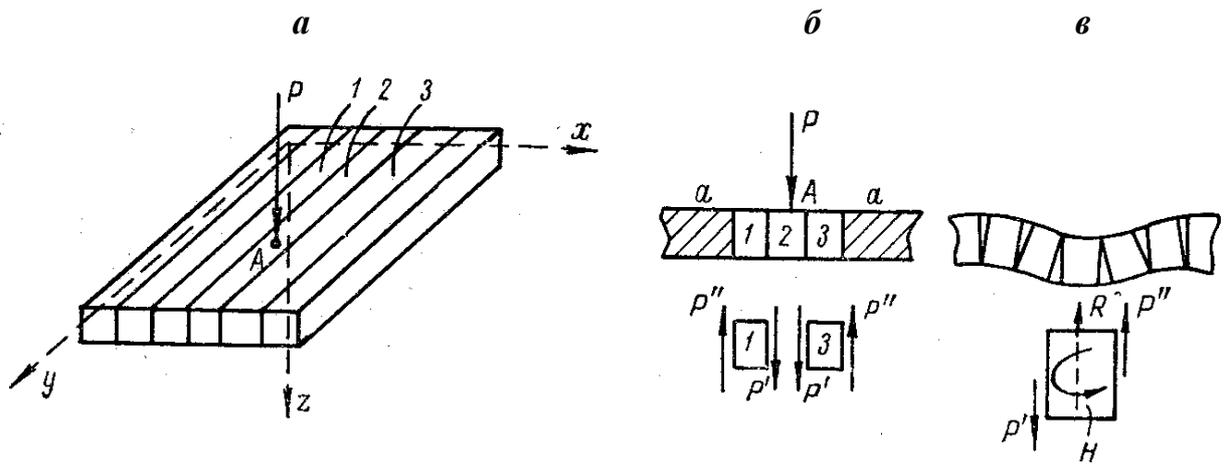


Рис. 49

Задачу решаем в перемещениях. Из первого допущения теории пластин о возможности пренебречь относительными сдвигами γ_{xz} и γ_{yz} ,

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \approx 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \approx 0. \quad (4.3)$$

На основании второго допущения w не зависит от z . Интегрируя равенства (4.3) по z , находим

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x} z + C; \quad v = -\frac{\partial w}{\partial y} z + D,$$

или, так как при $z = 0$ у нас $u = v = 0$,

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x} z; \quad v = -\frac{\partial w}{\partial y} z. \quad (4.4)$$

С учетом зависимостей (4.4) относительные деформации выразятся через перемещение w следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z; & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Так как на основании второго допущения напряжением σ_z можно пренебречь, из формул (1.20) закона Гука, полагая $\sigma_z = 0$ и учитывая выражения (4.5), получаем

$$\sigma_x = -\frac{EZ}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (4.6)$$

$$\sigma_y = -\frac{EZ}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (4.7)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{EZ}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (4.8)$$

Пользуясь дифференциальными уравнениями равновесия (1.2), можно найти также напряжения τ_{xz} , τ_{yz} и σ_z . Хотя мы условились считать их малыми, но производные этих напряжений, входящие в уравнения (1.2), не малы, так как по толщине пластины напряжения τ_{xz} , τ_{yz} и σ_z изменяются резко. Из первых двух уравнений (1.2), пренебрегая проекциями объемных сил и интегрируя по z , получаем

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{EZ^2}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + f_1(x, y) \\ \tau_{yz} &= \frac{EZ^2}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) + f_2(x, y) \end{aligned} \right\}$$

Функции f_1 и f_2 находим из граничных условий, составленных для нижней и верхней

граней пластины: при $z = \pm \frac{h}{2}$ у нас $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \\ \tau_{yz} &= -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \end{aligned} \right\}$$

Из третьего уравнения (1.2) следует

$$\sigma_z = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h^2}{4} z - \frac{z^3}{3} \right) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + f_3(x, y) \quad (4.9)$$

Нагрузка интенсивностью $q(x, y)$ приложена к верхней грани пластины и направлена вниз, т. е. напряжение σ_z – сжимающее. Поэтому для определения функции $f_3(x, y)$ можем написать граничные условия:

$$1) z = +\frac{h}{2}, \quad \sigma_z = 0; \quad 2) z = -\frac{h}{2}, \quad \sigma_z = -q. \quad (4.10)$$

Из первого условия найдем функцию $f_3(x, y)$ и, подставив ее в (4.9), получим

$$\sigma_z = \frac{E}{24(1-\mu^2)} (h^3 - 3h^2z + 4z^3) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right).$$

Подставив это выражение во второе условие (4.10), получим дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q, \quad (4.11)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (4.12)$$

– цилиндрическая жесткость пластины, аналогичная жесткости EJ балки, характеризующая способность пластины деформироваться. Размерность цилиндрической жесткости представляет собой произведение единицы силы на единицу длины. По величине $D > EJ$.

Уравнение (4.11) может быть сокращенно записано через оператор Лапласа:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q$$

Первый член, стоящий в скобках уравнения (4.11), учитывает прогиб, зависящий от изгиба в плоскости xz , третий член – в плоскости yz , а второй — прогиб, зависящий от кручения.

Решение уравнения (4.11) дает уравнение изогнутой срединной поверхности пластины

$$w = f(x, y).$$

Если оно найдено, погонные изгибающие и крутящие моменты и поперечные силы, приходящиеся на единицу длины кромки пластины, определяют исходя из условий равновесия полосы пластины шириной, равной единице (рис. 50).

Составим условие равновесия моментов относительно оси y и подставим в него значение σ_x из формулы (4.6):

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot 1 \cdot dz \cdot z = -\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = 0$$

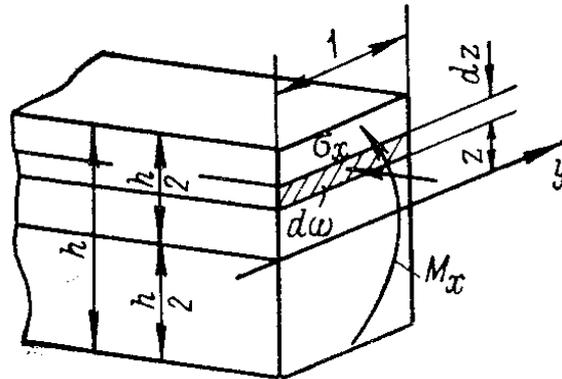


Рис. 50

Отсюда, с учетом формулы (4.12), для погонного изгибающего момента получим

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4.13)$$

Аналогично из условия $\sum L_x = 0$ найдем погонный изгибающий момент

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (4.14)$$

При действии одних только погонных изгибающих моментов M_x и M_y (рис. 51) пластина испытывает чистый изгиб в двух взаимно перпендикулярных

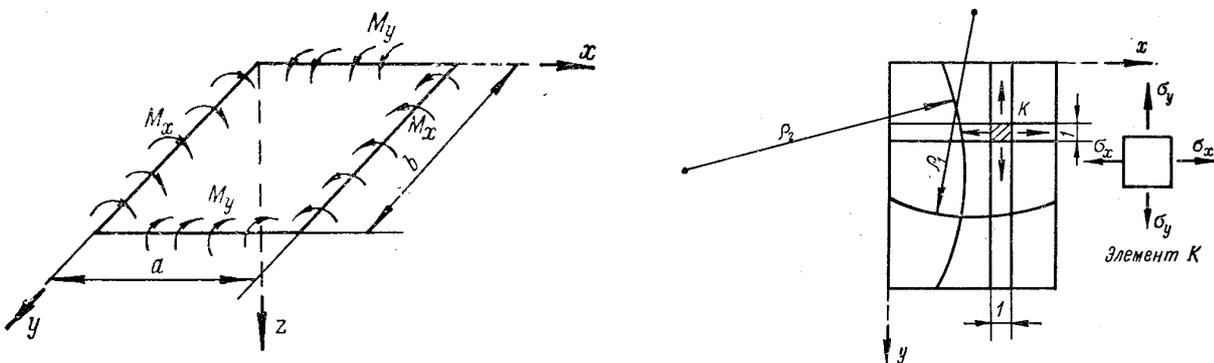


Рис. 51

направлениях. Срединная плоскость ее превращается в изогнутую поверхность с главными радиусами кривизны ρ_1 (в сечении плоскостью, параллельной плоскости

xOz) и ρ_2 (в сечении плоскостью, параллельной плоскости yOz). Соответствующие главные кривизны срединной поверхности

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\rho_2} = -\frac{d^2w}{dy^2} \quad (4.15)$$

Составим, учитывая (4.8), условия равенства крутящих моментов сумме моментов усилий, возникающих от напряжений τ_{xy} и τ_{yx} , и найдем погонные крутящие моменты:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot 1 \cdot dz \cdot z = +D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ H_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} \cdot 1 \cdot dz \cdot z = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

При действии одних только погонных крутящих моментов пластина испытывает чистое кручение.

Составим, учитывая (4.8), условия равенства проекций поперечных сил сумме проекций усилий, возникающих от напряжений τ_{xz} и τ_{zx} (рис. 52).

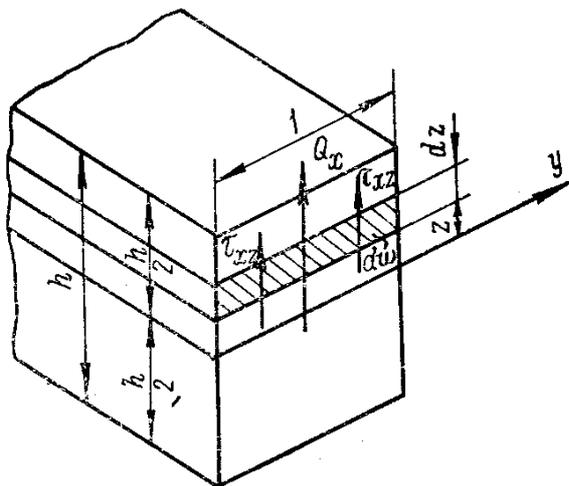


Рис. 52

Найдем погонные поперечные силы:

$$\left. \begin{aligned}
 Q_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} \cdot 1 \cdot dz = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \\
 Q_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} \cdot 1 \cdot dz = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

4.3 Цилиндрический и сферический изгиб пластины

Цилиндрическим изгибом называется изгиб пластины по цилиндрической поверхности (рис. 53). Чтобы получить такой изгиб, закрепление двух параллельных кромок пластины должно обеспечивать неподвижность пластины, а две другие кромки должны быть свободны. Нагрузка должна иметь постоянную интенсивность в направлении, параллельном закрепленным кромкам (на рис. 53 параллельно оси y), а в перпендикулярном направлении может быть произвольной.

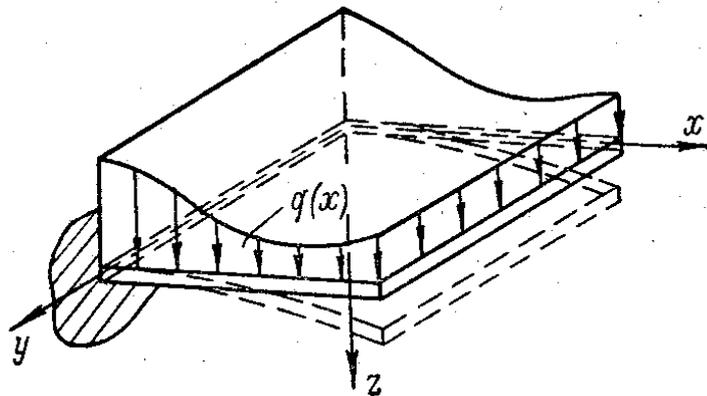


Рис. 53

На рис. 53 представлен цилиндрический поперечный изгиб под действием распределенной нагрузки. Интенсивность нагрузки и реакция вдоль линии, параллельной закрепленной кромке (оси y), постоянны, а кромки, параллельные оси x , свободны. На рис. 54 показан цилиндрический чистый изгиб, который происходит под действием моментов M_1 и M_1' постоянной интенсивности, распределенных по кромкам, параллельным оси y .

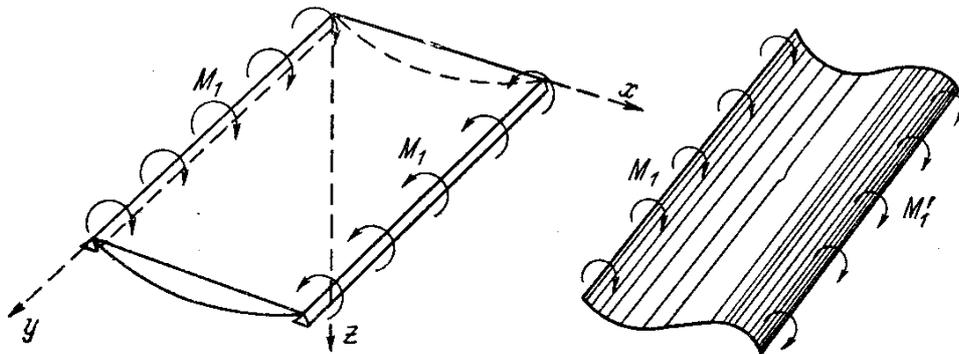


Рис. 54

Для определения усилий, возникающих при чистом цилиндрическом изгибе, рассматривается пластина, нагруженная по кромкам моментами M_1 и M_1' (рис. 54). Размерность изгибающего момента M_1 приходящегося на единицу длины кромки, т. е. *погонного изгибающего момента*,

$$\frac{\text{ед. силы} \times \text{ед. длины}}{\text{ед. длины}} = \text{ед. силы.}$$

Пластину нужно представить себе рассеченной на ряд полос шириной, равной единице, сечениями, параллельными оси x (рис. 55). Каждую из полос можно рассматривать как балку, опертую своими концами и нагруженную по концам моментами M . Отличие таких балок от полос пластины заключается в том, что у первых поперечные деформации их сечений ничем не стеснены, тогда как поперечной деформации полосы пластины (рис. 56) препятствуют соседние полосы, которые тоже стремятся деформироваться в поперечном направлении. Для полос, вырезанных на некотором расстоянии от кромок a ,

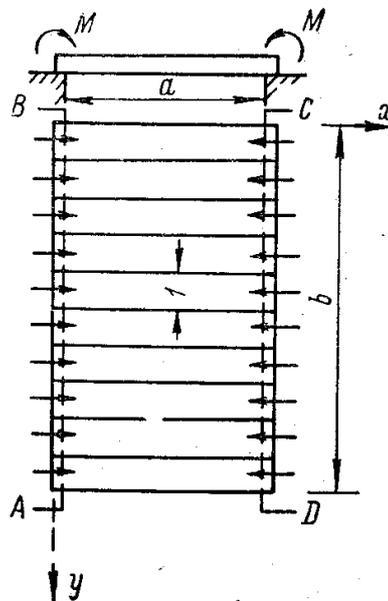


Рис. 55

можно считать, что относительная линейная деформация ϵ_y равна нулю, т. е. состояние пластины – плоское деформированное. При пользовании формулами подразд. 1.10 следует в соответствии с системой координат, принятой для пластин, заменить в них координату z на y , а координату y – на z .

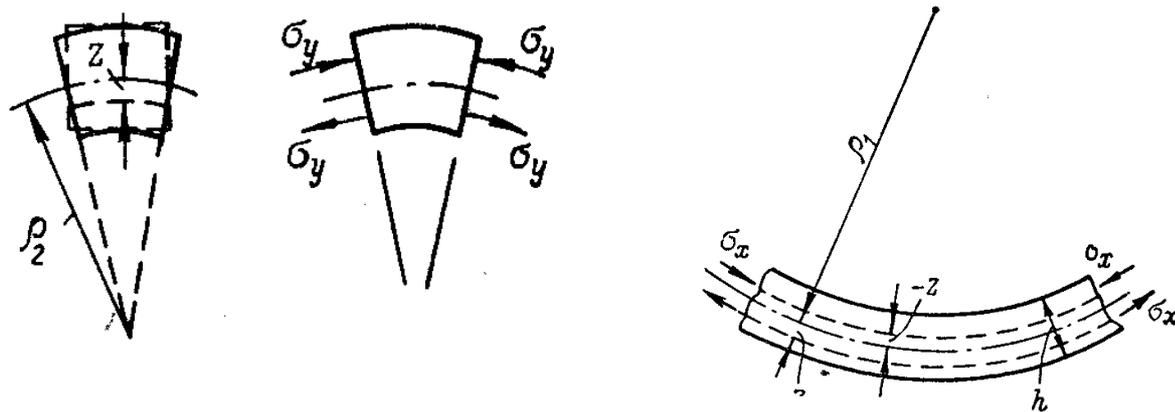


Рис. 56

Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности и выражения для изгибающих моментов могут быть получены из соответствующих выражений подразд. 4.2, если учесть, что при цилиндрическом изгибе прогиб w не зависит от координат y и z . Тогда уравнение (4.11) примет вид

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q \quad (4.18)$$

Проинтегрировав выражение (4.18) дважды, получим

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_x}{D} \quad (4.19)$$

Уравнение (4.13) для погонного изгибающего момента примет вид

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (4.20)$$

Нормальное напряжение, параллельное оси x ,

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{J}, \quad (4.21)$$

где $J = \frac{h^3}{12}$ – момент инерции полосы прямоугольного сечения шириной, равной единице.

Так как на некотором расстоянии от свободных кромок пластина испытывает плоскую деформацию,

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) = 0$$

Напряжение

$$\sigma_y = \mu\sigma_x = \mu \frac{M_x z}{J} \quad (4.22)$$

Выражение (4.21) для σ_x ничем не отличается от выражения для нормальных напряжений, возникающих в поперечном сечении балки при ее чистом изгибе. Отличие цилиндрического изгиба пластины от изгиба балки заключается в том, что в пластине, кроме напряжения σ_x , возникает еще напряжение σ_y . Прогибы w пластины при цилиндрическом изгибе вычисляются путем двукратного последовательного интегрирования дифференциального уравнения (4.19). Они оказываются меньше, чем для балки-полосы, так как цилиндрическая жесткость D , стоящая в знаменателе правой части уравнения (4.19), больше, чем жесткость балки EJ .

Если пластина подвергается действию равномерно распределенных моментов по окружности (рис. 57), она изгибается по сферической поверхности.

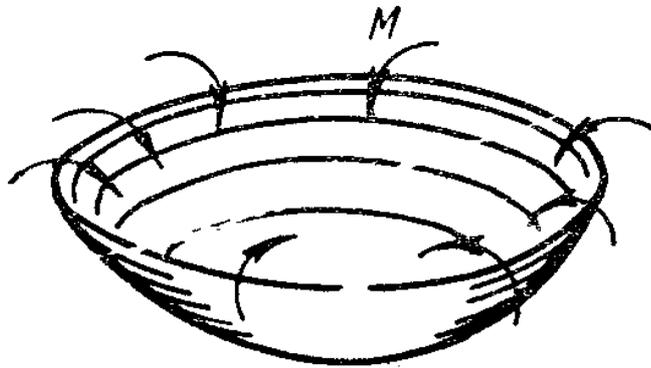


Рис. 57

Главные радиусы кривизны в любом сечении одинаковы:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho}$$

поэтому на основании (4.15)

$$-\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{d^2 w}{dy^2} = \frac{1}{\rho} \quad (4.23)$$

Заменяя вторые производные в уравнениях (4.13) и (4.14) кривизной, на основании формулы (4.23) получим изгибающий момент при сферическом изгибе

$$M = M_x = M_y = \frac{D(1 + \mu)}{\rho}$$

и выражение для кривизны

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{D(1 + \mu)}$$

Дифференциальное уравнение (4.11) и выражения для крутящего и изгибающих моментов и для поперечных сил получены в предположении, что в срединной поверхности отсутствуют цепные погонные усилия: продольные N_x и N_y и сдвигающие T_{xy} и T_{yx} . Дифференциальные уравнения изгиба пластины конечной жесткости при наличии цепных усилий и выражения для усилий M , N , Q , H и T получены Карманом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}(N_x - \mu N_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(N_y - \mu N_x) + \\ + 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 T_{xy}}{\partial x \partial y} &= Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} &= -q(x, y) - N_x - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \\ - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Эта система может быть сведена к системе двух совокупных дифференциальных уравнений с помощью введения некоторой непрерывной функции $\varphi(x, y)$, называемой *функцией напряжений*. Если выразить продольные и сдвигающие силы N и T через функцию напряжений φ

$$N_x = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad N_y = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad T_{xy} = T_{yx} = -h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (4.25)$$

то можно убедиться, что первые два уравнения системы (4.24) будут тождественно удовлетворены при любом виде функции φ .

Подставив выражения (4.25) для цепных усилий N и T во второе и третье уравнения системы (4.24) и заменив изгибающие и крутящие моменты M и H их выражениями (4.13), (4.14), (4.16) получим следующую систему дифференциальных уравнений Кармана в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \varphi &= E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ \nabla^2 \nabla^2 w &= \frac{1}{D} \left\{ q(x, y) + h \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Уравнения (4.26) применяют для расчета гибких пластин большого прогиба $w > \frac{h}{2}$. Если цепные усилия оказывают малое влияние на изгиб, то в системе (4.26) следует пренебречь членами, зависящими от φ . Первое уравнение системы (4.26) отпадает, а второе принимает вид

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q$$

Этим уравнением мы и пользуемся для расчета плит и пластин средней толщины. При расчете мембран, обладающих малой жесткостью на изгиб, в системе уравнений (4.26) следует пренебречь членами, пропорциональными цилиндрической жесткости. Тогда первое уравнение этой системы остается в силе, а второе уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = - \frac{q(x, y)}{h}$$

В частном случае, когда сдвигающая сила T равна нулю, продольные силы $N_x = N_y = N$ и для определения w можно составить следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{q(x, y)}{N}$$

Решение дифференциального уравнения (4.11) в конечной форме получено для эллиптической и круглой пластин, защемленных на контуре и нагруженных равномерно распределенной нагрузкой. В остальных случаях пользуются приближенными решениями.

Интеграл дифференциального уравнения (4.11), представляющего собой уравнение четвертой степени в частных производных от двух независимых переменных, должен удовлетворять восьми граничным условиям на контуре. На каждой кромке можно составить по два условия, исходя из равенства нулю соответствующих двух величин из числа следующих: прогиба w , угла φ , изгибающих моментов M_x или M_y , обобщенных поперечных сил Q_x^0 или Q_y^0 .

Обобщенные поперечные силы представляют собой поперечные силы на свободных кромках пластины, заменяющие одновременное действие погонных крутящих моментов и поперечных сил

$$Q_x^0 = Q_x + \frac{\partial H}{\partial y}, \quad Q_y^0 = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x}$$

Таким образом, общее число условий составляет $2 \times 4 = 8$. Например, для пластины (рис. 58) следует составить следующие восемь условий:

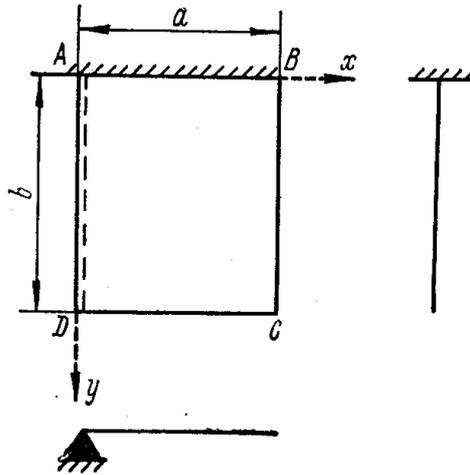


Рис. 58

– кромка AB

1. при $0 < x < a$ $y = 0, w = 0;$

2. при $0 < x < a$ $y = 0, \varphi = 0;$

– кромка AD

3. при $0 < y < b$ $x = 0, w = 0;$

4. при $0 < y < b$ $x = 0, M_x = 0;$

– кромка DC

5. при $0 < x < a$ $y = b, Q_y^0 = 0;$

6. при $0 < x < a$ $y = b, M_y = 0;$

– кромка BC

7. при $0 < y < b$ $y = a, Q_x^0 = 0;$

8. при $0 < x < b$ $y = a, M_x = 0;$

Обычно геометрические граничные условия, относящиеся к прогибам w и углам поворота сечений φ , выполняются точно, а статические граничные условия, относящиеся к изгибающим моментам M и обобщенным поперечным силам Q^0 , – лишь в интегральной форме. После того как будут найдены погонные изгибающие моменты, поперечные силы и крутящий момент, напряжения можно определить по формулам сопротивления материалов

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M_x z}{I} & \sigma_y &= \frac{M_y z}{I} & \tau_{xz} &= \frac{Q_x S_y}{I} \\ \tau_{yz} &= \frac{Q_y S_x}{I} & \tau_{xy} &= \tau_{yx} & &= \frac{H_z}{I} \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Наибольшие нормальные напряжения от изгиба σ_x и σ_y и касательные напряжения τ_{xy} от кручения возникают в точках верхней и нижней грани пластины. Наибольшие касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} от перерезывания возникают в срединной плоскости.

4.4 Изгибающие моменты при осесимметричном изгибе круглой пластины

Если круглая пластина (рис. 59,а) подвергается действию нагрузки, симметричной относительно вертикальной оси z , проходящей через центр O пластины и называемой *центральной осью*, то изогнутая срединная поверхность ее представляет собой поверхность вращения, симметричную относительно оси z . Поэтому сечение пластины любой радиальной вертикальной плоскостью xOz , изображенное на рис. 59,б, окажется также симметричным относительно оси z . На рис.59 через x обозначена любая ось, лежащая в срединной плоскости и совпадающая с радиусом пластины; все точки A , лежащие на окружности радиусом x , испытывают одинаковое усилие, их вертикальные прогибы w (перемещения, параллельные оси z) тоже одинаковы.

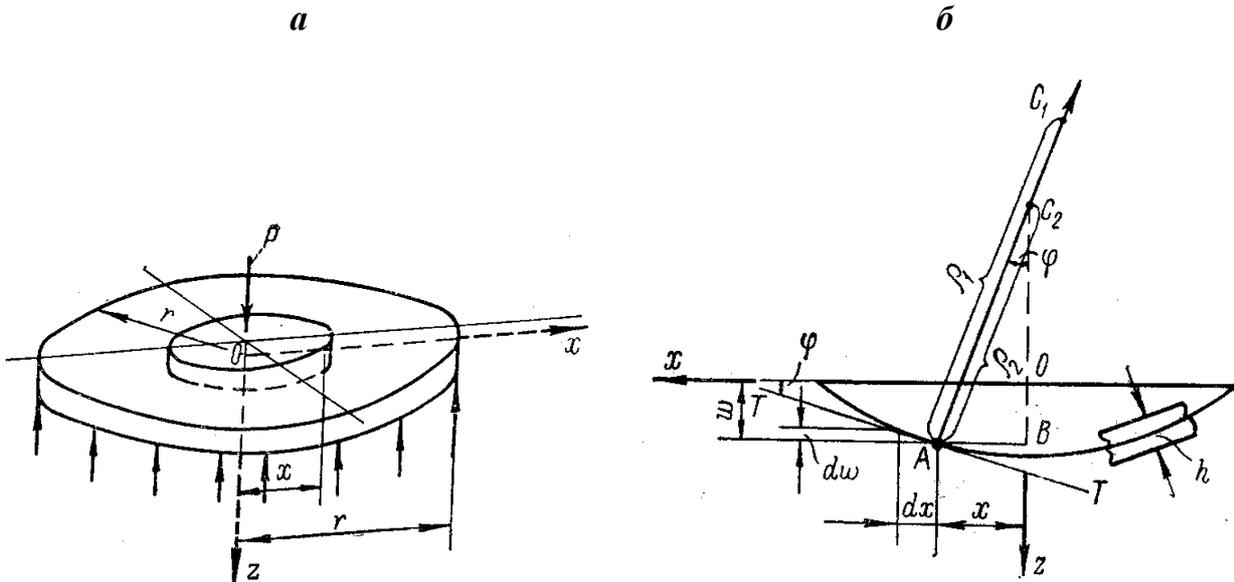


Рис. 59

Если координата x получила приращение dx , то прогиб w получит соответствующее приращение dw . Отношение

$$\frac{dw}{dx} = -tg\varphi \approx -\varphi \quad (4.28)$$

представляет собой приближенно, ввиду малости w , угол наклона, который составляет касательная TT , проведенная в точке A , к изогнутой срединной поверхности пластины. При заданном направлении оси z тангенс угла φ и, следовательно, и угол φ – отрицательны. Как известно, криволинейная поверхность имеет в любой точке A два главных радиуса кривизны ρ_1 и ρ_2 , из которых один наибольший, а другой наименьший. Радиусы кривизны в данной точке совпадают с

главной нормалью, т. е. с нормалью, лежащей в плоскости кривизны и перпендикулярной к касательной плоскости, проведенной в точке A к криволинейной поверхности.

Для круглой симметрично нагруженной пластины (рис. 60) главный радиус кривизны ρ_1 характеризует собой кривизну изогнутой срединной поверхности в плоскости xOz . Центр C_1 кривизны может находиться выше или ниже плоскости Ox в зависимости от изгиба пластины: выпуклостью вниз или вверх.

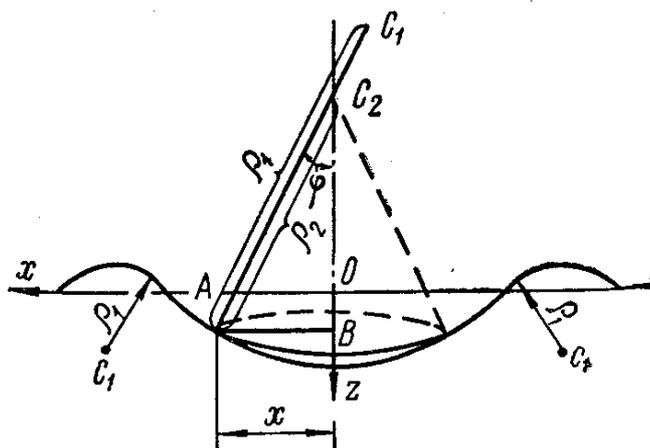


Рис. 60

Радиус кривизны ρ_2 характеризует собой кривизну изогнутой срединной поверхности в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа, и представляет собой образующую конуса, вершина которого C_2 лежит на оси z , а радиус основания равен x . На основании приближенного выражения аналитической геометрии и зависимости (4.28) главная кривизна

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} \quad (4.29)$$

Из прямоугольного треугольника ABC_2 видно, что

$$x = \rho_2 \sin \varphi \approx \rho_2 \varphi,$$

откуда вторая главная кривизна

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\varphi}{x} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{dw}{dx} \quad (4.30)$$

Подстановка значений (4.29) и (4.30) в формулы (4.13), (4.14) с учетом (4.15) дает выражения для погонных изгибающих моментов радиального M_r и окружного M_T :

$$\left. \begin{aligned} M_r &= D \left(\frac{1}{\rho_1} + \mu \frac{1}{\rho_2} \right) = -D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{\mu}{x} \cdot \frac{dw}{dx} \right) \\ M_T &= D \left(\frac{1}{\rho_2} + \mu \frac{1}{\rho_1} \right) = -D \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{dw}{dx} + \mu \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

Для дальнейших выводов понадобится еще выражение производной погонного радиального изгибающего момента

$$\frac{dM_r}{dx} = D \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{\mu}{x} \cdot \frac{d\varphi}{dx} - \mu \frac{\varphi}{x^2} \right) = -D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{\mu}{x} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{\mu}{x^2} \cdot \frac{dw}{dx} \right) \quad (4.32)$$

4.5 Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности круглой пластины

Это уравнение может быть получено из уравнения (4.11) путем преобразования его на основании формул перехода от прямоугольных координат к полярным. Применительно к осесимметричной задаче той же цели можно достигнуть при непосредственном рассмотрении элемента круглой пластины. Для этого выделим из круглой пластины толщиной h , испытывающей распределенную нагрузку, симметричную относительно центральной оси z , двумя радиальными сечениями, составляющими между собой угол $d\theta$, и двумя окружными сечениями с радиусами x и $x + dx$ элемент, заштрихованный на рис. 61 и показанный отдельно на рис. 62. Этот элемент подвергается действию не показанной на рис. 62 распределенной нагрузки, погонных поперечных сил Q и $Q + dQ$ и погонных изгибающих радиальных моментов M_r и $M_r + dM_r$ по окружным сечениям, а также погонных окружных изгибающих моментов M_T по радиальным сечениям.

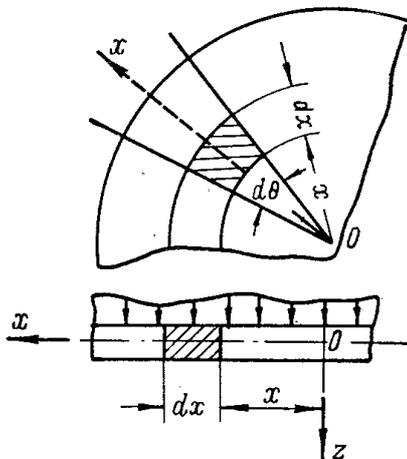


Рис. 61

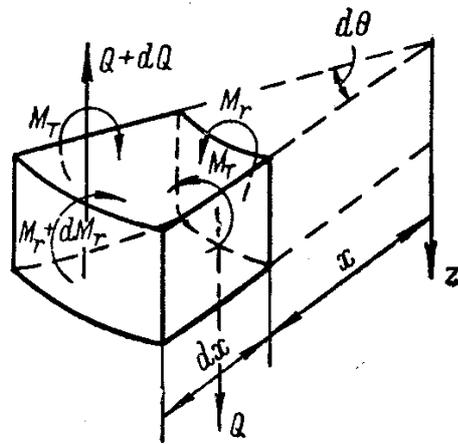


Рис. 62

В силу симметрии нагрузки относительно центральной оси z поперечные силы по радиальным сечениям отсутствуют, а погонные изгибающие моменты M_T одинаковы. На рис. 62 показаны изгибающие моменты, гнущие пластину выпуклостью вниз. Значения моментов приняты положительными.

Для составления уравнения равновесия элемента изгибающие моменты, действующие по граням элемента, изображаются в виде векторов (рис. 63). Стрелка вектора, перпендикулярного к плоскости действия момента, направлена в ту сторону, с которой вращение момента представляется происходящим по часовой стрелке. Приравняем нулю сумму проекций всех сил, действующих на вырезанный элемент, на ось T , перпендикулярную к биссектрисе, делящей угол $d\theta$ пополам.

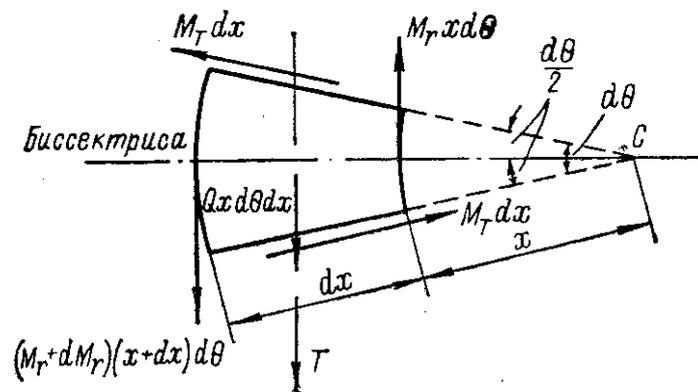


Рис. 63

При составлении уравнения моментов можно пренебречь ввиду малости элемента неравномерностью расположенной на нем нагрузки и моментом, вызванным приращением dQ поперечной силы в радиальном направлении. Поэтому поперечные силы, действующие по граням элемента, сводятся к моменту с плечом dx , который изображается вектором $Q dx d\theta dx$, параллельным оси T . Умножение всех погонных усилий на длину грани, по которой они действуют, проектирование этих усилий на ось T и приравнение суммы проекции нулю дает выражение

$$\sum T = Q dx dx d\theta + (M_T + dM_T)(x + dx) d\theta - M_T dx \frac{d\theta}{2} - M_T dx \frac{d\theta}{2} - M_T x d\theta = 0 \quad (4.33)$$

В уравнении (4.33) синус угла $\frac{d\theta}{2}$ ввиду малости заменен углом $\frac{d\theta}{2}$. После сокращения на $d\theta$, раскрытия скобок и отбрасывания члена $dM_T dx$ высшего порядка малости уравнение (4.33) принимает вид

$$Q dx dx + M_T dx + dM_T x - M_T dx = 0$$

или, после деления всех членов на $x dx$,

$$\frac{1}{x}(M_r - M_T) + \frac{dM_r}{dx} = -Q \quad (4.34)$$

Подстановка в уравнение (4.34) выражений для M_k , M_T и $\frac{dM_r}{dx}$ через φ по формулам (4.31) и (4.32) приводит к уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x^2} = -\frac{Q}{D} \quad (4.35)$$

Уравнение (4.35) представляет собой дифференциальное уравнение равновесия изогнутой срединной поверхности круглой пластины, выраженное через угол φ , составляемый касательной к изогнутой срединной поверхности с осью x .

Если в этом уравнении на основании (4.28) заменить φ на dw/dx , можно получить другой вид дифференциального уравнения относительно вертикального перемещения w

$$\frac{d^3w}{dx^3} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dw}{dx} = \frac{Q}{D}$$

Погонная поперечная сила в круговом сечении радиусом x на основании рис. 64 при распределенной нагрузке

$$Q = \frac{\int_0^x q_{x_1} 2\pi x_1 dx_1}{2\pi x_1}$$

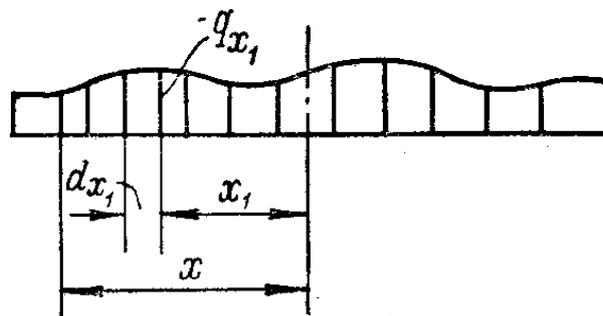


Рис. 64

Интегрируя дифференциальное уравнение (4.35), можно найти уравнение углов φ , а затем, на основании зависимости (4.28), и уравнение прогибов w в виде функции от x . Произвольные постоянные, входящие в эти уравнения, находятся из граничных условий на контуре пластины или на границе двух соседних участков. При

подстановке найденных выражений для φ или w в уравнения (4.31) находят выражения для радиального и окружного изгибающих моментов в виде функции от x . По этим выражениям могут быть построены эпюры изгибающих моментов и найдены их наибольшие значения.

Пусть на круглую пластину (рис. 65) действуют направленные вниз равномерно распределенная нагрузка q и центральная сила P . По наружному контуру радиусом r приложены произвольно направленные распределенные погонные силы P_0 и погонные изгибающие моменты M_0 . Составим уравнения

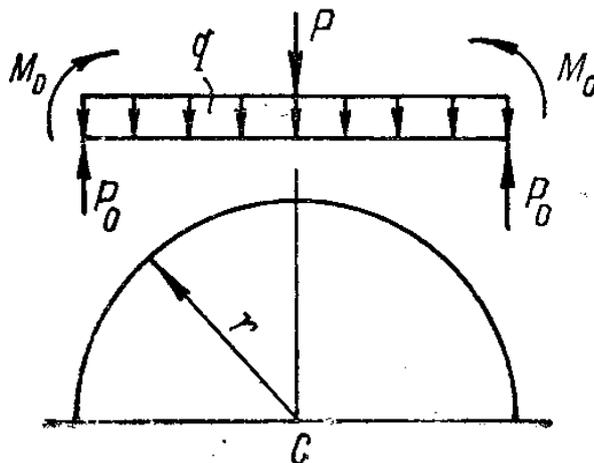


Рис. 65

углов φ и прогибов w . Для возможности интегрирования левую часть уравнения (4.35) необходимо преобразовать следующим образом:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x} \right) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dx} x + \varphi \right) \right] = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{d(x\varphi)}{dx} \right]. \quad (4.36)$$

Приравняв суммарную поперечную силу по контуру радиусом x , равную $Q2\pi x$ (рис. 66), всей нагрузке, помещающейся на круге радиусом x и равной $P + q \cdot \pi x^2$, найдем погонную поперечную силу

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q \quad (4.37)$$

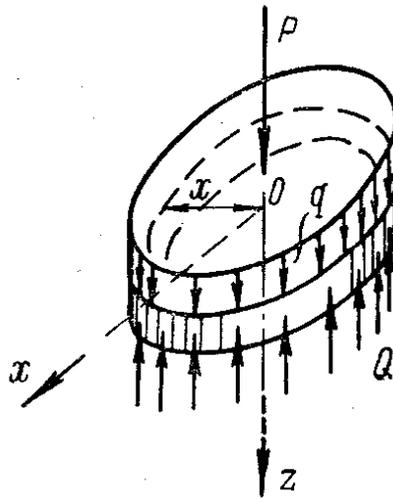


Рис. 66

Замена выражений, стоящих в левой и правой частях уравнения (4.35) соответствующими выражениями (4.36) и (4.37), приводит к легко интегрируемому дифференциальному уравнению

$$d\left[\frac{1}{x} \cdot \frac{d(x\varphi)}{dx}\right] = -\frac{Pdx}{2\pi D x} - q \frac{xdx}{2D} \quad (4.38)$$

Первое интегрирование выражения (4.38) дает

$$d(x\varphi) = -\frac{P}{2\pi D} x \ln x dx - \frac{q}{4D} x^3 dx + C_1 x dx \quad (4.39)$$

Второе интегрирование выражения (4.39) дает

$$\varphi = -\frac{P}{8\pi D} x(2 \ln x - 1) - \frac{q}{16D} x^3 + \frac{C_1}{2} x + C_2 \frac{1}{x} \quad (4.40)$$

Уравнение (4.40) называется *уравнением углов*, составляемых касательной к изогнутой срединной поверхности с осью x или уравнением углов поворота нормали к изогнутой срединной поверхности. После подстановки в уравнение (4.40) вместо φ

величины $-\frac{dw}{dx}$ на основании формулы (4.28) и умножения обеих частей уравнения на dx , оно получает вид

$$dw = \frac{P}{8\pi D} x(2 \ln x - 1) dx + \frac{q}{16D} x^3 dx - \frac{C_1}{2} x dx - C_2 \frac{dx}{x}$$

Интегрирование дает

$$w = \frac{P}{8\pi D} x^2 (\ln x - 1) + \frac{q}{64D} x^4 - \frac{C_1}{4} x^2 - C_2 \ln x + C_3 \quad (4.41)$$

Уравнение (4.41) называется *уравнением прогибов* или *уравнением изогнутой срединной поверхности пластины*.

4.6 Граничные условия. Наибольшие напряжения и прогибы.

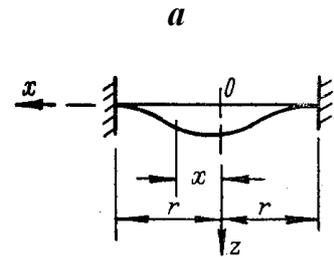
Условия прочности

Так как число произвольных постоянных в уравнении (4.41) равно трем, то для нахождения постоянных C следует составить следующие три граничные условия:

□

- для защемленной кромки пластины (рис. 67,а)

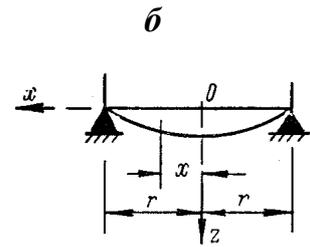
1) $x = r, w = 0$; 2) $x = r, \varphi = 0$; 3) $x = 0, \varphi = 0$;



□

- для свободно опертой кромки пластины (рис. 67, б)

1) $x = r, w = 0$; 2) $x = r, M_r = 0$; 3) $x = 0, \varphi = 0$;



- для свободной кромки (рис. 67,в)

1) $x = r, M_r = 0$; 2) $x = r, Q = \frac{dM_r}{dx} = 0$; 3) $x = 0, w = 0$.

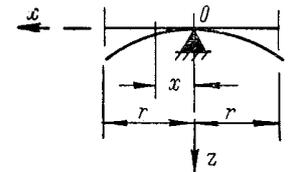


Рис. 67

Дифференциальное уравнение (4.38) и его интегралы, а также выражения (4.31) справедливы и для кольцевой пластины в виде круглой пластины с круглым отверстием в середине (рис. 68,а) или в виде кольцевой пластины,

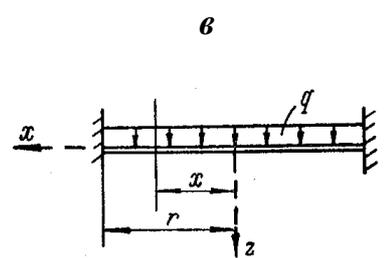
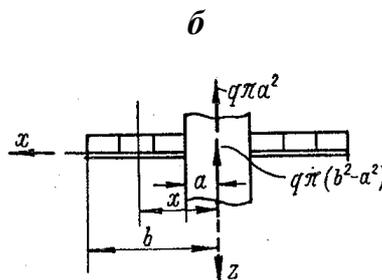
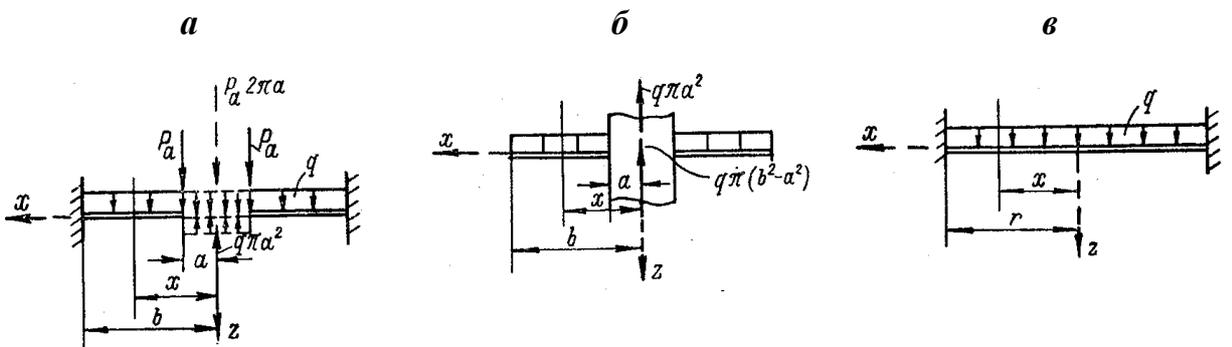


Рис. 68

внутренний контур которой защемлен (рис. 68,б). Изменяются лишь граничные условия и для центральной силы P должно быть составлено выражение, отражающее изменение поперечной силы в сечении x [см. формулу (4.37)].

Например, для пластины, изображенной на рис. 68, а, граничное условие $x = 0, w = 0$ теряет смысл, так как при $x = 0$ нет пластины. Поэтому следует воспользоваться следующими тремя условиями: 1) $x = b; w = 0$; 2) $x = b, \varphi = 0$; 3) $x = a, M_r = 0$. Для сосредоточенной силы получится выражение

$$P = P_a 2\pi a - q\pi a^2$$

В этом выражении первый член представляет собой приложенную в центре и направленную вниз равнодействующую погонных сил P_a , приложенных к контуру радиусом a (сила P на рис. 65), а второй член – силу, приложенную в центре и направленную вверх, компенсирующую ту распределенную нагрузку, которой надо заполнить круг радиусом a , чтобы привести схему, изображенную на рис. 68, а, к схеме, показанной на рис. 68, б. При такой замене уравнения остаются в силе и при наличии отверстия, так как координаты x всегда больше a и изменение расчетной схемы при $x < a$ на вывод этих уравнений не влияет.

Для пластины, изображенной на рис. 68, б, следует воспользоваться следующими граничными условиями:

1. $x = a, w = 0$; 2) $x = a, \varphi = 0$; 3) $x = b, M_r = 0$. Для сосредоточенной силы получится выражение

$$P = -q\pi a^2 - q(\pi b^2 - \pi a^2) = -q\pi b^2$$

Если, в частном случае, одна из нагрузок q или P отсутствует, то в формулах (4.40) и (4.41) ее следует положить равной нулю. Например, для пластины, показанной на рис. 68, в, выражение для прогиба будет

$$w = \frac{q}{64D} x^4 - \frac{C_1}{4} x^2 - C_2 \ln x + C_3$$

Если для отдельных участков пластины выражения поперечной силы различны (рис. 69), то для каждого из участков должно быть составлено свое

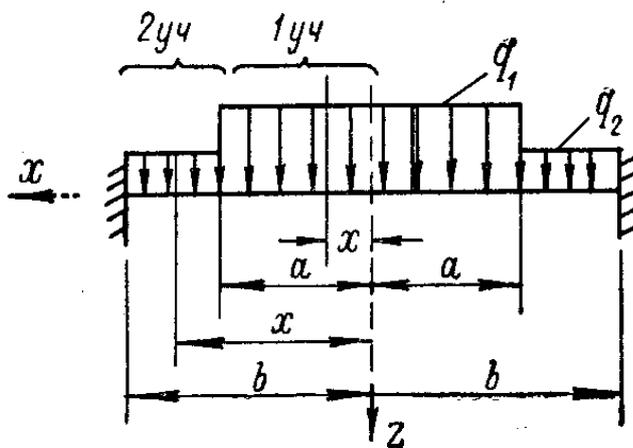


Рис. 69

дифференциальное уравнение. Например, для суммарной поперечной силы на первом участке пластины

$$Q_1 = q_1 \pi x^2,$$

на втором участке

$$Q_2 = q_1 \pi a^2 + q_2 \pi (x - a)^2.$$

После интегрирования каждого дифференциального уравнения получится три произвольных постоянных и общее число произвольных постоянных окажется равным $3n$ (n – число участков). Для каждой границы между двумя соседними участками могут быть составлены три дополнительных условия, выражающих то обстоятельство, что на границе двух соседних участков прогиб w , угол φ и радиальный момент M_r одинаковы: 1) $x = a$, $w_1 = w_2$, 2) $x = a$, $\varphi_1 = \varphi_2$; 3) $x = a$, $(M_r)_1 = (M_r)_2$. Таких дополнительных условий оказывается как раз столько, сколько недостает для нахождения всех произвольных постоянных. В разобранный примере при двух участках число произвольных постоянных $2 \times 3 = 6$, число условий $3 + 3 = 6$.

Если известны выражения для изгибающих моментов M_r и M_T и прогибов w в функции от x , то координаты x , соответствующие наибольшим значениям этих величин, найдутся из условий

$$\frac{dM_r}{dx} = 0, \quad \frac{dM_T}{dx} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad (4.42)$$

В ряде случаев сечения, в которых возникают наибольшие изгибающие моменты или прогибы, известны. Например, в схеме на рис. 68,б наибольший прогиб возникает на наружном контуре при $x = b$, а наибольший радиальный изгибающий момент $(M_r)_{max}$ – в заземлении при $x = a$.

Подставив найденные из условий (4.42) значения x в выражения для изгибающих моментов, можно получить значения $(M_r)_{max}$ и $(M_T)_{max}$ которые, в общем случае, могут возникнуть в разных сечениях пластины. Опасное сечение может оказаться поэтому там, где погонные изгибающие моменты M_r и M_T одновременно велики.

Главные напряжения на наружной и внутренней поверхностях пластины в опасном сечении вычисляются по формулам, аналогичным (4.27), путем замены момента инерции на момент сопротивления:

$$(\sigma_r)_{max} = \pm \frac{M_r \delta}{h^2} \quad (\sigma_T)_{max} = \pm \frac{M_T \delta}{h^2}.$$

Третье главное напряжение (по площадке, параллельной срединной плоскости) равно нулю. Расчетное напряжение, сравниваемое с допускаемым, вычисляется в зависимости от знаков напряжений σ_r и σ_T по одной из теорий прочности. Например, для пластины, представленной на рис. 68,б, опасное сечение находится в

защемлении при $x = a$; при этом верхние волокна и от момента M_r , и от момента M_T испытывают растяжение, а нижние – сжатие, изгибающий момент M_r в сечении $x = a$ больше, чем M_T . Предполагаем, что пластина выполнена из пластического материала и что применяется третья теория прочности, условие прочности по которой

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

Волокна в точке на верхней поверхности пластины растянуты, т. е. напряжения σ положительны, поэтому следует обозначить:

$$\sigma_1 = \sigma_r; \quad \sigma_2 = \sigma_T; \quad \sigma_3 = 0$$

Условие прочности примет вид

$$(\sigma_r)_{\max} = \frac{M_r \cdot 6}{h^2} \leq [\sigma]$$

4.7 Температурные напряжения в пластинах

В общем случае температура в какой-либо точке круглой пластины является функцией двух переменных: радиуса x и расстояния z от точки до срединной плоскости. В силу линейности основных уравнений для температурных напряжений напряжения, вызванные радиальным изменением температуры – $t_{x2} - t_{x1}$ и изменением температуры по толщине $t_2 - t_1$ можно вычислить отдельно, а затем алгебраически суммировать. Ниже рассматриваются два случая изменения температуры: 1) температура одинакова для всех точек, расположенных на одинаковом расстоянии z от срединной плоскости, но меняется по толщине пластины по прямолинейному закону; 2) температура постоянна по толщине, не зависит от полярного угла θ , но меняется в зависимости от расстояния x между точкой и центром пластины.

Случай 1. При одинаковом во всех точках одной окружности изменении температуры по толщине пластины $\Delta t = t_2 - t_1$, подчиняющемся прямолинейному закону (рис. 70), перемещение этих точек пластины, связанное с ее расширением или сжатием, происходит также одинаково по всем направлениям в плане.

В случае повышения температуры верхняя поверхность пластины получает большее расширение, чем нижняя, и пластина изгибается по шаровой поверхности радиусом ρ выпуклостью вверх. На основании допущения о прямых нормалях можно считать, что относительная деформация (по отношению к срединному слою), происходящая на наружной поверхности в любом направлении,

$$\varepsilon = \left(\frac{z}{\rho} \right)_{z=\frac{h}{2}} = \frac{h}{2\rho} \tag{4.43}$$

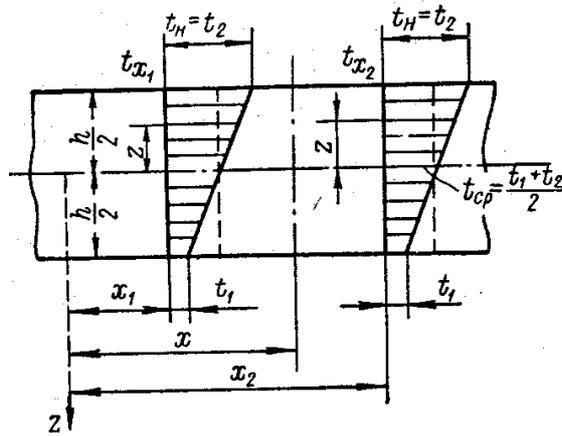


Рис. 70

С другой стороны, относительная температурная деформация отрезка длиной l на наружной поверхности по отношению к срединному слою

$$\varepsilon = \frac{\alpha l t_H - \alpha l t_{cp}}{l} = \alpha (t_H - t_{cp}) = \alpha \left(t_2 - \frac{t_2 + t_1}{2} \right) = \alpha \left(\frac{t_2 - t_1}{2} \right) = \alpha \frac{\Delta t}{2} \quad (4.44)$$

Приравняв выражения (4.43) и (4.44), можно получить формулу для определения кривизны шаровой изогнутой поверхности

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha \Delta t}{h} \quad (4.45)$$

Если круглая пластина не имеет закреплений или свободно поворачивается на контуре (свободно оперта), то температурное искривление не вызывает дополнительных усилий. Если же пластина закреплена, на контуре возникнут погонные опорные моменты M_r , уничтожающие кривизну, вызванную неравномерным нагревом.

При сферическом изгибе моментами M_r кривизна

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_r}{D(1 + \mu)} \quad (4.46)$$

Приравняв выражения (4.45) и (4.46), получим формулу для определения погонного изгибающего момента

$$M_r = \frac{D(1 + \mu)\alpha \Delta t}{h}$$

а разделив это выражение на момент сопротивления $W = \frac{h^2}{6}$ и подставив вместо цилиндрической жесткости D ее значение из формулы (4.12), определим наибольшее напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_r}{W} = \frac{Eh^2}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{(1+\mu)\alpha\Delta t_6}{h \cdot h^2} = \frac{E\alpha\Delta t}{2(1-\mu)} \quad (4.47)$$

Случай 2. Круглая пластина с центральным отверстием радиусом a подвергается действию температуры, имеющей радиальный перепад (рис. 71).

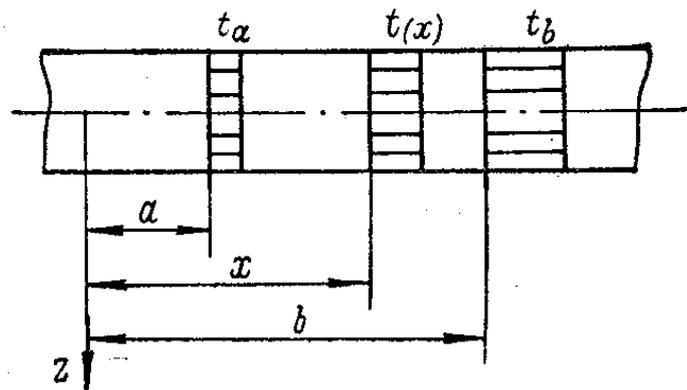


Рис. 71

В дальнейшем $t(x)$ обозначено для краткости t . Напряженное состояние в пластине считаем плоским, т. е. полагаем $\sigma_z = 0$. В силу симметрии условий и расчетной схемы перемещения u зависят только от радиуса x , а перемещения v равны нулю. Поэтому относительные деформации

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du}{dx} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_T) + \alpha t \\ \varepsilon_T &= \frac{u}{x} = \frac{1}{E}(\sigma_T - \mu\sigma_r) + \alpha t \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

Если решить первые два уравнения (4.48) относительно σ_r и σ_T , а в третьем

заменить γ_{rT} на $\frac{\tau_{rT}}{G}$, можно получить

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{du}{dx} + \mu \frac{u}{x} - (1+\mu)\alpha t \right] \\ \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{u}{x} + \mu \frac{du}{dx} - (1+\mu)\alpha t \right] \\ \tau_{rT} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

Подстановка значений (4.49) в уравнение равновесия $(\sum_r = 0)$ плоской задачи в полярных координатах, принимающее в данном случае ($\rho = x$) вид

$$\frac{d\sigma_r}{dx} - \frac{\sigma_r - \sigma_r}{x} = 0,$$

приводит к следующему дифференциальному уравнению для радиального перемещения:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2} = (1+\mu)\alpha \frac{dt}{dx}.$$

Для интегрирования этого уравнения левая его часть записывается так [см. аналогичное решение уравнения (4.36)]:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} (xu) \right] = (1+\mu)\alpha \frac{dt}{dx} \quad (4.50)$$

Первое и второе интегрирование (4.50) дает

$$u = \frac{(1+\mu)\alpha}{x} \int_a^x t(x_1) x_1 dx_1 + \frac{1}{2} C_1 x + \frac{C_2}{x} \quad (4.51)$$

В выражении (4.51) через x_1 обозначен переменный радиус, определяющий точки, расположенные между a и x . Если подставить это выражение в формулы (4.49), то получатся следующие выражения для температурных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{E\alpha}{x^2} \int_a^x t(x_1) x_1 dx_1 + \frac{EC_1}{2(1-\mu)} - \frac{EC_2}{(1+\mu)x^2} \\ \sigma_r &= \frac{E\alpha}{x^2} \int_a^x t(x_1) x_1 dx_1 - E\alpha t(x) + \frac{EC_1}{2(1-\mu)} + \frac{EC_2}{(1+\mu)x^2} \\ \tau_{rT} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий на контурах пластины. Если отверстия радиусом a в пластине нет, то интегрирование в формулах (4.52) выполняется в пределах от нуля до x .

4.8 Определение усилий в мембранах. Цепные усилия и напряжения

Мембрана обладает малой жесткостью на изгиб и поэтому обычно рассчитывается лишь на действие цепных продольных усилий N_x и N_y в срединной плоскости и на вызываемые ими равномерно распределенные по толщине напряжения. Прогибы w мембраны составляют обычно не менее пяти толщин h и в большую сторону не ограничиваются.

Реактивные усилия S на закрепленном контуре (рис. 72) направлены по касательной к изогнутой срединной поверхности мембраны. Они могут быть разложены на составляющие: вертикальную S_z и горизонтальную S_x . Наличие горизонтальной составляющей реактивного усилия (распора), возникающей при действии вертикальной нагрузки, – особенность мембраны по сравнению с пластиной средней толщины и плитой.

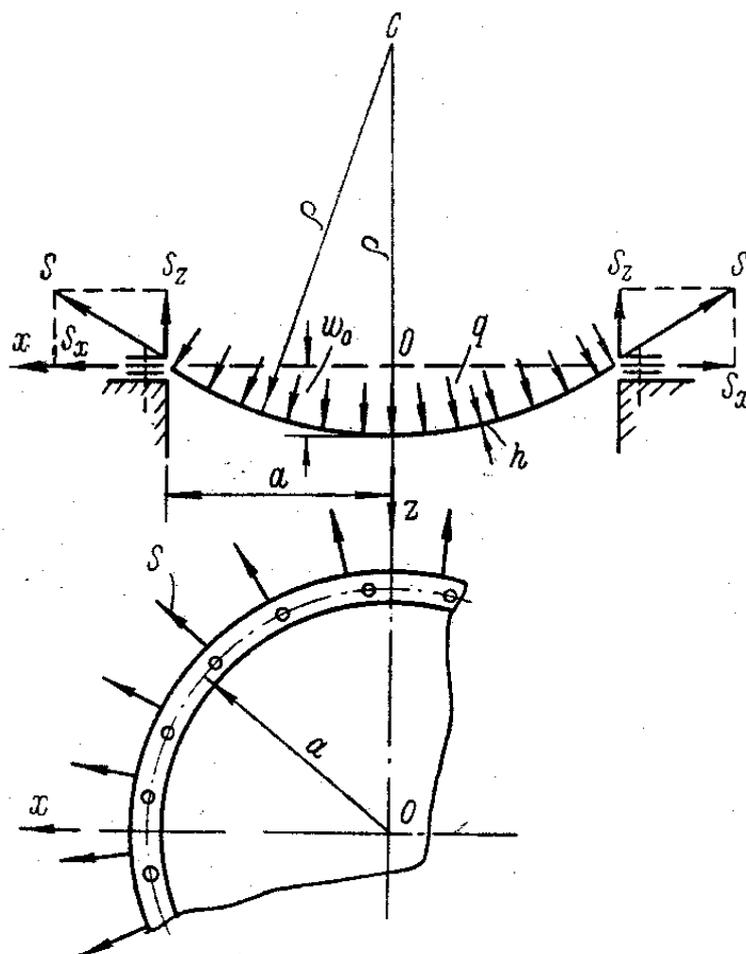


Рис. 72

Дифференциальные уравнения изогнутой поверхности мембраны получаются из дифференциальных уравнений (4.26) для пластины, у которой прогиб превышает половину толщины, если положить в них цилиндрическую жесткость D равной нулю. Так как в выражении цилиндрической жесткости модуль упругости E нулю не

равен, она будет равна нулю, если дробь $\frac{h^3}{12(1-\mu^2)}$ можно считать пренебрежимо малой.

Функцию прогибов w и функцию напряжений φ в мембране можно найти из системы двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= -\frac{q(x, y)}{h} \\ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} &= E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.53)$$

Уравнения (4.53) решаются приближенно. Если функция φ найдена, выражения для растягивающих цепных усилий N_x и N_y в мембране могут быть вычислены по формулам

$$N_x = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad N_y = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (4.54)$$

а соответствующие цепные напряжения найдены из выражений

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h} \quad \text{и} \quad \sigma_y = \frac{N_y}{h}$$

Изгибающие и крутящие моменты, а также перерезывающие силы и соответствующие им напряжения в мембране отсутствуют.

4.9 Приближенное определение прогиба и напряжений в круглой мембране

При выводе приближенных формул предполагается, что зашпеленная на контуре мембрана радиусом a и толщиной h (рис.72) изгибается, образуя шаровую поверхность, и что нагрузка q действует по нормали к этой изогнутой поверхности.

При этих условиях усилия N и напряжение σ (рис. 73,а)

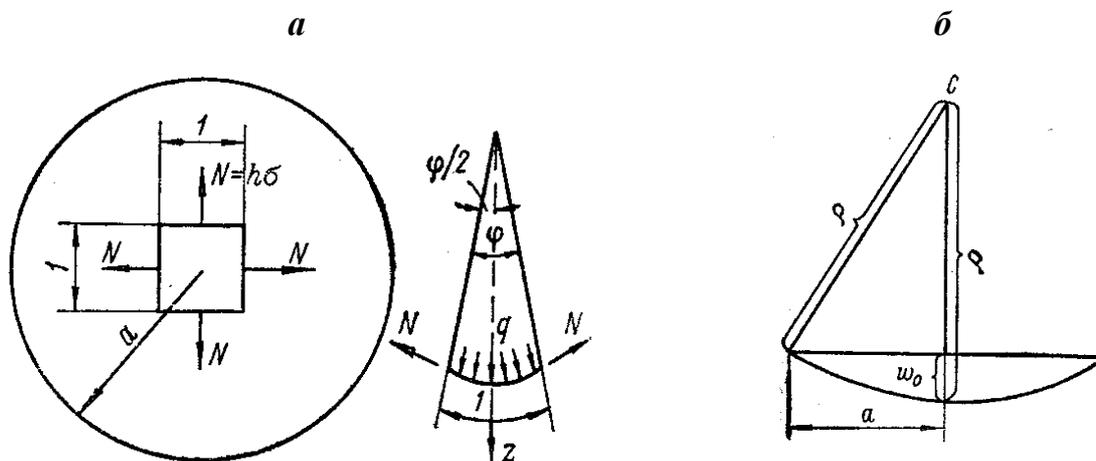


Рис. 73

по кромкам элемента, вырезанного из мембраны двумя взаимно перпендикулярными сечениями, окажутся одинаковыми. При размерах элемента, равных единице,

$$N = 1 \cdot h\sigma. \quad (4.55)$$

Согласно уравнению равновесия сумма проекций нагрузки и усилий, действующих по кромкам элемента на нормаль z к поверхности элемента

$$- 4N \sin \frac{\varphi}{2} + q \cdot 1 \cdot 1 = 0. \quad (4.56)$$

Центральный угол φ выражаем через длину дуги кромки элемента и радиус

кривизны ρ . Замена в уравнении (4.56), ввиду малости φ , $\sin \frac{\varphi}{2}$ на $\frac{\varphi}{2}$, а φ на $\frac{1}{\rho}$

дает выражение:

$$\begin{aligned} - \text{ для усилия } N &= \frac{q}{2\varphi} = \frac{q\rho}{2}; \\ - \text{ для кривизны } \frac{1}{\rho} &= \frac{q}{2N}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Тогда для напряжения из формулы (4.55) получим

$$\sigma = \frac{N}{h} = \frac{q\rho}{2h}. \quad (4.58)$$

Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности на основании зависимости (4.57)

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{q}{2N}.$$

Величина прогиба в середине мембраны получается на основании закона сохранения энергии

$$U = A. \quad (4.59)$$

где U – потенциальная энергия деформации мембраны;

A – работа внешних сил на перемещениях, вызванных деформацией мембраны.

Потенциальная энергия мембраны

$$U = u \pi a^2 h, \quad (4.60)$$

где удельная потенциальная энергия деформации с учетом того, что на основании закона Гука

$$\varepsilon = \frac{1}{E} (\sigma - \mu \sigma)$$

может быть выражена через напряжение следующим образом:

$$u = 2 \frac{\sigma \varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{E} (1 - \mu)$$

Тогда, на основании формулы, (4.58)

$$u = \frac{q^2 \rho^2}{4h^2 E} (1 - \mu) \quad (4.61)$$

Зависимость между радиусом кривизны ρ и прогибом w_0 в середине мембраны (рис. 73,б)

$$a^2 + (\rho - w_0)^2 = \rho^2$$

или после возведения скобки в квадрат и отбрасывания w_0^2 как величины высшего порядка малости

$$a^2 - 2\rho w_0 = 0,$$

откуда

$$\rho = \frac{a^2}{2w_0}. \quad (4.62)$$

Подстановка этого значения ρ в формулу (4.61) и значения u в формулу (4.60) дает выражение для потенциальной энергии

$$U = \frac{q^2 a^6 \pi}{16w_0^2 h E} (1 - \mu) \quad (4.63)$$

Работа A внешних сил получится как интеграл, взятый по площади мембраны, половины произведения элементарной силы $q dx dy$ на прогиб $w(x, y)$:

$$A = \frac{1}{2} q \int_F w(x, y) dx dy. \quad (4.64)$$

Интеграл в выражении (4.64) представляет собой объем $V_{ш.с.}$ шарового сегмента с высотой w_0 и радиусом a :

$$V_{ш.с.} = \frac{1}{6} \pi w_0 (3a^2 + w_0^2)$$

или, если отбросить w_0^2 ,

$$\int_F w(x, y) dx dy = V_{ш.с.} = \frac{\pi w_0 a^2}{2}$$

Поэтому выражение (4.64) примет вид

$$A = \frac{q \pi w_0 a^2}{4}. \quad (4.65)$$

При подстановке значений (4.63) и (4.65) в выражение (4.59), получаем

$$\frac{q a^4}{16 w_0^2 h E} (1 - \mu) = \frac{w_0}{4}$$

Тогда прогиб в середине мембраны

$$w_0 = \sqrt[3]{\frac{a^4 q}{4 E h} (1 - \mu)}.$$

Для стальной мембраны при $\mu = 0,3$ прогиб

$$w_0 = 0,58 \sqrt[3]{\frac{q a}{E h}}. \quad (4.66)$$

Точное решение, полученное путем интегрирования дифференциальных уравнений (4.53), дает

$$w_0 = 0,662 a \sqrt[3]{\frac{q a}{E h}}.$$

Нормальное напряжение σ получается, если в формулу (4.58) подставить ρ из формулы (4.62) и w_0 из формулы (4.66):

$$\sigma = \frac{q\rho}{2h} = \frac{qa^2}{4w_0h} = \frac{qa^2}{4 \cdot 0,58ah} \cdot \sqrt[3]{\frac{Eh}{qa}}$$

ИЛИ

$$\sigma = 0,431 \cdot \sqrt[3]{E \left(\frac{qa}{h}\right)^2}$$

Точное решение на базе системы (4.53) дает выражение

$$\sigma_{\max} = 0,423 \cdot \sqrt[3]{E \left(\frac{qa}{h}\right)^2}$$

4.10 Примеры расчетов

Пример 4.1. Определить нормальные напряжения σ_x и σ_y в точке на верхней поверхности прямоугольной пластины, испытывающей изгиб от моментов $M = 0,014$ Мн·м, распределенных по кромкам AD и BC (рис. 74). Определить радиус кривизны ρ изогнутой срединной поверхности и наибольший прогиб w . $E = 2 \cdot 10^5$ Мн/м²; $\mu = 0,27$.

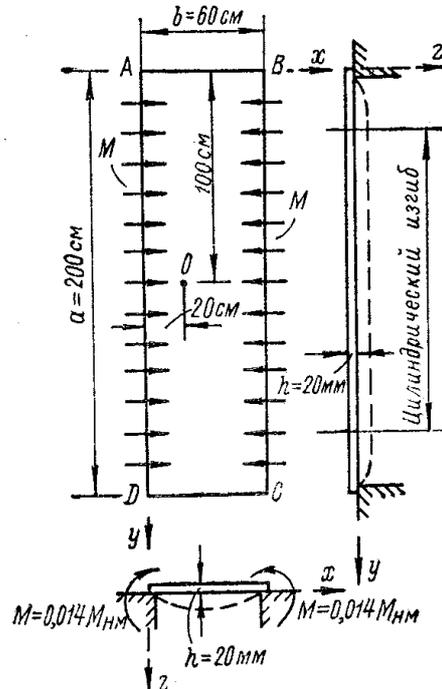


Рис. 74

$$\frac{a}{b} = \frac{200}{60} = 3,3 > 2.$$

Решение. Отношение сторон пластины $\frac{a}{b} = \frac{200}{60} = 3,3 > 2$. Следовательно, напряжения в средней части пролета можно вычислить по формулам цилиндрического изгиба.

Погонный изгибающий момент по кромкам AD и BC

$$\overline{M} = \frac{M}{a} = \frac{0,014}{2} = 0,007 \frac{\text{МН} \cdot \text{м}}{\text{м}}$$

Напряжения по формулам (4.21) и (4.22)

$$\sigma_x = \frac{\overline{M}z12}{h^3} = -\frac{0,007 \cdot 0,01 \cdot 12}{0,02^3} = -105,0 \text{ МН/м}^2;$$

$$\sigma_y = \mu\sigma_x = 0,27(-105,0) = -28,4 \text{ МН/м}^2.$$

Такие же напряжения будут во всех точках верхней поверхности в пределах цилиндрического изгиба.

Цилиндрическая жесткость

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0,02^3}{12(1-0,27^2)} = 0,144 \frac{\text{МН} \cdot \text{м}^2}{\text{м}}$$

Кривизна срединной поверхности по формулам (4.15) и (4.19)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{D} = \frac{0,007}{0,144} = 4,86 \cdot 10^{-2} \text{ 1/м.}$$

поэтому дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{D}$$

или

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -4,86 \cdot 10^{-2} \text{ 1/м.}$$

Два последовательных интегрирования дифференциального уравнения дают

$$\frac{dw}{dx} = -4,86 \cdot 10^{-2}x + C_1;$$

$$w = 2,43 \cdot 10^{-2}x^2 + C_1x + C_2. \quad (4.67)$$

Условия для определения произвольных постоянных: 1) $x = 0, w = 0$ (прогиб по

кромке AD отсутствует); 2) $x = 0,30 \text{ м}$, $\frac{dw}{dx} = 0$ (касательная к изогнутой срединной поверхности в середине пролета горизонтальна). Из первого условия следует, что $C_2 = 0$. Из второго условия $C_1 = 14,5 \cdot 10^{-3} \text{ 1/м}^2$.

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в уравнение прогибов (4.67), получаем $w = -2,43 \cdot 10^{-2} x^2 + 14,5 \cdot 10^{-3} x$.

Наибольший прогиб при $x = 0,30 \text{ м}$

$$w_{\max} = -2,43 \cdot 10^{-2} \cdot 0,3^2 + 14,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,3 = 21,87 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx 0,22 \text{ см}$$

Пример 4.2. Для заданной схемы круглой пластины (рис. 75,а) построить эпюру погонных радиальных изгибающих моментов. Коэффициент поперечной деформации $\mu = 0,13$; модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^6 \text{ н/см}^2$.

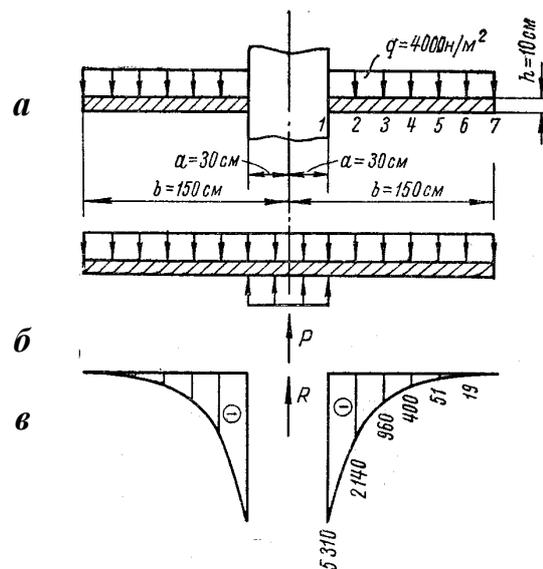


Рис. 75

Решение. Заданная схема отличается от схемы, для которой выведены формулы (4.40) и (4.41), тем, что на окружности радиусом $a = 30 \text{ см}$ нет равномерно распределенной нагрузки. Если эту нагрузку приложить, то для сохранения заданных условий нужно уравновесить ее аналогичной нагрузкой, приложенной снизу (рис. 75,б), которую можно заменить равнодействующей сосредоточенной силой $P' = \pi a^2 q$ на оси симметрии пластины. Кроме того, на этой оси действует реакция R , равная весу нагрузки, лежащей на пластине,

$$R = q(\pi b^2 - \pi a^2)$$

Полная сосредоточенная сила на оси пластины

$$\varphi = -\frac{P}{8\pi D}x(2\ln x - 1) - \frac{qx^3}{16D} + \frac{C_1x}{2} + \frac{C_2}{x} \quad (4.68)$$

Знак минус введен потому, что сила P направлена снизу вверх.

Таким образом, выражения (4.40) и (4.41) для φ и w могут быть использованы для схемы на рис. 75,а, если вместо P подставить в них выражение (4.68). Интенсивность нагрузки $q = 4000 \text{ н/м}^2 = 0,4 \text{ н/см}^2$.

Уравнение углов поворота

$$\varphi = -\frac{P}{8\pi D}x(2\ln x - 1) - \frac{qx^3}{16D} + \frac{C_1x}{2} + \frac{C_2}{x}$$

В формулу (4.31) для радиального момента входит

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{P}{8\pi D}x(2\ln x + 1) - \frac{3qx^2}{16D} + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{x^2},$$

$$\frac{\varphi}{x} = -\frac{P}{8\pi D}(2\ln x - 1) - \frac{qx^2}{16D} + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{x^2}.$$

При подстановке этих выражения в формулу (4.31) получаем

$$\begin{aligned} M_r &= D\left(\frac{d\varphi}{dx} + \mu\frac{\varphi}{x}\right) = \\ &= D\left\{-\frac{P}{8\pi D}[2(1+\mu)\ln x + 1 - \mu] - \frac{q}{16D}(3+\mu)x^2 + \frac{C_1}{2}(1+\mu) + \frac{1}{x^2}(\mu-1)C_2\right\}. \end{aligned}$$

Цилиндрическая жесткость

$$D = \frac{Eh^3}{12(1+\mu^2)} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{12(1-0,13^2)} = 16,95 \cdot 10^7 \text{ м} \cdot \text{см}^2$$

Так как

$$\frac{P}{8\pi D} = -\frac{\pi b^2 q}{8\pi D} = -\frac{150^2 \cdot 0,4}{8 \cdot 16,95 \cdot 10^7} = -6,342 \cdot 10^{-6} \text{ 1/см}^2,$$

то получим

$$\frac{q}{16D} = \frac{0,4}{16 \cdot 16,95 \cdot 10^7} = 0,000147 \cdot 10^{-6} \text{ 1/см}^2.$$

Момент

$$M_r = D \left[6,342 \cdot 10^{-6} (2,26 \ln x + 0,87) - 0,000147 \cdot 10^{-6} \cdot 3,13x^2 + 0,565C_1 - \frac{1}{x^2} 0,87C_2 \right] \text{ угол}$$

$$\varphi = 6,342 \cdot 10^{-6} x (2 \ln x - 1) - 0,000147 \cdot 10^{-6} x^3 + \frac{C_1}{2} x + \frac{C_2}{x}.$$

Условия для определения произвольных постоянных: 1) $x = a$, $\varphi = 0$; 2) $x = b$, $M_r = 0$.
Из первого условия

$$6,342 \cdot 10^{-6} \cdot 30 (2 \ln 30 - 1) - 0,000147 \cdot 10^{-6} \cdot 30^3 + 15 \cdot C_1 + \frac{C_2}{30} = 0.$$

После выполнения арифметических действий

$$1108,67 \cdot 10^{-6} + 15C_1 + \frac{C_2}{30} = 0.$$

Из второго условия

$$6,342 \cdot 10^{-6} (2,26 \ln 150 + 0,87) - 0,000147 \cdot 10^{-6} \cdot 3,13 \cdot 150^2 + 0,56C_1 - \frac{0,87}{150^2} C_2 = 0.$$

После выполнения арифметических действий

$$66,9873 \cdot 10^{-6} + 0,565C_1 - 3,8667 \cdot 10^{-5} C_2 = 0$$

Совместное решение уравнения (4.69) и (4.70) дает значения произвольных постоянных:

$$C_1 = 117,225 \cdot 10^{-6} \text{ 1/см}; \quad C_2 = 19503 \cdot 10^{-6} \text{ см}.$$

Подставив значения D и найденные значения произвольных постоянных в выражение для изгибающего момента M_r , получим

$$M_r = 16,95 \cdot 10 \left[6,342 (2,26 \ln x + 0,87) - 0,00046x^2 - 66,232 - \frac{16967,61}{x^2} \right].$$

Подставляя последовательно значения x через 20 см в это уравнение, можно найти значения радиальных моментов (табл. 3). По этим ординатам построена эпюра радиальных моментов (рис. 75,в).

Таблица 3

Номер точки	x	x^2	$\ln x$	$6,342(2,26\ln x+0,87)$	$0,00046x^2$	$\frac{16967,61}{x^3}$	M_r <small>нсм/см</small>
1	30	900	3,401	54,2	0,414	18,853	- 5310
2	50	2500	3,912	61,5	1,150	6,787	- 2140
3	70	4900	4,248	66,3	2,254	3,463	-960
4	90	8100	4,500	69,7	3,726	2,094	-400
5	110	12100	4,700	72,9	5,566	1,402	-51
6	130	16900	4,847	74,9	7,774	1,004	-19
7	150	22500	5,011	77,3	10,350	0,754	0

Пример 4.3. Определить радиус кривизны ρ изогнутой срединной поверхности круглой пластины толщиной $h = 20$ мм (рис. 76,а), если температура t_2 на ее нижней поверхности изменилась от нуля до $+100$ °С, а температура t_1 на верхней поверхности – от нуля до $+10$ °С.

Определить наибольший изгибающий момент и напряжения, которые возникнут в пластине. Коэффициент линейного температурного расширения $\alpha = 0,000012$; $E = 2 \cdot 10^5$ Мн/м²; $\mu = 0,28$.

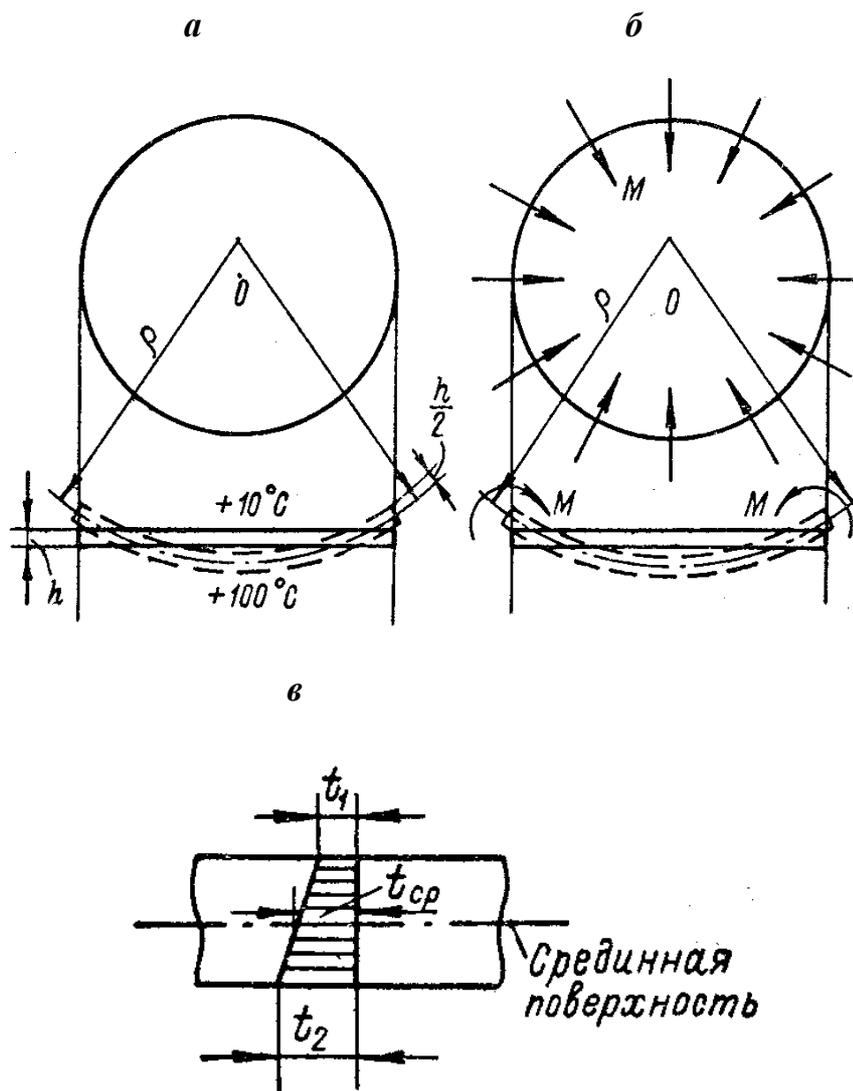


Рис. 76

Решение. Изменение температуры по толщине пластины (рис. 76,в)

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 100 - 10 = 90 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Относительная температурная деформация нижнего или верхнего волокна по формуле (4.44)

$$\varepsilon = \alpha \frac{\Delta t}{2} = 0,000012 \frac{90}{2} = 0,00054.$$

Кривизна изогнутой срединной поверхности по формуле (4.45)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha \Delta t}{h} = \frac{0,000012 \cdot 90}{0,02} = 54 \cdot 10^{-3} \text{ 1/м.}$$

Радиус кривизны

$$\rho = \frac{10^3}{54} = 18,52 \text{ м.}$$

Напряжения, возникающие в пластине при изменении температуры, равны напряжениям, которые возникнут, если приложить по контуру пластины радиальные изгибающие моменты (рис. 76,б), вычисляемые по формуле (4.46),

$$M_r = \frac{1 + \mu}{\rho} D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu)\rho} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0,02^3}{12(1 - 0,28)18,52} = 0,0101 \frac{\text{МН} \cdot \text{м}}{\text{м}}$$

Напряжение на поверхности

$$\sigma = \pm \frac{M_r}{W} = \pm \frac{M_r \cdot 6}{h^2} = \pm \frac{0,0101 \cdot 6}{0,02^2} = \pm 151,5 \text{ МН/м}^2.$$

Ту же величину напряжения σ можно получить по формуле (4.47).

Пример 4.4. Составить выражение для температурных напряжений в сплошной круглой свободной на контуре пластине, температура которой падает от центра к наружному контуру по квадратичному закону

$$t(x_1) = t_0 - (t_0 - t_b) \frac{x_1^2}{b^2}.$$

Определить наибольшее окружное нормальное напряжение при следующих данных:

$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МН/м}^2$, температура в центре $t_0 = +100 \text{ }^\circ\text{C}$, на наружном контуре ($x = b$) $t_b = +20 \text{ }^\circ\text{C}$.

Решение. Граничные условия: 1) $x = 0$, $t = t_0$; 2) $x = b$, $t = t_b$. Условия для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 следующие.

1. Перемещение u в центре пластины равно нулю. Следовательно, при $x = 0$ $u = 0$ и из формулы (4.51) $C_2 = 0$.

2. На наружном контуре радиальный момент $M_r = 0$, и, следовательно, радиальные напряжения σ_r отсутствуют. Поэтому при $x = b$ $\sigma_r = 0$ и из формулы (4.52)

$$-\frac{E\alpha}{b^2} \int_0^b t(x_1) x_1 dx_1 + \frac{EC_1}{2(1 - \mu)} = 0.$$

Если учесть в этом выражении заданный закон изменения температуры и произвести интегрирование, то

$$\frac{EC_1}{2(-\mu)} = \frac{E\alpha}{b^2} \int_0^b \left[t_0 - (t_0 - t_b) \frac{x_1^2}{b^2} \right] x_1 dx_1 = \frac{E\alpha}{b^2} \left[t_0 \frac{b^2}{2} - \frac{t_0 b^4}{b^2 \cdot 4} + \frac{t_b b^4}{b^2 \cdot 4} \right] = \frac{E\alpha}{4} (t_0 + t_b)$$

Поэтому по формулам (4.52) получаются следующие выражения для напряжений:

$$\sigma_r = -\frac{E\alpha}{4b^2} \left\{ (t_b - t_0)x^2 - [(t_0 + t_b)b^2 + 2b^2 t_0] \right\}$$

$$\sigma_T = -\frac{E\alpha}{4} \left[(t_0 - t_b) - 3 \frac{x^2}{b^2} (t_0 - t_b) \right]$$

или, в окончательном виде,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{E\alpha(t_0 - t_b)}{4} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \\ \sigma_T &= -\frac{E\alpha(t_0 - t_b)}{4} \left(1 - 3 \frac{x^2}{b^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.71)$$

На основании уравнений (4.71) можно заключить, что напряжения σ_r во всех точках сжимающие (отрицательные), так как выражение в скобках $(t_0 - t_b)$ положительно, а

$$\frac{x^2}{b^2} < 1$$

. Напряжение же σ_T может быть и положительным. Это наибольшее (положительное) напряжение σ_T получится при наибольшем отрицательном

значении $\left(1 - 3 \frac{x^2}{b^2} \right)$ при $x = b$:

$$(\sigma_T)_{\max} = \frac{E\alpha(t_0 - t_b)}{2} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 12 \cdot 10^{-6} (100 - 20)}{2} = 96,0 \text{ МН/М}^2.$$

Пример 4.5. Определить радиальный и окружной изгибающие моменты и, пользуясь третьей теорией прочности, расчетные напряжения на нижней поверхности в центре круглой стальной крышки, опертой по контуру и нагруженной равномерно распределенной внешней нагрузкой (рис. 77).

Определить величину прогиба в центре крышки. Наружный радиус пластины $r = 200$ мм, толщина $h = 10$ мм; интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 12$ н/см²; $E = 2 \cdot 10^7$ н/см²; $\mu = 0,3$.

Решение. По формулам (4.40) и (4.41), полагая в них $P = 0$, находим уравнения углов φ и прогибов w :

$$\varphi = -\frac{q}{16D}x^3 + \frac{C_1}{4}x^2 - C_2\frac{1}{x}; \quad (4.72)$$

$$w = \frac{q}{64D}x^4 - \frac{C_1}{4}x^2 - C_2 \ln x + C_3$$

Граничные условия для пластины с опертыми краями: 1) $x = 0, \varphi = 0$; 2) $x = r, w = 0$;

3) $x = r, M_r = 0$. Из первого условия находим $C_2\frac{1}{x} = 0$ или $C_2 = 0$. Из второго условия получаем уравнение с двумя неизвестными C_1 и C_3

$$\frac{qr^4}{64D} - C_1\frac{r^2}{4} + C_3 = 0 \quad (4.73)$$

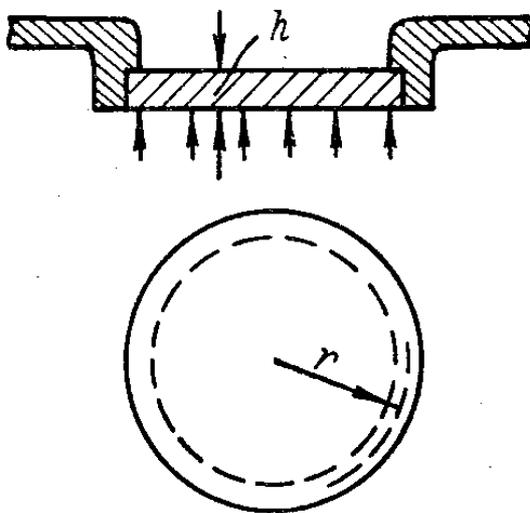


Рис. 77

Для использования третьего условия составим выражение радиального изгибающего момента [см. формулу (4.31)]

$$M_r = D\left(\frac{d\varphi}{dx} + \mu\frac{\varphi}{x}\right) \quad (4.74)$$

Дифференцируя (4.72) и учитывая, что $C_2 = 0$, находим

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{3}{16} \cdot \frac{q}{D} x^2 + \frac{C_1}{2}$$

Подставляя это выражение и выражение (4.72) в формулу (4.74), получаем

$$M_r = D \left[-\frac{qx^2}{16D} (3 + \mu) + \frac{C_1}{2} (1 + \mu) \right]$$

На основании третьего условия

$$-\frac{qr^2}{16D} (3 + \mu) + \frac{C_1}{2} (1 + \mu) = 0$$

Отсюда произвольная постоянная

$$C_1 = \frac{qr^2(3 + \mu)}{8D(1 + \mu)}$$

Подставляя это значение C_1 в уравнение (4.73), получаем произвольную постоянную

$$C_3 = C_1 \frac{r^2}{4} - \frac{qr^4}{64D} = \frac{qr^4}{64D} \cdot \frac{(5 + \mu)}{(1 + \mu)}$$

При найденных произвольных постоянных выражение для радиального изгибающего момента примет вид:

$$M_r = \frac{q(3 + \mu)}{16} (r^2 - x^2) \quad (4.75)$$

Окружной изгибающий момент [см. формулу (4.31)] выразится так:

$$\begin{aligned} M_T &= D \left(\frac{\varphi}{x} + \mu \frac{d\varphi}{dx} \right) = D \left[-\frac{q}{16D} x^2 + \frac{C_1}{2} - \frac{3}{16} \mu \frac{q}{D} x^2 + \mu \frac{C_1}{2} \right] = \\ &= -\frac{qx^2}{16} (3\mu + 1) + \frac{qr^2}{16} (3 + \mu). \end{aligned} \quad (4.76)$$

Из выражений (4.75) и (4.76) видно, что наибольшие значения радиального и окружного изгибающих моментов M_r и M_T получаются при $x = 0$, т. е. в центре пластины.

$$M_{\max} = (M_r)_{\max} = (M_T)_{\max} = \frac{qr^2}{16} (3 + \mu) = \frac{12 \cdot 20^2}{16} (3 + 0,3) = 990 \frac{\text{Н} \cdot \text{см}}{\text{см}}$$

Соответствующие напряжения на нижней поверхности пластины растягивающие:

$$(\sigma_r)_{\max} = (\sigma_T)_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot 6}{h^2} = \frac{990 \cdot 6}{1^2} = 5940 \text{ н/см}^2$$

Главные напряжения $\sigma_1 = \sigma_2 = 5940 \text{ н/см}^2$, $\sigma_3 = 0$, поэтому, на основании третьей теории прочности, расчетное напряжение

$$\sigma_{\text{расч}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 5940 - 0 = 5940 \text{ н/см}^2$$