

И. М. БАБАКОВ

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших технических учебных заведений*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

50999

Иван Михайлович Бабаков
Теория колебаний

М., 1968 г., 560 стр., с илл.

Редактор И. П. Рондлевская

р. В. Бруско

Корректор О. А. Бутусова

Подписано в печать 2/V 1968 г. Бумага 60 × 90^{1/16}. Физ. печ. л. 36.
Уч.-изд. л. 34,28. Тираж 30 000 экз. Цена книги 1 р. 30 к. Заказ № 1.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы,
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени
Владимира Галактионовича Галактионова при Совете Министров СССР,
г. Ленинград, Гатчинская, 26.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Из предисловия к первому изданию	8
Предисловие ко второму изданию	10

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Глава I. Введение	11
А. Некоторые сведения из аналитической механики	11
1. Связи механической системы	11
2. Виртуальные перемещения	12
3. Независимые или обобщенные координаты	14
4. Обобщенные силы	14
5. Уравнения Лагранжа	17
6. Циклические координаты и уравнения Рауса	20
7. Принцип Остроградского — Гамильтона	26
Б. Элементы теории матриц	29
8. Определения	29
9. Обратная матрица	33
10. Собственные значения матрицы	34
11. Квадратичные формы	39
В. Некоторые сведения из операционного исчисления	42
12. Определение «изображения» функции	42
13. Изображения некоторых функций и действий над ними	43
14. Простейшие правила построения начальной функции по дан- ному изображению	51
15. Начальные функции целых положительных степеней опера- тора p	55
Глава II. Системы с одной степенью свободы	59
1. Системы с одной степенью свободы	59
2. Малые свободные колебания системы около устойчивого рав- новесного состояния	60
3. Уравнение малых свободных колебаний линейной системы	62
4. Вынужденные колебания линейной системы с одной степенью свободы	69
5. Разложение возмущающей силы в ряд Фурье	84

III. Малые колебания систем с несколькими степенями свободы	89
1. Системы с конечным числом степеней свободы	89
2. Кинетическая и потенциальная энергия малых свободных колебаний консервативной системы	92
3. Уравнения малых колебаний системы около состояния устойчивого равновесия	95
4. Уравнения крутильных колебаний приведенного вала с пятью дисками	99
5. Уравнения поперечных колебаний балки, шарнирно опертой по концам, с четырьмя сосредоточенными массами	104
6. Нормальные координаты и главные колебания	107
7. Уравнение частот, или вековое уравнение	110
8. Теорема о положительности и разделении корней векового уравнения	112
9. Собственные формы колебаний и их свойства	116
10. Общий интеграл дифференциальных уравнений малых колебаний и теорема о разложении	122
11. Разложения коэффициентов уравнений малых колебаний по собственным формам	124
12. Свободные колебания с сопротивлением	129
13. Теоремы об изменении частот системы при изменении связей	133
14. Функция Рэлея	135
15. Теоремы об экстремальных свойствах собственных частот	138
16. Теоремы о влиянии на частоты измененной масс и жесткостей системы	141
17. Уравнения вынужденных колебаний	143
18. Гармонические коэффициенты влияния	147
19. Вынужденные колебания систем с внутренним неупругим сопротивлением	153
Глава IV. Приближенные методы определения собственных частот систем с конечным числом степеней свободы	157
<i>A. Основная частота</i>	<i>157</i>
1. Метод последовательных приближений формами колебаний	157
2. Теоремы о границах основной частоты	160
3. Приведение матрицы коэффициентов уравнений малых колебаний к матрице с положительными элементами	164
4. Графическая форма метода последовательных приближений формами колебаний (метод Стодола)	169
5. Метод Рэлея	174
6. Графическая форма метода Рэлея	176
<i>B. Высшие частоты</i>	<i>178</i>
7. Общие замечания	178
8. Метод последовательных приближений формами колебаний (метод итераций)	178
9. Метод исключения первой формы	183
10. Метод гармонических коэффициентов влияния	186
Глава V. Явления резонанса в машинах	191
1. Критические числа оборотов прямых валов	191
2. Гироскопический момент	194

3. Уравнения для критической скорости вала со многими дисками	197
4. Метод начальных параметров	203
5. Крутильные колебания коленчатых валов	213
6. Приведение постоянных масс	214
7. Приведение масс кривошипно-шатунного механизма	216
8. Вычисление податливостей участков вала	217
9. Приведенная схема	219
10. Матричная форма таблиц Толле (метод начальных параметров)	223
11. Гармонические составляющие вращающего момента	228

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Глава VI. Продольные и крутильные колебания прямых стержней	233
1. Уравнения продольных и крутильных колебаний прямого стержня	233
2. Свободные колебания стержня с линейным сопротивлением	242
3. Уравнения форм колебаний с правой частью	243
4. Метод начальных параметров в матричной форме	250
Глава VII. Поперечные колебания прямых стержней	254
1. Основные допущения и уравнение поперечных колебаний прямого стержня	254
2. Краевые и начальные условия	256
3. Собственные формы колебаний стержня и функции, их определяющие	257
4. Основные задачи	260
5. Уравнения форм колебаний с правой частью	271
6. Гармонические коэффициенты влияния	275
7. Критические числа оборотов прямого вала с дисками	281
8. Метод начальных параметров в матричной форме	284
9. Поперечные колебания прямых стержней с внутренним неупругим сопротивлением	286
Глава VIII. Некоторые приближенные методы расчета колебаний прямых стержней переменного сечения	294
1. Вариационные методы	294
2. Метод Ритца	297
3. Метод Рэлея	301
4. Метод Б. Г. Галеркина	312
5. Об оценке погрешности расчета основной частоты	319
6. Метод последовательных приближений формами колебаний	322
Глава IX. Поперечные колебания пластинок	329
1. Основные допущения и формулы	329
2. Потенциальная и кинетическая энергия пластинки	331
3. Вариационное уравнение поперечных колебаний пластинки	332
4. Дифференциальное уравнение форм поперечных колебаний пластинки и краевые условия	336
5. Некоторые свойства собственных форм колебаний пластинки	338

6. Приближенные методы расчета собственных форм и частот поперечных колебаний пластинки (метод Ритца и Галеркина)	342
7. Уравнения поперечных колебаний круглой пластинки	350
8. Формы колебаний однородной круглой пластинки	351
9. Аксиальные колебания дисков паровых турбин	359
10. Экспериментальные исследования аксиальных колебаний диска по Кэмпбеллу	361
11. Критическое число оборотов диска	363

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ
И НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Глава X. Введение в общую теорию устойчивости движения	365
1. Предварительные замечания	365
2. Определение устойчивости равновесного состояния системы	368
3. Функции Ляпунова	370
4. О функциях, обладающих бесконечно малым высшим пределом	376
5. Геометрическая интерпретация свойств функций Ляпунова первого рода двух переменных	377
6. Теорема об устойчивости равновесного состояния системы	378
7. Теорема Лагранжа — Дирихле об устойчивости равновесия консервативной системы	380
8. Определение устойчивости движения	384
9. Уравнения возмущенного движения в относительных координатах	387
10. Функции Ляпунова второго рода	388
11. Теорема Ляпунова об устойчивости неустановившегося движения	393
12. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости	395
13. Об устойчивости стационарного движения системы с циклическими координатами (теорема Рауса)	399
14. Теорема Ляпунова о неустойчивости движения	403
Глава XI. Об устойчивости по первому приближению	405
1. Предварительные замечания	405
2. Каноническая форма уравнений первого приближения	406
3. Случай кратных корней характеристического уравнения	408
4. Система с одной степенью свободы	412
5. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению	420
6. Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению	425
7. Критерии отрицательности вещественных частей корней характеристического уравнения	429
8. Критерий Рауса	430
9. Критерий Гурвица	435
10. Влияние возмущающих диссипативных и гироскопических сил на устойчивость равновесия консервативной системы	437
Глава XII. Простейшие нелинейные системы	445
1. Нелинейные системы	445
2. Метод изоклин	449
3. Нелинейные консервативные системы с одной степенью свободы	451

4. Периодические движения нелинейных консервативных систем	458
5. Формулы прямой линеаризации	468
6. Диссипативные системы	470
7. Метод Льенара построения фазовых траекторий	472
8. Автоколебательные системы	477
9. Метод Ван-дер-Поля	485
10. Устойчивость предельных циклов	493
Глава XIII. Некоторые общие методы нелинейной механики	500
1. Предварительные замечания	500
2. Теорема Пуанкаре (случай вынужденных колебаний)	501
3. Теорема Пуанкаре (случай свободных колебаний автономных квазилинейных систем)	507
4. Метод А. Н. Крылова	513
5. Метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова	517
6. Системы А. М. Ляпунова	520
7. Вынужденные колебания нелинейных систем (метод осреднения)	524
8. Вынужденные колебания нелинейных систем (метод Б. Г. Галеркина)	526
9. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами и задача об устойчивости периодических решений нелинейных систем	534
10. Устойчивость периодических решений	537
ПРИЛОЖЕНИЕ	
Таблица I. Значения параметров λ_i и коэффициентов A_i , B_i и C_i балочных функций	548
Таблицы II и III. Численные значения некоторых интегралов, встречающихся в расчетах	549
Таблица IV. Некоторые тригонометрические формулы, встречающиеся в расчетах	551
Именной указатель	552
Предметный указатель	554

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга воспроизводит с некоторыми дополнениями лекции автора по специальным курсам теории колебаний и устойчивости движения, которые он читал в течение многих лет студентам отделения «динамика и прочность машин» инженерно-физического факультета Харьковского машиностроительного, а затем Харьковского политехнического института имени В. И. Ленина. Она была задумана как учебное пособие по теории колебаний для студентов указанной специальности, чем и определился в основном первоначальный отбор материала и общий характер его изложения. Внешенные в процессе работы над книгой дополнения значительно расширили ее содержание, так что некоторые разделы в их окончательном виде вышли за пределы программного учебного материала. Но и в таком расширенном объеме она никак не может претендовать на сколько-либо исчерпывающее изложение даже тех немногих вопросов теории, которые нашли в ней место. Теория колебаний в настоящее время представляет столь обширную и разностороннюю отрасль науки и техники, что уже при изложении основных ее положений приходится делать среди них определенный выбор, ограничиваться рассмотрением только некоторых, опуская многие другие не менее важные и интересные.

Книга состоит из трех частей. В первой излагается теория колебаний упрощенных («приведенных») систем с конечным числом степеней свободы. Вторая часть посвящена изложению основ теории колебаний систем с распределенными параметрами (систем с бесконечным числом степеней свободы). Третья часть содержит элементарные сведения из учения об устойчивости движения и теории нелинейных колебаний.

Выдвижение на первый план теории колебаний систем с конечным числом степеней свободы и несколько расширенный объем этого раздела объясняются тем значением, какое имеет расчет упрощенных (приведенных) систем в практических вибрационных расчетах. Несмотря на неточность результатов, получаемых в расчетах приведенных систем, теория колебаний линейных систем с конечным числом

степеней свободы сохраняет и в настоящее время значение основного раздела общей теории колебаний.

Колебания систем с распределенными параметрами во второй части курса трактуются преимущественно в духе классических методов Рэлея и А. Н. Крылова. Попытка добиться методического единства приемов вибрационных расчетов линейных механических систем выразилась в книге главным образом в систематическом использовании методов А. Н. Крылова: метода разложения по собственным формам колебаний и метода, основанного на применении универсальной формулы упругой линии.

Операционное исчисление используется в книге не как систематически применяемый метод, а только как весьма удобное вспомогательное средство при составлении общих решений некоторых уравнений (например, универсальной формулы упругой линии).

В третьей части дано элементарное изложение «второго метода» А. М. Ляпунова исследования устойчивости движения и приведены некоторые сведения о нелинейных колебаниях (главы XVI и XVII).

Предполагается, что читатель знаком с основами высшей математики и теоретической механики в объеме обычных вузовских программ для машиностроительных специальностей.

Теоретические обоснования и доказательства «сходимости» некоторых излагаемых в книге методов по возможности упрощены, а там, где подобные упрощения могли бы дать неправильное представление о сущности проблемы или о трудностях ее решения, эти доказательства просто опущены со ссылками на первоисточник или заменены более или менее подробным описанием вытекающих из их содержания приемов решения проблемы.

И. Бабаков

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ
СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание несколько сокращено по сравнению с первым. В нем опущены разделы и параграфы, содержавшие изложение некоторых теоретических положений, не получивших в книге дальнейшего развития и приложений (например, раздел об интегральных уравнениях малых колебаний). Необходимые сведения из аналитической механики, матричного и операционного исчисления, которые в первом издании давались по ходу изложения курса в различных главах, во втором издании сконцентрированы в первой вступительной главе. Это дало возможность более компактно расположить материал по отдельным главам, придав последним большую законченность и некоторую относительную независимость.

Существенной переработке подверглись разделы, относящиеся к приближенным методам расчета на колебания систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы, с широким использованием вариационных методов. В основу практических приемов вибрационных расчетов стержней и валов с дискретным и непрерывным распределением масс и жесткостей положены методы начальных параметров в матричной форме. Применение матричных алгоритмов в сочетании с подходящим выбором масштабов для сил (моментов) и длин делают необходимые вычисления не только весьма удобными при программировании для электронных вычислительных машин, но и вообще значительно упрощают эти вычисления, позволяя даже в сравнительно сложных задачах выполнять их с помощью элементарных счетных устройств (арифмометр, счетная линейка). Состав примеров несколько обновлен.

Числовые расчеты заново проверены и в тексте страниц, оставшихся без особых редакционных изменений, исправлены замеченные опечатки.

Автор считает своим долгом принести глубокую благодарность профессорам Н. В. Бутенину и И. М. Глазману и редактору В. В. Кременуло, просмотревшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний и рекомендаций, которые учтены автором при переработке книги.

И. Бабаков

ГЛАВА I
ВВЕДЕНИЕ

А. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

1. Связи механической системы. Связями механической системы называются ограничения, стесняющие движение системы и осуществляемые какими-либо другими материальными телами. Обычно это различного рода закрепления системы: подшипники для валов поршневых и роторных машин, шарнирные опоры, жесткие или упругие заделки концов стержней и балок, опорные поверхности, по которым должна перемещаться или на которых должна оставаться в покое система, и т. п. В дальнейшем предполагается, что, каковы бы ни были устройства, осуществляющие связи, их действия на систему выражаются силами, приложенными к системе и определенным образом направленными. Эти силы называются *реакциями связей*. Предполагается также, что связи могут быть аналитически представлены уравнениями, которым должны удовлетворять координаты точек системы и производные от координат по времени. При этом связи, представленные уравнениями¹⁾

$$f_k(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N; t) = 0 \quad (1.1) \\ (k = 1, 2, \dots, m; m < 3N),$$

не содержащими производных координат по времени (N — число точек системы; x_i, y_i, z_i — их координаты), или уравнениями, содержащими производные, но интегрируемыми и приводящимися к виду (1.1), называются *голономными связями*. Такие связи ограничивают главным образом выбор возможных положений системы. Связи, представленные уравнениями, содержащими производные координат и неинтегрируемыми, называются *неголономными*. Неголономные связи,

¹⁾ Такие связи называются иногда «удерживающими» или «двусторонними» связями. Связи «неудерживающие» (или «односторонние»), выражающиеся неравенствами, дальше не рассматриваются.

не налагая, как правило, ограничений на выбор положений системы, большей частью вынуждают последнюю двигаться из данного положения в некотором определенном направлении, т. е. ограничивают выбор величины и направления скоростей точек системы¹⁾.

В задачах механики реакции связей являются обычно неизвестными. Задаются или описываются лишь способы осуществления связей. Полное определение реакций связей, т. е. определение их точек приложения, направления и величины, производится с помощью некоторых допущений из условий равновесия или уравнений движения системы, причем в последнем случае — после того, как будет найдено движение системы. Реакции, полученные из условий равновесия с учетом других приложенных к системе сил²⁾, называются *статическими реакциями*; реакции связей во время движения системы — реакции, определяемые из уравнений движения, — называются *динамическими реакциями*. Определение динамических реакций, возникающих в колеблющихся системах, и связанные с этим расчеты вибрационной прочности деталей машин — одна из важнейших прикладных задач учения о колебаниях.

Когда в уравнения связей (1.1) время явно не входит, связи называются *стационарными* (неизменяемыми) или *склерономными*. В противном случае их называют *нестационарными* или *реономными*.

2. Виртуальные перемещения. *Виртуальными перемещениями* называются воображаемые бесконечно малые перемещения системы из одного ее положения в данный момент времени в другое положение, *допускаемое связями в тот же момент времени*, — перемещения *без освобождения от связей*.

Виртуальным перемещениям соответствуют изменения координат, происходящие в результате изменения формы зависимости их от времени, в частности от изменения параметров, определяющих эту зависимость, *при фиксированном t* . Такие изменения координат называются *изохронными вариациями*³⁾ координат и обозначаются через δx , δy , δz в отличие от обозначения дифференциалов dx , dy , dz . Последние тоже бесконечно малые изменения координат, но изменения, происходящие за бесконечно малый промежуток времени dt , под действием приложенных к системе сил. Операции дифференцирования и варьирования являются, таким образом, операциями независимыми одна от другой. Поэтому имеет место равенство

$$\delta(df) = d(\delta f), \quad (1.2)$$

¹⁾ В дальнейшем рассматриваются только так называемые голономные системы, т. е. системы, подчиненные голономным связям.

²⁾ Все другие силы, приложенные к системе, кроме реакций связей, называются дальше *заданными* или *активными* силами.

³⁾ Здесь «изохронные» — относящиеся к одному и тому же моменту времени.

где f — какая-либо непрерывная функция координат, скоростей и времени.

Различие между дифференцированием и варьированием обнаруживается также при вычислении бесконечно малых изменений функции $f(x, y, z, t)$, с одной стороны, вследствие бесконечно малых приращений координат в действительном движении за промежуток времени dt , с другой — вследствие вариаций координат при виртуальных перемещениях системы, относящихся к одному и тому же моменту времени. В первом случае с точностью до бесконечно малых второго порядка

$$\begin{aligned} f(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - f(x, y, z, t) = \\ = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = df(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

во втором

$$\begin{aligned} f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) - f(x, y, z, t) = \\ = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = \delta f(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Изменение функции f от вариаций координат, т. е. $\delta f(x, y, z, t)$, называется *вариацией функции f* . Из сопоставления формул (1.3) и (1.4) следует, что вариация функции $f(x, y, z, t)$ вычисляется по тому же правилу, что и ее дифференциал при фиксированном значении аргумента t .

Связи называются *идеальными*, если сумма элементарных работ их реакций R_i на всех виртуальных перемещениях системы равна нулю, т. е. если

$$\sum_{i=1}^N R_i \delta r_i = 0, \quad (1.5)$$

где δr_i — вариации радиусов-векторов точек приложения R_i ; или в проекциях реакций R_{ix} , R_{iy} , R_{iz} и перемещений δx_i , δy_i , δz_i на оси прямоугольной системы координат:

$$\sum_{i=1}^N (R_{ix} \delta x_i + R_{iy} \delta y_i + R_{iz} \delta z_i) = 0. \quad (1.6)$$

Идеальными связями будут, например, абсолютно гладкие (без трения) опорные поверхности; нерастяжимые, несжимаемые и несгибаемые стержни; нерастяжимые абсолютно гибкие нити и т. п. Большей частью это все те тела и все те связи, упрощенные (идеализированные) представления о которых (как «абсолютно» гладких, «абсолютно» твердых и т. д.) входят в состав основных допущений теоретической механики в первоначальных ее исследованиях, представляющих первое приближение к действительности.

3. **Независимые или обобщенные координаты.** Предположим, что система из N частиц (точек), $3N$ координат которых определяют ее положение в момент t , подчинена m ($m < 3N$) голономным связям:

$$f_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, m). \quad (1.7)$$

В этом случае m координат могут быть выражены через остальные $3N - m$ независимых координат, которым можно давать любые (достаточно малые) изменения без нарушения связей. Вариации этих независимых координат однозначно определяют вариации остальных зависимых координат. Число независимых координат системы, подчиненной только голономным связям (1.7), определяет так называемое число степеней свободы системы.

Вместо декартовых координат в качестве «независимых координат» выбирают обычно другие, связанные с ними величины, иногда другой физической природы и другой размерности. Эти независимые величины называются обобщенными координатами. Далее они обозначаются через q_1, q_2, \dots, q_n , где $n = 3N - m$. Число обобщенных координат должно быть равно числу независимых величин, однозначно определяющих положение системы, и через них должны выражаться все декартовы координаты системы в форме, например, уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(t, q_1, \dots, q_n), \\ y_i &= y_i(t, q_1, \dots, q_n), \\ z_i &= z_i(t, q_1, \dots, q_n) \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, N). \quad (1.8)$$

Эти уравнения являются уравнениями тех же связей (1.7), представленными в параметрической форме.

4. **Обобщенные силы.** К понятию обобщенных сил мы приходим, преобразуя к обобщенным координатам выражение виртуальной работы заданных (активных) сил F_i , т. е. сумму

$$\sum_{i=1}^N F_i \delta r_i = \sum_{i=1}^N (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i), \quad (1.9)$$

где X_i, Y_i, Z_i — проекции F_i на оси координат. Из уравнений (1.8) находим

$$\left. \begin{aligned} \delta x_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k, \\ \delta y_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k, \\ \delta z_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Подставив эти выражения в (1.9), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) &= \\ &= \sum_{i=1}^N \left[X_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k + Y_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k + Z_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \delta q_k \left[\sum_{i=1}^N \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \right]. \end{aligned}$$

Коэффициент при δq_k в последнем выражении, т. е. сумма

$$\sum_{i=1}^N \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = Q_k, \quad (1.11)$$

и есть обобщенная сила, соответствующая координате q_k ¹⁾.

В изложенном определении обобщенной силы содержится указание и на другой способ ее вычисления. Чтобы получить обобщенную силу Q_k , соответствующую координате q_k , даем последней (мысленно) бесконечно малое изменение и на перемещении системы, соответствующем этому изменению δq_k , при фиксированных значениях других координат, вычисляем работу всех активных сил, приложенных к системе. Коэффициент при δq_k в выражении этой работы и будет обобщенной силой, соответствующей координате q_k .

Еще один способ вычисления обобщенных сил относится к силам стационарного потенциального силового поля. Стационарным потенциальным силовым полем называется часть пространства, в каждой точке которого на находящуюся в ней (или на проходящую через нее) материальную частицу системы действует сила, зависящая только от положения этой точки, причем работа силы не зависит от пути, по которому перемещается точка приложения силы, а определяется начальным и конечным положениями точки. Потенциальное силовое поле можно еще определить как поле сил, элементарная работа которых представляет точный дифференциал некоторой функции Π от координат системы. Для одной силы это определение выражается равенством

$$X dx + Y dy + Z dz = -d\Pi, \quad (1.12)$$

¹⁾ Размерность обобщенной силы не всегда совпадает с размерностью силы ($\kappa\Gamma$). Обобщенная сила часто имеет размерность момента ($\kappa\Gamma\text{м}$) или размерность какой-либо другой механической или геометрической величины.

где знак минус означает, что работа силы поля F связана с убыванием функции Π . В этом случае, действительно, работа силы F на любом перемещении не зависит от пути, по какому движется система, а определяется значениями Π в начальном и конечном положениях системы. Обозначив через (A) и (B) начальное и конечное положения точки приложения силы F , из равенства (1.12) находим

$$\int_{(A)}^{(B)} (X dx + Y dy + Z dz) = \Pi_A - \Pi_B, \quad (1.13)$$

где Π_A и Π_B — значения функции Π соответственно в положениях (A) и (B).

Равенством (1.12) функция Π определена до произвольного постоянного слагаемого. Отсюда следует, что начало отсчета Π можно выбрать в любом месте поля, в частности, например, считать, что начало отсчета Π совпадает с началом отсчета координат и, таким образом, положить $\Pi(0, 0, \dots, 0) = 0$.

После того как выбрано начало отсчета, каждому положению системы в поле будет однозначно соответствовать определенное значение Π . Если в равенстве (1.13) положение (B) совпадает с началом отсчета Π , то

$$\int_{(A)}^{(B)} (X dx + Y dy + Z dz) = \Pi_A. \quad (1.14)$$

Таким образом, значение Π в каком-либо положении (A) системы равно работе силы поля на перемещении (по любому пути) из этого положения до нулевого (т. е. до выбранного начала отсчета). Функция Π с указанными свойствами определяет так называемую потенциальную энергию системы в положении (A). При фиксированном начале отсчета потенциальная энергия системы определяется только ее положением в силовом поле. Потенциальная энергия является, как иногда говорят, энергией положения системы в силовом поле.

Из равенства (1.12) следует

$$X dx + Y dy + Z dz = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx - \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy - \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz.$$

Поэтому

$$X = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (1.15)$$

С помощью последних равенств мы получаем следующую формулу для вычисления обобщенных сил потенциального силового поля:

$$Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1.16)$$

где потенциальная энергия Π предполагается выраженной через обобщенные координаты.

Согласно принципу виртуальных перемещений необходимым и достаточным условием *равновесного состояния или покоя*¹⁾ системы²⁾, определяемого постоянными значениями координат и нулевыми значениями скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$, является равенство нулю суммы элементарных работ заданных сил на всех виртуальных перемещениях системы из этого состояния. Преобразованное к обобщенным силам, это условие выражается равенством

$$\sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k = 0,$$

или, так как δq_k — независимые величины:

$$Q_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (1.17)$$

Для консервативной системы условия (1.17) имеют вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (1.18)$$

Последние равенства свидетельствуют, что в состоянии равновесия потенциальная энергия имеет стационарное значение.

5. Уравнения Лагранжа. Теоретической основой большей части исследований колебаний голономных систем с конечным числом степеней свободы служат уравнения Лагранжа в обобщенных координатах. Составленные в предположении, что связи, наложенные на систему, идеальные, эти уравнения не содержат реакций связей, и входящие в них величины, определяющие движение системы (обобщенные координаты и их производные по времени), непосредственно связаны с заданными (обобщенными) силами.

Обозначим обобщенные координаты рассматриваемой системы с n степенями свободы через q_1, q_2, \dots, q_n . Пусть связи системы представлены уравнениями (1.8). Обозначим через m_i массы частиц (точек) системы; приложенные к ним заданные силы — через F_i ; их проекции на оси координат — через X_i, Y_i, Z_i ; проекции на те же оси реакций связей R_i — через R_{ix}, R_{iy}, R_{iz} . Из выражений производных по

¹⁾ Здесь и в дальнейшем различается *положение* системы в некоторый момент времени, определяемое соответствующими значениями координат q_k , от *состояния движения* ее в тот же момент, определяемого значениями в этот момент координат q_k и скоростей \dot{q}_k (например, положение равновесия от состояния равновесия, или покоя). В связи с этим одновременные значения q_k и \dot{q}_k называются иногда «координатами состояния» системы.

²⁾ Подчиненной идеальным связям.

t от координат x_i, y_i, z_i (1.8)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \\ \dot{y}_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial y_i}{\partial t}, \\ \dot{z}_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial z_i}{\partial t} \end{aligned} \right\} (i=1, 2, \dots, N) \quad (1.19)$$

следует, что

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial z_i}{\partial q_k}.$$

С помощью этих формул можно представить производную от кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (1.20)$$

по обобщенной скорости \dot{q}_k следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right).$$

Взяв от обеих частей последнего равенства производную по t , получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_k} \right). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Принимая во внимание уравнения движения

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + R_{ix}, \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i + R_{iy}, \quad m_i \ddot{z}_i = Z_i + R_{iz},$$

равенство (1.21) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} &= \sum_{i=1}^N \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^N \left(R_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + R_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + R_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right). \end{aligned}$$

Первая сумма справа — обобщенная активная сила Q_k (1.11), соответствующая координате q_k , вторая — обобщенная реакция связей, равная нулю в силу того, что связи, наложенные на систему, по предположению, идеальные.

Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (1.22)$$

Полученные равенства и представляют уравнения Лагранжа в обобщенных координатах.

Для консервативной системы с потенциальной энергией Π уравнения (1.22) напишутся следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n); \quad (1.23)$$

или, если ввести так называемую функцию Лагранжа $L = T - \Pi$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (1.24)$$

Перед подстановкой в уравнения Лагранжа функции T, Q, Π, L должны быть выражены в обобщенных координатах.

Если связи, наложенные на систему, стационарные, то в формулах (1.19) частные производные от координат x_i, y_i, z_i по времени отсутствуют и кинетическая энергия T будет однородной квадратичной формой обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$. В этом случае полная механическая энергия системы сохраняет свою величину во все время движения¹⁾. Для доказательства умножим каждое уравнение (1.23) на соответствующую (по индексу) производную \dot{q}_k и просуммируем по k :

$$\sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_k} \dot{q}_k = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \dot{q}_k. \quad (1.25)$$

Первую сумму можно заменить разностью

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k$$

и затем по теореме Эйлера об однородных функциях²⁾ переписать так:

$$\sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k = \frac{d}{dt} (2T) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k$$

¹⁾ В связи с этим силы потенциального поля называются консервативными силами.

²⁾ Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 1, Гостехиздат, 1951, стр. 367.

после чего из выражения (1.25) получаем

$$\frac{d}{dt}(2T) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \dot{q}_k = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = 0$$

и

$$T + \Pi = \text{const.} \quad (1.26)$$

Равенство (1.26) представляет первый интеграл уравнений движения (1.23) — именно интеграл сохранения полной механической энергии.

6. Циклические координаты и уравнения Рауса. Циклическими координатами называются координаты, не входящие явно в выражение функции Лагранжа $L = T - \Pi$. Такими координатами будут, например, координаты, изменения которых при сохранении значений остальных координат соответствуют перемещениям системы, не изменяющим относительного распределения ее масс, например, как это имеет место в твердом теле, обладающем полной материальной симметрией относительно некоторой оси и вращающемся вокруг этой оси. Угол поворота такого тела будет его циклической координатой.

Каждой циклической координате соответствует первый интеграл уравнений Лагранжа, называемый *циклическим интегралом*.

Пусть рассматриваемая система с n степенями свободы имеет m ($m < n$) циклических координат q_k ($k = 1, 2, \dots, m$) и $n - m$ нециклических q_α ($\alpha = m + 1, \dots, n$). Из уравнений Лагранжа, соответствующих циклическим координатам

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

находим m циклических первых интегралов, соответствующих координатам q_k :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \beta_k \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (1.27)$$

где β_k — постоянные, определяемые из начальных условий.

Если из равенств (1.27), рассматривая их как уравнения относительно циклических скоростей, можно найти последние как функции нециклических координат и скоростей и постоянных β_k :

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k(q_{m+1}, \dots, q_n, \dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n, \beta_1, \dots, \beta_m) \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (1.28)$$

то в таком случае из оставшихся $n - m$ уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = m + 1, \dots, n) \quad (1.29)$$

можно исключить все циклические скорости и привести таким образом решение задачи к интегрированию $n - m$ уравнений, содержащих только нециклические координаты и скорости и постоянные β_k . Можно показать, что эти уравнения будут иметь форму уравнений Лагранжа, но вместо функции Лагранжа в них будет фигурировать другая функция — так называемая *функция Рауса*¹⁾

$$R = L - \sum_{k=1}^m \beta_k \dot{q}_k. \quad (1.30)$$

В самом деле, найдем производные от R по нециклическим координатам и скоростям, предполагая, что в выражение для R (1.30) подставлены \dot{q}_k из (1.28):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} &= \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_\alpha} - \sum_{k=1}^m \beta_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_\alpha}, \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_\alpha} - \sum_{k=1}^m \beta_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (\alpha = m + 1, \dots, n),$$

откуда

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial R}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (\alpha = m + 1, \dots, n). \quad (1.31)$$

Теперь уравнения (1.29) переписутся следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = m + 1, \dots, n). \quad (1.32)$$

Эти уравнения называются уравнениями Рауса с «игнорированными» (т. е. с исключенными) циклическими координатами.

После того как из уравнений (1.32) будут найдены q_{m+1}, \dots, q_n как функции t и $2(n - m)$ постоянных, из формул

$$\dot{q}_k = - \frac{\partial R}{\partial \beta_k} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

найдутся циклические координаты q_1, \dots, q_m с добавочными m постоянными.

Уравнения Рауса находят применение в исследованиях стационарных движений систем с циклическими координатами (в частности,

¹⁾ Routh E. J., Elementary Rigid Dynamics, 1897, гл. VIII.

в исследованиях устойчивости движения таких систем). При этом под стационарным движением системы с циклическими координатами разумеется движение, в котором нециклические координаты и циклические скорости сохраняют постоянные значения.

Пример 1. Стационарные движения однодискового гибкого вала.

В качестве примера стационарного движения системы с циклическими координатами рассмотрим так называемое «обращение»¹⁾ вертикального гибкого вала с насаженным на него посередине, между опорными подшипниками, диском (рис. 1, а). При изгибе вала в вертикальной плоскости диск перемещается в горизонтальной плоскости, вынесенной на рис. 1, б в плоскость чертежа.

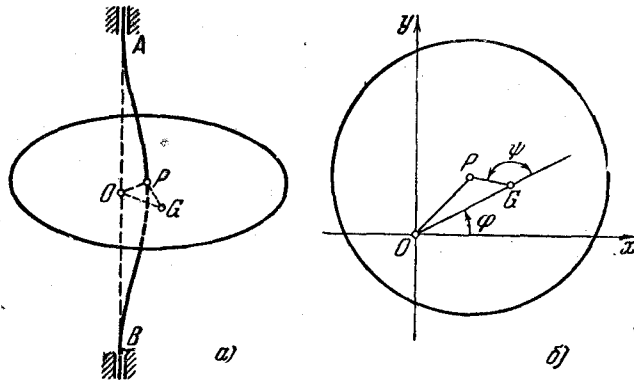


Рис. 1.

Пусть m — масса диска; $I = m\rho^2$ — момент инерции относительно центра тяжести G (ρ — радиус инерции); $e = PG$ — эксцентриситет (P — место крепления диска на валу); O — точка пересечения линии подшипников с диском (на рис. 1, б эта точка служит началом координат неподвижной системы Oxy).

Кинетическая энергия системы в переменных $r = OG$, φ , ψ , если пренебречь массой вала, равна

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} m \rho^2 (\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2.$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{1}{2} c \cdot OP^2 = \frac{m\mu}{2} (r^2 + e^2 + 2re \cos \psi),$$

где $c = m\mu$ — жесткость вала на прогиб. Функция Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} m \rho^2 (\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 - \frac{1}{2} m\mu (r^2 + e^2 + 2re \cos \psi).$$

¹⁾ Под «обращением» вала здесь разумеется вращение изогнутой оси APB вала вокруг линии подшипников AOB . «Обращение» следует отличать от вращения вала, передающего вращающий момент на рабочий орган.

Циклической координатой оказывается здесь угол φ (угол поворота вала относительно оси O). Этой координате соответствует циклический интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} + m \rho^2 (\dot{\varphi} + \dot{\psi}) = \beta = m\gamma,$$

из которого

$$\dot{\varphi} = \frac{\gamma - \rho^2 \dot{\psi}}{\rho^2 + r^2}. \quad (1.33)$$

Функция Рауса

$$R = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi}$$

после исключения циклической скорости $\dot{\varphi}$ имеет вид

$$R = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 - \frac{\gamma^2}{\rho^2 + r^2} + \frac{\rho^2 r^2}{\rho^2 + r^2} \dot{\psi}^2 + \frac{2\gamma\rho^2}{\rho^2 + r^2} \dot{\psi} - \mu (r^2 + e^2 + 2re \cos \psi) \right]. \quad (1.34)$$

В стационарном движении системы r и ψ сохраняют постоянные значения и $\dot{r} = \dot{\psi} = 0$. Поэтому в уравнениях Рауса

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial R}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial R}{\partial \psi} = 0$$

первые слагаемые равны нулю. Положив в производных $\frac{\partial R}{\partial r}$ и $\frac{\partial R}{\partial \psi}$ $\dot{r} = \dot{\psi} = 0$, получим уравнения стационарного движения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma^2 r}{(\rho^2 + r^2)^2} - \mu r - \mu e \cos \psi &= 0, \\ r \sin \psi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

Из этих уравнений, введя обозначение

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{\gamma}{\rho^2 + r^2},$$

найдем

$$r = \frac{\mu e \cos \psi}{\omega^2 - \mu}, \quad \sin \psi = 0. \quad (1.36)$$

Таким образом, имеются два стационарных движения вала, соответствующих двум решениям системы (1.36):

$$1) \psi = 0, \quad r = \frac{\mu e}{\omega^2 - \mu}; \quad (1.37)$$

$$2) \psi = \pi, \quad r = \frac{\mu e}{\mu - \omega^2}. \quad (1.38)$$

В движении (1.37) точки O , G , P располагаются на одной прямой, причем центр тяжести лежит между O и P (рис. 2, а). Когда ω , оставаясь все время больше μ , неограниченно увеличивается, то

$$r \rightarrow 0,$$

т. с. центр тяжести приближается к точке O . Происходит, как говорят, «самоцентрирование» диска. Диск совершает при этом вместе с P простое вращательное движение вокруг линии подшинников.

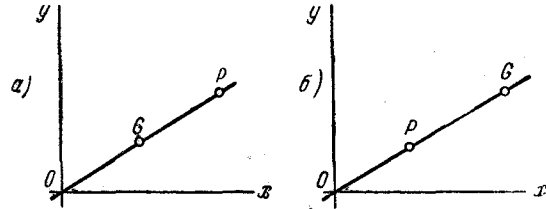


Рис. 2.

В движении (1.38) точки O , P , G располагаются также на одной прямой, как показано на рис. 2, б: центр тяжести диска лежит на продолжении отрезка OP .

Когда ω^2 приближается к $\mu = c/m$, r растет неограниченно. Угловая скорость $\omega = \sqrt{c/m}$ называется *критической угловой скоростью гибкого вала*. Пример 2. Регулярная прецессия тяжелого симметричного гироскопа.

Симметричным гироскопом называется тело, обладающее полной материальной симметрией относительно некоторой оси, закрепленной в неподвижной точке ¹⁾, и вращающееся вокруг этой оси с очень большой угловой скоростью ω ²⁾. Гироскоп называется тяжелым, если центр тяжести его не совпадает с неподвижной точкой (см. рис. 3, где O — неподвижная точка, G — центр тяжести, l — расстояние OG). Для определения положения гироскопа выбираем неподвижную точку O за начало двух систем координат — неподвижной $Ox_1y_1z_1$ и подвижной, неизменно связанной с гироскопом, $Oxyz$. Оси последней системы пусть будут главными осями инерции гироскопа для точки O . Ось Oz — ось симметрии гироскопа. Положение гироскопа будет однозначно определено заданием трех углов (углы Эйлера):

1) угла прецессии ψ — угла между осью Ox_1 и «линией узлов» ON , линией пересечения плоскости Oxy с плоскостью Ox_1y_1 ;

¹⁾ Или опирающейся на неподвижную точку.

²⁾ В широком смысле гироскоп — твердое тело произвольной формы, которое, будучи закреплено в одной из своих точек (фактически или хотя бы мысленно), может вращаться около этой точки. См. Граммель Р., Гироскоп, его теория и применения, перев. с нем., ИЛ, 1952, т. 1, стр. 10 или Тарг С. М., Краткий курс теоретической механики, Физматгиз, Москва 1963, стр. 401.

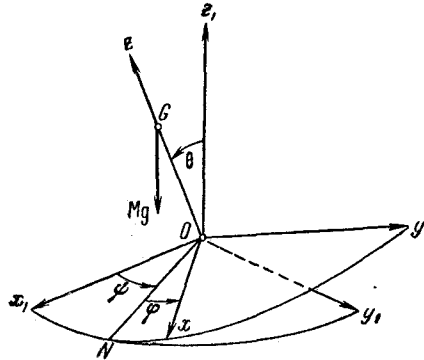


Рис. 3.

2) угла нутации θ — угла между осью Oz и неподвижной осью Oz_1 ;
3) угла собственного вращения φ — угла между линией узлов и осью Ox .
Эти три угла мы и примем за обобщенные координаты гироскопа.

Если проекции угловой скорости гироскопа вокруг мгновенной оси на оси подвижной системы обозначить через p , q , r , то кинетическая энергия гироскопа будет иметь следующее выражение:

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

где A , B , C — главные моменты инерции гироскопа относительно осей Ox , Oy , Oz , причем $A = B$.

С помощью известных формул

$$p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi,$$

$$q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi,$$

$$r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}$$

этому выражению можно дать такой вид:

$$2T = A(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2.$$

Обозначив через M массу гироскопа, напомним выражение функции Лагранжа следующим образом:

$$L = \frac{1}{2} [A(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2] + Mgl(1 - \cos \theta).$$

Система обладает только одной нециклической координатой θ , две другие ψ и φ являются циклическими. Последним соответствуют два циклических интеграла

$$A\dot{\psi} \sin \theta + C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \cos \theta = \beta_1,$$

$$C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) = \beta_2.$$

Функция Рауса имеет здесь вид

$$R = \frac{1}{2} [A(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2] + Mgl(1 - \cos \theta) - \beta_1 \dot{\psi} - \beta_2 \dot{\varphi}. \quad (1.39)$$

Стационарное движение определяется постоянными значениями нециклической координаты θ и циклических скоростей $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$. Это стационарное движение и есть регулярная прецессия тяжелого гироскопа: гироскоп вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi} = \omega$, в то время как его ось (ось Oz), образуя с неподвижной осью Oz_1 постоянный угол θ , вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью $\dot{\psi} = \omega_1$.

Уравнение регулярной прецессии гироскопа получим как уравнение стационарного движения

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0,$$

которое в силу (1.39) будет иметь вид

$$\omega_1 \sin \theta [C\omega + (C - A)\omega_1 \cos \theta] = Mgl \sin \theta. \quad (1.40)$$

Выражение

$$K = -\omega_1 \sin \theta [C\omega + (C - A)\omega_1 \cos \theta] \quad (1.41)$$

называется *гироскопическим моментом* тяжелого гироскопа, совершающего регулярную прецессию.

Гироскопический момент является моментом сил инерции гироскопа относительно неподвижной точки O . Уравнение (1.40) можно поэтому трактовать, согласно принципу Даламбера, как условие равновесия между моментом внешних сил и моментом сил инерции относительно точки O при регулярной прецессии гироскопа.

Гироскопический момент направлен по линии узлов в сторону, противоположную моменту $Mgl \sin \theta$. В приближенных расчетах, когда ω весьма велико в сравнении с ω_1 , в выражении гироскопического момента можно пренебречь вторым слагаемым в квадратных скобках, приняв

$$K = -C\omega_1 \omega \sin \theta, \quad (1.42)$$

или в векторной форме

$$K = C[\omega \times \omega_1]. \quad (1.43)$$

Формула (1.42) лежит в основе так называемой элементарной теории гироскопов и выражает известное *правило Жуковского*:

«Если какое-нибудь тело вращения вращается около своей оси с угловой скоростью ω и мы будем повертывать ось этого тела около некоторой оси, образующей с осью тела угол θ , с угловой скоростью ω_1 , то явится пара с моментом, равным произведению $\omega\omega_1 \sin \theta$ на момент инерции тела, стремящаяся повернуть ось тела к оси сообщаемого вращения так, чтобы при совпадении осей вращения ω и ω_1 совершались бы в одну сторону»¹⁾.

7. Принцип Остроградского — Гамильтона. Отметим два положения движущейся системы: в момент t_1 положение (A) и в момент t_2 ($t_2 > t_1$) положение (B). Действительное перемещение системы из (A) в (B) за промежуток времени $t_2 - t_1$ определяется уравнениями

$$q_k = q_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

которые с надлежащим числом постоянных представляют решения дифференциальных уравнений движения (1.23) рассматриваемой системы. Наряду с действительным перемещением системы из (A) в (B), для сравнения с ним, рассмотрим воображаемые бесконечно близкие к нему перемещения из (A) в (B) за тот же промежуток $t_2 - t_1$, определяемые уравнениями

$$\bar{q}_k(t) = q_k(t) + \delta q_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1.44)$$

где δq_k — изохронные вариации координат q_1, q_2, \dots, q_n , т. е. бесконечно малые величины, на какие координаты q_k в действительном движении отличается от координат \bar{q}_k в движениях, привлекаемых для сравнения, в один и тот же момент времени t . Перемещения системы, происходящие согласно уравнениям (1.44), назовем *око-*

¹⁾ Жуковский Н. Е., Элементарная теория гироскопов, Собрание сочинений, т. I, Гостехиздат, 1948, стр. 213.

ными перемещениями. Все перемещения — и действительное, и привлекаемые для сравнения с ним окольные — начинаются одновременно из положения (A) и заканчиваются одновременно в положении (B), так что в этих положениях

$$\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0. \quad (1.45)$$

На построенной таким образом совокупности (или классе) перемещений, совместимых со связями, рассмотрим интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (1.46)$$

где $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа. Числовые значения этого интеграла зависят от вида подставляемых в L функций $\bar{q}_k(t)$, определяющих какое-либо перемещение системы из построенной нами совокупности. Этот интеграл является, таким образом, функционалом от функций $q_k(t)$ и $\bar{q}_k(t)$.

Функционал S имеет размерность произведения работы на время (кгм сек). Величины с такой размерностью называются в физике «действиями». Функционал S представляет специальный вид «действия», которое называется «действием по Остроградскому — Гамильтону». Сравним значения действия S на действительном перемещении с его значениями на перемещениях окольных (1.44), для чего построим разность

$$S(\dot{q}_1 + \delta \dot{q}_1, \dot{q}_2 + \delta \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n + \delta \dot{q}_n, q_1 + \delta q_1, \dots, q_n + \delta q_n, t) - S(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n, t).$$

Совокупность членов первого порядка в разложении этой разности по степеням δq_k и $\delta \dot{q}_k$ по определению есть первая вариация S :

$$\begin{aligned} \delta S &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + \frac{\partial S}{\partial q_k} \delta q_k \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k \right] dt. \end{aligned}$$

Проинтегрировав по частям первое слагаемое подынтегрального выражения, будем иметь

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt.$$

Первое слагаемое правой части в силу (1.45) равно нулю и, таким образом,

$$\delta S = \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k dt.$$

Но на действительном пути

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Следовательно, на этом пути вариация действия S равна нулю:

$$\delta S = 0. \quad (1.47)$$

Обращение в нуль первой вариации функционала есть необходимое условие его стационарности¹⁾. Таким образом, *действие S (1.46) на действительном перемещении имеет стационарное значение по сравнению с его значениями на окольных путях, переводящих систему из одного начального положения в одно и то же конечное за один и тот же промежуток времени $t_2 - t_1$* . В этом и заключается содержание принципа Остроградского—Гамильтона для консервативной системы.

Принцип Остроградского—Гамильтона может быть распространен и на неконсервативные системы. В этом случае он выражается следующим равенством:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \sum Q_k \delta q_k) dt = 0, \quad (1.48)$$

где T — кинетическая энергия системы, Q_k — обобщенные неконсервативные силы, так что сумма $\sum Q_k \delta q_k$ не является точным дифференциалом²⁾.

Принцип Остроградского—Гамильтона часто называют принципом «наименьшего действия». Такое наименование может быть присвоено этому принципу только с некоторыми существенными оговорками. Дело в том, что наименьшее значение действие S имеет не между двумя любыми положениями, а только тогда, когда начальное положение (A) и конечное (B) достаточно близки друг к другу³⁾. На перемещениях, превышающих некоторую границу, действие S , оставаясь стационарным, может не иметь минимума и даже оказаться максимумом. Впрочем, для приложений принципа Остроградского—Гамильтона в теории колебаний достаточно установленного факта — обращения в нуль первой вариации S на действительном перемещении. Поэтому другие свойства действия S здесь не рассматриваются⁴⁾.

В изложенном выводе принципа Остроградского—Гамильтона уравнения Лагранжа выступают в новой роли — необходимых и до-

¹⁾ Эльсгольц Л. Э., Вариационное исчисление, Гостехиздат, 1958, стр. 22.

²⁾ Аппель П., Теоретическая механика, т. II, перев. с франц., Физматгиз, 1960, стр. 386.

³⁾ Лурье А. И., Аналитическая механика, Физматгиз, 1961, стр. 649; Якоби К., Лекции по динамике, 1936. Лекция 8.

⁴⁾ Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике, Физматгиз, Москва 1960.

статочных условий стационарности функционала S на действительном пути системы. Тем самым устанавливается эквивалентность задачи об интегрировании дифференциальных уравнений при заданных крайних условиях с вариационной задачей нахождения экстремума функционала и, таким образом, открывается возможность привлечения к решению вибрационных задач методов вариационного исчисления.

Как необходимые условия экстремума функционала уравнения Лагранжа (1.24) были получены Эйлером (1744 г.). В вариационном исчислении их называют поэтому уравнениями Эйлера—Лагранжа.

Подынтегральная функция функционала S может зависеть не только от производных первого порядка, но и от производных второго и высших порядков. Для таких функционалов необходимые условия экстремума будут выражаться уравнениями в частных производных четвертого и более высоких порядков. Так, если подынтегральная функция зависит от двух переменных t и x , а также от первых и вторых производных по этим переменным, т. е. если, например, функционал имеет вид

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l L \left(t, x, y, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx dt,$$

то уравнение, соответствующее уравнению Эйлера—Лагранжа, напишется следующим образом¹⁾:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial L}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial s} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial L}{\partial u} \right) = 0, \quad (1.49)$$

где

$$p = \frac{\partial y}{\partial t}; \quad q = \frac{\partial y}{\partial x}; \quad r = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \quad s = \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}; \quad u = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Б. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАТРИЦ²⁾

8. Определения. Матрицами называются системы чисел, расположенных в виде прямоугольных таблиц, над которыми, пользуясь определенными правилами, можно производить различные алгебраические действия. Матрица, таким образом, представляет нечто большее, чем просто таблицу, и ее элементы должны поэтому рассматриваться как единое целое в заданном расположении.

В дальнейшем мы будем иметь дело главным образом с квадратными матрицами, матрицами-столбцами и матрицами-строками.

¹⁾ См. Эльсгольц Л. Э., Вариационное исчисление, Гостехиздат, 1958, стр. 47.

²⁾ Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, «Наука», 1967; Дункан В., Фрезер Р. и Коллар А., Теория матриц и ее приложения, ИЛ, 1950.

В квадратной матрице число ¹⁾ строк равно числу столбцов, и она имеет следующий вид и обозначение:

$$\|A\| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Часто матрица $\|A\|$ обозначается просто A . Матрица-столбец состоит из n элементов, расположенных в одном столбце, например:

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = x.$$

Матрицу-столбец называют также вектором, а ее элементы x_1, x_2, \dots, x_n — составляющими этого вектора, что и отмечено в ее обозначении через x . Матрица-строка состоит из одной строки и имеет вид

$$y = \|y_1, y_2, \dots, y_n\|.$$

Квадратной матрице A сопоставляется ее определитель

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.50)$$

Когда этот определитель не равен нулю, матрица называется *неособенной*; матрица, определитель которой равен нулю, называется *особенной* или *вырожденной*.

Квадратная матрица, все элементы которой, за исключением элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*. Диагональная матрица порядка n , все элементы которой, расположенные на главной диагонали, равны единице, называется *единичной* порядка n и обозначается буквой E .

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается 0 .

Матрицы одного и того же порядка считаются равными, если равны их соответствующие элементы. Суммой двух матриц A и B называется матрица

$$C = A + B,$$

¹⁾ Это число определяет *порядок* квадратной матрицы.

Общий элемент которой C_{ik} равен $A_{ik} + B_{ik}$. Разность матриц A и B

$$D = A - B$$

есть матрица, общий элемент которой D_{ik} равен $A_{ik} - B_{ik}$. Сложение матриц подчиняется тем же общим законам, что и сложение скалярных величин.

Умножение матрицы на число l (которое можно записать как справа, так и слева матрицы) эквивалентно умножению на l каждого элемента этой матрицы: если

$$lA = Al = C,$$

то

$$C_{ik} = lA_{ik}.$$

Произведение двух матриц *согласованных*¹⁾ порядков $P = AB$ определяется следующим образом: l -й элемент k -го столбца произведения равен сумме произведений соответствующих элементов l -й строки матрицы A и k -го столбца матрицы B , начиная с левой стороны и сверху²⁾:

$$P_{lk} = \sum_{j=1}^n A_{lj} B_{jk}. \quad (1.51)$$

Умножение матриц, вообще говоря, не коммутативно: $BA \neq AB$. Например, произведение матрицы-столбца на матрицу-строку есть матрица

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} \cdot \|y_1, y_2, \dots, y_n\| = \begin{vmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_n \end{vmatrix}.$$

Произведение той же матрицы-строки на ту же матрицу-столбец равно выражению

$$\|y_1, y_2, \dots, y_n\| \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

¹⁾ Согласованных по правилу: число строк правого множителя равно числу столбцов левого.

²⁾ Сокращенно: «строки левой матрицы на столбцы правой».

которое представляет так называемое *скалярное произведение* векторов x и y с составляющими x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_n и обозначается простыми скобками (x, y) .

В том случае, когда $BA=AB$, матрицы B и A называются *перестановочными* или коммутующими. Умножение матриц *ассоциативно*. Это значит, что при сохранении порядка умножения матрицы можно группировать как угодно. Наконец, умножение матриц *дистрибутивно* относительно сложения, так что имеет место равенство

$$F(A+B)S = FAS + FBS.$$

Матрица A' , строками которой служат столбцы матрицы A , называется *транспонированной* по отношению к A .

Если $A_{ik} = A_{ki}$, то матрица называется *симметричной*; такая матрица совпадает со своей транспонированной.

Матрица A называется *ортогональной*, если произведение ее на транспонированную A' равно единичной матрице, т. е. если

$$AA' = A'A = E.$$

В ортогональной матрице элементы любых двух строк и любых двух столбцов ортогональны между собою и сумма квадратов элементов каждой строки и каждого столбца равна единице:

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Матрица, транспонированная по отношению к матрице, составленной из алгебраических дополнений (миноров со знаками) элементов определителя $|A|$, называется *взаимной*¹⁾ к матрице A . Если обозначить алгебраические дополнения элементов A_{ik} через a_{ik} , то матрицей, взаимной к A , будет матрица $\alpha = \|a_{ki}\|$. Произведение определителей $|A|$ и $|\alpha|$ матриц A и α , как легко видеть, равно $|A|^n$ и, следовательно, $|\alpha| = |A|^{n-1}$. Отсюда получаем следующее соотношение между минорами определителей $|A|$ и $|\alpha|$, которое мы напомним для определителей четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ 0 & 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |A| \end{vmatrix},$$

¹⁾ Или *присоединенной*.

Откуда

$$\begin{vmatrix} A_{33} & A_{34} \\ A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (1.52)$$

Эта формула может быть распространена на миноры любого порядка.

9. Обратная матрица. Для каждой неособенной матрицы A можно однозначно определить так называемую *обратную матрицу* A^{-1} , произведение которой на A (справа или слева) равно единичной матрице

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Обратной матрице A^{-1} можно дать следующее выражение:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \frac{1}{\Delta} = \frac{\alpha}{\Delta}, \quad (1.53)$$

где α — матрица, взаимная к A ; $\Delta = |A|$ — определитель матрицы A .

В самом деле, составим произведение

$$AA^{-1} = \frac{A\alpha}{\Delta}.$$

В матрице $A\alpha$ отличными от нуля будут только суммы произведений элементов i -й строки A на элементы i -го столбца матрицы α ($i = 1, 2, \dots, n$). Эти произведения, равные каждое определителю Δ , расположатся по главной диагонали матрицы-произведения. Разделив эту последнюю на Δ , получим единичную матрицу E .

Обратная матрица разрешает систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} x_k = B_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

которую в матричной форме можно записать так:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_n \end{vmatrix} \quad (1.54)$$

или сокращенно

$$Ax = B. \quad (1.55)$$

уравнения разворачивать характеристический определитель, превращая уравнение (1.58) в обыкновенное алгебраическое уравнение n -й степени относительно λ . Для $n \geq 5$ это разворачивание становится сложной (по числу операций) задачей.

Для некоторого упрощения решения этой задачи были разработаны специальные методы. Из этих методов наиболее эффективными являются методы, предложенные А. Н. Крыловым¹⁾, А. М. Данилевским²⁾ и Ш. Е. Микеладзе³⁾.

В технических задачах теории колебаний, где приходится иметь дело главным образом с вещественными симметрическими уравнениями типа (1.58) и вычислять небольшое число их корней, последние, вместе с соответствующими собственными векторами, могут быть найдены с любой заданной точностью с помощью простых итерационных расчетов без разворачивания определителя⁴⁾.

Пример 5. Требуется развернуть определитель уравнения

$$\begin{vmatrix} 4,53 - \alpha & 5,59 & 5,05 & 3,99 \\ 5,59 & 8,33 - \alpha & 7,99 & 6,48 \\ 5,05 & 7,99 & 8,33 - \alpha & 7,09 \\ 3,99 & 6,48 & 7,09 & 6,61 - \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad (1.61)$$

$(\alpha = 10^5/p^2)$

по методу А. М. Данилевского. Сущность метода заключается в приведении уравнения (1.61) к так называемой *форме Фробениуса*

$$\begin{vmatrix} h_{11} - \alpha & h_{12} & h_{13} & \dots & h_{1n-1} & h_{1n} \\ 1 & -\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha \end{vmatrix} = 0. \quad (1.62)$$

Приведение может быть выполнено самыми простыми средствами, причем с вполне достаточной для практических приложений точностью⁵⁾.

Чтобы обратить в единицу предпоследний элемент четвертой строки, делим все элементы третьего столбца на 7,09, а чтобы не вводить дробных

¹⁾ Крылов А. Н., О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний. Изв. АН СССР, 1931, № 4.

(Кроме метода самого Крылова А. Н. в этой статье даны описание и сравнительная оценка методов Лагранжа, Лавренье, Якоби и Лапласа.)

²⁾ Данилевский А. М., О численном решении векового уравнения, Матем. сб., 1937, т. 2/44, № 1.

³⁾ Микеладзе Ш. Е., О разложении определителя, элементами которого служат полиномы, ПММ, 1948, т. XII, вып. II.

⁴⁾ См. гл. V. Здесь имеются в виду так называемые «вековые» уравнения.

⁵⁾ Матричный способ приведения к форме Фробениуса см. в книге: Демидович Б. П. и Марон И. А., Основы вычислительной математики, Физматгиз, 1960.

коэффициентов при α , на то же число 7,09 умножаем все элементы третьей строки; получим

$$\begin{vmatrix} 4,53 - \alpha & 5,59 & 0,71 & 3,99 \\ 5,59 & 8,33 - \alpha & 1,13 & 6,48 \\ 35,80 & 56,65 & 8,33 - \alpha & 50,27 \\ 3,99 & 6,48 & 1 & 6,61 - \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Далее умножаем третий столбец последовательно на 3,99; 6,48; 6,61 и вычитаем его из первого, второго и четвертого столбцов. В результате приходим к определителю, в котором последняя строка имеет требуемую форму:

$$\begin{vmatrix} 1,70 - \alpha & 0,99 & 0,71 & -0,70 \\ 1,08 & 1,01 - \alpha & 1,13 & -0,99 \\ 2,56 + 3,99\alpha & 2,67 + 6,48\alpha & 8,33 - \alpha & -4,79 + 6,61\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Чтобы закончить первый цикл преобразований, нужно в полученном определителе избавиться от слагаемых с α в первом, втором и четвертом элементах третьей строки. Для этого умножаем первую строку на 3,99; вторую на 6,48; четвертую на 6,61 и прибавляем их к третьей, после чего имеем:

$$\begin{vmatrix} 1,70 - \alpha & 0,99 & 0,71 & -0,70 \\ 1,08 & 1,01 - \alpha & 1,13 & -0,99 \\ 16,34 & 13,16 & 25,09 - \alpha & -14,00 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Этим заканчивается первый цикл приведения уравнения (1.61) к форме Фробениуса. Отметим, что сумма диагональных коэффициентов в последнем определителе должна быть равна сумме таковых в определителе (1.61)¹⁾.

Второй цикл должен привести третью строку последнего определителя к виду

$$0 \quad 1 \quad -\alpha \quad 0.$$

Он выполняется аналогично первому и приводит к уравнению

$$\begin{vmatrix} 0,39 - \alpha & 0,08 & -1,30 & 0,42 \\ 4,08 & 27,41 - \alpha & -45,71 & 7,97 \\ 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Третий и четвертый циклы заканчивают приведение уравнения (1.61) к форме Фробениуса

$$\begin{vmatrix} 27,80 - \alpha & 56,07 & 20,50 & 1,40 \\ 1 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Из последнего уравнения получаем

$$\alpha^4 - 27,80\alpha^3 + 56,07\alpha^2 - 20,50\alpha + 1,40 = 0. \quad (1.63)$$

¹⁾ В методе Данилевского это — «контрольное правило».

или, если ввести обозначения

$$C_i = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1i} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{ii} \end{vmatrix}, \quad (1.69)$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_i = C_i. \quad (1.70)$$

Отсюда следуют равенства

$$\alpha_1 = C_1, \quad \alpha_2 = \frac{C_2}{C_1}, \quad \alpha_3 = \frac{C_3}{C_2}, \quad \dots, \quad \alpha_n = \frac{C_n}{C_{n-1}}.$$

С помощью этих равенств форма (1.68) напишется следующим образом (в предположении, что все $C_i \neq 0$):

$$U = C_1 y_1^2 + \frac{C_2}{C_1} y_2^2 + \frac{C_3}{C_2} y_3^2 + \dots + \frac{C_n}{C_{n-1}} y_n^2. \quad (1.71)$$

Практически приведение формы (1.66) к виду (1.71) осуществляется путем выделения в (1.66) полных квадратов некоторых линейных форм, совпадающих (с точностью до постоянных множителей) с правыми частями преобразования (1.67). В этом легко убедиться, рассмотрев числовой пример.

Пример 6. Пусть дана форма

$$U = 6x_1^2 + 11x_2^2 + 22x_3^2 + 12x_1x_2 + 22x_1x_3 + 28x_2x_3, \quad (1.72)$$

которую нужно привести к каноническому виду.

Чтобы избежать дробных коэффициентов, умножаем обе части (1.72) на 6 и затем дополняем до полного квадрата члены, содержащие x_1 :

$$6U = (6x_1 + 6x_2 + 11x_3)^2 + 30x_2^2 + 11x_3^2 + 36x_2x_3.$$

Далее умножаем обе части последнего равенства на 30 и дополняем до полного квадрата члены, содержащие (вне скобок) x_2 :

$$30 \cdot 6 \cdot U = 30(6x_1 + 6x_2 + 11x_3)^2 + (30x_2 + 18x_3)^2 + 6x_3^2.$$

Подстановка, соответствующая преобразованию (1.67),

$$\begin{aligned} 6y_1 &= 6x_1 + 6x_2 + 11x_3, \\ 6 \cdot 30y_2 &= 30x_2 + 18x_3, \\ 30y_3 &= x_3 \end{aligned}$$

приводит форму (1.72) к каноническому виду

$$U = 6y_1^2 + 180y_2^2 + 30y_3^2.$$

Квадратичная форма называется *определенно положительной*, если она принимает только положительные значения, обращаясь в нуль, когда все переменные x_1, x_2, \dots, x_n равны нулю. Для того чтобы форма была определена положительной, необходимо и достаточно,

чтобы все коэффициенты формы после приведения ее к каноническому виду были положительны. Этому условию можно дать следующее выражение. Как мы знаем, квадратичная форма может быть приведена к виду

$$U = C_1 y_1^2 + \frac{C_2}{C_1} y_2^2 + \dots + \frac{C_n}{C_{n-1}} y_n^2, \quad (1.73)$$

где C_i равны (1.69). Эта форма определена положительно, если все ее коэффициенты больше нуля. В частности, C_1 должно быть больше нуля. Следовательно, все C_i положительны. Таким образом, форма тогда и только тогда будет определена положительно, когда дискриминант формы и все его последовательные главные диагональные миноры больше нуля, т. е. когда

$$\left. \begin{aligned} A_{11} > 0; \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} > 0; \\ \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} > 0; \dots; \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.74)$$

Неравенства (1.74) выражают критерий определенной положительности квадратичной формы, известный под названием критерия Сильвестра.

Две квадратичные формы

$$U_1 = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} q_i q_k; \quad U_2 = \sum_{i, k=1}^n c_{ik} q_i q_k$$

из которых одна, например U_1 , определена положительно, могут быть приведены к каноническому виду одним и тем же линейным преобразованием координат. В самом деле, определена положительную форму U_1 можно, например, путем последовательного выделения полных квадратов привести к каноническому виду

$$U_1 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2. \quad (1.75)$$

В новых переменных y_1, y_2, \dots, y_n вторая форма будет иметь вид

$$U_2 = \sum_{i, k=1}^n b_{ik} y_i y_k$$

Всегда найдется ортогональная подстановка, которая приведет форму U_2

к виду

$$U_2 = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \dots + \lambda_n \xi_n^2 \quad (1.76)$$

сохранив при этом канонический вид формы U_1 , так как

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (1.77)$$

Выразив переменные q_1, q_2, \dots, q_n через y_1, y_2, \dots, y_n , а последние — через $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, мы получим то единственное линейное преобразование, которым обе формы U_1 и U_2 приводятся к каноническому виду. Отметим, что постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ являются собственными значениями матрицы коэффициентов формы U_2 .

В. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

12. Определение «изображения» функции. В операционном исчислении функции, входящие в состав дифференциальных уравнений, заменяются их «изображениями», построенными с помощью функционального преобразования Лапласа или Карсона. Действия дифференцирования и интегрирования сопоставляются некоторым простым алгебраическим действиям над «изображениями» этих функций. Задача операционного исчисления заключается в построении «изображений» функций и действий над ними и в последующем истолковании полученных «операционных выражений», т. е. в переходе от «изображения» к так называемой «начальной функции» («оригиналу»).

Операционное исчисление вносит значительные упрощения в решение задач на вынужденные колебания в тех случаях, когда возмущающие силы имеют характер импульсов или сил, закон действия которых представляется в различные промежутки времени различными аналитическими выражениями. Кроме того, операционный метод дает возможность сразу составлять решения, удовлетворяющие начальным условиям, что делает его особо ценным в исследованиях так называемых «переходных режимов», т. е. движений системы непосредственно после ее возмущения, когда начальные условия имеют существенное значение.

Изображением функции $f(t)$ по Карсону называется интеграл

$$p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (1.78)$$

где p — комплексный параметр с положительной вещественной частью, достаточно большой для того, чтобы интеграл (1.78) сходил. Относительно начальной функции, или *оригинала*, $f(t)$ мы предполагаем, что это — кусочно-непрерывная функция, заданная в интервале $0 \leq$

$t < +\infty$, равная тождественно нулю для $t < 0$ и удовлетворяющая условию:

$$e^{-(\operatorname{Re} p)t} f(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty. \quad (1.79)$$

Изображение $f(t)$ есть функция параметра p . Мы обозначим эту функцию через $F(p)$:

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1.80)$$

Для записи зависимости между $f(t)$ и $F(p)$, выражаемой последним равенством, мы будем пользоваться обозначением

$$F(p) \rightarrow f(t).$$

Это — символическая запись обыкновенного равенства (1.80), представляющего собой так называемое *карсоново преобразование* функции $f(t)$.

Преобразование (1.80) линейно, т. е. изображение суммы двух функций равно сумме изображений каждой функции в отдельности и умножению функции на постоянный множитель соответствует умножение на тот же множитель изображения. Если поэтому A_i — некоторые постоянные ($i = 1, 2, \dots, n$) и $F_i(p) \rightarrow f_i(t)$, то

$$\left. \begin{aligned} A_i F_i(p) &\rightarrow A_i f_i(t), \\ \sum_{i=1}^n A_i F_i(p) &\rightarrow \sum_{i=1}^n A_i f_i(t). \end{aligned} \right\} \quad (1.81)$$

13. Изображения некоторых функций и действий над ними.

а) Изображение единицы. Введем так называемую *единичную функцию* $\sigma_0(t)$, которая имеет следующее определение:

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (1.82)$$

График этой функции представлен на рис. 4.

Изображением единичной функции $\sigma_0(t)$ будет единица:

$$1 \rightarrow \sigma_0(t). \quad (1.83)$$

Это следует из очевидного равенства

$$p \int_0^{\infty} e^{-pt} \sigma_0(t) dt = 1.$$

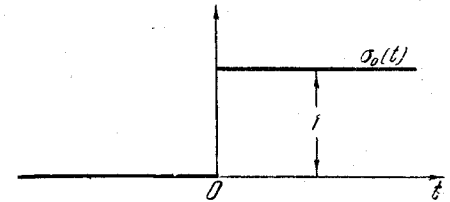


Рис. 4.

Так как в промежутке от 0 до $+\infty$ имеем $\sigma_0(t) = 1$, то в этом промежутке изображение единицы равно единице:

$$1 \rightarrow 1.$$

б) Изображение производной и дифференцирования. Если

$$F(p) \rightarrow f(t)$$

и $f(0) = 0$, то

$$pF(p) \rightarrow \frac{d}{dt}f(t). \quad (1.84)$$

В самом деле, интегрируя по частям в правой части равенства

$$pF(p) = p \int_0^{\infty} pe^{-pt} f(t) dt,$$

получим:

$$pF(p) = p [-e^{-pt} f(t)]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{df}{dt} dt.$$

Выражение в скобках равно нулю в силу (1.79) и предположения, что $f(0) = 0$. Следовательно,

$$pF(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{df}{dt} dt,$$

или

$$pF(p) \rightarrow \frac{d}{dt}f(t). \quad (1.85)$$

Дифференцирование начальной функции «изображается» умножением ее изображения на параметр p .

Если $f(0) \neq 0$, то

$$pF(p) = pf(0) + p \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{df}{dt} dt$$

или

$$p[F(p) - f(0)] \rightarrow \frac{d}{dt}f(t). \quad (1.86)$$

Чтобы найти изображение n -й производной $f(t)$, интегрируем по частям n раз в правой части равенства

$$p^n F(p) = p \int_0^{\infty} p^n e^{-pt} f(t) dt.$$

Тогда получим:

$$p^n F(p) = p^n f(0) + p^{n-1} f'(0) + \dots + p f^{(n-1)}(0) + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f^{(n)}(t) dt,$$

откуда

$$p^n [F(p) - f(0) - \frac{1}{p} f'(0) - \dots - \frac{1}{p^{n-1}} f^{(n-1)}(0)] \rightarrow f^{(n)}(t). \quad (1.87)$$

Если для $t=0$ функция $f(t)$ обращается в нуль вместе со своими $n-1$ первыми производными, то

$$p^n F(p) \rightarrow f^{(n)}(t). \quad (1.88)$$

в) Изображение интеграла и интегрирования. Перепишав (1.80) следующим образом:

$$\frac{1}{p} F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

и выполнив в правой части интегрирование по частям, получим

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] dt.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{p} F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] dt,$$

или

$$\frac{1}{p} F(p) \rightarrow \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (1.89)$$

Интегрирование функции «изображается» делением ее «изображения» на параметр p .

Из (1.89) находим

$$\left. \begin{aligned} \int_0^t 1 dt = t, \text{ откуда } \frac{1}{p} \rightarrow t, \\ \int_0^t t dt = \frac{t^2}{2!}, \text{ откуда } \frac{1}{p^2} \rightarrow \frac{t^2}{2!}, \\ \dots \dots \dots \\ \int_0^t \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} dt = \frac{t^s}{s!}, \text{ откуда } \frac{1}{p^s} \rightarrow \frac{t^s}{s!}. \end{aligned} \right\} \quad (1.90)$$

Формулы (1.90) определяют оригиналы целых отрицательных степеней параметра p .

г) Теорема смещения. Если

$$F(p) \doteq f(t),$$

то

$$\frac{p}{p+a} F(p+a) \doteq e^{-at} f(t). \quad (1.91)$$

В соотношении

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

заменяем p на $p+a$ и перепишем его так:

$$\frac{p}{p+a} F(p+a) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} [e^{-at} f(t)] dt.$$

Отсюда

$$\frac{p}{p+a} F(p+a) \doteq e^{-at} f(t).$$

Из теоремы смещения можно получить изображения некоторых часто встречающихся в приложениях функций.

Так, для изображения функции $e^{\pm at}$ находим, полагая в (1.91) $f(t) \equiv 1$ и принимая во внимание, что $1 \doteq 1$:

$$\frac{p}{p \mp a} \doteq e^{\pm at}. \quad (1.92)$$

Так как

$$\operatorname{ch} at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}, \quad \operatorname{sh} at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2},$$

то

$$\frac{p^2}{p^2 - a^2} \doteq \operatorname{ch} at, \quad \frac{ap}{p^2 - a^2} \doteq \operatorname{sh} at. \quad (1.93)$$

Заменяя в (1.93) a на ia , получим:

$$\frac{p^2}{p^2 + a^2} \doteq \cos at, \quad \frac{pa}{p^2 + a^2} \doteq \sin at, \quad (1.94)$$

откуда по той же теореме смещения можно найти изображения произведений $\cos at$ и $\sin at$ на $e^{-\beta t}$:

$$\frac{p(p+\beta)}{(p+\beta)^2 + a^2} \doteq e^{-\beta t} \cos at, \quad \frac{ap}{(p+\beta)^2 + a^2} \doteq e^{-\beta t} \sin at. \quad (1.95)$$

Из формулы

$$\frac{p}{p+a} \doteq e^{-at}$$

на основании теоремы об изображении интегрирования имеем

$$\frac{1}{p} \frac{p}{p+a} \doteq \int_0^t e^{-at} dt$$

или

$$\frac{1}{p+a} \doteq \frac{1}{a} (1 - e^{-at}). \quad (1.96)$$

Полагая здесь $a = i\omega$, получим

$$\frac{p}{p^2 + \omega^2} \doteq \frac{1}{\omega} \sin \omega t, \quad \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \doteq \frac{1}{\omega} (1 - \cos \omega t). \quad (1.97)$$

д) Теорема запаздывания. Рассмотрим функцию $\sigma_0(t - \tau)$, которая по определению равна нулю для $t < \tau$ и единице для $t \geq \tau$.

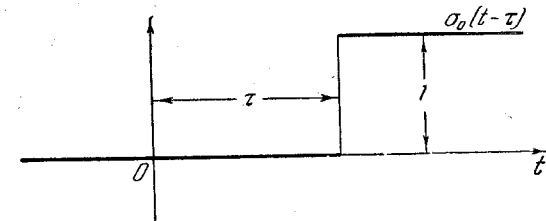


Рис. 5.

График этой функции сдвинут вправо на расстояние τ (рис. 5) по сравнению с графиком функции $\sigma_0(t)$ (рис. 4).

Найдем изображение этой функции:

$$F(p) = p \int_0^{\tau} e^{-pt} \sigma_0(t - \tau) dt + p \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} \sigma_0(t - \tau) dt = p \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} dt = e^{-p\tau}.$$

Таким образом,

$$e^{-p\tau} \doteq \sigma_0(t - \tau). \quad (1.98)$$

Сопоставляя полученное соотношение с формулой

$$1 \doteq \sigma_0(t),$$

заключаем, что умножение изображения на $e^{-p\tau}$ сдвигает график функции $\sigma_0(t)$ вправо на τ .

Это заключение остается верным для любой функции $f(t)$. Если

$$F(p) \doteq f(t),$$

то

$$e^{-p\tau} F(p) \doteq f(t - \tau). \quad (1.99)$$

В самом деле, умножив обе части равенства

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

на $e^{-p\tau}$, получим, положив $t + \tau = t'$:

$$e^{-p\tau} F(p) = p \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt'} f(t' - \tau) dt'.$$

Прибавим к правой части интеграл

$$p \int_0^{\tau} e^{-pt'} f(t' - \tau) dt'.$$

Этот интеграл равен нулю, так как в пределах изменения t' от 0 до τ

$$t' - \tau < 0$$

и

$$f(t' - \tau) \equiv 0.$$

Опуская штрих у t' , окончательно получим

$$e^{-p\tau} F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t - \tau) dt,$$

или

$$e^{-p\tau} F(p) \rightarrow f(t - \tau). \quad (1.100)$$

Умножение изображения на $e^{-p\tau}$ сдвигает график функции $f(t)$ вправо на τ (рис. 6).

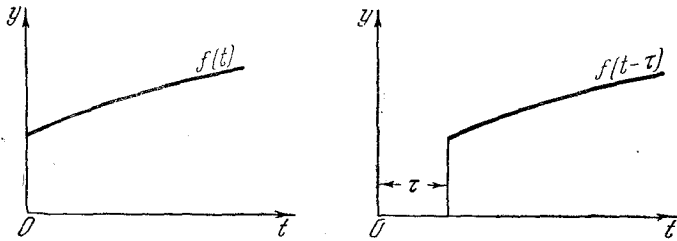


Рис. 6.

Теорема запаздывания дает простой способ построения изображений разрывных функций, например функций, определяющих интенсивность нагрузки, распределенной по отдельным участкам балки. В этом последнем случае переменная t обозначает не время, а расстояние (абсциссу) и ее целесообразно заменить буквой x .

Рассмотрим сначала случай равномерно распределенной на участке (x_0, x_1) нагрузки интенсивности q . Такую нагрузку можно представить наложением двух «скачков» одной и той же высоты q , начинающихся в точках x_0 и x_1 и направленных в противоположные

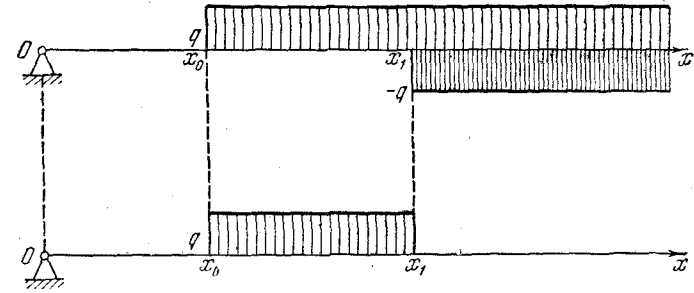


Рис. 7.

стороны (рис. 7). Аналитическое выражение этой нагрузки можно построить с помощью единичной функции $\sigma_0(x)$:

$$f(x) = q\sigma_0(x - x_0) - q\sigma_0(x - x_1).$$

Ее изображение, согласно теореме запаздывания, будет

$$qe^{-px_0} - qe^{-px_1} \rightarrow f(x). \quad (1.101)$$

Предположим теперь, что интенсивность нагрузки $f(x)$ задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_0, \\ g(x) & \text{при } x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0 & \text{при } x_1 < x, \end{cases}$$

где функция $g(x)$ определена для всей положительной части оси Ox (рис. 8). Полагая

$$g_0(x) = g(x_0 + x),$$

получим для всех $x \geq 0$ ту ветвь функции $g(x)$, которая начинается от $x = x_0$. Помещая в эту точку начало координат, построим изображение функции $g_0(x)$:

$$G_0(p) \rightarrow g_0(x).$$

Чтобы вернуться к заданному расположению нагрузки $f(x)$, нужно сдвинуть график функции $g_0(x)$ вправо на отрезок x_0 . В соответствии с теоремой запаздывания:

$$e^{-px_0} G_0(p) \rightarrow g_0(x - x_0) = g(x)$$

для $x > x_0$.

Точно так же, полагая

$$g_1(x) = g(x_1 + x), \quad G_1(p) \rightarrow g_1(x),$$

приходим к соотношению

$$e^{-px_1} G_1(p) \rightarrow g_1(x - x_1) = g(x)$$

для $x > x_1$. Изображение нагрузки $f(x)$ представится формулой

$$e^{-px_0} G_0(p) - e^{-px_1} G_1(p) \rightarrow f(x). \quad (1.102)$$

В качестве одного из приложений формулы (1.102) рассмотрим задачу о построении изображения периодической функции.

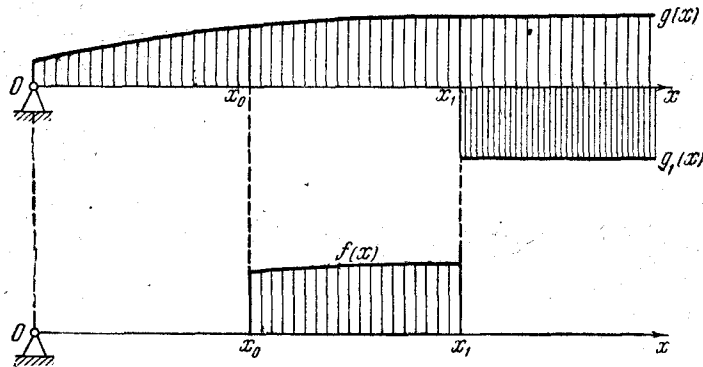


Рис. 8.

Пусть $f(t)$ — периодическая функция с периодом τ :

$$f(t) = f(t + \tau).$$

Введем вспомогательную функцию $\psi(t)$, которая равна $f(t)$ для всех t , удовлетворяющих неравенству

$$0 \leq t \leq \tau,$$

и равна нулю для $t < 0$ и $t > \tau$:

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ f(t) & \text{при } 0 \leq t \leq \tau, \\ 0 & \text{при } t > \tau. \end{cases}$$

Изображение этой функции по формуле (1.102):

$$\Psi(p) = e^{-pt_0} F_0(p) - e^{-pt_1} F_1(p) \rightarrow \psi(t), \quad (1.103)$$

где в рассматриваемом случае следует положить

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \tau, \\ F_0(p) \rightarrow f(t), \quad F_1(p) \rightarrow f(t + \tau).$$

Так как

$$f(t) = f(t + \tau),$$

то

$$F_0(p) = F_1(p) = F(p).$$

Поэтому

$$\Psi(p) = F(p)(1 - e^{-p\tau})$$

или

$$F(p) = \frac{\Psi(p)}{1 - e^{-p\tau}}. \quad (1.104)$$

Полученная формула дает изображение периодической функции $f(t)$ через изображение вспомогательной функции $\psi(t)$, совпадающей с $f(t)$ на протяжении периода и равной нулю вне его. Существует и обратная теорема, которую мы приведем без доказательства¹⁾.

Начальная функция, изображение которой имеет вид (1.104), причем числитель $\Psi(p)$ представляет изображение функции $\psi(t)$, равной нулю при $t > \tau$, является периодической периода τ ; эта периодическая функция $f(t)$ для $0 \leq t \leq \tau$ равна начальной функции $\psi(t)$ изображения $\Psi(p)$ в формуле (1.104).

14. Простейшие правила построения начальной функции по данному изображению. К таким правилам относятся прежде всего теорема свертывания и теорема о разложении.

Теорема свертывания дает возможность построить начальную функцию произведения изображений двух заданных функций и заключается в следующем:

Если

$$F_1(p) \rightarrow f_1(t), \quad F_2(p) \rightarrow f_2(t),$$

то²⁾

$$\frac{1}{p} F_1(p) F_2(p) \rightarrow \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau. \quad (1.105)$$

В самом деле, по теореме запаздывания

$$e^{-p\tau} F_2(p) \rightarrow f_2(t - \tau)$$

или

$$e^{-p\tau} F_2(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f_2(t - \tau) dt.$$

¹⁾ См. книгу Лурье А. И., *Операционное исчисление и его приложения к задачам механики*, Гостехиздат, 1950.

²⁾ Интегралы в соотношении (1.105) называются *свертками* функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

Умножим обе части этого равенства на $f_1(\tau) d\tau$ и проинтегрируем по τ в пределах от 0 до $+\infty$:

$$F_2(p) \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f_1(\tau) d\tau = p \int_0^{\infty} f_1(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-pt} f_2(t-\tau) dt,$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} F_2(p) F_1(p) &= p \int_0^{\infty} e^{-pt} \left[\int_0^{\infty} f_2(t-\tau) f_1(\tau) d\tau \right] dt = \\ &= p \int_0^{\infty} e^{-pt} \left[\int_0^t f_2(t-\tau) f_1(\tau) d\tau \right] dt, \end{aligned}$$

так как для $\tau > t$

$$f(t-\tau) \equiv 0.$$

Отсюда

$$\frac{1}{p} F_1(p) F_2(p) \doteq \int_0^t f_2(t-\tau) f_1(\tau) d\tau. \quad (1.106)$$

Таким же путем можно получить и второе выражение теоремы свертывания

$$\frac{1}{p} F_1(p) F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau. \quad (1.107)$$

Теорема о разложении. Предположим, что функция $F(p)$ представляет собою рациональную дробь

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n},$$

причем $n \geq m$. Обозначим через p_1, p_2, \dots, p_n корни знаменателя. Можно построить начальную функцию для такого изображения, если предварительно разложить $F(p)$ на элементарные дроби. Здесь могут встретиться два случая: 1) корни p_k знаменателя $N(p)$ — простые и не равные нулю; 2) корни знаменателя $N(p)$ — кратные.

1-й случай. Корни знаменателя $N(p)$ — простые и среди них нет нулевого корня. В этом случае разлагаем на элементарные дроби функцию

$$\frac{M(p)}{pN(p)},$$

полагая сначала формально

$$\frac{M(p)}{pN(p)} = \frac{C_0}{p} + \sum_k \frac{B_k}{p-p_k}. \quad (1.108)$$

Чтобы найти коэффициент C_0 , умножаем обе части равенства (1.108) на p и полагаем

$$p = 0.$$

Тогда

$$C_0 = \frac{M(0)}{N(0)}.$$

Умножив обе части (1.108) на $p-p_k$, найдем коэффициент B_k как предел отношения

$$\frac{M(p)(p-p_k)}{pN(p)}$$

при $p \rightarrow p_k$. По правилу Лопиталю:

$$B_k = \frac{M(p_k)}{p_k N'(p_k)}.$$

Таким образом,

$$\frac{M(p)}{pN(p)} = \frac{M(0)}{pN(0)} + \sum_k \frac{M(p_k)}{p_k N'(p_k)} \frac{1}{p-p_k}$$

или

$$\frac{M(p)}{N(p)} = \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_k \frac{M(p_k)}{p_k N'(p_k)} \frac{p}{p-p_k}. \quad (1.109)$$

Так как

$$\frac{p}{p-p_k} \doteq e^{p_k t},$$

то

$$\frac{M(p)}{N(p)} \doteq \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_k \frac{M(p_k)}{p_k N'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (1.110)$$

Если знаменатель $N(p)$ имеет один нулевой корень $p=0$, то, положив $N(p) = pN_1(p)$, где $N_1(0) \neq 0$, будем иметь¹⁾ вместо (1.110)

$$\frac{M(p)}{N(p)} \doteq \left[\frac{d}{dp} \frac{M(p)}{N_1(p)} \right]_{p=0} + \frac{M(0)}{N_1(0)} t + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{M(p_k)}{p_k N'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (1.111)$$

2-й случай. Корни знаменателя $N(p)$ — кратные. Пусть корни знаменателя

$$p_1, p_2, \dots, p_k,$$

среди которых нет нулевых, имеют кратности, соответственно равные

$$v_1, v_2, \dots, v_k,$$

причем

$$v_1 + v_2 + \dots + v_k = n.$$

¹⁾ Лурье А. И., Операционное исчисление и его приложения к задачам механики, Гостехиздат, 1950, стр. 47.

Разложение дроби

$$\frac{M(p)}{pN(p)}$$

на простейшие будет иметь вид

$$\frac{M(p)}{pN(p)} = \frac{C_0}{p} + \sum_{s=1}^k \sum_{\lambda=1}^{v_s} \frac{C_{\lambda, s}}{(p-p_s)^\lambda}. \quad (1.112)$$

Корню p_s кратности v_s соответствует в этом разложении группа членов

$$\frac{C_{v_s, s}}{(p-p_s)^{v_s}} + \frac{C_{v_s-1, s}}{(p-p_s)^{v_s-1}} + \dots + \frac{C_{1s}}{p-p_s}. \quad (1.113)$$

Для определения коэффициентов $C_{\lambda, s}$ умножаем обе части (1.112) на высшую степень $(p-p_s)^{v_s}$. Введем обозначение

$$\frac{M(p)}{pN(p)} (p-p_s)^{v_s} = C_s(p).$$

Тогда

$$C_s(p) = C_{v_s, s} + C_{v_s-1, s}(p-p_s) + \dots + C_{1s}(p-p_s)^{v_s-1} + K(p-p_s)^{v_s}, \quad (1.114)$$

где K обозначает совокупность членов, в знаменатели которых не входит корень p_s и которые при $p=p_s$ остаются конечными.

Положив $p=p_s$, получим

$$C_{v_s, s} = C_s(p_s).$$

Дифференцируя (1.114) один раз по p и полагая затем $p=p_s$, получим

$$C_{v_s-1, s} = C'_s(p_s), \quad \dots, \quad C_{\lambda, s} = \frac{C_s^{(v_s-\lambda)}(p_s)}{(v_s-\lambda)!}.$$

Коэффициент C_0 определяется, как и в случае простых корней,

$$C_0 = \frac{M(0)}{N(0)}.$$

Теперь разложение (1.112) можно записать следующим образом:

$$\frac{M(p)}{pN(p)} = \frac{M(0)}{pN(0)} + \sum_{s=1}^k \sum_{\lambda=1}^{v_s} \frac{C_s^{(v_s-\lambda)}(p_s)}{(v_s-\lambda)!} \frac{1}{(p-p_s)^\lambda}$$

или

$$\frac{M(p)}{N(p)} = \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_{s=1}^k \sum_{\lambda=1}^{v_s} \frac{C_s^{(v_s-\lambda)}(p_s)}{(v_s-\lambda)!} \frac{p}{(p-p_s)^\lambda}.$$

С помощью соотношения¹⁾

$$\frac{p}{(p-a)^k} \rightarrow \frac{t^{k-1}e^{at}}{(k-1)!} \quad (1.115)$$

приходим к выражению теоремы о разложении для случая кратных корней знаменателя $N(p)$:

$$\frac{M(p)}{N(p)} \rightarrow \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_{s=1}^k \sum_{\lambda=1}^{v_s} \frac{C_s^{(v_s-\lambda)}(p_s)}{(v_s-\lambda)!} \frac{t^{\lambda-1}e^{p_s t}}{(\lambda-1)!}. \quad (1.116)$$

Теорема о разложении является весьма эффективным средством построения начальной функции операторного выражения, имеющего вид рациональной дроби. Теорема может быть обобщена на случай, когда $F(p)$ — мероморфная функция с простыми полюсами $p_i \neq 0$. Такую функцию можно представить в виде отношения двух целых трансцендентных функций:

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)}.$$

В этом случае

$$\frac{M(p)}{N(p)} \rightarrow \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{p_k N'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (1.117)$$

Если полюсы p_1, p_2, \dots — простые, то, обозначая вычеты $F(p)$ относительно этих полюсов соответственно через b_1, b_2, \dots и принимая во внимание известную формулу

$$b_k = \lim_{p \rightarrow p_k} (p-p_k) \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{M(p_k)}{N'(p_k)},$$

представим формулу (1.117) в следующем виде:

$$F(p) \rightarrow F(0) + \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{p_k} e^{p_k t}. \quad (1.118)$$

15. Начальные функции целых положительных степеней оператора p . Рассмотрим функцию $\sigma_1^*(t, h)$, которая равна $1/h$ для $0 \leq t \leq h$ и нулю для $t > h$ (рис. 9):

$$\sigma_1^*(t, h) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{при } 0 \leq t \leq h, \\ 0 & \text{при } t > h. \end{cases} \quad (1.119)$$

¹⁾ Это соотношение можно получить из формул (1.90) с помощью теоремы смещения.

Изображение этой функции найдем, вычислив интеграл

$$p \int_0^{\infty} e^{-pt} \sigma_1^*(t, h) dt = \frac{p}{h} \int_0^h e^{-pt} dt = \frac{1}{h} (1 - e^{-ph}),$$

откуда

$$\frac{1}{h} (1 - e^{-ph}) \rightarrow \sigma_1^*(t, h). \quad (1.120)$$

В полученном соотношении полагаем $h=0$. Предел левой части будет изображением предела правой. Но предел левой части (по правилу Лопиталья)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-ph}}{h} = p.$$

Предел правой части принимаем за определение так называемой *импульсивной функции первого порядка* $\sigma_1(t)$. Таким образом,

$$\sigma_1(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \sigma_1^*(t, h) \quad (1.121)$$

и

$$p \rightarrow \sigma_1(t). \quad (1.122)$$

По теореме об изображении интегрирования

$$\frac{1}{p} p \rightarrow \int_0^t \sigma_1(t) dt$$

или

$$1 \rightarrow \int_0^t \sigma_1(t) dt. \quad (1.123)$$

С другой стороны, $1 \rightarrow \sigma_0(t)$. Следовательно,

$$\sigma_1(t) = \sigma_0'(t). \quad (1.124)$$

Функция $\sigma_1(t)$ равна нулю для всех t , кроме $t=0$, где она обращается в ∞ . На основании (1.123) ее можно истолковать как мгновенную силу, импульс которой равен единице. Мгновенную силу, сообщающую массе m в начальный момент $t=0$ начальную скорость v_0 , можно представить с помощью функции $\sigma_1(t)$ следующим выражением:

$$\sigma_1(t) m v_0.$$

Если t — время, то размерность функции $\sigma_1(t)$ будет $[1/\text{сек}]$.

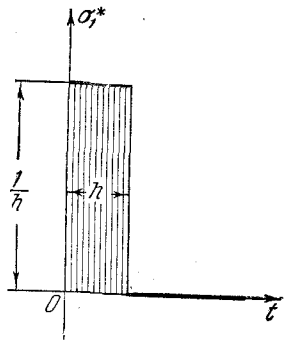


Рис. 9.

Рассмотрим теперь функцию $\sigma_2^*(t, h)$, определяемую следующим образом (рис. 10):

$$\sigma_2^*(t, h) = \begin{cases} \frac{1}{h^2} & \text{при } 0 < t < h, \\ -\frac{1}{h^2} & \text{при } h \leq t \leq 2h, \\ 0 & \text{при } t > 2h. \end{cases}$$

Изображение этой функции

$$\frac{1}{h^2} (1 - 2e^{-ph} + e^{-2ph}) \rightarrow \sigma_2^*(t, h). \quad (1.125)$$

Предел левой части (1.125)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (1 - 2e^{-ph} + e^{-2ph}) = p^2.$$

Предел правой части есть *импульсивная функция второго порядка*, обозначаемая дальше через $\sigma_2(t)$:

$$\sigma_2(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \sigma_2^*(t, h). \quad (1.126)$$

Таким образом, при $h=0$ из (1.126) имеем:

$$p^2 \rightarrow \sigma_2(t). \quad (1.127)$$

Из последней формулы находим

$$p \rightarrow \int_0^t \sigma_2(t) dt, \quad \sigma_2(t) = \sigma_1'(t).$$

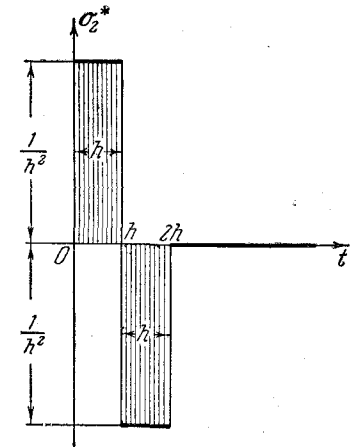


Рис. 10.

Размерность $\sigma_2(t)$, как следует из ее определения, есть $[1/\text{сек}^2]$.

Будучи умножена на массу m и длину x_0 , функция $\sigma_2(t)$ приобретает размерность силы ($\kappa\Gamma$)

$$F = m x_0 \sigma_2(t),$$

причем, когда $m=1$ и $x_0=1$, то

$$F = \sigma_2(t). \quad (2.2)$$

На этом основании функцию $\sigma_2(t)$ можно трактовать как мгновенную силу, которая единичной массе сообщает единичное перемещение.

С помощью функций $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$, где вместо времени независимой переменной служит абсцисса x , можно определять «интенсивность» сосредоточенных нагрузок и таким образом включать в состав распределенной по балке нагрузки сосредоточенные силы и моменты. В самом деле, размерность функции, которую задается закон распределения нагрузки вдоль балки и которая фигурирует, например, в правой части уравнения упругой линии

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x),$$

есть размерность интенсивности нагрузки $[\kappa\Gamma/м]$. Произведения сосредоточенной силы P $\kappa\Gamma$ и сосредоточенного момента M $\kappa\Gamma м$ соответственно на функции $\sigma_1(x - x_0)$, $\sigma_2(x - x_0)$

$$P\sigma_1(x - x_0), M\sigma_2(x - x_0)$$

имеют ту же размерность $[\kappa\Gamma/м]$. Эти произведения можно, таким образом, рассматривать как величины, определяющие интенсивность сосредоточенной в точке $x = x_0$ нагрузки силой или моментом.

ГЛАВА II

СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

1. Системы с одной степенью свободы. Механической системой с одной степенью свободы называется система, положение которой в пространстве однозначно определяется заданием одной обобщенной координаты q , а движение системы под действием приложенных к ней сил — изменением этой координаты с течением времени. Такой системой является, например, маятник часов, колеблющийся в вертикальной плоскости, перпендикулярной к его оси O (рис. 11). Положение такого маятника однозначно определяется одной обобщенной координатой — углом θ между вертикалью Oy и плоскостью, проходящей через ось и центр тяжести C .

Простейшим колебательным движением системы с одной степенью свободы является гармоническое колебание, в котором обобщенная координата q изменяется с течением времени по закону синуса (или косинуса)

$$q(t) = A \sin(\omega t + \alpha). \quad (2.1)$$

Коэффициент A — значение координаты q , соответствующее максимальному отклонению системы в одну сторону, — называется амплитудой колебания. Аргумент синуса — величина $\omega t + \alpha$ — называется фазой колебания; α — начальной фазой.

Множитель ω представляет так называемую собственную круговую частоту колебания. Обозначим через τ (сек) наименьший промежуток времени, за который система, выйдя из некоторого состояния q , \dot{q} , снова возвращается в него с теми же значениями q , \dot{q} , совершив одно так называемое полное колебание. Этот промежуток времени называется периодом колебания. С круговой частотой ω период связан соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}, \quad (2.2)$$

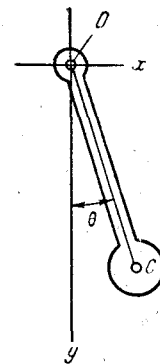


Рис. 11.

из которого следует, что *круговая частота равна числу полных колебаний системы за 2π сек.* Вместе с тем, очевидно,

$$\left. \begin{aligned} q(t + \tau) &= q(t), \\ \dot{q}(t + \tau) &= \dot{q}(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Последние равенства являются необходимыми и достаточными условиями периодичности состояний движения системы.

2. Малые свободные колебания системы около устойчивого равновесного состояния. Условимся отсчитывать «координаты состояния» системы q и \dot{q} от равновесного ее состояния, предполагая, что в этом состоянии не только \dot{q} , но и q равно нулю. Тогда отличные от нуля значения координат q , \dot{q} будут определять отклонения системы от этого состояния или *возмущения* ее равновесного состояния. Получив некоторое начальное возмущение и предоставленная затем самой себе, система будет совершать так называемое *возмущенное движение*. Равновесное состояние, определяемое нулевыми значениями координат q и \dot{q} , называется устойчивым, если, задавшись сколь угодно малым положительным числом $\varepsilon > 0$, мы сумеем подобрать по нему другое положительное число $\eta > 0$, зависящее от ε , такое, что во время возмущенного движения q и \dot{q} не превзойдут по абсолютной величине ε , если их начальные значения q_0 , \dot{q}_0 были выбраны согласно неравенствам

$$|q_0| \leq \eta, \quad |\dot{q}_0| \leq \eta. \quad (2.4)$$

Это значит, что, получив достаточно малое начальное возмущение, система в дальнейшем движении пребывает в ближайшей окрестности невозмущенного равновесного состояния или возвращается в равновесное состояние, совершая около него более или менее быстро затухающие колебания. Ни одна координата состояния — ни q , ни \dot{q} — в этих колебаниях не превзойдет по абсолютной величине числа ε : колебания системы будут, как говорят, *малыми колебаниями* около состояния устойчивого равновесия.

При исследовании малых колебаний около устойчивого равновесного состояния во многих случаях можно (не совершая большой погрешности) сохранять в выражениях, зависящих от координат и скоростей, только члены низшего (относительно этих величин) порядка, отбрасывая все другие как бесконечно малые высших порядков. Такая операция приводит обычно решение задачи о малых колебаниях к интегрированию линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Она называется «линеаризацией» уравнений движения системы. Колебания, описываемые линеаризованными дифференциальными уравнениями, называются *линейными колебаниями*. Линеаризация уравнений малых колебаний может иногда оказаться результатом некоторых конструктивных изменений в рассматриваемой

или проектируемой системе, что до известной степени служит основанием ее допустимости.)

В соответствии с изложенными замечаниями о линеаризации составим выражения кинетической и потенциальной энергии малых колебаний консервативной системы, подчиненной стационарным связям, около устойчивого состояния равновесия, предполагая, что оно определяется нулевыми значениями координат $q = \dot{q} = 0$. Для такой системы уравнения связей (1.8) имеют вид

$$x_i = x_i(q), \quad y_i = y_i(q), \quad z_i = z_i(q).$$

Подставив в выражение кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

производные

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q} \dot{q}, \quad \dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial q} \dot{q}, \quad \dot{z}_i = \frac{\partial z_i}{\partial q} \dot{q},$$

получим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial q} \right)^2 \right] \dot{q}^2 = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2.$$

Ограничиваясь в разложении коэффициента $A(q)$ по степеням q первым членом, т. е. положив приближенно

$$A(q) \approx A(0) = a,$$

придем к следующему выражению кинетической энергии линеаризованной системы:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2. \quad (2.5)$$

Здесь a — существенно положительная величина, так как кинетическая энергия отрицательных значений иметь не может¹⁾.

Что касается потенциальной энергии Π , то в случае стационарных связей она является функцией только координаты q :

$$\Pi = \Pi(q)$$

и может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Если за начало отсчета потенциальной энергии выбрано равновесное состояние системы, в котором $q = 0$, то

$$\Pi(0) = 0.$$

¹⁾ Обычно a — масса или момент инерции.

В этом состоянии равна нулю и первая производная $\frac{d\Pi}{dq}$ ¹⁾. Поэтому разложение $\Pi(q)$ по степеням q в области $q=0$ начинается с членов не ниже второй степени относительно q , т. е. будет иметь вид

$$\Pi(q) = \frac{1}{2} cq^2 + \dots,$$

где $c = \left[\frac{d^2\Pi}{dq^2} \right]_{q=0}$. Для малых колебаний

$$\Pi(q) = \frac{1}{2} cq^2. \quad (2.6)$$

В рассматриваемых дальше линейных системах $c > 0$, так что нулевое значение потенциальной энергии в устойчивом равновесном состоянии является ее минимальным значением для всех q , не превосходящих по абсолютной величине некоторой достаточно малой границы. В равновесном состоянии равна нулю и кинетическая энергия системы. Таким образом, равенство нулю потенциальной энергии в равновесном состоянии влечет за собой равенство нулю полной энергии системы в этом состоянии и наоборот.

3. Уравнения малых свободных колебаний линейной системы. Колебания системы называются свободными, если скорость изменения состояния системы определяется только состоянием самой системы, а именно восстанавливающей равновесное состояние силой, зависящей от величины q , которая определяет отклонение системы из этого состояния, и сопротивлением, пропорциональным скорости \dot{q} . Такую систему мы называем дальше *линейным осциллятором*.

Если не учитывать сопротивлений, то уравнение колебаний линейного осциллятора будет иметь вид

$$a\ddot{q} = -cq. \quad (2.7)$$

Введя обозначение $\frac{c}{a} = k^2$, найдем

$$q = B \cos kt + C \sin kt. \quad (2.8)$$

Заменив произвольные постоянные B и C другими A и α по формулам $B = A \sin \alpha$, $C = A \cos \alpha$, представим решение (2.8) в следующем виде:

$$q = A \sin(kt + \alpha). \quad (2.9)$$

¹⁾ См. (1.18).

Если в начальный момент, когда $t=0$,

$$q = q_0, \quad \dot{q} = \dot{q}_0,$$

то

$$\left. \begin{aligned} B &= q_0, & C &= \frac{\dot{q}_0}{k}, \\ A &= \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{k^2}}, & \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{kq_0}{\dot{q}_0}. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Таким образом, амплитуда и начальная фаза свободных колебаний определяются начальными условиями, а круговая частота

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (2.11)$$

и период

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}}$$

от начальных условий не зависят.

Предположим теперь, что кроме восстанавливающей силы на систему действует сопротивление, обобщенная сила которого R пропорциональна скорости \dot{q} :

$$R = -\alpha\dot{q},$$

где $\alpha > 0$.

В этом случае уравнение колебаний системы, составленное по схеме уравнения Лагранжа, будет иметь вид

$$a\ddot{q} + cq = -\alpha\dot{q}$$

или, если ввести обозначения $\frac{\alpha}{a} = 2n$, $\frac{c}{a} = k^2$:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0. \quad (2.12)$$

Решение уравнения (2.12) будет иметь различную форму в зависимости от соотношений между n и k .

а) *Первый случай*: $n < k$ (случай «малого» сопротивления).

Характеристическое уравнение

$$z^2 + 2nz + k^2 = 0 \quad (2.13)$$

при $n < k$ имеет комплексные корни

$$z_1 = -n + ik_1, \quad z_2 = -n - ik_1,$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$, $i = \sqrt{-1}$. В этом случае

$$\begin{aligned} q &= e^{-nt} (B_1 \cos k_1 t + C_1 \sin k_1 t) = \\ &= e^{-nt} \left(q_0 \cos k_1 t + \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{k_1} \sin k_1 t \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где q_0 и \dot{q}_0 — начальные значения координат q и \dot{q} , когда $t=0$. Введя вместо постоянных B_1 и C_1 другие A и β по формулам

$$B_1 = A \sin \beta, \quad C_1 = A \cos \beta,$$

представим решение (2.14) в виде

$$q = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \beta). \quad (2.15)$$

Сравнивая последнее уравнение с уравнением (2.9), приходим к заключению:

1) Отклонения Ae^{-nt} системы с сопротивлением с течением времени убывают по экспоненциальному закону, асимптотически приближаясь к нулю (рис. 12): колебания, как говорят, «затухают».

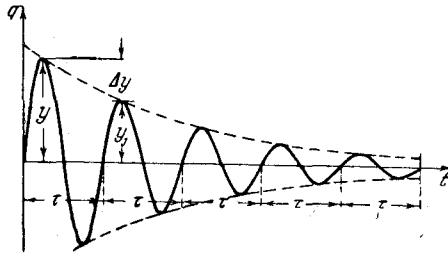


Рис. 12.

В этом затухании и выражается прежде всего влияние сопротивления на свободные колебания.

2) Из уравнения (2.15) видно, что q меняет знак периодически, т. е. система проходит положение равновесия через одинаковые промежутки времени. Промежуток времени τ_1

между двумя последовательными прохождениями системы через положение равновесия с одинаковым направлением скорости называется *периодом затухающих колебаний*. Это наименование является условным, так как для затухающих колебаний условия периодичности (2.3), за исключением моментов прохождения через равновесное положение, не выполняются. В таком же смысле затухающие колебания могут быть названы *изохронными колебаниями*, поскольку промежутки времени между прохождением через положение равновесия (с одинаковым направлением скорости), т. е. период колебания, остается постоянным, как бы малы ни были отклонения системы.

Величина периода τ_1 вычисляется по формуле

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}}, \quad (2.16)$$

где $\tau_0 = \frac{2\pi}{k}$ — период свободных колебаний той же системы без сопротивлений. При достаточно малом n период τ_1 можно вычислять по приближенной формуле

$$\tau_1 \approx \frac{2\pi}{k} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{k} \right)^2 \right] = \tau_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{k} \right)^2 \right].$$

3) Отношение двух последовательных амплитудных отклонений системы от равновесного положения в одну сторону называется *коэффициентом затухания* ψ :

$$\psi = \frac{Ae^{-nt}}{Ae^{-n(t+\tau_1)}} = e^{n\tau_1}. \quad (2.17)$$

Так как ψ — величина постоянная, то значения амплитудных отклонений убывают в геометрической прогрессии.

Коэффициентом затухания пользуются для характеристики быстроты убывания амплитуд. Однако более подходящим для этой цели является натуральный логарифм коэффициента затухания ψ , так называемый *логарифмический декремент колебаний*

$$\delta = \ln \psi = n\tau_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 1}}. \quad (2.18)$$

Из формул (2.16) и (2.18) следует, что

$$\frac{\tau_1}{\tau_0} = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2}}.$$

Как видно из последней формулы, сопротивление значительно больше влияет на убывание амплитуд, чем на изменение периода колебаний. Так, при $\tau_1/\tau_0 = 1,1$, что соответствует увеличению периода на $0,1\tau_0$, $\delta \approx 2,879$ и $\psi \approx 17,80$. За два полных колебания амплитуда уменьшится почти в 316 раз, т. е. практически колебания прекратятся.

Для опытного определения декремента δ часто пользуются еще одной приближенной формулой. Обозначим через y и y_1 два последовательных (через период) отклонения, и пусть

$$y - y_1 = \Delta y.$$

Тогда

$$\delta = \ln \frac{y}{y - \Delta y} = \ln \left[1 + \frac{\Delta y}{y} + \left(\frac{\Delta y}{y} \right)^2 + \dots \right] \approx \frac{\Delta y}{y}. \quad (2.19)$$

Отношение $\frac{\Delta y}{y}$ можно найти, например, путем замеров на осциллограмме изменений отклонения за один или несколько периодов колебаний (рис. 12).

6) *Второй случай: $n > k$* (случай «большого» сопротивления). В этом случае оба корня характеристического уравнения (2.13) вещественны и отрицательны:

$$z_1 = -n + k_2, \quad z_2 = -n - k_2,$$

где $k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}$. Общий интеграл уравнения (2.12) будет иметь вид

$$q = e^{-nt} (C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}). \quad (2.20)$$

Постоянные C_1 и C_2 находятся из начальных условий. Если при $t=0$

$$q = q_0, \quad \dot{q} = \dot{q}_0,$$

то

$$C_1 = \frac{q_0(k_2 + n) + \dot{q}_0}{2k_2}, \quad C_2 = \frac{q_0(k_2 - n) - \dot{q}_0}{2k_2} \quad (2.21)$$

и

$$q = e^{-nt} \left[\frac{q_0(k_2 + n) + \dot{q}_0}{2k_2} e^{k_2 t} + \frac{q_0(k_2 - n) - \dot{q}_0}{2k_2} e^{-k_2 t} \right]. \quad (2.22)$$

Отклонение q обращается в нуль, т. е. система проходит через положение равновесного состояния в моменты времени, определяемые уравнением

$$e^{-(k_2 + n)t} \left[\frac{q_0(k_2 + n) + \dot{q}_0}{2k_2} e^{2k_2 t} + \frac{q_0(k_2 - n) - \dot{q}_0}{2k_2} \right] = 0. \quad (2.23)$$

Каковы бы ни были значения выражения в квадратных скобках, правая часть последнего уравнения стремится к нулю, когда $t \rightarrow \infty$.

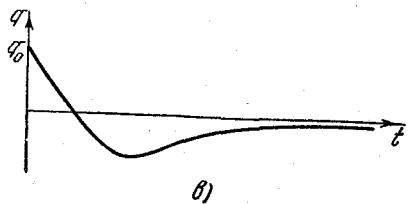
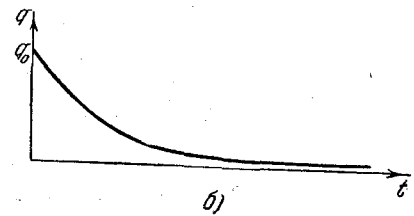
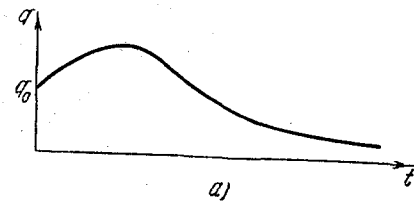


Рис. 13.

равновесное положение. График изменений q в этом случае будет иметь вид рис. 13, в. Во всех других случаях q будет все время такого же знака, что и q_0 : система будет асимптотически прибли-

жаться к невозмущенному равновесному состоянию. Но это приближение может происходить по-разному. Второй множитель (2.23) может обратиться в нуль еще и в момент времени $0 < t < \infty$, т. е. система может пройти через равновесное состояние и отклониться в другую сторону, если

$$e^{2k_2 t} = \frac{\dot{q}_0 + (n - k_2) q_0}{\dot{q}_0 + (n + k_2) q_0} > 0, \quad (2.24)$$

что при $q_0 > 0$ возможно, когда $\dot{q}_0 < 0$ и $|\dot{q}_0| > (n + k_2) q_0$. Найдется, таким образом, единственный момент, в который система совершит переход через равновесное положение, отклонившись от него один раз в другую (по отношению к начальному) сторону, после чего система с этой другой стороны возвращается в

жаться к равновесному состоянию с одной стороны, не переходя на другую сторону (рис. 13, а и б).

Итак, в случае, когда $n > k$, возмущенное движение системы не будет колебательным. Оно носит название *апериодического движения*.

в) *Третий случай*: $n = k$. Корни характеристического уравнения в этом случае будут вещественными, равными и отрицательными, а общий интеграл уравнения (2.11) будет иметь вид

$$q = e^{-nt} (C_1 t + C_2). \quad (2.25)$$

Возмущенное движение, как и в предыдущем случае, будет апериодическим¹⁾, и ход изменения q графически представится кривыми, подобными кривым на рис. 13.

Пример 1. Малые колебания математического маятника длины l и массы m (рис. 14).

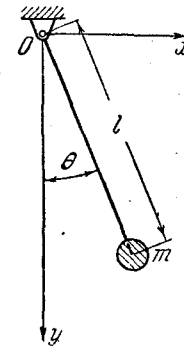


Рис. 14.

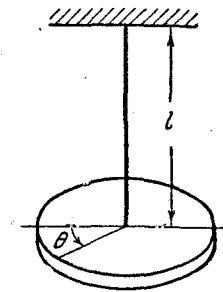


Рис. 15.

За обобщенную координату возьмем угол θ . Координаты массы m равны

$$x = l \sin \theta, \quad y = l \cos \theta,$$

а ее кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2.$$

Потенциальная энергия маятника в указанном на рисунке положении равна работе, которую совершит вес mg на перемещении маятника из этого положения в положение устойчивого равновесия (на вертикали Oy)

$$\Pi = mgl (1 - \cos \theta).$$

Для малых колебаний

$$\Pi = \frac{1}{2} mgl \theta^2.$$

¹⁾ Его называют *предельным апериодическим движением*.

Из уравнения малых колебаний гармонического осциллятора (2.7), которое в данном случае примет вид

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0,$$

найдем частоту k и период T колебаний маятника

$$k = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.26)$$

Пример 2. Найти частоту малых крутильных колебаний диска, прикрепленного к нижнему концу невесомого упругого стержня, верхний конец которого жестко закреплен (рис. 15).

Задача решается аналогично предыдущей. Пусть масса диска M , радиус инерции относительно оси стержня ρ ; жесткость стержня на кручение равна

$$c = \frac{GJ_p}{l},$$

где G — модуль сдвига (в кг/см^2); J_p — момент инерции поперечного сечения стержня (в см^4). Кинетическая энергия диска равна

$$T = \frac{1}{2} M \rho^2 \dot{\theta}^2,$$

где θ — угол отклонения от положения равновесия. Потенциальная энергия для малых отклонений, в пределах действия закона Гука, выражается в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} c \theta^2.$$

Из уравнения

$$M \rho^2 \ddot{\theta} + c \theta = 0$$

находим частоту малых крутильных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{M \rho^2}}.$$

Пример 3. Упрощенный расчет гидравлического демпфера или катаракта, принципиальная схема которого представлена на рис. 16.

Демпфер состоит из наполненного вязкой жидкостью цилиндра D , в котором движется поршень P , снабженный отверстиями A . Поршень штоком B соединен с грузом G , подвешенным пружиной C к неподвижной точке O . Сопротивление, встречаемое поршнем при движении его в цилиндре (так называемое *вязкое трение*), пропорционально первой степени скорости

$$R = -\alpha \dot{q},$$

причем q есть расстояние центра тяжести системы P, B, G от положения равновесия. Наиболее сложной частью расчета является определение величины коэффициента α , зависящего от многих факторов. Мы воспользуемся здесь следующим выражением этого коэффициента¹⁾:

$$\alpha = \frac{128 \mu l a^2}{\pi d^4},$$

¹⁾ Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И., Курс теоретической механики, 1954, т. II, стр. 85.

где μ — коэффициент вязкости, выраженный в технической системе единиц ($\frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2}$), l — длина отверстий A , d — диаметр отверстий, σ — площадь поршня, z — число отверстий. Если Q — вес всей колеблющейся системы (груз, поршень и поршневой шток), H — диаметр поршня, то

$$n = \frac{64 \mu l a^2 g}{\pi d^4 z Q} = \frac{4 \pi g \mu l}{Q z} \left(\frac{H}{d}\right)^4.$$

Пользуясь этой формулой, можно подсчитать размеры основных деталей конструкции и выбрать жидкость для заполнения демпфера под заданное торможение. Пусть, например, $z = 100$; длина отверстий $l = 5$ см; отношение $\frac{H}{d} = 10$; коэффициент вязкости (для толуола) $59 \cdot 10^{-6}$ $\text{кг} \cdot \text{сек}/\text{м}^2$. При таких данных $n \approx 0,365/Q$ 1/сек. Если $Q = 0,1$ кг, статическое удлинение пружины $0,1$ см, то $k = 31$ 1/сек и $n = 3,65$ 1/сек. Мы имеем, таким образом, дело со случаем «малого» сопротивления и затухания колебаний. Логарифмический декремент $\delta = 0,37$.

Заполнив цилиндр жидкостью большей вязкости, например, глицерином, можно будет получить и аperiodическое движение.

4. Вынужденные колебания линейной системы с одной степенью свободы. Вынужденные колебания возникают в механической системе в результате воздействия на нее внешних (обычно периодических) возмущающих сил или ударов (импульсов).

Мы начнем с разбора простейшего случая, когда внешняя возмущающая сила изменяется по гармоническому закону

$$Q = H \sin pt,$$

где H — максимальное значение или амплитуда возмущающей силы; p — число полных циклов изменения силы за 2π секунд. Уравнение колебаний линейного осциллятора в предположении, что, кроме силы Q , на него действует восстанавливающая сила, пропорциональная отклонению q , и сопротивление отсутствует, напишем следующим образом:

$$a \ddot{q} + cq = H \sin pt$$

или

$$\ddot{q} + k^2 q = h \sin pt, \quad (2.27)$$

где $h = \frac{H}{a}$, $k^2 = \frac{c}{a}$.

Общее решение этого уравнения при $p \neq k$ получится как сумма общего решения однородного уравнения

$$\ddot{q} + k^2 q = 0$$

и частного решения уравнения (2.27):

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt;$$

здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пусть при $t=0$ $q=q_0$ и $\dot{q}=\dot{q}_0$. Тогда

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{k} - \frac{hp}{k(k^2 - p^2)}$$

и

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt - \frac{hp}{k(k^2 - p^2)} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (2.28)$$

Первые два слагаемых правой части уравнения (2.28) соответствуют свободным колебаниям с собственной частотой k , т. е. колебаниям, какие совершал бы осциллятор в отсутствие возмущающей силы. При так называемых нулевых начальных условиях, когда $q_0 = \dot{q}_0 = 0$ при $t=0$, такие колебания во все время действия возмущающей силы не возникают.

Третье слагаемое — гармоническое колебание, происходящее с собственной частотой k , но с амплитудой, зависящей от возмущающей силы. Это колебание также относится к свободным колебаниям. Оно всегда сопровождает вынужденные колебания, при любых начальных условиях, от которых оно вообще не зависит. Его мы будем называть *свободным сопровождающим колебанием*.

Четвертое слагаемое

$$\frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt = q_3 \quad (2.29)$$

представляет чисто вынужденные колебания осциллятора.

Таким образом, колебания линейного осциллятора в рассматриваемом случае представляют линейное наложение трех гармонических колебаний: 1) свободных; 2) сопровождающих свободных и 3) чисто вынужденных.

Отметим следующие свойства вынужденных колебаний, вытекающие из уравнения (2.29).

а) Вынужденные колебания происходят с частотой возмущающей силы.

б) Вынужденные колебания в отличие от свободных ни в чем не зависят от начальных условий. Поэтому для изменения, например, амплитуды вынужденных колебаний необходимы (при заданной возмущающей силе) существенные изменения параметров системы: ее жесткости, распределения масс, тогда как в свободных колебаниях для этого достаточно изменения начального отклонения или начальной скорости.

в) Если $k > p$, то знак отклонения q_3 будет совпадать со знаком силы Q , т. е. сила и вызванные ею вынужденные перемещения будут находиться в одной фазе. Если $k < p$, то знак силы будет противоположен знаку отклонения. Переписав для этого случая уравнение (2.29) следующим образом:

$$q_3 = \frac{h}{p^2 - k^2} \sin(pt + \pi),$$

мы можем сказать, что при $k < p$ возмущающая сила и вызванные ею колебания находятся в противоположных фазах.

г) Когда $k = p$, выражение (2.29) теряет смысл. Теряет смысл также и слагаемое общего решения (2.28), соответствующее свободным сопровождающим колебаниям. Однако рассматриваемые совместно, оба названные слагаемые при $k = p$ дают только неопределенность

$$-\frac{hp}{k(k^2 - p^2)} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt = h \left[\frac{-p \sin kt + k \sin pt}{k(k^2 - p^2)} \right]_{k=p} = \frac{0}{0},$$

которую можно раскрыть по правилу Лопиталья, заменив дробь в квадратных скобках пределом при $p \rightarrow k$ отношения производных по p от числителя и знаменателя:

$$h \left[\frac{-p \sin kt + k \sin pt}{k(k^2 - p^2)} \right] = \lim_{p \rightarrow k} h \left[\frac{-\sin kt + kt \cos pt}{-2kp} \right] = \\ = \frac{h}{2k^2} \sin kt - \frac{ht}{2k} \cos kt.$$

Таким образом, общий интеграл (2.28) будет иметь вид

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt + \frac{h}{2k^2} \sin kt - \frac{ht}{2k} \cos kt. \quad (2.30)$$

И здесь, как в (2.28), движение осциллятора представляет линейное наложение трех колебательных движений, но с одним существенным отличием от (2.28): вынужденные колебания представлены в нем неперiodическим членом

$$-\frac{ht}{2k} \cos kt,$$

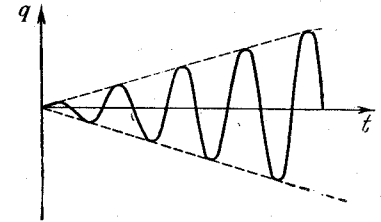


Рис. 17.

в коэффициент которого входит множителем время t . Такой член называется *вековым*. С течением времени он растет по абсолютной величине безгранично, причем определяемые им колебания происходят с возрастающими по линейному закону отклонениями, как показано на рис. 17. Совпадение частоты возмущающей силы с собственной частотой системы и сопровождающие его явления носят название *резонанса*.

При наличии сопротивления, которое мы, как и раньше, примем пропорциональным первой степени скорости \dot{q} , положив

$$R = -\alpha \dot{q},$$

мы найдем только одно решение, годное для любых значений p , в частности, и для резонансного $p = k$.

В самом деле, уравнение колебаний линейного осциллятора в прежних обозначениях будет в этом случае иметь вид

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = h \sin pt. \quad (2.31)$$

Его общее решение найдется как сумма общего решения уравнения без правой части:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0, \quad (2.32)$$

и частного решения уравнения (2.31) с правой частью. Решения уравнения (2.32) при различных соотношениях между n и k нам известны. В частности, при $n < k$ решение этого уравнения

$$q_1 = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) \quad (k_1 = \sqrt{k^2 - n^2})$$

определяет свободные затухающие колебания.

Частное решение q_2 уравнения (2.31) мы будем искать, положив

$$q_2 = A \sin (pt - \varepsilon)$$

и подбирая величины A и ε так, чтобы это выражение, будучи подставлено в уравнение (2.31), обратило его в тождество. Из уравнений

$$\begin{aligned} A(k^2 - p^2) &= h \cos \varepsilon, \\ 2Anp &= h \sin \varepsilon, \end{aligned}$$

получающихся при сравнении коэффициентов при $\sin pt$ и $\cos pt$ в обеих частях уравнения (2.31), находим

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Общий интеграл уравнения (2.31), таким образом, имеет вид

$$q = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin (pt - \varepsilon).$$

Если в начальный момент $t=0$ $q=q_0$ и $\dot{q}=\dot{q}_0$, то

$$\begin{aligned} q &= e^{-nt} \left(q_0 \cos k_1 t + \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{k_1} \sin k_1 t \right) + \\ &+ A e^{-nt} \left(\sin \varepsilon \cos k_1 t + \frac{n \sin \varepsilon - p \cos \varepsilon}{k_1} \sin k_1 t \right) + A \sin (pt - \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Первые два слагаемых полученного решения соответствуют свободным и свободным сопровождающим колебаниям. И те, и другие с течением времени затухают, так что через более или менее продолжительный промежуток времени ими можно будет вообще пренебречь и считать, что в дальнейшем движении система совершает только чисто вынужденные колебания согласно уравнению

$$q = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin (pt - \varepsilon). \quad (2.34)$$

Этим уравнением будет определяться установившийся колебательный режим линейного осциллятора и при других соотношениях между n и k : когда $n > k$ или $n = k$.

На рис. 18 представлен общий ход установления колебательного режима системы с сопротивлением при действии на нее гармонической возмущающей силы.

Из уравнения (2.34) можно сделать следующие выводы:

а) Вынужденные колебания и при наличии сопротивлений происходят с частотой возмущающей силы. Это всеобщий закон вынужденных колебаний линейного осциллятора, имеющий место независимо от условий, в каких происходят его вынужденные колебания, в частности, независимо от того, имеются ли в системе сопротивления или нет.

б) Амплитуда вынужденных колебаний от начальных условий и времени не зависит. С течением времени она не изменяется и, следовательно, вынужденные колебания, в отличие от свободных, от сопротивлений не затухают. При резонансе, когда $p = k$, амплитуда вынужденных колебаний остается конечной и притом не самой большой из возможных ее значений для данной системы. В самом деле, разыскивая значение p , при котором амплитуда

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \quad (2.35)$$

достигает максимума, найдем, что это случится, когда

$$p^2 = k^2 - 2n^2,$$

т. е. до наступления резонанса, при $p < k$.

в) В вынужденных колебаниях с сопротивлением всегда имеет место сдвиг фазы колебания по сравнению с фазой возмущающей силы. Величина ε этого сдвига определяется формулой

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (2.36)$$

Максимальное значение, равное $\frac{\pi}{2}$, сдвиг фазы имеет при резонансе, когда $p = k$.

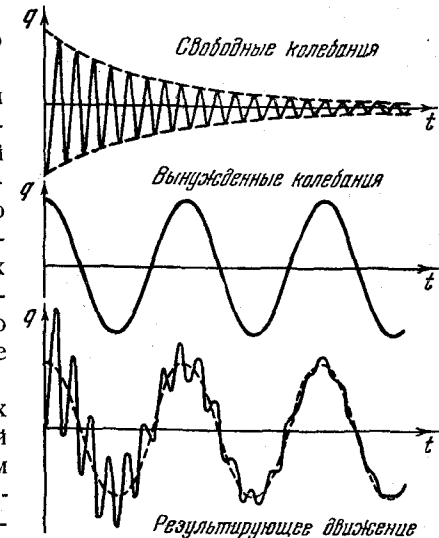


Рис. 18.

Амплитудой вынужденных колебаний определяются максимальные динамические напряжения, возникающие в упругих системах от воздействия на них гармонических возмущающих сил. В высшей степени важно заметить, что величина этих напряжений, как и амплитуды A , зависит не столько от величины возмущающей силы, сколько от частоты ее изменений во времени. При одном и том же значении H амплитуда и возникающие в системе напряжения могут значительно изменяться в зависимости от изменений частоты p . Для

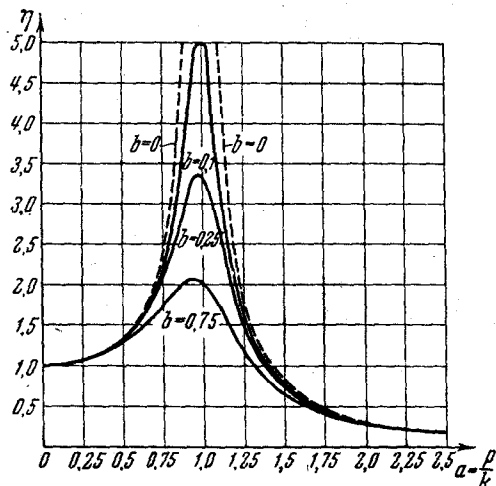


Рис. 19.

оценки этих изменений их сравнивают со статическим отклонением A_0 системы при действии на нее силы H

при вынужденных колебаниях от силы $H \sin pt$ больше максимального статического отклонения от постоянной силы H . На рис. 19 так называемыми *резонансными кривыми* представлен ход изменения абсолютной величины коэффициента динамичности η в зависимости от частоты возмущающей силы (от $a = \frac{p}{k}$) для некоторых значений коэффициента сопротивления $b = \frac{n}{k}$. Пунктиром показана резонансная кривая для $n=0$ в отсутствие сопротивления, когда коэффициент динамичности

$$\eta = \frac{1}{1-a^2} = \frac{1}{1-\frac{p^2}{k^2}}. \quad (2.39)$$

Эта кривая имеет разрыв в точке $a=1$.

Из рассмотрения резонансных кривых на рис. 19 обнаруживается следующий факт, имеющий значение в приближенных расчетах амплитуд вынужденных колебаний. В областях, достаточно далеких от

оценки этих изменений их сравнивают со статическим отклонением A_0 системы при действии на нее силы H

$$A_0 = \frac{H}{c} = \frac{h}{k^2}. \quad (2.37)$$

Отношение амплитуды A к A_0 , равное

$$\frac{A}{A_0} = \eta = \frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^2 + 4a^2b^2}}, \quad (2.38)$$

где $a = \frac{p}{k}$, $b = \frac{n}{k}$, называется *коэффициентом динамичности*. Коэффициент динамичности показывает во сколько раз максимальное динамическое отклонение

резонанса, амплитуды при относительно малом сопротивлении почти не отличаются от соответствующих амплитуд вынужденных колебаний без сопротивления, определяемых более простой формулой

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2}.$$

В этих областях при вычислении амплитуд можно совсем не учитывать сопротивлений, которые вообще с трудом поддаются точному определению.

Хотя амплитуды вынужденных колебаний с сопротивлением остаются конечными и при резонансе, однако при более или менее продолжительной работе деталей машин в резонансных условиях всегда имеется опасность полного или частичного их разрушения от усталостных напряжений. При проектировании конструкции, подверженной воздействию возмущающих сил, стараются поэтому подобрать соотношения размеров и прочности ее деталей так, чтобы по возможности отодвинуть условия нормального режима работы ее от резонансных условий¹⁾. Для той же цели служат специальные устройства, как, например, нелинейные муфты, виброгасители и т. п.

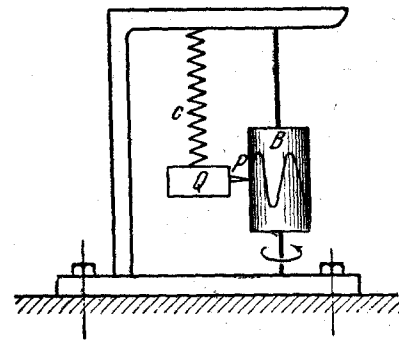


Рис. 20.

Пример 4. Элементарная теория вибрографа для записи вертикальных колебаний фундамента.

Схема устройства вибрографа показана на рис. 20. Груз Q подвешен на пружине, прикрепленной к раме прибора. Рама жестко соединяется с фундаментом и таким образом участвует в колебаниях последнего — так же, как и вращающийся барабан B , на котором груз Q , перемещаясь вверх и вниз, с помощью пера P записывает колебания фундамента. Вертикальные перемещения груза Q являются относительными перемещениями по отношению к раме и барабану. Уравнение этих относительных перемещений можно составить как уравнение абсолютного движения, если к заданным силам, действующим на груз, добавить переносную силу инерции его массы. Предположим, что фундамент вместе с вибрографом совершает гармонические колебания с амплитудой a и частотой p , т. е. согласно уравнению $x = a \sin pt$. Переносная сила инерции груза Q в этом движении равна

$$-\frac{Q}{g} \ddot{x} = a \frac{Q}{g} p^2 \sin pt.$$

Уравнение относительных колебаний груза будет поэтому

$$\ddot{q} + k^2 q = ap^2 \sin pt,$$

где $k^2 = cg/Q$, c — жесткость пружины.

¹⁾ О некоторых явлениях резонанса в машинах см. гл. V.

Установившиеся вынужденные колебания груза Q относительно барабана, если пренебречь свободными колебаниями, будут происходить согласно уравнению

$$q = \frac{ap^2}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Амплитуда этих колебаний

$$A = \frac{a}{\left(\frac{k}{p}\right)^2 - 1}$$

не будет точно равна амплитуде колебаний фундамента, но ее искажение будет тем меньше, чем меньше собственная частота прибора k сравнительно с p , т. е. чем меньше будет жесткость пружины и чем больше масса груза. Например, если $k/p = 0,1$, то

$$|A| = \frac{a}{0,99} = 1,01 a.$$

Ошибка прибора в этом случае не будет превосходить 1%.

Пример 5. Колебания груза, подвешенного на пружине, под действием возмущающей силы, зависящей от времени.

Если за начало отсчета отклонений принять положение равновесия груза, то уравнение движения будет иметь вид

$$m\ddot{x} + cx = f(t), \quad (2.40)$$

где m — масса груза, а c — жесткость пружины. Полагая в начальный момент $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = v_0$ и введя обозначения

$$X(p) \doteq x(t), \quad F(p) \doteq f(t),$$

составим изображение уравнения (2.40):

$$mp^2 \left[X(p) - x_0 - \frac{v_0}{p} \right] + cX(p) = F(p),$$

из которого

$$X(p) = \frac{F(p)}{mp^2 + c} + \frac{mpv_0}{mp^2 + c} + \frac{mp^2x_0}{mp^2 + c}. \quad (2.41)$$

Начальную функцию первого слагаемого находим по теореме свертывания:

$$\frac{F(p)}{mp^2 + c} = \frac{1}{mkp} F(p) \frac{kp}{p^2 + k^2} \doteq \frac{1}{mk} \int_0^t f(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau,$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

Второе слагаемое дает

$$\frac{mpv_0}{mp^2 + c} = \frac{v_0}{k} \frac{kp}{p^2 + k^2} \doteq \frac{v_0}{k} \sin kt,$$

а третье

$$\frac{mp^2x_0}{mp^2 + c} = x_0 \frac{p^2}{p^2 + k^2} \doteq x_0 \cos kt.$$

Начальная функция всего выражения (2.41), т. е. искомое решение уравнения (2.40), имеет вид

$$x(t) = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt + \frac{1}{km} \int_0^t f(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau \quad (2.42)$$

или

$$x(t) = a \sin(kt + \alpha) + \frac{1}{km} \int_0^t f(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau,$$

где

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{v_0}.$$

Изображение уравнения (2.40) можно было бы получить еще и таким образом. Можно считать, что в начальный момент $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, а к грузу в этот момент, кроме силы $f(t)$, приложены две мгновенные силы

$$mv_0\sigma_1(t), \quad mx_0\sigma_2(t),$$

где $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ — импульсивные функции первого и второго порядков. Исходное дифференциальное уравнение (2.40) теперь напишется в виде

$$m\ddot{x} + cx = f(t) + mv_0\sigma_1(t) + mx_0\sigma_2(t).$$

Построив изображение этого уравнения с помощью формул (1.122) и (1.127), мы снова придем к выражениям (2.41) и (2.42).

Решение (2.42) при произвольных x_0 и v_0 не является периодическим. Однако в том случае, когда возмущающая сила $f(t)$ — периодическая функция с известным периодом τ , можно подобрать начальные значения $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = v_0$ так, что соответствующее этим начальным значениям решение уравнения (2.40) будет периодическим с тем же периодом τ . Оно определит при таких условиях чисто вынужденные колебания системы. Пусть, например,

$$f(t) = h \sin \omega t \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{\tau} \right).$$

Тогда

$$F(p) = \frac{h\omega p}{p^2 + \omega^2}$$

и изображение уравнения (2.40) будет иметь вид

$$(mp^2 + c)X(p) = \frac{h\omega p}{p^2 + \omega^2} + mpv_0 + mp^2x_0.$$

Отсюда

$$X(p) = \frac{h}{m(k^2 - \omega^2)} \left[\frac{\omega p}{p^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{k} \frac{kp}{p^2 + k^2} \right] + \frac{v_0 kp}{k(p^2 + k^2)} + \frac{x_0 p^2}{p^2 + k^2}$$

и

$$x(t) = \frac{h}{m(k^2 - \omega^2)} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin kt \right) + x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \quad (2.43)$$

Функция $x(t)$ будет периодической с периодом $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$, если x_0 и v_0 будут удовлетворять условиям периодичности

$$x(\tau) - x(0) = 0, \quad \dot{x}(\tau) - \dot{x}(0) = 0,$$

которые, после подстановки в них (2.43), обратятся в уравнения

$$x_0(1 - \cos k\tau) - \frac{v_0}{k} \sin k\tau = -\frac{h\omega \sin k\tau}{km(k^2 - \omega^2)},$$

$$x_0 \sin k\tau + \frac{v_0}{k}(1 - \cos k\tau) = \frac{h\omega(1 - \cos k\tau)}{km(k^2 - \omega^2)}.$$

Из этих уравнений находим

$$x_0 = 0, \quad v_0 = \frac{h\omega}{m(k^2 - \omega^2)}.$$

При таких начальных условиях система под действием возмущающей силы $h \sin \omega t$ будет совершать чисто вынужденные гармонические колебания с периодом $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$, определяемые уравнением

$$x(t) = \frac{h}{m(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

В приложениях получение периодического частного решения уравнения (2.40), соответствующего чисто вынужденным колебаниям, является большей частью единственной целью расчета. Иногда такое решение легко построить с помощью условий периодичности, как в только что рассмотренном примере. В других случаях более удобным оказывается использование обратной теоремы об изображении периодических функций (стр. 51), что дает возможность уже в изображении общего решения выделить изображение решения периодического и таким образом получить периодическое решение без предварительного составления общего решения.

Пример 6. Колебания груза, подвешенного на пружине, под действием повторяющихся с периодом τ импульсов. Уравнение движения груза можно представить так:

$$\ddot{x} + k^2 x = S[\sigma_1(t) + \sigma_1(t - \tau) + \sigma_1(t - 2\tau) + \dots]. \quad (2.44)$$

Здесь $k^2 = \frac{c}{m}$ — квадрат собственной частоты колебаний груза, S — отнесенный к единице массы импульс, $\sigma_1(t)$ — импульсивная функция первого порядка, x — отклонение центра тяжести груза от положения равновесия. Из изображения уравнения (2.44) при начальных условиях $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = v_0$

$$p^2 \left[X(p) - x_0 - \frac{v_0}{p} \right] + k^2 X(p) = \frac{Sp}{1 - e^{-p\tau}}$$

находим изображение искомой функции — общего решения уравнения (2.44)

$$X(p) = \frac{Sp}{(p^2 + k^2)(1 - e^{-p\tau})} + \frac{p^2 x_0 + p v_0}{p^2 + k^2}.$$

Чтобы выделить отсюда изображение периодического решения периода τ , представим $X(p)$ в виде дроби

$$X(p) = \frac{\Psi(p)}{1 - e^{-p\tau}},$$

положив

$$\Psi(p) = \frac{Sp}{p^2 + k^2} + \frac{p^2 x_0 + p v_0}{p^2 + k^2} (1 - e^{-p\tau}), \quad (2.45)$$

и подберем значения x_0 , v_0 так, чтобы оригинал $\psi(t)$ функции $\Psi(p)$ был равен нулю для $t > \tau$. Но для $t > \tau$

$$\psi(t) = \frac{S}{k} \sin kt + x_0 [\cos kt - \cos k(t - \tau)] + \frac{v_0}{k} [\sin kt - \sin k(t - \tau)] =$$

$$= \sin kt \left[\frac{S}{k} - x_0 \sin k\tau + \frac{v_0}{k}(1 - \cos k\tau) \right] +$$

$$+ \cos kt \left[x_0(1 - \cos k\tau) + \frac{v_0}{k} \sin k\tau \right].$$

Чтобы это выражение равнялось нулю для $t > \tau$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$x_0 \sin k\tau - \frac{v_0}{k}(1 - \cos k\tau) = \frac{S}{k},$$

$$x_0(1 - \cos k\tau) + \frac{v_0}{k} \sin k\tau = 0,$$

откуда

$$x_0 = \frac{S}{2k} \operatorname{ctg} \frac{k\tau}{2}, \quad \frac{v_0}{k} = -\frac{S}{2k}.$$

Подставив эти значения в (2.45), получим изображение искомого периодического решения уравнения (2.44)

$$\Psi(p) = \frac{S}{2k} \left[\frac{2pk}{p^2 + k^2} + \frac{p^2}{p^2 + k^2} (1 - e^{-p\tau}) \operatorname{ctg} \frac{k\tau}{2} - (1 - e^{-p\tau}) \frac{pk}{p^2 + k^2} \right].$$

Этому изображению соответствует оригинал

$$\psi(t) = \frac{S}{2k} \left[\sin kt + \cos kt \operatorname{ctg} \frac{k\tau}{2} + \sin k(t - \tau) - \cos k(t - \tau) \operatorname{ctg} \frac{k\tau}{2} \right].$$

Периодическое решение в промежутке $0 \leq t \leq \tau$ получим, отбросив в выражении $\psi(t)$ последние слагаемые

$$\sin k(t - \tau) \text{ и } \cos k(t - \tau) \operatorname{ctg} \frac{k\tau}{2},$$

как равные нулю для $t < \tau$. В результате приходим к следующему уравнению вынужденных колебаний груза:

$$x(t) = \frac{S}{2k} \left(\sin kt + \cos kt \operatorname{ctg} \frac{k\tau}{2} \right), \quad (2.46)$$

определяющему движение в течение первого периода $0 \leq t \leq \tau$. Чтобы найти отклонения груза для $t > \tau$, нужно периодически подвинуть график функции (2.46) на промежутки, содержащий это значение t .

Общее решение уравнения (2.44) получим, построив оригинал изображения

$$X(p) = \frac{p^2 x_0 + p v_0}{p^2 + k^2} + \frac{Sp}{(p^2 + k^2)(1 - e^{-p\tau})}.$$

Оригинал первого слагаемого есть

$$x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

Оригинал второго слагаемого ¹⁾ найдем с помощью теоремы о разложении

$$\frac{M(p)}{N(p)} \rightarrow \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{M(p_h)}{p_h N'(p_h)} e^{p_h t}, \quad (2.47)$$

где

$$M(p) = Sp, \quad N(p) = (p^2 + k^2)(1 - e^{-p\tau}).$$

Знаменатель $N(p)$ имеет простые корни ²⁾

$$\pm ik; \quad \pm \frac{2n\pi i}{\tau} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Первое слагаемое правой части (2.47)

$$\frac{M(0)}{N(0)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{M'(p)}{N'(p)} = \frac{S}{k^2 \tau}.$$

Корням $\pm ik$ знаменателя соответствуют два слагаемых под знаком суммы:

$$\frac{S}{2ki} \cdot \frac{e^{ikt}}{1 - e^{ik\tau}}, \quad -\frac{S}{2ki} \cdot \frac{e^{-ikt}}{1 - e^{-ik\tau}},$$

где $i = \sqrt{-1}$. Объединив эти слагаемые, получим

$$\frac{S}{2ki} \left(\frac{e^{ikt}}{1 - e^{-ik\tau}} - \frac{e^{-ikt}}{1 - e^{ik\tau}} \right) = \frac{S}{2k} \left(\sin kt - \cos kt \operatorname{ctg} \frac{k\tau}{2} \right).$$

Слагаемые, соответствующие другим корням знаменателя, имеют вид

$$\frac{M(p_h)}{p_h N'(p_h)} = \frac{S}{\tau} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi h i t}{\tau}}}{k^2 - \frac{4h^2 \pi^2}{\tau^2}} \quad (h = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Объединив под знаком суммы в правой части (2.47) слагаемые с одинаковыми по абсолютной величине индексами, получим

$$\frac{S}{\tau} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{2\pi h i t}{\tau}}}{k^2 - \frac{4h^2 \pi^2}{\tau^2}} = \frac{2S}{\tau} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi h t}{\tau}}{k^2 - \frac{4h^2 \pi^2}{\tau^2}} - \frac{S}{k^2 \tau}.$$

¹⁾ Второе слагаемое является мероморфной функцией с простыми полюсами. Здесь оно трактуется как рациональная дробь, причем используется теорема о разложении дроби, когда знаменатель ее имеет простые корни.

²⁾ Нуль является простым корнем и знаменателя, и числителя, а потому в число полюсов функции не входит.

Окончательно для общего решения уравнения (2.44) имеем

$$x(t) = \frac{S}{2k} \left(\sin kt - \cos kt \operatorname{ctg} \frac{k\tau}{2} \right) + \frac{2S}{\tau} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi h t}{\tau}}{k^2 - \frac{4h^2 \pi^2}{\tau^2}} + x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

Периодическое решение с периодом возмущающих импульсов может быть найдено и более простыми средствами. В самом деле, получив в начальный момент удар S , груз в течение промежутка времени τ до следующего удара движется под действием только упругой восстанавливающей силы $-cx$, так что в течение этого промежутка уравнение движения его имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \quad \left(k^2 = \frac{cg}{Q} = \frac{c}{m} \right)$$

с общим решением

$$x = A \cos kt + B \sin kt.$$

В этом решении нужно подобрать постоянные A и B так, чтобы для x были выполнены условия периодичности (2.3), которые в рассматриваемом случае следует написать так:

$$\begin{aligned} x(0) - x(\tau) &= 0, \\ \dot{x}(0) - \left[\dot{x}(\tau) + \frac{S}{m} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Подставив сюда общее решение, получим для постоянных A и B уравнения

$$\begin{aligned} A(1 - \cos k\tau) - B \sin k\tau &= 0, \\ A \sin k\tau + B(1 - \cos k\tau) &= \frac{S}{km}. \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим

$$A = \frac{S}{2km} \operatorname{ctg} \frac{k\tau}{2}, \quad B = \frac{S}{2km}.$$

Искомое частное периодическое решение для значений t в пределах первого периода $0 \leq t \leq \tau$ будет иметь вид

$$x(t) = \frac{S}{2mk} \left(\sin kt + \operatorname{ctg} \frac{k\tau}{2} \cos kt \right) = \frac{S \cos k \left(t - \frac{\tau}{2} \right)}{2km \sin \frac{k\tau}{2}}.$$

Чтобы получить отклонения для $t > \tau$, нужно периодически продолжить график $x(t)$ на соответствующий участок оси t .

Резонанс будет иметь место, когда

$$\frac{k\tau}{2} = n\pi, \quad k = n \frac{2\pi}{\tau},$$

где n — целое число, т. е. при совпадении собственной частоты с кратным частоты ударов.

Пример 7. Системы с сопротивлением, пропорциональным скорости. Уравнение вынужденных колебаний с сопротивлением, пропорциональным скорости, может быть приведено к такой форме:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + n^2x = f(t), \quad (2.48)$$

где 2α — отнесенный к единице массы коэффициент сопротивления, $f(t)$ — отнесенная к единице массы возмущающая сила, $n^2 = \frac{c}{m}$ — квадрат собственной частоты системы. Если

$$\begin{aligned} F(p) &\rightarrow f(t), \\ X(p) &\rightarrow x(t), \end{aligned}$$

то при начальных условиях $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ изображение уравнения (2.48) будет иметь вид

$$p^2 \left[X(p) - x_0 - \frac{v_0}{p} \right] + 2\alpha p [X(p) - x_0] + n^2 X(p) = F(p).$$

Изображение искомой функции

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^2 + 2\alpha p + n^2} + \frac{x_0 p^2 + (v_0 + 2\alpha x_0)p}{p^2 + 2\alpha p + n^2}.$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. Случай «малого» сопротивления: $\alpha < n$. Положив

$$n_1^2 = n^2 - \alpha^2,$$

представим изображение $X(p)$ в таком виде:

$$X(p) = \frac{1}{p} F(p) \frac{p}{(p+\alpha)^2 + n_1^2} + \frac{x_0 p (p+\alpha)}{(p+\alpha)^2 + n_1^2} + \frac{p(v_0 + \alpha x_0)}{(p+\alpha)^2 + n_1^2}.$$

Начальную функцию первого слагаемого находим по теореме свертывания. Так как

$$\frac{n_1 p}{(p+\alpha)^2 + n_1^2} \rightarrow e^{-\alpha t} \sin n_1 t,$$

то

$$\frac{1}{p} F(p) \frac{p}{(p+\alpha)^2 + n_1^2} \rightarrow \frac{1}{n_1} \int_0^t f(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \sin n_1(t-\tau) d\tau.$$

Второе и третье слагаемые изображают функции

$$\begin{aligned} \frac{x_0 p (p+\alpha)}{(p+\alpha)^2 + n_1^2} &\rightarrow x_0 e^{-\alpha t} \cos n_1 t, \\ \frac{v_0 + \alpha x_0}{n_1} \frac{n_1 p}{(p+\alpha)^2 + n_1^2} &\rightarrow \frac{v_0 + \alpha x_0}{n_1} e^{-\alpha t} \sin n_1 t. \end{aligned}$$

Искомая функция

$$x(t) = e^{-\alpha t} \left(x_0 \cos n_1 t + \frac{v_0 + \alpha x_0}{n_1} \sin n_1 t \right) + \frac{1}{n_1} \int_0^t f(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \sin n_1(t-\tau) d\tau. \quad (2.49)$$

2. Случай «большого» сопротивления: $\alpha > n$. Положив

$$n_2^2 = \alpha^2 - n^2,$$

находим изображение искомой функции

$$X(p) = \frac{1}{p} F(p) \frac{p}{(p+\alpha)^2 - n_2^2} + \frac{x_0 p (p+\alpha)}{(p+\alpha)^2 - n_2^2} + \frac{(v_0 + \alpha x_0)p}{(p+\alpha)^2 - n_2^2}.$$

Оригиналы второго и третьего слагаемых строим с помощью теоремы смещения:

$$\frac{x_0 p (p+\alpha)}{(p+\alpha)^2 - n_2^2} = x_0 \frac{p}{(p+\alpha)} \frac{(p+\alpha)^2}{(p+\alpha)^2 - n_2^2} \rightarrow x_0 e^{-\alpha t} \operatorname{ch} n_2 t,$$

$$\frac{(v_0 + \alpha x_0)p}{(p+\alpha)^2 - n_2^2} = \frac{v_0 + \alpha x_0}{n_2} \frac{p}{p+\alpha} \frac{n_2 (p+\alpha)}{(p+\alpha)^2 - n_2^2} \rightarrow \frac{v_0 + \alpha x_0}{n_2} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} n_2 t.$$

Оригинал первого слагаемого находим по теореме свертывания:

$$\frac{1}{p} F(p) \frac{p}{(p+\alpha)^2 - n_2^2} \rightarrow \int_0^t f(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \operatorname{sh} n_2(t-\tau) d\tau.$$

Таким образом, при $\alpha > n$

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-\alpha t} \left(x_0 \operatorname{ch} n_2 t + \frac{v_0 + \alpha x_0}{n_2} \operatorname{sh} n_2 t \right) + \\ + \int_0^t f(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \operatorname{sh} n_2(t-\tau) d\tau. \quad (2.50) \end{aligned}$$

3. В случае так называемого предельного аperiodического движения, когда $\alpha = n$ ($n_1 = n_2 = 0$),

$$X(p) = \frac{1}{p} F(p) \frac{p}{(p+\alpha)^2} + \frac{x_0 p}{p+\alpha} + \frac{(v_0 + \alpha x_0)p}{(p+\alpha)^2}.$$

По формулам (1.92) и (1.90) находим

$$\frac{p}{p+\alpha} \rightarrow e^{-\alpha t}, \quad \frac{p}{(p+\alpha)^2} \rightarrow t e^{-\alpha t}.$$

По теореме свертывания

$$\frac{1}{p} F(p) \frac{p}{(p+\alpha)^2} \rightarrow \int_0^t f(\tau) (t-\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau.$$

Таким образом, в случае $\alpha = n$

$$x(t) = e^{-\alpha t} [x_0 + (v_0 + \alpha x_0)t] + \int_0^t f(\tau) (t-\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau. \quad (2.51)$$

5. Разложение возмущающей силы в ряд Фурье. В этом разделе мы рассмотрим более общий случай вынужденных колебаний, когда возмущающая сила — периодическая функция времени. Для нахождения чисто вынужденных колебаний системы в установившемся ее колебательном режиме иногда эффективным является метод разложения возмущающей силы в ряд Фурье. Мы изложим этот метод применительно к уравнению

$$\ddot{q} + k^2 q = f(t), \quad (2.52)$$

где $f(t)$ — отнесенная к единице массы или момента инерции периодическая возмущающая сила с периодом τ .

При известных условиях¹⁾, которые мы будем считать выполненными, функция $f(t)$ разлагается в конечный или бесконечный тригонометрический ряд (ряд Фурье)

$$f(t) = b_0 + \sum_{r=1}^{\infty} (a_r \sin r\omega t + b_r \cos r\omega t), \quad (2.53)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{\tau}, \quad b_0 = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt, \\ a_r &= \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \sin r\omega t dt, \quad b_r = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \cos r\omega t dt. \end{aligned} \right\} \quad (2.53')$$

С помощью преобразования

$$\sin r\omega t = \frac{1}{2i}(e^{ir\omega t} - e^{-ir\omega t}), \quad \cos r\omega t = \frac{1}{2}(e^{ir\omega t} + e^{-ir\omega t}),$$

где $i = \sqrt{-1}$, ряд (2.53) приводится к комплексной форме, которая во многих случаях оказывается более пригодной для рассматриваемой здесь задачи, чем обычная (2.53). В комплексной форме ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} C_r e^{ir\omega t}, \quad (2.54)$$

где

$$C_r = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) e^{-ir\omega t} dt.$$

Перепишем теперь уравнение (2.52) следующим образом:

$$\ddot{q} + k^2 q = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} C_r e^{ir\omega t}. \quad (2.55)$$

¹⁾ См. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, гл. VI, «Наука», 1967.

Опираясь на известное свойство линейных дифференциальных уравнений, в силу которого решение уравнения (2.55) может быть получено как линейная сумма частных решений, соответствующих каждому отдельному слагаемому правой части, будем искать функцию $q(t)$, удовлетворяющую уравнению (2.55), также в форме комплексного ряда

$$q(t) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} A_r e^{ir\omega t}. \quad (2.56)$$

Подставив (2.56) в уравнение (2.55) и приравняв коэффициенты при одинаковых $e^{ir\omega t}$, получим

$$A_r = \frac{C_r}{k^2 - \omega^2 r^2},$$

и (2.56) переписывается так:

$$q(t) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{C_r e^{ir\omega t}}{k^2 - r^2 \omega^2}. \quad (2.57)$$

Чтобы получить разложение $q(t)$ в вещественной форме, нужно в выражении (2.57) отделить действительную часть от мнимой и сохранить в качестве решения одну из них (в зависимости от условий задачи).

Как видно из (2.57), для получения функции $q(t)$, определяющей чисто вынужденные колебания, достаточно умножить каждый член ряда

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} C_r e^{ir\omega t}$$

на соответствующий (по индексу) множитель

$$A(r\omega) = \frac{1}{k^2 - r^2 \omega^2}. \quad (2.58)$$

Этот множитель мы назовем *гармоническим коэффициентом влияния* частоты $r\omega$. Гармонический коэффициент равен амплитуде установившихся вынужденных колебаний системы от единичной возмущающей силы частоты $r\omega$.

Ряд (2.57) теряет смысл, если при каком-либо r

$$r\omega = k,$$

так как тогда соответствующий такому r член ряда обращается в бесконечность. Это — случай резонанса с r -й гармонической составляющей («гармоникой») возмущающей силы $f(t)$. Таких резонансов теоретически может быть бесконечное число. В практических расчетах

ряд (2.57) ограничивают конечным числом членов, так как они обычно довольно быстро убывают (по абсолютной величине). Впрочем, опасность той или иной гармоники в «резонансном» отношении определяется не столько величиной ее коэффициента, сколько близостью ее частоты к собственной частоте системы, т. е. величиной разности $k^2 - r^2\omega^2$. Когда эта разность для некоторого r достаточно мала, то в приближенном расчете можно иногда ограничиться одной r -й гармоникой, отбросив все остальные, как не влияющие существенно на величину динамических отклонений (напряжений) системы.

Пример 8. Найти вынужденные колебания груза массы m , подвешенного на пружине, под действием силы

$$f(t) = f_0 \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} \right).$$

Обозначим жесткость пружины через c . Дифференциальное уравнение колебаний, если пренебречь сопротивлением, можно написать следующим образом:

$$\ddot{q} + k^2 q = h \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} \right), \quad (2.59)$$

где $h = \frac{f_0}{m}$, $k^2 = \frac{c}{m}$. Чтобы получить решение этого уравнения, соответствующее чисто вынужденным колебаниям, находим по формуле (2.58) гармонические коэффициенты частот ω и 3ω :

$$A(\omega) = \frac{1}{k^2 - \omega^2}, \quad A(3\omega) = \frac{1}{k^2 - 9\omega^2}.$$

Искомое решение будет

$$q(t) = A(\omega) h \sin \omega t + A(3\omega) \frac{h}{3} \sin 3\omega t = \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t + \frac{h}{3(k^2 - 9\omega^2)} \sin 3\omega t.$$

Оно имеет смысл только для k , не равного ω или 3ω , т. е. в отсутствие резонанса. Если бы k равнялось ω , то решение уравнения (2.59) имело бы вид

$$q(t) = -\frac{ht}{2\omega} \cos \omega t - \frac{h}{24\omega^2} \sin 3\omega t.$$

Периодическая функция $f(t)$ часто задается графически или таблицей равноотстоящих числовых значений на протяжении одного периода. В таких случаях ее разложение в ряд Фурье производится приближенно одним из способов «практического гармонического анализа». Так, например, разлагается в ряде Фурье вращающий момент от давления газов в цилиндре, приложенный к одному из колен вала двигателя внутреннего сгорания. Этот момент представляет сложную периодическую функцию угла поворота вала α , которая строится известным образом по экспериментальной индикаторной диаграмме. Для одного цилиндра двухтактного двигателя эта функция на протя-

жении одного периода 2π (соответствующего одному обороту вала) имеет вид кривой, представленной на рис. 21, где первая половина периода ($0 - \pi$) соответствует сжатию, а вторая ($\pi - 2\pi$) — рабочему ходу.

В практических расчетах большей частью достаточно бывает получения небольшого числа первых членов («гармоник») ряда, иногда только одной гармоники. В зависимости от требуемой точности разложение выполняется по 6, 12, 24 и т. д. равноотстоящим значениям, или «ординатам» функции $f(\alpha)$. Так, при разложении по 12 ординатам снимают с графика функции $f(\alpha)$ значения ее для 12 равноотстоящих значений аргумента α (через каждые 30°):

$$\frac{\pi}{6}, 2 \frac{\pi}{6}, 3 \frac{\pi}{6}, \dots, 11 \frac{\pi}{6}, 12 \frac{\pi}{6}.$$

Пусть эти значения f будут

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_{12}.$$

Тогда вместо интегралов (2.53) будем иметь суммы

$$b_0 \approx \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} f_i, \quad (2.60)$$

$$b_k \approx \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{12} f_i \cos \frac{ik\pi}{12}, \quad a_k \approx \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{12} f_i \sin \frac{ik\pi}{12}. \quad (2.61)$$

Коэффициенты A_k и фазовые углы γ_k гармоник ряда Фурье вычисляются по формулам

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \operatorname{tg} \gamma_k = \frac{a_k}{b_k}. \quad (2.62)$$

Для вычисления нескольких гармоник функции $f(\alpha)$ прибегают к одной из вычислительных схем, описание которых можно найти в любом достаточно полном курсе математического анализа или в курсах приближенных вычислений¹⁾.

¹⁾ См. также Лурье И. А., Крутильные колебания в дизельных установках, Военмориздат, 1940, стр. 187.

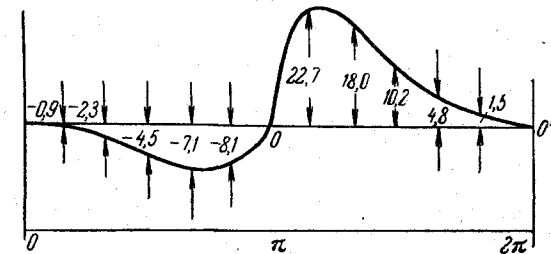


Рис. 21.

Пример 9. Формулами (2.61) можно пользоваться непосредственно, когда требуется вычислить только одну какую-либо, например так называемую «опасную» в резонансном отношении, гармонику. Для такого вычисления

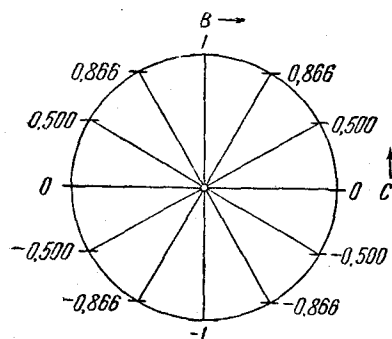


Рис. 22.

можно построить следующую элементарную схему. Разделив окружность (рис. 22) на 12 равных частей, выписываем значения \sin для 12 углов рядом с делениями, в направлении от C против часовой стрелки. Различных по абсолютной величине значений \sin будет всего лишь четыре: 0; 0,500; 0,866; 1. Значения $\sin 2\alpha$, $\sin 3\alpha$, ... получим, беря написанные числа через 2, 3, 4, ... интервала. Умножив затем эти значения на рядом стоящие в таблице 2 значения $f(\alpha_i)$, складываем полученные произведения и, разделив сумму на 6, получаем приближенное значение a_k . Для вычисления b_k обходим окружность на рис. 22 от точки B по часовой стрелке, беря написанные числа через 2, 3, 4, ... интервала; умножаем эти числа на соответствующие значения $f(\alpha_i)$ и сумму полученных произведений делим на 6. По формуле (2.62) вычисляем коэффициент A_k искомой гармоники и ее фазовый угол γ_k . Вычислим, например, вторую гармонику вращающего момента, ход изменения которого за один период представлен на рис. 21.

В табл. 2 приведены результаты вычисления коэффициентов a_2 и b_2 .

Таблица 2

α°	$f(\alpha)$	$\cos 2\alpha$	$f(\alpha) \cos 2\alpha$	$\sin 2\alpha$	$f(\alpha) \sin 2\alpha$
30	-0,9	+0,5	-0,45	0,866	-0,9 · 0,866
60	-2,3	-0,5	1,15	0,866	-2,3 · 0,866
90	-4,5	-1	4,50	0	0
120	-7,1	-0,5	3,55	-0,866	7,1 · 0,866
150	-8,1	0,5	-4,05	-0,866	8,1 · 0,866
180	0	1	0	0	0
210	22,7	0,5	11,35	0,866	22,7 · 0,866
240	18,0	-0,5	-9,00	0,866	18,0 · 0,866
270	10,2	-1	-10,20	0	0
300	4,8	-0,5	-2,40	-0,866	-4,8 · 0,866
330	1,5	0,5	0,75	-0,866	-1,5 · 0,866
360	0	1	0	0	0
			$b_2 = 0,80$		$a_2 = 7,73$

ГЛАВА III

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

1. Системы с конечным числом степеней свободы. Механические системы, расчет колебаний которых составляет содержание многих практических задач, являются большей частью сложными упругими системами. Это балки и стержни постоянного и переменного сечений; прямые (ступенчатые) валы с насаженными на них дисками; коленчатые валы двигателей внутреннего сгорания; лопатки, диски турбин и т. п. Для полного определения деформаций, возникающих в таких системах при колебаниях, необходимо знать перемещения всех точек системы; иначе говоря, нужно найти в виде некоторых функций времени и положения точек бесконечное число величин (координат), определяющих эти перемещения в любой момент времени. Упругие системы являются, таким образом, системами с бесконечным числом степеней свободы.

Во многих случаях изучение колебаний сплошных упругих систем, как систем с бесконечным числом степеней свободы, связано с большими затруднениями. Такие затруднения встречаются, например, при исследовании крутильных колебаний коленчатого вала с движущимися вместе с ним различными присоединенными системами (кривошипные механизмы, зубчатые передачи и пр.). Здесь возможность математической трактовки задачи о колебаниях становится осуществимой только при условии введения в расчет решительных упрощений. Техническая практика выработала много различных приемов целесообразного построения упрощенных схем устройств, для которых приходится выполнять вибрационные расчеты.

Одним из таких приемов, особенно широко используемым в машиностроении, является замена данной сложной системы другой, более простой, с другим распределением масс и жесткостей, но «близкой» к данной в том смысле, что ее расчет приводит к значениям искомых величин, не слишком сильно отличающимся от действительных для данной системы. Такая упрощенная система носит название *приведенной* или *эквивалентной приведенной системы*. Существуют

специальные правила приведения сплошных упругих систем, которые рассматриваются в разделах, относящихся к частным случаям колебаний упругих тел. Сейчас мы ограничимся описанием только одного из возможных его результатов: замены данной системы с бесконечным числом степеней свободы эквивалентной *системой с конечным числом степеней свободы*. Именно этот результат приведения или упрощения сложной системы кладется обычно в основу первоначальных исследований теории колебаний. На нем построена первая часть настоящей книги — о колебаниях систем с конечным числом степеней свободы.

Рассмотрим несколько простых примеров такого приведения. Груз, подвешенный к неподвижной точке A на пружине AB (рис. 23), если

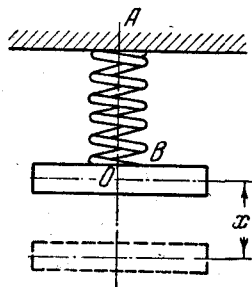


Рис. 23.

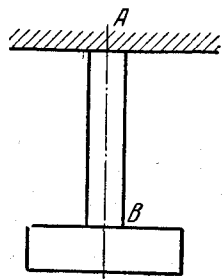


Рис. 24.

учитывать распределенную массу пружины, представляет систему с бесконечным числом степеней свободы. Но когда масса груза значительно превышает массу пружины, при нахождении наименьшей (основной) частоты колебаний без большой погрешности можно пренебречь массой пружины, сохраняя все ее свойства упругости. Если, кроме того, предположить, что груз совершает прямолинейные (вертикальные) колебания, то рассматриваемая система обращается в приведенную систему с одной степенью свободы. Для определения движения такой системы достаточно найти только одну величину в функции времени — именно, отклонение x центра тяжести груза от положения равновесия O .

При определении основной (наименьшей) частоты крутильных колебаний диска, прикрепленного к концу B круглого стержня AB (рис. 24), другой конец которого закреплен неподвижно в точке A , можно пренебречь моментом инерции стержня, если он достаточно мал по сравнению с моментом инерции диска. Тогда заданная система с бесконечным числом степеней свободы приведет к простой системе с одной степенью свободы.

При определении основных частот поперечных колебаний горизонтальной балки, шарнирно закрепленной на двух опорах (рис. 25),

массу, распределенную по тому или иному закону вдоль длины балки¹⁾, заменяют несколькими сосредоточенными массами (на нашем рисунке четырьмя), величина и положение которых определяются особыми правилами. Рассматривая малые колебания балки, обычно пренебрегают незначительными горизонтальными смещениями масс. При таких условиях для определения поперечных перемещений приведенной системы достаточно найти в функции от времени только четыре величины, именно, вертикальные отклонения q_1, q_2, q_3, q_4 сосредоточенных масс m_1, m_2, m_3, m_4 от положения равновесия системы. Этими величинами будут определяться прогибы отдельных масс при колебаниях, а вместе с ними и форма упругой линии балки

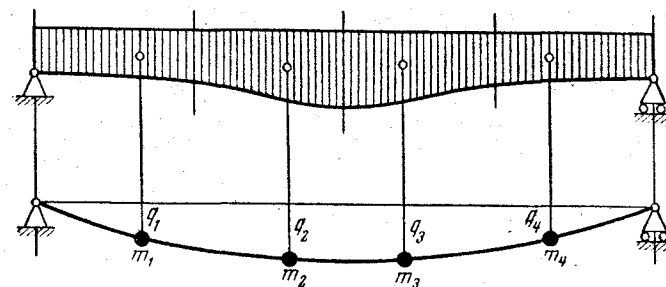


Рис. 25.

в наибольшем ее отклонении. Здесь мы имеем случай замены упругой системы эквивалентной системой с четырьмя степенями свободы.

При расчете крутильных колебаний коленчатого вала последний приводится к круглому валу постоянного сечения. Движущиеся вместе с ним массы (маховика, генератора, пропеллера, кривошипных механизмов) приводятся к сосредоточенным на определенных местах дискам с постоянными моментами инерции. Если не учитывать массы отрезков вала между дисками, то угловые отклонения дисков полностью определяют деформацию системы при крутильных колебаниях. Мы снова приходим к упрощенной приведенной системе с конечным числом степеней свободы.

Само собою разумеется, что расчет, основанный на подобных упрощениях, может дать только приближенные значения искомых величин (например, частот или периодов колебаний), вернее более или менее тесные границы их возможных значений. При этом значительная часть возможных значений искомых величин для заданной системы вообще выпадает. Но найденные таким путем границы значений величин, характеризующих так называемые основные колебания (колебания с наименьшими частотами), почти всегда являются одновременно

¹⁾ Это распределение на рис. 25 показано заштрихованной площадью.

и границами соответствующих значений тех же величин для заданной неупрощенной системы. С другой стороны, пользование приведенными системами дает значительную экономию труда и времени. Поэтому при всех своих недостатках в отношении точности результатов приведение упругих систем к системам с конечным числом степеней свободы является одним из наиболее распространенных методов практических вибрационных расчетов.

2. Кинетическая и потенциальная энергия малых свободных колебаний консервативной системы. Кинетическую энергию T системы с конечным числом степеней свободы мы получим, подставив в формулу

$$2T = \sum m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

вместо $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ их выражения (1.19) через обобщенные координаты и скорости. В случае стационарных связей кинетическая энергия будет квадратичной формой обобщенных скоростей

$$2T = A_{11}\dot{q}_1^2 + \dots + A_{nn}\dot{q}_n^2 + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots = \sum_{i,k=1}^n A_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \quad (3.1)$$

где $A_{ik} = A_{ki}$. Коэффициенты A_{ik} зависят от обобщенных координат. В случае малых колебаний около положения устойчивого равновесия, в котором

$$q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0,$$

в разложениях коэффициентов A_{ik} по степеням координат q_k

$$A_{ik} = (A_{ik})_0 + \sum_s \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_s} \right)_0 q_s + \dots, \quad (3.2)$$

где $(A_{ki})_0; \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_s} \right)_0, \dots$ — значения величин, стоящих в скобках, для $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$, можно ограничиться лишь постоянными членами $(A_{ik})_0$, полагая

$$A_{ik} \approx (A_{ik})_0 = a_{ik}.$$

Тогда выражение кинетической энергии малых колебаний системы около положения равновесия, в котором $q_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), будет иметь вид

$$2T = a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + \dots + a_{nn}\dot{q}_n^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k. \quad (3.3)$$

Таким образом, кинетическая энергия малых колебаний системы около положения равновесия может быть представлена определенно положительной квадратичной формой от обобщенных скоростей с постоянными коэффициентами.

Что касается потенциальной энергии, то, как и для систем с одной степенью свободы, в случае стационарных связей она является функцией только координат

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

В положении равновесия она имеет стационарное значение, так как здесь равны нулю частные производные от нее по всем обобщенным координатам.

Так как далее потенциальная энергия определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого, то этим обстоятельством можно распорядиться так, чтобы в положении равновесия, где все q_k равны нулю, потенциальная энергия также равнялась нулю:

$$\Pi(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

В силу указанных обстоятельств разложение функции $\Pi(q_1, \dots, q_n)$ в области «нулевого» положения начнется с членов не ниже второго порядка относительно q_k . При достаточно малом начальном возмущении в разложении потенциальной энергии по степеням q_k можно ограничиться только членами второго порядка. Мы приходим к следующему выражению для потенциальной энергии системы, совершающей малые колебания около положения устойчивого равновесия, в котором $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$:

$$2\Pi = c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2 + \dots + c_{nn}q_n^2 + 2c_{12}q_1q_2 + \dots = \sum_{i,k=1}^n c_{ik}q_iq_k. \quad (3.4)$$

Составление выражения потенциальной энергии в виде квадратичной формы от обобщенных координат для системы с конечным числом степеней свободы иногда затруднительно. В таких случаях оказываются полезными другие выражения потенциальной энергии.

Обозначим через P_1, P_2, \dots, P_n обобщенные силы, которые нужно приложить к системе, чтобы удержать ее в равновесном положении, определяемом неравными нулю значениями обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_n . В этом положении силы P_i должны уравновешивать восстанавливающие силы

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.5)$$

Следовательно,

$$P_i + Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда, принимая во внимание (3.4) и (3.5), получаем

$$P_i = c_{i1}q_1 + c_{i2}q_2 + \dots + c_{in}q_n \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.6)$$

и одного веса $P_1 = P_2 = P$, связанных шарниром B . Маятник совершает малые колебания в вертикальной плоскости около равновесного положения Ay , причем стержень AB вращается вокруг оси A , а стержень BC — вокруг шарнира B .

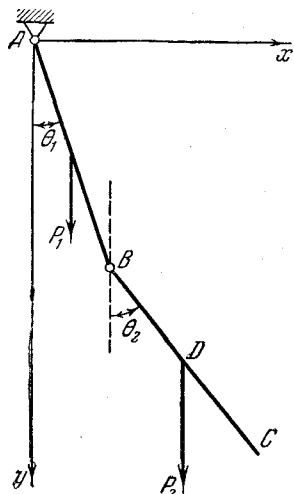


Рис. 26.

Если стержни абсолютно твердые, то рассматриваемая система имеет две степени свободы. Примем за обобщенные координаты углы θ_1 и θ_2 , образуемые стержнями AB и BC с вертикалью. В положении устойчивого равновесия, когда оба стержня располагаются по Ay ,

$$\theta_1 = \theta_2 = 0.$$

Выберем оси координат, как показано на рисунке. Кинетическая энергия двойного маятника равна сумме кинетических энергий каждого стержня. Стержень AB вращается вокруг оси A . Следовательно, его кинетическая энергия

$$T_1 = \frac{1}{2} J_A \dot{\theta}_1^2 = \frac{2}{3} \frac{P}{g} l^2 \dot{\theta}_1^2,$$

где J_A — момент инерции стержня относительно оси A . Стержень BC совершает сложное движение; его кинетическая энергия T_2 по известной теореме равна кинетической энергии центра инерции (если предположить, что в нем сосредоточена вся масса стержня), сложенной с кинетической энергией стержня в относительном вращении его вокруг центра инерции:

$$T_2 = \frac{P}{2g} (\dot{x}_D^2 + \dot{y}_D^2) + \frac{1}{2} J_D \dot{\theta}_2^2,$$

где x_D, y_D — координаты середины D стержня BC , а J_D — момент инерции относительно D . Подставив в это выражение

$$x_D = l(2 \sin \theta_1 + \sin \theta_2), \quad y_D = l(2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2), \quad J_D = \frac{P}{g} \frac{l^2}{3},$$

получим:

$$2T_2 = \frac{Pl^2}{g} [4\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 4\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] + \frac{P}{g} \frac{l^2}{3} \dot{\theta}_2^2.$$

Кинетическая энергия всей системы

$$T = \frac{2Pl^2}{3g} [4\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]. \quad (3.23)$$

Если маятник совершает малые колебания, то в разложении $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ можно ограничиться одним первым членом, положив

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 1.$$

Тогда

$$T = \frac{2Pl^2}{3g} (4\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2).$$

Потенциальная энергия равна работе весов стержней при перемещении системы из некоторого положения (θ_1, θ_2) в вертикальное положение равновесия. Работа веса первого стержня на этом перемещении будет равна

$$\Pi_1 = Pl(1 - \cos \theta_1).$$

Работа веса второго стержня BC

$$\Pi_2 = Pl[2(1 - \cos \theta_1) + (1 - \cos \theta_2)].$$

Потенциальная энергия всей системы равна

$$\Pi = Pl[4 - 3 \cos \theta_1 - \cos \theta_2]. \quad (3.24)$$

Разложение Π по степеням θ_1 и θ_2 начнется с членов второго порядка относительно θ_1 и θ_2 и будет для малых θ_1 и θ_2 иметь вид

$$2\Pi = Pl(3\theta_1^2 + \theta_2^2).$$

Уравнения колебаний напишутся здесь в обратной форме, так как в выражение потенциальной энергии входят только квадраты координат:

$$\left. \begin{aligned} 3\ddot{\theta}_1 &= -\frac{16l}{3g} \ddot{\theta}_1 - \frac{2l}{g} \ddot{\theta}_2, \\ \ddot{\theta}_2 &= -\frac{2l}{g} \ddot{\theta}_1 - \frac{4l}{3g} \ddot{\theta}_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

4. Уравнения крутильных колебаний приведенного вала с пятью дисками (рис. 27)¹⁾. Обозначим моменты инерции дисков относительно оси вала через J_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) ($\text{кг}\cdot\text{м}^2$) и погонную

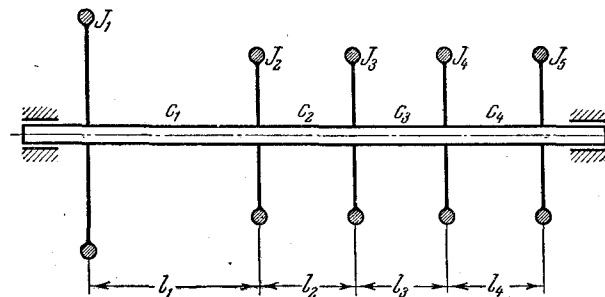


Рис. 27.

жесткость на кручение участков вала между двумя последовательными дисками через c_i ($i = 1, 2, 3, 4$), причем

$$c_i = \frac{GJ_p}{l_i} \quad (\text{кг}\cdot\text{м}).$$

Здесь G — модуль сдвига; J_p — полярный момент поперечного сечения вала, постоянный по всей длине его; l_i — длина соответствующего

¹⁾ Приведенные ниже формулы и уравнения без труда обобщаются на случай n дисков.

участка. Пренебрегая массой вала, получим систему с пятью степенями свободы. Деформированная конфигурация такой системы может быть определена угловыми отклонениями θ_i дисков от положения равновесия вала, в котором участки вала между дисками не закручены. Эти угловые отклонения обычно принимаются за обобщенные координаты системы. Кинетическая энергия системы в этих координатах представится выражением

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \dot{\theta}_1^2 + J_2 \dot{\theta}_2^2 + J_3 \dot{\theta}_3^2 + J_4 \dot{\theta}_4^2 + J_5 \dot{\theta}_5^2). \quad (3.26)$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{1}{2} [c_1 (\theta_1 - \theta_2)^2 + c_2 (\theta_2 - \theta_3)^2 + c_3 (\theta_3 - \theta_4)^2 + c_4 (\theta_4 - \theta_5)^2]. \quad (3.27)$$

Подставив (3.26) и (3.27) в уравнения (3.13), приходим к следующей системе уравнений крутильных колебаний вала в угловых отклонениях дисков:

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 &= -c_1 (\theta_1 - \theta_2) & * & & * & & * \\ J_2 \ddot{\theta}_2 &= c_1 (\theta_1 - \theta_2) - c_2 (\theta_2 - \theta_3) & & * & & & * \\ J_3 \ddot{\theta}_3 &= & * & c_2 (\theta_2 - \theta_3) - c_3 (\theta_3 - \theta_4) & & * & \\ J_4 \ddot{\theta}_4 &= & * & & * & c_3 (\theta_3 - \theta_4) - c_4 (\theta_4 - \theta_5) & \\ J_5 \ddot{\theta}_5 &= & * & & * & & c_4 (\theta_4 - \theta_5). \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Принятая в этих уравнениях система координат не является ни единственной, ни самой удобной в данном случае.

Некоторое неудобство представляет то обстоятельство, что в угловых отклонениях дисков потенциальная энергия (3.27) не является определенно-положительной формой, как это должно быть согласно изложенной выше общей теории. Колебания системы, описываемые изменениями координат θ_i , происходят не около положения устойчивого равновесия системы, а около общего вращательного движения последней. Представляется целесообразным поэтому перейти к другой системе координат, именно к системе, в которой роль обобщенных координат выполняют углы кручения участков вала между дисками, определяемые относительными угловыми отклонениями дисков¹⁾:

$$\alpha_i = \theta_i - \theta_{i+1} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (3.29)$$

В относительных угловых отклонениях исключено общее вращение вала, одинаковое для всех дисков, а вместе с тем уменьшено на единицу число степеней свободы системы. Соответственно умень-

¹⁾ Бабаков И. М., Обратный метод в применении к расчету собственных частот крутильных колебаний. Научные записки ХММИ, т. II, кн. 1, 1935.

шается и число уравнений колебаний вала. Чтобы получить эти уравнения, умножим первое уравнение (3.28) на J_2 , второе на J_1 и вычтем последнее из первого. Далее, третье уравнение, умноженное на J_2 , вычтем из второго, умноженного на J_3 , и т. д. После элементарных преобразований получим следующие уравнения крутильных колебаний в относительных угловых отклонениях дисков (или в углах кручения участков вала):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha}_1 &= -\frac{c_1 (J_1 + J_2)}{J_1 J_2} \alpha_1 + \frac{c_2}{J_2} \alpha_2 & * & & * \\ \ddot{\alpha}_2 &= \frac{c_1}{J_2} \alpha_1 - \frac{c_2 (J_2 + J_3)}{J_2 J_3} \alpha_2 + \frac{c_3}{J_3} \alpha_3 & & * & \\ \ddot{\alpha}_3 &= * & \frac{c_2}{J_3} \alpha_2 & - \frac{c_3 (J_3 + J_4)}{J_3 J_4} \alpha_3 + \frac{c_4}{J_4} \alpha_4 & \\ \ddot{\alpha}_4 &= * & * & \frac{c_3}{J_4} \alpha_3 & - \frac{c_4 (J_4 + J_5)}{J_4 J_5} \alpha_4. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Одно из преимуществ координат α_i заключается в том, что в этих координатах может быть составлена не только прямая, но и обратная система уравнений, чего нельзя сделать, пользуясь координатами θ_i , причем это составление не потребует обращения матриц, а может быть выполнено более простыми средствами.

В самом деле, потенциальная энергия получается из (3.27) сразу в виде суммы квадратов координат

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_1 \alpha_1^2 + c_2 \alpha_2^2 + c_3 \alpha_3^2 + c_4 \alpha_4^2). \quad (3.31)$$

Чтобы найти кинетическую энергию в координатах α_i , воспользуемся законом сохранения момента количества движения, выражение которого можно получить из уравнений (3.28). Складывая эти уравнения почленно, получим

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + J_2 \ddot{\theta}_2 + J_3 \ddot{\theta}_3 + J_4 \ddot{\theta}_4 + J_5 \ddot{\theta}_5 = 0,$$

откуда

$$J_1 \dot{\theta}_1 + J_2 \dot{\theta}_2 + J_3 \dot{\theta}_3 + J_4 \dot{\theta}_4 + J_5 \dot{\theta}_5 = \text{const}. \quad (3.32)$$

Сумма, стоящая в левой части (3.32), представляет собой момент количества движения приведенного вала относительно его оси. Этот момент сохраняет постоянное значение, так как внешние силы, моменты которых могли бы вызвать изменение момента количества движения, здесь отсутствуют. Если предположить, что в начальный момент диски повернуты на углы θ_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) и затем без начальных скоростей предоставлены самим себе, то постоянная в правой части уравнения (3.32) будет равна нулю, и мы будем иметь

$$J_1 \dot{\theta}_1 + J_2 \dot{\theta}_2 + J_3 \dot{\theta}_3 + J_4 \dot{\theta}_4 + J_5 \dot{\theta}_5 = 0. \quad (3.33)$$

С помощью уравнения (3.33) и осуществляется преобразование выражения кинетической энергии (3.26) к координатам α_i . Умножим и разделим удвоенную кинетическую энергию

$$J_1\dot{\theta}_1^2 + J_2\dot{\theta}_2^2 + J_3\dot{\theta}_3^2 + J_4\dot{\theta}_4^2 + J_5\dot{\theta}_5^2$$

на сумму моментов инерции

$$A = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5$$

и затем из числителя полученной дроби вычтем равное нулю выражение

$$(J_1\dot{\theta}_1 + J_2\dot{\theta}_2 + J_3\dot{\theta}_3 + J_4\dot{\theta}_4 + J_5\dot{\theta}_5)^2.$$

После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} 2T = \frac{1}{A} [& J_1(J_2 + J_3 + J_4 + J_5)\dot{\alpha}_1^2 + (J_1 + J_2)(J_3 + J_4 + J_5)\dot{\alpha}_2^2 + \\ & + (J_1 + J_2 + J_3)(J_4 + J_5)\dot{\alpha}_3^2 + (J_1 + J_2 + J_3 + J_4)J_5\dot{\alpha}_4^2 + \\ & + 2J_1(J_3 + J_4 + J_5)\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 + 2J_1(J_4 + J_5)\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_3 + 2J_1J_5\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_4 + \\ & + 2(J_1 + J_2)(J_4 + J_5)\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3 + 2(J_1 + J_2)J_5\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4 + \\ & + 2(J_1 + J_2 + J_3)J_5\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Правило составления коэффициентов правой части можно изложить так: коэффициент при $\ddot{\alpha}_i\dot{\alpha}_j^2$ ($i \leq j$) равен произведению (когда $i = j$) или удвоенному произведению (когда $i < j$) суммы моментов инерции дисков, лежащих слева от участка i на сумму моментов инерции дисков, лежащих справа от участка j .

Теперь остается подставить выражения (3.31) и (3.34) в уравнение Лагранжа, чтобы получить уравнения крутильных колебаний в обратной форме:

$$\begin{aligned} c_1\ddot{\alpha}_1 = -\frac{1}{A} [& J_1(J_2 + \dots + J_5)\ddot{\alpha}_1 + J_1(J_3 + J_4 + J_5)\ddot{\alpha}_2 + \\ & + J_1(J_4 + J_5)\ddot{\alpha}_3 + J_1J_5\ddot{\alpha}_4], \\ c_2\ddot{\alpha}_2 = -\frac{1}{A} [& J_1(J_3 + J_4 + J_5)\ddot{\alpha}_1 + (J_1 + J_2)(J_3 + J_4 + \\ & + J_5)\ddot{\alpha}_2 + (J_1 + J_2)(J_4 + J_5)\ddot{\alpha}_3 + (J_1 + J_2)J_5\ddot{\alpha}_4], \\ c_3\ddot{\alpha}_3 = -\frac{1}{A} [& J_1(J_4 + J_5)\ddot{\alpha}_1 + (J_1 + J_2)(J_4 + J_5)\ddot{\alpha}_2 + \\ & + (J_1 + J_2 + J_3)(J_4 + J_5)\ddot{\alpha}_3 + (J_1 + J_2 + J_3)J_5\ddot{\alpha}_4], \\ c_4\ddot{\alpha}_4 = -\frac{1}{A} [& J_1J_5\ddot{\alpha}_1 + (J_1 + J_2)J_5\ddot{\alpha}_2 + (J_1 + J_2 + J_3)J_5\ddot{\alpha}_3 + \\ & + (J_1 + \dots + J_4)J_5\ddot{\alpha}_4]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

1) Начиная с диагональных членов.

Для приведения уравнений (3.30) к симметричной форме (для их «симметризации») следует применить подстановку

$$\varphi_i = \alpha_i \sqrt{c_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

В новых координатах уравнения примут вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= -\frac{c_1(J_1 + J_2)}{J_1J_2}\varphi_1 + \frac{\sqrt{c_1c_2}}{J_2}\varphi_2 & * & * \\ \ddot{\varphi}_2 &= \frac{\sqrt{c_1c_2}}{J_2}\varphi_1 - \frac{c_2(J_2 + J_3)}{J_2J_3}\varphi_2 + \frac{\sqrt{c_2c_3}}{J_3}\varphi_3 & * & * \\ \ddot{\varphi}_3 &= * \frac{\sqrt{c_2c_3}}{J_3}\varphi_2 - \frac{c_3(J_3 + J_4)}{J_3J_4}\varphi_3 + \frac{\sqrt{c_3c_4}}{J_4}\varphi_4 \\ \ddot{\varphi}_4 &= * * \frac{\sqrt{c_3c_4}}{J_4}\varphi_3 - \frac{c_4(J_4 + J_5)}{J_4J_5}\varphi_4. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Такая же подстановка приведет уравнения (3.35) к виду:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{J_1(J_2 + \dots + J_5)}{Ac_1}\ddot{\varphi}_1 - \frac{J_1(J_3 + J_4 + J_5)}{A\sqrt{c_1c_2}}\ddot{\varphi}_2 - \\ & - \frac{J_1(J_4 + J_5)}{A\sqrt{c_1c_3}}\ddot{\varphi}_3 - \frac{J_1J_5}{A\sqrt{c_1c_4}}\ddot{\varphi}_4, \\ \varphi_2 &= -\frac{J_1(J_3 + J_4 + J_5)}{A\sqrt{c_2c_1}}\ddot{\varphi}_1 - \frac{(J_1 + J_2)(J_3 + J_4 + J_5)}{Ac_2}\ddot{\varphi}_2 - \\ & - \frac{(J_1 + J_2)(J_4 + J_5)}{A\sqrt{c_2c_3}}\ddot{\varphi}_3 - \frac{(J_1 + J_2)J_5}{A\sqrt{c_2c_4}}\ddot{\varphi}_4, \\ \varphi_3 &= -\frac{J_1(J_4 + J_5)}{A\sqrt{c_3c_1}}\ddot{\varphi}_1 - \frac{(J_1 + J_2)(J_4 + J_5)}{A\sqrt{c_3c_2}}\ddot{\varphi}_2 - \\ & - \frac{(J_1 + J_2 + J_3)(J_4 + J_5)}{Ac_3}\ddot{\varphi}_3 - \frac{(J_1 + J_2 + J_3)J_5}{A\sqrt{c_3c_4}}\ddot{\varphi}_4, \\ \varphi_4 &= -\frac{J_1J_5}{A\sqrt{c_4c_1}}\ddot{\varphi}_1 - \frac{(J_1 + J_2)J_5}{A\sqrt{c_4c_2}}\ddot{\varphi}_2 - \\ & - \frac{(J_1 + J_2 + J_3)J_5}{A\sqrt{c_4c_3}}\ddot{\varphi}_3 - \frac{(J_1 + \dots + J_4)J_5}{Ac_4}\ddot{\varphi}_4. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Если коэффициенты в аналогичных уравнениях для системы с n степенями свободы обозначить через B_{ij} , то, начиная с элементов главной диагонали,

$$B_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^i J_l \sum_{l=j+1}^n J_l}{\sum_{l=1}^n J_l \sqrt{c_l c_j}}. \quad (3.38)$$

Отметим очевидное соотношение между коэффициентами, значительно облегчающее их вычисление:

$$B_{ij} = B_{ij} \frac{B_{in}}{B_{1n}} \quad (i=2, 3, \dots, n-1; j=i, i+1, \dots, n-1)^1. \quad (3.39)$$

5. Уравнения поперечных колебаний балки, шарнирно опертой по концам, с четырьмя сосредоточенными массами.

Рассмотрим поперечные колебания шарнирно опертой по концам балки, несущей четыре сосредоточенные массы m_1, m_2, m_3, m_4 (рис. 28).

Пренебрегая массой балки и считая перемещения сосредоточенных масс прямолинейными, мы приходим к системе с четырьмя степенями

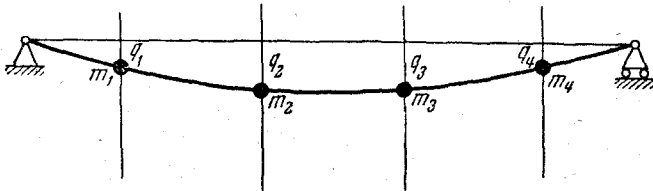


Рис. 28.

свободы, положение которой при колебаниях будет определяться вертикальными отклонениями q_1, q_2, q_3, q_4 грузов от горизонтальной прямой²⁾, проходящей через опоры. Эти отклонения принимаем за обобщенные координаты системы. Выражение кинетической энергии получается при этом в виде суммы квадратов

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2 + m_3 \dot{q}_3^2 + m_4 \dot{q}_4^2). \quad (3.40)$$

Составление выражения потенциальной энергии как квадратичной формы координат q_i оказывается здесь значительно более сложным, чем во всех рассмотренных выше примерах. К такому выражению потенциальной энергии можно было бы прийти, например, следующим образом. Вычислив с помощью известных формул сопротивления материалов коэффициенты влияния α_{ik} , подставляем их в уравнения (3.17) и затем решаем эти уравнения относительно c_{ik} . Последние получаются в виде отношений определителей n -го порядка (в нашем примере — четвертого порядка). Их вычисление связано с большими

¹⁾ По формулам (3.38) и (3.39) можно вычислять элементы матрицы, обратной матрице коэффициентов уравнений (3.36), непосредственно по данным моментам инерции и жесткостям, не прибегая к специальным методам линейной алгебры.

²⁾ Точнее, от линии равновесия, принимаемой за горизонтальную.

затратами времени. Значительно менее трудоемким является в рассматриваемом случае способ составления уравнения малых колебаний, основанный на использовании уравнений обобщенного закона Гука (3.8).

Обобщенные силы инерции, как следует из выражения кинетической энергии (3.40), равны силам инерции масс m_i , совершающих прямолинейные перемещения q_i :

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = -m_i \ddot{q}_i.$$

Подставив их вместо P_i в уравнения

$$q_i = \alpha_{i1} P_1 + \alpha_{i2} P_2 + \dots + \alpha_{in} P_n \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

сразу получаем уравнения поперечных колебаний балки (в обратной форме)

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= -\alpha_{11} m_1 \ddot{q}_1 - \alpha_{12} m_2 \ddot{q}_2 - \alpha_{13} m_3 \ddot{q}_3 - \alpha_{14} m_4 \ddot{q}_4, \\ q_2 &= -\alpha_{21} m_1 \ddot{q}_1 - \alpha_{22} m_2 \ddot{q}_2 - \alpha_{23} m_3 \ddot{q}_3 - \alpha_{24} m_4 \ddot{q}_4, \\ q_3 &= -\alpha_{31} m_1 \ddot{q}_1 - \alpha_{32} m_2 \ddot{q}_2 - \alpha_{33} m_3 \ddot{q}_3 - \alpha_{34} m_4 \ddot{q}_4, \\ q_4 &= -\alpha_{41} m_1 \ddot{q}_1 - \alpha_{42} m_2 \ddot{q}_2 - \alpha_{43} m_3 \ddot{q}_3 - \alpha_{44} m_4 \ddot{q}_4, \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

или, сокращенно, для системы с n степенями свободы

$$q_i = - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} m_j \ddot{q}_j \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.42)$$

Для симметризации уравнений (3.42) полагаем

$$y_i = q_i \sqrt{m_i} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Тогда

$$y_i = - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \sqrt{m_i m_j} \ddot{y}_j \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (3.43)$$

или

$$y_i = - \sum_{j=1}^n k_{ij} \ddot{y}_j \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (3.44)$$

где

$$k_{ij} = k_{ji} = \alpha_{ij} \sqrt{m_i m_j} \quad (i, j=1, 2, \dots, n). \quad (3.45)$$

Пример 2. Составить уравнения крутильных колебаний приведенного вала с пятью маховыми массами (дисками) в прямой и обратной форме. Даны моменты инерции дисков I_i и жесткости c_i участков вала:

$I_1 = 10,78$	кгм сек ²	$c_1 = 10,48 \cdot 10^4$	кгм
$I_2 = 82,82$	»	$c_2 = 34,80 \cdot 10^4$	»
$I_3 = 14,27$	»	$c_3 = 24,40 \cdot 10^4$	»
$I_4 = 29,56$	»	$c_4 = 40,60 \cdot 10^4$	»
$I_5 = 21,66$	»		

8. Теорема о положительности и разделении корней векового уравнения. Некоторые заключения о свойствах корней векового уравнения можно сделать, не раскрывая его определитель. К таким заключениям относится, в частности, следующая теорема¹⁾:

Если потенциальная энергия системы является определенно положительной функцией обобщенных координат, то корни²⁾ векового уравнения положительны и разделяются корнями минора, соответствующего первому элементу.

Вековое уравнение возьмем в прямой форме

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} b_{11} - \alpha & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} - \alpha & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} - \alpha \end{vmatrix} = 0. \quad (3.62)$$

Обозначим через $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$ последовательные главные диагональные миноры определителя Δ . Положив $\Delta_n = 1$, составим ряд

$$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}, \Delta_n. \quad (3.63)$$

Для $\alpha = 0$ все члены этого ряда положительны, так как они совпадают в этом случае с дискриминантом и его последовательными главными минорами определенно положительной квадратической формы — потенциальной энергии. Для $\alpha = 0$ ряд (3.63) не имеет перемен знака. Для $\alpha = +\infty$ ряд (3.63) имеет n перемен знака. Таким образом, при изменении α от 0 до $+\infty$ ряд (3.63) приобретает n перемен знака.

При изменении α от 0 до $+\infty$ могут обращаться в нуль и менять знаки разные члены ряда (3.63), кроме, понятно, $\Delta_n = 1$. Однако каждая потеря или приобретение рядом (3.63) перемены знака может произойти только за счет перемены знака Δ , т. е. первого члена ряда (3.63), при переходе Δ через нуль. Когда в нуль обращается один из промежуточных членов ряда, например Δ_i , два соседние Δ_{i-1} и Δ_{i+1} будут противоположных знаков. Поэтому перемена знака Δ_i (при переходе через нуль) не увеличит и не уменьшит числа перемен знака ряда (3.63) в целом. Только переход через нуль первого члена Δ может увеличить или уменьшить число перемен знака ряда (3.63).

Первую перемену знака ряд (3.63) получит при переходе Δ через наименьший нуль ($\alpha = \alpha_1$). Эта перемена знака, однако, пропадет при переходе Δ через следующий нуль $\alpha = \alpha_2 > \alpha_1$, если в промежутке между α_1 и α_2 не обратится в нуль второй член ряда (3.63), т. е. Δ_1 . Значит, для приобретения второй перемены знака Δ должно пройти

через свой второй нуль α_2 и между первыми двумя нулями Δ должен лежать первый нуль Δ_1 . Продолжая аналогичные рассуждения, придем к заключению, что n перемен знака ряда (3.63) для $\alpha = +\infty$ приобретены им в результате того, что Δ , при изменении α от 0 до $+\infty$, n раз обращается в нуль, т. е. имеет в промежутке от 0 до $+\infty$ все n своих корней и между этими корнями лежат корни уравнения $\Delta_1 = 0$. Таким образом, $n - 1$ корней последнего уравнения разделяют n корней векового уравнения $\Delta = 0$.

Изложенное доказательство предполагает, что корни векового уравнения $\Delta = 0$ различны. В практических задачах на колебания это предположение почти всегда осуществлено. Поэтому случая равных корней мы не рассматриваем.

Утверждение, что при $\Delta_i = 0$ соседние миноры Δ_{i-1} и Δ_{i+1} имеют противоположные знаки, вытекает из формулы (1.52).

Если в определителе уравнения (3.62) мы обозначим через $J_{12} = J_{21}$ и J_{22} миноры элементов b_{12}, b_{21} и $b_{22} - \alpha$, то формулу (1.52) можно будет записать для миноров второго порядка следующим образом:

$$\Delta \Delta_2 = \Delta_1 J_{22} - J_{12}^2$$

($\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ имеют прежнее значение). Когда $\Delta_1 = 0$, то

$$\Delta \Delta_2 = -J_{12}^2,$$

т. е. Δ и Δ_2 имеют противоположные знаки.

Пример 4. Колебания нити с бусинками.

Как отмечают в своей книге Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн¹⁾, «этой задаче принадлежит совершенно особая роль в истории механики и математики. Пожалуй, она была первой задачей на исследование малых колебаний системы с n степенями свободы. В связи с ней Даламбер предложил свой метод интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Отправляясь от нее, Даниил Бернулли высказал свое знаменитое предположение, что решение задачи о свободном колебании струны можно представить в виде тригонометрического ряда, что вызвало между Эйлером, Даламбером, Д. Бернулли и др. дискуссию о природе тригонометрических рядов, затянувшуюся на несколько десятилетий. Впоследствии Лагранж показал более строго, как можно предельным переходом из решения задачи о колебаниях нити с бусинками получить решение задачи о колебании струны. Наконец, этой задачей (и аналогичной задачей из теории теплопроводности) руководствовался Штурм в своих замечательных исследованиях по высшей алгебре и теории дифференциальных уравнений».

Применяя к решению задачи о колебаниях нити с бусинками уравнения в конечных разностях, Раус²⁾ пришел к теореме об узлах собственных форм колебаний нити, которая устанавливает закономерности в распределении перемен знака амплитудных отклонений отдельных бусинок³⁾.

¹⁾ Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, Гостехиздат, 1950, стр. 142—143.

²⁾ Routh, Advanced Rigid Dynamics, Mac Millan, 1892.

³⁾ Теорему об узлах собственных форм см. ниже стр. 120.

¹⁾ Routh, Advanced Rigid Dynamics, стр. 49, Mac Millan, London, 1892.

²⁾ Под корнями векового уравнения здесь подразумеваются квадраты частот p^2 , которые обозначены в уравнении (3.62) через α .

Мы будем предполагать, что все n бусинок имеют одинаковую массу m и закреплены на нити на одинаковых расстояниях a друг от друга (рис. 32). Если пренебречь смещениями бусинок, параллельными линии равновесия нити, то малые перемещения бусинок

$$y_1, y_2, \dots, y_n,$$

перпендикулярные к линии равновесия нити, будут определять ее расположение при поперечных колебаниях. Эти перемещения, в предположении, что все они происходят в одной плоскости, мы примем за обобщенные координаты. Тогда кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{y}_1^2 + m_2 \dot{y}_2^2 + \dots + m_n \dot{y}_n^2).$$

Предположим, что натяжение нити S остается неизменным при деформациях нити, т. е. при отклонениях бусинок от равновесного расположения. Если это

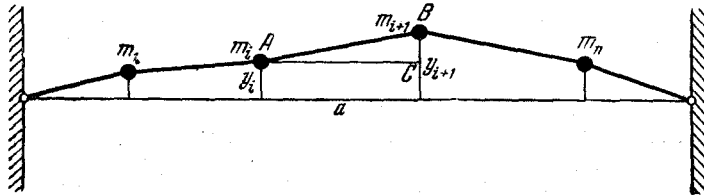


Рис. 32.

равновесное расположение принять за «нулевое» для потенциальной энергии, то в деформированном расположении она будет равна

$$\Pi = S \Delta l,$$

где Δl — общее удлинение нити. Чтобы найти Δl , рассмотрим удлинение Δl_i участка нити между массами m_i и m_{i+1} . Из треугольника ABC (рис. 32)

$$\Delta l_i = \sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + a^2} - a = a \left[\sqrt{1 + \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{a^2}} - 1 \right].$$

Разлагая выражение Δl_i в ряд по степеням $(y_{i+1} - y_i)$ и ограничиваясь в этом разложении только первым членом, получим

$$\Delta l_i = \frac{1}{2a} (y_{i+1} - y_i)^2 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n; \quad y_0 = y_{n+1} = 0).$$

Так как

$$\Delta l = \sum \Delta l_i,$$

то потенциальная энергия всей системы

$$\Pi = \frac{S}{2a} [y_1^2 + (y_2 - y_1)^2 + \dots + (y_n - y_{n-1})^2 + y_n^2]. \quad (3.64)$$

Найденные выражения кинетической и потенциальной энергии подставляем в уравнения Лагранжа. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{ma}{S} \ddot{y}_1 &= -2y_1 + y_2, \\ \frac{ma}{S} \ddot{y}_2 &= y_1 - 2y_2 + y_3, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{ma}{S} \ddot{y}_{n-1} &= y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n, \\ \frac{ma}{S} \ddot{y}_n &= y_{n-1} - 2y_n. \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

Если система совершает одно из главных колебаний, то

$$y_i = A_i \sin(pt + \epsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Коэффициенты A_i и частота p удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{p^2}{b} A_1 &= 2A_1 - A_2, \\ \frac{p^2}{b} A_2 &= -A_1 + 2A_2 - A_3, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{p^2}{b} A_n &= -A_{n-1} + 2A_n \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

$$\left(b = \frac{S}{am} \right).$$

Вековое уравнение системы (3.66)

$$\begin{vmatrix} 2 - \frac{p^2}{b} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 - \frac{p^2}{b} & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 - \frac{p^2}{b} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 - \frac{p^2}{b} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.67)$$

может быть развернуто по рекуррентным формулам:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= 2 - \frac{p^2}{b}, \\ D_2 &= \left(2 - \frac{p^2}{b} \right) D_1 - 1, \\ \dots \dots \dots \\ D_k &= \left(2 - \frac{p^2}{b} \right) D_{k-1} - D_{k-2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

Отношения амплитуд, соответствующих частоте p_s , равны отношениям не только миноров элементов последней строки, но и отношениям миноров элементов любой другой строки. Миноры элементов различных строк определителя системы (3.73), куда подставлена какая-нибудь собственная частота системы, пропорциональны. В обозначениях этих миноров можно поэтому опустить первый индекс и переписать (3.75) так:

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_n = J_1(\alpha_s) : J_2(\alpha_s) : \dots : J_n(\alpha_s). \quad (3.76)$$

Отношения (3.76) определяют так называемую *собственную форму колебаний*, соответствующую собственной частоте p_s . Собственная форма — это отношение амплитуд или пропорциональных им миноров элементов любой строки определителя системы (3.73) после подстановки в него корня α_s векового уравнения. Число собственных форм колебаний системы равно числу степеней свободы. Собственную форму задают обычно числовыми значениями амплитуд (или графически — ординатами определенной длины), отношения которых равны отношениям (3.76).

Произвольным общим множителем C_s , входящим в определение амплитуд данной формы, можно распорядиться так, чтобы сумма квадратов амплитуд была равна единице. Форма, сумма квадратов амплитуд которой равна единице, называется *нормированной формой*. Для нормирования формы нужно найти так называемый нормирующий множитель N из условия

$$\lambda_1^2 N^2 + \lambda_2^2 N^2 + \dots + \lambda_n^2 N^2 = 1$$

и затем на этот множитель умножить все амплитуды λ_i данной формы.

В дальнейшем нормированные амплитуды собственных форм обозначаются буквами u_{ik} , с двумя индексами, из которых первый i означает порядок формы, второй k — номер амплитуды.

Свойства собственных форм выражаются следующими теоремами.

а) Собственные формы не зависят от начальных условий. Это ясно из состава миноров, входящих в отношения (3.76): миноры $J_k(\alpha_s)$ зависят только от коэффициентов b_{ik} и от значения $\alpha_s = p_s^2$. Никакие другие величины в состав этих миноров не входят. Собственная форма существенным образом связана с колеблющейся системой и, аналогично собственной частоте, может быть изменена только в результате изменений параметров системы: изменений масс или жесткостей отдельных ее частей и их распределения в системе.

б) Теорема об ортогональности собственных форм. Если

$$u_{s1}, u_{s2}, \dots, u_{sn}$$

— система амплитуд, соответствующая s -й собственной форме, и

$$u_{v1}, u_{v2}, \dots, u_{vn}$$

— система амплитуд v -й формы колебаний, причем

$$p_s \neq p_v,$$

то

$$u_{s1}u_{v1} + u_{s2}u_{v2} + \dots + u_{sn}u_{vn} = 0. \quad (3.77)$$

Равенство (3.77) называется *условием ортогональности*. В написанном виде оно имеет место, только когда $b_{ik} = b_{ki}$, т. е. для симметризованных систем.

Для доказательства напишем систему уравнений малых колебаний (в прямой форме) для s -й собственной формы и v -й собственной частоты:

$$p_s^2 u_{si} = \sum_{k=1}^n b_{ik} u_{sk} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.78)$$

Умножим каждое из этих уравнений на соответствующую амплитуду v -й формы и просуммируем по i :

$$\sum_{i=1}^n p_s^2 u_{si} u_{vi} = \sum_{i=1}^n u_{vi} \sum_{k=1}^n b_{ik} u_{sk} = \sum_{k=1}^n u_{sk} \sum_{i=1}^n b_{ki} u_{vi} = \sum_{k=1}^n p_v^2 u_{sk} u_{vk}.$$

Так как i и k пробегает один и тот же ряд значений, то

$$p_s^2 \sum_{i=1}^n u_{si} u_{vi} = p_v^2 \sum_{i=1}^n u_{si} u_{vi}.$$

Отсюда при условии $p_s^2 \neq p_v^2$

$$\sum_{i=1}^n u_{si} u_{vi} = 0.$$

Для несимметризованных форм условия ортогональности выражаются следующими равенствами:

для крутильных колебаний приведенного вала

$$\sum_{i=1}^n c_i \lambda_{si} \lambda_{vi} = 0,$$

где c_i — погонная жесткость на кручение i -го участка вала;

для поперечных колебаний стержня с сосредоточенными массами m_i

$$\sum_{i=1}^n m_i \lambda_{si} \lambda_{vi} = 0.$$

Эти выражения получаются из (3.77) с помощью формул

$$u_{si} = \lambda_{si} \sqrt{c_i}, \quad u_{si} = \lambda_{si} \sqrt{m_i} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

в) Теорема об узлах собственных форм. Из условия ортогональности (3.77) следует, что амплитуды форм главных колебаний различных порядков (соответствующих различным собственным частотам) не могут быть все одного и того же знака. Если, например, все амплитуды первой формы положительны, то амплитуды остальных форм для выполнения условия (3.77) должны иметь по крайней мере по одной перемене знака каждая. Существует закономерность в распределении числа перемен знака амплитуд собственных форм, устанавливаемая теоремой об узлах собственных форм:

Число перемен знака (число «узлов») собственной формы k -го порядка равно $k-1$.

Мы докажем эту теорему для форм колебаний системы, вековое уравнение которой имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \alpha & -a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_{21} & a_{22} - \alpha & -a_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1, n-1} - \alpha & -a_{n-1, n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n, n-1} & a_{nn} - \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad (3.79)$$

$(a_{i, i-1} = a_{i-1, i} > 0)$.

Миноры элементов первой строки имеют следующие выражения:

$$J_{11} = \Delta_1(\alpha); \quad J_{12} = a_{12}\Delta_2(\alpha); \quad J_{13} = a_{12}a_{23}\Delta_3(\alpha); \quad \dots;$$

$$J_{1n-1} = a_{12}a_{23} \dots a_{n-2, n-1}\Delta_{n-1}(\alpha); \quad J_{1n} = a_{12}a_{23} \dots a_{n-1, n} \cdot 1.$$

Они пропорциональны амплитудам собственной формы, соответствующей корню α уравнения (3.79). Множители

$$\Delta_1(\alpha), \Delta_2(\alpha), \dots, \Delta_{n-1}(\alpha), \Delta_n(\alpha) \equiv 1 \quad (3.80)$$

совпадают с последовательными главными диагональными минорами определителя (3.79), и ряд (3.80) обладает всеми свойствами ряда главных миноров, установленными при доказательстве теоремы о разделении корней векового уравнения. Только этот ряд начинается не с определителя векового уравнения $\Delta(\alpha)$, а с первого главного минора этого определителя. Для $\alpha=0$ все члены этого ряда положительны. Приобретение или потеря этим рядом перемены знака возможны только при прохождении через нуль первого члена $\Delta_1(\alpha)$. Первый нуль $\Delta_1(\alpha)$, как это следует из упомянутой теоремы, больше $\alpha_1 = p_1^2$ и меньше $\alpha_2 = p_2^2$. Следовательно, для $\alpha_1 = p_1^2$ все члены ряда (3.80) продолжают оставаться положительными. Первая собственная форма, таким образом, не имеет перемен знака.

После перехода через первый нуль полинома $\Delta_1(\alpha)$ ряд (3.80) приобретает одну перемену знака и сохранит одну перемену до второго нуля $\Delta_1(\alpha)$, и так как $\alpha_2 = p_2^2$ — вторая собственная частота системы — лежит между первым и вторым нулем полинома $\Delta_1(\alpha)$, то для $\alpha_2 = p_2^2$ ряд имеет одну перемену знака.

Продолжая аналогичные рассуждения, можно убедиться, что для $\alpha_3 = p_3^2$ ряд (3.80) имеет две перемены знака и т. д. Последняя, n -я форма будет иметь $n-1$ перемену знака.

Мы изложили доказательство теоремы об узлах для частной формы векового уравнения, именно для векового уравнения крутильных колебаний приведенного вала. Теорема остается в силе для

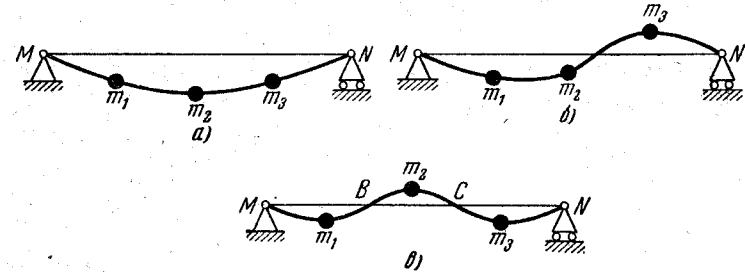


Рис. 33.

форм колебаний других линейных систем с конечным числом степеней свободы, в частности для поперечных колебаний однопролетных стержней и балок. Доказательство этой теоремы в общей форме дано Ф. Р. Гантмахером и М. Г. Крейнот¹⁾.

Содержание теоремы можно иллюстрировать следующим примером. Предположим, что речь идет о поперечных колебаниях балки, шарнирно опертой на концах и несущей три сосредоточенные массы m_1, m_2, m_3 (рис. 33). Когда эта система совершает первое главное колебание, собственная форма не имеет перемен знака и все массы m_i отклоняются в одну сторону (рис. 33, а). Когда система совершает второе главное колебание, соответствующая форма имеет одну перемену знака. В этом случае одна или две массы слева отклоняются в одну сторону, а остальные — в другую. Сколько масс отклоняется здесь слева или справа в одну сторону, две или одна, зависит каждый раз от их величины, расположения и от упругих свойств балки. На рис. 33, б представлен вид кривой прогиба (упругой линии). Одна из точек балки А остается при таких колебаниях неподвижной. Она называется *узлом* второй формы колебаний. Форма колебания третьего порядка имеет две перемены знака;

¹⁾ См. сноску на стр. 113.

Коэффициенты a_s вычисляются с помощью теоремы об ортогональности собственных форм. Напишем разложения (3.84) в сокращенном виде:

$$\lambda_i = \sum_{s=1}^n a_s u_{si} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.86)$$

Чтобы найти коэффициент a_l , умножим обе части (3.86) на u_{li} и суммируем по i :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_{li} = \sum_{i=1}^n u_{li} \sum_{s=1}^n a_s u_{si} = \sum_{s=1}^n a_s \sum_{i=1}^n u_{li} u_{si} = a_l \sum_{i=1}^n u_{li}^2,$$

откуда

$$a_l = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i u_{li}}{\sum_{i=1}^n u_{li}^2}. \quad (3.87)$$

Если u_{li} нормированы, то $\sum_{i=1}^n u_{li}^2 = 1$ и

$$a_l = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{li} \quad (l=1, 2, \dots, n). \quad (3.88)$$

11. Разложения коэффициентов уравнений малых колебаний по собственным формам. Напишем систему уравнений для l -го собственного колебания в прямой форме:

$$p_i^2 u_{li} = \sum_{k=1}^n b_{ik} u_{lk} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.89)$$

Положив

$$b_{ik} = \sum_{s=1}^n a_{si} u_{sk}, \quad (3.90)$$

умножим обе части этого равенства на u_{lk} и просуммируем по k :

$$\sum_{k=1}^n b_{ik} u_{lk} = \sum_{k=1}^n u_{lk} \sum_{s=1}^n a_{si} u_{sk} = \sum_{s=1}^n a_{si} \sum_{k=1}^n u_{lk} u_{sk} = a_{li}.$$

Таким образом,

$$a_{li} = \sum_{k=1}^n b_{ik} u_{lk}$$

или на основании (3.89)

$$a_{li} = u_{li} p_i^2.$$

Подставив найденное выражение a_{li} в (3.90), получим разложение коэффициентов прямых уравнений по собственным формам

$$b_{ik} = \sum_{s=1}^n p_s^2 u_{si} u_{sk} \quad (i, k=1, 2, \dots, n). \quad (3.91)$$

Таким же способом, но исходя из системы уравнений, написанной для l -го главного колебания в обратной форме

$$u_{li} = p_i^2 \sum_{k=1}^n h_{ik} u_{lk} \quad (l=1, 2, \dots, n),$$

получим разложения по собственным формам коэффициентов h_{ik}

$$h_{ik} = \sum_{s=1}^n \frac{u_{si} u_{sk}}{p_s^2} \quad (i, k=1, 2, \dots, n). \quad (3.92)$$

С помощью формул (3.91) и (3.92) можно найти разложения «итераций» коэффициентов h_{ik} любого порядка, т. е. сумм

$$h_{ik}^{(0)} = h_{ik}, \quad h_{ik}^{(1)} = \sum_{s=1}^n h_{is}^{(0)} h_{sk}, \quad \dots, \quad h_{ik}^{(m)} = \sum_{s=1}^n h_{is}^{(m-1)} h_{sk}.$$

Из формул (3.92) находим

$$h_{ik}^{(m)} = \sum_{s=1}^n \frac{u_{si} u_{sk}}{p_s^{2(m+1)}} \quad (i, k=1, 2, \dots, n). \quad (3.93)$$

Для итераций коэффициентов прямых уравнений

$$b_{ik}^{(m)} = \sum_{s=1}^n u_{si} u_{sk} p_s^{2(m+1)} \quad (i, k=1, 2, \dots, n). \quad (3.94)$$

Пример 5. Найти собственные формы поперечных колебаний однородного стержня.

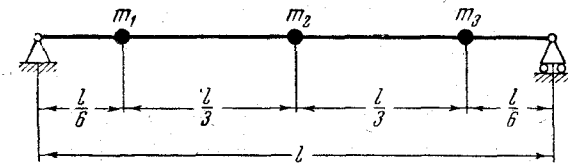


Рис. 34.

Разделим стержень на три равные части и сосредоточим их массы в серединах частей (рис. 34). Обозначим длину стержня через l , массу единицы длины через μ . Массы сосредоточенных грузов

$$m_1 = m_2 = m_3 = \frac{\mu l}{3}.$$

Обозначим модуль упругости через E ($\kappa\Gamma/\text{см}^2$) и момент инерции поперечного сечения (постоянный по всей длине стержня) через J (см^4). С помощью формул (3.48) найдем коэффициенты влияния

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{25}{3888} \frac{l^3}{EJ}, & \alpha_{12} &= \frac{39}{3888} \frac{l^3}{EJ}, & \alpha_{13} &= \frac{17}{3888} \frac{l^3}{EJ}, \\ \alpha_{21} &= \alpha_{12}, & \alpha_{22} &= \frac{81}{3888} \frac{l^3}{EJ}, & \alpha_{23} &= \frac{39}{3888} \frac{l^3}{EJ}, \\ \alpha_{31} &= \alpha_{13}, & \alpha_{32} &= \alpha_{23}, & \alpha_{33} &= \frac{25}{3888} \frac{l^3}{EJ}. \end{aligned}$$

Уравнения колебаний напишутся в обратной форме

$$\lambda_i = p^2 \frac{\mu l}{3} \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} \lambda_k \quad (i=1, 2, 3).$$

Подставив сюда значения α_{ik} и полагая для сокращения письма

$$\omega^2 = 3888 \frac{EJ}{l^3} \frac{1}{p^2 \frac{\mu l}{3}} = \frac{11\,664 \cdot EJ}{p^2 \mu l^4},$$

приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \omega^2 &= 25\lambda_1 + 39\lambda_2 + 17\lambda_3, \\ \lambda_2 \omega^2 &= 39\lambda_1 + 81\lambda_2 + 39\lambda_3, \\ \lambda_3 \omega^2 &= 17\lambda_1 + 39\lambda_2 + 25\lambda_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.95)$$

Вековое уравнение этой системы

$$\begin{vmatrix} 25 - \omega^2 & 39 & 17 \\ 39 & 81 - \omega^2 & 39 \\ 17 & 39 & 25 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

после развертывания имеет вид

$$\omega^6 - 131\omega^4 + 1344\omega^2 - 2880 = 0.$$

Оно легко разлагается на множители

$$(\omega^2 - 120)(\omega^2 - 8)(\omega^2 - 3) = 0.$$

Его корни

$$\omega_1^2 = 120, \quad \omega_2^2 = 8, \quad \omega_3^2 = 3,$$

а соответствующие собственные частоты колебаний стержня

$$p_1 = \frac{9,859}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}, \quad p_2 = \frac{38,184}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}, \quad p_3 = \frac{62,354}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}.$$

Для нахождения собственных форм отберем из системы (3.95) два уравнения, например

$$\begin{aligned} (25 - \omega^2) \lambda_1 + 39\lambda_2 &= -17\lambda_3, \\ 39\lambda_1 + (81 - \omega^2) \lambda_2 &= -39\lambda_3. \end{aligned}$$

Подставив сюда $\omega_1^2 = 120$, получим

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 1 : 2 : 1 \quad (\text{первая форма})$$

Подставив $\omega_2^2 = 8$, будем иметь

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 1 : 0 : -1 \quad (\text{вторая форма}).$$

Наконец, для $\omega_3^2 = 3$

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 1 : -1 : 1 \quad (\text{третья форма})$$

Графическое изображение форм представлено на рис. 35. Условия ортогональности здесь выполнены. Выполнено также и правило перемен знака для амплитуд собственных форм.

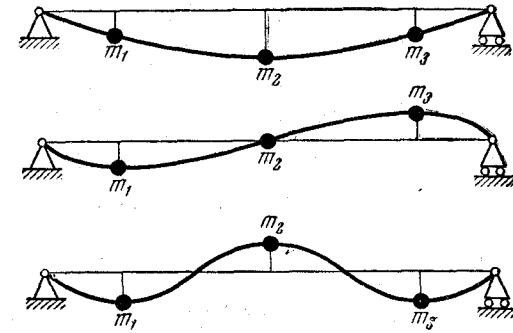


Рис. 35.

Нормирующие множители: для первой формы

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

для второй и третьей

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Амплитуды нормированных собственных форм:

первой

$$\frac{1}{\sqrt{6}} : \frac{2}{\sqrt{6}} : \frac{1}{\sqrt{6}};$$

второй

$$\frac{1}{\sqrt{2}} : 0 : -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

третьей

$$\frac{1}{\sqrt{3}} : -\frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Пример 6. Найти собственные частоты и формы колебаний двойного маятника.

Для симметризации уравнений малых колебаний двойного маятника

$$\begin{aligned} 3\theta_1 &= -\frac{16l}{3g}\ddot{\theta}_1 - \frac{2l}{g}\ddot{\theta}_2, \\ \theta_2 &= -\frac{2l}{g}\ddot{\theta}_1 - \frac{4l}{3g}\ddot{\theta}_2, \end{aligned}$$

которые были составлены в примере 1, полагаем

$$\alpha_1 = \theta_1 \sqrt{3}, \quad \alpha_2 = \theta_2.$$

В переменных α_1 и α_2 эти уравнения переписываются так:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{16l}{9g}\ddot{\alpha}_1 - \frac{2l}{g\sqrt{3}}\ddot{\alpha}_2, \\ \alpha_2 &= -\frac{2l}{g\sqrt{3}}\ddot{\alpha}_1 - \frac{4l}{3g}\ddot{\alpha}_2. \end{aligned}$$

Предполагая, что система совершает одно из главных колебаний и, следовательно,

$$\alpha_1 = \lambda_1 \sin(pt + \varepsilon), \quad \alpha_2 = \lambda_2 \sin(pt + \varepsilon),$$

получим для амплитуд λ_1, λ_2 однородную систему

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{16l}{9g} - \frac{1}{p^2}\right)\lambda_1 + \frac{2\sqrt{3}l}{3g}\lambda_2 &= 0, \\ \frac{2\sqrt{3}l}{3g}\lambda_1 + \left(\frac{4l}{3g} - \frac{1}{p^2}\right)\lambda_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.96)$$

Из уравнения частот

$$\begin{vmatrix} \frac{16l}{9g} - \frac{1}{p^2} & \frac{2\sqrt{3}l}{3g} \\ \frac{2\sqrt{3}l}{3g} & \frac{4l}{3g} - \frac{1}{p^2} \end{vmatrix} = 0,$$

представив его в виде

$$\frac{1}{p^4} - \frac{28l}{9g} \frac{1}{p^2} + \frac{28l^2}{27g^2} = 0,$$

находим

$$p_1 = 0,61 \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad p_2 = 1,62 \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Подставив в первое уравнение (3.70) сначала значение p_1 , затем p_2 , получим собственные формы колебаний двойного маятника:

первая форма: $\lambda_1 : \lambda_2 = 3\sqrt{3} : 4,29$;

вторая форма: $\lambda_1 : \lambda_2 = 3\sqrt{3} : -6,29$.

Условие ортогональности здесь выполнено¹⁾. Следует заметить, что в симметризованных координатах оно имеет вид

$$\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} = 0;$$

в координатах θ_1 и θ_2

$$3\theta_{11}\theta_{21} + \theta_{12}\theta_{22} = 0,$$

где θ_{i1}, θ_{i2} ($i=1,2$) — угловые амплитуды стержней маятника в первом и втором главных колебаниях. Как следует из пропорций

$$\theta_{11} : \theta_{12} = 3 : 4,29, \quad \theta_{21} : \theta_{22} = 3 : -6,29,$$

первая и вторая собственные формы двойного маятника имеют общий вид, показанный на рис. 36.

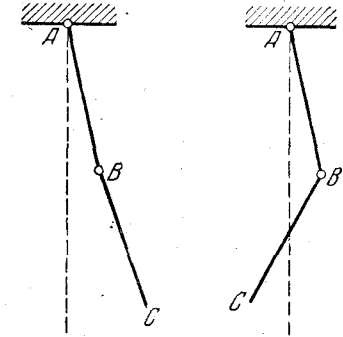


Рис. 36.

12. Свободные колебания с сопротивлением. В классической теории линейных колебаний исследование влияния сопротивлений на свободные и вынужденные колебания основывалось на допущении, что силы сопротивления, действующие на колеблющуюся систему, являются линейными функциями обобщенных скоростей. Хотя такое допущение не оправдывается в действительности, тем не менее разработанные на его основе приемы некоторых расчетов и результаты этих расчетов имеют и в настоящее время большое практическое значение. Прежде всего, принимая такое допущение, мы остаемся в пределах линейной теории, а это приводит к значительному упрощению задачи в отношении математической ее трактовки, причем большей частью без существенного искажения качественной стороны общего направления вносимых сопротивлением изменений. Далее, уравнения с линейным сопротивлением получаются во многих случаях в результате линеаризации²⁾ некоторых реальных систем, а не каких-либо предположений о физической природе сопротивления. Решение таких линеаризованных задач дает иногда возможность сделать правильные заключения об истинном характере движения исходной неупрощенной системы.

Сохраняя прежние предположения относительно начала координат и прежние обозначения для кинетической и потенциальной энергии, примем, что обобщенные силы сопротивления являются линейными функциями обобщенных скоростей

$$R_i = b_{i1}\dot{q}_1 + b_{i2}\dot{q}_2 + \dots + b_{in}\dot{q}_n \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

¹⁾ В пределах точности вычислений.

²⁾ Под линеаризацией здесь, как и в первой главе, мы понимаем отбрасывание нелинейных членов.

где через $T(A)$, $\Pi(A)$, $F(A)$ обозначены результаты подстановки в T , Π , F вместо обобщенных координат q_i и скоростей \dot{q}_i соответствующих амплитуд A_i .

Умножим теперь уравнения (3.102), написанные для корня p , на значения A_i' , соответствующие другому корню p' , и почленно сложим. Введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} 2T(A, A') &= a_{11}A_1A_1' + \dots + a_{nn}A_nA_n' + \\ &\quad + a_{12}(A_1A_2' + A_1'A_2) + \dots \\ 2\Pi(A, A') &= c_{11}A_1A_1' + \dots + c_{nn}A_nA_n' + \\ &\quad + c_{12}(A_1A_2' + A_1'A_2) + \dots, \\ 2F(A, A') &= b_{11}A_1A_1' + \dots + b_{nn}A_nA_n' + \\ &\quad + b_{12}(A_1A_2' + A_1'A_2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.105)$$

получим

$$p^2T(A, A') + pF(A, A') + \Pi(A, A') = 0.$$

Вследствие симметрии выражений (3.105) относительно A и A' имеет место также и уравнение

$$p'^2T(A, A') + p'F(A, A') + \Pi(A, A') = 0.$$

Таким образом, p и p' удовлетворяют одному и тому же квадратному уравнению

$$p^2T(A, A') + pF(A, A') + \Pi(A, A') = 0.$$

Следовательно,

$$p + p' = -\frac{F(A, A')}{T(A, A')}, \quad pp' = \frac{\Pi(A, A')}{T(A, A')}. \quad (3.106)$$

Пусть p и p' — два сопряженных комплексных корня уравнения (3.103):

$$p = \alpha + i\beta, \quad p' = \alpha - i\beta.$$

Соответствующие этим корням A и A' пусть имеют вид

$$A = P + iQ, \quad A' = P - iQ.$$

Тогда

$$2T(A, A') = 2T(P) + 2T(Q),$$

$$2F(A, A') = 2F(P) + 2F(Q),$$

$$2\Pi(A, A') = 2\Pi(P) + 2\Pi(Q),$$

и формулы (3.106) переписутся так:

$$2\alpha = -\frac{F(P) + F(Q)}{T(P) + T(Q)}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{\Pi(P) + \Pi(Q)}{T(P) + T(Q)}. \quad (3.107)$$

Теперь можно ответить на вопрос о том, как будут изменяться координаты системы в возмущенном движении. Предположим, что все три формы T , F , Π положительны. Из (3.104) заключаем, что при вещественных A_i и положительных $T(A)$, $F(A)$, $\Pi(A)$ вещественные значения p отрицательны. Каждому вещественному отрицательному корню $p = -m^2$ соответствует частное решение

$$q_k = A_k e^{-m^2 t} \quad (3.108)$$

с вещественным A_k . Такие координаты q_k с течением времени убывают, асимптотически приближаясь к нулевым значениям. Если все корни уравнения (3.103) вещественны и отрицательны, то система в возмущенном движении будет асимптотически приближаться к положению равновесия (апериодическое движение). Из первой формулы (3.106) при тех же предположениях относительно T , F , Π заключаем, что вещественные части комплексных корней отрицательны. Каждой паре комплексных корней

$$p = \alpha + i\beta, \quad p' = \alpha - i\beta$$

будет соответствовать решение

$$q_k = e^{\alpha t} (B_k \cos \beta t + C_k \sin \beta t) \quad (3.109)$$

с отрицательным α . Это решение определяет затухающие колебания. Так как B_k и C_k неодинаковы для различных k , то изменения координат q_k не однофазны.

Общее решение получится как результат линейного наложения частных решений (3.108) и (3.109).

13. Теоремы об изменении частот системы при наложении связей. Связь, наложенную на систему, совершающую малые линейные колебания около положения устойчивого равновесия и не смещающую этого положения, можно выразить линейным однородным уравнением относительно координат системы. В самом деле, пусть связь задана уравнением

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0.$$

Так как она не должна смещать положения равновесия, в котором по предположению все $q_i = 0$, то

$$f(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Разложение функции $f(q_1, \dots, q_n)$ по степеням координат q_i начнется поэтому с членов первого порядка. Ограничиваясь, в соответствии с основными допущениями теории малых линейных колебаний, только этими членами, мы представим уравнение связи следующим линейным уравнением:

$$A_{11}q_1 + A_{12}q_2 + \dots + A_{1n}q_n = 0, \quad (3.110)$$

где A_{11} , A_{12} , ..., A_{1n} — постоянные числа.

Произведем в заданной системе (до наложения на нее связи) подстановку:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= A_{11}q_1 + A_{12}q_2 + \dots + A_{1n}q_n \\ r_2 &= q_2 \\ \dots & \\ r_n &= q_n \end{aligned} \right\} \quad (3.111)$$

От такой подстановки собственные частоты системы не изменятся. Кинетическая и потенциальная энергии в новых координатах r_i ($i=1, 2, \dots, n$) будут иметь выражения

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{r}_i \dot{r}_k, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{k,i=1}^n c_{ik} r_i r_k$$

а вековое уравнение получит вид

$$\begin{vmatrix} a'_{11}p^2 - c'_{11} & a'_{12}p^2 - c'_{12} & \dots & a'_{1n}p^2 - c'_{1n} \\ a'_{21}p^2 - c'_{21} & a'_{22}p^2 - c'_{22} & \dots & a'_{2n}p^2 - c'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1}p^2 - c'_{n1} & a'_{n2}p^2 - c'_{n2} & \dots & a'_{nn}p^2 - c'_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.112)$$

Предположим теперь, что на систему наложена связь (3.110). В новых координатах r_i эта связь имеет уравнение

$$r_1 = 0.$$

Вековое уравнение связанной системы получится из векового уравнения (3.112) вычеркиванием в последнем первой строки и первого столбца. Согласно теореме о разделении корней векового уравнения, $n-1$ корней p'_k связанной системы располагаются между корнями p_k векового уравнения данной системы:

$$p_1 \leq p'_1 \leq p_2 \leq p'_2 \leq \dots \leq p_{n-1} \leq p'_{n-1} \leq p_n.$$

Таким образом, если на систему с n степенями свободы наложена линейная связь, то частоты полученной системы с $n-1$ степенью свободы располагаются между частотами первоначальной.

Теорема может быть обобщена на случай наложения на систему нескольких линейных связей:

Если на систему с n степенями свободы наложены h линейных связей

$$A_s(q) \equiv A_{s1}q_1 + A_{s2}q_2 + \dots + A_{sn}q_n = 0 \quad (s=1, 2, \dots, h), \quad (3.113)$$

то частоты связанной системы

$$p_1^{(h)} < p_2^{(h)} < \dots < p_{n-h}^{(h)}$$

удовлетворяют неравенствам

$$p_k \leq p_k^{(h)} \leq p_{k+h} \quad (k=1, 2, \dots, n-h), \quad (3.114)$$

где p_k — частоты заданной системы с n степенями свободы.

Связи (3.113) можно всегда представить уравнениями

$$\left. \begin{aligned} A_{11}q_1 + A_{12}q_2 + \dots + A_{1n}q_n &= 0, \\ B_{22}q_2 + \dots + B_{2n}q_n &= 0, \\ \dots & \\ H_{hh}q_h + \dots + H_{hn}q_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.115)$$

и налагать их на заданную систему не сразу все, а последовательно — одну за другой.

Переход к координатам r_i , связанным с q_i соотношениями (3.111), не изменит уравнений остальных связей. Положив $r_1 = 0$, получим систему с $n-1$ степенью свободы, собственные частоты $p_k^{(1)}$ которой удовлетворяют неравенствам

$$p_k \leq p_k^{(1)} \leq p_{k+1} \quad (k=1, 2, \dots, n-1). \quad (3.116)$$

Эту последнюю мы преобразуем к координатам s_i , связанным с r_i ($i=2, 3, \dots, n$) уравнениями

$$\begin{aligned} s_2 &= B_{22}r_2 + B_{23}r_3 + \dots + B_{2n}r_n \\ s_3 &= r_3 \\ \dots & \\ s_n &= r_n \end{aligned}$$

Полагая $s_2 = 0$, получим систему с $n-2$ степенями свободы, частоты которой $p_k^{(2)}$ будут удовлетворять неравенствам

$$p_k^{(1)} \leq p_k^{(2)} \leq p_{k+1}^{(1)} \quad (k=1, 2, \dots, n-2)$$

или, на основании неравенств (3.116),

$$p_k \leq p_k^{(2)} \leq p_{k+2} \quad (k=1, 2, \dots, n-2).$$

Продолжая аналогичные рассуждения и вводя последовательно связи (3.115), мы придем к неравенствам (3.114), которые будут иметь место для частот системы после наложения на нее всех h связей (3.115).

14. Функция Рэлея. Когда система совершает свободные колебания в отсутствие сопротивлений, полная механическая энергия ее остается неизменной. В свободных колебаниях система «предоставлена самой себе» и начальный запас ее энергии не может

увеличиться. Но он и не уменьшается, так как сопротивления, на преодоление которых расходовалась бы энергия, по предположению, отсутствуют. Мы можем поэтому, пользуясь прежними обозначениями, написать

$$T + \Pi = h = \text{const.}$$

Если система совершает одно из главных колебаний, то все точки ее одновременно достигают положений наибольшего отклонения (в этот момент все обобщенные скорости равны нулю) и одновременно проходят через положение равновесия (в этот момент равны нулю все обобщенные координаты). В положении наибольшего отклонения кинетическая энергия обращается в нуль, и, следовательно, потенциальная достигает своего максимального значения:

$$\Pi_{\text{max}} = h.$$

В положении равновесия, наоборот, обращается в нуль потенциальная энергия и достигает своего максимума кинетическая энергия. Этот максимум равен, очевидно, той же постоянной h :

$$T_{\text{max}} = h.$$

Таким образом, когда система совершает одно из главных колебаний, то

$$T_{\text{max}} = \Pi_{\text{max}}. \quad (3.117)$$

Это равенство выражает принцип сохранения энергии для главных колебаний системы.

Если в выражения кинетической и потенциальной энергии

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n c_{ik} q_i q_k$$

подставить, предполагая, что система совершает s -е главное колебание, выражения обобщенных координат и скоростей

$$q_i = u_{si} \sin(p_s t + \varepsilon_s); \quad \dot{q}_i = u_{si} p_s \cos(p_s t + \varepsilon_s) \\ (i = 1, 2, \dots, n),$$

то

$$T = \frac{1}{2} p_s^2 \cos^2(p_s t + \varepsilon_s) \sum_{i, k=1}^n a_{ik} u_{si} u_{sk}, \\ \Pi = \frac{1}{2} \sin^2(p_s t + \varepsilon_s) \sum_{i, k=1}^n c_{ik} u_{si} u_{sk}.$$

Отсюда для рассматриваемого главного колебания

$$T_{\text{max}} = \frac{1}{2} p_s^2 \sum_{i, k=1}^n a_{ik} u_{si} u_{sk}, \quad \Pi_{\text{max}} = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n c_{ik} u_{si} u_{sk}. \quad (3.118)$$

Подставив эти выражения в (3.117), найдем

$$p_s^2 = \frac{\sum_{i, k=1}^n c_{ik} u_{si} u_{sk}}{\sum_{i, k=1}^n a_{ik} u_{si} u_{sk}}. \quad (3.119)$$

Формула (3.119) дает точное значение s -й собственной частоты только при подстановке в правую часть соответствующей точной s -й формы колебаний. Если же в правую часть этой формулы подставить произвольную совокупность n чисел

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \quad (3.120)$$

то ее значение не будет равно ни одному из квадратов собственных частот данной системы. По ряду соображений, какие дальше подробно разъясняются, представляется целесообразным рассматривать соотношение (3.119) как определение некоторой функции n независимых переменных λ_i (или отношений переменных λ_i к одной из них):

$$R(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \frac{\sum_{i, k=1}^n c_{ik} \lambda_i \lambda_k}{\sum_{i, k=1}^n a_{ik} \lambda_i \lambda_k}. \quad (3.121)$$

Эту функцию мы называем в дальнейшем *функцией Рэля*.

Напишем функцию Рэля, предполагая, что квадратичная форма, стоящая в знаменателе, в координатах λ_i имеет вид суммы квадратов:

$$R(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \frac{\sum_{i, k=1}^n b_{ik} \lambda_i \lambda_k}{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}. \quad (3.122)$$

Подставим вместо λ_i их разложения по собственным формам данной системы:

$$\lambda_i = \sum_{s=1}^n a_s u_{si} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.123)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i,k=1}^n b_{ik} \lambda_i \lambda_k &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (b_{i1} \lambda_1 + \dots + b_{in} \lambda_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{s=1}^n a_s p_s^2 u_{si} = \\ &= \sum_{s=1}^n a_s p_s^2 \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n u_{ii} u_{si} = \sum_{s=1}^n a_s^2 p_s^2, \\ &\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{s=1}^n a_s^2, \end{aligned}$$

и мы приходим к следующему выражению:

$$R(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1^2 p_1^2 + \dots + a_n^2 p_n^2}{a_1^2 + \dots + a_n^2}. \quad (3.124)$$

Это — выражение функции Рэля в нормальных координатах, каковыми, таким образом, оказываются коэффициенты a_s разложений λ_i по собственным формам.

15. Теоремы об экстремальных свойствах собственных частот. Из формулы (3.124) можно сделать следующие заключения:

а) Если форма (3.120) точно совпадает с первой собственной формой данной системы, то значение R , определяемое формулой (3.124) или (3.122), точно равно квадрату первой (основной) частоты. В этом случае

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \dots = a_n = 0,$$

и из формулы (3.124) мы имеем

$$R = p_1^2.$$

Если форма (3.120) не совпадает с первой формой, то значение R будет во всяком случае не меньше квадрата первой частоты p_1^2 и не больше квадрата наивысшей частоты p_n^2 . Это следует из того, что значение дроби, стоящей справа в (3.124), всегда лежит между наименьшей и наибольшей из положительных дробей

$$\frac{a_i^2 p_i^2}{a_i^2} = p_i^2$$

и, следовательно,

$$p_1^2 \leq R \leq p_n^2.$$

Таким образом, квадрат первой частоты является минимумом функции Рэля при любом выборе формы (3.120).

б) Если форма (3.120) ортогональна к первой собственной форме данной системы, т. е. если

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_{1i} = 0, \quad (3.125)$$

то $a_1 = 0$ и

$$p_2^2 \leq R \leq p_n^2,$$

причем $R = p_2^2$, когда форма λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) точно совпадает со второй собственной формой.

Таким образом, квадрат второй собственной частоты является относительным минимумом функции R при условии (3.125).

Аналогичным образом можно доказать, что квадрат третьей собственной частоты p_3^2 является относительным минимумом функции Рэля при наличии двух условий

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_{1i} = 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{2i} = 0$$

— условий ортогональности формы (3.120) с первой и второй собственными формами. Квадрат четвертой частоты будет, очевидно, минимумом функции R при условиях

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_{1i} = 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{2i} = 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{3i} = 0$$

и т. д. Мы приходим к следующей теореме о минимальных свойствах собственных частот:

Квадрат h -й собственной частоты p_h^2 может быть получен как относительный минимум функции Рэля

$$p_h^2 = \min R,$$

если привлекаемые для сравнения формы колебаний подчинены условиям:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_{1i} = 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{2i} = 0, \quad \dots, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{h-1,i} = 0. \quad (3.126)$$

Относительный минимум достигается только для формы, точно совпадающей с h -й собственной формой.

Из изложенного следует, что собственные частоты системы могут быть найдены как решение минимум-задачи. Те же частоты, начиная со второй, могут быть получены и как решение некоторой

«минимум-максимум задачи» на основании теоремы Куранта¹⁾ о так называемых минимаксимальных свойствах собственных частот.

Предположим, что на заданную систему, собственные частоты которой мы обозначим через p_i ($i=1, 2, \dots, n$), наложены $h-1$ линейных связей

$$A_{s1}\lambda_1 + A_{s2}\lambda_2 + \dots + A_{sn}\lambda_n = 0 \quad (3.127)$$

$$(s=1, 2, \dots, h-1).$$

Заданная система, после наложения на нее связей (3.127), обратится в систему с $n-h+1$ степенями свободы. Квадрат наименьшей частоты этой системы $[p_1^{(h-1)}]^2$ будет минимумом функции Рэля для системы, полученной после наложения связей, что мы запишем следующим образом:

$$[p_1^{(h-1)}]^2 = \min R(\lambda_i; A_{1i}, A_{2i}, \dots, A_{h-1, i}).$$

Изменяя произвольно A_{si} , мы будем получать различные значения для $\min R(\lambda_i; A_{1i}, \dots, A_{h-1, i})$. Среди этих минимумов будет и p_h^2 . Его мы получим, когда

$$A_{si} = u_{si} \quad (i=1, 2, \dots, n; s=1, 2, \dots, h-1),$$

т. е. когда уравнения связей (3.127) совпадут с условиями ортогональности формы λ_i ($i=1, 2, \dots, n$) с $h-1$ первыми собственными формами заданной системы.

Этот минимум будет наибольшим из всех минимумов функции R при условиях (3.127), так как на основании предыдущей теоремы при любом выборе A_{si}

$$p_1 \leq p_1^{(h-1)} \leq p_h.$$

Таким образом:

Квадрат частоты p_h^2 данной системы совпадает с наибольшим из минимальных значений, какие принимает функция Рэля, когда формы λ_i ($i=1, 2, \dots, n$) удовлетворяют $h-1$ линейным связям:

$$A_{s1}\lambda_1 + A_{s2}\lambda_2 + \dots + A_{sn}\lambda_n = 0$$

$$(s=1, 2, \dots, h-1),$$

где A_{si} могут принимать какие угодно значения.

В дальнейшем содержание этой теоремы мы будем записывать сокращенно следующим равенством:

$$p_h^2 = \max [\min R(\lambda_i; A_{1i}, \dots, A_{h-1, i})]. \quad (3.128)$$

¹⁾ Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат, 1951.

16. Теоремы о влиянии на частоты изменений масс и жесткостей системы¹⁾. Если в результате каких-либо изменений кинетической и потенциальной энергии системы функция Рэля увеличивается, то собственные частоты системы могут только возрастать. В самом деле, обозначим через R функцию Рэля исходной системы, через \bar{R} — измененной системы, и пусть $R \leq \bar{R}$. Но тогда

$$\min R \leq \min \bar{R},$$

и так как

$$p_1^2 = \min R, \quad \bar{p}_1^2 = \min \bar{R},$$

то

$$p_1^2 \leq \bar{p}_1^2.$$

Чтобы найти, как изменяются высшие частоты, наложим на системы — исходную и измененную — $h-1$ линейных связей вида (3.127). По теореме о минимаксимальных свойствах собственных частот

$$p_h^2 = \max [\min R(\lambda_i; A_{1i}, \dots, A_{h-1, i})],$$

$$\bar{p}_h^2 = \max [\min \bar{R}(\lambda_i; A_{1i}, \dots, A_{h-1, i})].$$

Так как

$$\min R(\lambda_i; A_{1i}, \dots, A_{h-1, i}) \leq \min \bar{R}(\lambda_i; A_{1i}, \dots, A_{h-1, i}),$$

то

$$\max [\min R(\lambda_i; A_{1i}, \dots, A_{h-1, i})] \leq \max [\min \bar{R}(\lambda_i; A_{1i}, \dots, A_{h-1, i})]$$

и, следовательно,

$$p_h^2 \leq \bar{p}_h^2. \quad (3.129)$$

Изменение жесткости системы связано с изменением потенциальной энергии. Если жесткость системы увеличивается без изменения кинетической энергии, то частоты системы увеличиваются или по крайней мере не уменьшаются. Изменение массы системы связано с изменением ее кинетической энергии. Если масса системы увеличивается без изменения потенциальной энергии, то частоты системы убывают или по крайней мере не возрастают.

Более определенные утверждения о действии на частоты системы изменений жесткости и массы содержатся в следующих теоремах, которые мы приводим без доказательства.

1. Если функция Рэля растет вследствие прибавления к максимальной потенциальной энергии r квадратов вида

$$X_k^2(\lambda_i) \equiv (q_{k1}\lambda_1 + \dots + q_{kn}\lambda_n)^2 \quad (k=1, 2, \dots, r)$$

без изменения кинетической энергии, то частоты данной системы p_h и частоты измененной \bar{p}_h связаны неравенствами

$$p_h \leq \bar{p}_h \quad (h=1, 2, \dots, n), \quad \bar{p}_h \leq p_{h+r} \quad (h=1, 2, \dots, n-r). \quad (3.130)$$

¹⁾ См. книгу Р. Ф. Гантмахера и М. Г. Крейна, цитированную на стр. 113.

2. Если функция Рэлея убывает вследствие прибавления к максимальной кинетической энергии r квадратов вида

$$X_k^2(\lambda_i) \equiv (q_{k1}\lambda_1 + \dots + q_{kn}\lambda_n)^2 \quad (k=1, 2, \dots, r),$$

то частоты p_h исходной системы и частоты \bar{p}_h измененной удовлетворяют неравенствам

$$\bar{p}_h \leq p_h \quad (h=1, 2, \dots, n); \quad p_{h-r} \leq \bar{p}_h \quad (h=r+1, \dots, n). \quad (3.131)$$

Теоремы Рэлея об эффекте наложения связи и изменений жесткости и масс системы имеют многочисленные приложения в практических расчетах. Они позволяют во многих случаях с достаточной уверенностью следить за направлением изменений частот системы при различных конструктивных изменениях, связанных с изменениями масс и жесткостей отдельных ее частей. На этих теоремах основаны методы варьирования масс и жесткостей, с помощью которых в проектируемой машине обеспечивается достаточная удаленность рабочего режима от так называемых «критических» или «резонансных» зон. Этими теоремами в некоторых случаях можно пользоваться для разделения корней векового уравнения.

Пример 7. Рассмотрим вековое уравнение крутильных колебаний приведенного вала так называемой «однородной» машины с двумя присоединенными на левом конце массами при таких данных¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= 684 \cdot 10^2, \\ I_2 &= 2196 \cdot 10^2, \\ I_3 &= I_4 = \dots = \\ &= I_{10} = I = \\ &= 195,5 \cdot 10^2, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} c_1 &= 20,68 \cdot 10^6, \\ c_2 &= 2970 \cdot 10^6, \\ c_3 &= c_4 = \dots = \\ &= c_9 = c = \\ &= 2810 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

Наложив на систему связь

$$\lambda_2 = 0, \quad (3.132)$$

будем иметь систему с восемью степенями свободы, вековое уравнение которой получим из векового уравнения первоначальной системы, если в нем вычеркнем вторую строку и второй столбец. Тогда левая часть векового уравнения распадется на произведение двух множителей:

$$\left[\frac{c_1(I_1 + I_2)}{I_1 I_2} - x \right] \begin{vmatrix} \frac{2c}{I} - x & -\frac{c}{I} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{c}{I} & \frac{2c}{I} - x & -\frac{c}{I} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \frac{2c}{I} - x & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

¹⁾ Числовые данные примера взяты из статьи: F u n k P. Über die Berechnung der kritischen Drehzahlen bei homogenen und fast homogenen Maschinen. ZAMM. Bd. 15, 1935, H. 3.

Таким образом, корни первоначального уравнения будут разделяться корнями двух уравнений:

1) уравнения первой степени

$$\frac{c_1(I_1 + I_2)}{I_1 I_2} - x = 0$$

с решением $x = 396,51$;

2) уравнения седьмой степени, соответствующего однородной части, где $c = 2810 \cdot 10^6$ и $I = 195,5 \cdot 10^2$. Все корни последнего уравнения получаются из одной формулы (см. стр. 116)

$$x_i = 4 \frac{c}{I} \sin^2 \frac{i\pi}{2,8} \quad (i=1, 2, \dots, 7).$$

В частности, наименьший корень равен 21847,57. Таким образом, квадрат второй частоты лежит между 396,51 и 21847,57.

Наложением связей типа (3.132) можно разделять корни вековых уравнений не только однородных машин. Вообще можно было бы доказать, что корни векового уравнения крутильных колебаний

$$D_n = 0$$

разделяются корнями уравнений

$$D_i = 0 \text{ и } D^{(n-i-1)} = 0,$$

где D_i — главный минор определителя D_n , получаемый вычеркиванием в D_n всех последних строк и столбцов, начиная с $(i+1)$ -х; $D^{(n-i-1)}$ — главный минор D_n , получаемый вычеркиванием в D_n всех первых строк и столбцов до $(i+1)$ -х включительно¹⁾.

17. Уравнения вынужденных колебаний. Обозначим через Q_1, Q_2, \dots, Q_n обобщенные возмущающие силы, соответствующие координатам системы q_1, q_2, \dots, q_n . Пусть в этих координатах уравнения вынужденных колебаний системы могут быть написаны в прямой форме:

$$\ddot{q}_i = - \sum_{k=1}^n b_{ik} q_k - Q_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.133)$$

Такую форму имеют, например, уравнения вынужденных крутильных колебаний приведенного вала от возмущающих крутящих моментов, приложенных к участкам вала. Предположим сначала, что силы Q_i — гармонические, одной и той же частоты и фазы:

$$Q_i = P_i \sin(\omega t + \alpha) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

В отсутствие сопротивлений частное решение системы (3.133), определяющее вынужденные колебания, имеет вид

$$q_i = \lambda_i \sin(\omega t + \alpha) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.134)$$

Искомыми являются амплитуды λ_i . Подставив выражения (3.134) в

¹⁾ Крейн М. Г., О спектре якобиевой формы в связи с теорией крутильных колебаний вала, Матем. сборник, т. 40 (1933), вып. 4.

уравнения (3.133), получим систему алгебраических уравнений

$$\omega^2 \lambda_i = \sum_{k=1}^n b_{ik} \lambda_k - P_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.135)$$

Самым простым способом нахождения амплитуд λ_i является решение уравнений (3.135) по правилам элементарной алгебры. Чтобы, однако, иметь возможность сделать некоторые общие заключения о формах вынужденных колебаний, мы воспользуемся для решения этих уравнений предложенным в 1905 г. А. Н. Крыловым¹⁾ методом разложения искомых амплитуд по собственным формам соответствующей однородной задачи. Обозначим через $u_{s1}, u_{s2}, \dots, u_{sn}$ ортонормированные амплитуды s -й собственной формы рассматриваемой системы, удовлетворяющие однородным уравнениям (уравнениям свободных колебаний системы)

$$p_s^2 u_{si} = \sum_{k=1}^n b_{ik} u_{sk} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.136)$$

Положив

$$\lambda_i = \sum_{s=1}^n a_s u_{si} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (3.137)$$

подберем коэффициенты a_s этого разложения так, чтобы были выполнены уравнения (3.135). Подставим выражения (3.137) в уравнения (3.135). Приняв во внимание уравнения (3.136), получим

$$\omega^2 \sum_{s=1}^n a_s u_{si} = \sum_{s=1}^n a_s p_s^2 u_{si} - P_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

откуда

$$\sum_{s=1}^n a_s u_{si} (p_s^2 - \omega^2) = P_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.138)$$

Заменим теперь в уравнениях (3.138) возмущающие силы P_i их разложениями по собственным формам u_{si}

$$P_i = \sum_{s=1}^n B_s u_{si} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (3.139)$$

где

$$B_s = \sum_{i=1}^n P_i u_{si} \quad (s=1, 2, \dots, n).$$

Тогда

$$\sum_{s=1}^n a_s u_{si} (p_s^2 - \omega^2) = \sum_{s=1}^n B_s u_{si} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

¹⁾ Крылов А. Н., Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben. Собрание трудов, изд. АН СССР, т. V, 1937.

откуда

$$a_s = \frac{B_s}{p_s^2 - \omega^2} \quad (s=1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, искомые амплитуды

$$\lambda_i = \sum_{s=1}^n \frac{B_s u_{si}}{p_s^2 - \omega^2} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (3.140)$$

а частное решение системы уравнений (3.133)

$$q_i = \sum_{s=1}^n \frac{B_s u_{si}}{p_s^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \alpha) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Следует отметить аналогию между выражением (3.140) и формулой (2.57): коэффициенты разложений по собственным формам амплитуд вынужденных колебаний получаются из соответствующих коэффициентов разложения возмущающих сил умножением последних на множители $\frac{1}{p_s^2 - \omega^2}$.

Предположим теперь, что в обобщенных координатах q_1, q_2, \dots, q_n уравнения вынужденных колебаний системы имеют вид

$$q_i = - \sum_{k=1}^n h_{ik} \ddot{q}_k + Q_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.141)$$

К такой форме могут быть приведены уравнения вынужденных поперечных колебаний стержня или балки от возмущающих сил, приложенных к сосредоточенным на балке массам. В самом деле, пусть на массы m_i ($i=1, 2, \dots, n$) действуют силы P_i ($i=1, 2, \dots, n$). Уравнения поперечных колебаний такой балки, в соответствии с (3.42), напишутся в виде

$$y_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} (-m_k \ddot{y}_k + P_k) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

где α_{ik} — статические коэффициенты влияния, y_i — поперечные смещения масс m_i . Полагая в этих уравнениях

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} P_k = \bar{Q}_i,$$

получим

$$y_i = - \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} m_k \ddot{y}_k + \bar{Q}_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.142)$$

После подстановки

$$q_i = y_i \sqrt{m_i}$$

приходим к симметризованной системе (3.141)

$$q_i = - \sum_{k=1}^n h_{ik} \ddot{q}_k + Q_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

где $h_{ik} = a_{ik} \sqrt{m_i m_k}$, $Q_i = \bar{Q}_i / \sqrt{m_i}$ ($i, k=1, 2, \dots, n$).

Размерность величин Q_i в уравнениях (3.142) совпадает с размерностью координат y_i — это перемещения сосредоточенных масс m_i от одновременного действия на балку всех сил P_i . Можно сказать, что вынужденные колебания системы, определяемые уравнениями (3.141), возникают в результате сообщаемых массам m_i *возмущающих перемещений*.

Полагая, что возмущающие перемещения Q_i происходят по одному и тому же гармоническому закону

$$Q_i = R_i \sin(\omega t + \alpha) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

будем искать частное решение уравнений (3.141) в форме

$$q_i = \lambda_i \sin(\omega t + \alpha) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Подставив эти выражения в уравнения (3.141), приходим к системе алгебраических уравнений для λ_i

$$\lambda_i = \omega^2 \sum_{k=1}^n h_{ik} \lambda_k + R_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.143)$$

Полагая далее

$$\lambda_i = \sum_{s=1}^n a_s u_{si}, \quad R_i = \sum_{s=1}^n A_s u_{si} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (3.144)$$

способом, аналогичным изложенному для прямых уравнений, получим разложение амплитуд вынужденных колебаний по собственным формам

$$\lambda_i = \sum_{s=1}^n \frac{A_s u_{si}}{1 - \frac{\omega^2}{p_s^2}} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (3.145)$$

где коэффициенты A_s имеют значения

$$A_s = \sum_{i=1}^n R_i u_{si} \quad (s=1, 2, \dots, n). \quad (3.146)$$

Из формул (3.140) и (3.145) можно сделать следующие заключения:

1. Когда частота ω возмущающей силы равна одной из собственных частот системы, — например p_s , соответствующий член разложения (3.140) или (3.145) с течением времени растет неограниченно. Происходит явление резонанса. Частота возмущающей силы называется в этом случае *критической частотой*. В системе с n степенями свободы при действии на нее гармонических сил одной частоты и фазы возможны n резонансных состояний, так как частота возмущающей силы может оказаться равной каждой из n собственных частот. Определение возможных для системы резонансных состояний, так называемая *проверка системы на резонанс*, составляет одну из важнейших задач технических расчетов на колебания.

2. Когда частота ω возмущающей силы близка к одной из собственных частот системы, то соответствующий член в разложениях (3.140) и (3.145) значительно превышает все остальные и форма вынужденных колебаний почти совпадает с соответствующей собственной формой. Вынужденные колебания системы в этом случае почти точно воспроизводят форму одного из собственных главных колебаний системы.

18. Гармонические коэффициенты влияния. Значительные упрощения в решение задач на вынужденные колебания от гармонических возмущающих сил вносит метод так называемых гармонических коэффициентов влияния. Применительно к уравнениям в обратной форме и, в частности, к поперечным колебаниям балки с сосредоточенными массами гармонические коэффициенты влияния можно определить следующим образом:

Гармоническим коэффициентом влияния A_{ik} частоты ω называется амплитуда массы i в установившихся вынужденных колебаниях от единичного гармонического возмущающего перемещения той же частоты ω , сообщаемого массе k .

Для уравнений в прямой форме и, в частности, для крутильных колебаний приведенного вала определение гармонических коэффициентов может быть изложено так:

Гармоническим коэффициентом влияния B_{ik} частоты ω называется амплитудный угол кручения участка i от единичного гармонического крутящего момента той же частоты ω , приложенного на участке k ¹⁾.

Из формул (3.146), полагая в них $R_k = 1$, $R_i = 0$ ($i \neq k$), находим:

$$A_s = u_{sk}.$$

В аналогичном случае и

$$B_s = u_{sk}.$$

¹⁾ В симметризованных уравнениях B_{ik} — это угол кручения участка i , умноженный на $\sqrt{c_i}$.

Для таких значений возмущающего усилия из формул (3.145) и (3.140) находим

$$B_{ik} = \sum_{s=1}^n \frac{u_{si}u_{sk}}{p_s^2 - \omega^2}, \quad A_{ik} = \sum_{s=1}^n \frac{u_{si}u_{sk}}{1 - \frac{\omega^2}{p_s^2}}. \quad (3.147)$$

Формулы (3.147) дают разложения гармонических коэффициентов влияния по собственным формам соответствующей однородной задачи. Из формул (3.147) следует, что

$$A_{ik} = A_{ki}, \quad B_{ik} = B_{ki}$$

т. е. гармонические коэффициенты удовлетворяют условию симметрии. Симметрия гармонических коэффициентов выражает так называемый *обобщенный принцип взаимности Рэлея*¹⁾.

Предположим, что ко всем массам (или дискам) приложены гармонические возмущающие перемещения (или моменты) с одинаковыми фазами

$$Q_i = P_i \sin(\omega t + \alpha) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Согласно принципу линейного наложения, вынужденная амплитуда i -й массы от одновременного действия всех Q_k будет равна

$$A_i = A_{i1}P_1 + A_{i2}P_2 + \dots + A_{in}P_n \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.148)$$

и соответственно

$$B_i = B_{i1}P_1 + B_{i2}P_2 + \dots + B_{in}P_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Если требуется вычислить только одну амплитуду A_i , то для получения гармонических коэффициентов, входящих в выражение (3.148), достаточно решить одну систему уравнений поперечных колебаний, приложив единичное перемещение или момент к i -й массе, так как

$$A_{ik} = A_{ki}.$$

Если фазы перемещений или моментов Q_i неодинаковы, то амплитуда i -й массы от одновременного действия на все массы возмущающих перемещений или моментов будет равна геометрической сумме

$$A_i = A_{i1}P_1 + A_{i2}P_2 + \dots + A_{in}P_n. \quad (3.149)$$

¹⁾ Стретт Дж. (лорд Рэлей), Теория звука, т. I, Гостехиздат, 1955.

При построении этой суммы векторы P_k , умноженные на соответствующие гармонические коэффициенты, откладываются в векторном многоугольнике под углами (относительно, например, оси Ox), равными начальным фазам Q_k .

В самом деле, приложив к k -й массе обобщенную силу $1 \cdot e^{i\omega t}$ ($l = \sqrt{-1}$), мы получим для амплитуды l -й массы в установившихся вынужденных колебаниях гармонический коэффициент A_{lk} . Если теперь ко всем массам приложены возмущающие силы

$$P_k e^{i\omega t} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

то амплитуда l -й массы будет, как в уже рассмотренном случае,

$$A_l = A_{l1}P_1 + A_{l2}P_2 + \dots + A_{ln}P_n.$$

Пусть теперь ко всем массам будут приложены обобщенные силы

$$P_k e^{i(\omega t + \gamma_k)} = P_k e^{i\gamma_k} e^{i\omega t}.$$

По предыдущему

$$A_l = A_{l1}P_1 e^{i\gamma_1} + A_{l2}P_2 e^{i\gamma_2} + \dots + A_{ln}P_n e^{i\gamma_n}$$

или, что то же,

$$A_l = A_{l1}P_1 + A_{l2}P_2 + \dots + A_{ln}P_n.$$

Абсолютную величину (модуль) вектора A_l можно найти по его проекциям на две оси подходящим образом выбранной прямоугольной системы координат. Пусть, например, на h масс системы действуют одинаковые по величине, но смещенные по фазе гармонические силы (или моменты)

$$Q_k = P \sin(\omega t + \beta_k) \quad (k = 1, 2, \dots, h).$$

Такой случай встречается при расчете вынужденных колебаний коленчатого вала, к коленам которого приложены одинаковые по величине, но смещенные по фазе касательные усилия от давления газов в цилиндрах. В этом случае

$$A_i = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^h A_{ik} \cos \beta_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^h A_{ik} \sin \beta_k\right)^2} \cdot P. \quad (3.150)$$

Начальная фаза γ_k колебаний k -й массы найдется из формулы

$$\operatorname{tg} \gamma_k = \frac{\sum_{l=1}^h A_{kl} \sin \beta_l}{\sum_{l=1}^h A_{kl} \cos \beta_l}. \quad (3.151)$$

Пример 8. Найти амплитуды вынужденных крутильных колебаний приведенного вала с пятью дисками от единичного гармонического момента, приложенного на первом участке. Числовые данные те же, что и в примере 2. Частота возмущающего момента $\omega = 100$ 1/сек.

Решение задачи сводится к обращению матрицы коэффициентов при λ_k в неоднородной системе уравнений вынужденных колебаний

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \lambda_1 &= 10987 \lambda_1 - 2306 \lambda_2 & * & & * & & + 1 \\ \omega^2 \lambda_2 &= -2306 \lambda_1 + 28589 \lambda_2 - 20421 \lambda_3 & * & & & & \\ \omega^2 \lambda_3 &= * & -20421 \lambda_2 + 25350 \lambda_3 - 10643 \lambda_4 & & & & \\ \omega^2 \lambda_4 &= * & * & -10643 \lambda_3 + 32474 \lambda_4 & & & \end{aligned} \right\}$$

т. е. матрицы (после подстановки $\omega^2 = 10^4$)

$$\begin{vmatrix} 987 & -2306 & * & * \\ -2306 & 18589 & -20421 & * \\ * & -20421 & 15350 & -10643 \\ * & * & -10643 & 22474 \end{vmatrix}. \quad (3.152)$$

Выполнив обращение этой матрицы, получим

$$\begin{vmatrix} 81,27 & -8,58 & -16,91 & -8,04 \\ -8,58 & -3,67 & -7,24 & -3,45 \\ -16,91 & -7,24 & -4,66 & -2,22 \\ -8,04 & -3,45 & -2,22 & 3,39 \end{vmatrix} \cdot 10^{-5}. \quad (3.153)$$

Элементы первого столбца и будут искомыми амплитудами. Остальные столбцы будут амплитудами вынужденных колебаний от единичных гармонических моментов, приложенных на других участках вала. Одновременно эти амплитуды являются и гармоническими коэффициентами частоты ω .

Пример 9. Амплитуды вынужденных поперечных колебаний балки с четырьмя сосредоточенными грузами (рис. 29) от единичного гармонического смещения частоты $\omega = 200$ 1/сек, приложенного к первой слева массе. Числовые данные примера 3.

Вычисление амплитуд по предыдущему сводится к решению системы неоднородных уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2,5 \lambda_1 &= 4,53 \lambda_1 + 5,59 \lambda_2 + 5,05 \lambda_3 + 3,99 \lambda_4 + 2,5, \\ 2,5 \lambda_2 &= 5,59 \lambda_1 + 8,33 \lambda_2 + 7,99 \lambda_3 + 6,48 \lambda_4, \\ 2,5 \lambda_3 &= 5,05 \lambda_1 + 7,99 \lambda_2 + 8,33 \lambda_3 + 7,09 \lambda_4, \\ 2,5 \lambda_4 &= 3,99 \lambda_1 + 6,48 \lambda_2 + 7,09 \lambda_3 + 6,61 \lambda_4, \end{aligned} \right\}$$

т. е. к обращению матрицы

$$\begin{vmatrix} 2,03 & 5,59 & 5,05 & 3,99 \\ 5,59 & 5,83 & 7,99 & 6,48 \\ 5,05 & 7,99 & 5,83 & 7,09 \\ 3,99 & 6,48 & 7,09 & 4,11 \end{vmatrix} \quad (3.154)$$

и последующему умножению всех ее элементов на 2,5.

Матрица амплитуд вынужденных колебаний или гармонических коэффициентов от единичных гармонических смещений частоты 200 1/сек будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} -1,92 & -0,14 & 0,62 & 1,02 \\ -0,14 & -0,91 & 0,43 & 0,72 \\ 0,62 & 0,43 & -0,82 & -0,03 \\ 1,02 & 0,72 & -0,03 & -1,56 \end{vmatrix}.$$

Пример 10. Динамический поглотитель колебаний¹⁾. Принципиальную схему динамического поглотителя колебаний можно представить в виде двух грузов P_1 и P_2 , подвешенных последовательно с помощью пружин AB и BC к неподвижной точке A (рис. 37). Жесткости пружин обозначим через c_1 и c_2 . К грузу P_1 приложена вертикальная гармоническая возмущающая сила $Q \sin \omega t$. Описанная схема является, таким образом, последовательным соединением двух линейных осцилляторов — первого (основного) с грузом P_1 и жесткостью c_1 и второго — с грузом P_2 и жесткостью c_2 . Пренебрегая массами пружин, получим систему с двумя степенями свободы, положение которой при колебаниях будет определяться отклонениями x_1 и x_2 грузов от положения равновесия. Уравнения вынужденных колебаний системы будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_1}{g} \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) &= Q \sin \omega t, \\ \frac{P_2}{g} \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.155)$$

В установившихся вынужденных колебаниях

$$x_1 = A_1 \sin \omega t, \quad x_2 = A_2 \sin \omega t.$$

Амплитуды A_1 и A_2 найдутся из уравнений

$$\left. \begin{aligned} (c_1 + c_2 - \frac{P_1}{g} \omega^2) A_1 - c_2 A_2 &= Q, \\ -c_2 A_1 + (c_2 - \frac{P_2}{g} \omega^2) A_2 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

¹⁾ Тимошенко С. П., Теория колебаний в инженерном деле, ОНТИ, 1934.

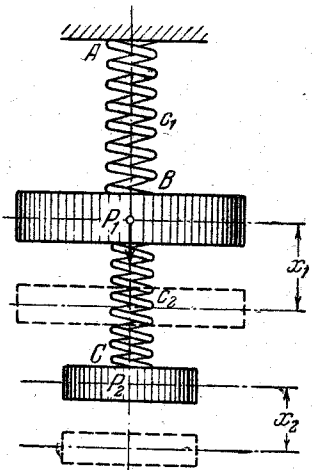


Рис. 37.

если

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1 + c_2 - \frac{P_1}{g} \omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - \frac{P_2}{g} \omega^2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

т. е. если частота ω возмущающей силы не совпадает ни с одной из собственных частот системы. В этом случае

$$A_1 = \frac{Q}{\Delta} \left(c_2 - \frac{P_2}{g} \omega^2 \right), \quad A_2 = \frac{Q}{\Delta} c_2. \quad (3.156)$$

Из первого уравнения (3.156) видно, что амплитуду A_1 груза P_1 можно сделать равной нулю, т. е. устранить его колебания, если выбрать вес P_2 второго груза и жесткость c_2 таким образом, чтобы

$$c_2 - \frac{P_2}{g} \omega^2 = 0, \quad (3.157)$$

или

$$\omega = \sqrt{\frac{c_2 g}{P_2}} = p_2, \quad (3.158)$$

где p_2 — собственная частота добавочного осциллятора.

Аналогичное явление имеет место в крутильной системе, состоящей из двух маховых масс, когда к одной из них присоединяется добавочная система,

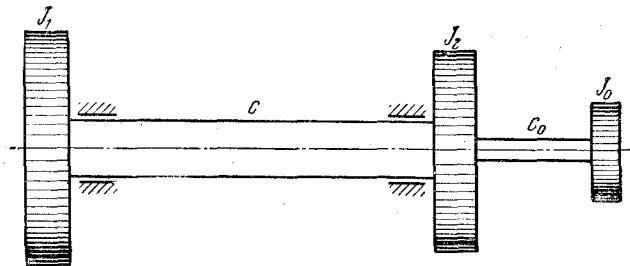


Рис. 38.

состоящая из вала с крутильной жесткостью c_0 и маховика с моментом инерции J_0 (рис. 38.) Колебания массы J_2 (например, приведенной массы генератора) будут устранены, если жесткость c_0 и момент инерции J_0 выбрать так, чтобы

$$\frac{c_0}{J_0} = \omega^2,$$

т. е. чтобы собственная частота присоединенной системы была равна частоте возмущающего момента, приложенного к массе J_2 .

Полное устранение колебаний основного осциллятора в силу соотношения (3.158) возможно только в том случае, когда частота ω возмущающей силы будет равна собственной частоте колебаний добавочного осциллятора. Если это условие не выполнено, то присоединение второго осциллятора не устранил колебаний первого. В последнем случае будут возможны два

резонансных состояния, когда ω совпадает с одной из двух собственных частот системы, равных корням уравнения

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - \frac{P_1}{g} \omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - \frac{P_2}{g} \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, описанный поглотитель может быть «настроен» только на одну частоту, и применение его ограничено машинами, работающими с постоянной скоростью.

19. Вынужденные колебания систем с внутренним неупругим сопротивлением. Среди сопротивлений, возникающих при колебаниях упругих систем, особое значение имеет внутреннее неупругое сопротивление, действие которого выражается в так называемых *гистерезисных потерях* энергии деформации. Многочисленными теоретическими и экспериментальными исследованиями (в частности, выполненными Н. Н. Давиденковым, И. Л. Корчинским, Д. Ю. Пановым, Е. С. Сорокиным) установлены следующие основные свойства внутреннего неупругого сопротивления:

1) В пределах обычных в машиностроении продолжительностей циклов деформации (от нескольких минут до тысячных долей секунды) внутреннее неупругое сопротивление не зависит от скорости деформации.

2) Внутреннее неупругое сопротивление зависит от величины деформации, причем зависимость между внешней нагрузкой (силой, моментом) и общей деформацией (прогибом, углом поворота) нелинейна и различна при нагружении и разгрузке. При циклических нагрузках эта зависимость для полного цикла изменения нагрузки графически представляется замкнутой кривой, которая носит название *петли гистерезиса* (рис. 39).

Большая часть формул, предложенных различными авторами для выражения зависимости между внешним усилием и деформацией, преследует цель отобразить по возможности более точно опытную форму петли гистерезиса.

Так, Е. С. Сорокин¹⁾, основываясь на допущении, что петля гистерезиса является эллипсом и что в установившихся вынужден-

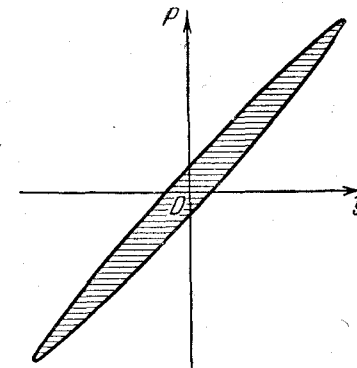


Рис. 39.

¹⁾ Сорокин Е. С., К вопросу неупругого сопротивления при колебаниях, ЦНИИС, Стройиздат, 1954.

ных колебаниях от гармонической возмущающей нагрузки деформации упругой системы происходят по гармоническому закону, приходит к заключению, что внутреннее неупругое сопротивление R пропорционально упругой восстанавливающей силе, но сдвинуто относительно последней по фазе на $\pi/2$. Математическим выражением такого сопротивления является формула

$$R = i \frac{\psi}{2\pi} S, \quad (3.159)$$

где S — упругая восстанавливающая сила (или момент); $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, умножение на которую соответствует повороту вектора s на угол $\pi/2$, осуществляющему сдвиг фазы R на этот угол; ψ — так называемый коэффициент поглощения, равный отношению энергии ΔW , поглощенной материалом за один цикл деформации, к полной механической энергии W системы:

$$\psi = \frac{\Delta W}{W}. \quad (3.160)$$

Приближенное значение коэффициента поглощения, которым обычно пользуются в практических расчетах, дается формулой

$$\psi = 2\delta, \quad (3.161)$$

где δ — логарифмический декремент колебания. В соответствии с формулами (3.159) и (3.161) суммарная внутренняя сила сопротивления S^* , включающая упругую восстанавливающую силу (или момент) и неупругое сопротивление, может быть представлена следующими выражениями:

$$S^* = \left(1 + \frac{i\psi}{2\pi}\right) S \approx \left(1 + \frac{i\delta}{\pi}\right) S. \quad (3.162)$$

Существенным свойством этих выражений является их линейность относительно S , что дает возможность вести расчеты вынужденных колебаний систем с внутренним неупругим сопротивлением, оставаясь в пределах линейной теории.

Силы S для различных упругих систем и различных напряженных состояний определяются методами теории упругости. Если, например, на упругую систему действует сосредоточенная нагрузка (сила или момент), то

$$S = cy,$$

где y — упругое перемещение в месте приложения нагрузки, а c — соответствующий коэффициент жесткости. Если на упругую систему действует несколько сосредоточенных нагрузок Q_1, Q_2, \dots, Q_n , то восстанавливающая сила, соответствующая нагрузке Q_k , равна

$$S_k = c_{k1}y_1 + c_{k2}y_2 + \dots + c_{kn}y_n \quad (3.163)$$

где y_1, \dots, y_n — перемещения в точках приложения внешних сил; c_{ki} — коэффициенты жесткости.

Переходим к составлению уравнений вынужденных колебаний с учетом внутреннего неупругого сопротивления. Предположим, что масса системы приведена к n сосредоточенным массам и пусть на эти массы действуют гармонические возмущающие силы (или моменты) — $Q_k e^{i\omega t}$ ($k = 1, 2, \dots, n$; $i = \sqrt{-1}$). Уравнения малых колебаний системы без учета внутреннего сопротивления имели бы в этом случае вид (прямая форма):

$$\ddot{y}_k = - \sum_{l=1}^n c_{kl} y_l - Q_k e^{i\omega t} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

С учетом внутреннего сопротивления эти уравнения напишутся так:

$$\ddot{y}_k = - \left(1 + \frac{i\delta}{\pi}\right) \sum_{l=1}^n c_{kl} y_l - Q_k e^{i\omega t} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.164)$$

Частное решение этих уравнений, определяющее вынужденные колебания, будем искать, согласно сделанным допущениям, в виде

$$y_k = A_k e^{i\omega t} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.165)$$

Подставив эти выражения в (3.164), получим

$$A_k \omega^2 = \left(1 + \frac{i\delta}{\pi}\right) \sum_{l=1}^n c_{kl} A_l + Q_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

или

$$p A_k = \sum_{l=1}^n c_{kl} A_l + P_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (3.166)$$

где

$$p = \omega^2 \left(1 + \frac{i\delta}{\pi}\right)^{-1}, \quad P_k = Q_k \left(1 + \frac{i\delta}{\pi}\right)^{-1}.$$

Система уравнений (3.166) не отличается по форме от уравнений вынужденных колебаний без сопротивлений. Результаты исследований последних могут быть поэтому без существенных изменений перенесены и на рассматриваемый случай вынужденных колебаний с сопротивлением. В частности, с помощью формул (3.140) можно сразу написать решение уравнений (3.166), т. е. выражения вынужденных амплитуд A_k в виде разложений по собственным формам

$$A_k = \left(1 + \frac{i\delta}{\pi}\right)^{-1} \sum_{s=1}^n \frac{B_s u_{sk}}{p_s^2 - p} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (3.167)$$

где B_s — коэффициенты разложений по собственным формам сил Q_k :

$$Q_k = \sum_{s=1}^n B_s u_{sk} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Подставив в (3.167) значение p , найдем

$$A_k = \sum_{s=1}^n \frac{B_s u_{sk}}{p_s^2 \left(1 + \frac{i\delta}{\pi}\right) - \omega^2}.$$

Полученное выражение для A_k можно представить еще и в такой форме:

$$A_k = \sum_{s=1}^n R_s u_{sk} e^{i\varphi_s},$$

где

$$R_s = \frac{B_s}{\sqrt{(p_s^2 - \omega^2)^2 + \frac{\delta^2}{\pi^2} p_s^4}} \quad \text{tg } \varphi_s = -\frac{\delta p_s^2}{\pi(p_s^2 - \omega^2)}$$

($s=1, 2, \dots, n$).

Искомое частное решение будет в этом случае иметь вид

$$y_k = \sum_{s=1}^n R_s u_{sk} e^{i(\omega t + \varphi_s)}.$$

Взяв в качестве решения вещественную часть этого выражения, получим

$$y_k = \sum_{s=1}^n R_s u_{sk} \cos(\omega t + \varphi_s). \quad (3.168)$$

При резонансе с первой собственной частотой ($\omega = p_1$)

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad R_1 = \frac{B_1 \pi}{\delta p_1^2}.$$

Подставив эти значения в (3.168) и выделив первый член, получим

$$y_k = \frac{B_1 \pi}{\delta p_1^2} u_{1k} \sin p_1 t + \sum_{s=2}^n R_s u_{sk} \cos(p_1 t + \varphi_s).$$

При малом δ и достаточно большом промежутке между первой и второй собственными частотами, можно иногда в полученном выражении отбросить справа все члены, кроме первого, и, таким образом, посчитать, что резонансные амплитуды пропорциональны амплитудам первой собственной формы.

ГЛАВА IV

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

А. ОСНОВНАЯ ЧАСТОТА

1. Метод последовательных приближений формами колебаний.

Метод последовательных приближений формами колебаний, или «метод итераций», является одним из наиболее распространенных приближенных методов определения основной (наименьшей) частоты систем с конечным числом степеней свободы. В графической форме он широко используется в расчетах первых критических чисел оборотов ступенчатых валов. С помощью некоторых предварительных преобразований исходной системы уравнений метод последовательных приближений формами колебаний позволяет найти и любую высшую частоту, причем с наперед заданной точностью и без предварительного определения низших частот¹⁾.

При расчете методом последовательных приближений наименьшей частоты мы будем исходить из уравнений малых колебаний, составленных в обратной форме:

$$\lambda_i = p^2 \sum_{k=1}^n h_{ik} \lambda_k \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4.1)$$

Содержание метода заключается в выполнении следующих операций. Задаемся произвольной системой n чисел

$$\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_n^{(0)}$$

— так называемой *исходной формой* — и вычисляем «первое приближение» по формулам

$$\lambda_i^{(1)} = \sum_{k=1}^n h_{ik} \lambda_k^{(0)} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4.2)$$

¹⁾ См. метод гармонических коэффициентов влияния, стр. 186.

С помощью тех же формул, но исходя из системы амплитуд только что найденного первого приближения, вычисляем второе приближение, по второму — третье и т. д.; наконец, по $(m-1)$ -у приближению m -е:

$$\lambda_i^{(m)} = \sum_{k=1}^n h_{ik} \lambda_k^{(m-1)} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4.3)$$

При достаточно большом m отношения соответственных амплитуд двух последовательных приближений стремятся к квадрату основной частоты:

$$\frac{\lambda_i^{(m-1)}}{\lambda_i^{(m)}} \rightarrow p_1^2,$$

а отношения амплитуд одного и того же приближения — к отношениям амплитуд первой собственной формы:

$$\lambda_1^{(m)} : \lambda_2^{(m)} : \dots : \lambda_n^{(m)} \rightarrow u_{11} : u_{12} : \dots : u_{1n}.$$

Для доказательства найдем разложения последовательных приближений по собственным формам, начиная с исходной формы. Пусть разложение последней будет

$$\lambda_i^{(0)} = \sum_{s=1}^n a_s u_{si} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Подставим в (4.2) эти разложения вместо $\lambda_i^{(0)}$; тогда

$$\lambda_i^{(1)} = \sum_{k=1}^n h_{ik} \sum_{s=1}^n a_s u_{sk} = \sum_{s=1}^n a_s \sum_{k=1}^n h_{ik} u_{sk},$$

откуда на основании (4.1)

$$\lambda_i^{(1)} = \sum_{s=1}^n \frac{a_s u_{si}}{p_s^2} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Таково разложение по собственным формам первого приближения.

Аналогичным путем найдем разложение второго приближения и т. д. и, наконец, m -го:

$$\lambda_i^{(m)} = \sum_{s=1}^n \frac{a_s u_{si}}{p_s^{2m}} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4.4)$$

Так как

$$p_1^2 < p_2^2 < \dots < p_n^2,$$

то первый член суммы правой части (4.4) при достаточно большом m превосходит все остальные. Можно поэтому при достаточно большом m положить

$$\lambda_i^{(m-1)} \approx \frac{a_1 u_{1i}}{p_1^{2(m-1)}} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

и

$$\lambda_i^{(m)} \approx \frac{a_1 u_{1i}}{p_1^{2m}} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Из последних соотношений находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda_i^{(m-1)}}{\lambda_i^{(m)}} &\approx p_1^2, \\ \lambda_1^{(m)} : \lambda_2^{(m)} : \dots : \lambda_n^{(m)} &\approx u_{11} : u_{12} : \dots : u_{1n}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Если в формулу (4.4) подставить значения коэффициентов

$$a_s = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(0)} u_{sk} \quad (s=1, 2, \dots, n),$$

то

$$\lambda_i^{(m)} = \sum_{s=1}^n \frac{u_{si}}{p_s^{2m}} \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(0)} u_{sk} = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(0)} \sum_{s=1}^n \frac{u_{si} u_{sk}}{p_s^{2m}} = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(0)} h_{ik}^{(m-1)}, \quad (4.6)$$

где, согласно формулам на стр. 125,

$$h_{ik}^{(m-1)} = \sum_{s=1}^n \frac{u_{si} u_{sk}}{p_s^{2m}} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Амплитуды m -го приближения являются, таким образом, линейными функциями $(m-1)$ -х итераций коэффициентов h_{ik} . Когда в исходной форме одна из амплитуд λ_i^0 равна единице, а все остальные — нули, то

$$\lambda_i^{(m)} = h_{ii}^{(m-1)} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Возможность получить значения первой частоты и первой формы колебаний основана существенным образом на том, что при вычислении последовательных приближений мы пользуемся обратными уравнениями (4.1). Итерации форм с помощью прямых уравнений можно использовать для расчета наибольшей частоты способом, аналогичным описанному¹⁾.

¹⁾ Бабаков И. М., К определению наибольшей частоты малых колебаний, Научные записки ХММИ, т. 5, 1940.

2. Теоремы о границах основной частоты¹⁾. Установим неравенства, с помощью которых можно оценить погрешность каждого отдельного приближения и, таким образом, выполнить расчет с любой наперед заданной точностью. Для этого докажем теоремы о границах основной частоты применительно к обратным уравнениям в предположении²⁾, что

$$h_{ik} \geq 0, h_{ik} = h_{ki}, \lambda_i^{(0)} \geq 0. \quad (4.7)$$

Теорема 1. Точное значение квадрата первой частоты лежит между наименьшим и наибольшим из отношений $\frac{\lambda_i^{(m-1)}}{\lambda_i^{(m)}}$:

$$\min \frac{\lambda_i^{(m-1)}}{\lambda_i^{(m)}} < p_1^2 < \max \frac{\lambda_i^{(m-1)}}{\lambda_i^{(m)}}. \quad (4.8)$$

В самом деле, написав уравнения (4.1) для первой частоты и первой собственной формы

$$u_{1i} = p_1^2 \sum_{k=1}^n h_{ik} u_{1k} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

умножим каждое из них на соответствующее $\lambda_i^{(m-1)}$ и затем сложим. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_{1i} \lambda_i^{(m-1)} &= p_1^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(m-1)} \sum_{k=1}^n h_{ik} u_{1k} = \\ &= p_1^2 \sum_{k=1}^n u_{1k} \sum_{i=1}^n h_{ki} \lambda_i^{(m-1)} = p_1^2 \sum_{k=1}^n u_{1k} \lambda_k^{(m)} \end{aligned}$$

и

$$\sum_{i=1}^n u_{1i} [\lambda_i^{(m-1)} - p_1^2 \lambda_i^{(m)}] = 0. \quad (4.9)$$

Если бы p_1^2 при положительных u_{1i} было больше наибольшего из отношений $\lambda_i^{(m-1)}/\lambda_i^{(m)}$, то все слагаемые суммы (4.9) были бы отрицательны; если бы p_1^2 было меньше наименьшего из отношений $\lambda_i^{(m-1)}/\lambda_i^{(m)}$, то все слагаемые суммы (4.9) были бы положительны. Следовательно, p_1^2 должно быть меньше наибольшего и больше наименьшего из отношений

$$\frac{\lambda_i^{(m-1)}}{\lambda_i^{(m)}} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4.10)$$

¹⁾ Бабаков И. М., К определению погрешности приближенного расчета основной частоты малых колебаний. Вестник инженеров и техников, № 9, 1939.

²⁾ При выполнении первого из условий (4.7) амплитуды первой формы во всех последовательных приближениях, начиная с первого, положительны.

Теорема 2. С увеличением t наименьшее из отношений (4.10) возрастает, а наибольшее убывает, так что разность между ними при достаточно большом t может быть сделана как угодно малой.

В самом деле,

$$\frac{\lambda_i^{(m-1)}}{\lambda_i^{(m)}} = \frac{\sum_{k=1}^n h_{ik} \lambda_k^{(m-2)}}{\sum_{k=1}^n h_{ik} \lambda_k^{(m-1)}}. \quad (4.11)$$

Значения дроби

$$\frac{\sum_{k=1}^n h_{ik} \lambda_k^{(m-2)}}{\sum_{k=1}^n h_{ik} \lambda_k^{(m-1)}} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

лежат между наименьшей и наибольшей из положительных дробей:

$$\frac{\lambda_1^{(m-2)}}{\lambda_1^{(m-1)}}, \frac{\lambda_2^{(m-2)}}{\lambda_2^{(m-1)}}, \dots, \frac{\lambda_n^{(m-2)}}{\lambda_n^{(m-1)}}. \quad (4.12)$$

Значит, наименьшее из отношений (4.11) больше наименьшего из отношений (4.12), а наибольшее из отношений (4.11) меньше наибольшего из отношений (4.12):

$$\min \frac{\lambda_i^{(m-2)}}{\lambda_i^{(m-1)}} < \min \frac{\lambda_i^{(m-1)}}{\lambda_i^{(m)}} < p_1^2 < \max \frac{\lambda_i^{(m-1)}}{\lambda_i^{(m)}} < \max \frac{\lambda_i^{(m-2)}}{\lambda_i^{(m-1)}}.$$

Так как, далее, верхняя граница наименьших отношений и нижняя граница наибольших отношений одна и та же, именно p_1^2 , то разность между этими отношениями при достаточно большом t может быть сделана как угодно малой.

Теорема 3. Точное значение квадрата основной частоты p_1^2 удовлетворяет неравенству¹⁾

$$\min \frac{\lambda_i^{(m-1)}}{\lambda_i^{(m)}} < p_1^2 < \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(0)} \lambda_i^{(m-1)}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(0)} \lambda_i^{(m)}}. \quad (4.13)$$

Выбирая подходящим образом исходную форму, мы можем придать правой части неравенства (4.13) более простой вид. Так, если

¹⁾ Доказательство неравенства (4.13) см. в статье автора «О границах основной частоты» (Научные записки ХММИ, т. V, 1940).

в исходной форме $\lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)} = \dots = \lambda_n^{(0)} = 1$, то

$$\min \frac{\lambda_i^{(m-1)}}{\lambda_i^{(m)}} \leq p_1^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(m-1)}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(m)}}. \quad (4.14)$$

Другие неравенства для оценки нижней и верхней границ основной частоты даны П. Ф. Папковичем¹⁾, С. А. Бернштейном²⁾ и другими авторами.

Пример 11. Найти границы основной частоты крутильных колебаний вала с пятью дисками. Числовые данные взяты из примера 2 гл. III.

Для уравнений обратной формы матрица коэффициентов, вычисленных по формулам (3.38) (стр. 103):

$$\|h_{ik}\| = \begin{vmatrix} 95,89 & 23,23 & 21,70 & 7,12 \\ 23,23 & 110,72 & 103,41 & 33,904 \\ 21,70 & 103,41 & 143,52 & 46,53 \\ 7,12 & 33,904 & 46,53 & 46,085 \end{vmatrix} \cdot 10^{-6}.$$

Приняв за исходную форму

$$\lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)} = \lambda_3^{(0)} = \lambda_4^{(0)} = 1,$$

в первом приближении получим

$$\lambda_1^{(1)} = 147,94 \cdot 10^{-6}; \quad \lambda_2^{(1)} = 271,26 \cdot 10^{-6}; \quad \lambda_3^{(1)} = 315,16 \cdot 10^{-6}; \quad \lambda_4^{(1)} = 133,64 \cdot 10^{-6}.$$

Делением всех $\lambda_i^{(1)}$ на первую $\lambda_1^{(1)} = 147,94 \cdot 10^{-6}$ приводим полученную форму к виду

$$\lambda_1^{(1)} = 1; \quad \lambda_2^{(1)} = 1,834; \quad \lambda_3^{(1)} = 2,130; \quad \lambda_4^{(1)} = 0,903.$$

После подстановки этих значений в формулы (4.2) находим второе приближение и т. д. Результаты вычисления пяти приближений приведены в табл. 3.

Таблица 3

№ амплитуды	Последовательные приближения										
	$\lambda_i^{(0)}$	$\lambda_i^{(1)} \times 10^6$	$\frac{\lambda_i^{(1)}}{\lambda_i^{(1)}}$	$\lambda_i^{(2)} \times 10^6$	$\frac{\lambda_i^{(2)}}{\lambda_i^{(2)}}$	$\lambda_i^{(3)} \times 10^6$	$\frac{\lambda_i^{(3)}}{\lambda_i^{(3)}}$	$\lambda_i^{(4)} \times 10^6$	$\frac{\lambda_i^{(4)}}{\lambda_i^{(4)}}$	$\lambda_i^{(5)} \times 10^6$	$\frac{\lambda_i^{(5)}}{\lambda_i^{(5)}}$
1	1	147,94	1	191,14	1	225,16	1	243,15	1	250,42	1
2	1	271,25	1,834	477,17	2,50	640,32	2,844	724,83	2,931	759,65	3,034
3	1	315,16	2,130	559,07	2,93	750,73	3,334	851,86	3,504	893,26	3,551
4	1	133,64	0,903	210,03	1,10	278,48	1,24	315,68	1,30	331,05	1,322

¹⁾ Папкович П. Ф., Об одном методе разыскания корней характеристического уравнения. Прикл. матем. и мех., т. I, вып. 2, 1933.

²⁾ Бернштейн С. А., Новый метод определения частот колебаний упругих систем, Изд. ВИА РККА, 1939.

Отношения соответственных амплитуд последовательных приближений, минимальные значения этих отношений, а также значения дроби

$$\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(m-1)}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(m)}}$$

и границы первой частоты приведены в табл. 4.

Таблица 4

i	1	2	3	4	min	$\frac{\sum \lambda_i^{(m-1)}}{\sum \lambda_i^{(m)}}$	Границы основной частоты
$\lambda_i^{(0)}/\lambda_i^{(1)}$	6759,5	3686,4	3172,9	7462,7	3172,9	4608,3	$56,32 < p_1 < 67,9$
$\lambda_i^{(1)}/\lambda_i^{(2)}$	5231,8	3843,5	3809,9	4299,4	3809,9	4081,7	$61,6 < p_1 < 63,8$
$\lambda_i^{(2)}/\lambda_i^{(3)}$	4441,3	3898,4	3896,1	3946,2	3896,1	3968,9	$62,4 < p_1 < 62,9$
$\lambda_i^{(3)}/\lambda_i^{(4)}$	4113,2	3923,7	3913,8	3918,5	3913,8	3940,5	$62,5 < p_1 < 62,7$

Для практических надобностей точность второго приближения более чем достаточна. Расчет, впрочем, можно еще более сократить, если с самого начала, при выборе исходной формы, учесть возможные отношения углов кручения отдельных участков вала, обычно легко определяемые по расположению и относительной величине масс и жесткостей.

Пример 12. Найти границы основной частоты поперечных колебаний балки с четырьмя сосредоточенными нагрузками. Числовые данные взяты из примера 3 гл. III.

Матрица коэффициентов h_{ik} :

$$\|h_{ik}\| = \begin{vmatrix} 4,53 & 5,59 & 5,05 & 3,99 \\ 5,59 & 8,33 & 7,99 & 6,48 \\ 5,05 & 7,99 & 8,33 & 7,09 \\ 3,99 & 6,48 & 7,09 & 6,61 \end{vmatrix} \cdot 10^{-5}.$$

Последовательные приближения приведены в табл. 5, составленной аналогично табл. 3.

Таблица 5

№ амплитуды	Последовательные приближения						
	$\lambda_i^{(0)}$	$\lambda_i^{(1)} \cdot 10^5$	$\lambda_i^{(2)} \cdot 10^5$	$\lambda_i^{(3)} \cdot 10^5$	$\lambda_i^{(4)} \cdot 10^5$	$\lambda_i^{(5)} \cdot 10^5$	$\lambda_i^{(6)} \cdot 10^5$
1	1	19,16	1	25,34	1	25,53	1
2	1	28,39	1,482	37,98	1,50	38,42	1,50
3	1	24,46	1,485	38,20	1,51	38,66	1,51
4	1	24,17	1,261	32,46	1,281	32,85	1,282

Отношения соответственных амплитуд и границы приближенных значений первой частоты приведены в табл. 6.

Таблица 6

i	1	2	3	4	min	$\frac{\sum \lambda_i^{(m-1)}}{\sum \lambda_i^{(m)}}$	Границы основной частоты
$\lambda_i^{(0)}/\lambda_i^{(1)}$	5219,2	3522,3	3513,7	4137,3	3513,7	3992,8	$59,3 < p_1 < 63,2$
$\lambda_i^{(1)}/\lambda_i^{(2)}$	3945,3	3902,1	3887,4	3884,8	3884,8	3902,1	$62,3 < p_1 < 62,4$
$\lambda_i^{(2)}/\lambda_i^{(3)}$	3901,7	3901,6	3898,1	3899,5	3898,1	3900,1	

3. Приведение матрицы коэффициентов уравнений малых колебаний к матрице с положительными элементами. Найдем границы основной частоты трехпролетной балки постоянного сечения

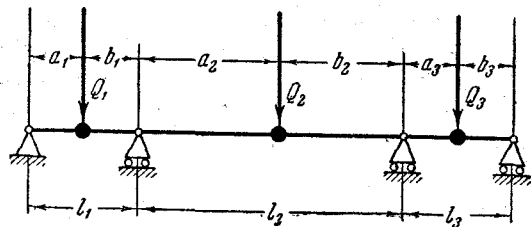


Рис. 40.

с несимметричной нагрузкой, если (рис. 40)

$$Q_1 = 100 \text{ кг}, Q_2 = 60 \text{ кг}, Q_3 = 80 \text{ кг}, l_1 = 100 \text{ см}, l_2 = 200 \text{ см}, \\ l_3 = 150 \text{ см}, a_1 = b_1 = 50 \text{ см}, a_2 = b_2 = 100 \text{ см}, a_3 = b_3 = 75 \text{ см}, \\ R = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, J = 63,62 \text{ см}^4.$$

Коэффициенты влияния α_{ik} могут быть вычислены по формулам¹⁾

$$\alpha_{11} = \frac{a_1^2 b_1}{3EJ} \left[\frac{b_1}{l_1} - \frac{(l_1 + a_1)(l_2 + l_3)}{F} \left(1 - \frac{a_1^2}{l_1^2} \right) \right], \\ \alpha_{12} = \frac{a_1 a_2 b_2 l_1}{6EJ l_2 F} [l_2(l_2 + a_2) - 2(l_2 + l_3)(l_2 + b_2)] \left(1 - \frac{a_1^2}{l_1^2} \right), \\ \alpha_{13} = \frac{a_1 a_3 b_3 l_1 l_2 (l_3 + b_3)}{6EJ l_2 F} \left(1 - \frac{a_1^2}{l_1^2} \right),$$

¹⁾ Формулы для коэффициентов влияния и числовые данные задачи взяты из книги: Луиц Е. Б., О поперечных колебаниях валов, ОНТИ, НКТП, 1935.

$$\alpha_{22} = \frac{a_2 b_2}{6EJ} \left\{ \frac{2a_2 b_2}{l_2} - \frac{b_2 [2(l_3 + b_3)(l_2 + b_2) - l_2(l_2 + a_2)] \left(1 - \frac{b_2^2}{l_2^2} \right)}{F} + \right. \\ \left. + \frac{a_2 [2(l_1 + l_2)(l_2 + a_2) - l_2(l_2 + b_2)] \left(1 - \frac{a_2^2}{l_2^2} \right)}{F} \right\}, \\ \alpha_{23} = \frac{a_2 b_2 b_3 l_3 [l_2(l_2 + b_2) - 2(l_1 + l_2)(l_2 + a_2)] \left(1 - \frac{b_2^2}{l_2^2} \right)}{6EJ l_2 F}, \\ \alpha_{33} = \frac{a_3 b_3^2}{3EJ} \left[\frac{a_3}{l_3} - \frac{(l_1 + l_2)(l_3 + b_3)}{F} \left(1 - \frac{b_3^2}{l_3^2} \right) \right],$$

где

$$F = 4(l_1 + l_2)(l_2 + l_3) - l_2^2.$$

В рассматриваемом примере:

$$\alpha_{11} = 129,80 \cdot 10^{-6}; \quad \alpha_{12} = -96,95 \cdot 10^{-6}; \quad \alpha_{13} = 21,81 \cdot 10^{-6}; \\ \alpha_{21} = \alpha_{12}; \quad \alpha_{22} = 611,7 \cdot 10^{-6}; \quad \alpha_{23} = -174,5 \cdot 10^{-6}; \\ \alpha_{31} = \alpha_{13}; \quad \alpha_{32} = \alpha_{23}; \quad \alpha_{33} = 405,4 \cdot 10^{-6}.$$

Уравнения колебаний после подстановки

$$\lambda_i = \bar{\lambda}_i \sqrt{\frac{Q_i}{g}} \quad (i = 1, 2, 3),$$

где $\bar{\lambda}_i$ — прогибы под нагрузками, напишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= p^2 (13,231 \lambda_1 - 7,655 \lambda_2 + 1,988 \lambda_3) \cdot 10^{-6}, \\ \lambda_2 &= p^2 (-7,655 \lambda_1 + 37,412 \lambda_2 - 12,323 \lambda_3) \cdot 10^{-6}, \\ \lambda_3 &= p^2 (1,988 \lambda_1 - 12,323 \lambda_2 + 33,060 \lambda_3) \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Первая форма колебаний (соответствующая основной наименьшей частоте) для трехпролетной балки имеет вид кривой, изображенной на рис. 41.

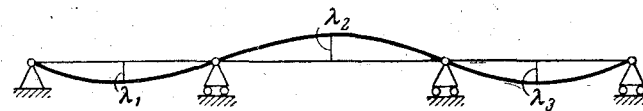


Рис. 41.

Амплитуды этой формы имеют две перемены знака, т. е. столько же и на тех местах, что и коэффициенты уравнений (4.15). Полагая

$$\mu_1 = \lambda_1, \quad \mu_2 = -\lambda_2, \quad \mu_3 = \lambda_3, \quad (4.16)$$

мы получим для μ_i систему уравнений с положительными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= p^2 (13,231 \mu_1 + 7,655 \mu_2 + 1,988 \mu_3) \cdot 10^{-6}, \\ \mu_2 &= p^2 (7,655 \mu_1 + 37,412 \mu_2 + 12,323 \mu_3) \cdot 10^{-6}, \\ \mu_3 &= p^2 (1,988 \mu_1 + 12,323 \mu_2 + 33,060 \mu_3) \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Коэффициенты этой системы удовлетворяют условиям симметрии и все больше нуля. К ней, следовательно, применимы теоремы о границах основной частоты. Если в качестве исходной формы возьмем $\mu_1^{(0)} = \mu_2^{(0)} = \mu_3^{(0)} = 1$, то в первом приближении получим

$$\mu_1^{(1)} = 22,874 \cdot 10^{-6}, \quad \mu_2^{(1)} = 57,390 \cdot 10^{-6}, \quad \mu_3^{(1)} = 47,371 \cdot 10^{-6}$$

с отношением амплитуд 1:2,509:2,071; во втором приближении:

$$\mu_1^{(2)} = 36,554 \cdot 10^{-6}, \quad \mu_2^{(2)} = 127,043 \cdot 10^{-6}, \quad \mu_3^{(2)} = 101,373 \cdot 10^{-6}$$

с отношением амплитуд 1:3,475:2,773; в третьем приближении:

$$\mu_1^{(3)} = 45,345 \cdot 10^{-6}, \quad \mu_2^{(3)} = 171,834 \cdot 10^{-6}, \quad \mu_3^{(3)} = 136,485 \cdot 10^{-6}$$

с отношением амплитуд 1:3,789:3,010. Основная частота во втором приближении

$$140,5 < p_1 < 145,1,$$

в третьем

$$142,2 < p_1 < 143,2.$$

Приведение уравнений (4.15) с помощью преобразования (4.16) к системе (4.17) с положительными коэффициентами без изменения корней векового уравнения оказалось возможным вследствие наличия определенного соответствия между, с одной стороны, числом и местом перемен знака коэффициентов h_{ik} и, с другой стороны, числом и местом перемен знака амплитуд первой формы колебаний. Такое соответствие имеет место всякий раз, когда в разложениях коэффициентов h_{ik} по собственным формам

$$h_{ik} = \sum_{s=1}^n \frac{u_{si} u_{sk}}{p_s^2} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

доминируют слагаемые, соответствующие наименьшей частоте, так что знаки коэффициентов h_{ik} определяются этими слагаемыми, т. е. знаками амплитуд первой собственной формы. Большей частью так бывает, когда вторая частота значительно превосходит первую. Если первые частоты близки друг к другу, то соответствие между знаками коэффициентов h_{ik} и амплитуд первой формы может нарушиться. В этом случае использованный в последнем примере способ приведения к системе уравнений с положительными коэффициентами не может быть непосредственно применен к заданным уравнениям. Однако и здесь можно выявить надлежащее соответствие знаков, заменив уравнения (4.1) уравнениями, коэффициенты которых равны итерациям коэффициентов h_{ik} некоторого порядка $m-1$ (m принимает значения 1, 2, 3, ..., причем $h_{ik}^{(0)} = h_{ik}$), т. е. уравнениями

$$\lambda_i = p^{2m} \sum_{k=1}^n h_{ik}^{(m-1)} \lambda_k \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.18)$$

При достаточно большом m в разложениях

$$h_{ik}^{(m-1)} = \sum_{s=1}^n \frac{u_{si} u_{sk}}{p_s^{2m}} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

члены с наименьшей частотой будут определять знаки коэффициентов уравнений (4.18), и подстановкой, аналогичной (4.16), мы сможем привести их к уравнениям с положительными коэффициентами. Для этих уравнений будут выполнены условия (4.7) и при итерациях формами с положительными амплитудами можно будет пользоваться всеми теоремами о границах основной частоты. Следует только иметь в виду, что таким образом будут получены основная частота в степени $2m$ и абсолютные значения амплитуд первой формы.

Рассмотрим, например, систему уравнений с матрицей коэффициентов

$$\|h_{ik}\| = \begin{vmatrix} 1,94 & 0,15 & -0,57 & -20,13 \\ 0,15 & 0,90 & -0,89 & -0,03 \\ -0,57 & -0,89 & 1,01 & 0,21 \\ -20,13 & -0,03 & 0,21 & 0,16 \end{vmatrix}$$

Она приводится к эквивалентной системе с положительными коэффициентами с помощью подстановки:

$$\lambda_1 = \mu_1; \quad \lambda_2 = \mu_2; \quad \lambda_3 = -\mu_3; \quad \lambda_4 = -\mu_4.$$

Для системы

$$\|h_{ik}\| = \begin{vmatrix} 81,30 & -8,58 & -16,91 & -8,04 \\ -8,58 & -3,67 & -7,24 & -3,45 \\ -16,91 & -7,24 & -4,56 & -2,22 \\ -8,04 & -3,45 & -2,22 & 3,39 \end{vmatrix} \cdot 10^{-5}$$

такой способ приведения непосредственно неприменим. Но достаточно вычислить первую итерацию коэффициентов по формулам

$$h_{ik}^{(1)} = \sum_{s=1}^n h_{si} h_{sk} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

чтобы получить систему с коэффициентами

$$\|h_{ik}^{(1)}\| = \begin{vmatrix} 7033,90 & -575,89 & -1216,01 & -613,77 \\ -575,89 & 151,41 & 213,06 & 86,01 \\ -1216,01 & 213,06 & 365,02 & 163,76 \\ -613,77 & 86,01 & 163,76 & 92,96 \end{vmatrix} \cdot 10^{-10},$$

Сопоставляя эти выражения с формулами

$$q_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} P_k \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

где q_i — прогибы в точках i от сосредоточенных грузов P_k , приходим к следующему истолкованию формы l -го приближения:

Амплитуды формы l -го приближения равны статическим прогибам в точках i от нагрузки

$$m_1 \lambda_1^{(l-1)}, \quad m_2 \lambda_2^{(l-1)}, \quad \dots, \quad m_n \lambda_n^{(l-1)},$$

т. е. от нагрузки, численно равной амплитудам предыдущего $(l-1)$ -го приближения, умноженным на соответствующие массы¹⁾.

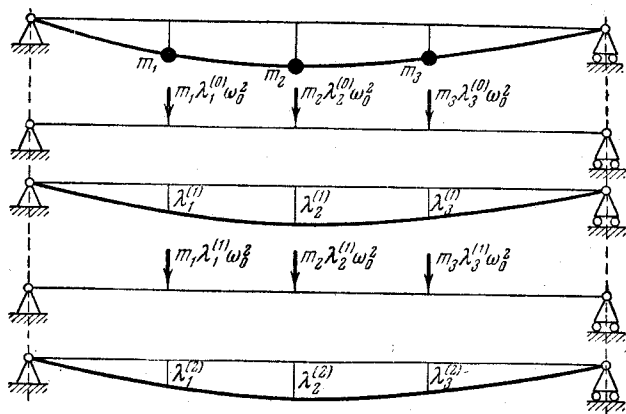


Рис. 42.

Амплитуды l -го приближения можно, следовательно, найти построением линии прогибов вала от указанной нагрузки. На этом основан следующий метод графического определения наименьшей частоты.

На схематическом чертеже вала проводим от руки кривую, достаточно близкую к первой форме и удовлетворяющую условиям закрепления вала (рис. 42). Эту кривую принимаем за исходную форму колебаний. Сняв с чертежа прогибы $\lambda_i^{(0)}$, под грузами, умножаем их на массы m_i соответствующих грузов и на квадрат произвольной угловой скорости ω_0^2 и произведения $m_i \lambda_i^{(0)} \omega_0^2$ принимаем за нагрузку, для которой по известным правилам строим упругую линию. Прогибы $\lambda_i^{(1)}$ под грузами в построенной таким образом упругой

¹⁾ Чтобы придать этим нагрузкам размерность сил, их умножают на квадрат некоторой (произвольно выбранной) угловой скорости ω_0^2 , от которой в окончательном результате расчета можно освободиться изменением масштаба.

линии дадут первое приближение формы колебаний, а отношения $\lambda_i^{(1)}/\lambda_i^{(0)}$ — первое приближение квадрата основной частоты. Если исходная форма была выбрана достаточно близкой к первой форме, то эти отношения будут почти одинаковыми. Если этого нет, то по нагрузкам $m_i \lambda_i^{(1)} \omega_0^2$ строим еще одну упругую линию так же, как по нагрузкам $m_i \lambda_i^{(0)} \omega_0^2$ была построена предыдущая, и т. д.)

В обычных случаях достаточно бывает одного, редко двух построений упругой линии, чтобы получить основную частоту с допустимой в практических расчетах погрешностью. Само собою разумеется, для ускорения расчета можно и здесь пользоваться установленными выше теоремами о границах основной частоты.

Пример 13. Найти основную частоту поперечных колебаний консольного вала на двух опорах (рис. 43, а). Нагрузка на вал приведена к семи сосредоточенным грузам, в которых учтен собственный вес отдельных участков вала¹⁾:

$$Q_1 = 5 \text{ кг}, \\ Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = 25 \text{ кг}, \\ Q_6 = 4 \text{ кг}, \quad Q_7 = 15 \text{ кг}.$$

Решение задачи в первом приближении сводится к построению упругой линии вала от 7 сосредоточенных сил $P_i = m_i \lambda_i^{(0)} \omega_0^2$ ($i=1, 2, \dots, 7$), где m_i — массы грузов Q_i ; $\lambda_i^{(0)}$ — прогибы под грузами, снятые с исходной формы; ω_0^2 — квадрат произвольно выбранной в качестве масштабного множителя угловой скорости (например, $\omega_0 = 10$ 1/сек). Для исходной формы, построенной от руки на рис. 43, б, прогибы под грузами и соответствующие значения сил P_i приведены в табл. 7. Поместив начало координат в левой опоре, рассмотрим дифференциальное уравнение упругой линии:

$$EJ \frac{d^2 \lambda}{dx^2} = -M(x), \quad (4.21)$$

¹⁾ Числовые данные примера взяты из книги: Holba J., Berechnungsverfahren zur Bestimmung der kritischen Drehzahlen von geraden Wellen. Springer, Wien, 1936, стр. 124.

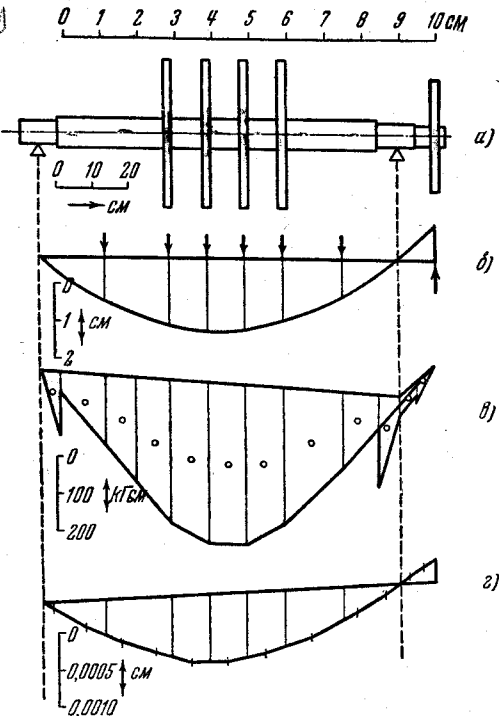


Рис. 43.

Таблица 7

i	Q_i (кг)	m_i (кг см ⁻¹ сек ²)	$\lambda_i^{(0)}$ (см)	$P_i = m_i \lambda_i^{(0)2} \omega_0^2$ (кг)
1	5	0,0051	1,20	0,612
2	25	0,0255	1,84	4,69
3	25	0,0255	2,00	5,10
4	25	0,0255	1,92	4,90
5	25	0,0255	1,97	4,26
6	4	0,0041	1,01	0,413
7	15	0,0153	-0,90	-1,38

где EJ — жесткость на изгиб, а $M(x)$ — изгибающий момент в сечении x от нагрузки силами P_i . В валах переменного сечения жесткость EJ изменяется вместе с моментом J (см⁴). Умножив обе части уравнения (6.27) на отношение J_0/J , где J_0 — некоторый постоянный момент, т. е., представив это уравнение в виде

$$EJ_0 \frac{d^2 \lambda}{dx^2} = -M \frac{J_0}{J}, \quad (4.22)$$

мы приведем задачу построения упругой линии вала переменного сечения к построению упругой линии вала постоянной жесткости EJ_0 , но от нагрузки

$$M_1(x) = M \frac{J_0}{J}. \quad (4.23)$$

Тем самым изменения жесткости вала будут отнесены к соответствующим изменениям изгибающего момента. Эюра изгибающих моментов $M_1(x)$ представлена на рис. 43, в, причем ее построение выполнено в масштабах ¹⁾

10 см длины	1 см
1 кг силы	1 см
10 кг полюсного расстояния	10 см

В качестве момента J_0 выбран наибольший поперечный момент вала

$$J_0 = \frac{\pi \cdot 8^4}{64} = 201 \text{ см}^4.$$

Полагая

$$f(p) \div \lambda(x), \quad F(p) \div M_1(x),$$

с помощью теоремы свертывания найдем интеграл уравнения (4.22):

$$EJ_0 \lambda(x) = \frac{x}{l} \int_0^l (l-\xi) M_1(\xi) d\xi - \int_0^x (x-\xi) M_1(\xi) d\xi, \quad (4.24)$$

где l — расстояние между опорами.

¹⁾ Силовые многоугольники с полюсными расстояниями H_1 и H_2 на рис. 43 не приведены.

Первый интеграл правой части

$$\frac{x}{l} \int_0^l (l-\xi) M_1(\xi) d\xi$$

представляет момент относительно сечения x левой опорной реакции при нагрузке, интенсивность которой равна $M_1(\xi)$; второй интеграл

$$-\int_0^x (x-\xi) M_1(\xi) d\xi$$

представляет момент относительно сечения x части той же нагрузки, расположенной слева от x . Вся правая часть (4.24) — это изгибающий момент в сечении x от моментной нагрузки $M_1(x)$. Таким образом, упругая линия

$$y = \lambda(x)$$

представляет собою веревочный многоугольник для нагрузки плотности

$$\frac{1}{EJ_0} M_1(x).$$

Чтобы построить этот веревочный многоугольник делим моментную площадь на 12 частей, как показано на рис. 43, в, находим центр тяжести и площадь ΔS_i каждой части:

$$\Delta S_i \text{ (см}^2\text{)} = \begin{matrix} i=1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0,434 & 1,56 & 1,76 & 3,26 & 4,06 & 4,29 & 3,93 & 4,14 & 1,33 & 0,73 & 0,19 & 0,10 \end{matrix}$$

Согласно принятым масштабам один квадратный сантиметр моментной площади $M_1(\xi)$ соответствует 1000 кг см. Величины

$$\Delta S_i \cdot 1000 \text{ кг см}$$

принимая за нагрузки, которые располагаем на вертикалях, проходящих через центры тяжести площадок ΔS_i . Если линейный масштаб для изображения этих нагрузок (во втором силовом многоугольнике) выбран так, что соответствует 1 см = 1000 кг см², то приведенные выше значения ΔS_i (в см²) будут равны этим нагрузкам. Полюсное расстояние во втором силовом многоугольнике целесообразно взять равным

$$H_2 = \frac{EJ_0}{Nd} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 201}{Nd} \text{ кг см}^2,$$

где d — масштаб длин, N — целое число. Тогда ординаты упругой линии получатся в N раз увеличенными против натуральной величины, что облегчит их измерение. На рис. 43 $d = 10$ и $N = 2000$, так что

$$H_2 = \frac{EJ_0}{2000} = 21 \cdot 100 \text{ кг см}^2,$$

что в принятом для моментной нагрузки масштабе составляет 21,1 см. Результаты расчета приведены в табл. 8.

Границы первой частоты

$$\min \frac{\lambda_i^{(0)}}{\lambda_i^{(1)}} < \frac{p_1^2}{\omega_0^2} < \frac{\sum [\lambda_i^{(0)}]^2}{\sum \lambda_i^{(0)} \lambda_i^{(1)}}$$

$$2575 \cdot 10^2 < p_1^2 < 2658,6 \cdot 10^2,$$

$$507,4 < p_1 < 515,6.$$

В качестве минимизирующей формы возьмем совокупность статических прогибов в точках, где сосредоточены массы, от единичной нагрузки (1 кг), приложенной к середине балки:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 39\beta, \\ \lambda_2 &= 81\beta, \\ \lambda_3 &= 39\beta, \end{aligned}$$

где

$$\beta = \frac{k}{l} = \frac{l^3}{3888EJ}.$$

После подстановки получим

$$p_1 = \frac{9,8607}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}.$$

Пример 15. В условиях § 3 настоящей главы найти основную частоту колебаний трехпролетной балки с несимметричной нагрузкой (рис. 40).

Несмотря на то, что в уравнениях (4.15)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= p^2 (13,231\lambda_1 - 7,655\lambda_2 + 1,988\lambda_3) \cdot 10^{-6}, \\ \lambda_2 &= p^2 (-7,655\lambda_1 + 37,412\lambda_2 - 12,323\lambda_3) \cdot 10^{-6}, \\ \lambda_3 &= p^2 (1,988\lambda_1 - 12,323\lambda_2 + 33,060\lambda_3) \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

не все коэффициенты положительны, формула (4.26) остается столь же хорошо применимой здесь, как и в случае однопролетной балки. Взяв для минимизирующей формы второе приближение, найденное в § 3 (методом итераций)

$$\begin{aligned} \mu_1^{(2)} &= 1, \\ \mu_2^{(2)} &= -3,5, \\ \mu_3^{(2)} &= 2,8, \end{aligned}$$

и подставив эти значения вместо λ_i в (4.26), получим

$$p_1^2 = 20\,338.$$

Метод последовательных приближений приводит к такому значению только в четвертом приближении.

6. Графическая форма метода Рэлея. В графической форме метод Рэлея применяется главным образом при расчете основной частоты поперечных колебаний и является одним из простейших способов приближенного вычисления ее.

Предположим, что на балку (или вал) действуют несколько сосредоточенных грузов Q_1, Q_2, \dots, Q_n и пусть максимальные прогибы в точках приложения этих грузов будут соответственно $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда максимальное значение потенциальной энергии

$$2\Pi_{\max} = \sum_{i=1}^n Q_i \lambda_i.$$

Максимальное значение кинетической энергии

$$T_{\max} = \frac{1}{2} p_1^2 \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i^2,$$

где m_i — массы грузов Q_i , а p_1^2 — квадрат основной частоты. По формуле Рэлея

$$p_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i \lambda_i}{\sum_{i=1}^n m_i \lambda_i^2} = g \frac{\sum_{i=1}^n Q_i \lambda_i}{\sum_{i=1}^n Q_i \lambda_i^2}. \quad (4.27)$$

Расчет исчерпывается построением одной упругой линии вала от заданной нагрузки и снятием с чертежа прогибов λ_i .

Пример 16. Найти основную частоту двухопорного ступенчатого вала, нагруженного сосредоточенными силами $Q_1 = 100$ кг и $Q_2 = 50$ кг (рис. 44). Длина вала между опорами $l = 200$ см; диаметр левой половины вала 8 см, правой — 6 см. Предполагается, что в нагрузках Q_1 и Q_2 учтен собственный вес вала и в дальнейшем вал рассматривается как невесомый.

Построение упругой линии вала от нагрузок Q_1 и Q_2 выполнено в масштабах:

Длина	1 см ~ 20 см
Сила	1 см ~ 50 кг
Первое полюсное расстояние . . .	$H_1 = 3$ см ~ 150 кг
Моментная площадь	1 см ² ~ 20 · 3000 = 6 · 10 ⁴ кг см ²
Моментная нагрузка	1 см ~ 6 · 10 ⁴ кг см ²

Ординаты моментной площади на правой половине вала умножены на отношение $\frac{J_1}{J_2} = 3,16$, где

$$J_1 = \frac{\pi \cdot 8^4}{64} = 201 \text{ см}^4, \quad J_2 = \frac{\pi \cdot 6^4}{64} = 63,58 \text{ см}^4.$$

Моментная площадь разделена на четыре части, площади которых соответственно равны

$$\Delta S_i \text{ (см}^2\text{)} = 1,3; 3,7; 7,3; 5,25,$$

что в принятых масштабах соответствует следующим значениям моментной нагрузки:

$$\begin{aligned} S_1 &= 7,8 \times 10 \text{ кг см}^2, & S_2 &= 22,5 \times 10 \text{ кг см}^2, \\ S_3 &= 43,8 \times 10 \text{ кг см}^2, & S_4 &= 31,5 \times 10 \text{ кг см}^2. \end{aligned}$$

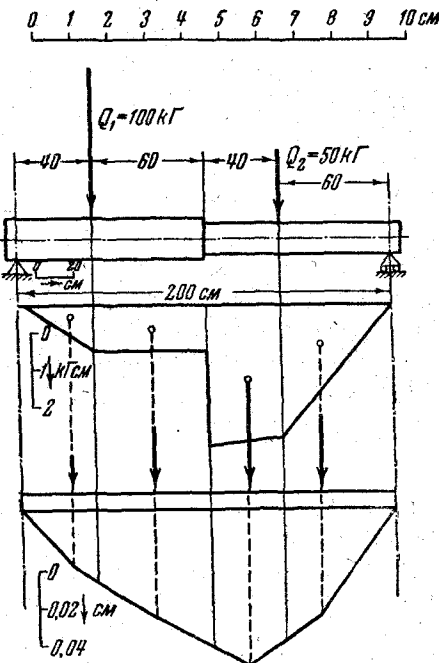


Рис. 44.

Второе полюсное расстояние H_2 принято равным

$$H_2 = \frac{EJ}{20 \cdot 50} = 422 \cdot 10^3 \text{ кг см}^2 \sim 7 \text{ см},$$

для того чтобы ординаты второй моментной площади были равны действительным прогибам, увеличенным в 50 раз.

Подставив снятые с чертежа прогибы $\lambda_1 = 3,8 \cdot 10^{-2}$, $\lambda_2 = 7 \cdot 10^{-2}$ см в формулу (4.27), найдем $p_1 = 135,7$ 1/сек.

Б. ВЫСШИЕ ЧАСТОТЫ

7. Общие замечания. Почти все рассматриваемые в этой главе методы расчета высших частот — алгебраические. В них использованы некоторые общеизвестные вычислительные методы линейной алгебры, обоснованием которых служат теоремы о разложении по собственным формам, в частности теоремы о разложении коэффициентов прямых (b_{ik}) и обратных (h_{ik}) уравнений:

$$b_{ik} = \sum_{s=1}^n p_s^2 u_{si} u_{sk}, \quad h_{ik} = \sum_{s=1}^n \frac{u_{si} u_{sk}}{p_s^2}. \quad (4.28)$$

Графические варианты некоторых из рассматриваемых дальше методов в применении к расчету высших частот требуют обычно больших затрат труда и времени и при этом недостаточно надежны в отношении точности результатов. В дальнейшем по поводу этих методов делаются лишь краткие замечания, без подробного рассмотрения¹⁾.

8. Метод последовательных приближений формами колебаний (метод итераций). Чтобы выяснить условия, при которых метод итераций может быть использован для расчета высших частот, рассмотрим еще раз состав разложений последовательных итераций по собственным формам, несколько видоизменив форму этих разложений. Возьмем за исходную форму совокупность амплитуд

$$\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_n^{(0)}$$

и составим первое приближение по формулам

$$\lambda_i^{(1)} = \sum_{k=1}^n h_{ik} \lambda_k^{(0)} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (4.29)$$

где h_{ik} — коэффициенты обратных уравнений. Подставив сюда

$$h_{ik} = \sum_{s=1}^n \frac{u_{si} u_{sk}}{p_s^2},$$

¹⁾ Весьма обстоятельное изложение некоторых графических методов расчета высших частот вместе с примерными расчетами можно найти в книге: Holba J., Berechnungsverfahren zur Bestimmung der kritischen Drehzahlen von geraden Wellen, Springer, Wien, 1936.

получим

$$\lambda_i^{(1)} = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(0)} \sum_{s=1}^n \frac{u_{si} u_{sk}}{p_s^2} = \sum_{s=1}^n \frac{u_{si}}{p_s^2} \sum_{k=1}^n u_{sk} \lambda_k^{(0)}.$$

Аналогичные соотношения будут иметь место между двумя любыми последовательными приближениями:

$$\lambda_i^{(m)} = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(m-1)} \sum_{s=1}^n \frac{u_{si} u_{sk}}{p_s^2} = \sum_{s=1}^n \frac{u_{si}}{p_s^2} \sum_{k=1}^n u_{sk} \lambda_k^{(m-1)}. \quad (4.30)$$

Формы $\lambda_i^{(m)}$ при достаточно большом m будут приближаться ко второй собственной форме, если первое слагаемое, содержащее первую частоту p_1^2 в разложениях всех приближений будет отсутствовать, т. е. если при $m \geq 1$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k^{(m-1)} \frac{u_{1i} u_{1k}}{p_1^2} = \frac{u_{1i}}{p_1^2} \sum_{k=1}^n u_{1k} \lambda_k^{(m-1)} = 0. \quad (4.31)$$

В противном случае мы неизбежно придем к основной частоте, так как первый член, с наименьшей частотой в знаменателе, как бы мал ни был его коэффициент, при итерациях растет значительно быстрее, чем все остальные.

Условие (4.31) будет выполнено, если первая собственная форма будет ортогональна как к исходной форме, так и ко всем последующим, т. е. если для любого $m \geq 1$

$$\sum_{k=1}^n u_{1k} \lambda_k^{(m-1)} = 0,$$

а также если перед вычислением итераций из разложения каждого коэффициента h_{ik} будет изъято первое слагаемое

$$\frac{u_{1i} u_{1k}}{p_1^2} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Аналогично выражаются условия, при которых метод итераций приведет к третьей собственной форме и соответственно к третьей собственной частоте. Это случится, если для любого $m \geq 1$

$$\frac{u_{1i}}{p_1^2} \sum_{k=1}^n u_{1k} \lambda_k^{(m-1)} + \frac{u_{2i}}{p_2^2} \sum_{k=1}^n u_{2k} \lambda_k^{(m-1)} = 0, \quad (4.32)$$

т. е. если в разложениях последовательных итераций будут отсутствовать первые два слагаемые, содержащиеся в знаменателях p_1^2 и p_2^2 . Это будет иметь место, когда итерируемая форма в любом приближении будет ортогональна к первой и второй собственным формам

или когда в разложениях коэффициентов h_{ik} с самого начала будут изъяты первые два члена

$$\frac{u_{1i}u_{1k}}{p_1^2} \text{ и } \frac{u_{2i}u_{2k}}{p_2^2}.$$

В практических расчетах следует иметь в виду, что условия ортогональности форм различных приближений к первой собственной форме и изъятие первых членов из разложений коэффициентов h_{ik} могут быть выполнены только приближенно, с некоторой неизбежной погрешностью. При этом погрешность, с какой выполнено изъятие первых членов из h_{ik} , не увеличивается вместе с порядком итераций, так как при вычислении итераций любого порядка мы остаемся, как это видно из формул (4.30), в тех же условиях, как и при вычислении первой итерации. Иначе обстоит дело с другим условием — условием ортогональности приближенных форм к первой собственной форме. Неточное выполнение этого условия означает, что член с p_1^2 в разложениях последовательных итераций не исключен полностью. В этом случае вместе с порядком итераций будет расти в этих разложениях и относительное значение члена с p_1^2 (по сравнению с другими членами, содержащими высшие частоты). Здесь будет, таким образом, иметь место своего рода накопление погрешности. Избежать такого накопления можно, подвергая каждую приближенную форму проверке на ортогональность к первой собственной форме и исправляя обнаруженные отклонения от ортогональности.

Пусть, например, в качестве исходной формы выбрана совокупность амплитуд

$$\bar{p}_1^{(0)}, \bar{p}_2^{(0)}, \dots, \bar{p}_n^{(0)}$$

с одной переменной знака и притом так, что

$$\sum_{i=1}^n \bar{p}_i^{(0)} u_{1i} = 0,$$

т. е. условие ортогональности с первой собственной формой выполнено. Подставив $\bar{p}_i^{(0)}$ в (4.29), вычислим первое приближение

$$\mu_1^{(1)}, \mu_2^{(1)}, \dots, \mu_n^{(1)}.$$

Так как первая собственная форма u_{1k} , найденная предварительным также приближенным расчетом, определена с некоторой погрешностью, то форма $\mu_i^{(1)}$ не будет точно ортогональна первой форме. Подвергаем поэтому форму $\mu_i^{(1)}$ исправлению, вычитая из каждой амплитуды первый член разложения по собственным формам, т. е. составляя выражения (черточка над обозначением амплитуды обозначает исправленную указанным способом амплитуду)

$$\bar{\mu}_i^{(1)} = \mu_i^{(1)} - a_1^{(1)} u_{1i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

в)

где

$$a_1^{(1)} = \sum_{k=1}^n \mu_k^{(1)} u_{1k}.$$

По исправленному первому приближению вычисляем второе приближение $\mu_i^{(2)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), которое подвергаем аналогичному исправлению, вычитая из каждой амплитуды первый член разложения ее по собственным формам

$$a_1^{(2)} u_{1i} = u_{1i} \sum_{k=1}^n \mu_k^{(2)} u_{1k}$$

и т. д. Делая такие исправления, мы при удачном выборе исходной формы $\mu_i^{(0)}$ после небольшого числа итераций можем ожидать с достаточной уверенностью, что отношения исправленных амплитуд двух последовательных приближений дадут значения квадрата второй частоты с погрешностью, допустимой в практических расчетах.

Важной частью такого способа расчета второй частоты является выбор исходной формы с надлежащим местом перемены знака ее амплитуд. Если первая форма и первая частота вычислены методом итераций, то результаты этого предварительного расчета можно использовать для получения некоторых данных относительно величин и знаков амплитуд второй формы. Обозначим через $\lambda_i^{(m)}$ амплитуды m -го приближения первой формы и составим форму

$$\mu_i^{(m)} = \lambda_i^{(m)} - p_1^2 \lambda_i^{(m+1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.33)$$

где p_1^2 — квадрат первой частоты. Можно доказать, что форма (4.33) при всяком целом и положительном m ортогональна к первой собственной форме и при достаточно большом m асимптотически приближается ко второй собственной форме.

В самом деле, ортогональность формы (4.33) к первой собственной форме была установлена при доказательстве первой теоремы о границах основной частоты.

Подставив в (4.33) разложения $\lambda_i^{(m)}$ и $\lambda_i^{(m+1)}$ по собственным формам, получим

$$\begin{aligned} \mu_i^{(m)} &= \sum_{s=1}^n \frac{a_s u_{si}}{p_s^{2m}} - p_1^2 \sum_{s=1}^n \frac{a_s u_{si}}{p_s^{2m+2}} = \sum_{s=1}^n a_s u_{si} \left(\frac{1}{p_s^{2m}} - \frac{p_1^2}{p_s^{2m+2}} \right) = \\ &= \sum_{s=2}^n a_s u_{si} \frac{p_s^2 - p_1^2}{p_s^{2m+2}}. \end{aligned}$$

Если $m \rightarrow \infty$, то

$$\mu_i^{(m)} \approx a_2 u_{2i} \frac{p_2^2 - p_1^2}{p_2^{2m+2}}$$

и

$$\mu_1^{(m)} : \mu_2^{(m)} : \dots : \mu_n^{(m)} \approx u_{21} : u_{22} : \dots : u_{2n}.$$

Таким образом, составив для достаточно большого m разности

$$\lambda_i^{(m)} - p^2 \lambda_i^{(m+1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

получим амплитуды второй формы с высокой точностью, причем для этого не требуется никаких других расчетов, кроме уже выполненного для определения первой формы.

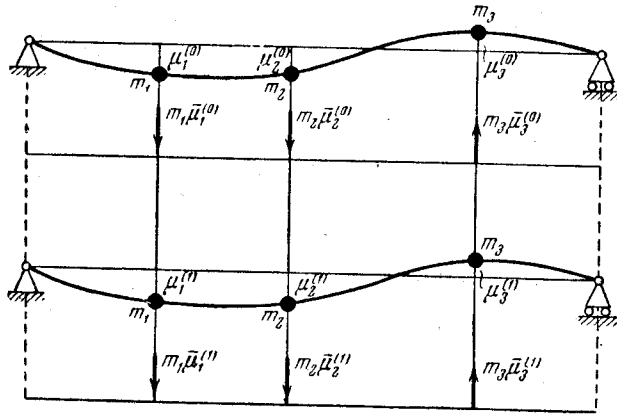


Рис. 45.

Свойства формы (4.33) можно было бы использовать непосредственно для определения второй частоты, для чего пришлось бы вычислить отношения

$$\frac{\mu_i^{(m)}}{\mu_i^{(m+1)}} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Однако при большом m в состав этих отношений входят разности между весьма близкими друг к другу величинами. Расчет поэтому требует весьма высокой точности вычислений, которая не может быть достигнута в обычных технических задачах на колебания.

Графический вариант изложенного метода представляет собою распространение на случай второй частоты метода Стодола (§ 4 гл. IV).

Предварительным, также графическим, расчетом определяется с возможно большей точностью первая собственная форма. Далее, от руки, на чертеже вала (или балки) строится кривая с одним узлом, удовлетворяющая условиям закрепления (рис. 45). Снятые с чертежа прогибы $\mu_i^{(0)}$ под массами должны быть предварительно

9]

исправлены путем вычитания из каждой величины

$$a_1^{(0)} u_{1i} = u_{1i} \sum_{k=1}^n \mu_k^{(0)} u_{1k}.$$

Амплитуды исправленной формы

$$\bar{\mu}_i^{(0)} = \mu_i^{(0)} - a_1^{(0)} u_{1i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

умноженные на соответствующие массы m_i , рассматриваются далее как нагрузки на вал. Для этих нагрузок строится упругая линия. Прогибы $\mu_i^{(1)}$ этой линии под массами, исправленные по вышеуказанному способу, т. е. величины

$$\bar{\mu}_i^{(1)} = \mu_i^{(1)} - a_1^{(1)} u_{1i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$a_1^{(1)} = \sum_{k=1}^n \mu_k^{(1)} u_{1k},$$

дадут первое приближение искомой второй формы. Первое приближение второй частоты найдем, составив отношения

$$\frac{\bar{\mu}_i^{(0)}}{\bar{\mu}_i^{(1)}} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

или, что всегда дает более точный результат, воспользовавшись формулой Рэлея

$$R = \frac{\sum_{k=1}^n [\bar{\mu}_k^{(0)}]^2}{\sum_{k=1}^n \bar{\mu}_k^{(0)} \bar{\mu}_k^{(1)}} \approx p_2^2. \quad (4.34)$$

Изложенный графический прием определения второй частоты является также одним из наиболее простых способов расчета второй частоты вала переменного сечения.

9. Метод исключения первой формы. Другим способом выполнения условия (4.31) при вычислении второй частоты является исключение из разложений коэффициентов h_{ik} первого слагаемого

$$\frac{u_{1i} u_{1k}}{p_1^2},$$

или, как мы будем дальше говорить, *исключение первой формы*. После исключения первой формы разложения всех приближенных форм будут начинаться со слагаемого, содержащего в знаменателе вторую частоту, независимо от выбора исходной формы. Процесс итераций с произвольной исходной формой приведет автоматически,

т. е. без «направляющих» поправок, ко второй собственной форме и соответственно ко второй частоте. Этот способ однако мало пригоден для практических расчетов, так как требует обширных и точных вычислений.

Мы изложим здесь другой, более удобный, вариант этого метода, иногда называемый также *методом понижения*¹⁾.

Обозначим нормированные амплитуды первой собственной формы через

$$u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}.$$

Искомая вторая форма ортогональна к первой. Следовательно, амплитуды второй формы

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$$

удовлетворяют условию ортогональности

$$u_{11}\mu_1 + u_{12}\mu_2 + u_{13}\mu_3 + u_{14}\mu_4 = 0. \quad (4.35)$$

С помощью этого условия мы можем исключить из уравнений

$$\mu_i = p^2 \sum_{k=1}^n h_{ik} \mu_k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.36)$$

одну из амплитуд, например μ_1 , и, таким образом, привести данную систему к новой с меньшим на единицу числом степеней свободы. Основная частота этой системы будет совпадать со второй частотой данной системы. Чтобы убедиться в этом, достаточно составить разложения коэффициентов приведенной системы по собственным формам данной (исходной) системы. После исключения первой амплитуды уравнения (4.36) будут иметь вид²⁾

$$\mu_i = p^2 \sum_{k=1}^n \left(h_{ik} - h_{i1} \frac{u_{1k}}{u_{11}} \right) \mu_k \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.37)$$

Разложения коэффициентов этих уравнений легко найдутся по известным разложениям коэффициентов исходной системы:

$$h_{ik} - h_{i1} \frac{u_{1k}}{u_{11}} = \sum_{s=1}^n \frac{u_{si} u_{sk}}{p_s^2} - \frac{u_{1k}}{u_{11}} \sum_{s=1}^n \frac{u_{s1} u_{si}}{p_s^2} = \sum_{s=1}^n \frac{u_{si}}{p_s^2} \left(u_{sk} - \frac{u_{1k}}{u_{11}} u_{s1} \right).$$

Когда $s=1$, то

$$u_{sk} - \frac{u_{1k}}{u_{11}} u_{s1} = 0,$$

¹⁾ Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Гостехиздат, 1950.

²⁾ Первое уравнение (4.36) можно отбросить, так как первая амплитуда не входит в правые части уравнений (4.37) и ее величина не будет влиять на значения амплитуд μ_2, μ_3, μ_4 .

и, следовательно,

$$h_{ik} - h_{i1} \frac{u_{1k}}{u_{11}} = \sum_{s=2}^n \frac{u_{si}}{p_s^2} \left(u_{sk} - \frac{u_{1k}}{u_{11}} u_{s1} \right).$$

Вычисление коэффициентов уравнений (4.37) можно расположить в матричную схему, представив матрицу этих коэффициентов в виде произведения

$$\left\| h_{ik} - h_{i1} \frac{u_{1k}}{u_{11}} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ h_{31} & h_{32} & \dots & h_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cccc} 0 & -\frac{u_{12}}{u_{11}} & -\frac{u_{13}}{u_{11}} & \dots & -\frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\|. \quad (4.38)$$

Первую строку произведения вместе с первой колонкой следует опустить и, начав умножение со второй строки первого множителя, построить матрицу $(n-1)$ -го порядка. С полученной матрицей можно дальше вычислять последовательные итерации по общему правилу, взяв за исходную произвольную матрицу столбец (например, матрицу-столбец с единичными элементами). После того как будут найдены с достаточной точностью амплитуды $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$, первую амплитуду μ_1 мы получим из условия ортогональности (4.35).

Пример 17. Найти вторую частоту системы, рассмотренной в примере II.

Взяв из указанного примера амплитуды первой формы в пятом приближении 1; 3,03; 3,55; 1,32, найдем из условия ортогональности (4.35)

$$\mu_1 = -3,03\mu_2 - 3,55\mu_3 - 1,32\mu_4.$$

Второй множитель произведения (4.38) здесь будет

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & -3,03 & -3,55 & -1,32 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Если умножить его слева на матрицу коэффициентов $\|h_{ik}\|$, опуская при этом первую строку и первую колонку, получим матрицу 3-го порядка

$$\left\| \begin{array}{ccc} 40,24 & 20,92 & 3,19 \\ 37,57 & 66,46 & 17,84 \\ 12,30 & 21,25 & 36,68 \end{array} \right\| \cdot 10^{-6}.$$

С этой матрицей вычисляем дальше последовательные приближения, взяв

в качестве исходной формы

$$\mu_2 = 1, \mu_3 = 1, \mu_4 = 1.$$

Во втором приближении будем иметь

$$\mu_2 = 1, \mu_3 = 2,21, \mu_4 = 1,11.$$

Вторая собственная форма всей системы

$$\mu_1 = 1, \mu_2 = -0,08, \mu_3 = -0,18, \mu_4 = -0,09.$$

Границы для второй частоты во втором приближении будут

$$102,2 < p_2 < 105,2.$$

10. Метод гармонических коэффициентов влияния. Изложенные выше методы определения высших частот требуют предварительного нахождения собственных форм и частот, предшествующих по порядку искомым. Во многих практических задачах, например, в исследованиях безопасности работы двигателя на заданном числе оборотов, где требуется лишь оценка отклонения рабочего числа оборотов от ближайшего «критического», расчет предшествующих частот является лишней, осложняющей дело, процедурой. Здесь важно иметь способ, позволяющий находить любую промежуточную частоту независимо от других и, в частности, предшествующих частот системы. Одним из таких способов является излагаемый далее метод гармонических коэффициентов¹⁾. Этот метод дает возможность найти отклонение от заданного числа ближайшего к нему квадрата собственной частоты системы, а вместе с тем и самый квадрат этой частоты.

Напомним определения гармонических коэффициентов влияния. В случае поперечных колебаний стержня (вала или балки) гармоническим коэффициентом влияния A_{ik} называется максимальный (амплитудный) прогиб в точке i от единичного гармонического возмущающего перемещения, сообщаемого точке k , в установившихся вынужденных колебаниях системы. Разложения коэффициентов A_{ik} по собственным формам имеют вид

$$A_{ik} = \sum_{s=1}^n \frac{u_{si}u_{sk}}{1 - \frac{p_s^2}{\omega^2}} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (4.39)$$

где ω^2 — квадрат частоты возмущающего гармонического перемещения, причем $\omega^2 \neq p_s^2$. В применении к крутильным колебаниям приведенного вала гармоническим коэффициентом B_{ik} называется угол кручения участка i от единичного возмущающего гармонического момента, приложенного на участке k в установившихся вынужденных крутильных колебаниях системы. Разложения коэф-

¹⁾ См. статью автора, цитированную на стр. 168.

фициентов B_{ik} по собственным формам в этом случае имеют вид

$$B_{ik} = \sum_{s=1}^n \frac{u_{si}u_{sk}}{p_s^2 - \omega^2} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (4.40)$$

где ω^2 — квадрат частоты возмущающего единичного момента [$\omega^2 \neq p_s^2$]. Коэффициенты A_{ik} , B_{ik} обладают свойством симметрии:

$$A_{ik} = A_{ki}, \quad B_{ik} = B_{ki}$$

и могут иметь как положительные, так и отрицательные значения. Линейное преобразование

$$\mu_i^{(1)} = \sum_{k=1}^n B_{ik}\mu_k^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.41)$$

можно рассматривать, аналогично (4.29), как совокупность формул¹⁾, с помощью которых по исходной форме

$$\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \dots, \mu_n^{(0)}$$

вычисляется «первое приближение», т. е. форма

$$\mu_1^{(1)}, \mu_2^{(1)}, \dots, \mu_n^{(1)}.$$

Пусть разложение амплитуд исходной формы по собственным формам имеет вид

$$\mu_i^{(0)} = \sum_{s=1}^n a_s u_{si} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда для разложений «первого приближения», принимая во внимание формулы (4.40), будем иметь

$$\begin{aligned} \mu_i^{(1)} &= \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{u_{si}u_{sk}}{p_s^2 - \omega^2} \sum_{l=1}^n a_l u_{lk} = \\ &= \sum_{s=1}^n \frac{u_{si}}{p_s^2 - \omega^2} \sum_{l=1}^n a_l \sum_{k=1}^n u_{sk} u_{lk} = \sum_{s=1}^n \frac{a_s u_{si}}{p_s^2 - \omega^2}. \end{aligned}$$

Для второго приближения по формулам

$$\mu_i^{(2)} = \sum_{k=1}^n B_{ik}\mu_k^{(1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

¹⁾ Вместо коэффициентов B_{ik} в этих формулах могут быть взяты также и коэффициенты A_{ik} .

получим:

$$\mu_i^{(2)} = \sum_{s=1}^n \frac{a_s u_{si}}{(p_s^2 - \omega^2)^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Продолжая вычисления, найдем для m -го приближения

$$\mu_i^{(m)} = \sum_{s=1}^n \frac{a_s u_{si}}{(p_s^2 - \omega^2)^m} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.42)$$

При достаточно большом m

$$\mu_i^{(m-1)} \approx \frac{a_s u_{si}}{(p_s^2 - \omega^2)^{m-1}},$$

$$\mu_i^{(m)} \approx \frac{a_s u_{si}}{(p_s^2 - \omega^2)^m},$$

где p_s^2 — квадрат ближайшей к ω собственной частоты системы. При достаточно большом m отношения соответственных амплитуд двух последовательных приближений будут стремиться к наименьшей разности $p_s^2 - \omega^2$:

$$\frac{\mu_i^{(m-1)}}{\mu_i^{(m)}} \rightarrow p_s^2 - \omega^2 \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad (4.43)$$

а отношения амплитуд одного и того же приближения — к отношениям амплитуд собственной формы, соответствующей этой ближайшей к ω собственной частоте p_s .

Таким образом, может быть построен сходящийся процесс итераций, результатом которого будет получение s -й собственной формы и наименьшей по абсолютной величине разности $p_s^2 - \omega^2$. При этом число перемен знака амплитуд $\mu_i^{(m)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) определит порядок частоты p_s , т. е. значение s . Знак разности $p_s^2 - \omega^2$ и частота p_s определяются подстановкой в исходные уравнения найденной s -й формы колебаний.

Заменив в уравнениях (4.41) коэффициенты B_{ik} их абсолютными значениями, мы получим возможность судить и о погрешности расчета.

Пример 18. Найти вторую частоту крутильных колебаний приведенного вала с пятью дисками. Это тот же вал, о котором шла речь в примерах 2,8 гл. III. В расчете второй частоты мы будем исходить из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} p^2 \mu_1 &= 10\,987\mu_1 - 2306\mu_2 & * & * \\ p^2 \mu_2 &= -2306\mu_1 + 28\,589\mu_2 - 20\,421\mu_3 & * & \\ p^2 \mu_3 &= * - 20\,421\mu_2 + 25\,350\mu_3 - 10\,643\mu_4 \\ p^2 \mu_4 &= * * - 10\,643\mu_3 + 32\,474\mu_4. \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

Гармонические коэффициенты от единичного гармонического момента частоты $\omega = 100$ 1/сек, приложенного на первом участке, будут (см. стр. 150):

$$\|B_{ik}\| = \begin{vmatrix} 81,30 & -8,58 & -16,91 & -8,04 \\ -8,58 & -3,67 & -7,24 & -3,45 \\ -16,91 & -7,24 & -4,66 & -2,22 \\ -8,04 & -3,45 & -2,22 & 3,39 \end{vmatrix} \cdot 10^{-5}. \quad (4.45)$$

Не делая никаких предположений относительно места $\omega = 100$ среди частот системы, возьмем в качестве исходной формы

$$\mu_i^{(0)} = \mu_2^{(0)} = \mu_3^{(0)} = \mu_4^{(0)} = 1.$$

Такую форму никак нельзя назвать близкой ко второй форме уже потому, что она не имеет перемен знака. Тем не менее и при такой форме мы получим из уравнений (4.45) ответ на все вопросы, какие здесь вообще могут возникнуть. Неудачный выбор исходной формы только удлинит расчет.

Вычислив по формулам (4.41), где B_{ik} имеют значения (4.45), первые пять приближений, получим табл. 9.

Таблица 9

i	$\mu_i^{(0)}$	$\mu_i^{(1)} \cdot 10^5$	$\frac{\mu_i^{(1)}}{\mu_i^{(0)}}$	$\mu_i^{(2)} \cdot 10^5$	$\frac{\mu_i^{(2)}}{\mu_i^{(1)}}$	$\mu_i^{(3)} \cdot 10^5$	$\frac{\mu_i^{(3)}}{\mu_i^{(2)}}$	$\mu_i^{(4)} \cdot 10^5$	$\frac{\mu_i^{(4)}}{\mu_i^{(3)}}$	$\mu_i^{(5)} \cdot 10^5$	$\frac{\mu_i^{(5)}}{\mu_i^{(4)}}$
1	1	47,82	1	98,13	1	33,60	1	86,12	1	85,64	1
2	1	-22,94	-0,480	-1,37	-0,014	-7,60	-0,091	-6,52	-0,076	-6,73	-0,079
3	1	-31,03	-0,649	-9,93	-0,101	-16,21	-0,194	-15,14	-0,176	-15,34	-0,179
4	1	-10,32	-0,216	-5,67	-0,058	-7,97	-0,095	-7,62	-0,088	-7,69	-0,090

Подставив в первое уравнение (4.44) отношение $\mu_2/\mu_1 = -0,079$, получим, что $p_2 = 105,6$.

Для определения погрешности расчета мы используем свойства матрицы абсолютных значений коэффициентов B_{ik} , которая в рассматриваемом примере имеет вид

$$\| \begin{vmatrix} 81,30 & 8,58 & 16,91 & 8,04 \\ 8,58 & 3,67 & 7,24 & 3,45 \\ 16,91 & 7,24 & 4,66 & 2,22 \\ 8,04 & 3,45 & 2,22 & 3,39 \end{vmatrix} \cdot 10^{-5}.$$

Значения амплитуд в первом и втором приближениях при исходной форме

$$\mu_i^{(0)} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

а также границы разности $p_2^2 - \omega^2$ приведены в табл. 10.

Таблица 10

i	$\mu_i^{(0)}$	$\mu_i^{(1)} \cdot 10^5$	$\frac{\mu_i^{(1)}}{\mu_1^{(1)}}$	$\mu_i^{(2)} \cdot 10^5$	$\frac{\mu_i^{(2)}}{\mu_1^{(2)}}$	Границы $p_2^2 - \omega^2$
1	1	114,81	1,00	88,78	1,00	В первом приближении $871,0 < (p_2^2 - \omega^2) <$ $< 2151,93$
2	1	22,94	0,20	11,78	0,13	
3	1	31,03	0,27	19,95	0,22	Во втором приближении $1126,36 < (p_2^2 - \omega^2) <$ $< 1242,81$
4	1	17,10	0,15	9,82	0,11	

Так как

$$p_2^2 > \omega^2,$$

то для второй частоты во втором приближении будем иметь

$$105,5 < p_2 < 106,0.$$

ГЛАВА V

ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА В МАШИНАХ

1. Критические числа оборотов прямых валов. Расчеты критических скоростей или чисел оборотов прямых валов ротативных машин представляют одно из главных практических приложений теории, изложенной в предыдущих главах. В обычном словоупотреблении критическими скоростями принято называть все скорости, при которых наступают разного рода нарушения нормального хода машины, выражающиеся большей частью в появлении биений вала или вибраций всей установки в целом. Не все, однако, такие критические скорости имеют непосредственное отношение к теории колебаний вообще и, в частности, к линейным задачам последней. Некоторые критические состояния вала связаны со сложными (большой частью, нелинейными) процессами, и их исследование, составляющее важный раздел учения об упругой устойчивости и конструктивной прочности деталей машины, выходит за рамки линейной механики. Мы ограничимся кратким изучением так называемых «главных критических скоростей», расчет которых приводит к задачам об определении собственных значений линейных систем, аналогичным задачам об определении собственных частот колебаний систем с конечным числом степеней свободы.

Первые теории критических состояний вала и первые определения главных критических скоростей были построены в связи с опытами над балансировкой роторов паровых турбин с большим числом оборотов¹⁾. Из этих теорий практическое значение получила главным образом теория А. Стодола, которую мы и положим в основу наших исследований²⁾.

Согласно теории Стодола, хорошо согласующейся с опытом, общий характер поведения вала в критическом состоянии можно описать следующим образом.

¹⁾ В частности, в связи с известными опытами шведского инженера Лавала, изобретателя так называемой турбины Лавала. Вал турбины Лавала делал свыше 30 000 оборотов в минуту.

²⁾ Stodola A., Dampf- und Gasturbinen, § 191, 1924.

Точно сбалансированный вертикальный¹⁾ вращающийся вал в не критических условиях сохраняет прямолинейную форму, которая в этих условиях является формой его устойчивого упругого равновесия. Небольшие изгибные колебания вала, возникающие от случайных воздействий, быстро затухают, не вызывая заметных нарушений нормальной работы машины. При некоторых определенных скоростях вращения прямолинейная форма перестает быть формой устойчивого равновесия. Получив при одной из таких скоростей прогиб, вал не возвращается в прямолинейное расположение: его изогнутая ось, сохраняя свою форму, начинает «обращаться» вокруг линии подшипников, обычно в ту же сторону и с той же скоростью, с какой совершается вращение вала, передающее вращающий момент на рабочий орган машины (случай *прямого* или *положительного обращения*)²⁾. Скорость или число оборотов, при которых происходит описанное явление, называются *критическими*. Стодола установил также возможность «обращения» изогнутой оси вала в сторону, противоположную собственному вращению вала (*обратное* или *отрицательное обращение*). При отрицательном «обращении» изогнутая ось вала располагается по кривой двойной кривизны, и вал подвергается дополнительному кручению³⁾. При весьма большой жесткости на кручение, какой обычно обладают ступенчатые валы турбин, и при наличии эксцентриситета насадки дисков такое «обращение» само по себе возникнуть не может. Этим объясняется значительно меньшая вероятность критических состояний с отрицательным обращением по сравнению с критическими состояниями прямого обращения. Для возникновения отрицательного обращения необходимо наличие условий, редко осуществляющихся в промышленных машинах: полное отсутствие неуравновешенности (статической и динамической), малая крутильная жесткость вала и, наконец, наличие возмущающей периодической силы (не вызванной неуравновешенностью)⁴⁾.

Основываясь на результатах теоретических и экспериментальных исследований критического состояния прямых валов, выполненных Стодолой, можно следующим образом сформулировать определение критической скорости вращающегося вала:

¹⁾ Рассматривая точно сбалансированный вертикальный вал, мы можем не учитывать при определении критических скоростей его собственного веса.

²⁾ Термин «вращение» (или «собственное вращение») мы сохраняем для вращения, передающего вращающий момент; «обращение» относится к движению изогнутой оси вала вокруг линии подшипников в критическом состоянии. В дальнейшем «обращение» называется также «прецессионным движением» или «прецессией».

³⁾ Кроме кручения, вызванного передачей вращающего момента.

⁴⁾ Бицено К. Б. и Граммель Р., Техническая динамика, т. II, Гостехиздат, 1952.

Критической угловой скоростью вращающегося вала называется такая скорость его вращения, при которой упругие восстанавливающие силы и моменты, возникающие при прогибе вала, уравновешиваются силами инерции и моментами сил инерции сосредоточенных масс в их обращении вокруг линии подшипников.

В обычных расчетах на критическое число оборотов так называемых «жестких валов»¹⁾ рассматривают в первом приближении массы сосредоточенных нагрузок как точечные и не учитывают моментов сил инерции этих масс (и соответственно упругих восстанавливающих моментов). Для таких расчетов определение критической скорости можно изложить следующим образом.

Критической угловой скоростью называется угловая скорость вращения вала, при которой упругие восстанавливающие силы, возникающие при прогибе вала, уравновешиваются силами инерции сосредоточенных масс в их обращении вокруг линии подшипников.

Легко видеть, что задача о вычислении таких критических скоростей приводит к нахождению собственных частот поперечных колебаний рассматриваемого вала. Рассмотрим, например, вал на двух опорах с тремя сосредоточенными массами m_1, m_2, m_3 , вращающийся с угловой скоростью ω 1/сек. При обращении изогнутой оси вала вокруг линии подшипников возникают центробежные силы

$$m_1 y_1 \omega^2, \quad m_2 y_2 \omega^2, \quad m_3 y_3 \omega^2,$$

где y_1, y_2, y_3 — отклонения²⁾ оси вала от линии подшипников в местах крепления сосредоточенных масс (рис. 46). В критическом состоянии эти силы должны уравновешиваться упругими восстанавливающими силами, возникающими при деформации вала. Условия такого равновесия могут быть написаны в форме уравнений (3.8) обобщенного закона Гука, если заменить в них силы P_i на $m_i y_i \omega^2$.

$$y_i = \omega^2 \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} m_k y_k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.1)$$

¹⁾ «Жестким» называется вал, рассчитанный так, что его наименьшее критическое число оборотов выше нормального рабочего числа оборотов. Вал, наименьшее критическое число оборотов которого ниже нормального рабочего, называется «гибким» валом.

²⁾ Эти отклонения предполагаются прямолинейными и перпендикулярными к линии подшипников.



Рис. 46.

(α_{ik} — статические коэффициенты влияния). Исключив отсюда y_i , приходим к уравнению для критической скорости $\omega_{кр}$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}m_1 - \frac{1}{\omega^2} & \alpha_{12}m_2 & \alpha_{13}m_3 \\ \alpha_{21}m_1 & \alpha_{22}m_2 - \frac{1}{\omega^2} & \alpha_{23}m_3 \\ \alpha_{31}m_1 & \alpha_{32}m_2 & \alpha_{33}m_3 - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0, \quad (5.2)$$

которое ничем не отличается от уравнения частот (векового уравнения) поперечных колебаний того же вала.

Вал, масса которого (вместе с дисками) приведена к сосредоточенным точечным массам, представляет собой систему с n степенями свободы и имеет n собственных частот. Каждой из этих частот соответствует особое значение критической скорости. Число критических скоростей приведенного вала в первом приближении равно, таким образом, числу его степеней свободы.

Из изложенного следует, что все рассмотренные в предыдущих разделах способы приближенного определения частот и форм поперечных колебаний стержней и балок могут быть использованы без особых изменений в качестве способов расчета критических скоростей в первом приближении¹⁾.

2. Гироскопический момент. При определении критической скорости в первом приближении мы рассматриваем расположенные по валу массы как точечные и учитываем только центробежные силы этих масс. Но обычно последние представляют собою диски иногда значительных поперечных размеров. При прогибе вала плоскость диска поворачивается вокруг одного из своих диаметров. Возникающие при этом силы инерции будут приводиться не только к главному вектору (приложенному в месте крепления диска), но и к главному моменту, который, смотря по обстоятельствам, может действовать на вал и как изгибающий, и как восстанавливающий, соответственно уменьшая или увеличивая критическое число оборотов.

Отметим прежде всего, что, когда главный момент сил инерции сосредоточенных на валу масс (дисков), отличен от нуля, то критические скорости не равны собственным частотам поперечных колебаний вала. В самом деле, при плоских поперечных колебаниях вала диск поворачивается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости прогиба, и момент сил инерции равен

$$M = -A\ddot{\theta},$$

¹⁾ Большое число расчетных схем приведено в книгах: Яновский М. И., Конструирование и расчет на прочность деталей паровых турбин, Изд. АН СССР, 1947; H o l b a, Berechnungsverfahren zur Bestimmung kritischen Drehzahlen von geraden Wellen, Springer, Wien, 1936.

где θ — угол поворота касательной к оси вала в месте крепления диска, A — экваториальный момент инерции диска (момент инерции относительно диаметра, перпендикулярного к плоскости прогиба). Когда вал совершает одно из главных колебаний

$$\theta = a \sin(pt + \gamma),$$

максимальный момент сил инерции равен

$$M_{\max} = Ap^2a.$$

Этот момент имеет знак, одинаковый со знаком a (рис. 47). Он действует как изгибающий момент, увеличивает прогиб вала, как бы делая его менее жестким.

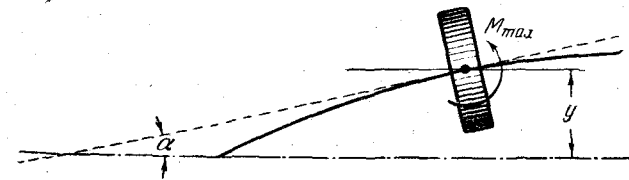


Рис. 47.

В критическом состоянии момент сил инерции имеет другое значение. Здесь к собственному вращению вала, передающему рабочее усилие, присоединяется «обращение» изогнутой оси вала вокруг линии подшипников. Обращение вала в критическом состоянии не является простым вращением твердого тела вокруг неподвижной оси. Оно не может быть также без существенных оговорок определено и как прецессионное движение, в котором роль гироскопа играет диск, совершающий собственное вращение. Как показывает опыт, «обращение» представляет своеобразную деформацию вала, которую можно считать вращением не вала, а его прогиба вокруг линии подшипников. Такое «вращение прогиба» можно воспроизвести, зажав концы свободно свисающего резинового шланга и затем поворачивая изогнутую форму шланга вокруг оси, проходящей через зажимы. Если предположить, что вал несет один диск, жестко закрепленный в точке, где касательная к изогнутой оси вала почти параллельна линии подшипников, т. е. образует с последней малый угол α , то при таком движении поперечное сечение вала в точке крепления диска будет вместе с диском совершать поступательное движение, кинематически эквивалентное паре вращений с угловыми скоростями, равными угловой скорости обращения. Когда вал передает вращающий момент (в собственном вращении) и совершает обращение, диск, жестко насаженный на вал указанным выше способом, имеет *три угловые скорости*: угловую скорость собственного вращения ω и две

угловые скорости ω_1 и $-\omega_1$ обращения, направленные, как показано на рис. 48. Отсюда следует, что диск можно рассматривать как гироскоп, совершающий прецессионное движение, только при условии добавления к скорости собственного вращения одной из угловых скоростей пары обращения. Это обстоятельство нужно иметь в виду при использовании формул теории гироскопов для вычисления момента сил инерции диска как гироскопического момента, в

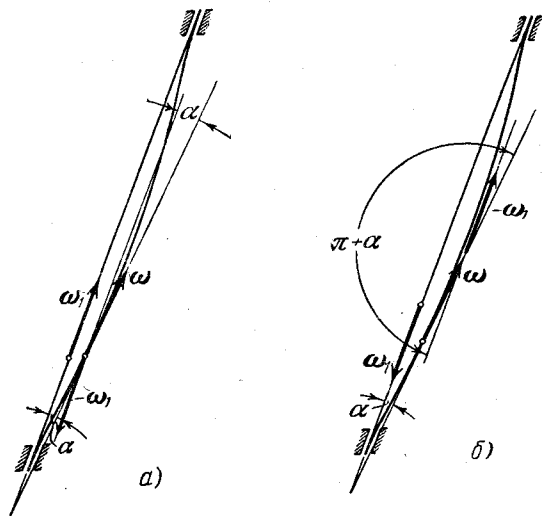


Рис. 48.

частности, известной формулы для величины G гироскопического момента при регулярной прецессии гироскопа¹⁾

$$G = -\Omega_1 [C\Omega \sin \alpha + (C - A)\Omega_1 \sin \alpha \cos \alpha], \quad (5.3)$$

где Ω — угловая скорость собственного вращения гироскопа, Ω_1 — угловая скорость прецессии, A и C — экваториальный и полярный моменты инерции ротора гироскопа. Направлен гироскопический момент в сторону векторного произведения

$$\Omega \times \Omega_1.$$

При применении формулы (5.3) для вычисления гироскопического момента диска в критическом состоянии следует различать два случая:

1. Случай так называемой *прямой* или *положительной прецессии*: изогнутая ось вала обращается со скоростью собственного вра-

¹⁾ См. формулу (1.41) (стр. 26).

щения в ту же сторону, в которую происходит последнее (рис. 48, а). В этом случае, как видно из рисунка, вал вместе с диском совершает одно простое вращение вокруг линии подшипников с угловой скоростью

$$\Omega_1 = \omega_1 = \omega.$$

Величину гироскопического момента найдем из формулы (5.3), полагая в ней $\Omega_1 = \omega$, $\Omega = 0$:

$$G = -(C - A)\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

или приближенно

$$G = -(C - A)\omega^2 \alpha. \quad (5.4)$$

Когда $C > A$, гироскопический момент имеет знак, противоположный знаку угла α . Он действует в этом случае как восстанавливающий момент, увеличивая жесткость вала и повышая критическую угловую скорость.

2. Случай *обратной* или *отрицательной прецессии*: изогнутая ось вала обращается с той же угловой скоростью, с какой происходит собственное вращение, но в сторону, противоположную последнему. В этом случае, как видно из рис. 48, б,

$$\Omega = 2\omega, \quad \Omega_1 = \omega_1 = +\omega.$$

Отсюда, принимая во внимание, что теперь угол между Ω и Ω_1 равен $\alpha + \pi$, из формулы (5.3) получаем

$$G = \omega [2C\omega \sin \alpha - (C - A)\omega \sin \alpha \cos \alpha],$$

или приближенно

$$G = (C + A)\omega^2 \alpha. \quad (5.5)$$

Знак гироскопического момента совпадает со знаком угла α ; этот момент действует, таким образом, как изгибающий момент, увеличивая прогиб вала, как бы уменьшая его жесткость, а вместе с ней и критическую угловую скорость.

3. **Уравнения для критической скорости вала со многими дисками.** В уточненных расчетах критической скорости гибких валов учитываются не только силы инерции дисков, но и гироскопические моменты последних, так что уравнения для определения критических скоростей, прогибов и углов поворота составляются как уравнения равновесия между центробежными силами и гироскопическими моментами — с одной стороны и упругими восстанавливающими силами и моментами — с другой. И здесь мы снова приходим к задаче об определении собственных значений линейной системы. Однако эта задача уже не совпадает с задачей об определении собственных

частот поперечных колебаний (как это имело место в первом приближении).

Мы ограничимся случаем прямой прецессии и для упрощения расчетов предположим, что

$$C = 2A.$$

В этом случае гироскопический момент

$$G = -A\omega^2\alpha.$$

Обозначим через α_{ik} и β_{ik} соответственно прогибы и углы поворота в точках i от единичных сил, приложенных в точках k . Пусть далее α'_{ik} и β'_{ik} будут соответственно прогибы и углы поворота в точках i от единичных моментов, приложенных в точках k . Величины α_{ik} , β_{ik} , α'_{ik} , β'_{ik} удовлетворяют условиям симметрии, причем $\alpha_{ik} = \beta'_{ik}$. Прогибы y_i и углы поворота θ_i в точках i от совместного действия сил R_k и моментов G_k , приложенных в точках k , определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} y_i &= \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} R_k + \sum_{k=1}^n \alpha'_{ik} G_k, \\ \theta_i &= \sum_{k=1}^n \beta_{ik} R_k + \sum_{k=1}^n \beta'_{ik} G_k. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Эти соотношения являются одновременно уравнениями равновесия между силами R_k , моментами G_k и упругими восстанавливающими силами и моментами, возникающими при прогибе вала. В критическом состоянии вала этим уравнениям удовлетворяют центробежные силы и гироскопические моменты дисков. Положив поэтому

$$\begin{aligned} R_k &= m_k \omega^2 y_k, \\ G_k &= -A_k \omega^2 \theta_k, \end{aligned}$$

приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} y_i &= \omega^2 \left[\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} m_k y_k - \sum_{k=1}^n \alpha'_{ik} A_k \theta_k \right], \\ \theta_i &= \omega^2 \left[\sum_{k=1}^n \beta_{ik} m_k y_k - \sum_{k=1}^n \beta'_{ik} A_k \theta_k \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Условие, при котором прогибы y_i и углы поворота θ_i не равны нулю (что как раз и имеет место в критическом состоянии),

напишется в виде равенства нулю определителя системы (5.7):

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} m_1 - \frac{1}{\omega^2} \dots & \alpha_{1n} m_n & \alpha'_{11} A_1 & \dots & \alpha'_{1n} A_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} m_1 & \dots & \alpha_{nn} m_n - \frac{1}{\omega^2} & \alpha'_{n1} A_1 & \dots & \alpha'_{nn} A_n \\ \beta_{11} m_1 & \dots & \beta_{1n} m_n & \beta'_{11} A_1 + \frac{1}{\omega^2} & \dots & \beta'_{1n} A_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} m_1 & \dots & \beta_{nn} m_n & \beta'_{n1} A_1 & \dots & \beta'_{nn} A_n + \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (5.8)$$

В рассматриваемом случае (прямая прецессия) это уравнение имеет n положительных корней. Остальные n корней этого уравнения отрицательны. Таким образом, в случае прямой прецессии система имеет n вещественных критических скоростей¹⁾.

В практических расчетах уравнением (5.8) можно пользоваться, когда число дисков не превышает двух. В других случаях приходится прибегать к построению специальных приближенных способов. Такой способ дает, например, формула Рэля (3.119), надлежущим образом приспособленная к рассматриваемой задаче. Чтобы получить эту формулу, умножим каждое из первых n уравнений (5.7) на соответствующие $m_i g = Q_i$ и сложим все уравнения почленно. После суммирования получим

$$\begin{aligned} g \sum_{i=1}^n m_i y_i &= \omega^2 \sum_{i=1}^n Q_i \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} m_k y_k - \omega^2 \sum_{i=1}^n Q_i \sum_{k=1}^n \alpha'_{ik} A_k \theta_k = \\ &= \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k y_k \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} Q_i - \omega^2 \sum_{k=1}^n A_k \theta_k \sum_{i=1}^n \alpha'_{ki} Q_i. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Суммы

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ki} Q_i = f_k, \quad \sum_{i=1}^n \alpha'_{ki} Q_i = \sum_{i=1}^n \beta_{ki} Q_i = \varphi_k$$

представляют: первая (f_k) — статический прогиб в точке k от совместного действия всех нагрузок Q_i ; вторая (φ_k) — угол поворота в

¹⁾ В случае обратной прецессии уравнение (5.8) определяет $2n$ положительных значений ω^2 , как в системе с $2n$ степенями свободы. То же имеет место и при $C < A$. См. Ник о л а и Е. Л., Теория гироскопов, Гостехиздат, 1948.

точке k от совместного действия тех же нагрузок. Подставив эти обозначения в (5.9), получим

$$g \sum_{i=1}^n m_i y_i = \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i y_i f_i - \omega^2 \sum_{i=1}^n A_i \theta_i \varphi_i,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{g \sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i y_i f_i - \sum_i A_i \theta_i \varphi_i}. \quad (5.10)$$

Если принять в соответствии с принципом Рэлея, что прогибы пропорциональны статическим прогибам f_i , а углы θ_i пропорциональны статическим углам поворота φ_i , то из (5.10) получится следующая формула для квадрата первой (наименьшей) критической скорости при прямой прецессии:

$$\omega_{кр}^2 = \frac{g \sum_i m_i f_i}{\sum_i m_i f_i^2 - \sum_i A_i \varphi_i^2}, \quad (5.11)$$

или, если обозначить через $\bar{\omega}_{кр}$ критическую угловую скорость, вычисленную без учета гироскопических моментов

$$\bar{\omega}_{кр}^2 = g \frac{\sum_i m_i f_i}{\sum_i m_i f_i^2},$$

то

$$\omega_{кр}^2 = \bar{\omega}_{кр}^2 \frac{1}{1 - \frac{\sum_i A_i \varphi_i^2}{\sum_i m_i f_i^2}}. \quad (5.12)$$

Применение формулы (5.12) не требует дополнительных построений, кроме тех, какие необходимы для нахождения основной частоты без учета гироскопических моментов. С построенной один раз статической упругой линии нужно снять вместе с прогибами f_i углы поворота касательных φ_i , причем последние только в местах крепления дисков¹⁾.

¹⁾ При очень больших A_i из формулы (5.12) для $\omega_{кр}$ может получиться мнимое значение. В этом случае гироскопические моменты делают вал настолько жестким, что совершенно устраняют возможность появления критических состояний.

Пример 1. Найти критическое число оборотов гибкого консольного вала с одним диском (рис. 49) при следующих данных:

$$D = 60 \text{ см}, \quad d = 10 \text{ см}, \quad H = 8 \text{ см}, \quad l = 100 \text{ см},$$

$$J = 491 \text{ см}^4, \quad \gamma = 7,8 \text{ Г/см}^3, \quad E = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2,$$

$$m = 0,18 \frac{\text{кг сек}^2}{\text{см}}, \quad A = 40,5 \text{ кг см сек}^2,$$

$$C = 81 \text{ кг см сек}^2.$$

Вал укреплен в обыкновенном (не поворачивающемся) подшипнике, который можно рассматривать как жесткое закрепление.

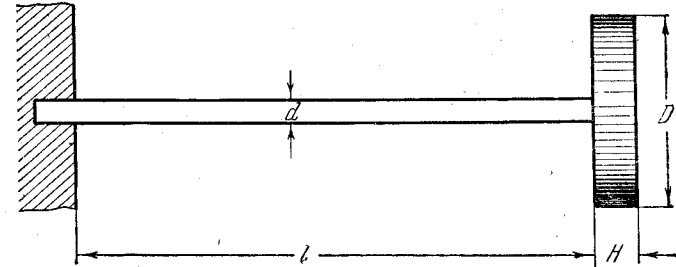


Рис. 49.

Вычислим коэффициенты влияния по формулам

$$\alpha_{11} = \frac{l^3}{3EJ}, \quad \alpha'_{11} = \beta_{11} = \frac{l^2}{2EJ}, \quad \beta'_{11} = \frac{l}{EJ}.$$

В рассматриваемом случае

$$\alpha_{11} = 0,34 \cdot 10^{-8}, \quad \alpha'_{11} = \beta_{11} = 0,51 \cdot 10^{-5}, \quad \beta'_{11} = 1,02 \cdot 10^{-7},$$

$$\alpha_{11} \beta'_{11} - \alpha_{11}'^2 = 0,09 \cdot 10^{-10}.$$

Уравнение (5.8) для критической скорости прямой прецессии напишется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} m - \frac{1}{\omega^2} & \alpha'_{11} A \\ \beta_{11} m & \beta'_{11} A + \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\omega^4 + \frac{\alpha_{11} m - A \beta'_{11}}{A m (\alpha_{11} \beta'_{11} - \alpha_{11}'^2)} \omega^2 - \frac{1}{A m (\alpha_{11} \beta'_{11} - \alpha_{11}'^2)} = 0.$$

После подстановки числовых значений

$$\omega^4 + 8,3934 \cdot 10^5 \omega^2 - 1,5242 \cdot 10^{10} = 0.$$

Это уравнение имеет один положительный корень

$$\omega^2 \approx 0,1776 \cdot 10^5,$$

которому соответствует одна вещественная критическая скорость

$$\omega_{кр} = 133 \text{ 1/сек.}$$

Критическая скорость, вычисленная без учета гироскопического момента диска из уравнения

$$\alpha_{11} m \omega^2 - 1 = 0,$$

составляет около 128 1/сек. Гироскопический момент прямой прецессии повышает критическое число оборотов.

В случае обратной прецессии уравнение, аналогичное уравнению (5.8), имело бы в рассматриваемом случае вид

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} m - \frac{1}{\omega^2} & 3\alpha'_{11} A \\ \beta_{11} m & 3\beta'_{11} A - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\omega^4 - 3,7393 \cdot 10^5 \omega^2 + 0,5081 \cdot 10^{10} = 0.$$

Это уравнение имеет два положительных корня для ω^2 , которым соответствуют два вещественных значения критической скорости обратной прецессии

$$\omega_{1кр} \approx 119 \text{ 1/сек.}, \quad \omega_{2кр} \approx 600 \text{ 1/сек.}$$

Таким образом, для однодискового консольного вала возможны три критических состояния при скоростях вращения 119 1/сек., 133 1/сек., 600 1/сек. Из этих возможных для консольного вала критических состояний критические состояния обратной прецессии возникают в специальных условиях, о которых речь шла раньше.

Жесткий консольный вал можно рассчитывать на критическое число оборотов по одной массе диска, не принимая во внимание гироскопического момента. Отметим, что критическое число оборотов без учета гироскопического момента всегда лежит между двумя критическими числами обратной прецессии.

Когда $C < A$, то однодисковый вал имеет две вещественные критические скорости и при прямой прецессии, в чем легко убедиться в нашем примере, подобрав подходящим образом численные значения моментов A и C . Однако в этом случае оба значения критической скорости лежат выше критической скорости без учета гироскопического момента, причем область между двумя критическими скоростями прямой прецессии является областью неустойчивых движений вала. Аналогичное явление имеет место также в случае, когда на вал насажен не диск, а тело с неодинаковыми главными поперечными моментами (например, пропеллер или ротор генератора).

В заключение приводим таблицу коэффициентов влияния для однодискового вала (при различных способах закрепления).

Схема	α_{11}	$\alpha'_{11} = \beta_{11}$	β'_{11}	$\alpha_{11}\beta'_{11} - \alpha'^2_{11}$
	$\frac{l^3}{3EJ}$	$\frac{l^2}{2EJ}$	$\frac{l}{EJ}$	$\frac{l^4}{12(EJ)^2}$
	$\frac{a^2 b^2}{3EJ}$	$\frac{ab(b-a)}{3EJ}$	$\frac{a^3 + b^3}{3l^2 EJ}$	$\frac{a^2 b^3}{9l^2 (EJ)^2}$
	$\frac{a^3 b^3}{3l^3 EJ}$	$\frac{a^2 b^2 (b-a)}{2l^2 EJ}$	$\frac{ab(a^3 + b^3)}{l^4 EJ}$	$\frac{a^4 b^4}{12l^4 (EJ)^2}$
	$\frac{a^3 b^2 (3a + 4b)}{12l^3 EJ}$	$\frac{a^2 b (2b^2 - a^2)}{4l^3 EJ}$	$\frac{a (4b^3 + a^3)}{4l^3 EJ}$	$\frac{a^4 b^3}{12l^3 (EJ)^2}$

4. Метод начальных параметров. Метод начальных параметров в матричной форме является одним из весьма эффективных приемов расчета динамических напряжений в сечениях вала при любых сосредоточенных или распределенных гармонических нагрузках. В окончательных результатах расчета этот метод приводит к развернутому вековому уравнению, что дает возможность использования его для нахождения всех собственных частот (или критических чисел оборотов) вала. С помощью введения подходящих масштабов для длин и нагрузок расчеты по этому методу становятся легко выполнимыми даже ручными счетными приспособлениями, не говоря уже о быстродействующих цифровых машинах, где итеративная природа метода начальных параметров оказывается особенно приспособленной для программирования и выполнения вычислений.

Имея в виду применения метода начальных параметров к расчету критических чисел оборотов прямых (безмассовых) валов, нагруженных сосредоточенными силами и моментами, мы будем исходить в обосновании метода из так называемой универсальной формулы упругой линии, формулы, представляющей общий интеграл уравнения

$$EJ(x) \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) \quad (5.13)$$

при различных предположениях относительно моментной нагрузки M и жесткости EJ^1).

Обозначим через Q_0 и M_0 соответственно поперечную силу и изгибающий момент на левом конце вала ($x=0$).

Пусть в точках a_i (1, 2, 3, ...) на вал действуют сосредоточенные силы P_i и моменты M_i . Уравнение упругой линии (5.13) в этом случае будет иметь вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Q_0x}{EJ(x)} + \frac{M_0}{EJ(x)} + \sum_i \frac{P_i(x-a_i)}{EJ(x)} + \sum_i \frac{M_i}{EJ(x)}, \quad (5.14)$$

где в суммы, стоящие справа, входят только силы и моменты, расположенные слева от сечения x . Чтобы найти решение уравнения (5.14), составим его изображение по правилам операционного исчисления. Положив

$$Y(p) \leftrightarrow y(x), \\ F_1(p) \leftrightarrow \frac{x}{EJ(x)}, \quad F_2(p) \leftrightarrow \frac{1}{EJ(x)}, \quad F_i(p) \leftrightarrow \frac{x-a_i}{EJ(x)},$$

найдем изображение уравнения (5.14):

$$p^2 \left[Y(p) - y(0) - \frac{1}{p} y'(0) \right] = Q_0 F_1(p) + M_0 F_2(p) + \\ + \sum_i P_i F_i(p) + \sum_i M_i F_i(p).$$

Отсюда изображение искомой функции $y(x)$:

$$Y(p) = y(0) + \frac{1}{p} y'(0) + \frac{1}{p^2} Q_0 F_1(p) + \frac{1}{p^2} M_0 F_2(p) + \\ + \sum_i P_i \frac{1}{p^2} F_i(p) + \sum_i M_i \frac{1}{p^2} F_i(p).$$

Применяя к слагаемым, содержащим сосредоточенные силы и моменты теорему свертывания, получим

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + Q_0 \int_0^x \frac{(x-\xi)\xi d\xi}{EJ(\xi)} + M_0 \int_0^x \frac{(x-\xi) d\xi}{EJ(\xi)} + \\ + \sum_i P_i \int_{a_i}^x \frac{(x-\xi)(\xi-a_i) d\xi}{EJ(\xi)} + \sum_i M_i \int_{a_i}^x \frac{(x-\xi) d\xi}{EJ(\xi)}. \quad (5.15)$$

¹⁾ Крылов А. Н., Об определении критических скоростей вращающегося вала, Изд. АН СССР, 1932.

Такова универсальная формула упругой линии вала переменного сечения¹⁾.

В суммы справа входят только слагаемые, в которых x больше a_i , и следовательно, для различных отрезков, на какие вал разделяется точками a_i , функция $y(x)$ имеет различные аналитические выражения. Аналогичным путем может быть построена универсальная формула и для более сложных видов нагрузки.

Для ступенчатых валов интегралы, входящие в формулу (5.15) и содержащие в промежутках интегрирования точки, в которых момент инерции $J(\xi)$ скачком меняет одно конечное значение на другое, также конечное значение, вычисляются просто как суммы интегралов, взятых по участкам с постоянным $J(\xi)$. В других случаях эти интегралы находятся приближенно — графически или по одной из квадратурных формул.

Для вала постоянного сечения по всей длине интегралы в формуле (5.15) легко вычисляются и формула приобретает более простой вид:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{Q_0x^3}{6EJ} + \frac{M_0x^2}{2EJ} + \\ + \frac{1}{6EJ} \sum_i P_i (x-a_i)^3 + \frac{1}{2EJ} \sum_i M_i (x-a_i)^2. \quad (5.16)$$

Величины $y(0)$, $y'(0)$, M_0 , Q_0 , обозначающие соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечную силу на одном из концов вала, называются *начальными параметрами*. В простейших случаях закрепления концов вала два параметра на каждом конце равны нулю и формулы (5.15) и (5.16) содержат только по два неизвестных параметра. Так, например, если на одном конце вала шарнирная опора, то на этом конце

$$y = M_0 = 0.$$

Если этот конец жестко закреплен, то

$$y = y' = 0,$$

если свободен, то

$$M_0 = Q_0 = 0.$$

Два других параметра определяются из условий закрепления другого конца вала.

В критическом состоянии на вал, совершающий прямое обращение, действуют сосредоточенные центробежные силы $m_i y_i \omega^2$ и гироскопические моменты — $A_i y_i' \omega^2$, где y_i , y_i' — прогибы и углы поворота

¹⁾ Вывод универсальной формулы упругой линии при помощи ряда Маклорена см. в статье: Снитко Н. К., Новый метод нахождения упругой линии, Труды МИИТ, 1930, вып. XV. Другой вывод — в книге: Микеладзе Ш. Е., Некоторые задачи строительной механики, Гостехиздат, 1948.

в точках a_i ; m_i , A_i — соответственно массы и экваториальные моменты инерции дисков; ω — критическая угловая скорость. Выражения для этих сил и моментов следует подставить вместо P_i и M_i в формулы (5.15) и (5.16), после чего последние принимают вид:

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + Q_0 \int_0^x \frac{(x-\xi)\xi d\xi}{EJ(\xi)} + M_0 \int_0^x \frac{(x-\xi) d\xi}{EJ(\xi)} + \sum_i m_i y_i \omega^2 \int_{a_i}^x \frac{(x-\xi)(\xi-a_i) d\xi}{EJ(\xi)} - \sum_i A_i y_i' \omega^2 \int_{a_i}^x \frac{(x-\xi) d\xi}{EJ(\xi)}, \quad (5.17)$$

формула (5.16)

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{Q_0}{6EJ} x^3 + \frac{M_0}{2EJ} x^2 + \frac{1}{6EJ} \sum_i m_i y_i \omega^2 (x-a_i)^3 - \frac{1}{2EJ} \sum_i A_i y_i' \omega^2 (x-a_i)^2. \quad (5.18)$$

Вычислив по правилу дифференцирования по параметру последовательно первую, вторую и третью производные от $y(x)$, приходим к основным уравнениям метода начальных параметров¹⁾

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= y(0) + y'(0)x + M_0 \int_0^x \frac{(x-\xi) d\xi}{EJ(\xi)} + Q_0 \int_0^x \frac{(x-\xi)\xi d\xi}{EJ(\xi)} + \\ &+ \sum_i P_i \int_{a_i}^x \frac{(x-\xi)(\xi-a_i) d\xi}{EJ(\xi)} + \sum_i M_i \int_{a_i}^x \frac{(x-\xi) d\xi}{EJ(\xi)}, \\ y'(x) &= y'(0) + M_0 \int_0^x \frac{d\xi}{EJ(\xi)} + Q_0 \int_0^x \frac{\xi d\xi}{EJ(\xi)} + \\ &+ \sum_i P_i \int_{a_i}^x \frac{(\xi-a_i) d\xi}{EJ(\xi)} + \sum_i M_i \int_{a_i}^x \frac{d\xi}{EJ(\xi)}, \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

$$M(x) = M_0 + Q_0 x + \sum_i P_i (x-a_i) + \sum_i M_i,$$

$$Q(x) = Q_0 + \sum_i P_i.$$

С помощью этих уравнений можно найти прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечную силу в любом сечении вала по

¹⁾ Безухов Н. И., Некоторые обобщения методов строительной механики в динамике сооружений, Сб. «Исследования по теории сооружений», 1939, № 3, стр. 172.

значениям этих величин (параметров) в сечении, принятом за начальное (обычно на одном из концов вала), т. е. по так называемым *начальным значениям* этих параметров.

Знаки отдельных членов в формулах (5.19) ставятся в соответствии с принятыми направлениями осей координат, прогибов, угла поворота, изгибающего момента и поперечной силы.

Соотношения между начальными параметрами и их значениями в каком-либо сечении вала можно представить в виде произведения некоторой квадратной матрицы на матрицу-столбец. Это произведение строится следующим образом. Рассмотрим участок вала между i -м и $(i+1)$ -м сечениями (ведя счет индексов справа налево), состоящий из безмассового отрезка стержня длины l_i жесткости EI_i и сосредоточенной массы m_i (рис. 50). Обозначим параметры в сечении i через y_i , θ_i , M_i , Q_i , в сечении $i+1$ — через y_{i+1} , θ_{i+1} , M_{i+1} , Q_{i+1} . Между этими параметрами в силу (5.19) при принятом порядке нумерации сечений и масс имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i - \theta_i l_i + M_i y_{M_i} + Q_i y_{Q_i} \\ \theta_{i+1} &= \theta_i - M_i y'_{M_i} - Q_i y'_{Q_i} \\ M_{i+1} &= M_i + Q_i l_i \\ Q_{i+1} &= Q_i + m_i \omega^2 y_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

где

$$y_{M_i} = \int_0^{l_i} \frac{(l_i-\xi) d\xi}{EJ_i}, \quad y_{Q_i} = \int_0^{l_i} \frac{(l_i-\xi)\xi d\xi}{EJ_i}, \\ y'_{M_i} = \int_0^{l_i} \frac{d\xi}{EJ_i}, \quad y'_{Q_i} = \int_0^{l_i} \frac{\xi d\xi}{EJ_i}.$$

Подставив в четвертое уравнение вместо y_{i+1} его выражение из первого, получим систему уравнений, в которых параметры в сечении $i+1$ выражены через параметры в сечении i :

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i - \theta_i l_i + M_i y_{M_i} + Q_i y_{Q_i} \\ \theta_{i+1} &= \theta_i - M_i y'_{M_i} - Q_i y'_{Q_i} \\ M_{i+1} &= M_i + Q_i l_i \\ Q_{i+1} &= m_i \omega^2 y_i - m_i \omega^2 l_i \theta_i + m_i \omega^2 M_i y_{M_i} + [1 + m_i \omega^2 y_{Q_i}] Q_i. \end{aligned}$$

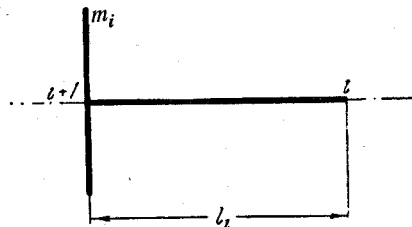


Рис. 50.

Принимая во внимание правило умножения матриц, последние соотношения можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y_{i+1} \\ \theta_{i+1} \\ M_{i+1} \\ Q_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -l_i & y_{M_i} & y_{Q_i} \\ 0 & 1 & -y'_{M_i} & -y'_{Q_i} \\ 0 & 0 & 1 & l_i \\ m_i \omega^2 & -m_i \omega^2 l_i & m_i \omega^2 y_{M_i} & 1 + m_i \omega^2 y_{Q_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ Q_i \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Если жесткость EJ_i рассматриваемого участка постоянна, то уравнение (5.21) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} y_{i+1} \\ \theta_{i+1} \\ M_{i+1} \\ Q_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -l_i & \frac{l_i^2}{2EJ_i} & \frac{l_i^3}{6EJ_i} \\ 0 & 1 & -\frac{l_i}{EJ_i} & -\frac{l_i^2}{2EJ_i} \\ 0 & 0 & 1 & l_i \\ m_i \omega^2 & -m_i \omega^2 l_i & m_i \omega^2 \frac{l_i^2}{2EJ_i} & 1 + m_i \omega^2 \frac{l_i^3}{6EJ_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ Q_i \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Значения параметров в сечении $i+1$ будут начальными для следующего слева участка вала и т. д. до левого конца вала, где, приравняв нулю два параметра, в соответствии с условиями закрепления этого конца получим уравнение частот системы.

Квадратную матрицу в уравнении (5.22) можно, руководствуясь тем же правилом умножения, представить произведением двух матриц более простой структуры:

$$\begin{pmatrix} 1 & -l_i & \frac{l_i^2}{2EJ_i} & \frac{l_i^3}{6EJ_i} \\ 0 & 1 & -\frac{l_i}{EJ_i} & -\frac{l_i^2}{2EJ_i} \\ 0 & 0 & 1 & l_i \\ m_i \omega^2 & -m_i \omega^2 l_i & m_i \omega^2 \frac{l_i^2}{2EJ_i} & m_i \omega^2 \frac{l_i^3}{6EJ_i} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -l_i & \frac{l_i^2}{2EJ_i} & \frac{l_i^3}{6EJ_i} \\ 0 & 1 & -\frac{l_i}{EJ_i} & -\frac{l_i^2}{2EJ_i} \\ 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Первый множитель в этом произведении называется матрицей массы; дальше он обозначается через \mathcal{M} ; второй — матрицей жесткости \mathcal{C} .

Если нужно учесть гироскопический момент — $A_i y_i \omega^2$ сосредоточенной массы, то в матрице \mathcal{M} появится еще один отличный от нуля элемент, и она будет иметь вид

$$\mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -A_i \omega^2 & 1 & 0 \\ m_i \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Произведению $\mathcal{M}_i \mathcal{C}_i$ можно дать и другое выражение, удобное для некоторых числовых расчетов:

$$\mathcal{M}_i \mathcal{C}_i = m_i \omega^2 B_i + \mathcal{C}_i, \quad (5.25)$$

где

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -l_i & \frac{l_i^2}{2EJ} & \frac{l_i^3}{6EJ} \end{pmatrix}$$

Можно составить также матрицы для упругих опор и сосредоточенных пульсирующих сил, но использование этих матриц в случае, например, жестких опор связано с некоторыми осложнениями, требующими развернутых объяснений¹⁾. Можно, впрочем, обойтись без построения специальных матриц жестких опор, с помощью простого приема, как это показано в примере 3.

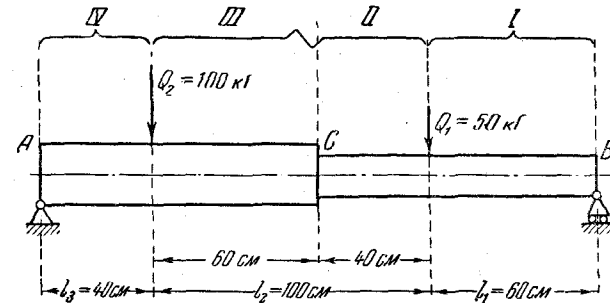


Рис. 51.

Пример 2. Расчет первого и второго критических чисел оборотов ступенчатого вала (рис. 51) методом начальных параметров в матричной форме.

¹⁾ Fuhrke H., Bestimmung von Balkenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls, Ingenieur-Archiv, 1955, H. 5.

Матрица-столбец начальных параметров на правой опоре содержит два отличных от нуля параметра: угол поворота θ_0 и поперечную силу Q_0 . Эту матрицу мы представим в виде суммы

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \theta_0 \\ 0 \\ Q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \theta_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} Q_0 = D_0.$$

Перенумеровав участки, на которые вал разделяется точками приложения сил Q_1, Q_2 и переходным сечением C , а также массы нагрузок в порядке их следования от B к A (т. е. справа налево), запишем план расчета в таком виде:

$$D = \mathfrak{G}_4 \mathfrak{M}_4 \mathfrak{G}_3 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{G}_2 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{G}_1 D_0, \quad (5.26)$$

где D — матрица-столбец значений параметров на левом конце. За единицу длины l принимаем длину первого участка вала $l_1 = 60$ см, за единицу силы $P = \frac{6EJ_1}{l_1^2}$ кг, где J_1 — момент поперечного сечения первой половины вала = $63,58$ см⁴ ($E = 2,1 \cdot 10^6$ кг/см²).

В этих единицах элементы матриц \mathfrak{G} и \mathfrak{M} будут иметь числовые значения:

первый участок

$$l_1 = 1 \cdot l, \quad \frac{l_1^3}{6EJ_1} = 1 \cdot \frac{l}{P}, \quad \frac{l_1^2}{2EJ_1} = 3 \frac{l}{P}, \quad \frac{l_1}{EJ_1} = 6 \frac{l}{P};$$

второй участок

$$l_2 = \frac{2}{3} l = 0,67 l, \quad \frac{l_2^3}{6EJ_1} = 0,30 \frac{l}{P}, \quad \frac{l_2^2}{2EJ_1} = 1,33 \frac{l}{P}, \quad \frac{l_2}{EJ_2} = 4 \frac{l}{P};$$

третий участок

$$l_3 = 1 \cdot l, \quad \frac{l_3^3}{6EJ_2} = 0,32 \frac{l}{P}, \quad \frac{l_3^2}{2EJ_2} = 0,95 \frac{l}{P}, \quad \frac{l_3}{EJ_2} = 1,90 \frac{l}{P};$$

четвертый участок

$$l_4 = 0,67 l, \quad \frac{l_4^3}{6EJ_2} = 0,09 \frac{l}{P}, \quad \frac{l_4^2}{2EJ_2} = 0,42 \frac{l}{P}, \quad \frac{l_4}{EJ_2} = 1,26 \frac{l}{P}.$$

Буквы l и P — это названия новых единиц длин и сил. В расчете фигурируют только числовые коэффициенты при этих названиях. В единицах l и P элементы матриц массы $m_1 \omega^2$ и $m_2 \omega^2$ имеют следующие выражения:

$$m_1 \omega^2 = 5 \left[10^{-2} \omega^2 \frac{l_1^3}{6EJ_1} \right] = 5p^2, \quad m_2 \omega^2 = 10 \left[10^{-2} \omega^2 \frac{l_1^3}{6EJ_1} \right] = 10p^2,$$

где

$$\omega^2 = \frac{6EJ_1 10^2 \cdot p^2}{l_1^3} = 370 881 p^2. \quad (5.27)$$

Самые вычисления в соответствии с планом (5.26) располагаем в виде схемы (табл. 11), построенной по правилу: умножив вектор D_0 на \mathfrak{G}_1 , произведение $\mathfrak{G}_1 D_0$ располагаем под D_0 . Так же поступаем с произведениями $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{G}_1 D_0$; $\mathfrak{G}_2 \mathfrak{M}_1 \mathfrak{G}_1 D_0$; $\mathfrak{G}_3 \mathfrak{G}_2 \mathfrak{M}_1 \mathfrak{G}_1 D_0$... и т. д., они на схеме располагаются каждое под предыдущим.

Таблица 11

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \theta_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} Q_0$	
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5p^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \theta_0 + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} Q_0$	
$\begin{pmatrix} 1 & -0,67 & 1,33 & 0,30 \\ 0 & 1 & -4 & -1,33 \\ 0 & 0 & 1 & 0,67 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \theta_0 + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1+5p^2 \end{pmatrix} Q_0$	
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0,95 & 0,32 \\ 0 & 1 & -1,90 & -0,95 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1,67-1,5p^2 \\ 1+6,65p^2 \\ -3,35p^2 \\ -5p^2 \end{pmatrix} \theta_0 + \begin{pmatrix} 4,64+1,5p^2 \\ -8,33-6,65p^2 \\ 1,67+3,35p^2 \\ 1+5p^2 \end{pmatrix} Q_0$	
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10p^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2,67-12,93p^2 \\ 1+17,77p^2 \\ -8,35p^2 \\ -5p^2 \end{pmatrix} \theta_0 + \begin{pmatrix} 14,88+12,93p^2 \\ -12,45-17,77p^2 \\ 2,67+8,35p^2 \\ 1+5p^2 \end{pmatrix} Q_0$	
$\begin{pmatrix} 1 & -0,67 & 0,42 & 0,09 \\ 0 & 1 & -1,26 & -0,42 \\ 0 & 0 & 1 & 0,67 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2,67-12,93p^2 \\ 1+17,77p^2 \\ -8,35p^2 \\ -31,7p^2-129,3p^4 \end{pmatrix} \theta_0 + \begin{pmatrix} 14,88+12,93p^2 \\ -12,45-17,76p^2 \\ 2,67+8,35p^2 \\ 1+153,8p^2+129,3p^4 \end{pmatrix} Q_0$	
$D =$	$\begin{pmatrix} -3,34-31,20p^2-11,66p^4 \\ * \\ -29,59p^2-86,63p^4 \\ * \end{pmatrix} \theta_0 + \begin{pmatrix} 24,43+42,18p^2+11,64p^4 \\ * \\ 3,34+111,4p^2+86,63p^4 \\ * \end{pmatrix} Q_0$	

Отмеченные звездочками элементы последних матриц вычислять не нужно, так как они в условия на левом конце (шарнирная неподвижная опора) не входят. Таким образом, на левом конце

$$(-3,34 - 31,20p^2 - 11,66p^4) \theta_0 + (24,43 + 42,18p^2 + 11,64p^4) Q_0 = 0,$$

$$(-29,59p^2 - 86,63p^4) \theta_0 + (3,34 + 111,40p^2 + 86,63p^4) Q_0 = 0.$$

Исключив из этих уравнений θ_0 и Q_0 , приходим к вековому уравнению системы, которое после приведения подобных членов будет иметь вид

$$439,48p^4 - 246,59p^2 + 11,16 = 0.$$

Его корни

$$p_1^2 = 0,0497, \quad p_2^2 = 0,5113.$$

По формулам (5.27) получаем для первой и второй критических скоростей

$$\omega_1 \approx 135,8, \quad \omega_2 \approx 435,5.$$

Первое из этих значений почти не отличается от найденного графически по методу Рэлея в примере 16 на стр. 178.

Пример 3. Первая и вторая критические скорости консольного вала (рис. 52) постоянной жесткости с двумя сосредоточенными нагрузками: $Q_1 = 80 \text{ кг}$ и $Q_2 = 60 \text{ кг}$. Момент поперечного сечения $J = 63,58 \text{ см}^4$, $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$, $EJ = 127,16 \cdot 10^8 \text{ кг·см}^2$. За единицу длины берем $l = 50 \text{ см}$, за единицу сил $P = 6EJ/l^2 \text{ кг}$. Матрица жесткости для всех участков вала одна и та же, и ее элементы в единицах l и P равны

$$l = 1 \cdot l; \frac{l^3}{6EJ} = 1 \frac{l}{P}, \frac{l^2}{2EJ} = 3 \frac{l}{P}, \frac{l}{EJ} = 6 \frac{l}{P}.$$

В матрицах масс

$$m_1 \omega^2 = 0,08 \omega^2 = 8 \left[10^{-2} \omega^2 \frac{l^3}{6EJ} \right] = 8p^2,$$

$$m_2 \omega^2 = 0,06 \omega^2 = 6 \left[10^{-2} \omega^2 \frac{l^3}{6EJ} \right] = 6p^2,$$

где

$$\omega^2 = \frac{6EJp^2 \cdot 10^2}{l^3}. \quad (5.28)$$

По сравнению с предыдущей задача осложнена наличием промежуточной жесткой опоры. Однако для решения этой задачи нет надобности в построении специальной матрицы перехода через жесткую опору вроде матриц шестого порядка Фурке¹⁾. Заменяв промежуточную жесткую опору поперечной реакцией R (неизвестной), продолжаем расчет до левого конца вала и к двум крайним условиям на этом конце добавляем третье — равенство нулю прогиба на опоре. Разделяем вал на три участка, как показано на рис. 52, записываем план расчета

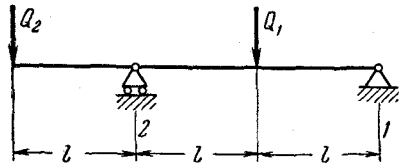


Рис. 52.

следующим образом:

$$1) D_1 = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{D}_0; \quad 2) D = \mathfrak{M} \mathfrak{D} (D_1 + D_R),$$

где D_0, D_R, D — матрицы-столбцы соответственно начальных параметров, реакции R и значений параметров на левом конце вала.

Результаты расчета располагаем в табл. 12. Имеем три уравнения²⁾:

$$\left. \begin{aligned} -16p^2 \theta_0 + (3 + 16p^2) Q_0 + R &= 0, \\ (-26p^2 - 384p^4) \theta_0 + (1 + 170p^2 + 384p^4) Q_0 + (1 + 6p^2) R &= 0, \\ -(1 + 4p^2) \theta_0 + 4(1 + p^2) Q_0 &= 0. \end{aligned} \right\} (5.29)$$

Исключив R из уравнений (5.29), приходим к уравнению частот системы

$$\begin{vmatrix} -5p^2 - 144p^4 & -1 + 68p^2 + 144p^4 \\ -1 - 4p^2 & 4 + 4p^2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$180p^4 - 44p^2 + 1 = 0, \quad (5.30)$$

¹⁾ См. примечание на стр. 209.

²⁾ Первые два уравнения выражают равенство нулю изгибающего момента и поперечной силы на левом свободном конце вала; третье — равенство нулю прогиба на промежуточной опоре.

Таблица 12

1	-1	3	1	0	0	0	0	0	0
0	1	-6	-3	1	$\theta_0 +$	0	Q_0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	-1	$\theta_0 +$	1	Q_0	0	0
0	1	0	0	1	0	-3	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
$8p^2$	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	-1	3	1	-1	$\theta_0 +$	1	Q_0	0	0
0	1	-6	-3	1	0	-3	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	$-8p^2$	0	$1 + 8p^2$	0	0	0
1	-1	3	1	$-2 - 8p^2$	$\theta_0 +$	$8 + 8p^2$	$Q_0 +$	0	0
0	1	-6	-3	$1 + 24p^2$	0	$-12 - 24p^2$	0	0	R
0	0	1	1	$-8p^2$	0	$2 + 8p^2$	0	0	0
0	0	0	1	$-8p^2$	0	$1 + 8p^2$	0	0	0
1	0	0	0	$-3 - 64p^2$	$\theta_0 +$	$27 + 64p^2$	$Q_0 +$	1	0
0	1	0	0	$1 + 96p^2$	0	$-27 - 96p^2$	0	-3	R
0	0	1	0	$-16p^2$	0	$3 + 16p^2$	0	1	0
$6p^2$	0	0	1	$-8p^2$	0	$1 + 8p^2$	0	1	0
*	*	*	*	*	$\theta_0 +$	*	$Q_0 +$	*	R
				$-16p^2$	0	$3 + 16p^2$	0	1	0
				$-26p^2 - 384p^4$	0	$1 + 170p^2 + 384p^4$	0	$1 + 6p^2$	0

откуда

$$p_1^2 = 0,025, \quad p_2^2 = 0,219.$$

Из формулы (5.28) находим значения ω^2 и ω :

$$\omega_1^2 = 15268,80, \quad \omega_2^2 = 133754,70,$$

$$\omega_1 \approx 124, \quad \omega_2 \approx 365.$$

Изложенный прием легко обобщается на случай вала с любым числом промежуточных жестких опор.

5. Крутильные колебания коленчатых валов. Крутильные колебания коленчатых валов поршневых машин возникают вследствие периодических изменений усилий, передаваемых на вал кривошипными механизмами от давления газов в цилиндрах. Так как вал — упругая система, то вызываемые этими изменениями периодические колебания угловой скорости вращения наступают в различных его частях не одновременно. Отдельные участки вала получают периодические относительные угловые смещения. Эти периодические угловые смещения участков вала и представляют собой крутильные колебания¹⁾.

¹⁾ Если бы вал был абсолютно жестким, то от изменений вращающего момента появились бы только незначительные колебания угловой скорости вращения вала в целом, так называемая периодическая неравномерность хода, для выравнивания которой служит маховое колесо.

В работающей машине установившиеся крутильные колебания вала являются вынужденными. В условиях резонанса при совпадении частоты какой-либо из гармонических составляющих возмущающего момента с одной из собственных частот свободных колебаний относительные угловые смещения участков вала могут выйти за пределы допускаемых, что может повести к поломке вала. Числа оборотов вала, при которых наступают указанные явления, называются *критическими*. Критические состояния коленчатого вала при резонансных крутильных колебаниях представляют, таким образом, явление, принципиально отличное от критических состояний прямого вала ротативных машин (по крайней мере, в stodоловской трактовке этих состояний).

Задачей расчета вала на крутильные колебания является определение критических скоростей, вычисление резонансных амплитуд и максимальных динамических напряжений, возникающих на валу двигателя. Эти расчеты обычно ведутся на упрощенной схеме действительного вала, которая строится с помощью специальных правил «приведения вала». Все связанные с валом и движущиеся с ним массы заменяются «эквивалентными маховыми массами», т. е. сосредоточенными в определенных местах дисками постоянных моментов инерции. Такая операция называется приведением масс. Делая такое приведение, мы пренебрегаем периодическими изменениями моментов инерции масс кривошипно-шатунных механизмов, в результате чего уравнения крутильных колебаний вала становятся линейными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Далее, при составлении дифференциальных уравнений крутильных колебаний собственной массой отрезков вала между дисками обычно пренебрегают. В результате получается система сосредоточенных масс, связанных между собою упругими, но безинерционными отрезками круглого вала. Такая система имеет конечное число степеней свободы.

При таких решительных упрощениях нельзя рассчитывать на получение точных значений искомых величин для заданной системы. Приходится ограничиваться нахождением более или менее тесных границ для основных критических скоростей, на которые эти упрощения оказывают сравнительно малое влияние.

6. Приведение постоянных масс¹⁾. Приведение масс или замена масс, движущихся с валом, массами сосредоточенных в определенных местах дисков производится по следующему общему принципу: кинетическая энергия эквивалентных дисков должна равняться средней (за один оборот) кинетической энергии движущихся масс.

¹⁾ Мы предполагаем, что читатель знаком в общих чертах с устройством поршневого двигателя и в дальнейшем пользуемся наименованиями отдельных частей его без особых пояснений.

Когда движущиеся с валом массы совершают вращательное движение, их «приведение» заключается просто в вычислении моментов инерции относительно оси вала. Такие массы называются постоянными: их приведенные моменты инерции при вращении вала не изменяются. Сюда относятся прежде всего собственная масса вала; затем — колена, маховик, ротор генератора, гребной винт, пропеллер и т. п. При этом собственная масса вала учитывается только для длинных участков валопровода, если таковые в установке имеются.

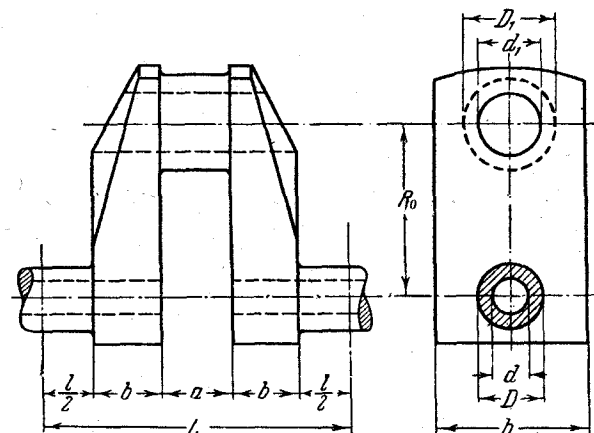


Рис. 53.

Приведение масс колена заключается в вычислении моментов инерции относительно оси вала:

1) J_k — прилегающих к колену частей коренных шеек (эти части берутся равными половине длины l коренной шейки между соседними коленами);

2) J_m — мотылевой шейки;

3) $2J_{ш}$ — двух шеек колена.

Первые два момента вычисляются по формулам (см. обозначения на рис. 53)

$$J_k = \frac{\gamma l}{g} \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4),$$

$$J_m = \frac{\gamma a}{g} \frac{\pi}{32} (D_1^4 - d_1^4) \left[\frac{D_1^2 + d_1^2}{8} + R^2 \right].$$

Момент инерции шейки, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, вычисляется по формуле

$$J_{ш} = \frac{\gamma}{g} \left[bhl \left(\frac{h^2 + l^2}{12} + \frac{R^2}{4} \right) - \frac{\pi b}{4} \left(\frac{d^4 + d_1^4}{8} + R^2 d_1^2 \right) \right].$$

Если щека не имеет правильной геометрической формы и нет возможности воспользоваться для ее момента инерции готовой формулой из справочника, то прибегают к одному из приближенных аналитических или графических способов. Щеку разбивают на части цилиндрическими поверхностями, описанными вокруг оси вала (рис. 54) на достаточно малых расстояниях ΔR одна от другой и

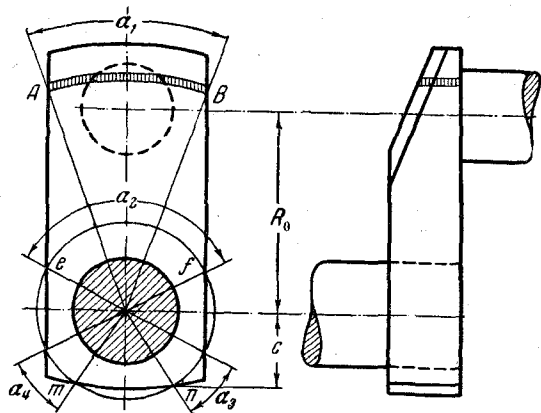


Рис. 54.

по возможности так, чтобы высота H каждой из этих поверхностей была постоянной. Если γ — вес единицы объема материала щеки, то момент инерции одной такой части относительно оси вала равен

$$\Delta J = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi \alpha^\circ}{180} H R^3 \Delta R.$$

Момент инерции всей щеки

$$J_{ш} = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi}{180} \sum \alpha^\circ H R^3 \Delta R.$$

Угол $\alpha = 360^\circ$ для цилиндрических частей, радиус которых $R < c$; во всех других случаях $\alpha < 360^\circ$. Так, для части AB цилиндрической поверхности $\alpha = \alpha_1$. Если же цилиндрическая поверхность разрезает щеку на более чем две части, как, например, $efmn$ на рис. 54, то

$$\alpha = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4.$$

Если имеются противовесы, то их рассматривают как части соответствующих щек.

7. Приведение масс кривошипно-шатунного механизма. Кривошипно-шатунный механизм представляет собой систему с перемен-

ным моментом инерции. В приближенных расчетах пользуются обычно постоянным средним значением этого момента за один оборот вала¹⁾. Достаточно близкую к среднему значению величину приведенного момента можно получить следующим образом. Масса шатуна «разносится» на мотылевую шейку (в количестве от $\frac{3}{8}$ до $\frac{2}{3}$ всей массы) и на крэйцкопф (остальная часть). Момент инерции первой, вращающейся части вычисляют в предположении, что ее масса сосредоточена на оси мотылевой шейки на расстоянии от оси вала, равном радиусу колена. Момент масс, совершающих вместе со второй частью шатуна возвратно-поступательное движение (крэйцкопф, поршень), принимается равным моменту инерции полусуммы этих масс в предположении, что все они сосредоточены также на оси мотылевой шейки.

Пусть момент инерции колена будет J_0 , масса шатуна M , суммарная масса частей, совершающих возвратно-поступательное движение, M_1 . Тогда момент инерции всего кривошипно-шатунного механизма

$$J = J_0 + \left\{ aM + \frac{1}{2} [(1-a)M + M_1] \right\} R^2,$$

где a — правильная дробь, определяющая часть массы шатуна, отнесенную на мотылевую шейку. Иногда применяется уточненная формула:

$$J = J_0 + \left\{ aM + \frac{1}{2} [(1-a)M + M_1] \left(1 + \frac{R^2}{2L^2} \right) \right\} R^2,$$

где R/L — отношение длины кривошипа (расстояние между осью вала и осью мотылевой шейки) к длине L шатуна (между центрами цапф). Необходимо отметить, что хотя изменения момента инерции кривошипного механизма в общем невелики, однако в некоторых машинах наличие таких изменений весьма заметно сказывается на критических скоростях. Вместо отдельных (дискретных) значений критической скорости появляются сплошные зоны значений последней, т. е. целые области, в пределах которых может колебаться критическая скорость работающей машины. Определение этих критических зон представляет сложную задачу, решение которой связано с интегрированием системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами²⁾.

8. Вычисление податливостей участков вала. Приведенными массами (дисками) вал разделяется на ряд безынерционных участков, упругие свойства которых в крутильных колебаниях характеризуются так называемой *упругой податливостью* или *упругой жесткостью*

¹⁾ Этот момент называется дальше моментом «цилиндрической массы».

²⁾ Кочин Н. Г., О крутильных колебаниях коленчатых валов, Прикладная математика и механика, т. II, вып. 1, 1934.

на кручение. Податливостью участка вала длиной l называется угол e , на который закручивается этот участок от приложенного к нему единичного крутящего момента. Если обозначить через α угол кручения участка от момента M , а через G и J соответственно модуль сдвига (кг/см^2) и полярный момент инерции поперечного сечения вала (см^4), то

$$e = \frac{\alpha}{M} = \frac{l}{GJ} \left(\frac{1}{\text{кгсм}^2} \right). \quad (5.31)$$

Величина, обратная податливости, представляет собой жесткость на кручение

$$c = \frac{1}{e} = \frac{GJ}{l} \quad (\text{кгсм}).$$

Закручивание участка на некоторый угол α осуществляется обычно приложенными к крайним сечениям участка парами равных, но противоположных по знаку моментов M и $-M$, абсолютное значение которых и есть крутящий на участке момент M .

Приведенной длиной l_0 участка вала длины l называется длина отрезка круглого вала с постоянным моментом инерции J_0 , податливость которого равна податливости данного участка. Согласно формуле (5.31)

$$l_0 = l \frac{J_0}{J}.$$

Вычисление податливостей, которое иначе называют *приведением длин вала*, производится по готовым, большей частью эмпирическим, формулам. Подробнейшую сводку этих формул с многочисленными графиками и номограммами можно найти в справочном пособии по расчету крутильных колебаний В. П. Терских¹⁾. Достаточно подробные сведения о приведении коленчатых валов можно найти также в книге И. А. Лурье²⁾. Здесь мы ограничимся небольшим числом формул, наиболее часто встречающихся в расчетах податливостей участков вала.

а) Податливость цилиндрического круглого участка длиной l с осевым сверлением вычисляется по формуле

$$e = \frac{32}{\pi G} \frac{1}{D^4 - d^4},$$

где D — диаметр вала, d — диаметр осевого сверления.

¹⁾ Терских В. П., Расчеты крутильных колебаний силовых установок, Машиз, 1953; Терских В. П., Метод цепных дробей, Судпромгиз, 1955.

²⁾ Лурье И. А., Крутильные колебания в дизельных установках, Военмориздат, 1940.

б) Податливость конического участка длиной L с диаметрами крайних сечений $D_1 < D_2$

$$e = \frac{kL}{GJ_2},$$

где J_2 — момент инерции крайнего сечения диаметра D_2 , а

$$k = \frac{1}{3} \frac{D_2}{D_1} \left[\left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 + \frac{D_2}{D_1} + 1 \right].$$

в) Податливость галтели (рис. 55, а) вычисляется по формуле

$$e = \frac{32}{\pi G} \left[\frac{l_1 + \lambda}{D_1^4} + \frac{l_2 - \lambda}{D_2^4} \right],$$

где буквы l_1 , l_2 , λ , D_1 , D_2 имеют указанное на рисунке значение. Увеличение податливости галтели здесь выражено удлинением λ участка с меньшим диаметром за счет участка с большим диаметром. Величина λ зависит от отношения D_1/D_2 . Если, например, радиус галтели $r \leq 0,1 D_1$, то λ/D убывает от 0,1 до 0,04, когда D_1/D_2 растет от 0,5 до 0,9. Формула податливости галтели применяется и для фланцевых соединений (рис. 55, б). В этом случае диаметр D_2 берется равным диаметру болтового кольца.

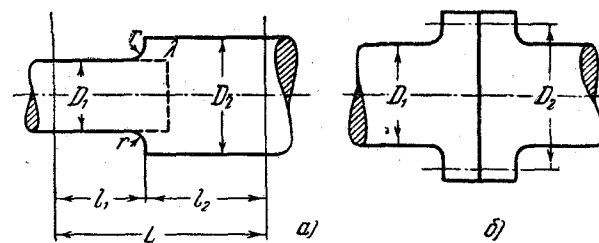


Рис. 55.

г) Для приведения колен (рис. 53) чаще всего пользуются формулой Картера

$$e = \frac{32}{\pi G} \left[\frac{l + 0,8b}{D^4 - d^4} + 0,75 \frac{a}{D_1^4 - d_1^4} + 1,15 \frac{R}{bh^3} \right]$$

и формулой С. Зиманенко¹⁾

$$e = \frac{32}{\pi G} \left[\frac{l + 0,6 \frac{D}{l}}{D^4 - d^4} + \frac{0,8a + 0,2h \frac{D}{l}}{D_1^4 - d_1^4} + \frac{R \sqrt{R}}{bh^3 \sqrt{D}} \right].$$

9. Приведенная схема. Приведение масс и вычисление податливостей участков вала завершаются построением *приведенной*

¹⁾ Формула Картера применяется при расчете валов авиационных двигателей, формула Зиманенко — для двигателей стационарных.

схемы заданной системы. Для этого выбирается некоторая жесткость GJ_0 (например, жесткость коренной шейки вала) и на нее умножаются податливости участков вала. В результате получается круглый вал сплошь одного и того же диаметра D_0 («диаметр приведения»), разделенный сосредоточенными маховыми массами на безынерционные участки длины

$$l_i = e_i GJ_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Таким образом, мы получаем приведенную схему вала, заменяющую действительный вал при расчете на колебания (рис. 56). Именно такая схема была положена в основу вычисления кинетической и потенциальной энергии крутильных колебаний вала и вывода уравнений колебаний в прямой и обратной форме, приведенных в гл. II. В гл. IV изложены методы расчета собственных частот приведенной схемы. Это были методы приближенного решения системы однородных

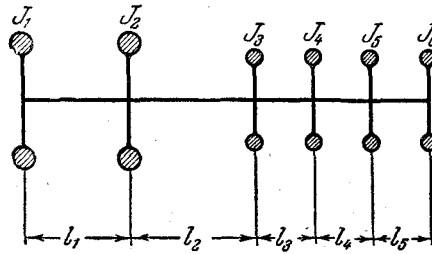


Рис. 56.

линейных уравнений специального типа. Существуют, однако, методы расчета собственных частот крутильных колебаний, не требующие ни вычисления кинетической и потенциальной энергии системы, ни предварительного составления уравнений. Эти методы являются самыми распространенными в расчетной практике. Из них мы рассмотрим только метод последовательных проб, известный под названием «метода Толле», вместе с матричным оформлением этого метода.

В основе метода Толле лежат рекуррентные формулы для амплитудных угловых отклонений маховых масс приведенного вала

$$\left. \begin{aligned} \theta_2 &= \theta_1 - e_1 p^2 J_1 \theta_1, \\ \theta_3 &= \theta_2 - e_2 p^2 (J_1 \theta_1 + J_2 \theta_2), \\ &\dots \dots \dots \\ \theta_n &= \theta_{n-1} - e_{n-1} p^2 (J_1 \theta_1 + \dots + J_{n-1} \theta_{n-1}). \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

Способ приближенного расчета собственных частот заключается в последовательном вычислении числовых значений левой части векового уравнения системы

$$J_1 \theta_1 p^2 + J_2 \theta_2 p^2 + \dots + J_n \theta_n p^2 = 0$$

для пробных значений квадрата частоты p^2 . Эти вычисления выполняются по приведенной ниже схеме, которая носит название «таблицы Толле».

Задавшись некоторым значением квадрата частоты p^2 , например $p^2 = \gamma_1$, и положив $\theta_1 = 1$, вычисляем по формулам (5.32) последовательно значения углов $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$. Эти значения подставляем в левую часть последнего уравнения. При произвольно выбранном значении p^2 это уравнение не будет выполнено: левая часть его будет иметь некоторое отличное от нуля числовое значение, которое мы обозначим через

$$\Delta(\gamma_1)$$

и будем называть *остаточным моментом*. Давая p^2 другие значения $\gamma_2, \gamma_3, \dots$ и т. д., получим ряд остаточных моментов

$$\Delta(\gamma_2), \Delta(\gamma_3), \dots$$

Пары соответствующих значений Δ, γ отмечаем точками в координатной системе Δ, γ . По этим точкам строим кривую остаточных моментов (рис. 57). Абсциссы точек пересечения этой кривой с осью

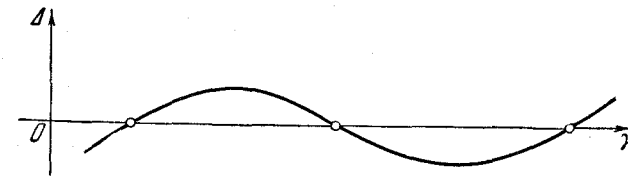


Рис. 57.

γ дадут приближенные значения искомых частот. Вычисление остаточных моментов можно расположить в удобные расчетные схемы. Одна из таких схем приведена ниже (табл. 13). В основной своей части она состоит из 6 столбцов. Два крайних содержат нумерацию участков (столбец 1) и маховых масс (столбец 6), причем строки участков чередуются со строками масс. Столбцы 3 и 4 содержат соответственно податливости e_i (или жесткости c_i) и произведения моментов инерции J_i на квадрат выбранного значения частоты p^2 . Эти столбцы заполняются с самого начала, причем податливости помещаются в строках участков, а произведения $J_i p^2$ — в строках маховых масс. В столбцах 5 и 2 располагаются вычисленные по формулам (5.32) амплитуды маховых масс и крутящие моменты на участках вала. Заполнение этих столбцов производится в следующем порядке. Записав амплитуду первой массы $\theta_1 = 1$ в первую клетку 5-го столбца, умножаем ее на $-J_1 p^2$ и результат пишем в первой клетке 2-го столбца. Это — крутящий момент на первом участке; его без изменений переписываем в том же столбце в строку первого участка (1—2). Далее умножаем этот момент на податливость e_1 и произведение подписываем (в той же строке 1—2) под первой амплитудой. Сумма первой амплитуды и только что полученного

Таблица 13

(M)	1	2	3	4	5	6	(θ)	
		M	e	$-Jp^2$	θ			
		$-J_1 p^2 \theta_1$	$\leftarrow -J_1 p^2$	$\theta_1 = 1$	1			
	1—2	$-J_1 \theta_1 p^2$	$e_1 \rightarrow$					
			$\leftarrow J_2 p^2$			2		
	2—3		$e_2 \rightarrow$					
			$\leftarrow J_3 p^2$			3		
	3—4		$e_3 \rightarrow$					
			$\leftarrow J_4 p^2$			4		
	4—5		$e_4 \rightarrow$					
			$\leftarrow J_5 p^2$			5		
		$R(\gamma) =$						

произведения $-J_1 p^2 e_1$, согласно первой формуле (5.32) даст амплитуду 2-й массы. С этой амплитудой поступаем так же, как и с первой; только, получив произведение $-J_2 p^2 \theta_2$, мы его не просто переписываем в строку второго участка (2—3), а прибавляем к предыдущему (в том же столбце 2) моменту M_1 и в строке второго участка (2—3) ставим полученную сумму. Дальнейшие вычисления ведутся в аналогичном порядке. При этом в 5-м столбце, в строках масс, получаются амплитуды, а в строках участков — произведения

$$-e_i \sum J_i p^2 \theta_i,$$

которые согласно уравнениям (5.32) нужно прибавить к предыдущей амплитуде, чтобы получить следующую. Остаточный момент получится в дополнительной строке, которую можно было бы считать относящейся к 5-му, не существующему в рассматриваемой системе участку. Для контроля вычисление остаточного момента следует провести еще один раз с тем же значением p^2 , но в обратном порядке, т. е., начиная с амплитуды последней (пятой) массы, приняв эту амплитуду за единицу. Результаты такого контрольного расчета — амплитуды масс и моменты на участках — размещаются в дополни-

тельных столбцах (θ) и (M) справа и слева основной таблицы, заполняемых снизу вверх аналогично столбцам 5 и 2. Остаточный момент в этом обратном расчете должен совпадать с остаточным моментом в прямом.

Из табл. 13, составленной только для одного пробного значения квадрата частоты, можно сделать ряд важных выводов:

1) Подсчитав число перемен знака величин, *стоящих в строках участков* (во втором столбце), мы определим место пробного значения среди частот заданной системы. Следует при этом иметь в виду, что число перемен знака указанных величин здесь ¹⁾ совпадает с порядком соответствующей собственной формы или частоты, так что, например, первая форма имеет одну переменную знака, вторая — две и т. д. Это, однако, не противоречит теореме о переменных знака амплитуд собственных форм, изложенной в гл. III. Дело в том, что частота, называемая здесь первой, является, строго говоря, второй. Первая частота равна нулю, и соответствующее ей главное колебание представляет общее вращение вала.

2) Заполнив несколько таблиц для разных значений p^2 , можно разделить корни векового уравнения и затем с помощью простого интерполирования найти все частоты системы с достаточно хорошим приближением.

3) Выполнив действия, показанные в таблице с неопределенным значением p^2 , приходим к развернутому вековому уравнению рассматриваемой системы (см. пример 5). Этот способ развертывания векового уравнения крутильных колебаний является, по-видимому, одним из простейших, особенно если надлежащим образом подобрать масштабы для податливостей и произведений $J_i p^2$.

4) Используя некоторые промежуточные результаты расчета таблицы Толле, мы можем получить гармонические коэффициенты влияния частоты, равной взятому пробному значению p , и вместе с тем вычислить собственную частоту, ближайшую к этому значению ²⁾.

5) Простой перестройкой таблицы Толле без изменения порядка и содержания последовательных вычислений мы можем представить ее в матричной форме. В своем первоначальном виде схема таблицы Толле отличается от матричного расчета только иным расположением отдельных операций (см. табл. 15).

10. Матричная форма таблиц Толле (метод начальных параметров). Начальными параметрами здесь будут угол поворота θ_1 и момент M_1 (внешний или инерционный) на одном из концов вала. Матрица жесткости или податливости и матрица массы (моментов инерции) будут матрицами второго порядка. Чтобы построить эти

¹⁾ В координатах θ .

²⁾ Б а б а к о в И. М., К расчету высших частот крутильных колебаний приведенного вала, Прикладная математика и механика, 1941, т. V, вып. 1.

матрицы, рассмотрим систему, состоящую из двух дисков с моментами инерции J_1 и J_2 , соединенных валом с податливостью e_1 (рис. 58). Концы вала — свободны. Матрица-столбец начальных параметров на правом конце ¹⁾ (до перехода через диск J_1) будет

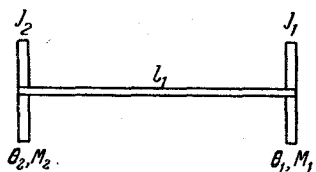


Рис. 58.

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Диск J_1 , совершающий крутильные колебания с частотой p , создает инерционный момент на правом конце, равный $-J_1 p^2 \theta_1$. С учетом этого момента матрица параметров на правом конце будет

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ -J_1 p^2 \theta_1 \end{Bmatrix}$$

Эту матрицу можно записать в виде произведения

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -J_1 p^2 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Таким образом, переход через массу с моментом J_1 осуществляется матрицей

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -J_1 p^2 & 1 \end{Bmatrix} \quad (5.33)$$

Эту матрицу по аналогии с матрицей (5.23) можно назвать матрицей массы.

Из первого уравнения (5.32) находим

$$\theta_2 = \theta_1 - J_1 p^2 e_1 \theta_1.$$

В сечении перед диском J_2 угол поворота и момент, если не учитывать собственной массы вала, будут элементами матрицы-столбца

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 - J_1 p^2 e_1 \theta_1 \\ -J_1 p^2 \theta_1 \end{Bmatrix}, \quad (5.34)$$

которая получается из матрицы (5.33), если умножить ее слева на матрицу

$$\begin{Bmatrix} 1 & e_1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}. \quad (5.35)$$

¹⁾ Счет моментов инерции и податливостей отрезков вала ведется справа налево.

Эту последнюю матрицу мы назовем матрицей податливости. Для перехода через диск J_2 нужно матрицу (5.34) умножить слева на матрицу массы

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -J_2 p^2 & 1 \end{Bmatrix}. \quad (5.36)$$

Таким образом, переход от начальных параметров на свободном правом конце, несущем массу с моментом J_1 , к значениям этих параметров на свободном левом конце с массой J_2 можно представить следующей матричной схемой:

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -J_2 p^2 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & e_1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -J_1 p^2 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.37)$$

Положив $M_2 = 0$, получим уравнение частот

$$J_2 p^2 (1 - J_1 p^2 e_1) + J_1 p^2 = 0,$$

из которого находим два значения p^2 :

$$p_1^2 = 0, \quad p_2^2 = \frac{J_1 + J_2}{e_1 J_1 J_2}.$$

Первое соответствует общему вращению вала с дисками; второе дает собственную частоту крутильных колебаний.

Если левый конец вала жестко закреплен, то $\theta_2 = 0$ и уравнение частот будет

$$1 - J_1 p^2 e_1 = 0,$$

откуда

$$p^2 = \frac{c_1}{J_1}.$$

Распространение схемы (5.37) на многомассовые приведенные валы не требует дополнительных замечаний.

Пример 4. Крутильные колебания приведенного вала с пятью дисками. Даны моменты инерции и погонные жесткости участков вала:

$J_1 = 10,78$	кГМ сек ²	$c_1 = 10,48 \cdot 10^4$	кГМ
$J_2 = 82,82$	»	$c_2 = 34,80 \cdot 10^4$	»
$J_3 = 14,27$	»	$c_3 = 24,40 \cdot 10^4$	»
$J_4 = 29,56$	»	$c_4 = 40,60 \cdot 10^4$	»
$J_5 = 21,66$	»		

Для упрощения вычислений выбираем за единицу податливости податливость первого участка

$$e_1 = \frac{10^{-4}}{10,48} \left(\frac{1}{\text{кГМ}} \right).$$

С помощью этой единицы, положив для дальнейшего упрощения

$$p^2 = \alpha \cdot 10^4,$$

получим вместо $J_i p^2$ безразмерные произведения

$$J_i \alpha 10^4 e_1 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Пересчитав данные примера на новые единицы, будем иметь:

$$\begin{aligned} J_1 p^2 &= 1,03 \alpha, & e_1 &= 1, \\ J_2 p^2 &= 7,90 \alpha, & e_2 &= 0,30, \\ J_3 p^2 &= 1,36 \alpha, & e_3 &= 0,43, \\ J_4 p^2 &= 2,82 \alpha, & e_4 &= 0,26, \\ J_5 p^2 &= 2,07 \alpha, & & \end{aligned}$$

Расчет с неопределенным значением p^2 проводим, как показано в табл. 14, располагая матрицы множители и результаты отдельных умножений так же, как и в табл. 13.

Таблица 14

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1,03\alpha & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ -1,03\alpha \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -7,90\alpha & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1,03\alpha \\ & -1,03\alpha \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} 1 & 0,30 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1,03\alpha \\ & -8,93\alpha + 8,14\alpha^2 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1,36\alpha & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3,71\alpha + 2,44\alpha^2 \\ & -8,93\alpha + 8,14\alpha^2 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} 1 & 0,43 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3,71\alpha + 2,44\alpha^2 \\ & -10,29\alpha + 13,19\alpha^2 - 3,32\alpha^3 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2,82\alpha & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -8,13\alpha + 8,11\alpha^2 - 1,43\alpha^3 \\ & -10,29\alpha + 13,19\alpha^2 - 3,32\alpha^3 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} 1 & 0,26 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -8,13\alpha + 8,11\alpha^2 - 1,43\alpha^3 \\ & -13,11\alpha + 36,12\alpha^2 - 26,19\alpha^3 + 4,03\alpha^4 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2,07\alpha & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -11,54\alpha + 17,50\alpha^2 - 8,24\alpha^3 + 1,05\alpha^4 \\ & -13,11\alpha + 36,12\alpha^2 - 26,19\alpha^3 + 4,03\alpha^4 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} -15,18\alpha + 60,01\alpha^2 - 62,42\alpha^3 + 21,09\alpha^4 - 2,17\alpha^5 \end{vmatrix}$

Приравняв нулю, в соответствии с условиями на левом конце, второй элемент последней матрицы-столбца, получим вековое уравнение системы

$$\alpha(\alpha^4 - 9,74\alpha^3 + 28,91\alpha^2 - 27,83\alpha + 7,04) = 0.$$

Корни этого уравнения, вычисленные по методу Лобачевского — Грегфе (до

Таблица 13

	3	4	5	6
1	← -1,03α	1		
1-2	1	↑	1,03α	
2-3	← -7,90α	1	1,03α	
	0,30	↑	2,68α + 2,44α ²	
3-4	← -1,36α	1	3,71α + 2,44α ²	
	0,43	↑	4,42α + 5,67α ² - 1,43α ³	
	← -2,82α	1	8,13α + 8,11α ² - 1,43α ³	
4-5	0,26	↑	3,41α + 9,39α ² - 6,81α ³ + 1,05α ⁴	
	← -2,07α	1	11,54α + 17,50α ² - 8,24α ³ + 1,05α ⁴	
5-6				
				α = 0; α ⁴ - 9,70α ³ + 28,71α ² - 27,60α + 6,98 = 0.

четвертых степеней α), дают для p_i следующие значения:

$$p_1 = 62,6, \quad p_2 = 105,4, \quad p_3 = 175,8; \quad p_4 = 229,1,$$

и один нулевой корень, соответствующий общему вращению вала.

Пример 5. Чтобы продемонстрировать тождественность схемы Толле с матричной схемой (табл. 14), составлено для той же системы вековое уравнение по методу Толле (табл. 15), исходя из тех же безразмерных величин, что и в предыдущем примере.

11. Гармонические составляющие вращающего момента. В заключение приведем краткие замечания о возмущающих гармонических моментах, действующих на цилиндрические массы приведенного вала. Крутильные колебания вала в установившемся режиме работы машины, как было уже отмечено раньше, являются колебаниями вынужденными. Они возбуждаются гармоническими составляющими вращающихся моментов (от давления газов в цилиндре), приложенных к цилиндрическим массам, и инерционных моментов масс кривошипных механизмов.

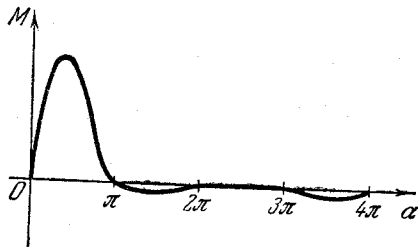


Рис. 59.

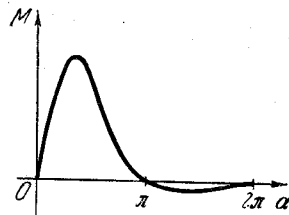


Рис. 60.

Вращающий момент от давления газов в цилиндре представляет сложную периодическую функцию угла α поворота вала, которая определяется графически по заданной индикаторной диаграмме. Для одного цилиндра четырехтактного двигателя эта функция имеет вид кривой, изображенной на рис. 59, а для двухтактного — на рис. 60, где представлен ход изменения вращающего момента на протяжении одного периода (4π — для четырехтактного процесса, 2π — для двухтактного). Отдельные участки кривой (рис. 59) на отрезках в π радианов каждый представляют изменения вращающего момента для четырех ходов поршня: $(0, \pi)$ — рабочий ход (ход расширения), $(\pi, 2\pi)$ — выхлоп, $(2\pi, 3\pi)$ — ход всасывания, $(3\pi, 4\pi)$ — ход сжатия.

На кривой рис. 60 первый промежуток $(0, \pi)$ соответствует рабочему ходу, второй $(\pi, 2\pi)$ — сжатию. В расчетах обычно принимают, что вращающий момент на ходах выхлопа и всасывания равен нулю.

Вычисление гармонических составляющих вращающего момента производится путем разложения последнего в ряд Фурье с помощью одного из способов так называемого «практического гармонического

анализа»¹⁾. Обозначив период вращающего момента через T , будем иметь в результате такого анализа:

$$M(\alpha) = A_0 + a_1 \sin \frac{2\pi}{T} \alpha + a_2 \sin \frac{4\pi}{T} \alpha + \dots + b_1 \cos \frac{2\pi}{T} \alpha + b_2 \cos \frac{4\pi}{T} \alpha + \dots, \quad (5.38)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T M(\alpha) d\alpha \quad (5.39)$$

есть среднее значение вращающего момента за один период:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T M(\alpha) \sin \frac{2k\pi\alpha}{T} d\alpha; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T M(\alpha) \cos \frac{2k\pi\alpha}{T} d\alpha.$$

Объединяя члены с синусами и косинусами одинаковых аргументов, можно представить разложение (5.38) для одного цилиндра двухтактного двигателя ($T = 2\pi$) в таком виде:

$$M(\alpha) = A_0 + A_1 \sin(\alpha + \delta_1) + A_2 \sin(2\alpha + \delta_2) + \dots \quad (5.40)$$

или в предположении, что угловая скорость вращения вала $\omega = \frac{2\pi}{T}$ постоянна:

$$M(\omega t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \delta_1) + A_2 \sin(2\omega t + \delta_2) + \dots \quad (5.41)$$

Отдельные слагаемые этого разложения

$$A_k \sin(k\alpha + \delta_k)$$

и являются гармоническими составляющими вращающего момента M , которые называются также гармоническими моментами или гармониками момента M . При этом

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \operatorname{tg} \delta_k = \frac{b_k}{a_k}. \quad (5.42)$$

В двухтактном двигателе порядок гармоники, обозначаемый индексом k , совпадает с числом полных ее изменений за один оборот вала, так как время одного оборота вала совпадает с периодом вращающего момента. В четырехтактном двигателе время одного оборота вала составляет половину периода $T = 4\pi$. Разложение вращающего момента в этом случае будет иметь вид

$$M(\alpha) = A'_0 + A'_1 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \delta'_1\right) + A'_2 \sin(\alpha + \delta'_2) + \dots$$

¹⁾ См., например, Лурье И. А., Крутильные колебания в дизельных установках, 1940.

Число полных изменений гармонических составляющих за один оборот вала здесь может быть и целым и дробным. Тем не менее и для четырехтактного двигателя порядок гармоник принято считать, как и в случае двухтактного, равным числу полных изменений гармоник *за один оборот вала*. В разложении вращающего момента четырехтактного двигателя будут вследствие этого встречаться гармоник и целых и дробных порядков. Сохраняя соответствие между нумерацией коэффициентов A_k и порядком гармоник, пишут разложение вращающего момента (5.40) для одного цилиндра четырехтактного двигателя следующим образом:

$$M(\alpha) = A_0 + A_{1/2} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \delta_1\right) + A_1 \sin(\alpha + \delta_2) + \dots \quad (5.43)$$

Ряды (5.41) и (5.43), представляющие разложения вращающих моментов, заданных графически, бесконечны. Но обычно коэффициенты A_k гармоник высоких порядков невелики и можно поэтому, оставаясь в пределах допускаемых в практических расчетах погрешностей, ограничиться некоторым конечным числом первых гармоник, например шестью, двенадцатью или двадцатью четырьмя, отбросив все остальные, как не имеющие существенного влияния на амплитуды вынужденных колебаний¹⁾.

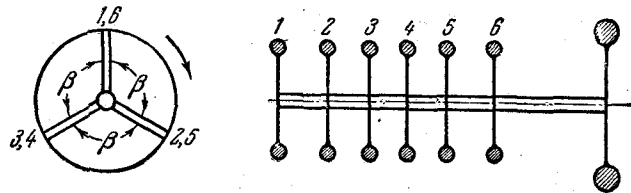


Рис. 61.

Можно считать, что в пределах периода моменты, приложенные к различным цилиндрическим массам, изменяются одинаково и именно так, как изменяется момент, действующий на крайнюю слева цилиндрическую массу (с которой обычно начинается нумерация цилиндрических масс — рис. 61). Так как колена расположены на валу под некоторыми неизменными углами друг к другу и так как моменты зажигания газовой смеси, соответствующие началу рабочих ходов, чередуются в различных цилиндрах в определенном порядке, то вращающие моменты, приложенные к различным цилиндрическим массам, смещены по фазе. Фазовые смещения вращающих моментов определяются распо-

¹⁾ Вопрос о том, сколько гармоник следует оставить в разложении вращающего момента, решается в каждом конкретном случае особо, в зависимости от того, какие гармоники попадают в резонанс и насколько могут быть опасны возникающие при этом резонансные колебания.

ложением колен и принятым порядком зажигания. Условимся отсчитывать эти смещения от момента вспышки (зажигания) в первом цилиндре. Тогда фазовое смещение вращающего момента на i -м колесе (на i -й цилиндрической массе) будет равно углу, на какой повернется вал от момента вспышки в первом цилиндре до момента вспышки в i -м цилиндре. Подсчет фазовых смещений при известном расположении колен и заданном порядке чередования вспышек не представляет затруднений. Рассмотрим, например, шестицилиндровый четырехтактный двигатель, схема расположения колен которого показана слева на рис. 61 (в проекции на плоскость, перпендикулярную к оси вала). Внешней стрелкой указано направление вращения вала; угол $\beta = 120^\circ$. Чередование зажигания здесь возможно в четырех вариантах¹⁾:

- | | |
|----|--------------|
| 1) | 1—3—5—6—4—2; |
| 2) | 1—3—2—6—4—5; |
| 3) | 1—4—5—6—3—2; |
| 4) | 1—4—2—6—3—5. |

Фазовые смещения для каждого из четырех вариантов приведены в табл. 16.

Таблица 16

№ цилиндра Вариант	№ цилиндра					
	1	2	3	4	5	6
1	0	600°	120°	480°	240°	360°
2	0	240	120	480	600	360
3	0	600	480	120	240	360
4	0	240	480	120	600	360

Аналогичным образом определяются фазовые смещения и в двухтактном двигателе.

Из разложений (5.41) или (5.43) и только что сделанных замечаний о фазовых смещениях вращающих моментов можно вывести правило фазовых смещений гармоник одного и того же порядка, приложенных к различным цилиндрическим массам:

Фазовое смещение гармоники k -го порядка момента, приложенного к i -й цилиндрической массе, равно углу, на который повернется вал от момента вспышки в первом цилиндре до момента вспышки в i -м цилиндре, умноженному на k .

¹⁾ Цифры на рис. 61 и в таблице вариантов зажигания обозначают номера цилиндров (или цилиндрических масс).

Чтобы учесть изменения вращающего момента от инерционных моментов движущихся масс кривошипного механизма, эти моменты также представляют в виде разложений по гармоническим составляющим, ограничиваясь в разложениях, самое большее, первыми четырьмя членами. Достаточно хорошее приближение представляет следующая формула¹⁾ для момента G инерционных сил масс m , совершающих возвратно-поступательное движение (сюда относятся масса поршня, крейцкопфа, поршневого штока и части шатуна, присоединяемой по известному правилу к крейцкопфу):

$$G = mR^2\omega^2 (0,25\lambda \sin \alpha - 0,5 \sin 2\alpha - 0,75\lambda \sin 3\alpha - 0,25\lambda^2 \sin 4\alpha), \quad (5.44)$$

где R — радиус кривошипа, $\lambda = \frac{R}{l}$ — отношение длины кривошипа к длине шатуна, ω — угловая скорость. В формулу (5.44) входят четыре синусных члена, так что поправка на силы инерции коснется только первых четырех коэффициентов a_i в разложении (5.38).

Сведения о других поправках, например от дополнительного инерционного момента шатуна, крутящего момента веса кривошипного механизма и т. д., можно найти в специальной литературе²⁾.

¹⁾ Ден-Гартог, Теория колебаний, стр. 219, Гостехиздат, 1942.

²⁾ Лурье И. А., цит. на стр. 229.

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

ГЛАВА VI

ПРОДОЛЬНЫЕ И КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

1. Уравнения продольных и крутильных колебаний прямого стержня. Обозначим через $\mu(x)$ погонную массу стержня ($\kappa\Gamma \text{сек}^2/\text{м}^2$); $\bar{J}(x)$ — погонный момент инерции относительно оси¹⁾ стержня ($\kappa\Gamma \text{сек}^2$); через $A(x)$ — площадь поперечного сечения (м^2); J_p — экваториальный момент поперечного сечения (м^4); E — модуль Юнга ($\kappa\Gamma/\text{м}^2$); G — модуль сдвига ($\kappa\Gamma/\text{м}^2$). Пусть $y(x, t)$ и $\theta(x, t)$ — соответственно продольное смещение и угол поворота какого-либо сечения стержня в момент t . Обозначим далее через $Q(x, t)$ интенсивность внешней нагрузки — продольной, направленной по оси стержня, в случае продольных колебаний и моментной — в случае колебаний крутильных.

Уравнения продольных и крутильных колебаний стержня мы получим как необходимые условия экстремума функционалов:

$$S_1 = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[\mu(x) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - EA \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - Qy \right] dx dt \quad (6.1)$$

для продольных колебаний и

$$S_2 = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[\bar{J}(x) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - GJ_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 - Q\theta \right] dx dt \quad (6.2)$$

для крутильных.

Интегралы по x , взятые в пределах от 0 до l (l — длина стержня) от первого и двух последних слагаемых в квадратных скобках, представляют соответственно кинетическую и потенциальную энергию рассматриваемой системы.

¹⁾ Под осью стержня здесь подразумевается линия, соединяющая центры тяжести поперечных сечений стержня, — линия прямая в недеформированном состоянии стержня. Здесь предполагается, что она совпадает с так называемой упругой осью стержня. См. стр. 254.

Согласно (1.49) необходимое условие экстремума функционала S_1 будет иметь вид

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial y}{\partial x} \right] = Q(x, t); \quad (6.3)$$

необходимое условие экстремума функционала S_2

$$J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[GJ_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] = Q(x, t). \quad (6.4)$$

Условия (6.3) и (6.4) и будут уравнениями продольных и крутильных колебаний соответственно.

Когда $Q(x, t) \equiv 0$ и жесткости EA и GJ_p постоянны по всей длине стержня, то уравнения свободных колебаний (продольных и крутильных) *однородного стержня* имеют вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0, \quad (6.6)$$

где $c^2 = \frac{EA}{\mu}$; $\gamma^2 = \frac{GJ_p}{J}$. Уравнения (6.5) и (6.6) — линейные уравне-

ния в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами. Для продольных и крутильных колебаний однородного стержня они имеют одинаковую форму. Можно поэтому в общей теории ограничиться рассмотрением одного из них, например, второго, т. е. уравнения крутильных колебаний. При этом рассмотрении мы будем опираться на общий принцип линейной теории колебаний — принцип суперпозиции малых колебаний, который был положен в основу изучения колебаний систем с конечным числом степеней свободы. Мы будем предполагать, что малые колебания системы с бесконечным числом степеней свободы также представляют собой линейное наложение главных гармонических колебаний.

Руководствуясь этим принципом, мы будем искать главные гармонические крутильные колебания стержня в таком виде:

$$y(x, t) = \theta(x) \sin(pt + \alpha), \quad (6.7)$$

где $\theta(x)$ — функция, определяющая непрерывную совокупность амплитудных угловых отклонений сечений стержня от их равновесных положений. В дискретных системах с конечным числом степеней свободы эта функция вырождается в конечную совокупность амплитудных смещений сосредоточенных масс.

Подставив (6.7) в (6.6), получим уравнение собственных форм

$$GJ_p \theta''(x) + p^2 J \theta(x) = 0 \quad (6.8)$$

или

$$\theta''(x) + a^2 \theta(x) = 0,$$

где $a^2 = \frac{p^2 J}{GJ_p}$.

Уравнение собственных форм продольных колебаний будет иметь аналогичную форму

$$\varphi''(x) + a^2 \varphi(x) = 0, \quad (6.9)$$

где $a^2 = \frac{p^2 \mu}{EA}$.

Величины $p^2 J \theta(x)$ и $p^2 \mu \varphi(x)$ называются иногда *собственными нагрузками* стержня. Применяв к этим нагрузкам обобщенный принцип взаимности Рэлея¹⁾, выражающийся здесь в равенстве работы нагрузки $p_i^2 J \theta_i(x)$ на перемещении $\theta_k(x)$ работе нагрузки $p_k^2 J \theta_k(x)$ на перемещении $\theta_i(x)$, получим условие ортогональности собственных форм крутильных колебаний. В самом деле, из равенства этих работ

$$p_i^2 \int_0^l J \theta_i(x) \theta_k(x) dx = p_k^2 \int_0^l J \theta_k(x) \theta_i(x) dx,$$

если $p_i^2 \neq p_k^2$, получим

$$\int_0^l J \theta_i(x) \theta_k(x) dx = 0. \quad (6.10)$$

Для продольных колебаний условие ортогональности напишется аналогичным образом:

$$\int_0^l \mu \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = 0. \quad (6.11)$$

Задача о собственных формах и частотах колебаний приводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Общий интеграл уравнения (6.8) (для крутильных колебаний) будет иметь вид

$$\theta_i(x) = B \cos a_i x + D \sin a_i x, \quad (6.12)$$

или

$$\theta_i(x) = \theta_0 \cos a_i x + \frac{\theta'_0}{a_i} \sin a_i x, \quad (6.12)$$

где θ_0 и θ'_0 — значения угла поворота и производной от него по x для $x=0$. Постоянные B и D или θ_0 и θ'_0 , а также собственные значения a_i определяются из краевых условий задачи, т. е. из условий закрепления концов стержня. В простейших случаях концы стержня (один или оба) свободны или жестко закреплены. Эти способы закрепления выражаются следующими соотношениями:

¹⁾ Рэлея Д. В., Теория звука, т. 1, § 109, Гостехиздат, 1955.

²⁾ Штрих везде обозначает производную по x , производные по времени t обозначаются точками.

1) для крутильных колебаний на свободном конце

$$GJ_p \theta'(x) = 0; \quad (6.13)$$

на закрепленном

$$\theta(x) = 0; \quad (6.14)$$

2) в случае продольных колебаний на свободном конце

$$EA \varphi'(x) = 0, \quad (6.15)$$

на закрепленном

$$\varphi(x) = 0. \quad (6.16)$$

Другие свойства собственных форм аналогичны свойствам форм систем с конечным числом степеней свободы. Так, остается в силе теорема об узлах собственных форм: число узлов собственной формы n -го порядка равно $n-1$; при этом узлы двух последовательных форм перемежаются¹⁾. Остается также в силе и теорема о разложении любой формы по собственным формам однородной задачи.

Общее решение уравнения (6.8) мы получим как бесконечную линейную сумму главных колебаний

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k \theta_k(x) \sin(p_k t + \alpha_k) \quad (6.17)$$

или

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k(x) (M_k \cos p_k t + N_k \sin p_k t). \quad (6.18)$$

Постоянные H_k , α_k , M_k , N_k определяются из начальных условий, которые в случае крутильных колебаний выражаются заданием в начальный момент ($t=0$) распределения по стержню угловых отклонений

$$y(x, 0) = f(x)$$

и их производных по t

$$\dot{y}(x, 0) = \eta(x),$$

где $f(x)$ и $\eta(x)$ — некоторые заданные функции переменной x .

Самое вычисление постоянных производится следующим образом. Прежде всего находим из (6.18)²⁾

$$M_k \cos p_k t + N_k \sin p_k t = \int_0^l y(s, t) \theta_k(s) ds. \quad (6.19)$$

¹⁾ См. цитированную на стр. 113 книгу Гантмахера Ф. Р. и Крейна М. Г.

²⁾ Имея в виду однородный стержень.

Положив здесь $t=0$, получим

$$M_k = \int_0^l \theta_k(s) f(s) ds. \quad (6.20)$$

Найв производную от (6.19) по t , найдем

$$N_k = \frac{1}{p_k} \int_0^l \theta_k(s) \eta(s) ds. \quad (6.21)$$

Как видно из последних формул, постоянные M_k и N_k являются коэффициентами разложения заданных функций $f(x)$ и $\eta(x)$ по собственным формам $\theta_k(x)$.

Частоты главных колебаний стержня образуют бесконечный дискретный ряд значений. Перенумерованные в порядке возрастания они вместе с порядковым номером растут до бесконечности.

Пример 1. Рассмотрим продольные колебания однородного стержня с одним жестко закрепленным ($x=0$) и другим ($x=l$) свободным концами.

В этом случае краевые условия выражаются равенствами

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(l) = 0.$$

Из этих условий находим значения постоянных B и D общего решения

$$\varphi(x) = B \cos ax + D \sin ax.$$

Имеем:

$$B = 0, \quad D \cos al = 0.$$

Постоянная D не может, очевидно, равняться нулю, так как в противном случае $\varphi(x) \equiv 0$. Нетривиальное решение получится при условии

$$\cos al = 0. \quad (6.22)$$

Из этого условия находим

$$a_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l}; \quad p_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{EA}{\mu}} \quad (k=1, 2, 3, \dots). \quad (6.23)$$

Таким образом, уравнение (6.22) отбирает собственные значения параметра a и вместе с тем определяет собственные частоты системы. Оно называется *характеристическим уравнением* или *уравнением частот* и соответствует вековому уравнению систем с конечным числом степеней свободы.

Для собственных форм получаются выражения

$$\varphi_k(x) = D_k \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l} \quad (k=1, 2, 3, \dots). \quad (6.24)$$

Общее решение можно написать сразу по формуле (6.18):

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (M_k \cos p_k t + N_k \sin p_k t) \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l}. \quad (6.25)$$

Постоянные M_k и N_k определяются из начальных условий. Чтобы найти M_k , полагаем $t=0$, затем умножаем обе части (6.25) на $\sin a_k x$ и интегрируем

по x в пределах от 0 до l . Вследствие ортогональности форм $\sin a_k x$

$$\int_0^l y(x, 0) \sin a_k x dx = M_k \int_0^l \sin^2 a_k x dx = M_k \frac{l}{2}$$

и

$$M_k = \frac{2}{l} \int_0^l y(x, 0) \sin a_k x dx.$$

Так же найдется N_k по заданному значению производной $\dot{y}(x, 0)$:

$$N_k = \frac{2}{lp_k} \int_0^l \dot{y}(x, 0) \sin a_k x dx.$$

Пусть, например, в начальный момент ($t=0$) стержень растянут приложенной в конце его продольной¹⁾ силой S и затем без начальной скорости предоставлен самому себе. В этом случае

$$y(x, 0) = \frac{Sx}{EA}, \quad \dot{y}(x, 0) = 0,$$

$$M_k = \frac{2S}{IEA} \int_0^l x \sin a_k x dx = \frac{2S}{IEA} \frac{\sin a_k l}{a_k^2}, \quad N_k = 0.$$

В выражении для M_k

$$\sin a_k l = \pm 1;$$

именно $+1$ для k нечетного и -1 для четного. Общее решение (6.25) напомним поэтому следующим образом:

$$y(x, t) = \frac{2S}{IEA} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cos p_k t \sin a_k x}{a_k^2}. \quad (6.26)$$

Для проверки подставим в (6.26) $t=0$. Мы должны получить справа Sx/EA . Но при $t=0$

$$y(x, 0) = \frac{2S}{IEA} \left[\frac{\sin a_1 x}{a_1^2} - \frac{\sin a_2 x}{a_2^2} + \frac{\sin a_3 x}{a_3^2} - \dots \right] = \\ = \frac{2S}{IEA} \frac{4l^2}{\pi^2} \left[\sin \frac{\pi x}{2l} - \frac{\sin \frac{3\pi x}{2l}}{3^2} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{2l}}{5^2} - \dots \right].$$

Ряд в квадратных скобках является рядом Фурье для функции

$$\frac{\pi}{4} \frac{\pi x}{2l} = \frac{\pi^2 x}{8l}.$$

Следовательно,

$$y(x, 0) = \frac{Sx}{EA}.$$

¹⁾ В исследованиях продольных колебаний, излагаемых в этой главе, всегда предполагается, что действующие на стержень силы направлены по оси стержня.

Пример 2. Колебания стержня с грузом на конце¹⁾ (рис. 62, а). Обозначим массу груза, прикрепленного к нижнему свободному концу стержня, через M ; отношение массы стержня к массе груза — через α , так что

$$\alpha = \frac{lp}{M};$$

через l — длину стержня в равновесном положении, около которого происходят колебания системы и в котором вес груза уравновешен статической упругой силой (поэтому вес груза в уравнение колебаний около положения равновесия не войдет); через ε — расстояние нижнего конца стержня до центра тяжести груза. Считая груз точечным, можно пренебречь его размерами и положить $\varepsilon \approx 0$.

Для других величин сохраняем прежние обозначения. Относя действие груза к краевому условию на нижнем конце, будем считать, что продольное натяжение стержня при колебаниях уравновешено здесь силой инерции груза. Это приводит к следующему условию на нижнем конце стержня:

$$EA \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=l} = -M \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x=l}. \quad (6.27)$$

На верхнем закрепленном конце

$$y(0, t) = 0. \quad (6.28)$$

В начальный момент стержень растянут приложенной к нижнему концу продольной силой S и затем без начальной скорости предоставлен самому себе, так что

$$y(x, 0) = \frac{Sx}{EA}, \quad \dot{y}(x, 0) = 0. \quad (6.29)$$

Решение задачи сводится к вычислению постоянных B и D и значений параметра a в уравнении форм колебаний

$$\varphi(x) = B \cos ax + D \sin ax$$

в соответствии с краевыми условиями (6.27) и (6.28), которые для собственных форм $\varphi(x)$ выражаются соотношениями

$$\varphi(0) = 0, \quad EA\varphi'(l) = Mp^2\varphi(l) \quad (6.30)$$

и, кроме того, постоянных общего решения (6.18) в соответствии с начальными условиями (6.29).

¹⁾ Рассматриваемый пример представляет одну из существенных частей расчета на колебания поршня индикатора паровой машины. См. Крылов А. Н., Вибрация судов, Собрание трудов, т. X, стр. 278, 1948.

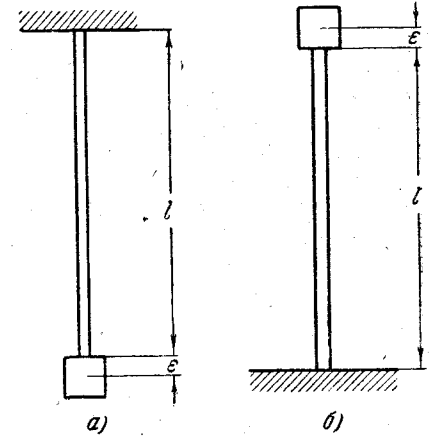


Рис. 62.

После этого из второго условия получается уравнение частот

$$\beta \operatorname{tg} \beta = \alpha, \quad (6.31)$$

где

$$\beta = \alpha l, \quad \alpha = \frac{l\mu}{M}.$$

Таким образом, уравнение собственных форм колебаний стержня имеет вид

$$\varphi_k(x) = D_k \sin \frac{\beta_k x}{l} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (6.32)$$

где β_k — корни уравнения (6.31). Уравнение (6.31) часто встречается в задачах на продольные колебания прямых стержней. Решается оно проще всего графическим путем; такое решение можно найти в книге А. Н. Крылова¹⁾. Приводим наименьшие корни этого уравнения для некоторых значений отношения массы стержня к массе груза:

$$\alpha = 0,01, 0,10, 0,30, 0,50, 0,70, 1, 1,50, 2, \infty, \\ \beta_1 = 0,10, 0,32, 0,52, 0,65, 0,75, 0,86, 0,98, 1,08, \frac{\pi}{2}.$$

Соответствующие этим значениям β_1 наименьшие частоты вычисляются по формуле

$$p_1 = \frac{\beta_1}{l} \sqrt{\frac{EA}{\mu}}. \quad (6.33)$$

Переходим к составлению решения

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [M_k \cos p_k t + N_k \sin p_k t] \sin \frac{\beta_k x}{l},$$

т. е. к подбору постоянных M_k и N_k согласно условиям (6.29). Из второго условия находим

$$N_k = 0.$$

Из первого

$$\frac{Sx}{EA} = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \sin \frac{\beta_k x}{l}. \quad (6.34)$$

Для вычисления коэффициентов M_k воспользуемся условием ортогональности собственных форм. В рассматриваемой задаче условие ортогональности (6.11) нужно написать следующим образом:

$$\int_0^l [\mu + M\sigma_1(x-l)] \sin \frac{\beta_k x}{l} \sin \frac{\beta_i x}{l} dx = 0,$$

где $\sigma_1(x-l)$ — импульсивная функция первого порядка. Из этого условия находим

$$\int_0^l \sin \frac{\beta_k x}{l} \sin \frac{\beta_i x}{l} dx = -\frac{l}{\alpha} \sin \beta_k \sin \beta_i. \quad (6.35)$$

¹⁾ Крылов А. Н., Вибрация судов, Собрание трудов, т. X, 1948, стр. 284.

Умножим теперь обе части (6.34) на $\sin \frac{\beta_i x}{l} dx$ и проинтегрируем от 0 до l :

$$\int_0^l \frac{Sx}{EA} \sin \frac{\beta_i x}{l} dx = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \int_0^l \sin \frac{\beta_k x}{l} \sin \frac{\beta_i x}{l} dx.$$

Интегрируя по частям левую часть полученного уравнения, найдем

$$\int_0^l \frac{Sx}{EA} \sin \frac{\beta_i x}{l} dx = \frac{Sl^2}{EA} \left(-\frac{\cos \beta_i}{\beta_i} + \frac{\sin \beta_i}{\beta_i^2} \right).$$

Интегралы в правой части, в которых $i \neq k$, по (6.35) равны

$$\int_0^l \sin \frac{\beta_k x}{l} \sin \frac{\beta_i x}{l} dx = -\frac{l}{\alpha} \sin \beta_k \sin \beta_i;$$

интеграл, в котором $i = k$, равен

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\beta_i x}{l} dx = \frac{l}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\beta_i}{2\beta_i} \right).$$

Следовательно¹⁾,

$$\frac{Sl^2}{EA} \left(-\frac{\cos \beta_i}{\beta_i} + \frac{\sin \beta_i}{\beta_i^2} \right) = M_i \frac{l}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\beta_i}{2\beta_i} \right) - \frac{l}{\alpha} \sin \beta_i \sum_{k=1}^{\infty} M_k \sin \beta_k.$$

Из уравнения (6.34), положив в нем $x = l$, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k \sin \beta_k = \frac{Sl}{EA} - M_i \sin \beta_i.$$

Отсюда, принимая во внимание (6.31), находим

$$M_i = \frac{4Sl \sin \beta_i}{EA\beta_i(2\beta_i + \sin 2\beta_i)}.$$

Искомое решение

$$y(x, t) = \frac{4Sl}{AE} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_i \sin \frac{\beta_i x}{l} \cos p_i t}{\beta_i(2\beta_i + \sin 2\beta_i)}.$$

Когда груз велик сравнительно со стержнем и массой последнего можно пренебречь, то, полагая для наименьшей частоты $\operatorname{tg} \beta_1 \approx \beta_1$, найдем из уравнения (6.31)

$$\beta_1^2 = \alpha.$$

¹⁾ Штрих у знака суммы здесь означает, что сумма распространяется на все значения k от 1 до ∞ , кроме $k = i$. Соответствующее этому индексу слагаемое написано отдельно.

В этом случае основная частота

$$p_1 = \frac{\beta_1}{l} \sqrt{\frac{EA}{\mu}} = \sqrt{\frac{EA}{Ml}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}},$$

где $\delta_{ст} = \frac{Mgl}{EA}$ — статическое удлинение стержня от груза Mg , подвешенного к нижнему концу стержня. Мы приходим таким образом к известной элементарной формуле для частоты колебаний груза на пружине, массой которой можно пренебречь.

Если, наоборот, масса груза исчезающе мала сравнительно с массой стержня, то, положив в уравнении (6.31) $\alpha = \infty$, найдем $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$. В этом случае для наименьшей частоты получим значение

$$p_1 = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{EA}{\mu}},$$

совпадающее со значением основной частоты свободных колебаний стержня (пример 1).

2. Свободные колебания стержня с линейным сопротивлением.

Уравнение свободных колебаний стержня с сопротивлением $H \frac{\partial y}{\partial t}$, пропорциональным скорости смещения его элементов, мы запишем в таком виде:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2h \frac{\partial y}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (6.36)$$

обозначив

$$\frac{H}{\mu} = 2h, \quad \frac{EA}{\mu} = c^2.$$

Решение уравнения будем искать в виде разложения искомой функции $y(x, t)$ по собственным формам $\varphi_k(x)$ главных колебаний однородного стержня без сопротивления, т. е. по формам, удовлетворяющим уравнению

$$\varphi_k''(x) + a_k^2 \varphi_k(x) = 0, \quad (6.37)$$

где

$$a_k^2 = \frac{p_k^2 \mu}{EA}.$$

Положив

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \varphi_k(x), \quad (6.38)$$

получим, подставив это выражение в (6.36):

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\ddot{T}_k(t) \varphi_k(x) + 2h \dot{T}_k(t) \varphi_k(x) - c^2 T_k(t) \varphi_k''(x)] = 0.$$

Последнее равенство, приняв во внимание (6.37), можно представить в такой форме:

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\ddot{T}_k(t) + 2h \dot{T}_k(t) + p_k^2 T_k(t)] \varphi_k(x) = 0,$$

откуда

$$\ddot{T}_k(t) + 2h \dot{T}_k(t) + p_k^2 T_k(t) = 0.$$

При $h < p_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)

$$T_k(t) = e^{-ht} (M_k \cos q_k t + N_k \sin q_k t),$$

где

$$q_k = \sqrt{p_k^2 - h^2}.$$

Теперь решение (6.38) будет иметь вид

$$y(x, t) = e^{-ht} \sum_{k=1}^{\infty} [M_k \cos q_k t + N_k \sin q_k t] \varphi_k(x). \quad (6.39)$$

Постоянные M_k и N_k найдутся из начальных условий. Так, если в начальный момент

$$y(x, 0) = \frac{Sx}{EA}, \quad \dot{y}(x, 0) = 0,$$

то

$$M_k = \frac{S}{EA} \frac{\int_0^l x \varphi_k(x) dx}{\int_0^l \varphi_k^2(x) dx}, \quad N_k = \frac{Sh}{EA q_k} \frac{\int_0^l x \varphi_k(x) dx}{\int_0^l \varphi_k^2(x) dx}. \quad (6.40)$$

Для стержня, жестко закрепленного на конце $x=0$ и свободного на конце $x=l$

$$\varphi_k(x) = \sin a_k x, \quad a_k l = \frac{2k-1}{2} \pi \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

В этом случае

$$M_k = \frac{2S \sin a_k l}{lEA a_k^2} = (-1)^{k-1} \frac{2S}{lEA a_k^2}, \quad N_k = \frac{h}{q_k} M_k.$$

От уравнения (6.25) свободных колебаний без сопротивления решение (6.39) отличается множителем e^{-ht} . Колебания стержня затухают, и он асимптотически приближается к равновесному положению.

3. Уравнения форм колебаний с правой частью. Такими уравнениями определяются прежде всего формы вынужденных колебаний стержня от гармонической возмущающей силы. Пусть, например, на

стержень действует продольная гармоническая сила $Q \sin \omega t$, приложенная в точке $x = x_1$. Уравнение колебаний стержня в этом случае можно написать следующим образом:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = Q \sin \omega t \sigma_1(x - x_1),$$

где $\sigma_1(x - x_1)$ — импульсивная функция первого порядка. Чисто вынужденные колебания в отсутствие сопротивлений будут происходить по закону

$$y(x, t) = \varphi(x) \sin \omega t,$$

где $\varphi(x)$ — форма вынужденных колебаний. Подставив это выражение для $y(x, t)$ в предыдущее уравнение, приходим к уравнению для формы колебаний

$$\varphi''(x) + a^2 \varphi(x) = -\frac{Q}{EA} \sigma_1(x - x_1) \quad (6.41)$$

— дифференциальному уравнению с правой частью ($a^2 = \frac{\mu \omega^2}{EA}$).

Правую часть будет иметь и уравнение собственных форм свободных колебаний стержня, несущего сосредоточенные массы. Силы инерции этих масс в каком-либо из главных колебаний стержня изменяются по гармоническому закону с частотами главных колебаний. Формально они ведут себя так же, как и сосредоточенные возмущающие силы. Так, сила инерции массы m , расположенной в точке $x = x_1$,

$$-m \frac{\partial^2 y(x_1, t)}{\partial t^2}$$

для главного колебания

$$y(x_1, t) = \varphi(x_1) \sin \omega t$$

имеет выражение

$$m \omega^2 \varphi(x_1) \sin \omega t,$$

и уравнение собственных форм $\varphi(x)$ будет уравнением с правой частью, аналогичным уравнению (6.41):

$$\varphi''(x) + a^2 \varphi(x) = -\frac{m \omega^2 \varphi(x_1)}{EA} \sigma_1(x - x_1). \quad (6.42)$$

Нужно только помнить, что в уравнении вынужденных колебаний частота возмущающей силы ω — наперед заданная, известная величина, в уравнении же (6.42) она является наряду с $\varphi(x)$ искомой величиной.

Обозначим правую часть уравнения (6.41) через $f(x)$ и будем искать его общий интеграл операционным методом. Положив

$$F(p) \rightarrow f(x); \quad X(p) \rightarrow \varphi(x),$$

получим

$$p^2 \left[X(p) - \varphi(0) - \frac{1}{p} \varphi'(0) \right] + a^2 X(p) = \frac{F(p)}{EA},$$

откуда

$$X(p) = \frac{F(p)}{EA(p^2 + a^2)} + \varphi(0) \frac{p^2}{p^2 + a^2} + \varphi'(0) \frac{p}{p^2 + a^2}$$

и

$$\varphi(x) = \varphi(0) \cos ax + \frac{\varphi'(0)}{a} \sin ax + \frac{1}{aEA} \int_0^x f(\xi) \sin a(x - \xi) d\xi. \quad (6.43)$$

В частности, когда $f(\xi) = Q \sigma_1(\xi - x_1)$, то

$$\varphi(x) = B \cos ax + D \sin ax + \frac{Q}{aEA} \sin a(x - x_1), \quad (6.44)$$

где $B = \varphi(0)$, $D = \frac{1}{a} \varphi'(0)$. Такой вид имеет форма колебаний для всех $x \geq x_1$. Для участка стержня до точки приложения силы или массы, т. е. для $x \leq x_1$, $\varphi(x) = B \cos ax + D \sin ax$. Таким образом, в рассматриваемом случае для формы колебания мы будем иметь два выражения:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \varphi(x) &= B \cos ax + D \sin ax && \text{при } x \leq x_1, \\ 2) \quad \varphi(x) &= B \cos ax + D \sin ax + \\ &+ \frac{Q}{aEA} \sin a(x - x_1) && \text{при } x \geq x_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.45)$$

Постоянные B и D найдутся из краевых условий задачи.

Предположим, что в точке $x = x_1$ к стержню приложена продольная единичная гармоническая возмущающая сила $1 \cdot \sin \omega t$ так, что функция $\varphi(x)$ — форма вынужденных колебаний системы. Пусть левый конец $x = 0$ стержня жестко закреплен, правый $x = l$ — свободен. Тогда $B = 0$; вторую постоянную D найдем из условия $\varphi'(l) = 0$:

$$D = -\frac{1}{aEA} \frac{\cos a(l - x_1)}{\cos al}.$$

Формулы (6.45) будут теперь иметь вид¹⁾

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \Gamma(x, x_1; \omega^2) &= -\frac{1}{aEA} \frac{\cos a(l - x_1)}{\cos al} \sin ax && \text{при } x \leq x_1, \\ 2) \quad \Gamma(x, x_1; \omega^2) &= -\frac{1}{aEA} \frac{\sin ax_1}{\cos al} \cos a(l - x) && \text{при } x \geq x_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.46)$$

¹⁾ $\Gamma(x, x_1; \omega^2)$ обозначает гармонический коэффициент влияния (продольное смещение) в сечении x от единичной продольной гармонической силы частоты ω , приложенной в сечении x_1 . Сокращенно $\Gamma(x_i, x_k; \omega^2) = \Gamma_{ik}$.

Если оба конца стержня свободны, то из условий (для крутильных колебаний)

$$\theta'(0) = \theta'(l) = 0$$

найдем

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(x, x_1; \omega^2) &= \frac{1}{aGJ_p} \frac{\cos a(l-x_1)}{\sin al} \cos ax \quad (x \leq x_1), \\ \Gamma(x, x_1; \omega^2) &= \frac{1}{aGJ_p} \frac{\cos ax_1}{\sin al} \cos a(l-x) \quad (x \geq x_1). \end{aligned} \right\} \quad (6.47)$$

Формулы (6.46) и (6.47) дают простой способ вычисления динамических напряжений в любом сечении стержня или вала при действии на него сосредоточенной возмущающей силы или момента. Впервые такие формулы были найдены А. Н. Крыловым¹⁾.

Пример 3. Сохраняя обозначения примера 2 и замечания, сделанные там по поводу расстояния ϵ , предположим, что на верхний конец вертикального стержня, к которому прикреплен покоящийся в начальный момент груз (рис. 62, б), действуют периодически повторяющиеся с периодом τ импульсы S . Требуется найти установившиеся вынужденные колебания груза. Задача приводится к нахождению частного решения уравнения

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{S}{\mu} [\sigma_1(t) + \sigma_1(t-\tau) + \dots] \sigma_1(x-l) \quad (6.48)$$

при краевых условиях

$$-M \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x=l} = EA \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=l}; \quad y(0, t) = 0 \quad (6.49)$$

и начальных условиях

$$y(x, 0) = \dot{y}(x, 0) = 0. \quad (6.50)$$

Это решение будем искать в виде разложения

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \varphi_k(x) \quad (6.51)$$

по собственным формам свободных колебаний стержня с грузом на конце (пример 2):

$$\varphi_k(x) = \sin \frac{\beta_k x}{l}, \quad (6.52)$$

где β_k — корни уравнения

$$\beta \operatorname{tg} \beta = \alpha.$$

Подставив (6.51) в уравнение (6.48) и обозначив

$$\sigma_1(t) + \sigma_1(t-\tau) + \dots = f(t),$$

получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\ddot{T}_k + p_k^2 T_k) \sin \frac{\beta_k x}{l} = \frac{S}{\mu} f(t) \sigma_1(x-l), \quad (6.53)$$

¹⁾ Крылов А. Н., Вибрация судов, Собрание трудов, т. 10, стр. 240, Изд. АН СССР, 1948.

где $p_k^2 = \frac{c^2 \beta_k^2}{l^2}$ — квадраты собственных частот главных колебаний системы.

Взяв производную от (6.53) по x , умножим обе части на $\cos \frac{\beta_i x}{l}$ и проинтегрируем в пределах от 0 до l . Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\ddot{T}_k + p_k^2 T_k) \frac{\beta_k}{l} \int_0^l \cos \frac{\beta_k x}{l} \cos \frac{\beta_i x}{l} dx = \frac{S}{\mu} f(t) \int_0^l \sigma_1'(x-l) \cos \frac{\beta_i x}{l} dx.$$

Интегрируя, получим¹⁾

$$\int_0^l \sigma_1'(x-l) \cos \frac{\beta_i x}{l} dx = \frac{\beta_i}{l} \sin \beta_i.$$

Что касается левой части, то здесь

$$\int_0^l \cos \frac{\beta_k x}{l} \cos \frac{\beta_i x}{l} dx = 0 \quad (i \neq k)$$

и

$$\int_0^l \cos^2 \frac{\beta_i x}{l} dx = \frac{l(2\beta_i + \sin 2\beta_i)}{4\beta_i}.$$

Следовательно,

$$\ddot{T}_k + p_k^2 T_k = \frac{S}{\mu l} \frac{4\beta_k \sin \beta_k}{2\beta_k + \sin 2\beta_k} f(t).$$

Последнее уравнение будем решать операционным методом. Положив

$$F_k(p) \leftrightarrow T_k(t),$$

найдем при нулевых начальных условиях

$$F_k(p) = \frac{4\beta_k \sin \beta_k}{\mu l (2\beta_k + \sin 2\beta_k)} \cdot \frac{Sp}{(1 - e^{-p\tau})(p^2 + p_k^2)}.$$

Начальная функция, соответствующая чисто вынужденным колебаниям с периодом возмущающих импульсов τ , для значений t в пределах первого периода, т. е. для $0 \leq t \leq \tau$, на основании формулы (2.46) будет иметь вид

$$T_k(t) = \frac{2S\beta_k \sin \beta_k}{\mu l p_k (2\beta_k + \sin 2\beta_k)} \left(\sin p_k t + \operatorname{ctg} \frac{p_k \tau}{2} \cos p_k t \right).$$

Из формулы (6.51) теперь находим:

$$y(l, t) = \frac{2S}{\mu c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_k}{2\beta_k + \sin 2\beta_k} \left(\sin p_k t + \operatorname{ctg} \frac{p_k \tau}{2} \cos p_k t \right),$$

что с помощью равенства

$$\beta_k \operatorname{tg} \beta_k = \alpha = \frac{\mu l}{M},$$

¹⁾ Гельфанд И. М. и Шиллов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1958, стр. 32.

после деления числителя и знаменателя дроби под знаком суммы на $\sin^2 \beta_k$ можно представить еще и в такой форме:

$$y(l, t) = \frac{Sl}{Mc} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin p_k t + \operatorname{ctg} \frac{p_k l}{2} \cos p_k t}{\beta_k (1 + \alpha + \beta_k \operatorname{ctg} \beta_k)}$$

Пример 4. Колебания стержня от внезапно приложенной постоянной силы. Колебания, возникающие в стержне от силы P , внезапно приложенной к свободному концу в начальный момент, можно формально отнести к категории вынужденных колебаний, так как расчет таких колебаний приводится к интегрированию уравнений с правой частью. В самом деле, уравнение колебаний в этом случае будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{P}{\mu} \sigma_1 (x-l) \sigma_0 (t).$$

Нужно найти частное решение этого уравнения при краевых условиях

$$y(0, t) = 0; \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=l} = 0$$

и начальных условиях $y(x, 0) = \dot{y}(x, 0) = 0$. Положив

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \varphi_k(x),$$

где, как и в примере 1,

$$\varphi_k(x) = B_k \sin a_k x, \quad a_k = \frac{2k-1}{2l} \pi,$$

получим для $T_k(t)$ ¹⁾

$$\ddot{T}_k(t) + p_k^2 T_k(t) = \frac{2P}{l\mu} \sin a_k l$$

и

$$T_k(t) = M_k \cos p_k t + N_k \sin p_k t + \frac{2P \sin a_k l}{l\mu p_k^2}.$$

При нулевых начальных условиях

$$M_k = -\frac{2P \sin a_k l}{l\mu p_k^2}, \quad N_k = 0.$$

Следовательно,

$$T_k(t) = \frac{2P \sin a_k l}{l\mu p_k^2} (1 - \cos p_k t).$$

Таким образом, искомое решение будет

$$y(x, t) = \frac{8Pl}{\pi^2 EA} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin a_k l \sin a_k x}{(2k-1)^2} (1 - \cos p_k t),$$

¹⁾ Дальше B_k принято равным единице.

т.е., положив $x=l$, найдем перемещение конца стержня

$$y(l, t) = \frac{8Pl}{\pi^2 EA} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos p_k t}{(2k-1)^2},$$

так как $\sin^2 a_k l = 1$. Максимальное отклонение конца будет иметь место, когда

$$\cos p_k t = -1.$$

При этом

$$y_{\max} = \frac{16Pl}{\pi^2 EA} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) = \frac{2Pl}{EA}.$$

Максимальное отклонение конца стержня от внезапно приложенной силы оказывается в два раза большим статического отклонения от той же силы, равного $\frac{Pl}{EA}$.

Пример 5. Формулы А. Н. Крылова (6.45), (6.46) и (6.47) могут быть использованы для составления уравнений колебаний сложных систем, составленных из простых частей, по гармоническим коэффициентам на соединяемых концах (сечениях) последних. В прилегающих концах (сечениях) двух

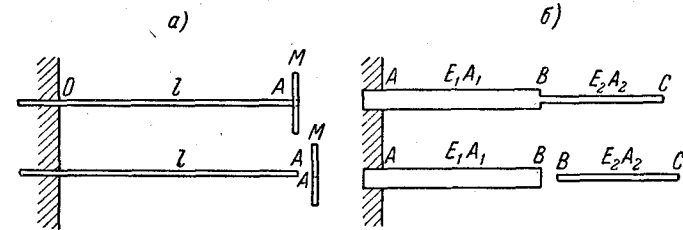


Рис. 63.

смежных частей (до их разделения) гармонические коэффициенты равны по величине, но противоположны по знаку, так как здесь смещения сечений прилегающих частей одинаковы, а действующие в этих сечениях усилия уравновешены, т. е. равны по величине и противоположны по знаку¹⁾.

Рассмотрим в качестве первого примера продольные колебания стержня, зажатого левым концом и несущего на другом конце сосредоточенную массу M . Длина стержня l , погонная масса μ , жесткость EA . Делим систему по сечению A , прилегающему к массе M , на две части — стержень OA со свободным концом A и массу M (рис. 63, а). Из второй формулы (6.46) находим гармонический коэффициент на конце A :

$$\Gamma(l, l, \omega^2) = -\frac{1}{aEA} \frac{\sin al}{\cos al} = -\frac{a}{\mu\omega^2} \operatorname{tg} al.$$

Для сосредоточенной массы M гармонический коэффициент, т. е., согласно определению, отношение смещения q этой массы к ее силе инерции $-Mq\omega^2$, будет равен $-1/M\omega^2$.

¹⁾ Дальнейшее развитие и матричное обобщение излагаемого приема см. в статье: Hübner E., Eigenschwingungszahlen zusammengesetzten Schwingungs-Systeme, Ing. Archiv, Bd. XXIX, 1960, H. 2.

Присоединяя массу M к концу стержня A , будем иметь в месте соединения

$$\frac{a}{\mu\omega^2} \operatorname{tg} al = \frac{1}{M\omega^2},$$

откуда $al \operatorname{tg} al = \frac{\mu l}{M}$ или, положив, как в примере 2, $\alpha = \frac{\mu l}{M}$, $\beta = al$,

$$\beta \operatorname{tg} \beta = \alpha.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (6.31), полученным другим путем.

Пример 6. Уравнение продольных колебаний консольного стержня, составленного из двух однородных отрезков с жесткостями $E_1 A_1$ (отрезок AB) и $E_2 A_2$ (отрезок BC) (рис. 63, б).

Гармонический коэффициент в B для левого отрезка

$$\Gamma(l, l, \omega^2) = -\frac{1}{a_1 E_1 A_1} \operatorname{tg} a_1 l_1.$$

Гармонический коэффициент в B для правого отрезка

$$\Gamma(0, 0, \omega^2) = -\frac{1}{a_2 E_2 A_2} \operatorname{ctg} a_2 l_2.$$

Из уравнения

$$\frac{1}{a_1 E_1 A_1} \operatorname{tg} a_1 l_1 = \frac{1}{a_2 E_2 A_2} \operatorname{ctg} a_2 l_2$$

находим уравнение частот колебаний рассматриваемого составного стержня

$$\operatorname{tg} a_1 l_1 \cdot \operatorname{tg} a_2 l_2 = \sqrt{\frac{\mu_1 E_1 A_1}{\mu_2 E_2 A_2}}.$$

Приведенные примеры легко решаются также изложенным в следующем разделе методом начальных параметров в матричной форме.

4. Метод начальных параметров в матричной форме. Расчет крутильных или продольных колебаний стержня с непрерывным или кусочно-непрерывным распределением массы и жесткости можно представить в матричной форме с помощью матриц сосредоточенных масс (см. формулу (5.33)) и «матриц перехода» для участков стержня. Начальными параметрами здесь будут: для крутильных колебаний угол поворота и крутящий момент на одном из концов стержня, для продольных — продольное смещение и натяжение на одном из концов стержня. Имея в виду крутильные колебания, обозначим через θ_1 угол поворота, через M_1 — момент на правом конце отрезка стержня длиной l . Для угла поворота и момента на левом конце отрезка будем иметь (из уравнения (6.9))¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \theta(l) &= \theta_1 \cos al + \frac{M_1}{aGJ_p} \sin al, \\ GJ_p \theta'(l) &= -GJ_p a \theta_1 \sin al + M_1 \cos al, \end{aligned} \right\} \quad (6.54)$$

¹⁾ Счет — справа налево.

или

$$\theta_2 = \theta_1 \cos al + \frac{M_1}{aGJ_p} \sin al,$$

$$M_2 = -GJ_p a \theta_1 \sin al + M_1 \cos al.$$

Полученные соотношения можно представить в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \theta_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos al & \frac{1}{aGJ_p} \sin al \\ -aGJ_p \sin al & \cos al \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ M_1 \end{pmatrix}. \quad (6.55)$$

Аналогичное матричное уравнение можно написать для продольных колебаний стержня:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos al & \frac{1}{aEA} \sin al \\ -aEA \sin al & \cos al \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ S_1 \end{pmatrix}, \quad (6.56)$$

где x_1 и x_2 — продольные смещения соответствующих сечений; S_1 и S_2 — продольные натяжения в этих сечениях.

Уравнения (6.55) и (6.56) могут быть использованы прежде всего для динамического расчета колеблющихся систем, т. е. для определения динамических деформаций и напряжений в сечениях стержня при продольных или крутильных колебаниях. Этими уравнениями можно также пользоваться для определения собственных частот колебаний однородных стержней при заданных краевых условиях. Так, например, для стержня с грузом на конце (пример 2) можно написать, взяв за начало верхний закрепленный конец:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{aEA} \sin al \\ \cos al \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos al & \frac{1}{aEA} \sin al \\ -aEA \sin al & \cos al \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Смещение нижнего конца

$$\varphi(l) = \frac{\sin al}{aEA};$$

натяжение на этом конце

$$Mp^2 \varphi(l) = \cos al.$$

Исключив из этих уравнений $\varphi(l)$ и введя, как раньше, обозначения $\alpha = \mu l / M$, $\beta = al$, получим прежнее уравнение частот (6.31)

$$\beta \operatorname{tg} \beta = \alpha.$$

Если груз на конце стержня отсутствует ($M=0$), то уравнение частот будет иметь вид (как в примере 1)

$$\cos al = 0.$$

С помощью уравнений (6.55) и (6.56) можно составлять уравнения частот и для более сложных систем. Так, для вала со свободными

концами, несущего три сосредоточенные маховые массы с моментами инерции J_1, J_2, J_3 (рис. 64), порядок вычислений при составлении уравнения частот или при расчете напряжений в каком-либо сечении вала можно, обозначив матрицу перехода через первый участок через A_1 , матрицу перехода для второго участка — через A_2 , представить следующей матричной схемой:

$$\begin{vmatrix} \theta_1 \\ M_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -J_3 p^2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_2 \\ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -J_2 p^2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 \\ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -J_1 p^2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (6.57)$$

Приравняв $M_1 = 0$, получим уравнение частот рассматриваемой системы¹⁾.

Во многих случаях непосредственное использование общих формул

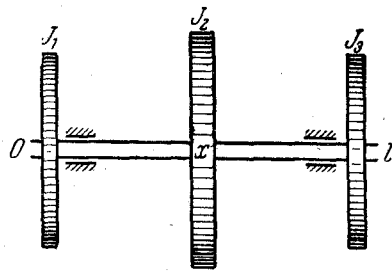


Рис. 64.

(6.45) для гармонических коэффициентов представляет более простой путь составления уравнений крутильных (продольных) колебаний стержней, несущих сосредоточенные массы. Для приведенного на рис. 64 вала, несущего в точках O, x, l сосредоточенные маховые массы с моментами инерции J_1, J_2, J_3 , отнеся инерционные моменты крайних масс $J_1 \omega^2 \varphi(0)$ и $J_3 \omega^2 \varphi(l)$ к граничным условиям, получим из формул (6.45) следующие уравнения:

из условий на левом свободном конце, несущем маховую массу J_1 :

$$B = \varphi(0), \quad D = \frac{J_1 \omega^2 \varphi(0)}{a G J_p};$$

из условий на правом свободном конце, несущем маховую массу J_3 :

$$\varphi(0) \cos al + \frac{J_1 \omega^2 \varphi(0)}{a G J_p} \sin al + \frac{J_2 \omega^2 \varphi(x)}{a G J_p} \sin a(l-x) - \varphi(l) = 0, \quad (6.58)$$

$$-\varphi(0) \sin al + \frac{J_1 \omega^2 \varphi(0)}{a G J_p} \cos al + \frac{J_2 \omega^2 \varphi(x)}{a G J_p} \cos a(l-x) - \frac{J_3 \omega^2 \varphi(l)}{a G J_0} = 0. \quad (6.59)$$

¹⁾ Матрицу сосредоточенной маховой массы (5.33) и матрицу жесткости (5.35) для безмассового участка вала можно получить из матрицы (6.55), полагая в ней или $l \rightarrow 0, \bar{J} \rightarrow J$ (для матрицы массы), или $\bar{J} \rightarrow 0$ (для матрицы жесткости). F u h r k e H., Bestimmung von Rahmenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls. Ing. Arch., Bd. XXIV, H. 1, 1956. См. также F a l k S., Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren. Ing. Arch., Bd. XXIV, H. 3, 1956.

Наконец, для углового смещения массы J_2 из первого уравнения (6.45) находим

$$\varphi(0) \cos ax + \frac{J_1 \omega^2 \varphi(0)}{a G J_p} \sin ax - \varphi(x) = 0. \quad (6.60)$$

Мы получаем, таким образом, три уравнения (6.58), (6.59) и (6.60) с тремя неизвестными $\varphi(0), \varphi(x), \varphi(l)$. Исключив последние из этих уравнений, приходим к уравнению частот системы

$$\begin{vmatrix} \cos ax + \frac{J_1 \omega^2 \sin ax}{a G J_p} & -1 & 0 \\ \cos al + \frac{J_1 \omega^2 \sin al}{a G J_p} & \frac{J_2 \omega^2 \sin a(l-x)}{a G J_p} & -1 \\ -\sin al + \frac{J_1 \omega^2 \cos al}{a G J_p} & \frac{J_2 \omega^2 \cos a(l-x)}{a G J_p} & -\frac{J_3 \omega^2}{a G J_p} \end{vmatrix} = 0.$$

Разворачивать определитель этого уравнения нет надобности, хотя такое разворачивание легко можно было бы выполнить по рекуррентным формулам В. Я. Натансона¹⁾. Проще вычислять значения этого определителя для ряда пробных значений частоты с последующим интерполированием.

¹⁾ Натансон В. Я., Формулы для вычисления определителя квадратной матрицы одного частного вида, ПММ, Т. XXI, вып. 4, 1957.

ГЛАВА VII

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

1. Основные допущения и уравнение поперечных колебаний прямого стержня. При выводе уравнения поперечных колебаний стержня (или балки) мы будем предполагать, что в недеформированном состоянии так называемая упругая ось¹⁾ стержня прямолинейна и совпадает с линией центров тяжести поперечных сечений стержня. Эту прямолинейную ось мы примем за координатную ось x и от нее будем отсчитывать отклонения элементов стержня при поперечных колебаниях. При этом мы будем считать, по крайней мере на первых порах, что отклонения отдельных точек оси стержня происходят перпендикулярно к прямолинейному, недеформированному ее направлению, пренебрегая смещениями этих точек, параллельными оси.

Далее, мы предполагаем, что отклонения точек оси стержня при поперечных колебаниях происходят в одной плоскости («плоскость колебаний») и являются «малыми» отклонениями в том смысле, что возникающие при этом восстанавливающие силы остаются в пределах пропорциональности.

При таких предположениях отклонения точек оси стержня при поперечных колебаниях однозначно определяются одной функцией двух переменных — координаты x и времени t :

$$y = y(x, t).$$

Эта функция удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных четвертого порядка, которое может быть построено следующим образом.

Обозначим через $\mu(x)$ массу единицы длины стержня ($\text{кг сек}^2/\text{см}^2$), через EJ — жесткость на прогиб [E ($\text{кг}/\text{см}^2$) — модуль упругости,

¹⁾ Упругая ось стержня — это геометрическое место точек («центров жесткости»), к которым должны быть приложены внешние силы, чтобы вызвать изгиб стержня без кручения. Если упругая ось не совпадает с линией центров тяжести, то, как известно, стержень, изгибаясь, будет закручиваться.

II

J (см^4) — момент инерции поперечного сечения стержня относительно центральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний], J_0 ($\text{кг}/\text{см сек}^2/\text{см}$) — момент инерции единицы длины стержня относительно центральной оси, перпендикулярной к плоскости колебаний. На стержень действует распределенная поперечная нагрузка, интенсивность которой мы обозначим через $f(x, t)$, а также продольная сила (растягивающая или сжимающая), направленная по оси стержня с интенсивностью $P(x, t)$. Эти нагрузки могут зависеть не только от положения элементов стержня, но и от времени.

Кинетическая энергия колеблющегося стержня складывается из кинетической энергии поперечных смещений элементов стержня

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \mu(x) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \quad (7.1)$$

и кинетической энергии вращений элементов стержня вокруг осей, перпендикулярных к плоскости колебаний,

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^l J_0(x) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \right)^2 dx. \quad (7.2)$$

Потенциальная энергия равна сумме трех слагаемых:

а) потенциальной энергии упругой деформации (работа восстанавливающих упругих сил)

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx; \quad (7.3)$$

б) потенциальной энергии прогиба от поперечной нагрузки $f(x, t)$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \int_0^l f(x, t) y dx; \quad (7.4)$$

в) и, наконец, потенциальной энергии растяжения¹⁾ от продольной силы $P(x, t)$

$$\Pi_3 = \frac{1}{2} \int_0^l P(x, t) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (7.5)$$

¹⁾ Вычисляемой так же, как и потенциальная энергия продольных натяжений в продольных колебаниях.

Функционал S Остроградского—Гамильтона имеет здесь вид

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[\mu(x) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + J_0(x) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \right)^2 - EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + f(x, t)y + P(x, t) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dt dx. \quad (7.6)$$

Уравнение поперечных колебаний стержня мы получим, составив для функционала S уравнение Эйлера по формуле (1.49)

$$\mu(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial y}{\partial x} \right) - \\ - f(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(J_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \right) = 0. \quad (7.7)$$

Это линейное уравнение четвертого порядка, составленное при самых общих предположениях относительно действующих на стержень сил, жесткости и распределения массы.

В стержнях, длина которых значительно превосходит поперечные размеры, можно пренебречь инерцией вращения и опустить в левой части уравнения (7.7) последний член.

Положив $f(x, t) \equiv 0$ и $p(x, t) \equiv 0$, мы рассмотрим сначала свободные колебания однородного стержня с постоянными жесткостью EJ и погонной массой μ . Для таких колебаний уравнение (7.7) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad (7.8)$$

где $c = \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$.

2. Краевые и начальные условия. В простейших случаях, когда конец стержня свободен, или жестко закреплен, или шарнирно оперт, краевые условия выражаются следующими соотношениями:

а) конец стержня свободен; на таком конце равны нулю изгибающий момент и поперечная сила; следовательно,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0;$$

б) конец стержня жестко закреплен; на таком конце равны нулю прогиб и угол поворота, т. е.

$$y = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0;$$

в) конец стержня свободно оперт (или закреплен шарниром); в этом случае равны нулю прогиб и изгибающий момент, т. е.

$$y = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Краевые условия, ограничивающие свободу перемещений концов стержня, называются *геометрическими условиями*. Таковы, например, условия, в силу которых равны нулю прогиб и угол поворота, т. е. условия

$$y = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Условия, налагающие ограничения на изгибающий момент и поперечную силу, например, условия, выражающиеся равенствами

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0,$$

мы будем называть *динамическими условиями*.

В других случаях условия закрепления концов стержня выражаются более сложным образом. Например, при упругом закреплении конца стержня соответствующее такому закреплению краевое условие должно учитывать характер возможных смещений конца и возникающих при этом упругих восстанавливающих сил. Так будет, например, в случае закрепления, упругого для поперечных смещений конца и жесткого для поворота или, наоборот, жесткого для поперечных смещений и упругого для поворота и т. д. С такими упругими закреплениями приходится встречаться при расчете на колебания турбинных лопаток, концы которых связаны бандажом, а также при учете упругой податливости заделки хвоста в обод диска. С некоторыми видами упругих закреплений мы встретимся в разобранных дальше примерах. Отметим, что, оставаясь в пределах линейной теории, мы ограничиваемся рассмотрением краевых условий, выражающихся уравнениями, линейными относительно величин

$$y, \quad \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}.$$

Начальные условия выражаются соотношениями

$$y(x, 0) = u(x), \quad \dot{y}(x, 0) = v(x),$$

имеющими место в момент $t = 0$, где $u(x)$ и $v(x)$ — некоторые заданные функции переменной x , определяющие начальное распределение по оси стержня поперечных отклонений и скоростей отдельных его элементов.

3. Собственные формы колебаний стержня и функции, их определяющие. Простейшим периодическим решением уравнения свободных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (7.9)$$

является так называемое *главное колебание*, в котором $y(x, t)$ изменяется с течением времени по гармоническому закону

$$y(x, t) = \varphi(x) \sin(pt + \alpha). \quad (7.10)$$

Функция $\varphi(x)$, устанавливающая закон распределения максимальных (амплитудных) отклонений точек оси стержня от равновесного расположения, называется *формой главного колебания* или *собственной формой*. Собственных форм колебаний прямого стержня бесконечное множество. Каждой собственной форме соответствует определенное значение частоты p — так называемая *собственная частота*. Отбор собственных частот и соответствующих им собственных форм осуществляется с помощью уравнения собственных форм и краевых условий задачи.

Чтобы получить уравнение собственных форм однородной задачи, подставим (7.10) в (7.9). После сокращения на $\sin(pt + \alpha)$ будем иметь¹⁾

$$EJ\varphi^{IV}(x) - p^2\mu\varphi(x) = 0$$

или

$$\varphi^{IV}(x) - k^4\varphi(x) = 0, \quad (7.11)$$

где

$$k^4 = \frac{\mu p^2}{EJ}. \quad (7.12)$$

Уравнение (7.11) имеет следующие четыре независимых частных решения:

$$\cos kx, \quad \sin kx, \quad \operatorname{ch} kx, \quad \operatorname{sh} kx,$$

его общий интеграл

$$\varphi(x) = A \cos kx + B \sin kx + C \operatorname{ch} kx + D \operatorname{sh} kx. \quad (7.13)$$

Он содержит четыре произвольные постоянные A, B, C, D , которые должны быть подобраны так, чтобы для функции $\varphi(x)$ выполнялись краевые условия, т. е. условия закрепления концов стержня. В обычных случаях, число краевых условий равно числу произвольных постоянных — по два на каждом конце. Все они выражаются равенствами нулю двух из следующих четырех величин:

$$\varphi(x), \quad \varphi'(x), \quad \varphi''(x), \quad \varphi'''(x),$$

¹⁾ Применив принцип взаимности к собственным нагрузкам $p^2\mu\varphi(x)$, соответствующим двум главным колебаниям с различными собственными частотами, придем к условию ортогональности собственных форм поперечных колебаний, условию, которое напишется так же, как и условие (6.11) для продольных колебаний.

пропорциональных соответственно прогибу, углу поворота, изгибающему моменту и перерезывающей силе в точках $x=0$ или $x=l$. Выполняя эти условия, мы получим четыре однородных уравнения, из которых найдутся отношения постоянных A, B, C, D и уравнение для определения собственных частот системы.

Во многих отношениях более удобной оказывается следующая система частных решений уравнения (7.11):

$$\left. \begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} kx + \cos kx), \\ T(x) &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} kx + \sin kx), \\ U(x) &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} kx - \cos kx), \\ V(x) &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} kx - \sin kx). \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

Функции S, T, U, V называются *функциями А. Н. Крылова*.

Найдем значения этих функций и их производных по аргументу kx до третьего порядка включительно при $x=0$:

$$\left. \begin{aligned} S(0) &= 1, & S'(0) &= 0, & S''(0) &= 0, & S'''(0) &= 0, \\ T(0) &= 0, & T'(0) &= 1, & T''(0) &= 0, & T'''(0) &= 0, \\ U(0) &= 0, & U'(0) &= 0, & U''(0) &= 1, & U'''(0) &= 0, \\ V(0) &= 0, & V'(0) &= 0, & V''(0) &= 0, & V'''(0) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

Определитель, составленный из этих величин, равен единице. Поэтому функции Крылова называют иногда *функциями с единичной матрицей*, а систему (7.14) — *нормальной* или *фундаментальной системой* интегралов уравнений (7.11).

Приведем выражения последовательных производных по x от функций $S(x), T(x), U(x), V(x)$ до четвертого порядка включительно.

	Первая производная	Вторая производная	Третья производная	Четвертая производная
$S(x)$	$kV(x)$	$k^2U(x)$	$k^3T(x)$	$k^4S(x)$
$T(x)$	$kS(x)$	$k^2V(x)$	$k^3U(x)$	$k^4T(x)$
$U(x)$	$kT(x)$	$k^2S(x)$	$k^3V(x)$	$k^4U(x)$
$V(x)$	$kU(x)$	$k^2T(x)$	$k^3S(x)$	$k^4V(x)$

(7.16)

Одним из преимуществ функций Крылова является то, что с помощью этих функций можно сразу написать выражение общего интеграла уравнения (7.11), удовлетворяющего условиям на конце $x=0$ и содержащего только две постоянные, которые определяются из условий на другом конце $x=l$.

4. Основные задачи.

а) Колебания однородного стержня, шарнирно опертого по концам. В этом случае интеграл, удовлетворяющий условиям на левом конце $\varphi(0) = \varphi''(0) = 0$, должен содержать функции, обращающиеся для $x=0$ в нуль вместе со своими вторыми производными.

Как видно из (7.15), такими функциями являются T и V . Следовательно,

$$\varphi(x) = BT(kx) + DV(kx).$$

Постоянные B и D найдутся из условий на правом конце ($x=l$). Если этот конец также шарнирно оперт, то

$$\varphi(l) = BT(kl) + DV(kl) = 0,$$

$$\varphi''(l) = k^2[BV(kl) + DT(kl)] = 0,$$

откуда

$$T^2(kl) - V^2(kl) = 0.$$

В элементарных функциях

$$\sin kl = 0.$$

Это уравнение и является для рассматриваемого случая уравнением частот. Из него находим

$$k_i l = i\pi \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

и так как

$$k_i^4 = \frac{\mu p_i^2}{EJ},$$

то

$$p_i = k_i^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (7.17)$$

Таковы собственные частоты системы. Для собственных форм из (7.13) получаем уравнения

$$\varphi_i(x) = B_i \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (7.18)$$

Первые три собственные формы представлены на рис. 65. Общее решение имеет вид

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (M_i \cos p_i t + N_i \sin p_i t) \sin \frac{i\pi x}{l},$$

где постоянные M_i, N_i находятся известным образом из начальных условий.

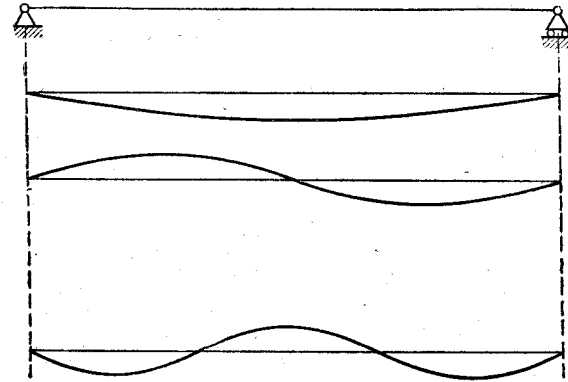


Рис. 65.

б) Колебания стержня, жестко закрепленного концом $x=0$ и свободного на конце $x=l$. Краевые условия в этом случае

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi'(0) = 0, \\ \varphi''(l) &= \varphi'''(l) = 0. \end{aligned}$$

Интеграл уравнения (7.11), удовлетворяющий условиям на конце $x=0$, имеет вид

$$\varphi(x) = CU(kx) + DV(kx). \quad (7.19)$$

Условия на конце $x=l$ выражаются уравнениями

$$\begin{cases} CS(kl) + DT(kl) = 0, \\ CV(kl) + DS(kl) = 0, \end{cases} \quad (7.20)$$

откуда

$$S^2 - TV = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{ch} kl \cos kl + 1 = 0. \quad (7.21)$$

По таблицам¹⁾ находим первые четыре корня уравнения (7.21):

$$kl = 1,875; 4,694; 7,855; 10,996.$$

Для первых четырех собственных частот получаем по формуле (7.12)

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{(1,875)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}, & p_2 &= \frac{(4,694)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}, \\ p_3 &= \frac{(7,855)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}, & p_4 &= \frac{(10,996)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}. \end{aligned}$$

¹⁾ См. А нань е в И. В., Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем, Гостехиздат, 1946.

Уравнение i -й собственной формы составляем следующим образом. Из первого или второго уравнения (7.20) находим, подставив туда $k_i l$, значение отношения

$$\frac{D}{C} = -\frac{S(k_i l)}{T(k_i l)} = -\frac{V(k_i l)}{S(k_i l)}.$$

Подставив это значение в уравнение (7.19), получим

$$\varphi_i(x) = C \left[U(k_i x) - \frac{S(k_i l)}{T(k_i l)} V(k_i x) \right] = C \left[U(k_i x) - \frac{V(k_i l)}{S(k_i l)} V(k_i x) \right].$$

На рис. 66 представлены первые три формы.

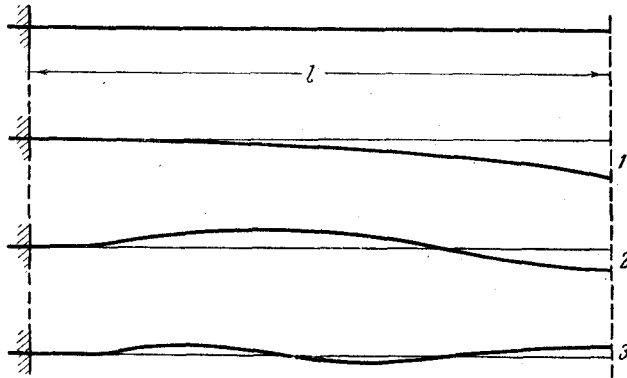


Рис. 66.

в) Колебания стержня с жестко закрепленными концами. Краевые условия для такого стержня выражаются соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi(0) = \varphi'(0) &= 0, \\ \varphi(l) = \varphi'(l) &= 0, \end{aligned}$$

а интеграл, удовлетворяющий первым двум условиям, имеет вид

$$\varphi(x) = CU(kx) + DV(kx).$$

На конце $x=l$

$$\begin{aligned} CU(kl) + DV(kl) &= 0, \\ CT(kl) + DU(kl) &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$U^2 - TV = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{ch} kl \cos kl - 1 = 0. \quad (7.22)$$

По таблицам находим первые два корня уравнения (7.22) (нулевой корень отброшен):

$$kl = 4,73; \quad 7,85.$$

4)

Соответствующие частоты колебаний:

$$p_1 = \frac{(4,73)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}, \quad p_2 = \frac{(7,85)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}.$$

Формы колебаний имеют уравнения

$$\varphi_i(x) = C \left[U(k_i x) - \frac{U(k_i l)}{V(k_i l)} V(k_i x) \right] = C \left[U(k_i x) - \frac{T(k_i l)}{U(k_i l)} V(k_i x) \right];$$

графики первых двух форм представлены на рис. 67.

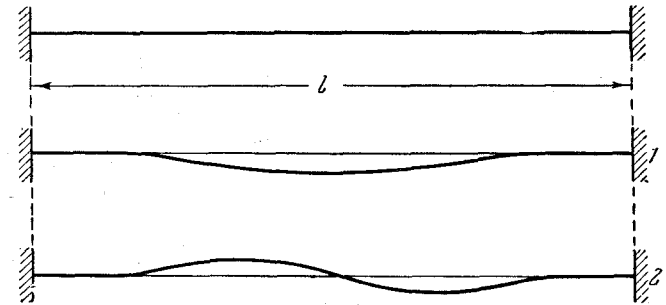


Рис. 67.

г) Колебания стержня со свободными концами (балка, плавающая в жидкости одинаковой с ней плотности; плавающее судно).

Краевые условия в этом случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi''(0) = \varphi'''(0) &= 0, \\ \varphi''(l) = \varphi'''(l) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

а интеграл, удовлетворяющий условиям на конце $x=0$,

$$\varphi(x) = AS(kx) + B\Phi(kx).$$

На конце $x=l$

$$\begin{aligned} AU(kl) + BV(kl) &= 0, \\ AT(kl) + BU(kl) &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$U^2 - TV = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{ch} kl \cos kl - 1 = 0.$$

Уравнение частот не отличается от уравнения (7.22) для стержня с закрепленными концами. Разыскивая периодическое решение уравнения (7.8) в форме

$$y(x, t) = \varphi(x) \sin(pt + \alpha),$$

мы не получим никаких других возможных в данном случае непериодических решений. Между тем очевидно, что уравнению (7.8) при тех же краевых условиях (7.23) удовлетворяют функции

$$\left. \begin{aligned} y(x, t) &\equiv \text{const} = A, \\ y(x, t) &\equiv Ax + B. \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

Первая определяет поступательное перемещение, одинаковое для всех точек стержня; вторая — вращательное вокруг некоторой оси,

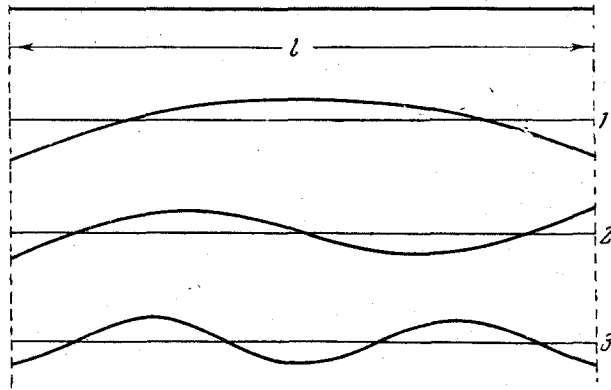


Рис. 68.

положение которой находится из начальных условий. Первая частота колебаний стержня со свободными концами соответствует значению $kl = 4,73$. Подставив это значение в уравнение форм колебаний

$$\varphi(x) = A \left[S(kx) - \frac{T(kl)}{U(kl)} T(kx) \right],$$

приведем его к виду

$$\varphi(x) = A \left[S\left(\frac{4,73}{l}x\right) - 0,98 T\left(\frac{4,73}{l}x\right) \right].$$

На протяжении от 0 до l функция $\varphi(x)$ дважды меняет знак. Таким образом, форма колебаний, соответствующая первой отличной от нуля частоте, имеет два узла. Согласно теореме об узлах собственных форм, таким количеством узлов может обладать третья форма колебаний. Это видимое противоречие легко устраняется, по крайней мере формально, если за первую и вторую формы считать выражения (7.24), соответствующие поступательному и вращательному перемещениям стержня. Тем не менее, первой формой колебаний в рассматриваемом случае называется двухузловая форма, соответствующая частоте

$$\nu_1 = \frac{(4,73)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}.$$

Графики первых трех форм колебаний стержня со свободными концами представлены на рис. 68.

д) Колебания стержня, жестко закрепленного концом $x=0$ и шарнирно опертого концом $x=l$.

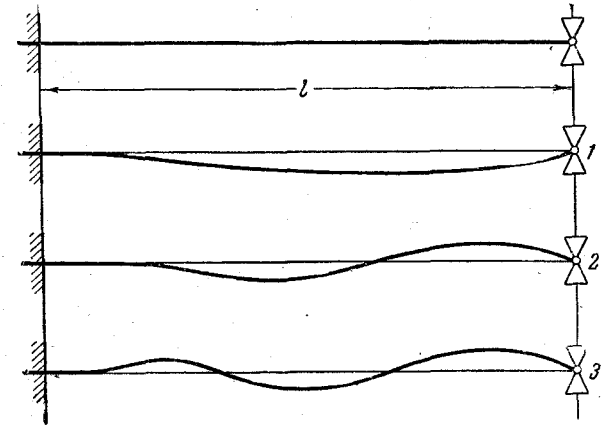


Рис. 69.

Краевые условия задачи:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi'(0) = 0, \\ \varphi(l) &= \varphi''(l) = 0, \end{aligned}$$

и интеграл, удовлетворяющий условиям на конце $x=0$, имеет вид

$$\varphi(x) = CU(kx) + DV(kx).$$

На конце $x=l$

$$\begin{aligned} CU(kl) + DV(kl) &= 0, \\ CS(kl) + DT(kl) &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$U(kl)T(kl) - S(kl)V(kl) = 0$$

или

$$\begin{aligned} \text{ch } kl \sin kl - \text{sh } kl \cos kl &= 0, \\ \text{tg } kl &= \text{th } kl. \end{aligned}$$

По таблицам находим наименьшие корни этого уравнения (отбросив нулевой)

$$kl = 3,93; 7,07; 10,21.$$

Уравнение форм колебаний

$$\varphi(x) = C \left[U(kx) - \frac{U(kl)}{V(kl)} V(kx) \right] = C \left[U(kx) - \frac{S(kl)}{T(kl)} V(kx) \right].$$

Графики первых трех форм приведены на рис. 69.

Пример 1. Рассмотрим колебания балки с жестко закрепленным левым концом $x=0$ и упруго закрепленным относительно поперечных перемещений правым концом $x=l$ (рис. 70).

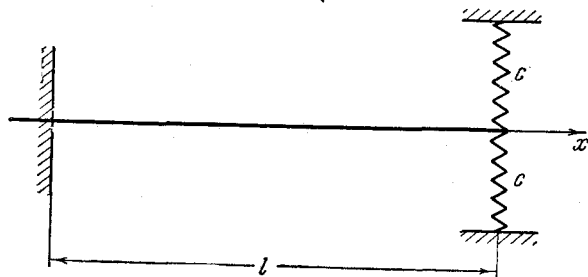


Рис. 70.

Условия на левом конце:

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0,$$

на правом:

$$\varphi''(l) = 0, \quad EJ\varphi'''(l) = c\varphi(l),$$

где c — жесткость опоры на сжатие или растяжение.

Интеграл, удовлетворяющий условиям на левом конце:

$$\varphi(x) = CU(kx) + DV(kx).$$

На правом конце ($\alpha = kl$):

$$CS(\alpha) + DT(\alpha) = 0,$$

$$EJ[CV(\alpha) + DS(\alpha)]k^3 = c[CU(\alpha) + DV(\alpha)]$$

или

$$CS(\alpha) + DT(\alpha) = 0,$$

$$C \left[\alpha^3 V(\alpha) - \frac{c l^3}{EJ} U(\alpha) \right] + D \left[\alpha^3 S(\alpha) - \frac{c l^3}{EJ} V(\alpha) \right] = 0,$$

откуда

$$\frac{c l^3}{EJ} = -\alpha^3 \frac{S^2 - VT}{TU - SV},$$

или в элементарных функциях

$$\frac{c l^3}{EJ} = -\alpha^3 \frac{\operatorname{ch} \alpha \cos \alpha + 1}{\operatorname{ch} \alpha \sin \alpha - \operatorname{sh} \alpha \cos \alpha}.$$

Если $c=0$, то наименьший корень $\alpha_1 = 1,875$, как у консольного стержня со свободным правым концом. Если $\frac{c l^3}{EJ} = 20$, то $\alpha_1 \approx 3$; если $\frac{c l^3}{EJ} = 65$, то $\alpha_1 \approx 3,5$. При дальнейшем увеличении жесткости упругой заделки α_1 стремится к 3,93, как в случае д).

Пример 2. Тангенциальные колебания лопаток турбины, связанных бандажом. Свободная лопатка с жестко заделанным в обод диска хвостом колеблется, поворачиваясь каждым сечением вокруг главной оси AB сечения, соответствующей минимальному поперечному моменту (рис. 71). Мы предположим, что лопатка не закручена и что площадь поперечного сечения и погонная масса по всей ее длине одинаковы. В таком

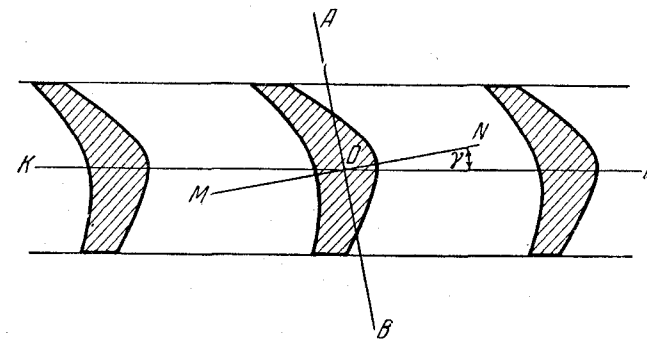


Рис. 71.

случае ось лопатки O при колебаниях будет изгибаться в одной плоскости, именно в плоскости MN , образующей некоторый угол γ с срединной плоскостью диска KL . Тангенциальными колебаниями лопаток называются составляющие колебаний лопаток в направлении KL , т. е. в направлении, параллельном срединной плоскости диска¹⁾.

Мы предположим далее, что лента бандажа, скрепляющего головки лопаток, не имеет разрывов и все лопатки находятся в одинаковых условиях закрепления. Каждую лопатку мы рассматриваем как однородный стержень, жестко закрепленный одним концом $x=0$ и связанный на другом конце $x=l$ бандажом. Эта последняя связь приводит к особым условиям на конце лопатки $x=l$, которыми и учитывается влияние бандажа на колебания лопатки. Для свободного конца изгибающий момент и поперечная сила равны нулю. Для конца, закрепленного в бандаже, изгибающий момент и поперечная сила отличны от нуля. Их значения мы найдем, сделав некоторые простейшие предположения относительно характера деформации бандажа в месте крепления. В случае, соответствующем первому собственному колебанию лопаток так называемого «типа А»²⁾, когда все лопатки отклоняются в одну сторону, в серединах свободных участков бандажа в максимальном отклонении лопаток образуются точки перегиба (рис. 72). Если в этих точках разрезать бан-

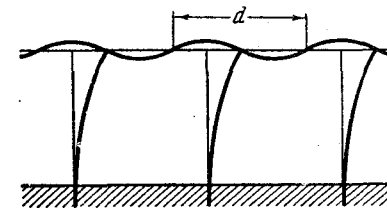


Рис. 72.

¹⁾ В дальнейшем предполагается, что $\cos \gamma \approx 1$ и, следовательно, тангенциальные колебания лопатки происходят параллельно срединной плоскости диска.
²⁾ Левин А. В., Рабочие лопатки и диски паровых турбин, Энергоиздат, 1953.

даж, выделив отрезок d («шаг бандажа»), прилегающий к рассматриваемой лопатке, то действие на вырезанный шаг со стороны других частей бандажа сведется только к силам P , $-P$, приложенным к концам вырезанного шага, равным по величине и направленным в противоположные стороны, т. е.

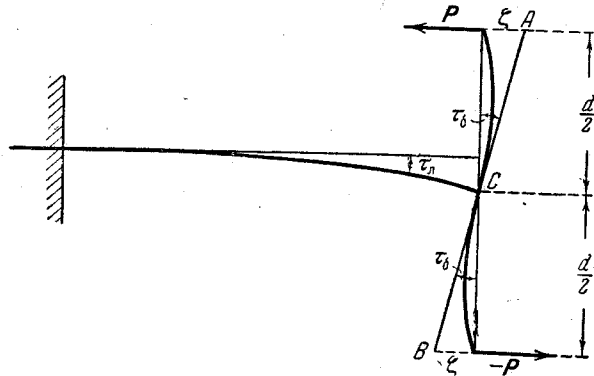


Рис. 73.

образующим пару (рис. 73). Предполагая, что соединение головки лопатки с бандажом абсолютно жесткое, мы можем написать для отклонения ζ концов шага от прямолинейного расположения по AB :

$$\zeta = \frac{Pd^3}{24EJ_6},$$

где EJ_6 — жесткость на изгиб бандажа. С другой стороны, из чертежа, в предположении, что углы отклонения касательных к бандажу и лопатке в точке C ($\tau_6 = \tau_l$) малы, имеем

$$\zeta = \frac{d}{2} \tau_6 = \frac{d}{2} \tau_l.$$

Следовательно,

$$Pd = \frac{12EJ_6}{d} \tau_l$$

или

$$M_l = \frac{12EJ_6}{d} \tau_l.$$

Но изгибающий момент лопатки в сечении $x=l$ равен

$$M_l = -EJ_l \varphi''(l).$$

Сравнивая два полученных выражения для одного и того же момента, получим первое краевое условие на головке лопатки

$$EJ_l \varphi''(l) = -\frac{12EJ_6}{d} \varphi'(l).$$

1) Индексы «л» и «б» относятся соответственно к лопатке и бандажу.

Второе условие получим, составив выражение для поперечной силы в месте крепления лопатки в бандаже. Для свободных колебаний эта сила принимается равной силе инерции массы шага бандажа m_6 в предположении, что эта масса сосредоточена в головке лопатки. Для главных колебаний с частотой p эта сила равна

$$m_6 p^2 \varphi(l).$$

Так как, с другой стороны,

$$Q_l = -EJ_l \varphi'''(l),$$

то

$$EJ_l \varphi'''(l) = -m_6 p^2 \varphi(l).$$

Таким образом, мы приходим к задаче интегрирования уравнения

$$\varphi^{IV}(x) - k^4 \varphi(x) = 0$$

при краевых условиях

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0,$$

$$EJ_l \varphi''(l) = -\frac{12EJ_6}{d} \varphi'(l),$$

$$EJ_l \varphi'''(l) = -m_6 p^2 \varphi(l).$$

Интеграл, удовлетворяющий условиям на конце $x=0$, будет

$$\varphi(x) = CU(kx) + DV(kx).$$

На конце $x=l$

$$\left. \begin{aligned} EJ_l k^2 [CS(\alpha) + DT(\alpha)] &= -\frac{12EJ_6}{d} k [CT(\alpha) + DU(\alpha)], \\ EJ_l k^3 [CV(\alpha) + DS(\alpha)] &= -m_6 p^2 [CU(\alpha) + DV(\alpha)], \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

где $\alpha = kl$.

Введем следующие обозначения:

$$\frac{12EJ_6}{dEJ_l} l = \beta; \quad \frac{m_6}{m_l} = \sigma \quad (\text{отношение массы шага бандажа к массе лопатки})$$

Тогда

$$\frac{m_6 p^2}{EJ_l k^3} = \frac{m_6 p^2 k E J_l l}{E J_l \mu l p^2} = \frac{m_6}{m_l} kl = \sigma \alpha,$$

и уравнения (7.25) можно будет представить в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} C \left[kS(\alpha) + \frac{\beta}{l} T(\alpha) \right] + D \left[kT(\alpha) + \frac{\beta}{l} U(\alpha) \right] &= 0, \\ C [V(\alpha) + \sigma \alpha U(\alpha)] + D [S(\alpha) + \sigma \alpha V(\alpha)] &= 0, \end{aligned} \right.$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} k [S^2(\alpha) - T(\alpha)V(\alpha)] + \frac{\beta}{l} \sigma \alpha [T(\alpha)V(\alpha) - U^2(\alpha)] + \\ + \frac{\beta}{l} [S(\alpha)T(\alpha) - U(\alpha)V(\alpha)] + k \sigma \alpha [S(\alpha)V(\alpha) - T(\alpha)U(\alpha)] &= 0, \end{aligned} \right.$$

или в элементарных функциях

$$k(\operatorname{ch} \alpha \cos \alpha + 1) + \frac{\beta}{l} \alpha (\operatorname{ch} \alpha \cos \alpha - 1) + \\ + \frac{\beta}{l} (\operatorname{ch} \alpha \sin \alpha + \operatorname{sh} \alpha \cos \alpha) = k \alpha (\operatorname{ch} \alpha \sin \alpha - \operatorname{sh} \alpha \cos \alpha),$$

откуда

$$\alpha = \frac{k(\operatorname{ch} \alpha \cos \alpha + 1) + \frac{\beta}{l} (\operatorname{ch} \alpha \sin \alpha + \operatorname{sh} \alpha \cos \alpha)}{\alpha \left[k(\operatorname{ch} \alpha \sin \alpha - \operatorname{sh} \alpha \cos \alpha) - \frac{\beta}{l} (\operatorname{ch} \alpha \cos \alpha - 1) \right]}. \quad (7.26)$$

Это уравнение решается путем последовательных проб. В выражение для β вводится обычно поправочный множитель $H \approx 0,3$, учитывающий степень ослабления жесткости крепления головки лопатки в бандаже.

Пример 3. Колебания консольного стержня с грузом на конце. Пусть на верхнем конце однородного стержня, нижний конец которого жестко заделан, находится точечная масса m , равная половине массы стержня, т. е. $m = \frac{1}{2} \mu l$, где μ — масса единицы длины стержня.

Краевые условия задачи:

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \\ EJ\varphi'''(l) = -\frac{\mu l}{2} p^2 \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(l) = 0,$$

а интеграл, удовлетворяющий условиям для $x=0$,

$$\varphi(x) = CU(kx) + DV(kx).$$

Из условий на конце $x=l$ получаем, положив $kl = \alpha$:

$$CS(\alpha) + DT(\alpha) = 0, \\ E J k^3 [CV(\alpha) + DS(\alpha)] = -\frac{\mu l}{2} p^2 [CU(\alpha) + DV(\alpha)]$$

или, так как

$$\frac{\mu l p^2}{2E J k^3} = \frac{\alpha}{2},$$

то

$$CS(\alpha) + DT(\alpha) = 0, \\ C \left[V(\alpha) + \frac{\alpha}{2} U(\alpha) \right] + D \left[S(\alpha) + \frac{\alpha}{2} V(\alpha) \right] = 0.$$

Исключив C и D , приходим к уравнению частот, которое представим следующим образом:

$$\Delta(\alpha) = \alpha - \frac{2(1 + \operatorname{ch} \alpha \cos \alpha)}{\operatorname{ch} \alpha \sin \alpha - \operatorname{sh} \alpha \cos \alpha} = 0. \quad (7.27)$$

Для вычисления корней уравнения (7.27) весьма важно иметь с самого начала некоторые ориентировочные данные о расположении по крайней мере первых частот системы. С помощью таких данных можно выбрать для искомого корней хорошие исходные приближения. В рассматриваемой задаче такой выбор исходных приближений можно сделать, руководствуясь следующими соображениями. Собственные частоты поперечных колебаний

консольного стержня без груза на верхнем конце нам известны (см. пункт б)); для первых двух соответствующие значения α

$$\alpha_1 = 1,875, \quad \alpha_2 = 4,694.$$

Если к концу стержня прикреплен груз, то кинетическая энергия стержня увеличивается вследствие прибавления к ней *одного* квадрата $\frac{m v^2}{2}$ (без изменения потенциальной энергии). На основании известной теоремы (§ 16 гл. III) собственные частоты \bar{p}_i стержня без груза и частоты p_i стержня с грузом на конце удовлетворяют неравенствам

$$p_i \leq \bar{p}_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \\ \bar{p}_{i-1} \leq p_i \quad (i = 2, 3, \dots),$$

которые для корней α_i уравнения (7.27) будут иметь вид

$$\alpha_1 \leq 1,875 \leq \alpha_2 \leq 4,694 \leq \alpha_3 \leq 7,855 \leq \dots$$

Возьмем в качестве исходного значения для определения наименьшего корня уравнения (7.27)

$$\alpha_1 = 1,4.$$

По таблицам находим

$$\Delta(1,4) = +0,21686.$$

Взяв $\alpha_1 = 1,5$, найдем

$$\Delta(1,5) = -0,96105.$$

Отсюда заключаем, что искомый корень лежит между 1,4 и 1,5. Взяв для третьей пробы $\alpha_1 = 1,42$, найдем

$$\Delta(1,42) = -0,00039.$$

Если ограничиться двумя десятичными знаками, то можно приближенно положить

$$\alpha_1 \approx 1,41.$$

Первая частота в этом случае

$$p_1 = \frac{(1,41)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} = \frac{1,90}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}.$$

5. Уравнения форм колебаний с правой частью. Такими уравнениями определяются или формы вынужденных колебаний, или собственные формы свободных колебаний стержня с сосредоточенными массами, а также с промежуточными опорами. Оба эти случая, несмотря на существенные различия между свободными и вынужденными колебаниями, можно рассматривать совместно, относя инерционные действия сосредоточенных масс на стержень к возмущающим силам (см. § 3 гл. VI).

Пусть к стержню в точке $x = x_1$ приложена сосредоточенная гармоническая сила

$$Q \sin(\omega t + \alpha).$$

Уравнение вынужденных колебаний от такой силы напишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{Q}{\mu} \sigma_1 (x - x_1) \sin(\omega t + \alpha). \quad (7.28)$$

Установившиеся вынужденные колебания так же, как и главные свободные колебания, происходят согласно одному и тому же закону

$$y(x, t) = \varphi(x) \sin(\omega t + \alpha), \quad (7.29)$$

где $\varphi(x)$ — форма колебаний, а ω — или известная (заданная) частота возмущающей силы, или искомая собственная частота главного колебания стержня. Подставив (7.29) в (7.28), приходим к уравнению форм колебаний с правой частью

$$\varphi^{IV}(x) - k^4 \varphi(x) = \frac{Q}{EJ} \sigma_1 (x - x_1). \quad (7.30)$$

Аналогичный вид будет иметь уравнение форм колебаний стержня, нагруженного в некоторой точке $x = x_1$ возмущающим или инерционным моментом G . Только вместо импульсивной функции первого порядка будет стоять импульсивная функция второго порядка

$$\varphi^{IV}(x) - k^4 \varphi(x) = \frac{G}{EJ} \sigma_2 (x - x_1). \quad (7.31)$$

Чтобы найти общий интеграл уравнения форм колебаний с правой частью, которое мы напишем в несколько более общей форме

$$\varphi^{IV}(x) - k^4 \varphi(x) = f(x), \quad (7.32)$$

воспользуемся операционным методом. Для этого нам понадобятся изображения функций Крылова S , T , U , V , которые мы и составим с помощью известных изображений функций

$$\sin kx, \cos kx, \operatorname{sh} kx, \operatorname{ch} kx.$$

Так как

$$\left. \begin{aligned} \frac{p^2}{p^2 + k^2} &\rightarrow \cos kx, & \frac{p^2}{p^2 - k^2} &\rightarrow \operatorname{ch} kx, \\ \frac{kp}{p^2 + k^2} &\rightarrow \sin kx, & \frac{kp}{p^2 - k^2} &\rightarrow \operatorname{sh} kx, \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

то

$$\left. \begin{aligned} \frac{p^4}{p^4 - k^4} &\rightarrow S(kx), & \frac{kp^3}{p^4 - k^4} &\rightarrow T(kx), \\ \frac{k^2 p^2}{p^4 - k^4} &\rightarrow U(kx), & \frac{k^3 p}{p^4 - k^4} &\rightarrow V(kx). \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

Положив

$$F(p) \rightarrow f(x), \quad Y(p) \rightarrow \varphi(x),$$

найдем изображение уравнения (7.32)

$$p^4 \left[Y(p) - \varphi(0) - \frac{\varphi'(0)}{p} - \frac{\varphi''(0)}{p^2} - \frac{\varphi'''(0)}{p^3} \right] - k^4 Y(p) = F(p),$$

откуда

$$Y(p) = \frac{F(p)}{p^4 - k^4} + \varphi(0) \frac{p^4}{p^4 - k^4} + \varphi'(0) \frac{p^3}{p^4 - k^4} + \varphi''(0) \frac{p^2}{p^4 - k^4} + \varphi'''(0) \frac{p}{p^4 - k^4}$$

и

$$\varphi(x) = \varphi(0) S(kx) + \frac{\varphi'(0)}{k} T(kx) + \frac{\varphi''(0)}{k^2} U(kx) + \frac{\varphi'''(0)}{k^3} V(kx) + \frac{1}{k^3} \int_0^x f(\xi) V[k(x - \xi)] d\xi. \quad (7.35)$$

Что касается интеграла

$$\Phi(x) = \frac{1}{k^3} \int_0^x f(\xi) V[k(x - \xi)] d\xi, \quad (7.36)$$

представляющего частное решение уравнения (7.32) и называемого *частным интегралом Крылова*, то для $x = 0$ он равен нулю вместе со своими тремя производными и потому, каковы бы ни были условия для $x = 0$, он им всегда удовлетворяет. Для сосредоточенной гармонической силы — инерционной или возмущающей, а также и для сосредоточенного момента значения интеграла (7.36) можно получить, подставив вместо $f(\xi)$ соответствующее данной нагрузке выражение. Можно эти значения получить и как частные решения дифференциального уравнения. Так, из уравнения форм вынужденных колебаний от гармонической силы, сосредоточенной в точке $x = x_1$,

$$\varphi^{IV}(x) - k^4 \varphi(x) = \frac{Q}{EJ} \sigma_1 (x - x_1),$$

положив

$$Y(p) \rightarrow \varphi(x),$$

найдем изображение частного интеграла

$$Y_1(p) = \frac{Q e^{-px_1} p}{EJ(p^4 - k^4)},$$

откуда

$$\Phi(x) = \frac{Q}{k^3 EJ} V[k(x - x_1)]. \quad (7.37)$$

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & T(kx) & V(kx) \\ 0 & T(kl) & V(kl) \\ 0 & V(kl) & T(kl) \end{vmatrix} = V^2(kl) - T^2(kl) = -\operatorname{sh} kl \sin kl.$$

Из уравнений (7.42) находим для $x \leq a$ ($\alpha = kl$, $\alpha_1 = ka$)

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\Delta k^3 EJ} \begin{vmatrix} 0 & T(kx) & V(kx) \\ V(\alpha - \alpha_1) & T(\alpha) & V(\alpha) \\ T(\alpha - \alpha_1) & V(\alpha) & T(\alpha) \end{vmatrix}. \quad (7.43)$$

Для прогиба в точке $x \geq a$ аналогичным путем, исходя из второго выражения (7.41), находим

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Delta k^3 EJ} \begin{vmatrix} V(kx - \alpha_1) & T(kx) & V(kx) \\ V(\alpha - \alpha_1) & T(\alpha) & V(\alpha) \\ T(\alpha - \alpha_1) & V(\alpha) & T(\alpha) \end{vmatrix}. \quad (7.44)$$

Развернув определители (7.43) и (7.44) и перейдя к элементарным функциям, получим для амплитуд вынужденных колебаний от единичной гармонической силы, т. е. для гармонических коэффициентов, следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma[x, a; \omega^2] &= \frac{1}{2k^3 EJ} \left[\frac{\sin(\alpha - \alpha_1) \sin kx}{\sin \alpha} - \frac{\operatorname{sh}(\alpha - \alpha_1) \operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} \alpha} \right] & (0 \leq x \leq a), \\ \Gamma[x, a; \omega^2] &= \frac{1}{2k^3 EJ} \left[\frac{\sin(\alpha - kx) \sin \alpha_1}{\sin \alpha} - \frac{\operatorname{sh}(\alpha - kx) \operatorname{sh} \alpha_1}{\operatorname{sh} \alpha} \right] & (a \leq x \leq l). \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

Формулы (7.45) были выведены другим путем А. Н. Крыловым¹⁾. Дифференцируя выражения для $\varphi(x)$ надлежащее число раз, мы легко получим из этих формул значения угла поворота, изгибающего момента и поперечной силы в любом сечении балки.

Аналогичные формулы можно составить и для других случаев закрепления стержня. Так, для стержня, закрепленного концом $x=0$ и свободного на конце $x=l$, гармонические коэффициенты имеют выражения

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(x, a; \omega^2) &= \frac{1}{\Delta k^3 EJ} \begin{vmatrix} 0 & U(kx) & V(kx) \\ T(\alpha - \alpha_1) & S(\alpha) & T(\alpha) \\ S(\alpha - \alpha_1) & V(\alpha) & S(\alpha) \end{vmatrix} & \text{при } 0 \leq x \leq a, \\ \Gamma(x, a; \omega^2) &= \frac{1}{\Delta k^3 EJ} \begin{vmatrix} V(\alpha - kx) & U(kx) & V(kx) \\ T(\alpha - \alpha_1) & S(\alpha) & T(\alpha) \\ S(\alpha - \alpha_1) & V(\alpha) & S(\alpha) \end{vmatrix} & \text{при } a \leq x \leq l, \end{aligned} \right\} \quad (7.46)$$

¹⁾ Крылов А. Н., Вибрация судов, Собрание трудов, т. X, стр. 352, 1948.

где

$$\Delta = T(\alpha) V(\alpha) - S^2(\alpha) = -\frac{1}{2} (1 + \operatorname{ch} \alpha \cos \alpha).$$

Так же как в случае продольных и крутильных колебаний, гармонические коэффициенты для поперечных колебаний (7.45) и (7.46) и получающиеся из них путем дифференцирования по x гармонические коэффициенты для углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил могут быть использованы для составления уравнений поперечных колебаний сложных систем путем расчленения таких систем на простые части. Нужно, однако, иметь в виду, что в поперечных колебаниях геометрия деформаций в сечениях стержня имеет более сложный характер, чем в колебаниях продольных или крутильных. Как правило, здесь приходится вычислять гармонические коэффициенты не только для прогибов от поперечных сил или изгибающих моментов, но и углы поворота от тех же усилий и составлять, таким образом, для одного сечения несколько уравнений. Все такие уравнения и все нужные для их составления формулы гармонических коэффициентов могут быть получены из формул А. Н. Крылова (7.39), (7.40), (7.45) и (7.46)¹⁾. Мы не останавливаемся здесь на выводе этих уравнений, так как излагаемый дальше в § 8 метод начальных параметров дает возможность гораздо быстрее находить гармонические прогибы и углы поворота от любых приложенных к стержню усилий.

Пример 4. Двухопорная балка совершает вынужденные колебания под действием гармонически изменяющейся поперечной сосредоточенной силы, приложенной в точке $x=l/2$ и имеющей амплитуду $P=500$ кг и частоту 1200 колебаний в минуту. Пролет балки $l=4,35$ м. Погонный вес балки $q=26,3$ кг/м; $J=2,14 \cdot 10^{-5}$ м⁴, $E=2,15 \cdot 10^5$ кг/м². Требуется вычислить амплитуды прогиба и изгибающего момента в середине балки²⁾.

Находим:

$$k = 0,551 \text{ 1/м}; \quad kl = 2,4; \quad EJ = 4,601 \text{ кгм}^2.$$

Подставив эти величины в первую формулу (7.45), получим амплитуду прогиба в середине балки

$$\varphi\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{500}{1,53931 \cdot 10^5} \left[\frac{\sin^2 1,2}{\sin 2,4} - \frac{\operatorname{sh}^2 1,2}{\operatorname{sh} 2,4} \right] = 324,82 \cdot 0,86926 \cdot 10^{-5} = 0,00282 \text{ м.}$$

¹⁾ Сводку таких формул см. также в статье: Duncan W. J., Free and Forced Oscillations of Continuous Beams treatment by the Admittance Method. Phyl. Mag. v. 34, No. 228, 1943, где эти формулы приведены без ссылок на более ранние труды А. Н. Крылова.

²⁾ Числовые данные задачи взяты из статьи: Безухов Н. И., Некоторые обобщения методов строительной механики в динамике сооружений, Сб. «Исследования по теории сооружений», № 3, 1939, стр. 179.

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & T(kx) & V(kx) \\ 0 & T(kl) & V(kl) \\ 0 & V(kl) & T(kl) \end{vmatrix} = V^2(kl) - T^2(kl) = -\operatorname{sh} kl \sin kl.$$

Из уравнений (7.42) находим для $x \leq a$ ($\alpha = kl$, $\alpha_1 = ka$)

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\Delta k^3 EJ} \begin{vmatrix} 0 & T(kx) & V(kx) \\ V(\alpha - \alpha_1) & T(\alpha) & V(\alpha) \\ T(\alpha - \alpha_1) & V(\alpha) & T(\alpha) \end{vmatrix}. \quad (7.43)$$

Для прогиба в точке $x \geq a$ аналогичным путем, исходя из второго выражения (7.41), находим

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Delta k^3 EJ} \begin{vmatrix} V(kx - \alpha_1) & T(kx) & V(kx) \\ V(\alpha - \alpha_1) & T(\alpha) & V(\alpha) \\ T(\alpha - \alpha_1) & V(\alpha) & T(\alpha) \end{vmatrix}. \quad (7.44)$$

Развернув определители (7.43) и (7.44) и перейдя к элементарным функциям, получим для амплитуд вынужденных колебаний от единичной гармонической силы, т. е. для гармонических коэффициентов, следующие выражения:

$$\Gamma[x, a; \omega^2] = \frac{1}{2k^3 EJ} \left[\frac{\sin(\alpha - \alpha_1) \sin kx}{\sin \alpha} - \frac{\operatorname{sh}(\alpha - \alpha_1) \operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} \alpha} \right] \quad (0 \leq x \leq a),$$

$$\Gamma[x, a; \omega^2] = \frac{1}{2k^3 EJ} \left[\frac{\sin(\alpha - kx) \sin \alpha_1}{\sin \alpha} - \frac{\operatorname{sh}(\alpha - kx) \operatorname{sh} \alpha_1}{\operatorname{sh} \alpha} \right] \quad (a \leq x \leq l). \quad (7.45)$$

Формулы (7.45) были выведены другим путем А. Н. Крыловым¹⁾. Дифференцируя выражения для $\varphi(x)$ надлежащее число раз, мы легко получим из этих формул значения угла поворота, изгибающего момента и поперечной силы в любом сечении балки.

Аналогичные формулы можно составить и для других случаев закрепления стержня. Так, для стержня, закрепленного концом $x=0$ и свободного на конце $x=l$, гармонические коэффициенты имеют выражения

$$\Gamma(x, a; \omega^2) = \frac{1}{\Delta k^3 EJ} \begin{vmatrix} 0 & U(kx) & V(kx) \\ T(\alpha - \alpha_1) & S(\alpha) & T(\alpha) \\ S(\alpha - \alpha_1) & V(\alpha) & S(\alpha) \end{vmatrix} \quad \text{при } 0 \leq x \leq a,$$

$$\Gamma(x, a; \omega^2) = \frac{1}{\Delta k^3 EJ} \begin{vmatrix} V(\alpha - kx) & U(kx) & V(kx) \\ T(\alpha - \alpha_1) & S(\alpha) & T(\alpha) \\ S(\alpha - \alpha_1) & V(\alpha) & S(\alpha) \end{vmatrix} \quad \text{при } a \leq x \leq l, \quad (7.46)$$

¹⁾ Крылов А. Н., Вибрация судов, Собрание трудов, т. X, стр. 352, 1948.

где

$$\Delta = T(\alpha) V(\alpha) - S^2(\alpha) = -\frac{1}{2} (1 + \operatorname{ch} \alpha \cos \alpha).$$

Так же как в случае продольных и крутильных колебаний, гармонические коэффициенты для поперечных колебаний (7.45) и (7.46) и получающиеся из них путем дифференцирования по x гармонические коэффициенты для углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил могут быть использованы для составления уравнений поперечных колебаний сложных систем путем расчленения таких систем на простые части. Нужно, однако, иметь в виду, что в поперечных колебаниях геометрия деформаций в сечениях стержня имеет более сложный характер, чем в колебаниях продольных или крутильных. Как правило, здесь приходится вычислять гармонические коэффициенты не только для прогибов от поперечных сил или изгибающих моментов, но и углы поворота от тех же усилий и составлять, таким образом, для одного сечения несколько уравнений. Все такие уравнения и все нужные для их составления формулы гармонических коэффициентов могут быть получены из формул А. Н. Крылова (7.39), (7.40), (7.45) и (7.46)¹⁾. Мы не останавливаемся здесь на выводе этих уравнений, так как излагаемый дальше в § 8 метод начальных параметров дает возможность гораздо быстрее находить гармонические прогибы и углы поворота от любых приложенных к стержню усилий.

Пример 4. Двухопорная балка совершает вынужденные колебания под действием гармонически изменяющейся поперечной сосредоточенной силы, приложенной в точке $x=l/2$ и имеющей амплитуду $P=500$ кг и частоту 1200 колебаний в минуту. Пролет балки $l=4,35$ м. Погонный вес балки $q=26,3$ кг/м; $J=2,14 \cdot 10^{-5}$ м⁴, $E=2,15 \cdot 10^5$ кг/м². Требуется вычислить амплитуды прогиба и изгибающего момента в середине балки²⁾.

Находим:

$$k=0,551 \text{ 1/м}; \quad kl=2,4; \quad EJ=4,601 \text{ кгм}^2.$$

Подставив эти величины в первую формулу (7.45), получим амплитуду прогиба в середине балки

$$\varphi\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{500}{1,53931 \cdot 10^5} \left[\frac{\sin^2 1,2}{\sin 2,4} - \frac{\operatorname{sh}^2 1,2}{\operatorname{sh} 2,4} \right] = 324,82 \cdot 0,86926 \cdot 10^{-5} = 0,00282 \text{ м.}$$

¹⁾ Сводку таких формул см. также в статье: Duncan W. J., Free and Forced Oscillations of Continuous Beams treatment by the Admittance Method. Phyl. Mag. v. 34, No. 228, 1943, где эти формулы приведены без ссылок на более ранние труды А. Н. Крылова.

²⁾ Числовые данные задачи взяты из статьи: Безухов Н. И., Некоторые обобщения методов строительной механики в динамике сооружений, Сб. «Исследования по теории сооружений», № 3, 1939, стр. 179.

Продифференцировав дважды $\varphi(x)$, найдем значение амплитуды изгибающего момента в середине балки по формуле

$$EJ \varphi'' \left(\frac{l}{2} \right) = -\frac{P}{2k} \left[\frac{\sin^2 1,2}{\sin 2,4} + \frac{\text{sh}^2 1,2}{\text{sh} 2,4} \right] = -772,6 \text{ кгм.}$$

Так же просто могут быть найдены амплитуды реакций и угла поворота опорных сечений.

Пример 5. Колебания консольного стержня с промежуточной шарнирной опорой (рис. 74).

Промежуточная шарнирная опора, как и другие виды промежуточных закреплений, действует на стержень своей реакцией, которую можно рассматривать как промежуточную сосредоточенную нагрузку. В главных колебаниях стержня она изменяется по гармоническому закону, как и в случае

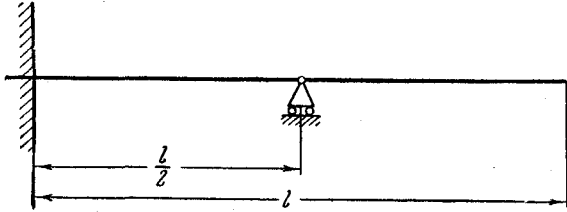


Рис. 74.

гармонической возмущающей силы или момента. Обозначив неизвестную реакцию шарнира через R , получим следующие выражения формы колебаний стержня:

$$\varphi(x) = CU(kx) + DV(kx) \quad \text{при } 0 \leq x \leq \frac{l}{2},$$

$$\varphi(x) = CU(kx) + DV(kx) + \frac{R}{k^3 EJ} V \left[k \left(x - \frac{l}{2} \right) \right] \quad \text{при } \frac{l}{2} \leq x \leq l.$$

На свободном конце

$$\left. \begin{aligned} CS(\alpha) + DT(\alpha) + \frac{R}{k^3 EJ} T\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 0, \\ CV(\alpha) + DS(\alpha) + \frac{R}{k^3 EJ} S\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.47)$$

где $\alpha = kl$. К этим уравнениям, содержащим три неизвестных C, D, R , нужно добавить еще одно уравнение, именно, уравнение, получающееся из условия равенства нулю прогиба на опоре:

$$CU\left(\frac{\alpha}{2}\right) + DV\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0. \quad (7.48)$$

Из (7.47) и (7.48) получим уравнение частот системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} S(\alpha) & T(\alpha) & T\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ V(\alpha) & S(\alpha) & S\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ U\left(\frac{\alpha}{2}\right) & V\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

В элементарных функциях

$$\sin \alpha \operatorname{ch} \alpha - \operatorname{sh} \alpha \cos \alpha = \operatorname{sh} \alpha - \sin \alpha.$$

Корни α этого уравнения, на основании теоремы о наложении на систему одной линейной связи, лежат между корнями консольного стержня без опор, так что имеют место неравенства

$$1,875 \leq \alpha_1 \leq 4,694 \leq \alpha_2 \leq 7,855 \leq \dots$$

Взяв в качестве первой пробы для расчета основной частоты $\alpha_1 = 3,2$, получим

$$\Delta = -0,79648.$$

При $\alpha_1 = 3,1$

$$\Delta = +0,49443.$$

Искомый первый корень лежит, следовательно, в границах

$$3,1 < \alpha_1 < 3,2.$$

Дальнейшие уточнения не требуют каких-либо дополнительных разъяснений.

Большое количество примеров на вычисление частот поперечных колебаний стержней при различных способах их закрепления можно найти в справочнике И. В. Ананьева¹⁾.

Пример 6. Найти форму вынужденных колебаний стержня, заделанного в горизонтальное основание, которое совершает прямолинейные гармонические колебания с амплитудой a и частотой ω (рис. 75).

Колебания стержня относительно основания можно рассматривать как абсолютные, если к собственной нагрузке стержня присоединить нагрузку силами инерции поступательного переносного движения, интенсивность которой $q = \mu \omega^2 a \sin \omega t$.

Уравнение форм вынужденных колебаний стержня будет иметь вид

$$\varphi^{IV} - k^4 \varphi = k^4 a,$$

где

$$k^4 = \frac{\mu \omega^2}{EJ}.$$

Положив

$$\varphi(x) = u(x) - a,$$

приведем уравнение к виду

$$u^{IV} - k^4 u = 0.$$

Выбрав начало на свободном конце стержня, будем иметь в качестве крайних условий

$$u''(0) = u'''(0) = 0,$$

$$u(l) = a; \quad u'(l) = 0.$$

Интеграл, удовлетворяющий условиям на конце $x=0$, будет иметь вид

$$u(x) = AS(kx) + BT(kx).$$

¹⁾ Ананьев И. В., Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем, Гостехиздат, 1946.

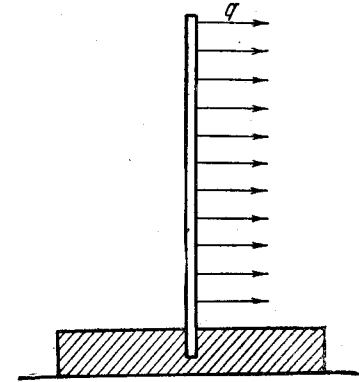


Рис. 75.

Постоянные A и B найдутся из уравнений

$$AS(\alpha) + BT(\alpha) = a, \quad AV(\alpha) + BS(\alpha) = 0,$$

откуда

$$A = \frac{aS(\alpha)}{S^2(\alpha) - T(\alpha)V(\alpha)}; \quad B = -\frac{aV(\alpha)}{S^2(\alpha) - T(\alpha)V(\alpha)}.$$

Форма вынужденных колебаний

$$\varphi(x) = a \left[\frac{S(\alpha)S(kx) - V(\alpha)T(kx)}{S^2(\alpha) - T(\alpha)V(\alpha)} - 1 \right].$$

Решение имеет смысл пока $S^2(\alpha) - T(\alpha)V(\alpha) \neq 0$. Когда же $S^2(\alpha) - T(\alpha)V(\alpha) = 0$,

то частота возмущающей силы совпадает с одной из частот свободных колебаний стержня: в этом случае имеет место явление резонанса.

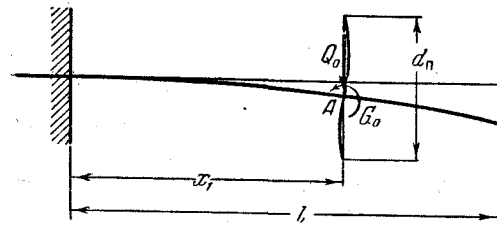


Рис. 76.

$x=0$ в ободу диска и свободного на конце $x=l$ (рис. 76), нагруженного в месте крепления проволоки $x=x_1$ гармонически изменяющимися с собственной частотой лопатки сосредоточенными силой и моментом:

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= m_n \omega^2 \varphi(x_1), \\ G_0 &= \frac{12EJ_n}{d_n} \varphi'(x_1), \end{aligned} \right\}$$

где m_n — масса шага проволоки, d_n — шаг проволоки, EJ_n — жесткость на изгиб проволоки.

Форма колебаний будет иметь здесь следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= CU(kx) + DV(kx) \quad \text{при } 0 \leq x \leq x_1, \\ \varphi(x) &= CU(kx) + DV(kx) + \frac{Q_0}{k^3 EJ_n} V[k(x-x_1)] + \\ &+ \frac{G_0}{k^2 EJ_n} U[k(x-x_1)] \quad \text{при } x_1 \leq x \leq l, \end{aligned} \right\}$$

где

$$\frac{Q_0}{k^3 EJ_n} = \frac{m_n \omega^2}{k^3 EJ_n} \varphi(x_1) = \frac{m_n}{m_n} kl \varphi(x_1) = \sigma_n \alpha \varphi(x_1) = \sigma_n \alpha y_1,$$

$$\frac{G_0}{k^2 EJ_n} = \frac{12EJ_n}{d_n k^2 EJ_n} \varphi'(x_1) = \frac{\beta_n}{\alpha k} \varphi'(x_1) = \frac{\beta_n}{ka} y_1',$$

$$\sigma_n = \frac{m_n}{m_n}, \quad kl = \alpha, \quad kx_1 = \alpha_1, \quad \beta_n = \frac{12EJ_n}{d_n EJ_n} l, \quad \varphi(x_1) = y_1, \quad \varphi'(x_1) = y_1'.$$

Условия на свободном конце

$$\varphi''(l) = \varphi'''(l) = 0.$$

Написав, как обычно, уравнения

$$CU(\alpha_1) + DV(\alpha_1) - y_1 = 0,$$

$$CT(\alpha_1) + DU(\alpha_1) - \frac{y_1'}{k} = 0,$$

$$CS(\alpha) + DT(\alpha) + \sigma_n \alpha y_1 T(\alpha - \alpha_1) + \frac{\beta_n}{ka} y_1' S(\alpha - \alpha_1) = 0,$$

$$CV(\alpha) + DS(\alpha) + \sigma_n \alpha y_1 S(\alpha - \alpha_1) + \frac{\beta_n}{ka} y_1' V(\alpha - \alpha_1) = 0,$$

приходим к следующему уравнению частот:

$$\begin{vmatrix} U(\alpha_1) & V(\alpha_1) & -\frac{1}{\sigma_n \alpha} & 0 \\ T(\alpha_1) & U(\alpha_1) & 0 & -\frac{\alpha}{\beta_n} \\ S(\alpha) & T(\alpha) & T(\alpha - \alpha_1) & S(\alpha - \alpha_1) \\ V(\alpha) & S(\alpha) & S(\alpha - \alpha_1) & V(\alpha - \alpha_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Из анализа результатов расчетов, выполненных для нескольких значений σ_n и β_n при различных положениях места крепления проволоки¹⁾, можно сделать вывод, что крепление лопаток проволокой в общем повышает собственные частоты их колебаний, причем частоты различных порядков в различной степени. Повышение первой частоты достигает максимального значения для $x_1 = 0,6l$; при колебаниях второго тона максимум имеет место приблизительно для $x_1 = 0,8l$.

Выбор наиболее выгодного расположения проволоки зависит от многих факторов, для изучения которых следует обратиться к специальной литературе, в частности, к цитированной книге А. В. Левина. В этой книге рассмотрены также случаи крепления лопаток несколькими проволоками и бандажом и даны все необходимые сведения относительно приемов расчета таких сложных систем.

7. Критические числа оборотов прямого вала с дисками.

Как известно, в критическом состоянии вращающийся вертикальный вал, сохраняя изогнутую форму, «обрастает» вокруг линии подшипников обычно в ту же сторону и с той же угловой скоростью, с какой происходит «собственное вращение», передающее рабочее усилие. В этом «прямом» обращении центробежные силы и гироскопические моменты элементов вала уравниваются упругими восстанавливающими силами и моментами, возникающими при прогибе вала. Пренебрегая инерционными гироскопическими моментами элементов вала, мы найдем критические скорости, как частоты собственных поперечных колебаний вала.

¹⁾ Левин А. В., Рабочие лопатки и диски паровых турбин, Госэнергоиздат, 1953.

Когда вал несет сосредоточенные массы, например диски, действие последних на критические числа оборотов можно учесть, рассматривая развиваемые ими при «обращениях» вала инерционные силы и гироскопические моменты как внешние возмущающие гармонические силы и моменты, изменяющиеся с частотами, равными критическим скоростям вала.

Пусть на валу в точках x_1 и x_2 насажены два диска, массы которых m_1 и m_2 , полярные моменты инерции C_i ($\kappa\Gamma \text{ см сек}^2$), а экваториальные A_i ($\kappa\Gamma \text{ см сек}^2$) ($i=1, 2$), причем $C_i=2A_i$. Уравнения упругой линии для отрезков вала между сосредоточенными массами напишутся аналогично (7.39), где в случае прямой прецессии

$$\Phi_i = \frac{m_i \omega^2 \varphi'(x_i)}{k^3 EJ} V[k(x-x_i)] - \frac{A_i \omega^2 \varphi'(x_i)}{k^2 (EJ)} U[k(x-x_i)] \quad (i=1, 2).$$

Предполагая, что вал закреплен концами в поворачивающихся подшипниках, будем иметь для прогибов $\varphi(x)=y$ и углов поворота $\varphi'(x)=y'$ в местах крепления дисков, а также для постоянных B и D уравнения:

$$\left. \begin{aligned} BT(\alpha_1) + DV(\alpha_1) - y_1 &= 0, \\ BS(\alpha_1) + DU(\alpha_1) - y_1' &= 0, \\ BT(\alpha_2) + DV(\alpha_2) + \\ &+ \frac{m_1 \omega^2 y_1}{k^3 EJ} V(\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{A_1 \omega^2 y_1'}{k^2 EJ} U(\alpha_2 - \alpha_1) - y_2 = 0, \\ BS(\alpha_2) + DU(\alpha_2) + \\ &+ \frac{m_1 \omega^2 y_1}{k^3 EJ} U(\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{A_1 \omega^2 y_1'}{k^2 EJ} T(\alpha_2 - \alpha_1) - y_2' = 0, \\ BT(\alpha) + DV(\alpha) + \frac{m_1 \omega^2 y_1}{k^3 EJ} V(\alpha - \alpha_1) - \frac{A_1 \omega^2 y_1'}{k^2 EJ} U(\alpha - \alpha_1) + \\ &+ \frac{m_2 \omega^2 y_2}{k^3 EJ} V(\alpha - \alpha_2) - \frac{A_2 \omega^2 y_2'}{k^2 EJ} U(\alpha - \alpha_2) = 0, \\ BU(\alpha) + DT(\alpha) + \frac{m_1 \omega^2 y_1}{k^3 EJ} T(\alpha - \alpha_1) - \frac{A_1 \omega^2 y_1'}{k^2 EJ} S(\alpha - \alpha_1) + \\ &+ \frac{m_2 \omega^2 y_2}{k^3 EJ} T(\alpha - \alpha_2) - \frac{A_2 \omega^2 y_2'}{k^2 EJ} S(\alpha - \alpha_2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.49)$$

Последние два уравнения выражают условия закрепления правого конца вала.

Исключив из (7.49) $B, D, y_1, y_2, y_1', y_2'$, приходим к уравнению для ω^2 . Общая структура этого уравнения остается такой же, как и в случае, когда собственная масса вала не учитывалась. Однако теперь элементами векового определителя являются функции S, T, U, V , зависящие не только от координат точек крепления масс, но также и от частоты колебаний. Единственным практически приемлемым способом

вычисления корней такого уравнения является способ последовательных проб, т. е. вычисление численных значений векового определителя для ряда пробных значений ω^2 .

Если не учитывать гироскопических моментов, т. е. рассматривать закрепленные на валу массы как точечные, то вековое уравнение рассматриваемой системы будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} T(\alpha_1) & V(\alpha_2) & -\frac{q_1}{\alpha} & 0 \\ T(\alpha_2) & V(\alpha_2) & V(\alpha_2 - \alpha_1) & -\frac{q_2}{\alpha} \\ T(\alpha) & V(\alpha) & V(\alpha - \alpha_1) & V(\alpha - \alpha_2) \\ U(\alpha) & T(\alpha) & T(\alpha - \alpha_1) & T(\alpha - \alpha_2) \end{vmatrix} = 0,$$

где $q_i = \frac{\mu I}{m_i}$ — отношение массы вала к соответствующей сосредоточенной массе. В этом случае при выборе пробных значений ω^2 , по крайней мере для вычисления низших частот, можно руководствоваться теоремой о смещении частот системы от увеличения ее кинетической энергии (без изменения потенциальной).

Вековое уравнение для вала, закрепленного концами в поворачивающихся подшипниках и несущего n точечных масс m_1, m_2, \dots, m_n , можно составить с помощью гармонических коэффициентов (7.45). Пользуясь сокращенными обозначениями (стр. 245), напомним вековое уравнение системы следующим образом:

$$\begin{vmatrix} m_1 \omega^2 \Gamma_{11} - 1 & m_2 \omega^2 \Gamma_{12} & \dots & m_n \omega^2 \Gamma_{1n} \\ m_1 \omega^2 \Gamma_{21} & m_2 \omega^2 \Gamma_{22} - 1 & \dots & m_n \omega^2 \Gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \omega^2 \Gamma_{n1} & m_2 \omega^2 \Gamma_{n2} & \dots & m_n \omega^2 \Gamma_{nn} - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (7.50)$$

Уравнениями типа (7.50), как и соображениями, положенными в основу их вывода, пользовался С. А. Гершгорин в своих исследованиях влияния наложения дополнительных масс на колебания материальной системы¹⁾. В этих исследованиях им установлен критерий, с помощью которого можно отделять корни уравнения (7.50), когда известны частоты колебаний вала без сосредоточенных масс.

Уравнение (7.50) по форме не отличается от векового уравнения поперечных колебаний безмассового стержня, несущего n точечных масс m_1, \dots, m_n . Из гармонических коэффициентов влияния Γ_{ij} уравнение (7.50) составлено так же, как уравнение (4.19) из статических α_{ik} . Эта замечательная аналогия открывает возможность построения рационального метода так называемого «разноса» собственной

¹⁾ Гершгорин С. А., О влиянии наложения дополнительных масс на колебания материальной системы, Прикл. матем. и мех., т. 1, вып. 1, 1933.

массы вала по закрепленным на нем сосредоточенным массам, что обычно выполняется по недостаточно обоснованным правилам¹⁾.

Если вал имеет промежуточную опору и эта опора типа шарнирной (вращающийся подшипник), то, обозначив реакцию этой опоры через R , присоединяем ее к внешним (в данном случае — инерционным) силам, а к исходным уравнениям (7.49) добавляем уравнение

$$\varphi(a) = 0, \quad (7.51)$$

где a — абсцисса точки, в которой находится опора. Если промежуточная опора в точке $x = a$ — неподвижный подшипник, то, отнеся реакцию R и момент M , развиваемые такой опорой, к внешним силам и моментам, присоединяем к исходным уравнениям два следующих:

$$\varphi(a) = 0, \quad \varphi'(a) = 0, \quad (7.52)$$

так как в такой опоре равны нулю прогиб и угол поворота. Неподвижный подшипник, или связь типа (7.52), делит вал на две независимо колеблющиеся части.

8. Метод начальных параметров в матричной форме. Из уравнения упругой линии вала, нагруженного сосредоточенными силами Q_i и моментами M_i ²⁾, присоединив к нему первую, вторую и третью производные функции $\varphi(x)$, получим основные уравнения метода начальных параметров³⁾:

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= y_0 S(kx) + \theta_0 \frac{1}{k} T(kx) + \frac{M_0}{k^2 EJ} U(kx) + \frac{Q_0}{k^3 EJ} V(kx) + \\ &+ \sum_i \frac{M_i}{k^2 EJ} U[k(x-x_i)] + \sum_i \frac{Q_i}{k^3 EJ} V[k(x-x_i)], \\ \theta(x) &= -y_0 k V(kx) + \theta_0 S(kx) - \frac{M_0}{k EJ} T(kx) + \\ &+ \frac{Q_0}{k^2 EJ} U(kx) - \sum_i \frac{M_i}{k EJ} T[k(x-x_i)] + \sum_i \frac{Q_i}{k^2 EJ} U[k(x-x_i)], \\ M(x) &= EJ y_0 k^2 U(kx) + EJ \theta_0 k V(kx) + M_0 S(kx) + \\ &+ \frac{Q_0}{k} T(kx) + \sum_i M_i S[k(x-x_i)] + \sum_i \frac{Q_i}{k} T[k(x-x_i)], \\ Q(x) &= -EJ y_0 k^3 T(kx) + EJ \theta_0 k^2 U(kx) - M_0 k V(kx) + \\ &+ Q_0 S(kx) - \sum_i k M_i V[k(x-x_i)] + \sum_i Q_i S[k(x-x_i)]. \end{aligned} \right\} (7.53)$$

¹⁾ Некоторые правила приведения ступенчатых валов имеются у Е. Б. Лунца в цитированной на стр. 164 книге; у С. П. Тимошенко, Теория колебаний в инженерном деле; в книге: Пономарев С. Д. и др., Основы современных методов расчета на прочность, т. II, стр. 208. См. также Бернштейн С. А., Основы динамики сооружений, 1941, стр. 98.

²⁾ См. уравнения (7.40).

³⁾ О методе начальных параметров в применении к стержневым системам, кроме цитированной литературы, см. также книгу: Чудновский В. Г., Методы расчета колебаний и устойчивости стержневых систем, Изд. АН УССР, 1952.

Уравнения (7.53) можно представить в матричной форме. Мы построим такое представление для одного i -го отрезка (постоянной жесткости EJ_i) ступенчатого вала без сосредоточенных нагрузок.

Матричное уравнение для такого участка будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} y_{i+1} \\ \theta_{i+1} \\ M_{i+1} \\ Q_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(\alpha_i) & \frac{1}{k} T(\alpha_i) & \frac{1}{k^2 EJ} U(\alpha_i) & \frac{1}{k^3 EJ} V(\alpha_i) \\ k V(\alpha_i) & S(\alpha_i) & \frac{1}{k EJ} T(\alpha_i) & \frac{1}{k^2 EJ} U(\alpha_i) \\ EJ k^2 U(\alpha_i) & FJ k V(\alpha_i) & S(\alpha_i) & \frac{1}{k} T(\alpha_i) \\ EJ k^3 T(\alpha_i) & EJ k^2 U(\alpha_i) & k V(\alpha_i) & S(\alpha_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ Q_i \end{bmatrix}, \quad (7.54)$$

где $\alpha_i = kl_i$ и $k^4 = \frac{\nu p^2}{EJ}$.

Формулы (7.53) и их матричное представление (7.54) являются самыми общими выражениями параметров, определяющих динамические напряжения в сечениях ступенчатого вала, когда учитывается его собственная масса²⁾. Из этих формул могут быть получены все установленные раньше упрощенные расчетные соотношения для приведенных валов и однородных стержней и балок. Так, например, полагая $\mu_i \rightarrow 0$ ($k \rightarrow 0$) и используя первые слагаемые известных разложений sh , ch , \sin , \cos в ряды, мы легко получим из квадратной матрицы уравнения (7.54) матрицу жесткости (5.23). Положив $l_i \rightarrow 0$ и $l_i \mu_i \rightarrow m_i$, таким же путем придем к матрице сосредоточенной массы (5.23). Задаваясь граничными условиями для однородных стержней, мы получим из матричной формы (7.54) уравнения частот, приведенные в основных задачах. Так, для однородного стержня с шарнирными опорами по концам, умножив столбец начальных параметров

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \theta_0 \\ 0 \\ Q_0 \end{bmatrix}$$

на квадратную матрицу K , получим на другом конце стержня матрицу-столбец³⁾

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{k} T(kl) \theta_0 + \frac{1}{k^3 EJ} V(kl) Q_0 \\ * \\ EJ k V(kl) \theta_0 + \frac{1}{k} T(kl) Q_0 \\ * \end{bmatrix}$$

¹⁾ Дальше квадратная матрица из уравнения (7.54) для краткости обозначается через K_i .

²⁾ Thomson W. T., Journal of Applied Mechanics, № 3, 1950.

³⁾ Вычислять второй и четвертый элементы, если требуется только составить уравнения частот, нет надобности.

Приравняв нулю первый и третий элементы, получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{k} T(kl) \theta_0 + \frac{1}{k^3 EJ} V(kl) Q_0 &= 0, \\ EJkV(kl) \theta_0 + \frac{1}{k} T(kl) Q_0 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда получим уравнение частот (стр. 260)

$$T^2(kl) - V^2(kl) = 0.$$

Как для крутильных и продольных колебаний, так и для колебаний поперечных ступенчатого вала с сосредоточенными массами (дисками) можно построить матричную схему расчета, используя кроме матриц перехода K_i приведенные в гл. V матрицы жесткости и сосредоточенной массы с гироскопическим моментом (5.24). Так, для вала, шарнирно опертого по концам и несущего два диска (рис. 77), массы и экваториальные моменты инерции которых соответственно равны m_1, m_2, A_1, A_2 , матричная схема расчета выглядит следующим образом:

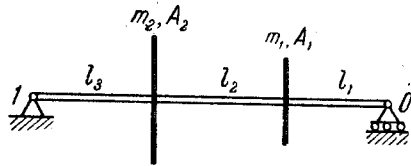


Рис. 77.

тотого по концам и несущего два диска (рис. 77), массы и экваториальные моменты инерции которых соответственно равны m_1, m_2, A_1, A_2 , матричная схема расчета выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ * \\ M_1 \\ * \end{pmatrix} = \|K_3\| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -A_2 p^2 & 1 & 0 \\ m_2 p^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \|K_2\| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -A_1 p^2 & 1 & 0 \\ m_1 p^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \|K_1\| \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_0 \\ 0 \\ Q_0 \end{pmatrix}. \quad (7.55)$$

Здесь K_1, K_2, K_3 — матрицы перехода (7.54) для участков вала l_1, l_2, l_3 .

Однако пользование формулой (7.55) целесообразно лишь для вычисления собственных частот способом последовательных проб, а также напряжений в сечениях вала при заданных значениях квадрата частоты. Самые вычисления производятся по таблицам функций А. Н. Крылова S, T, U, V^1 .

9. Поперечные колебания прямых стержней с внутренним неупругим сопротивлением. Как отмечалось раньше, исследования колебаний упругих систем с внутренним сопротивлением, принимаемым за главное или доминирующее сопротивление²⁾, в пределах

¹⁾ См. Крылов А. Н., О расчете балок, лежащих на упругом основании, Изд. АН СССР, 1931. См. также: Ананьев И. В., Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем. Гостехиздат, 1946.

²⁾ То есть сопротивление, в сравнении с которым другими сопротивлениями можно пренебречь.

линейной теории связаны с решительными упрощениями представлений о его природе и источниках, упрощениями, во многих случаях значительно снижающими ценность количественных результатов расчета, на этих представлениях основанного. В обширной литературе, посвященной исследованиям внутреннего сопротивления, имеются многочисленные рекомендации по поводу способов его учета, предлагаемые большей частью в виде формул, выражающих зависимость сил внутреннего сопротивления от величин деформаций, их скорости, от характера и способа нагружения и других обстоятельств¹⁾. Как правило, эти формулы имеют в виду более или менее точное описание внешних проявлений внутреннего сопротивления, а не раскрытие сущности механизма их возникновения, который до сих пор остается невыясненным. Мы отметим только те из этих формул, пользование которыми допустимо по тем или иным соображениям в линейных задачах.

К числу таких формул относится прежде всего формула Фохта, согласно которой сила внутреннего сопротивления принимается пропорциональной первой степени скорости деформации или скорости изменения упругой восстанавливающей силы. В уравнении поперечных колебаний однородного стержня

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

упругая восстанавливающая сила представлена первым слагаемым, содержащим четвертую производную y по x . Скорость изменения восстанавливающей силы равна

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right] = EJ \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x^4},$$

и сила R внутреннего сопротивления по Фохту принимается равной

$$R = hEJ \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x^4}, \quad (7.56)$$

где h — постоянный коэффициент. При таком предположении относительно внутреннего сопротивления уравнение колебаний будет иметь вид

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + h \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x^4} + \frac{\mu}{EJ} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Оно остается, таким образом, линейным уравнением. Однако лежащее в основе формулы (7.56) предположение о пропорциональности внутреннего сопротивления скорости деформации опытом не под-

¹⁾ Сводку таких формул см. в книге: Сорокин Е. С., К вопросу неупругого сопротивления строительных материалов при колебаниях, ЦНИИС, Стройиздат, 1954.

тверждается, и пользование этой формулой в задачах на упругие колебания имеет в основном теоретический интерес. Более обоснованным представляется применение в линейных расчетах уже не раз встречавшейся нам формулы Е. С. Сорокина. Согласно этой формуле полное внутреннее сопротивление S^* при циклических деформациях стержня складывается из упругого сопротивления S , равного упругой восстанавливающей силе, и неупругого сопротивления R , пропорционального упругой восстанавливающей силе, но сдвинутого по фазе относительно последней на $\pi/2$. Такое полное сопротивление может быть представлено формулой (см. § 19 гл. III)

$$S^* = S + R = S \left(1 + \frac{i\psi}{2\pi} \right), \quad (7.57)$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Коэффициент поглощения ψ , равный отношению поглощенной за один цикл энергии ΔW к полной энергии системы W , в первом приближении можно считать не зависящим от размеров и формы стержня, а также от интенсивности напряженного состояния. Когда последнее изменяется по гармоническому закону, коэффициент поглощения имеет постоянное значение. Это постоянное значение ψ приблизительно равно удвоенному декременту свободных колебаний стержня, как это легко вывести из формулы (2.19). Предположим, что стержень совершает первое главное колебание. Все точки его оси одновременно достигают наибольших отклонений, и в этом амплитудном отклонении потенциальная энергия стержня равна его полной энергии W .

Пусть y — амплитуда конца стержня. Можно написать, что $W = by^2$, где b — постоянная, зависящая от формы колебания стержня. За один период амплитуда y уменьшится на Δy . Новое значение полной энергии будет

$$W - \Delta W = b(y - \Delta y)^2 = b[y^2 - 2y\Delta y + (\Delta y)^2].$$

Вычтя это выражение из $W = by^2$, получим, отбросив $(\Delta y)^2$,

$$\Delta W = 2by\Delta y,$$

откуда

$$\frac{\Delta W}{2W} = \frac{\Delta y}{y} = \delta \quad (7.58)$$

и

$$\psi = \frac{\Delta W}{W} = 2\delta. \quad (7.59)$$

Поэтому формула (7.57) для однородного стержня, совершающего изгибные колебания, примет вид

$$S^* = \left(1 + \frac{i\delta}{\pi} \right) EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}. \quad (7.60)$$

Формула (7.60) применима в практических расчетах (с относительно небольшой погрешностью), только когда δ весьма мало. В этом случае результаты расчета по этой формуле совпадают с результатами, полученными другими методами (например, энергетическим). Кроме того, область применения этой формулы должна быть, по-видимому, ограничена вынужденными колебаниями от гармонической возмущающей силы, поскольку при выводе этой формулы существенным образом предполагается, что колебания системы происходят по гармоническому закону. Недостаточно обоснованное применение этой формулы к свободным колебаниям приводит к выводам, противоречащим общеизвестным фактам. Так, например, формула (7.60) дает для частоты затухающих свободных колебаний значение, превышающее частоту собственных колебаний системы без сопротивлений.

В одной из недавних работ Е. С. Сорокина¹⁾ формула (7.60) подверглась существенным усовершенствованиям, учитывающим между прочими и пластические деформации при наличии в теле начальных напряжений. Исходя из полученного статистическим методом уравнения петли гистерезиса, Е. С. Сорокин получил следующее выражение для суммарной силы S^* :

$$S^* = S(u + iv), \quad (7.61)$$

где при $\frac{\delta}{\pi} = \gamma$

$$u = \frac{1 - \frac{\gamma^2}{4}}{1 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad v = \frac{\gamma}{1 + \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Этой формулой устраняется только что отмеченное несовершенство формулы (7.60), и она, т. е. формула (7.61), оказывается одинаково хорошо применимой как для вынужденных, так и для свободных колебаний. В рассматриваемых дальше задачах на вынужденные колебания мы будем, однако, пользоваться упрощенной формулой (7.60), отбрасывая $\gamma^2/4$ как весьма малую величину²⁾.

Пример 8. При составлении уравнения колебаний стержня с комплексным сопротивлением гармоническую возмущающую силу следует брать также в комплексной форме, полагая, например,

$$F^* = F(x) e^{i\omega t}.$$

¹⁾ Сорокин Е. С., К теории внутреннего трения при колебаниях упругих тел, ЦНИИС, 1960.

²⁾ Другие формулы приведены в книге: Филиппов А. П., Колебания упругих систем, Изд. АН УССР, 1956, гл. 6. Нелинейная теория неупругого сопротивления дана в монографии: Писаренко Г. С., Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале, Изд. АН УССР, 1955.

В этом случае уравнение вынужденных колебаний будет иметь вид

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(1 + \frac{i\delta}{\pi}\right) EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F(x) e^{i\omega t}. \quad (7.62)$$

Установившиеся вынужденные колебания стержня будем искать в виде разложения

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) e^{i\omega t}$$

по собственным формам соответствующей однородной задачи без сопротивления, т. е. по функциям $\varphi_k(x)$, удовлетворяющим уравнению

$$EJ \varphi_k^{IV}(x) = \mu p_k^2 \varphi_k(x).$$

Функцию $F(x)$ также представим в виде разложения по тем же функциям $\varphi_k(x)$:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(x),$$

где

$$b_k = \frac{\int_0^l F(x) \varphi_k(x) dx}{\int_0^l \varphi_k^2(x) dx}.$$

Подставив эти разложения в уравнение (7.62), получим

$$\mu \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[\left(1 + \frac{i\delta}{\pi}\right) p_k^2 - \omega^2 \right] \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(x).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых $\varphi_k(x)$ справа и слева, найдем

$$a_k = \frac{b_k}{\mu \left[\left(1 + \frac{i\delta}{\pi}\right) p_k^2 - \omega^2 \right]}.$$

Это выражение для a_k можно представить еще и в такой форме:

$$a_k = \frac{b_k}{\mu} R_k e^{i\varphi_k},$$

где

$$R_k = \frac{1}{\sqrt{(p_k^2 - \omega^2)^2 + \frac{\delta^2}{\pi^2} p_k^4}}; \quad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{\frac{\delta}{\pi} p_k^2}{p_k^2 - \omega^2}.$$

В этих обозначениях $y(x, t)$ получит следующее выражение:

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\mu} R_k \varphi_k(x) e^{i(\omega t + \varphi_k)}.$$

Вещественная часть последнего выражения представит искомое решение уравнения (7.62):

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\mu} R_k \varphi_k(x) \cos(\omega t + \varphi_k). \quad (7.63)$$

При резонансе с первой собственной частотой, когда $\omega = p_1$,

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad R_1 = \frac{\pi}{\delta p_1^2},$$

сумма (7.63), если выделить в ней первое слагаемое, напишется так:

$$y(x, t) = \frac{b_1 \pi}{\mu \delta p_1^2} \varphi_1(x) \sin p_1 t + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k}{\mu} R_k \varphi_k(x) \cos(p_k t + \varphi_k). \quad (7.64)$$

Если δ мало (как обычно и бывает) и вторая частота значительно превышает первую, то приближенно можно положить для формы колебаний

$$u(x) \approx \frac{b_1 \pi}{\mu \delta p_1^2} \varphi_1(x), \quad (7.65)$$

т. е. считать, что форма резонансных вынужденных колебаний совпадает с первой собственной формой. Только в этом случае является до некоторой степени оправданным обычно принимаемое в практических расчетах допущение, что при резонансе за форму вынужденных колебаний можно брать собственную форму, соответствующую резонирующей частоте.

Пример 9. Рассмотрим, например, однородную лопатку со свободным концом. В этом случае¹⁾

$$\int_0^l \varphi_1^2(x) dx = \frac{l}{4} \varphi_1^2(l). \quad (7.65')$$

Первая собственная форма колебания

$$\varphi_1(x) = C [U(kx) - 0,734 V(kx)], \quad (7.66)$$

где $k^4 = \frac{\mu p_1^2}{EJ}$. Постоянную C можно выразить через прогиб на свободном конце, т. е. через $\varphi_1(l)$. В самом деле, положив в (7.66) $x = l$, найдем

$$C = 1,00003 \varphi_1(l) \approx \varphi_1(l).$$

Таким образом,

$$\varphi_1(x) = \varphi_1(l) [U(kx) - 0,734 V(kx)].$$

Пусть

$$F(x) = \frac{f_0}{2} = \text{const.}$$

¹⁾ См. таблицу IV в конце книги, формула 18.

Тогда

$$\int_0^l F(x) \varphi_1(x) dx = 0,394 l \varphi_1(l) \frac{f_0}{2} \quad (7.67)$$

и

$$b_1 = \frac{f_0}{2 \varphi_1(l) 0,635}. \quad (7.68)$$

Воспользовавшись формулой (7.65), найдем абсолютную величину амплитуды колебаний свободного конца лопатки ($x = l$)

$$u(l) = \frac{\pi f_0}{2 \delta \rho_1^2 \mu 0,635}. \quad (7.69)$$

Формулой (7.69) можно воспользоваться для приближенного расчета дополнительных напряжений турбинной лопатки от резонансных колебаний. Если считать, что давление пара на лопатку изменяется по закону

$$Q(x, t) = \frac{f_0}{2} (1 + \cos pt),$$

то

$$F(x) = \frac{f_0}{2}$$

и для амплитуды свободного конца имеет место формула (7.69). Максимальное напряжение в каком-либо сечении лопатки при изгибе определяется по приближенной формуле

$$\sigma = Eh \frac{d^2 u}{dx^2},$$

где E — модуль упругости, h — расстояние от нейтральной оси сечения до крайнего (наиболее удаленного) волокна (рис. 78).

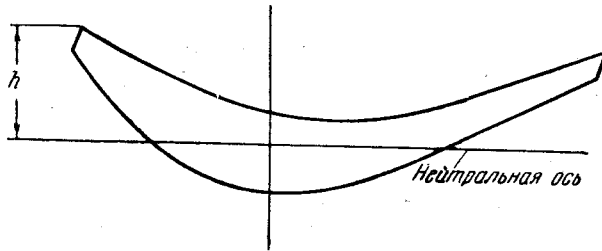


Рис. 78.

Из формулы (7.65), принимая во внимание (7.68), находим

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{b_1 \pi}{\delta \rho_1^2} \varphi_1(l) \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} = \frac{f_0 \pi k^2}{2 \mu \rho_1^2 \delta 0,635} [S(kx) - 0,734 T(kx)]. \quad (7.70)$$

Для $x = 0$, где изгибающий момент имеет наибольшее значение

$$\left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)_{x=0} = \frac{f_0 \pi k^2}{2 \mu \rho_1^2 \delta 0,635} \varphi_1(l),$$

максимальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{E h f_0 \pi k^2}{1,27 \mu \delta \rho_1^2} \varphi_1(l) \quad (7.71)$$

или, принимая во внимание формулы

$$k^4 = \frac{\mu \rho_1^2}{E J}, \quad k^2 l^2 = (1,875)^2,$$

имеем

$$\sigma_{\max} = \frac{\pi h f_0 l^2}{1,27 (1,875)^2 J \delta} = 0,703 \frac{h f_0 l^2}{J \delta}. \quad (7.72)$$

Формулу (7.72) можно получить и другим способом, исходя из энергетических соображений, именно, из допущения, что в установившихся вынужденных колебаниях при резонансе работа возмущающей гармонической нагрузки за один цикл колебаний равна работе сопротивления¹⁾.

¹⁾ Kimball A., Vibration Prevention in Engineering. New York, 1932; Шнее Я. И., К вопросу о вибрации лопаток паровых турбин. Энергетика, № 4, 1934.

ГЛАВА VIII

НЕКОТОРЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА
КОЛЕБАНИЙ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

1. Вариационные методы. Принцип Остроградского — Гамильтона был использован в предыдущих главах для вывода уравнений продольных, крутильных и поперечных колебаний стержня — уравнений, которые затем решались при заданных краевых условиях известными методами дифференциального исчисления. Этим, однако, далеко не исчерпывается значение принципа в теории колебаний. Устанавливая эквивалентность решения краевых задач дифференциального исчисления с решением задачи об экстремуме функционала, принцип Остроградского — Гамильтона открывает возможность привлечения к вибрационным расчетам некоторых специальных методов вариационного исчисления. Сюда относятся прежде всего так называемые прямые методы вариационного исчисления, применение которых оказывается эффективным в приближенных расчетах собственных частот и форм колебаний стержней переменного сечения с неравномерным распределением жесткости и массы, иногда заданных графически. Из таких методов наибольшее распространение в расчетной практике получили методы Рэлея¹⁾, Ритца²⁾ и Б. Г. Галеркина³⁾. Мы изложим основное содержание этих методов в применении к расчету поперечных колебаний неоднородного стержня, для которого функционал Остроградского — Гамильтона имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[\mu(x) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx dt. \quad (8.1)$$

¹⁾ Рэлея, Теория звука, т. I, Гостехиздат, 1955.

²⁾ Ritz W., Über neue Methode zur Lösung gewisser Variationsproblemen. Z. für reine und angew. Math., 1909, стр. 135.

³⁾ Галеркин Б. Г., Стержни и пластинки, Вестник инженеров и техников, 1915, № 19.

Метод Галеркина следовало бы назвать методом Бубнова — Галеркина. И. Г. Бубнов раньше Б. Г. Галеркина (в 1913 г.) дал описание этого метода в отзыве на работу С. П. Тимошенко «Об устойчивости упругих систем».

II

Те соображения, какие лежат в основе применения прямых методов к расчету поперечных колебаний, остаются в силе без существенных изменений и для колебаний продольных и крутильных с функционалами

$$S_1 = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[\mu(x) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - EA \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt \quad (8.2)$$

для продольных колебаний и

$$S_2 = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[J(x) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - GJ_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt \quad (8.3)$$

для колебаний крутильных¹⁾.

Имея в виду определение собственных частот и форм главных колебаний, подставим в функционал (8.1)

$$y(x, t) = \varphi(x) \sin(pt + \alpha). \quad (8.4)$$

После интегрирования по t в пределах одного периода $2\pi/p$ получим

$$S = \frac{\pi}{2p} \int_0^l \left[\mu(x) p^2 \varphi^2(x) - EJ \{ \varphi''(x) \}^2 \right] dx. \quad (8.5)$$

Делая подстановку (8.4), мы ограничиваем класс привлекаемых для сравнения движений гармоническими колебаниями одного и того же периода с различными, но достаточно близкими друг другу формами колебаний. Уравнения таких «окольных» колебаний будут иметь вид

$$y + \delta y = (\varphi + \delta \varphi) \sin(pt + \alpha), \quad (8.6)$$

где δy и $\delta \varphi$ обозначают соответственно изохронные вариации функций $y(x, t)$ и $\varphi(x)$. Варьируемые формы колебаний

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) + \delta \varphi \quad (8.7)$$

должны удовлетворять условиям закрепления стержня, т. е. наложенным на систему связям. При этом большую часть достаточно, чтобы эти формы удовлетворяли только геометрическим условиям, так как выполнение динамических условий в этом случае будет следовать из обращения в нуль первой вариации соответствующего

¹⁾ Входящие в состав функционалов обозначения сохраняют прежние значения (см. гл. VI и VII).

функционала. В самом деле, вычислив первую вариацию функционала (8.5)

$$\delta S = \frac{\pi}{p} \int_0^l [\mu(x) p^2 \varphi(x) \delta\varphi(x) - EJ\varphi''(x) \delta\varphi''(x)] dx \quad (8.8)$$

и выполнив дважды интегрирование по частям во втором слагаемом подынтегрального выражения, приведем (8.8) к виду

$$\delta S = \frac{\pi}{p} \int_0^l [- (EJ\varphi'')' + \mu p^2 \varphi] \delta\varphi dx + \frac{\pi}{p} \{ (EJ\varphi')' \delta\varphi - EJ\varphi'' \delta\varphi' \}_0^l.$$

Если $\varphi(x)$ — форма действительного главного колебания, то

$$\int_0^l [\mu p^2 \varphi - (EJ\varphi'')'] \delta\varphi dx = 0$$

и из обращения в нуль вариации δS , т. е. из уравнения

$$\int_0^l [\mu p^2 \varphi - (EJ\varphi'')'] \delta\varphi dx + \{ (EJ\varphi')' \delta\varphi - EJ\varphi'' \delta\varphi' \}_0^l = 0$$

будет следовать, что

$$\{ (EJ\varphi')' \delta\varphi - EJ\varphi'' \delta\varphi' \}_0^l = 0. \quad (8.9)$$

Теперь нетрудно убедиться, что в силу (8.9) выполнение геометрических условий автоматически влечет за собой выполнение и динамических условий.

Рассмотрим некоторые простейшие случаи закрепления стержня.

Пусть, например, левый конец ($x=0$) стержня жестко закреплен, а правый ($x=l$) свободен. В этом случае уравнение (8.9) будет иметь вид

$$[(EJ\varphi')' \delta\varphi - EJ\varphi'' \delta\varphi']_{x=l} = 0 \quad (8.10)$$

и так как на конце ($x=l$) $\delta\varphi$ и $\delta\varphi'$ произвольны, то из (8.10) следует, что на этом конце равны нулю и поперечная сила $(EJ\varphi')'$ и изгибающий момент $EJ\varphi''$.

Пусть стержень опирается концами на шарнирные опоры. Геометрические краевые условия:

$$(\delta\varphi)_{x=0} = (\delta\varphi)_{x=l} = 0.$$

Первый член в уравнении (8.9) выпадает, и оно обращается в следующее:

$$EJ\varphi'' \delta\varphi' \Big|_0^l = 0.$$

При произвольном $\delta\varphi'$ на левом и правом концах из последнего равенства следует обращение в нуль на тех же концах изгибающего момента.

Если оба конца стержня свободны, то $\delta\varphi$ и $\delta\varphi'$ произвольны и для $x=0$, и для $x=l$. Из условия (8.9) следует, что на свободных концах стержня равны нулю $(EJ\varphi')'$ и $(EJ\varphi'')$, т. е. выполнены и динамические условия.

2. Метод Ритца. Сущность метода заключается в приведении вариационной задачи к задаче на разыскание экстремума функции многих независимых переменных. Такое приведение осуществляется путем отбора из всех возможных допустимых функций, на которых рассматриваются значения функционала, некоторого специального класса функций, зависящих от конечного числа сначала неопределенных параметров. Подстановка таких функций в выражение функционала превращает его в функцию этих параметров, экстремум которой может быть найден известными элементарными способами.

По Ритцу значения функционала (8.5) рассматриваются на совокупности выражений вида

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i(x), \quad (8.11)$$

где α_i — параметры, варьируя которые мы получаем нужный класс допустимых функций, а $\psi_i(x)$ — так называемые *базисные* или *координатные функции* — специально выбираемые или задаваемые известные функции, удовлетворяющие по крайней мере геометрическим краевым условиям рассматриваемой задачи. На совокупности функций (8.11) соответствующий функционал обращается в функцию n независимых переменных α_i ($i=1, 2, \dots, n$)

$$S(\psi) = S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

и его первая вариация

$$\delta S[\psi] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i.$$

Найдя значения параметров α_i из уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (8.12)$$

и подставив их в (8.11), мы получим приближенное решение поставленной задачи.

Так как функционалы, соответствующие дифференциальным уравнениям малых колебаний прямых стержней, являются квадратичными относительно $\psi(x)$, то уравнения (8.12) линейны относительно

личении m последовательность (8.18) стремится к точному значению квадрата собственной частоты p_k^2 , оставаясь все время больше последнего. Можно поэтому утверждать, что корни уравнений (8.15) дают приближенные значения квадратов первых n собственных частот рассматриваемой системы с избытком, иначе говоря, определяют верхние границы этих частот.

Что касается выбора базисных форм $\psi_i(x)$, то кроме сделанных выше замечаний о краевых условиях, которым они должны удовлетворять, приводим еще некоторые рекомендации практического характера.

Во многих случаях базисные формы удобно брать в виде простых многочленов, задавая последние сначала с неопределенными коэффициентами и затем определяя эти коэффициенты из краевых условий задачи. Когда, например, для одночленного приближения нужно построить многочлен, удовлетворяющий только геометрическим условиям, полагаем

$$\psi(x) = 1 + A_1x + A_2x^2$$

и вычисляем коэффициенты из условий равенства нулю прогиба или угла поворота на одном из концов стержня.

Расчет, как правило, уточняется и сокращается, если удастся подобрать базисные формы, удовлетворяющие не только геометрическим, но и динамическим условиям. Хотя базисные формы в остальном произвольны, однако для ускорения расчета целесообразно выбирать их, до некоторой степени соотносясь с возможными деформациями стержня при колебаниях, например с симметрией деформаций, если таковая имеет место.

Во многих случаях хорошие результаты получаются при использовании в качестве базисных функций собственных форм колебаний однородного стержня при тех же условиях закрепления, что и в данной задаче¹⁾.

Задавая эти формы выражениями

$$\psi_i(x) = \sin \frac{\lambda_i x}{l} + A_i \cos \frac{\lambda_i x}{l} + B_i \operatorname{sh} \frac{\lambda_i x}{l} + C_i \operatorname{ch} \frac{\lambda_i x}{l},$$

где $\lambda_i = k_i l$, $k_i^4 = \frac{\mu p_i^2}{EJ}$, а i — порядок собственной формы, и подбирая постоянные A_i , B_i , C_i в соответствии с условиями закрепления стержня, можно строить минимизирующие формы, удовлетворяющие не только геометрическим, но и динамическим краевым условиям задачи, что необходимо в расчетах собственных частот методом Галеркина.

¹⁾ Сорокин Е. С., Динамика междуэтажных перекрытий. Стройиздат, 1941.

3. Метод Рэлея. Когда ряд (8.11) содержит только одну базисную функцию, уравнение частот (8.15) имеет вид

$$\Pi_{11} - p^2 T_{11} = 0, \quad (8.19)$$

где Π_{11} , $p^2 T_{11}$ представляют максимальные значения потенциальной и кинетической энергии для одночленной минимизирующей формы¹⁾

$$\psi(x) = \psi_1(x).$$

Мы приходим, таким образом, к известной уже нам формуле Рэлея

$$R = \frac{\Pi_{\max}}{T_{\max}}, \quad (8.20)$$

где через Π_{\max} обозначена максимальная потенциальная энергия, а через T_{\max} — максимальная кинетическая энергия без множителя p^2 .

В зависимости от вида колебаний формула (8.20) имеет различные выражения. Так, для поперечных колебаний она будет иметь вид (в обозначениях гл. VII)

$$R = \frac{\int_0^l EJ \psi'^2 dx}{\int_0^l \mu \psi^2(x) dx}. \quad (8.21)$$

Для продольных колебаний (в обозначениях гл. VI)

$$R = \frac{\int_0^l EA \psi'^2(x) dx}{\int_0^l \mu \psi^2(x) dx}, \quad (8.22)$$

для крутильных (в обозначениях гл. VI)

$$R = \frac{\int_0^l GJ_p \psi'^2(x) dx}{\int_0^l J \psi^2(x) dx}. \quad (8.23)$$

Если в эти формулы подставить разложение функции $\psi(x)$ по

¹⁾ Коэффициент α_i писать не нужно, так как в одночленных формулах он везде сокращается.

собственным формам

$$\psi(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x), \quad (8.24)$$

то для формул (8.21), (8.22) и (8.23) получим одно выражение

$$R = \frac{a_1^2 p_1^2 + a_2^2 p_2^2 + \dots}{a_1^2 + a_2^2 + \dots} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 p_i^2}{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}, \quad (8.25)$$

в котором p_i — собственные частоты системы. Можно считать (8.25) представлением формулы Рэля в нормальных координатах, роль каких-то здесь играют коэффициенты разложения (8.24): a_1, a_2, a_3, \dots

Из формулы (8.25) можно сделать ряд важных заключений, обобщающих известную теорему Рэля о минимальных свойствах собственных частот (см. § 15 гл. III) на системы с бесконечным числом степеней свободы.

Пусть

$$p_1^2 < p_2^2 < p_3^2 < \dots$$

Значение дроби (8.25) больше наименьшей из частных дробей

$$\frac{a_i^2 p_i^2}{a_i^2},$$

каковой, очевидно, является дробь

$$\frac{a_1^2 p_1^2}{a_1^2} = p_1^2.$$

Следовательно, квадрат наименьшей основной частоты является абсолютным минимумом дроби (8.25) для любой формы $\psi(x)$.

Если минимизирующая форма $\psi(x)$ будет выбрана так, что

$$\int_0^l \mu \psi(x) \varphi_1(x) dx = 0,$$

т. е. будет ортогональна к первой собственной форме, то $a_1 = 0$ и формула (8.25) примет вид

$$R = \frac{a_2^2 p_2^2 + a_3^2 p_3^2 + \dots}{a_2^2 + a_3^2 + \dots}.$$

При таком выборе формы $\psi(x)$ минимумом функции Рэля будет квадрат второй частоты. Если функция $\psi(x)$ будет удовлетворять двум условиям

$$\int_0^l \mu \psi(x) \varphi_1(x) dx = 0, \quad \int_0^l \mu \psi(x) \varphi_2(x) dx = 0,$$

т. е. будет одновременно ортогональна к первой и второй собственным формам, то

$$R = \frac{a_3^2 p_3^2 + a_4^2 p_4^2 + \dots}{a_3^2 + a_4^2 + \dots}$$

и минимумом R будет квадрат 3-й собственной частоты и т. д. Квадрат h -й собственной частоты будет относительным минимумом функции Рэля для всех форм $\psi(x)$, удовлетворяющих $h-1$ условиям ортогональности к первым $h-1$ собственным формам

$$\int_0^l \mu \psi(x) \varphi_1(x) dx = 0,$$

$$\int_0^l \mu \psi(x) \varphi_2(x) dx = 0, \dots, \int_0^l \mu \psi(x) \varphi_{h-1}(x) dx = 0.$$

Пример 1: Найти основную частоту поперечных колебаний консольного клина длиной l и шириной 1 м со свободным острым и жестко закрепленным концами (рис. 79).

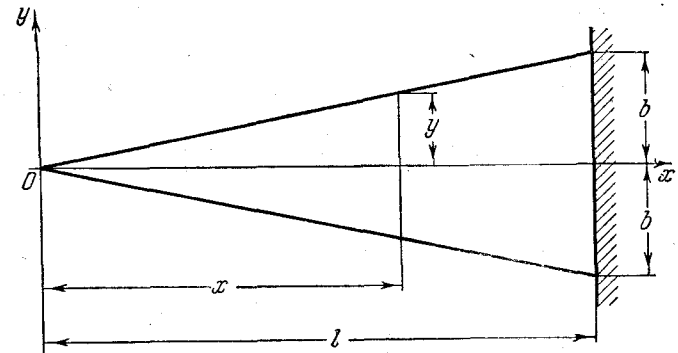


Рис. 79.

Расположив оси координат, как показано на рисунке, находим:

$$1) \text{ площадь поперечного сечения} \\ A(x) = 2b \frac{x}{l} = A_0 \frac{x}{l},$$

где $A_0 = 2b \cdot 1$ — площадь основания клина;
2) погонную массу

$$\mu(x) = \frac{\gamma A}{g} = 2b \frac{x}{l} \frac{\gamma}{g} = \mu_0 \frac{x}{l},$$

где γ — удельный вес (кг/см^3), $\mu_0 = 2b \frac{\gamma}{g}$;

3) момент инерции поперечного сечения

$$J(x) = 2y \int \frac{y^2}{3} = \frac{2b^2 x^3}{3l^3} = J_0 \frac{x^3}{l^3},$$

где $J_0 = \frac{2}{3} b^3$.

Краевые условия на левом конце $x=0$

$$\varphi''(0) = \varphi'''(0) = 0,$$

на правом $x=l$

$$\varphi(l) = \varphi'(l) = 0.$$

Имея в виду применить к решению задачи метод Ритца, мы должны подобрать в качестве базисных форм функции, удовлетворяющие только геометрическим условиям. Таковыми будут, например, функции

$$\psi_i(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{x^{i-1}}{l^{i-1}} \quad (i=1, 2, \dots).$$

Минимизирующая форма, составленная из таких функций, будет иметь вид

$$\psi(x) = \alpha_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + \alpha_2 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{x}{l} + \alpha_3 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{x^2}{l^2} + \dots$$

В первом одночленном приближении полагаем в формулах (8.14)

$$\psi_1(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2.$$

Тогда

$$T_{11} = \int_0^l \mu(x) \psi_1^2(x) dx = \int_0^l \mu_0 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^4 dx = \frac{\mu_0 l}{30},$$

$$\Pi_{11} = \int_0^l EJ [\psi_1'(x)]^2 dx = \frac{EJ_0}{l^3}.$$

Из уравнения частот

$$\Pi_{11} - p^2 T_{11} = 0$$

находим верхнюю границу первой частоты

$$p_1 \leq \frac{5,48}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{\mu_0}}.$$

Приняв

$$p_1 = \frac{5,48}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{\mu_0}},$$

получим значение, на 3% превышающее значение

$$p_1 = \frac{5,315}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{\mu_0}},$$

найденное Кирхгофом¹⁾.

¹⁾ См. Тимошенко С. П., цит. на стр. 151.

Для второго приближения берем

$$\psi(x) = \alpha_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + \alpha_2 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{x}{l}$$

и вычисляем по формулам (8.14) величины

$$\Pi_{11} = \frac{EJ_0}{l^3}, \quad \Pi_{12} = \Pi_{21} = \frac{2EJ_0}{5l^3}, \quad \Pi_{22} = \frac{2EJ_0}{5l^3},$$

$$T_{11} = \frac{\mu_0 l}{30}, \quad T_{12} = T_{21} = \frac{\mu_0 l}{105}, \quad T_{22} = \frac{\mu_0 l}{280}.$$

Из уравнения частот Ритца

$$\begin{vmatrix} \frac{EJ_0}{l^3} - p^2 \frac{\mu_0 l}{30} & \frac{2EJ_0}{5l^3} - p^2 \frac{\mu_0 l}{105} \\ \frac{2EJ_0}{5l^3} - p^2 \frac{\mu_0 l}{105} & \frac{2EJ_0}{5l^3} - p^2 \frac{\mu_0 l}{280} \end{vmatrix} = 0$$

находим для меньшего корня значение

$$p_1 = \frac{5,319}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{\mu_0}},$$

всего лишь на 0,1% превышающее полученную Кирхгофом первую частоту.

Пример 2. Найти первую и вторую частоты колебаний балки с двумя сосредоточенными массами, каждая из которых равна массе всей балки, и с массой, равномерно распределенной на средней трети длины балки¹⁾.

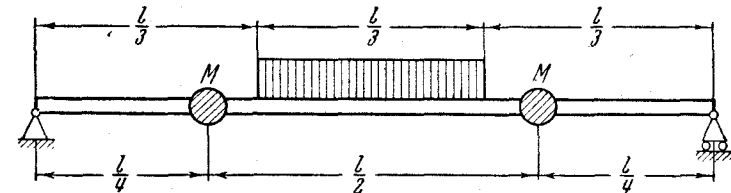


Рис. 80.

Расположение масс показано на рис. 80. Балка опирается концами на шарнирные опоры. Обозначим через μ постоянную погонную массу балки. Пусть $\mu_0 = \mu$ — погонная масса нагрузки среднего участка; $M = \mu l$ — масса каждого сосредоточенного груза. Тогда для максимальной кинетической и потенциальной энергии будем иметь выражения

$$\left. \begin{aligned} 2T_{\max} &= \mu p^2 \left[\int_0^l \varphi^2(x) dx + \int_{l/3}^{2l/3} \varphi^2(x) dx + l\varphi^2\left(\frac{l}{4}\right) + l\varphi^2\left(\frac{3l}{4}\right) \right], \\ 2\Pi_{\max} &= EJ \int_0^l \varphi'^2 dx. \end{aligned} \right\} (8.26)$$

¹⁾ См. работу Е. С. Сорокина, цит. на стр. 300.

В качестве базисных форм берем собственные формы колебаний однородной балки, свободно опертой по концам

$$\psi_i(x) = \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (i=1, 2, \dots),$$

а в качестве минимизирующей формы — конечный ряд

$$\psi(x) = \alpha_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \alpha_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Для первого одночленного приближения, положив

$$\psi_1 = \sin \frac{\pi x}{l},$$

находим по формулам (8.26)

$$\Pi_{11} = \frac{EJ\pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{EJ\pi^4}{2l^3},$$

$$T_{11} = \mu \left[\int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx + \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx + l \sin^2 \frac{\pi}{4} + l \sin^2 \frac{3\pi}{4} \right] = \frac{5\mu l}{3}.$$

После чего из уравнения

$$T_{11}p^2 - \Pi_{11} = 0$$

получаем для верхней границы основной частоты

$$p_1 \leq \frac{5,38}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}.$$

При вычислении второго приближения основной частоты следует взять в качестве минимизирующей формы

$$\psi(x) = \alpha_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \alpha_2 \sin \frac{3\pi x}{l}, \quad (8.27)$$

так как первая форма симметрична относительно середины балки. Взяв вместо второго слагаемого в (8.27) $\sin \frac{2\pi x}{l}$, мы, как показывают вычисления, не улучшим первое приближение. Подставив (8.27) в выражения для T_{11} , T_{12} , T_{22} , Π_{11} , Π_{12} , Π_{22} , получим

$$\Pi_{11} = \frac{EJ\pi^4}{2l^3}, \quad \Pi_{12} = \Pi_{21} = 0, \quad \Pi_{22} = \frac{81EJ\pi^4}{2l^3},$$

$$T_{11} = \frac{5l\mu}{3}, \quad T_{12} = T_{21} = \mu l, \quad T_{22} = \frac{5\mu l}{3}.$$

Уравнение частот

$$\begin{vmatrix} \frac{EJ\pi^4}{2l^3} - \mu p^2 \frac{5l}{3} & -\mu p^2 l \\ -\mu p^2 l & \frac{81EJ\pi^4}{2l^3} - \mu p^2 \frac{5l}{3} \end{vmatrix} = 0,$$

если положить

$$\frac{EJ\pi^4}{\mu l^4 p^2} = x,$$

будет иметь вид

$$\left(0,5x - \frac{5}{3}\right) \left(40,5x - \frac{5}{3}\right) - 1 = 0$$

или

$$x^2 - 3,374x + 0,088 = 0.$$

Отсюда

$$x_1 = 3,347; \quad x_2 = 0,027$$

и

$$p_1 = \frac{5,36}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}.$$

Второе приближение мало отличается от первого, и потому искать следующие приближения нет надобности.

Для вычисления второй частоты в выражении минимизирующей формы следует взять слагаемые с четными аргументами. Так, имея в виду первое приближение второй частоты, полагаем

$$\psi_2(x) = \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

Тогда

$$T_{11} = 1,299\mu l; \quad \Pi_{11} = \frac{4EJ\pi^4}{l^3}$$

и из уравнения

$$T_{11}p^2 - \Pi_{11} = 0$$

находим

$$p_2 \approx 17,31 \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}.$$

Вычислив второе приближение для p_2 , найдем, что в пределах первых трех десятичных знаков оно совпадает с первым, на котором и следует закончить расчет.

Пример 3. Метод Рэлея в применении к расчету основной частоты однородных стержней. Как известно, одно из первых предложений по поводу выбора минимизирующих форм было сделано Рэлеем. Рэлей предложил брать в качестве минимизирующей функции при расчете первой частоты стержня форму статической деформации от заданной нагрузки или от нагрузки более или менее близко воспроизводящей общий вид деформации стержня в первом главном его колебании. Эта рекомендация оказывается, как правило, весьма эффективной и при сравнительно малых затратах времени приводящей к замечательно точным результатам. Чтобы иметь возможность сравнить результаты применения метода Рэлея с известными точными решениями, мы рассмотрим некоторые из разобранных в гл. VI и VII примеров на колебания однородного стержня.

Статический прогиб однородного консольного стержня от равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q (например, от собственного веса стержня) определяется формулой

$$\psi(x) = \frac{q l^4}{24EJ} \left(\frac{x^4}{l^4} - 4 \frac{x^3}{l^3} + 6 \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Подставив это выражение в формулу (8.21), получим для первой частоты значение

$$p_1 = \frac{3,530}{l^2} \sqrt{\frac{EJg}{\mu}},$$

отличающееся от «точного»

$$p_1 = \frac{(1,875)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} = \frac{3,516}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$$

на + 0,4%.

Если бы в рассматриваемом примере в качестве минимизирующей функции мы взяли статический прогиб стержня от груза P , сосредоточенного на свободном конце

$$\psi(x) = \frac{Pl^3}{6EJ} \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right), \quad (8.28)$$

то по той же формуле (8.21) нашли бы

$$p_1 \approx \frac{3,567}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$$

с ошибкой около + 1,45% против приведенного выше «точного» значения.

Для первой частоты консольного стержня с грузом, равным половине веса стержня, было найдено (см. пример 3 гл. VI) значение

$$p_1 = \frac{1,99}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}.$$

По формуле Рэлея (8.21), взяв в качестве минимизирующей формы (8.28), после недолгих и совершенно элементарных вычислений находим:

$$2T = \mu \int_0^l \psi^2(x) dx + \frac{\mu l}{2} \psi^2(l) = \frac{103P^2 l^7 \mu}{1260(EJ)^2},$$

$$2\Pi = EJ \int_0^l \psi'^2(x) dx = \frac{P^2 l^3}{3EJ}$$

и

$$p_1 \approx \frac{2,02}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}.$$

Это значение только на 1,5% больше приведенного выше.

Столь же эффективно вычисление основной частоты по методу Рэлея и в более сложных задачах. Рассмотрим, например, продольные колебания стержня с грузом на конце (пример 2 гл. VI). Приняв в качестве минимизирующей функции статическое удлинение стержня от груза Q , т. е. положив

$$\psi(x) = \frac{Qx}{EA},$$

найдем по формуле (8.22):

$$2T_{\max} = p^2 \left[\mu \int_0^l \psi^2(x) dx + M\psi^2(l) \right] = \frac{Q^2 p^2}{(EA)^2} \left[\mu \frac{l^3}{3} + Ml^2 \right],$$

$$2\Pi_{\max} = \frac{Q^2 l}{EA}$$

и

$$p_1^2 \approx \frac{3EA}{\mu l^2 \left(1 + \frac{3M}{\mu l} \right)} = \frac{EA}{l} \frac{1}{M + \frac{\mu l}{3}}.$$

Пусть масса груза M в два раза больше массы стержня μl . Тогда

$$p_1 = \frac{0,65}{l} \sqrt{\frac{EA}{\mu}}.$$

Как видно из формулы (6.33) и из приведенных там же значений наименьшего корня уравнения

$$\beta \operatorname{tg} \beta = \alpha = \frac{\mu l}{M}, \quad (8.29)$$

основная частота, найденная по формуле Рэлея, в пределах первых десятичных знаков не отличается от ее «точного» значения, вычисленного из уравнения (8.29).

Пример 4. Влияние на частоту колебаний лопатки центробежных сил. *Динамическая частота* колебаний лопатки, т. е. частота в случае, когда лопатка вращается вместе с диском, выше частоты колебаний неподвижной лопатки (ее иногда называют *статической частотой*). Повышение частоты вызывается увеличением жесткости лопатки на изгиб от растягивающего действия на лопатку центробежных сил элементов лопатки. При этом происходит увеличение потенциальной энергии лопатки без изменения ее кинетической энергии. Пусть диск радиуса a , в обод которого жестко закреплена лопатка, вращается с угловой скоростью ω (1/сек). Продольная центробежная сила, действующая на лопатку, в сечении, расположенном на расстоянии x от обода диска, равна

$$\omega^2 \int_x^l \mu(x)(a+x) dx = Q(x). \quad (8.30)$$

Дифференциальное уравнение колебаний лопатки с учетом центробежных сил мы составим как уравнение Эйлера для функционала

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[\mu(x) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 - Q(x) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt, \quad (8.31)$$

где

$$\frac{1}{2} \int_0^l \mu(x) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx$$

— кинетическая энергия лопатки;

$$\frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

— потенциальная энергия деформации прогиба и

$$\frac{1}{2} \int_0^l Q(x) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

— потенциальная энергия деформации растяжения лопатки от центробежных сил. Последнее выражение составляется аналогично потенциальной энергии растянутого стержня

$$\frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

заменой EA на $Q(x)$.

Составив с помощью формулы (8.31) уравнение Эйлера (1.49), получим

$$-\mu(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[Q(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right] - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Для форм колебаний после подстановки $y = \varphi(x) \sin(pt + \alpha)$ оно примет вид

$$(EJ\varphi''')' - [Q(x)\varphi']' - p^2\mu\varphi = 0.$$

Из этого уравнения находим

$$p^2 \int_0^l \mu \varphi^2 dx = \int_0^l [EJ\varphi''']' \varphi dx - \int_0^l (Q\varphi')' \varphi dx,$$

откуда

$$p^2 = \frac{\int_0^l EJ\varphi''^2 dx}{\int_0^l \mu \varphi^2 dx} + \frac{\int_0^l Q\varphi'^2 dx}{\int_0^l \mu \varphi^2 dx}. \quad (8.32)$$

Первое слагаемое правой части представляет квадрат частоты лопатки без учета центробежных сил, или квадрат статической частоты p_{cm}^2 .

Формуле (8.32) можно дать другой вид, воспользовавшись известным преобразованием двойного интеграла

$$\int_0^l dx \int_x^l f(x, y) dy = \int_0^l dy \int_0^y f(x, y) dx.$$

В применении к интегралу

$$\int_0^l Q(x) \varphi'^2(x) dx$$

после подстановки в него значения $Q(x)$ из (8.30) указанное преобразование приводит к соотношению

$$\omega^2 \int_0^l [\varphi'(x)]^2 dx \int_x^l \mu(\xi)(a+\xi) d\xi = \omega^2 \int_0^l \mu(x)(a+x) dx \int_0^x [\varphi'(\xi)]^2 d\xi.$$

Введя обозначение

$$\zeta(x) = \int_0^x [\varphi'(\xi)]^2 d\xi \quad (8.33)$$

мы представим формулу (8.32) в таком виде:

$$p^2 = \frac{\int_0^l EJ\varphi''^2 dx}{\int_0^l \mu\varphi^2 dx} + \omega^2 \frac{\int_0^l \mu(a+x)\zeta(x) dx}{\int_0^l \mu\varphi^2(x) dx}. \quad (8.34)$$

Числитель второго слагаемого правой части можно истолковать как работу центробежных сил элементов лопатки на их радиальных перемещениях к оси

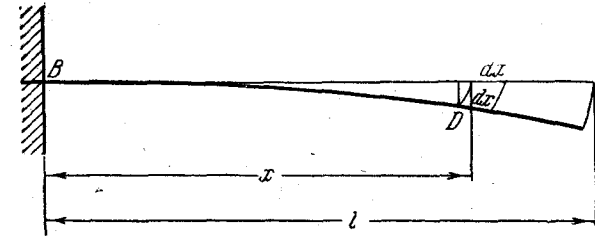


Рис. 81.

диска. Такое истолкование подтверждается следующим элементарным, хотя и не вполне строгим рассуждением. При отклонении лопатки, когда ее ось располагается по кривой (рис. 81)

$$\varphi = \varphi(x),$$

элемент dx смещается в радиальном направлении к ободу диска на величину, равную разности между x и суммой проекций на ось Ox элементов дуги BD (часть изогнутой оси лопатки от корневого сечения до рассматриваемого элемента):

$$x - \int_0^x \cos \alpha dx = \frac{1}{2} \int_0^x \alpha^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^x \varphi'^2(x) dx = \frac{1}{2} \zeta(x).$$

Взятая со знаком минус работа центробежных сил всех элементов лопатки или, что то же, потенциальная энергия центробежных сил равна поэтому

$$\Pi_{ц} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^l \mu(a+x)\zeta(x) dx.$$

Обычно формулу (8.34) пишут следующим образом:

$$\rho_{\text{дин}} = \sqrt{\rho_{\text{ст}}^2 + B\omega^2}. \quad (8.35)$$

Для лопатки постоянного сечения, совершающей первое главное колебание, коэффициент B имеет следующее приближенное значение

$$B = 0,8 \frac{D_{\text{ср}}}{l} - 0,85,$$

где $D_{\text{ср}}$ — диаметр по серединам лопаток.

Для лопатки переменного сечения при вычислении основной частоты можно пользоваться аналогичной эмпирической формулой¹⁾

$$B = 0,72 \frac{D_{\text{ср}}}{l} - 1.$$

4. Метод Б. Г. Галеркина. Метод Галеркина в применении к консервативным системам можно трактовать, подобно методу Ритца, как один из способов прямого решения задачи на экстремум функционала S (8.5). В самом деле, рассматривая значения S на совокупности главных свободных поперечных колебаний одного и того же периода, различающихся только формой колебания, мы получим для вариации S

$$\delta S = \int_0^l [\mu p^2 \varphi - (EJ\varphi'')'] \delta\varphi dx + \{(EJ\varphi'')' \delta\varphi - EJ\varphi'' \delta\varphi'\}_0^l.$$

Уравнение

$$\delta S = 0$$

будет выполнено, если, подчинив минимизирующую форму $\varphi(x)$ всем краевым условиям задачи, мы потребуем дальнейшего обращения в нуль интеграла

$$\int_0^l [\mu p^2 \varphi - (EJ\varphi'')'] \delta\varphi dx. \quad (8.36)$$

Последнее равенство мы будем называть *вариационным уравнением Галеркина*.

Вариационное уравнение Галеркина можно обосновать и независимо от принципа Остроградского—Гамильтона, именно как выражение общего уравнения динамики в применении к поперечным колебаниям системы с бесконечным числом степеней свободы. Для систем с конечным числом n степеней свободы это уравнение в обобщенных координатах имеет, как известно, вид

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right] \delta q_i = 0.$$

¹⁾ Левин А. В., Рабочие лопатки и диски паровых турбин, Госэнергоиздат, 1953.

4)

В таком истолковании первоисточником метода Галеркина является принцип виртуальных перемещений, согласно которому сумма работ приложенных к стержню сил [в случае (8.36) — собственной нагрузки $\mu p^2 \varphi(x)$ и упругих восстанавливающих сил $(EJ\varphi'')'$] на виртуальных перемещениях $\delta\varphi$ бесконечно малых элементов стержня должна равняться нулю. Так как при составлении уравнения (8.36) мы исходим непосредственно из уравнения движения системы, то метод Галеркина оказывается применимым ко всяким системам, а не только к консервативным. В этом важнейшее преимущество метода в сравнении с методом Ритца.

Что касается формы колебания $\psi(x)$, которую мы будем, как и раньше, называть *минимизирующей формой*, то она строится в виде линейной суммы

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x) \quad (8.37)$$

конечного числа функций $\psi_i(x)$, аналогичных базисным функциям в методе Ритца, но удовлетворяющим всем краевым условиям (и геометрическим, и динамическим). Параметры a_i находятся из условия обращения в нуль интеграла (8.36)¹⁾.

Подставив (8.37) в уравнение (8.36), приведем последнее к виду

$$\int_0^l \left[\mu p^2 \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x) - \sum_{i=1}^n a_i (EJ\psi_i'')' \right] \sum_{k=1}^n \delta a_k \psi_k dx = 0,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^n \delta a_k \int_0^l \sum_{i=1}^n a_i [\mu p^2 \psi_i \psi_k - (EJ\psi_i'')' \psi_k] dx = 0.$$

Так как δa_k — произвольные вариации независимых параметров a_k , то из последнего равенства следуют n уравнений:

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_0^l [\mu p^2 \psi_i \psi_k - (EJ\psi_i'')' \psi_k] dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (8.38)$$

Введем обозначения

$$T_{ik} = \int_0^l \mu \psi_i \psi_k dx, \quad W_{ik} = \int_0^l (EJ\psi_i'')' \psi_k dx. \quad (8.39)$$

¹⁾ О методе Б. Г. Галеркина, кроме книги С. Г. Михлина, цит. на стр. 299, см. статью Келдыш М. В., О методе Б. Г. Галеркина для решения краевых задач, Изв. АН СССР, сер. математ., 1942, № 6.

Пример 5. Найти основную частоту поперечных колебаний двухопорной балки переменной жесткости (рис. 82). Высота балки h и ее погонная масса μ изменяются по гармоническому закону

$$h = h_0 \left(1 + \sin \frac{\pi x}{l}\right), \quad \mu = \mu_0 \left(1 + \sin \frac{\pi x}{l}\right),$$

а момент инерции поперечного сечения

$$J = J_0 \left(1 + \sin \frac{\pi x}{l}\right)^3,$$

где J_0 , h_0 — момент инерции и высота крайних сечений балки; μ_0 — погонная масса однородной балки постоянной высоты h_0 .

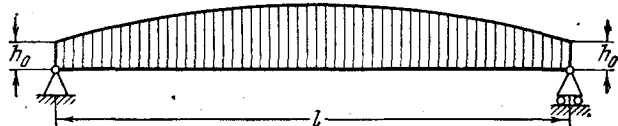


Рис. 82.

При вычислении одночленного приближения по методу Галеркина в качестве базисной функции возьмем функцию

$$\psi_1 = \sin \frac{\pi x}{l},$$

удовлетворяющую всем четырем краевым условиям задачи

$$\begin{aligned} \psi_1(0) = \psi_1'(0) &= 0, \\ \psi_1(l) = \psi_1'(l) &= 0. \end{aligned}$$

Подставив эту функцию в выражение для T_{11} и W_{11} (8.39), получим

$$T_{11} = \mu_0 \int_0^l \left(1 + \sin \frac{\pi x}{l}\right) \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = 0,924 \mu_0 l,$$

$$W_{11} = -\frac{EJ_0 \pi^3}{l^2} \int_0^l \left[\left(1 + \sin \frac{\pi x}{l}\right)^3 \sin \frac{\pi x}{l} \right]' \sin \frac{\pi x}{l} dx = 3,238 \frac{EJ_0 \pi^4}{l^3},$$

откуда

$$p_1 = \frac{1,872 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{\mu_0}}.$$

Для вычисления второго приближения первой частоты берем в качестве базисных функций

$$\psi_1(x) = \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \psi_2(x) = \sin \frac{3\pi x}{l}.$$

Подставляем минимизирующую форму с двумя параметрами

$$\psi(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{3\pi x}{l}$$

в формулы (8.39) и вычисляем величины

$$\begin{aligned} T_{11} &= 0,924 \mu_0 l; & T_{12} &= T_{21} = -0,085 \mu_0 l; & T_{22} &= 0,828 \mu_0 l; \\ W_{11} &= 3,238 \frac{EJ_0}{l^3} \pi^4; & W_{12} &= W_{21} = -6,98 \frac{EJ_0}{l^3} \pi^4; & W_{22} &= 199,83 \frac{EJ_0 \pi^4}{l^3}. \end{aligned}$$

Уравнение частот будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} 0,924 - 3,238 \xi & 0,085 - 6,98 \xi \\ 0,085 - 6,98 \xi & 0,828 - 199,83 \xi \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\xi = \frac{EJ_0 \pi^4}{\mu l^4 p^2};$$

отсюда

$$p_1 = \frac{1,781 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{\mu_0}}.$$

В третьем приближении мы получили бы для первой частоты значение

$$p_1 = \frac{1,779 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{\mu_0}},$$

весьма мало отличающееся от предыдущего, второго, приближения, которым и следует поэтому закончить расчет.

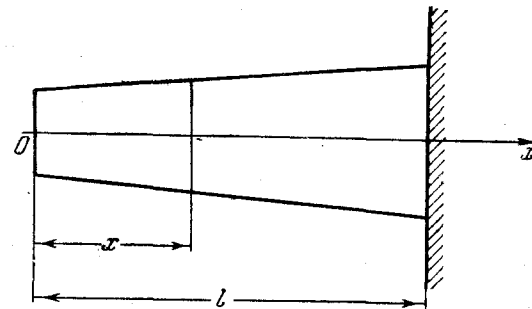


Рис. 83.

Пример 6. Найти первую и вторую частоты продольных колебаний консоли, площадь поперечного сечения A и погонная масса μ которой изменяются по линейному закону

$$\begin{aligned} A(x) &= A_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right), \\ \mu(x) &= \mu_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right), \end{aligned}$$

где A_0 — площадь сечения $x=0$. Ширина консоли l м (рис. 83).

В качестве минимизирующей формы возьмем выражение

$$\psi(x) = a_1 \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) + a_2 \left(1 - \frac{x^3}{l^3}\right) \quad (8.49)$$

с двумя параметрами и соответственно двумя базисными функциями. Легко видеть, что форма (8.49) удовлетворяет всем краевым условиям задачи, так как $\psi(l) = 0$, $\psi'(0) = 0$.

Для первого одночленного приближения вычисляем интегралы

$$T_{11} = \mu_0 \int_0^l \left(1 + \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2 dx = \frac{7\mu_0 l}{10},$$

$$W'_{11} = EA_0 \int_0^l \left[\left(1 + \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)'\right] \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) dx = -\frac{7EA_0}{3l}.$$

Тогда из уравнения

$$T_{11}p^2 + W'_{11} = 0$$

найдем

$$p_1 = \frac{1,826}{l} \sqrt{\frac{EA_0}{\mu_0}}.$$

Для второго приближения, кроме уже найденных T_{11} , W'_{11} , необходимо дополнительно вычислить по формулам (8.42) интегралы

$$T_{12} = \mu_0 \int_0^l \left(1 + \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \left(1 - \frac{x^3}{l^3}\right) dx = \frac{163\mu_0 l}{210},$$

$$T_{22} = \mu_0 \int_0^l \left(1 + \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x^3}{l^3}\right)^2 dx = \frac{243\mu_0 l}{280},$$

$$W'_{12} = EA_0 \int_0^l \left[\left(1 + \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)'\right] \left(1 - \frac{x^3}{l^3}\right) dx = -\frac{2,7EA_0}{l},$$

$$W'_{22} = EA_0 \int_0^l \left[\left(1 + \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x^3}{l^3}\right)'\right] \left(1 - \frac{x^3}{l^3}\right) dx = -\frac{3,3EA_0}{l}.$$

Уравнение частот (8.43) будет здесь иметь вид

$$\begin{vmatrix} 0,7\xi - 2,3 & \frac{163}{210}\xi - 2,7 \\ \frac{163}{210}\xi - 2,7 & \frac{243}{280}\xi - 3,3 \end{vmatrix} = 0,$$

если через ξ обозначить

$$\frac{p^2 \mu_0 l^2}{EA_0} = \xi.$$

Его корни

$$\xi_1 = 3,2185; \quad \xi_2 = 25,334,$$

и, следовательно,

$$p_1 = \frac{1,794}{l} \sqrt{\frac{EA_0}{\mu_0}}, \quad p_2 = \frac{5,033}{l} \sqrt{\frac{EA_0}{\mu_0}}.$$

Подставив значения ξ_1 и ξ_2 в одно из уравнений

$$\left(\frac{7}{10}\xi - \frac{7}{3}\right)a_1 + \left(\frac{163}{210}\xi - \frac{27}{10}\right)a_2 = 0,$$

$$\left(\frac{163}{210}\xi - \frac{27}{10}\right)a_1 + \left(\frac{243}{280}\xi - \frac{33}{10}\right)a_2 = 0,$$

найдем приближенные выражения для форм колебаний. Так, для первой формы, соответствующей меньшему корню $\xi = 3,2185$, из (8.49) находим:

$$\psi(x) = a_1 \left(0,6 - \frac{x^2}{l^2} + 0,4 \frac{x^3}{l^3}\right).$$

5. Об оценке погрешности расчета основной частоты. Вопрос об оценке погрешности приближенного расчета собственных частот методами Ритца, Рэлея, Галеркина принадлежит к трудным вопросам теории колебаний и в настоящее время освещен в литературе недостаточно. Обширные исследования в этой области были выполнены Н. М. Крыловым¹⁾, которому принадлежат некоторые формулы для оценок погрешностей расчета собственных значений краевых задач второго порядка. В сочетании с методом последовательных приближений формами колебаний эффективной в отдельных случаях является формула Темпля²⁾, хотя пользование этой формулой осложнено необходимостью предварительной оценки нижней границы второй частоты. Мы сделаем сначала краткие замечания о некоторых элементарных приемах оценки погрешности расчета основной частоты с помощью одночленных формул Ритца и Галеркина.

Как мы знаем, эти формулы дают верхнюю границу квадрата основной частоты. Следовательно, вопрос о погрешности практически сводится к определению достаточно близкой нижней границы этой частоты. Часто такую границу можно получить с помощью известных теорем о влиянии на частоты изменений жесткости и массы системы.

Так, заменив в консоли, рассмотренной в примере 6, переменную погонную массу

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right)$$

постоянной, равной $2\mu_0$, переменную площадь поперечного сечения

$$A = A_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right)$$

— постоянной, равной A_0 , мы получим консоль постоянного сечения, жесткость которой будет уменьшена, а масса увеличена по сравне-

¹⁾ Крылов М. М., Основні проблеми математичної фізики та техніки, Техвідав, 1932.

²⁾ Temple G. and Bickley W., Rayleigh's Principle, Oxford University Press, 1933, стр. 85.

нию с жесткостью и массой заданной консоли. Из уравнения продольных колебаний такой однородной консоли

$$EA_0 \varphi'' + 2\mu_0 \varphi \bar{p}^2 = 0$$

при условиях $\varphi'(0) = \varphi(l) = 0$, находим для квадратов частот значения

$$\bar{p}_k^2 = \left[\frac{(2k-1)\pi}{2l} \right]^2 \frac{EA_0}{2\mu_0} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (8.50)$$

Они будут меньше квадратов частот заданной системы и, следовательно, ими можно будет воспользоваться для оценки нижних границ последних. Так, например, для первой частоты рассматриваемой консоли формула (8.50) дает значение

$$\bar{p}_1 = \frac{1,11}{l} \sqrt{\frac{EA_0}{\mu_0}},$$

сильно заниженное против действительного, равного с точностью до двух десятичных знаков

$$\frac{1,79}{l} \sqrt{\frac{EA_0}{\mu_0}}.$$

Другим элементарным приемом оценки точности расчета частоты по вариационным формулам является сравнение результатов, полученных для двух или трех последовательных приближений. Из такого сравнения можно иногда заключить, на каком приближении следует закончить расчет, приняв его результат за достаточно точное решение задачи. Таким сравнением мы руководствовались, останавливаясь в примерах 2 и 5 на втором приближении.

Когда известно уравнение форм колебаний системы и есть возможность хотя бы грубо оценить нижнюю границу второй частоты, границы основной частоты можно найти с помощью формулы Темпля, которая хотя и приводит иногда к сложным расчетам, но большей частью дает близкую нижнюю границу первой частоты, особенно, если вторая частота значительно превосходит первую. Формулу Темпля мы напишем следующим образом:

$$a_{k+1} - \frac{a_k - a_{k+1}}{\frac{p_2^2}{a_{k+1}} - 1} < p_1^2 < a_{k+1}, \quad (8.51)$$

обозначив через p_2^2 нижнюю границу квадрата второй частоты заданной системы; a_k, a_{k+1} — два последовательных, приведенных на стр. 326 соотношения (8.62), вычисленные из уравнений (8.61) для подходящим образом выбранной исходной формы $\psi_0(x)$.

Пример 7. Для ознакомления с некоторыми деталями применения формулы (8.51) найдем с ее помощью границы основной частоты колебаний консольного клина примера 6. Уравнение для вычисления первой итерации

$\psi_1(x)$, которой мы и ограничимся в нашем расчете, при исходной форме $\psi_0(x)$ имеет здесь вид:

$$EA_0 \left[\left(1 + \frac{x}{l} \right) \psi_1'(x) \right]' = -\mu_0 \left(1 + \frac{x}{l} \right) \psi_0(x). \quad (8.52)$$

Исходная функция $\psi_0(x)$ может быть какой угодно непрерывной функцией, но для ускорения расчета мы подчиним ее одному из краевых условий задачи, например

$$\psi_0(l) = 0.$$

Для упрощения и уточнения вычислений целесообразно использовать следующий прием, несколько отличающийся от обычного¹⁾. Составим сперва функцию $\psi_1(x)$, исходя из всех краевых условий задачи, затем из уравнения (8.52) найдем функцию $\psi_0(x)$. Положив

$$\psi_1(x) = 1 + a_1 \frac{x}{l} + a_2 \frac{x^2}{l^2} + a_3 \frac{x^3}{l^3}$$

и подставив это выражение в уравнения

$$\psi_1'(0) = 0, \quad \psi_1(l) = 0,$$

найдем

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ 1 + a_2 + a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты a_2 и a_3 получим из уравнения

$$EA_0 \left[\frac{1}{l} \psi_1 + \left(1 + \frac{x}{l} \right) \psi_1' \right]' = -\mu_0 \left(1 + \frac{x}{l} \right) \psi_0(x),$$

написав которое для $x=l$ и учтя, что $\psi_0(l) = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} 2(2a_2 + 6a_3) + 2a_2 + 3a_3 &= 0, \\ 1 + a_2 + a_3 &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$a_2 = -\frac{5}{3}, \quad a_3 = \frac{2}{3}.$$

Таким образом,

$$\psi_1(x) = \frac{1}{3} \left(3 - 5 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3} \right). \quad (8.53)$$

Теперь по найденной функции $\psi_1(x)$ из уравнения (8.52) легко получается функция

$$\psi_0(x) = \frac{2c^2 \left(5 + 4 \frac{x}{l} - 9 \frac{x^2}{l^2} \right)}{3 \left(1 + \frac{x}{l} \right)}, \quad (8.54)$$

¹⁾ Колатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953.

где $c^2 = \frac{EA_0}{\mu_0 l^2}$. С функциями $\psi_0(x)$ и $\psi_1(x)$ вычисляем входящие в первые два отношения (8.62) интегралы

$$\int_0^l \left(1 + \frac{x}{l}\right) \psi_0^2 dx = \frac{4l}{9} c^4 (64 \ln 2 - 30,25) = 6,2704lc^4,$$

$$\int_0^l \left(1 + \frac{x}{l}\right) \psi_0 \psi_1 dx = \frac{2l}{9} c^2 \frac{263}{30} = 1,9481lc^2,$$

$$\int_0^l \left(1 + \frac{x}{l}\right) \psi_1^2 dx = \frac{l}{9} \frac{572}{105} = 0,6053l$$

и самые отношения

$$a_1 = 3,2183 \frac{EA_0}{\mu_0 l^2}; \quad a_2 = 3,2184 \frac{EA_0}{\mu_0 l^2}.$$

Чтобы получить нижнюю границу квадрата второй частоты, используем формулу (8.50) для однородного клина постоянного сечения, частоты которого заведомо ниже частот заданного. Из этой формулы

$$\bar{p}_2^2 = \frac{9}{8} \pi^2 \frac{EA_0}{\mu_0 l^2} = 11,1034 \frac{EA_0}{\mu_0 l^2}.$$

Подставив значения a_1 , a_2 , \bar{p}_2^2 в (8.51), найдем для квадрата первой частоты

$$\frac{EA_0}{\mu_0 l^2} 3,2183 < p_1^2 < 3,2184 \frac{EA_0}{\mu_0 l^2}.$$

6. Метод последовательных приближений формами колебаний.

Метод последовательных приближений формами колебаний в применении к расчету поперечных (а также продольных и крутильных) колебаний неоднородных стержней является естественным обобщением метода итераций для систем с конечным числом степеней свободы. Рассмотрим, например, уравнение форм поперечных колебаний стержня переменного сечения

$$[EJ(x) \varphi''(x)]'' - \mu(x) p^2 \varphi(x) = 0. \quad (8.55)$$

Выбрав в качестве исходной формы непрерывную функцию $\psi_0(x)$, удовлетворяющую по крайней мере некоторым крайевым условиям (что, впрочем, необязательно), вычисляем первое приближение по формуле

$$[EJ(x) \psi_1''(x)]'' = \mu \psi_0(x). \quad (8.56)$$

Постоянные интегрирования находим из крайевых условий задачи. Первое приближение будет, таким образом, удовлетворять всем

краевым условиям задачи. Далее по первому приближению находим второе из уравнения

$$[(EJ(x) \psi_2''(x))]' = \mu \psi_1(x)$$

и т. д., наконец, m -е приближение $\psi_m(x)$ — по формуле

$$[EJ(x) \psi_m''(x)]'' = \mu \psi_{m-1}(x).$$

При достаточно большом m отношение двух последовательных приближений будет стремиться к квадрату первой частоты, а форма $\psi_m(x)$ — к первой собственной форме колебаний рассматриваемой системы:

$$\frac{\psi_{m-1}(x)}{\psi_m(x)} \rightarrow p_1^2, \quad \psi_m(x) \rightarrow k \psi_1(x). \quad (8.57)$$

В самом деле, пусть разложение исходной формы $\psi_0(x)$ по собственным будет

$$\psi_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x). \quad (8.58)$$

Разложение первого приближения

$$\psi_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \varphi_i(x).$$

Найдем зависимость между a_i и b_i . Подставив разложения $\psi_0(x)$ и $\psi_1(x)$ в (8.56), получим

$$[EJ(x) \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i \varphi_i \right)'']'' = \mu \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_i p_i^2 - a_i) \varphi_i(x) = 0$$

и, следовательно,

$$b_i = \frac{a_i}{p_i^2}.$$

Это равенство устанавливает зависимость между коэффициентами разложений двух последовательных итераций. Исходя из разложения первой итерации (т. е. считая ее за исходную), таким же путем мы получим разложение второй итерации

$$\psi_2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \varphi_i(x)}{p_i^4}$$

и т. д. и, наконец, m -й:

$$\psi_m(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \varphi_i(x)}{p_i^{2m}}.$$

При достаточно большом m можно считать, что

$$\psi_m(x) \approx \frac{a_1 \varphi_1(x)}{p_1^{2m}}, \quad \psi_{m-1}(x) \approx \frac{a_1 \varphi_1(x)}{p_1^{2m-2}}$$

и, следовательно,

$$\frac{\psi_{m-1}(x)}{\psi_m(x)} \approx p_1^2; \quad \psi_m(x) \approx k \varphi_1(x). \quad (8.59)$$

Подчинив исходную форму и ее последующие итерации условию ортогональности с первой собственной формой, можно вычислить вторую частоту и вторую собственную форму. Для этого, выбрав некоторую форму $\psi_0(x)$, исключаем из ее разложения

$$\psi_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x)$$

первое слагаемое, содержащее первую форму, составив функцию

$$\bar{\psi}_0(x) = \psi_0(x) - a_1 \varphi_1(x),$$

где

$$a_1 = \int_0^l \psi_0(x) \varphi_1(x) dx.$$

Функция $\bar{\psi}_0(x)$ будет ортогональна к первой собственной форме, так как

$$\int_0^l \varphi_1(x) \bar{\psi}_0(x) dx = \int_0^l \psi_0(x) \varphi_1(x) dx - a_1 \int_0^l \varphi_1^2(x) dx = 0.$$

Функцию $\bar{\psi}_0(x)$ принимаем за исходную для вычисления второй частоты. Из уравнения (8.56) находим первое приближение $\psi_1(x)$. Прежде чем идти дальше, необходимо испытать $\psi_1(x)$ на ортогональность к первой собственной форме, так как вычисленная приближенно, она наверно будет содержать в своем разложении член с первой формой, хотя, быть может, и с очень малым коэффициентом.

Испробование на ортогональность производится путем вычисления интеграла

$$\int_0^l \psi_1(x) \varphi_1(x) dx.$$

Если этот интеграл не равен нулю, то за первое приближение следует взять функцию

$$\bar{\psi}_1(x) = \psi_1(x) - \varphi_1(x) \int_0^l \psi_1(x) \varphi_1(x) dx.$$

Таким же образом вычисляются и проверяются на ортогональность к первой собственной форме и последующие приближения. При достаточно большом m

$$\frac{\bar{\psi}_{m-1}(x)}{\bar{\psi}_m(x)} \rightarrow p_2^2; \quad \bar{\psi}_m(x) \rightarrow k \varphi_2(x).$$

Построение и обоснование метода последовательных приближений для продольных и крутильных колебаний ничем не отличается от изложенного для поперечных колебаний.

Вычислив первую, вторую и т. д. итерации форм колебаний, мы можем значительно повысить точность расчета по формуле Рэлея, подставляя в нее в качестве минимизирующих форм последовательные приближения форм колебаний. Так, уже использование первого приближения при любой исходной форме часто заканчивает расчет с высокой точностью. В самом деле, вычислив с помощью уравнения

$$[EJ\psi_1''(x)]'' = \mu(x) \psi_0(x)$$

по заданной $\psi_0(x)$ первое приближение $\psi_1(x)$, мы подчиним его всем краевым условиям, определив надлежащим образом произвольные постоянные интегрирования. Работа нагрузки $\mu(x) \psi_0(x)$ на перемещении $\psi_1(x)$, или максимальная потенциальная энергия стержня, будет равна

$$П_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l \mu(x) \psi_0(x) \psi_1(x) dx.$$

Максимальная кинетическая энергия

$$T_{\max} = \frac{p^2}{2} \int_0^l \mu(x) \psi_1^2(x) dx.$$

Формула Рэлея напишется так:

$$R_1 = \frac{\int_0^l \mu(x) \psi_0(x) \psi_1(x) dx}{\int_0^l \mu(x) \psi_1^2(x) dx}. \quad (8.60)$$

Последняя формула дает более точную верхнюю границу, чем формула (8.25). Это легко доказать, подставив в (8.60) разложения форм $\psi_0(x)$ и $\psi_1(x)$ по собственным формам

$$\psi_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x),$$

$$\psi_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \varphi_i(x)}{p_i^2},$$

после чего

$$R_1 = \frac{\frac{a_1^2}{p_1^2} + \frac{a_2^2}{p_2^2} + \dots}{\frac{a_1^2}{p_1^4} + \frac{a_2^2}{p_2^4} + \dots},$$

откуда в силу неравенства Буняковского — Коши

$$R_1 < R.$$

Вычислив ряд функций

$$\psi_0(x), \quad \psi_1(x), \quad \psi_2(x), \quad \dots$$

из уравнений

$$[EJ\psi_k''(x)]'' = \mu(x) \psi_{k-1}(x), \quad (8.61)$$

где $k=1, 2, 3, \dots$, и составив затем отношения

$$a_1 = \frac{\int_0^l \mu \psi_0^2(x) dx}{\int_0^l \mu \psi_0(x) \psi_1(x) dx}, \quad a_2 = \frac{\int_0^l \mu \psi_0(x) \psi_1(x) dx}{\int_0^l \mu \psi_1^2(x) dx}, \quad \dots, \quad (8.62)$$

Можно установить, что эти отношения идут, убывая, слева направо и каждое из них не меньше квадрата первой частоты, так что имеют место неравенства

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq p_1^2.$$

Для доказательства достаточно подставить в каждые два соседних отношения разложения функций $\psi_k(x)$ по собственным формам и затем воспользоваться неравенством Буняковского — Коши.

Пример 8. Найти первую частоту продольных колебаний консольного клина, рассматривавшегося в примере 6 (рис. 83).

Дифференциальное уравнение собственных форм колебаний такого клина напишем в виде

$$\left[\left(1 + \frac{x}{l} \right) \varphi'(x) \right]' = -\omega^2 \left(1 + \frac{x}{l} \right) \varphi(x),$$

где $\omega^2 = \frac{\mu_0 p^2}{EA_0}$. В качестве исходной формы возьмем функцию

$$\psi_0(x) = 1 - \frac{x}{l},$$

удовлетворяющую на конце $x=l$ условию

$$\psi_0(l) = 0.$$

Первое приближение $\psi_1(x)$ найдется из уравнения

$$\left[\left(1 + \frac{x}{l} \right) \psi_1'(x) \right]' = - \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Интегрируя один раз и принимая во внимание, что $\psi_1'(0) = 0$, находим

$$\psi_1'(x) = - \frac{x - \frac{x^3}{3l^2}}{1 + \frac{x}{l}},$$

откуда при условии $\psi_1(l) = 0$

$$\psi_1(x) = - \left[\frac{2}{3} lx + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{9l} - \frac{2l^2}{3} \ln \left(1 + \frac{x}{l} \right) \right] + \frac{l^2}{3} \left(\frac{13}{6} - 2 \ln 2 \right).$$

Отношение $\psi_0 : \psi_1$, вычисленное для $x=0$, даст первое приближение основной частоты

$$p_1^2 = \frac{3,8431}{l^2} \frac{EA_0}{\mu_0}; \quad p_1 \approx \frac{1,96}{l} \sqrt{\frac{EA_0}{\mu_0}}.$$

Это значение хуже всех найденных раньше по одночленным формулам Рэлея и Галеркина.

Воспользовавшись приемом построения двух последовательных приближений, описанным в примере 7 настоящей главы, мы получили бы для исходного и первого приближений

$$\psi_0(x) = \frac{2 \left(5 + 4 \frac{x}{l} - 9 \frac{x^2}{l^2} \right) c^2}{3 \left(1 + \frac{x}{l} \right)}, \quad \psi_1(x) = \frac{1}{3} \left(3 - 5 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3} \right).$$

Их отношение для $x=0$ было бы равно

$$\frac{\psi_0(0)}{\psi_1(0)} = \frac{10c^2}{3} = 3,3333c^2, \quad \left(c^2 = \frac{EA_0}{\mu_0 l^2} \right),$$

откуда для первой частоты мы имели бы значение

$$\rho_1 = \frac{1,83}{l} \sqrt{\frac{EA_0}{\mu_0}},$$

почти точно совпадающее с найденным по одночленной формуле Галеркина (пример 6).

ГЛАВА IX

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНОК

1. Основные допущения и формулы. В этой главе рассматриваются поперечные колебания главным образом однородных пластинок постоянной толщины h , ограниченных простым контуром (прямоугольных или круглых). При этом в основу исследования кладутся следующие допущения.

1. Изгибные деформации пластинки при колебаниях предполагаются малыми упругими деформациями, подчиняющимися закону Гука.

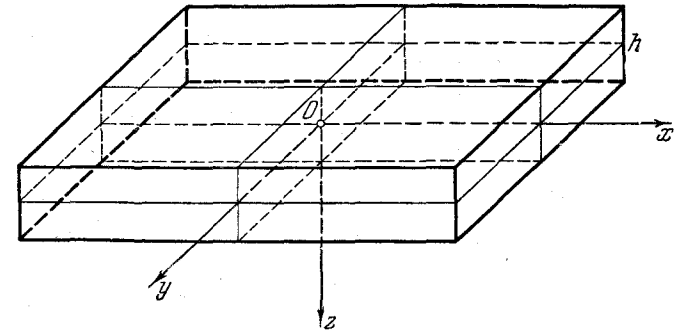


Рис. 84.

2. Предполагается, что в пластинке существует так называемый *нейтральный слой*, расстояния между точками которого при малых прогибах пластинки не изменяются. В однородной пластинке этот слой совпадает со срединной поверхностью, разделяющей высоту пластинки пополам. Плоскость, совпадающую с нейтральным слоем в недеформированном состоянии пластинки, мы примем за координатную плоскость Oxy , от которой будем отсчитывать отклонения отдельных элементов пластинки. Ось Oz направляем вниз, как показано на рис. 84.

3. Далее, предполагается, что при прогибе пластинки все точки нейтрального слоя перемещаются параллельно оси Oz и что частицы, лежащие на одной нормали MN к нейтральному слою Ox (рис. 85), остаются на этой нормали и при прогибе пластинки, поворачиваясь вместе с нормалью вокруг точки A пересечения ее с нейтральным слоем (на рис. 85 точки M , N , A переходят соответственно в M' , N' , A').

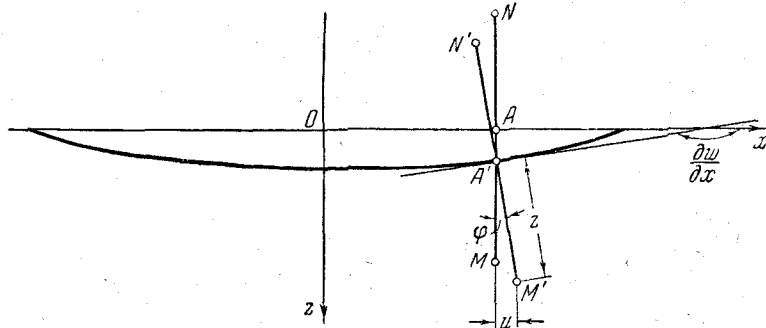


Рис. 85.

4. Предполагается, наконец, что перемещения всех точек, лежащих на одной нормали к нейтральному слою, параллельные оси Oz , одинаковы и равны перемещениям соответствующих (т. е. лежащих на той же нормали) точек нейтрального слоя.

Из приведенных допущений следует, что если обозначить через u , v , w составляющие перемещения точки $M(x, y, z)$ соответственно по осям Ox , Oy , Oz через u_0 , v_0 , w_0 — составляющие по тем же осям перемещения соответствующей точки A нейтрального слоя, то

$$u_0 = v_0 = 0, \quad w = w_0, \quad (9.1)$$

где $w = w_0 = f(x, y, t)$ не зависит от координаты z . Что касается u и v то, как видно из рис. 85,

$$\left. \begin{aligned} u &= z \sin \varphi = z\varphi = -z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ v &= z \sin \psi = z\psi = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

(здесь φ и ψ — углы наклона касательных в точке A' соответственно к осям x и y). По известным из теории упругости формулам составляющие деформации

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \quad e_{zz} = 0, \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, \quad e_{xz} = e_{yz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

Соответствующие компоненты напряжения X_x , Y_y , $X_y = Y_x$ равны ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{E}{1-\sigma^2} (e_{xx} + \sigma e_{yy}) = -\frac{Ez}{1-\sigma^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right), \\ Y_y &= \frac{E}{1-\sigma^2} (e_{yy} + \sigma e_{xx}) = -\frac{Ez}{1-\sigma^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right), \\ X_y = Y_x &= -\frac{Ez}{1+\sigma} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = Ge_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

где E — модуль упругости, G — модуль сдвига, σ — число Пуассона.

2. Потенциальная и кинетическая энергия пластинки. Потенциальная энергия, накапливаемая элементарным объемом при упругой деформации пластинки, согласно с вышеуказанными допущениями, имеет следующее выражение:

$$d\Pi = \frac{1}{2} (X_x e_{xx} + Y_y e_{yy} + X_y e_{xy}) dx dy dz$$

или после подстановки сюда значений компонентов деформации и напряжения (9.3) и (9.4):

$$d\Pi = \frac{1}{2} \left[\frac{Ez^2}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \frac{Ez^2}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + \frac{2Ez^2}{1+\sigma} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy dz.$$

Потенциальная энергия всей пластинки

$$2\Pi = \iiint \frac{Ez^2}{1-\sigma^2} \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2(1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy dz.$$

Для пластинки постоянной толщины h

$$2\Pi = D \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\sigma) \left\{ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy, \quad (9.5)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \quad (9.6)$$

— так называемая цилиндрическая жесткость на изгиб. Если на пластинку действует распределенная внешняя нагрузка с поверхностной

¹⁾ Нормальный компонент Z_z внутри пластинки при поперечном изгибе мал в сравнении с X_x , Y_y , и потому мы им везде пренебрегаем, полагая $Z_z = 0$.

интенсивностью $q(x, y, t)$, то

$$2\Pi = D \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \sigma) \left\{ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy - 2 \iint q(x, y, t) w_0 dx dy. \quad (9.7)$$

Двойные интегралы в (9.5) и (9.7) берутся по поверхности (s) нейтрального слоя.

Кинетическая энергия элемента пластинки

$$h dx dy$$

с массой

$$\frac{\gamma h}{g} dx dy,$$

где γ — вес единицы объема ($\kappa\Gamma/cm^3$), равна

$$\frac{\gamma h}{2g} \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 dx dy.$$

Кинетическая энергия всей пластинки

$$T = \frac{\gamma h}{2g} \iint \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 dx dy. \quad (9.8)$$

Когда пластинка совершает одно из главных колебаний, то

$$w_0(x, y, t) = w(x, y) \sin(pt + \alpha).$$

Для таких колебаний максимальные значения потенциальной и кинетической энергии будут иметь выражения

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{\max} &= \frac{D}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \sigma) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy, \\ T_{\max} &= \frac{\gamma h p^2}{2g} \iint w^2 dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

3. Вариационное уравнение поперечных колебаний пластинки.

Рассматривая функционал-действие по Остроградскому — Гамильтону

$$S = \int_{t_A}^{t_B} (T - \Pi) dt \quad (9.10)$$

на совокупности главных колебаний одного и того же периода $2\pi/p$ и выполнив интегрирование по времени на промежутке $t_B - t_A = 2\pi/p$,

придем к уравнению

$$\delta(T_{\max} - \Pi_{\max}) = 0, \quad (9.11)$$

которому должны удовлетворять собственные формы действительных главных колебаний пластинки.

Подставим в это уравнение максимальную кинетическую и потенциальную энергию (9.9) и вычислим вариацию их разности. Начиная с вычисления вариации потенциальной энергии

$$\delta\Pi_{\max} = D \iint \left\{ \Delta w \left[\delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] - (1 - \sigma) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] \right\} dx dy,$$

где через Δ обозначен оператор Лапласа.

Выполнив дважды интегрирование по частям в каждом слагаемом подынтегральной функции, получим¹⁾:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy = \\ & = \oint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dx - \oint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} \delta w dx + \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dx dy, \end{aligned} \quad (9.12)$$

где первые два интеграла в правой части являются контурными интегралами, взятыми по внешнему контуру пластинки;

2) по аналогии с (9.12):

$$\begin{aligned} & \iint \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx dy = \\ & = \oint \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dy - \oint \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} \delta w dy + \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dx dy, \end{aligned} \quad (9.13)$$

3) Из формул (9.12) и (9.13) путем простой перемены обозначений находим:

$$\begin{aligned} & \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx dy = \\ & = \oint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx - \oint \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w dy + \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w dx dy, \end{aligned} \quad (9.14)$$

$$\begin{aligned} & \iint \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy = \\ & = \oint \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dy - \oint \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \delta w dy + \iint \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \delta w dx dy, \end{aligned} \quad (9.15)$$

¹⁾ Лейбензон Л. С., Вариационные методы решения задач теории упругости, Собрание трудов, т. I, Изд. АН СССР, 1951.

4) точно так же

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy &= \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \oint \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dy - \oint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} \delta w dx + \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dx dy; \end{aligned} \quad (9.16)$$

это выражение можно было бы получить, исходя из равенства

$$\iint \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy = \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy.$$

С помощью вышеприведенных формул находим

$$\begin{aligned} \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left[\delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] dx dy &= \\ &= \oint \Delta w \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dy - \oint \Delta w \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dx - \\ &- \oint \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} dy - \frac{\partial \Delta w}{\partial y} dx \right) \delta w + \iint \Delta^2 w \delta w dx dy, \end{aligned} \quad (9.17)$$

где

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}. \quad (9.18)$$

Подставим теперь (9.17), (9.12), (9.13) и (9.16) в выражение для $\delta \Pi_{\max}$. После перегруппировки членов получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} \delta \Pi_{\max} &= \oint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dy - (1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ &+ \oint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx + (1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) - \\ &- \oint \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} dy - \frac{\partial \Delta w}{\partial y} dx \right) \delta w + \iint \Delta^2 w \delta w dx dy. \end{aligned} \quad (9.19)$$

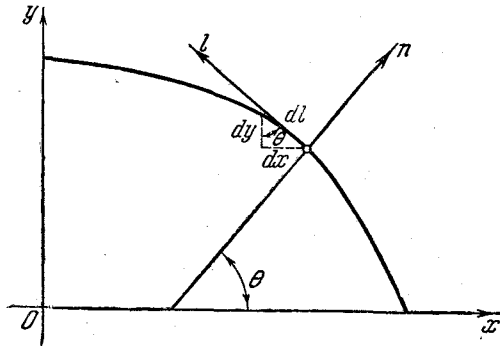


Рис. 86.

Обозначим через θ угол между внешней нормалью n и осью Ox и направим касательную l к контуру, как показано на рис. 86. Тогда

на контуре пластинки

$$\left. \begin{aligned} dx &= -dl \sin \theta, \quad dy = dl \cos \theta, \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial n} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial l}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial n} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial l}. \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

При помощи этих формул выражение (9.19) может быть приведено к такому виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} \delta \Pi_{\max} &= \iint_{(s)} \Delta^2 w \delta w ds - \oint \frac{\partial \Delta w}{\partial n} \delta w dl + \\ &+ \oint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin^2 \theta + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin 2\theta \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) dl + \\ &+ \oint \left[(1 - \sigma) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos 2\theta \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial l} \right) dl. \end{aligned}$$

Как известно из теории упругости, выражение

$$\begin{aligned} -D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin^2 \theta + \right. \\ \left. + (1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin 2\theta \right] = M_L \end{aligned} \quad (9.21)$$

представляет *изгибающий момент на контуре пластинки*. Выражение, стоящее под знаком третьего контурного интеграла, умноженное на D ,

$$D(1 - \sigma) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos 2\theta \right] = H_L, \quad (9.22)$$

есть *крутящий момент на контуре пластинки*. Наконец,

$$-D \frac{\partial \Delta w}{\partial n} = N_L. \quad (9.23)$$

означает *поперечную силу на контуре пластинки*.

Выполнив интегрирование по частям в третьем контурном интеграле, приведем его к виду

$$\oint H_L \frac{\partial}{\partial l} (\delta w) dl = - \oint \frac{\partial H_L}{\partial l} \delta w dl. \quad (9.24)$$

После всех преобразований представим вариацию потенциальной энергии в следующем окончательном виде:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\max} &= D \iint_{(s)} \Delta^2 w \delta w ds - \oint M_L \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) dl + \\ &+ \oint \left(N_L - \frac{\partial H_L}{\partial l} \right) \delta w dl. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Вариация кинетической энергии

$$\delta T_{\max} = \frac{\gamma h p^2}{g} \iint_{(s)} \omega \delta \omega ds. \quad (9.26)$$

Теперь, принимая во внимание формулы (9.25) и (9.26), напишем вариационное уравнение собственных форм поперечных колебаний пластинки

$$\iint_{(s)} \left(D \Delta^2 \omega - \frac{\gamma h}{g} p^2 \omega \right) \delta \omega ds - \oint M_L \frac{\partial}{\partial n} (\delta \omega) dl + \\ + \oint \left(N_L - \frac{\partial H_L}{\partial t} \right) \delta \omega dl = 0, \quad (9.27)$$

где ds — элемент поверхности нейтрального слоя.

4. Дифференциальное уравнение форм поперечных колебаний пластинки и краевые условия. Условие (9.27) обращения в нуль первой вариации действия по Остроградскому — Гамильтону будет выполнено для формы $\omega(x, y)$, удовлетворяющей уравнению

$$D \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) - \frac{\gamma h}{g} p^2 \omega = 0 \quad (9.28)$$

и обращающей в нуль контурные интегралы, входящие в (9.27), т. е. удовлетворяющей также условию

$$\oint M_L \frac{\partial}{\partial n} (\delta \omega) dl - \oint \left(N_L - \frac{\partial H_L}{\partial t} \right) \delta \omega dl = 0. \quad (9.29)$$

Уравнение (9.28), как легко в этом убедиться, является уравнением Эйлера для функционала

$$\iint_{(s)} \left[\frac{\gamma h p^2}{g} \omega^2 - D \left\{ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] ds$$

и, следовательно, представляет уравнение поперечных колебаний пластинки. Равенство (9.29) выражает в самой общей форме краевые условия задачи. Оно будет выполнено

1) если края пластинки жестко закреплены, так как на таких краях

$$(\delta \omega)_{(L)} = \delta \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} \right)_{(L)} = 0; \quad (9.30)$$

2) если края пластинки свободно оперты; в этом случае

$$(\delta \omega)_{(L)} = 0; \quad M_L = 0;$$

3) наконец, если края пластинки свободны, так как тогда

$$M_L = 0, \quad N_L - \frac{\partial H_L}{\partial t} = 0.$$

Условия, налагающие ограничения на вариации $\delta \omega$ и $\delta \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} \right)$, называются *геометрическими*; условия, налагающие ограничения на краевые моменты и поперечные силы, т. е. на величины M_L и N_L —

динамическими.

Для прямоугольной пластинки с краями, параллельными осям Ox и Oy (рис. 87), на краях, параллельных оси Oy , по формулам (9.20) — (9.23):

$$\theta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial n}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial l}$$

"

$$M_L = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right),$$

$$H_L = D(1 - \sigma) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y},$$

$$N_L = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y^2} \right).$$

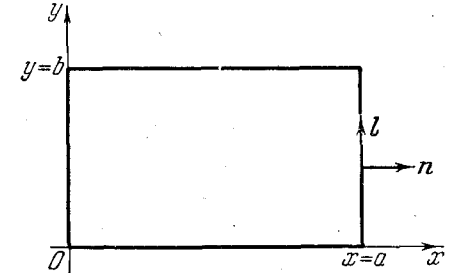


Рис. 87.

Если поэтому края, параллельные Oy , свободно оперты, то на этих краях

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0. \quad (9.31)$$

Если эти края жестко закреплены, то

$$\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \quad (9.32)$$

Если края, параллельные оси Ox , свободны, то на этих краях

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} = 0. \quad (9.33)$$

Условия для краев, параллельных оси Ox , получаются из приведенных заменой x на y и наоборот.

Когда на пластинку действует внешняя гармоническая нагрузка интенсивности

$$F(x, y; t) = f(x, y) \sin pt,$$

то уравнение форм вынужденных поперечных колебаний пластинки напишется следующим образом:

$$D \Delta^2 \omega - \frac{\gamma h p^2}{g} \omega - f(x, y) = 0. \quad (9.34)$$

5. **Некоторые свойства собственных форм колебаний пластинки.** Уравнение форм поперечных колебаний пластинки (9.28) можно истолковать как уравнение статического прогиба пластинки под действием «собственной» нагрузки

$$\mu(x, y) p^2 w(x, y). \quad (9.35)$$

Основываясь на принципе взаимности перемещений, можно установить одно из важнейших свойств собственных форм пластинки — их ортогональность. Предположим, что под действием собственной нагрузки $\mu p_i^2 w_i$ пластинка получает прогиб w_i ; под действием нагрузки $\mu p_k^2 w_k$ — прогиб w_k . Тогда работа нагрузки $p_k^2 \mu w_k$ на перемещении w_i должна быть равна работе нагрузки $p_i^2 \mu w_i$ на перемещении w_k , что можно записать следующим образом:

$$\iint_{(s)} \mu p_i^2 w_i w_k ds = \iint_{(s)} \mu p_k^2 w_i w_k ds.$$

Отсюда

$$(p_i^2 - p_k^2) \iint_{(s)} \mu w_i w_k ds = 0$$

и если $p_i^2 \neq p_k^2$, то

$$\iint_{(s)} \mu w_i w_k ds = 0. \quad (9.36)$$

Для форм поперечных колебаний пластинки также имеет место теорема о разложении в ряд по собственным формам однородной задачи, т. е. по функциям $w_i(x, y)$, удовлетворяющим уравнениям

$$D\Delta^2 w_i - p_i^2 \mu w_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Этот ряд имеет вид

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i w_i(x, y), \quad (9.37)$$

где коэффициенты a_i равны

$$a_i = \frac{\iint_{(s)} \mu w(x, y) w_i(x, y) ds}{\iint_{(s)} \mu w_i^2(x, y) ds}. \quad (9.38)$$

Для собственных форм, нормированных по правилу

$$\iint_{(s)} \mu w_i^2(x, y) ds = 1,$$

коэффициенты a_i будут иметь выражения

$$a_i = \iint_{(s)} \mu w_i(x, y) w(x, y) ds. \quad (9.39)$$

Для прямоугольных пластинок собственные формы $w_i(x, y)$ обычно представляют собой произведения двух функций, одна из которых зависит только от x , другая — от y :

$$w_{ik}(x, y) = X_i(x) Y_k(y).$$

Фид (9.37) будет в этом случае иметь вид

$$w(x, y) = \sum_{i, k=1}^{\infty} a_{ik} X_i(x) Y_k(y). \quad (9.40)$$

В главных колебаниях поверхность пластинки разделяется линиями

$$w_i(x, y) = 0$$

на участки, колеблющиеся в одной или в противоположных фазах. Эти линии носят название *узловых линий*. На квадратной пластинке, закрепленной в одной точке (обычно в центре), посыпанной тонким песком и приведенной в колебательное движение, узловые линии образуют хорошо известные «фигуры Хладни».

Пример 1. Найти поперечные колебания прямоугольной пластинки свободно опертой по двум противоположным краям при любых условиях на двух других противоположных краях.

Эта задача является, по-видимому, единственной, для которой существует точное решение уравнения (9.28). Предположим, что опертые края ($x = 0, x = a$) параллельны оси Oy (рис. 87).

Будем искать решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - k^4 w = 0, \quad (9.41)$$

где $k^4 = \frac{\gamma h p^2}{Dg}$, в виде ряда

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(y) \sin \frac{i\pi x}{a}, \quad (9.42)$$

где $F_i(y)$ — неизвестные функции, подлежащие определению из уравнения (9.41). Легко видеть, что функция $w(x, y)$ удовлетворяет условиям на опертых краях, так как на этих краях (при $x = 0$ и $x = a$)

$$w(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Подставив (9.42) в (9.41), получим для $F_i(y)$ уравнение

$$F_i^{(IV)} - \frac{2i^2\pi^2}{a^2} F_i'' + \left(\frac{i^4\pi^4}{a^4} - k^4 \right) F_i = 0. \quad (9.43)$$

Для его решения составляем характеристическое уравнение

$$z^4 - \frac{2i^2\pi^2}{a^2} z^2 + \left(\frac{i^4\pi^4}{a^4} - k^4 \right) = 0, \quad (9.44)$$

вычислив корни которого

$$z_1 = -z_3 = \sqrt{\frac{i^2 \pi^2}{a^2} - k^2}, \quad z_2 = -z_4 = \sqrt{\frac{i^2 \pi^2}{a^2} + k^2},$$

найдем общий интеграл

$$F_i(y) = A_i \operatorname{sh} z_1 y + B_i \operatorname{ch} z_1 y + C_i \operatorname{sh} z_2 y + D_i \operatorname{ch} z_2 y.$$

Постоянные A_i, B_i, C_i, D_i определяются из условий на краях параллельных оси Ox , где

$$y = 0, \quad y = b.$$

Пусть, например, край $y = 0$ свободно или шарнирно оперт, а край $y = b$ — жестко закреплен. Тогда для $y = 0$

$$w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

откуда

$$B_i = D_i = 0.$$

Для $y = b$

$$w(x, b) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} A_i \operatorname{sh} z_1 b + C_i \operatorname{sh} z_2 b &= 0, \\ A_i z_1 \operatorname{ch} z_1 b + C_i z_2 \operatorname{ch} z_2 b &= 0, \end{aligned}$$

и

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sh} z_1 b & \operatorname{sh} z_2 b \\ z_1 \operatorname{ch} z_1 b & z_2 \operatorname{ch} z_2 b \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\frac{1}{z_1} \operatorname{th} z_1 b = \frac{1}{z_2} \operatorname{th} z_2 b.$$

Это решение имеет место для вещественных z_1 и z_2 .

Когда оба края $y = 0$ и $y = b$ свободно оперты (случай пластинки, свободно опертой всеми краями), нетривиальное решение задачи получится при условии, что корни характеристического уравнения (9.44) z_1 и z_2 — мнимые. В этом случае общий интеграл уравнения (9.43) следует взять в таком виде:

$$F_i(y) = A_i \sin k_1 y + B_i \cos k_1 y + C_i \operatorname{sh} z_2 y + D_i \operatorname{ch} z_2 y,$$

где

$$k_1 = \sqrt{k^2 - \frac{i^2 \pi^2}{a^2}}.$$

Из краевых условий

$$w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial y^2} = 0,$$

$$w(x, b) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, b)}{\partial y^2} = 0$$

находим

$$\begin{aligned} B_i = C_i = D_i &= 0, \\ \sin k_1 b &= 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение есть уравнение частот пластинки.

Из этого уравнения следует, что

$$k_1 b = j\pi \quad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

$$k^2 = \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right) \pi^2, \quad p_{ij} = \pi^2 \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{Dg}{\gamma h}}$$

$$(i, j = 1, 2, 3, \dots)$$

и

$$F_j(y) = A_j \sin \frac{j\pi y}{b}.$$

Фид (9.42), определяющий форму колебаний пластинки, будет иметь вид

$$w(x, y) = \sum_{i, j=1}^{\infty} a_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}. \quad (9.45)$$

Случай пластинки, свободно опертой по всем краям, был рассмотрен С. П. Тимошенко, который, исходя из представления формы колебаний в виде (9.45), нашел решение задачи методом нормальных координат¹⁾.

Некоторое представление о расположении узловых линий на пластинке, свободно опертой по краям, можно получить, рассматривая отдельные

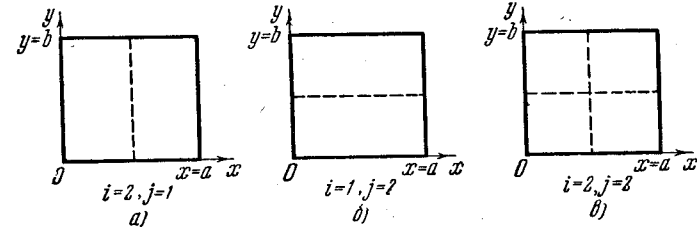


Рис. 88.

слагаемые ряда (9.45) и затем линейно налагая соответствующие им формы. Так, первый член ряда (9.45)

$$w_{11}(x, y) = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

нигде внутри пластинки не обращается в нуль; $w_{11}(x, y)$ будет нулем только по краям пластинки. Следовательно, форма $w_{11}(x, y)$ не имеет узловых линий на пластинке: все элементы пластинки, колеблющейся согласно уравнению

$$w(x, y, t) = w_{11}(x, y) \sin(pt + \alpha) = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \sin(pt + \alpha),$$

будут отклоняться в одну сторону, одновременно достигая максимальных (амплитудных) отклонений и одновременно проходя через равновесное положение. Это будет, таким образом, первое главное или собственное колебание.

¹⁾ Тимошенко С. П., цит. на стр. 151

Функции $X_i(x)$ и $Y_j(y)$ представляют простые полиномы, или же собственные формы колебаний однородных стержней (или балок), удовлетворяющие краевым условиям, соответствующим способам закрепления краев пластинки (*балочные функции*). Такие формы строятся с помощью функций А. Н. Крылова первого рода или элементарных функций, исходя из выражений общего интеграла уравнения форм колебаний однородного стержня:

$$\left. \begin{aligned} X_i(x) &= \sin \frac{\lambda_i x}{a} + A_i \cos \frac{\lambda_i x}{a} + B_i \operatorname{sh} \frac{\lambda_i x}{a} + C_i \operatorname{ch} \frac{\lambda_i x}{a}, \\ Y_j(y) &= \sin \frac{\lambda_j y}{b} + A_j \cos \frac{\lambda_j y}{b} + B_j \operatorname{sh} \frac{\lambda_j y}{b} + C_j \operatorname{ch} \frac{\lambda_j y}{b}, \end{aligned} \right\} (9.52)$$

где

$$\lambda_i = k_i a, \quad \lambda_j = k_j b, \quad k^4 = \frac{\nu \rho^2}{EJ},$$

a, b — длины краев, параллельных соответственно осям Ox и Oy . Постоянные $A_i, B_i, C_i; A_j, B_j, C_j, \lambda_i, \lambda_j$ находятся из краевых условий для X_i и Y_j .

После того как выбраны базисные функции, построенную из них минимизирующую форму нужно подставить в выражения (9.49) для T_{\max} и Π_{\max} . По поводу вычисления Π_{\max} заметим, что для пластинок, свободно опертых или защемленных по краям, выражение

$$\iint_{(s)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] ds$$

(так называемая *гауссова полная кривизна*) равно нулю¹⁾.

Вычисление двойных интегралов, входящих в T_{\max} и Π_{\max} , приводится к вычислению простых интегралов стандартной формы. Так, для базисных форм (9.51) эти интегралы будут, как правило, таких типов:

$$\begin{aligned} \int_0^l X_i^2 dx, \quad \int_0^l X_i'^2 dx, \quad \int_0^l X_i''^2 dx, \\ \int_0^l X_i X_j dx = - \int_0^l X_i X_j' dx. \end{aligned}$$

Значения этих интегралов для обычных способов закрепления краев пластинки приведены в таблицах II и III в конце книги.

Пример 2. Найти основную частоту колебаний прямоугольной пластинки, жестко закрепленной по всем краям.

Краевые условия задачи будут:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

¹⁾ Стретт Дж. В. (лорд Рэлея), Теория звука, т. I, Гостехиздат, 1955.

на краях пластинки, параллельных Oy , и

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

на краях, параллельных оси Ox .

Для первого одночленного приближения возьмем в качестве минимизирующей формы функцию

$$w_1(x, y) = X_1(x) Y_1(y),$$

где $X_1(x)$ и $Y_1(y)$ — балочные функции, удовлетворяющие краевым условиям балки, жестко закрепленной по концам:

$$X_1(0) = X_1(a) = 0, \quad X_1'(0) = X_1'(a) = 0,$$

$$Y_1(0) = Y_1(b) = 0, \quad Y_1'(0) = Y_1'(b) = 0.$$

Для максимальной кинетической энергии

$$T_{\max} = \frac{\gamma h p^2}{2g} \iint w^2 dx dy = \frac{\gamma h p^2}{2g} \int_0^a X_1^2 dx \int_0^b Y_1^2 dy$$

найдем по таблице интегралов с одним индексом (таблица II в конце книги) значение

$$T_{\max} = 1,0359^2 \frac{\gamma h p^2 a b}{g}.$$

Для потенциальной энергии

$$2\Pi_{\max} = D \iint_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy =$$

$$\begin{aligned} &= D \int_0^a X_1''^2 dx \int_0^b Y_1^2 dy + 2D \int_0^a X_1 X_1'' dx \int_0^b Y_1 Y_1'' dy + D \int_0^a X_1^2 dx \int_0^b Y_1''^2 dy = \\ &= \left[\frac{518,52 \cdot 1,0359 b}{a^3} + 2 \frac{12,775^2}{ab} + \frac{518,52 \cdot 1,0359 a}{b^3} \right] D. \end{aligned}$$

Для упрощения расчета положим $a = b$, т. е. будем предполагать, что пластинка квадратная. Тогда

$$2\Pi_{\max} = \frac{1400,672 D}{a^2}, \quad 2T_{\max} = 1,0731 \frac{\gamma h p^2 a^2}{g}$$

и

$$\rho_1 = \frac{36}{a^2} \sqrt{\frac{Dg}{h\gamma}}.$$

Пример 3. Найти основную частоту колебаний прямоугольной пластинки, у которой один край жестко закреплен, а остальные края свободны.

Для решения задачи в первом приближении мы возьмем в качестве минимизирующей формы

$$w(x, y) = X_1(x) Y_1(y),$$

где $X_1(x)$ удовлетворяет краевым условиям стержня, заделанного концом $x = 0$ и свободного на другом, а $Y_1(y)$ удовлетворяет краевым условиям стержня, свободного на концах. Первая частота колебаний такого стержня равна нулю, а первая форма — постоянное число

$$Y_1(y) = \text{const},$$

которое мы примем равным единице. Поэтому

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

на всех краях пластинки (см. таблицу II, A в конце книги).

$$\Pi_{\max} = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = \frac{D}{2} \int_0^b Y_1^2 dy \int_0^a X_1^2 dx = 22,933 \frac{Db}{a^3},$$

$$T_{\max} = \frac{\gamma h p^2}{2g} \int_0^a \int_0^b X_1^2 Y_1^2 dx dy = 1,8556 \frac{\gamma h p^2 ab}{2g}.$$

Отсюда

$$p_1 = \frac{3,52}{a^2} \sqrt{\frac{Dg}{\gamma h}}.$$

В первом приближении основная частота не зависит от размера b и совпадает с основной частотой поперечных колебаний однородного консольного стержня.

Пример 4. Найти первую частоту поперечных колебаний однородной квадратной пластинки, свободно опертой по краям и нагруженной, кроме собственной массы, четырьмя одинаковыми массами M , расположенными в точках 1, 2, 3, 4 (рис. 89) с координатами $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$; $\left(\frac{a}{4}, \frac{3a}{4}\right)$; $\left(\frac{3a}{4}, \frac{a}{4}\right)$; $\left(\frac{3a}{4}, \frac{3a}{4}\right)$.

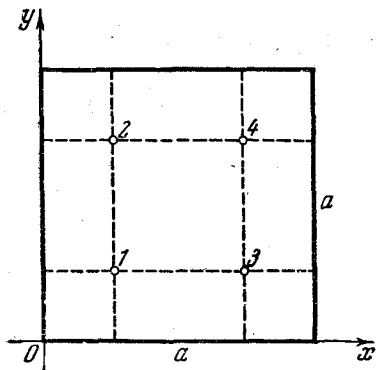


Рис. 89.

Погонная масса пластинки $\mu = \text{const}$. Потенциальная энергия пластинки будет, очевидно, такой же, как и для однородной пластинки, свободно опертой по краям. Добавочные сосредоточенные массы повлияют только на кинетическую энергию. В первом одночленном приближении мы положим, основываясь на результатах примера 1:

$$w(x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}.$$

Потенциальную энергию найдем по формуле

$$\Pi_{\max} = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy,$$

так как здесь

$$\iint_{(s)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0.$$

Вычислив вторые производные по x и y

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a},$$

найдем:

$$\Pi_{\max} = \frac{D\pi^4}{2a^2}.$$

Кинетическая энергия будет равна сумме кинетической энергии пластинки

$$\frac{\mu p^2 a^2}{8}$$

и кинетической энергии сосредоточенных масс M

$$\frac{Mp^2}{2} \sum_{i=1}^4 \omega_i^2,$$

где ω_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — значения функции

$$\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$$

для координат точек крепления масс. Для точки 1 $\left(x = \frac{a}{4}, y = \frac{a}{4}\right)$ это зна-

чение равно $\omega_1 = \frac{1}{2}$. Таковы же будут значения ω_i и в остальных точках.

Таким образом,

$$2T_{\max} = \frac{\mu p^2 a^2}{4} + Mp^2.$$

Приравняв значения T_{\max} и Π_{\max} , получим

$$p_1 = \frac{2\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\mu + \frac{4M}{a^2}}}.$$

Пример 5. Найти первую частоту колебаний квадратной пластинки со свободными краями.

Задача о колебаниях пластинки со свободными краями принадлежит к числу наиболее трудных. Ее приближенное решение для Ритца, используя для этого свой вариационный метод.

Рэлей¹⁾, исходя из допущения, что первому собственному колебанию соответствует форма с двумя узловыми линиями, а именно прямыми, перпендикулярными к сторонам квадрата и проходящими через их середины, для упрощенный способ расчета пластинки при помощи минимизирующей формы

$$w = xy.$$

Предполагаемые узловые линии принимаются за координатные оси Ox и Oy (рис. 90). Для функции w во всех точках пластинки

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 1.$$

¹⁾ См. Стретт Дж. В. (лорд Рэлей), Теории звука, т. I, стр. 390, Гостехиздат, 1955.

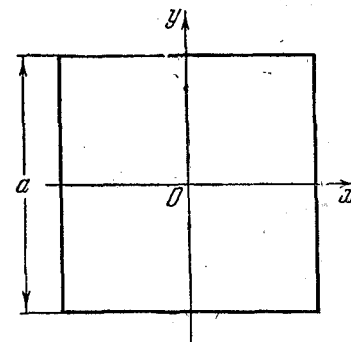


Рис. 90.

Следовательно,

$$\Pi_{\max} = D(1 - \sigma) a^2,$$

$$T_{\max} = \frac{\gamma h p^2}{2g} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} x^2 y^2 dx dy = \frac{\gamma h p^2 a^6}{288g}.$$

Положив, как это сделал Ритц, $\sigma = 0,225$, получим:

$$p_1 = \frac{14,9}{a^2} \sqrt{\frac{Dg}{\gamma h}}.$$

В методе Б. Г. Галеркина минимизирующая форма, которая, так же как и в методе Ритца, строится в виде конечной линейной суммы базисных функций

$$\omega(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \omega_i(x, y), \quad (9.53)$$

должна удовлетворять вариационному уравнению

$$\iint_{(s)} (D\Delta^2 \omega - \mu p^2 \omega) \delta \omega ds = 0 \quad (9.54)$$

и выполнять все краевые условия задачи.— и геометрические и динамические. В этом случае и

$$\oint M_L \delta \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} \right) dl - \oint \left(N_L - \frac{\partial H_L}{\partial t} \right) \delta \omega dl = 0. \quad (9.55)$$

При таких условиях функция $\omega(x, y)$ приближенно определит действительную форму колебания пластинки.

Подставив в уравнение (9.54)

$$\omega(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \omega_i(x, y), \quad \delta \omega(x, y) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x, y) \delta a_i,$$

преобразуем его в уравнение

$$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^n a_k \iint_{(s)} (D\Delta^2 \omega_k - \mu p^2 \omega_k) \omega_i ds \right] \delta a_i = 0,$$

откуда в силу произвольности вариаций δa_i

$$\sum_{k=1}^n a_k \iint_{(s)} (D\Delta^2 \omega_k - \mu p^2 \omega_k) \omega_i ds = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (9.56)$$

Введем обозначения

$$\iint_{(s)} D\Delta^2 \omega_k \omega_i ds = A_{ik}, \quad \iint_{(s)} \mu \omega_k \omega_i ds = B_{ik}. \quad (9.57)$$

(с помощью этих обозначений уравнения (9.56) можно переписать следующим образом:

$$(A_{11} - p^2 B_{11}) a_1 + \dots + (A_{in} - p^2 B_{in}) a_n = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

откуда

$$\begin{vmatrix} A_{11} - p^2 B_{11} & \dots & A_{1n} - p^2 B_{1n} \\ A_{21} - p^2 B_{21} & \dots & A_{2n} - p^2 B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} - p^2 B_{n1} & \dots & A_{nn} - p^2 B_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (9.58)$$

Мы приходим таким образом к уравнению частот пластинки в форме Галеркина. Из этого уравнения можно найти n значений p^2 , наименьшее из которых даст приближенное значение первой частоты с избытком.

Пример 6. Найти первую частоту колебаний квадратной пластинки, зажатой по контуру.

Начало координат возьмем в центре пластинки, расположив оси координат, как показано на рис. 91.

Ограничиваясь первым одночленным приближением, выбираем в качестве минимизирующей формы

$$\omega(x, y) = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - a^2)^2.$$

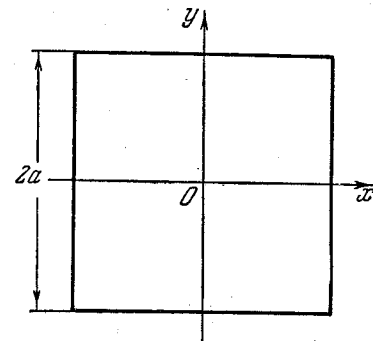


Рис. 91.

Эта форма удовлетворяет всем краевым условиям задачи, так как ω , $\frac{\partial \omega}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ для $x = \pm a$, $y = \pm a$ равны нулю.

Вычисляем A_{11} и B_{11} по формулам (9.57):

$$A_{11} = \iint_{(s)} D\Delta^2 \omega_1 \omega_1 ds = D \int_{-a}^a \int_{-a}^a \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) \omega dx dy =$$

$$= \frac{65536 D a^4}{1225},$$

$$B_{11} = \frac{\gamma h}{g} \iint_{(s)} \omega_1^2 ds = \frac{\gamma h}{g} \int_{-a}^a \int_{-a}^a (x^2 - a^2)^4 (y^2 - a^2)^4 dx dy = \frac{65536 a^{18} \gamma h}{99225 g}.$$

Из уравнения частот (9.58), которое для первого приближения будет иметь вид

$$A_{11} - p^2 B_{11} = 0,$$

находим:

$$p_1 = \frac{9}{a^2} \sqrt{\frac{Dg}{\gamma h}}.$$

7. Уравнения поперечных колебаний круглой пластинки. Поместив начало прямоугольной системы координат в центре пластинки и обозначив радиус-вектор и полярный угол некоторой точки нейтральной плоскости соответственно через r и θ , преобразуем с помощью операторов

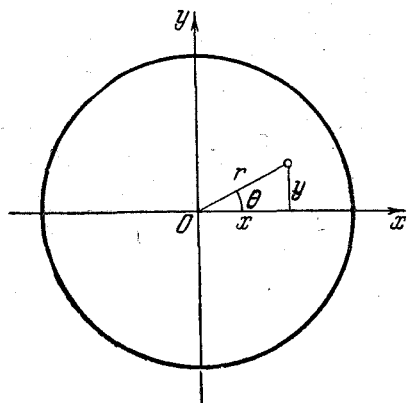


Рис. 92.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} (9.59)$$

выражения потенциальной и кинетической энергии, а затем и все уравнения, полученные в §§ 2 и 3 в прямоугольных координатах, к полярным (рис. 92).

Для преобразования к полярным координатам потенциальной энергии

$$\Pi_{\max} = \frac{D}{2} \iint_{(s)} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\sigma) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] ds$$

нужно найти в полярных координатах выражения вторых производных от w по x и y . Пользуясь операторами (9.59), находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cos^2 \theta - \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{\sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{\cos 2\theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \\ &\quad - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}. \end{aligned}$$

Подставив в выражение для Π_{\max} , получим

$$\begin{aligned} \Pi_{\max} &= \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2(1-\sigma) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]^2 \right\} \right] r d\theta dr. \quad (9.60) \end{aligned}$$

Отметим тут же значения вторых производных

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Для $\theta = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\theta=0} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\theta=0} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{\theta=0} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} (9.61)$$

Для кинетической энергии находим

$$T_{\max} = \frac{\gamma h p^2}{2g} \int_0^{2\pi} \int_0^a \omega^2 r d\theta dr. \quad (9.62)$$

Уравнение форм свободных поперечных колебаний однородной круглой пластинки в полярных координатах напомним следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\gamma h p^2}{Dg} w = 0 \quad (9.63)$$

или

$$\Delta(\Delta w) - \frac{\gamma h p^2}{Dg} w = 0,$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (9.64)$$

Вариационное уравнение поперечных колебаний круглой пластинки, приняв во внимание, что на контуре пластинки

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial l} = \frac{\partial}{r \partial \theta}, \quad (9.65)$$

напишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_{(s)} \left(D \Delta^2 w - \frac{\gamma h p^2}{g} w \right) \delta w r d\theta dr - \oint M_L \delta \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right) r d\theta + \\ + \oint \left(N_L - \frac{1}{r} \frac{\partial H_L}{\partial \theta} \right) \delta w r d\theta = 0. \quad (9.66) \end{aligned}$$

На контуре пластинки

$$\left. \begin{aligned} M_L &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \\ H_L &= D(1-\sigma) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \\ N_L &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right). \end{aligned} \right\} (9.67)$$

8. Формы колебаний однородной круглой пластинки. Уравнение форм колебаний однородной пластинки

$$\Delta^2 w - k^4 w = 0$$

будет выполнено для форм, удовлетворяющих уравнениям

$$\Delta w + k^2 w = 0, \quad \Delta w - k^2 w = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \pm k^2 w = 0, \quad (9.68)$$

где

$$k^4 = \frac{\gamma h p^2}{Dg}.$$

Функцию, удовлетворяющую уравнениям (9.68)¹⁾, будет искать в форме произведения

$$w(r, \theta) = R(r) \Phi(\theta) \quad (9.69)$$

двух функций $R(r)$ $\Phi(\theta)$, из которых первая есть функция только r , вторая — только θ . Подставив эту функцию в уравнения (9.68), получим

$$\left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) \Phi + \frac{1}{r^2} R \frac{d^2 \Phi}{d\theta^2} \pm k^2 R \Phi = 0,$$

откуда

$$\frac{\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \pm k^2 R}{\frac{R}{r^2}} = \frac{\frac{d^2 \Phi}{d\theta^2}}{\Phi} = -n^2. \quad (9.70)$$

Так как первое отношение зависит только от r , а второе — только от θ , то равенство между ними возможно при условии, что каждое из них равно одному и тому же постоянному числу. Это последнее мы полагаем равным $-n^2$, так как предположение, что это число положительное, привело бы к безгранично возрастающим Φ . Из (9.70) получаем, таким образом, два уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{d\theta^2} + n^2 \Phi &= 0, \\ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\pm k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.71)$$

Из первого, выбрав надлежащим образом начальные условия, находим

$$\Phi(\theta) = \alpha \sin n\theta. \quad (9.72)$$

Второе уравнение есть уравнение Бесселя.

Рассмотрим сначала уравнение со знаком плюс перед k^2 :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0.$$

¹⁾ Предполагая сначала, что края пластинки свободны.

Положив $x = kr$, приведем это уравнение к виду

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) R = 0. \quad (9.73)$$

Как известно, решением этого уравнения будет функция Бесселя первого рода n -го порядка

$$R_1(r) = J_n(kr).$$

Решением того же уравнения будет и так называемая функция Бесселя второго рода (или функция Неймана). Но эта функция для $r = 0$ обращается в бесконечность и поэтому не может входить в состав форм колебаний сплошного диска без отверстия в середине.

Рассмотрим теперь случай, когда перед k^2 стоит знак минус. Сделаем тогда в уравнении

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(-k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0$$

замену переменного $y = ikr$ ($i = \sqrt{-1}$), получим уравнение

$$\frac{d^2 R}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dR}{dy} + \left(1 - \frac{n^2}{y^2} \right) R = 0,$$

ничем по форме не отличающееся от уравнения (9.73). Решениями этого уравнения будут функции Бесселя 1-го рода n -го порядка, но от мнимого аргумента

$$R_2(r) = J_n(ikr).$$

Общий интеграл второго уравнения (9.71) будет поэтому

$$R(r) = AJ_n(kr) + BJ_n(ikr),$$

где A , B — произвольные постоянные. Общий интеграл уравнения (9.68), принимая во внимание вышеизложенное, напишем следующим образом:

$$w(r, \theta) = \alpha \sin n\theta [J_n(kr) + \lambda J_n(ikr)]. \quad (9.74)$$

Постоянные α и λ найдутся из краевых условий, т. е. из условий закрепления края пластинки. Таких условий здесь будет два, поскольку речь идет о сплошном диске. Подставив в эти условия (9.74), после исключения α и λ получим одно трансцендентное уравнение относительно k , корни которого, найденные по таблицам функций Бесселя, определяют собственные частоты колебаний пластинки.

Геометрические места нулей функции (9.74) представляют узловые линии на пластинке. Как видно из уравнения

$$\sin n\theta [J_n(kr) + \lambda J_n(ikr)] = 0,$$

возможны две системы узловых линий на круглой пластинке. Одна из этих систем имеет уравнение

$$\sin n\theta = 0,$$

корням которого

$$\theta = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots$$

будут соответствовать так называемые *узловые диаметры*. Число узловых диаметров равно n .

Вторую систему узловых линий определяют корни r_1, r_2, r_3, \dots уравнения

$$J_n(kr) + \lambda J_n(ikr) = 0.$$

Эти линии представляют собой концентрические окружности радиусов r_1, r_2, r_3, \dots (рис. 93).

Для пластинки радиуса a , закрепленной по контуру, мы имели бы

$$\omega_a = 0, \left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)_a = 0. \quad (9.75)$$

Форму, не имеющую узловых диаметров ($n=0$), можно было бы найти в этом случае, положив во втором уравнении (9.71):

$$\omega = R(r),$$

так как в этом случае функция, определяющая эту форму, от θ , очевидно, не зависит. Такое предположение привело бы к уравнению

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \pm k^2 R = 0,$$

решениями которого являются функции Бесселя первого рода нулевого порядка. Общий интеграл этого уравнения

$$\omega(r) = AJ_0(kr) + BJ_0(ikr).$$

Для $r=a$, т. е. на внешнем краю пластинки, жестко закрепленном по условию, мы имели бы

$$\begin{aligned} AJ_0(ka) + BJ_0(ika) &= 0, \\ AJ_0'(ka) + BIJ_0'(ika) &= 0, \end{aligned}$$

или в силу известных формул

$$\begin{aligned} J_0'(ka) &= -J_1(ka), \quad J_0'(ika) = -iJ_1(ika), \\ AJ_0(ka) + BJ_0(ika) &= 0, \\ -AJ_1(ka) + BIJ_1(ika) &= 0. \end{aligned} \quad (9.76)$$

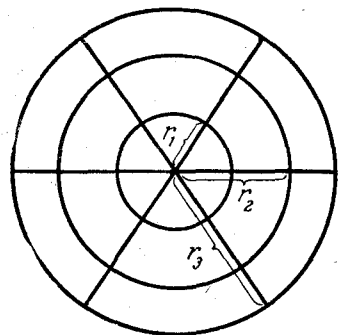


Рис. 93.

Откуда

$$J_0(ka) J_1(ika) + J_0(ika) J_1(ka) = 0. \quad (9.77)$$

Для наименьшего корня этого уравнения Рэлей нашел значение

$$ka = 3,20,$$

откуда

$$p_1 = \frac{10,24}{a^2} \sqrt{\frac{Dg}{\gamma h}}.$$

Соответствующая первая форма колебаний (без узловых диаметров) представлена на рис. 94.

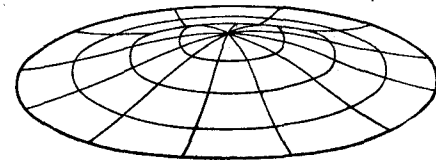


Рис. 94.

В общем случае краевые условия (9.75) приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} AJ_n(ka) + BJ_n(ika) &= 0, \\ AJ_n'(ka) + BIJ_n'(ika) &= 0, \end{aligned}$$

из которых с помощью формул

$$J_n'(kr) = \frac{1}{2} k [J_{n-1}(kr) - J_{n+1}(kr)],$$

$$J_n'(ikr) = \frac{1}{2} k [J_{n-1}(ikr) + J_{n+1}(ikr)]$$

получается уравнение частот

$$\begin{vmatrix} J_n(ka) & J_n(ika) \\ J_{n-1}(ka) - J_{n+1}(ka) & J_{n-1}(ika) + J_{n+1}(ika) \end{vmatrix} = 0. \quad (9.78)$$

Для каждого n уравнение (9.78) дает бесчисленное множество корней, определяющих симметричные узловые окружности. При $n=0$, как то установлено раньше, узловыми линиями будут только концентрические окружности. Значения ka для первых форм заземленной круглой пластинки приведены в следующей таблице.

Число узловых окружностей	Число узловых диаметров		
	$n=0$	$n=1$	$n=2$
$m=0$	3,19	4,61	5,90
$m=1$	6,30	7,81	9,40
$m=2$	9,43	10,98	12,60

На рис. 95 показаны формы колебаний пластинки для значений а) $n=0, m=1$; б) $n=1, m=0$.

Для однородного диска, жестко закрепленного на валу радиуса b ($b < a$), по окружности заделки

$$(\omega)_{r=b} = 0, \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)_{r=b} = 0. \quad (9.79)$$

Общий интеграл уравнения (9.73) в этом случае будет содержать как функции Бесселя 1-го рода, так и функции Бесселя 2-го рода

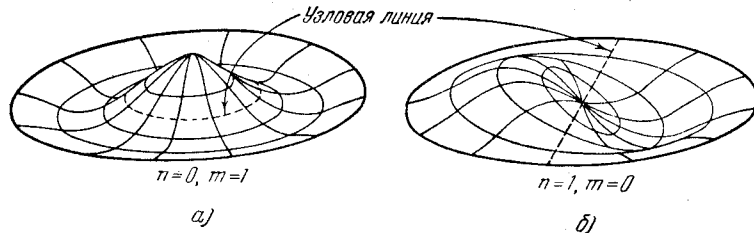


Рис. 95.

(функции Неймана), причем число произвольных постоянных будет равно не двум, а четырем:

$$\omega(r, \theta) = \alpha \sin n\theta [J_n(kr) + AN_n(kr) + BJ_n(ikr) + CN_n(ikr)],$$

N_n — функция Неймана n -го порядка.

Эти постоянные определяются из четырех краевых условий — на внутреннем краю два (9.79) и на внешнем два, вид которых будет зависеть от способа закрепления внешнего контура.

Пример 7. Найти первую частоту колебаний однородной круглой пластинки, закрепленной по внешнему контуру (по методу Ритца).

Потенциальная энергия такой пластинки вычисляется по формуле

$$2\Pi_{\max} = D \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right)^2 r \, d\theta \, dr. \quad (9.80)$$

В качестве минимизирующей формы с n узловыми диаметрами возьмем выражение

$$\omega(r, \theta) = ar^s (a^2 - r^2)^2 \cos n\theta, \quad (9.81)$$

где s — параметр, значение которого подбирается из условия минимума квадрата первой частоты.

Подставив (9.81) в (9.80) и выполнив интегрирование по θ , получим

$$2\Pi_{\max} = D\pi \int_0^a \left(\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_0}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \omega_0 \right)^2 r \, dr,$$

где

$$\omega_0 = ar^s (a^2 - r^2)^2.$$

Вычислим подынтегральное выражение в скобках:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_0}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \omega_0 &= \\ &= \alpha [a^4 r^{s-2} (s^2 - n^2) - 2a^2 r^s ((s+2)^2 - n^2) + r^{s+2} ((s+4)^2 - n^2)]. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала симметричные колебания без узловых диаметров, при $n=0$. В этом случае

$$\begin{aligned} \int_0^a \left(\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_0}{\partial r} \right)^2 r \, dr &= \alpha^2 a^{2s+6} \left[\frac{s^4}{2s-2} + \frac{4(s+2)^4}{2s+2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(s+4)^4}{2s+6} - \frac{4s^2(s+2)^2}{2s} + \frac{2s^2(s+4)^2}{2s+2} - \frac{4(s+2)(s+4)^2}{2s+4} \right]. \end{aligned}$$

Кинетическая энергия

$$\begin{aligned} 2T_{\max} &= \frac{\pi \gamma h p^2}{g} \int_0^a \omega_0^2 r \, dr = \frac{\pi \gamma h p^2 \alpha^2}{g} \int_0^a (a^4 r^s - 2a^2 r^{s+2} + r^{s+4})^2 r \, dr = \\ &= \frac{\pi \gamma p^2 \alpha^2 h}{g} \left[\frac{1}{2s+2} + \frac{6}{2s+6} + \frac{1}{2s+10} - \frac{4}{2s+4} - \frac{4}{2s+8} \right] a^{2s+10}. \end{aligned}$$

Квадрат первой частоты найдем по формуле Рэлея

$$p_1^2 = \frac{\Pi_{\max}}{T_{\max}}.$$

В него будет входить пока неопределенный параметр s . Этот параметр подбираем из условия минимума p^2 . Разыскав этот минимум, найдем, что он имеет место, когда $s=0$. Но в этом случае

$$2\Pi_{\max} = \frac{32}{3} D\pi \alpha^2 a^6, \quad 2T_{\max} = \frac{\pi \gamma h p^2 \alpha^2 a^{10}}{10g}.$$

Следовательно,

$$p_1^2 = \frac{320}{3a^4} \frac{Dg}{h\gamma}, \quad p_1 = \frac{10,33}{a^2} \sqrt{\frac{Dg}{h\gamma}}.$$

Если $n=1$, то для s нельзя взять значения, меньшего единицы, так как при $s < 1$ производная

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial r} = [a^4 s r^{s-1} - 2a^2 (s+2) r^{s+1} + (s+4) r^{s+3}] \alpha$$

для $r=0$ обращается в бесконечность.

Расчет показывает, что с увеличением s частота возрастает. Поэтому для вычисления частоты с одним узловым диаметром следует взять $s=1$. При таком значении

$$2\Pi_{\max} = 8a^2 D\pi \alpha^2, \quad 2T_{\max} = 0,0167 \frac{\alpha^2 \gamma h \pi p^2 a^{12}}{g}$$

и, следовательно,

$$p_1 = \frac{21,9}{a^2} \sqrt{\frac{Dg}{h\gamma}}.$$

При двух узловых диаметрах ($n=2$) вычисления дают следующие значения частоты при некоторых значениях s :

$$s = 1,5 \quad 1,75 \quad 2,0 \quad 3,0$$

$$p_1 a^2 \sqrt{\frac{\gamma h}{Dg}} = 36,2 \quad 35,5 \quad 36,5 \quad 45,8.$$

Значение, наиболее близкое к точному, частоты получается, по-видимому, для $s = 1,7$, именно

$$p_1 = \frac{35,4}{a^2} \sqrt{\frac{Dg}{\gamma h}}.$$

Пример 8. Найти форму вынужденных колебаний однородной круглой пластинки радиуса a , жестко закрепленной по краям, на которую действует гармоническая возмущающая сила, равномерно распределенная по пластинке с интенсивностью

$$f = A \sin \omega t.$$

Дифференциальное уравнение форм вынужденных колебаний пластинки имеет в рассматриваемом случае вид

$$D\Delta^2 w - \frac{\gamma h \omega^2}{g} w = A. \quad (9.82)$$

Общий интеграл уравнения без правой части

$$R_1(r) = C_1 J_0(kr) + C_2 J_0(ikr).$$

Частный интеграл уравнения (9.82)

$$R_2 = -\frac{A}{Dk^4},$$

где

$$k^4 = \frac{\gamma h \omega^2}{Dg}.$$

Общий интеграл уравнения (9.82)

$$w = R_1 + R_2 = C_1 J_0(kr) + C_2 J_0(ikr) - \frac{A}{Dk^4}. \quad (9.83)$$

На внешнем контуре пластинки

$$w(a) = 0, \quad w'(a) = 0.$$

Из этих условий, представив их с помощью (9.83) сначала уравнениями

$$C_1 J_0(ka) + C_2 J_0(ika) = \frac{A}{Dk^4},$$

$$C_1 J_0'(ka) + C_2 J_0'(ika) = 0$$

и воспользовавшись формулами (9.76), получим:

$$C_1 J_0(ka) + C_2 J_0(ika) = \frac{A}{Dk^4},$$

$$-C_1 J_1(ka) + C_2 J_1(ika) = 0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{A}{Dk^4} \frac{J_1(ika)}{J_0(ka) J_1(ika) + J_1(ka) J_0(ika)},$$

$$C_2 = \frac{A}{Dk^4} \frac{J_1(ka)}{J_0(ka) J_1(ika) + J_1(ka) J_0(ika)}.$$

Форма вынужденных колебаний будет иметь уравнение

$$w(r) = \frac{A}{Dk^4} \left[\frac{J_0(kr) J_1(ika) + J_0(ikr) J_1(ka)}{J_0(ka) J_1(ika) + J_0(ika) J_1(ka)} - 1 \right].$$

Когда

$$J_0(ka) J_1(ika) + J_0(ika) J_1(ka) = 0,$$

частота собственных колебаний пластинки, как это следует из уравнения (9.77), совпадает с частотой возмущающей силы. Наступает явление резонанса, при котором амплитуды колебаний в отсутствие сопротивлений неограниченно возрастают.

9. Аксиальные колебания дисков паровых турбин. Колебания дисков паровых турбин возникают главным образом вследствие нарушений равномерности распределения по диску давления пара, что происходит из-за неправильностей насадки диска, недочетов в изготовлении сопел, а также от парциального впуска пара. Сами по себе незначительные, эти нарушения при так называемых критических скоростях вращения диска могут вызвать сильные поперечные колебания диска, что иногда приводит к сносу части облопачивания ударами о выступы диафрагмы.

Изучением причин аварий лопаток и дисков¹⁾ установлено, что повреждения дисков при аксиальных вибрациях происходят от несимметричных колебаний (с узловыми диаметрами) и именно при двух, трех и четырех узловых диаметрах. На такие колебания обычно и делается расчет дисков на аксиальную вибрацию.

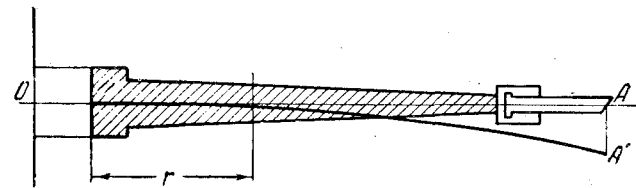


Рис. 96.

При определении основной частоты колебаний диска обычно предполагается, что при прогибе диска точки, расположенные на одном радиусе срединного круга, смещаются при колебаниях в одну сторону и форма прогиба имеет вид кривой OA' на рис. 96. К такой

¹⁾ Шнеэ Я. И., Сахнин А. В., Харитонов Н. Н., Аварии паровых турбин, 1936.

именно форме и подбираются в расчетах по методу Рэлея минимизирующие формы.

Согласно Стодола срединная плоскость диска в положении максимального отклонения располагается по поверхности

$$\omega(r, \theta) = a(r - r_0)^s \cos n\theta, \quad (9.84)$$

где r_0 — радиус вала, n — число узловых диаметров ($n \geq 2$), s — параметр, значение которого для каждого n подбирается из условия минимума частоты колебаний, и r — радиальное расстояние элементов диска от окружности крепления диска на валу (рис. 96). При таком предположении относительно начала отсчета r форма (9.84) будет удовлетворять геометрическим условиям на внутреннем контуре диска, в предположении, что крепление диска на валу жесткое, но не будет удовлетворять условиям на свободном внешнем контуре диска, что, впрочем, при расчете по методу Рэлея или Ритца не является обязательным.

Форма (9.84) дает хорошие результаты для дисков, наружный диаметр которых велик сравнительно с диаметром вала (больше трех диаметров вала). Если отношение диаметра диска к диаметру вала невелико (роторы барабанного типа), то в качестве минимизирующей формы целесообразно взять функцию

$$\omega(r, \theta) = [\alpha_1(r - r_0)^2 + \alpha_2(r - r_0)^3 + \dots] \cos n\theta,$$

где r_0 — диаметр вала¹⁾.

Принятую форму (9.84) подставляем в выражения максимальных значений потенциальной и кинетической энергии круглой пластинки, представив эти выражения для диска переменной толщины предварительно в таком виде:

$$2\Pi_{\max} = \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_a} D \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1 - \sigma) \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) \right]^2 \right\} \right] r \, d\theta \, dr,$$

$$2T_{\max} = \frac{\gamma P^2}{g} \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_a} h \omega^2 r \, d\theta \, dr.$$

Вычисление Π_{\max} и T_{\max} ведется по участкам диска с приблизительно одной и той же геометрической формой радиального сечения, например прямоугольной, конической или гиперболической²⁾.

¹⁾ Пономарев С. Д. и др., Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении, т. II, стр. 319, 1952.

²⁾ Подробности расчета см. в книге Левина А. В., цит. на стр. 312.

10. Экспериментальные исследования аксиальных колебаний диска по Кэмпбеллу¹⁾. Функцию, определяющую форму колебаний диска с n узловыми диаметрами

$$\omega(r, \theta; t) = f(r) \sin n\theta \cos pt,$$

можно представить в виде

$$\omega(r, \theta; t) = \frac{1}{2} f(r) [\sin(n\theta + pt) + \sin(n\theta - pt)]. \quad (9.85)$$

В таком представлении главные колебания диска можно рассматривать как наложение двух синусоидальных волн

$$\frac{1}{2} f \sin(n\theta + pt), \quad \frac{1}{2} f \sin(n\theta - pt),$$

распространяющихся по диску в противоположные стороны с угловыми скоростями $\pm \frac{p}{n}$. Это так называемые *фазовые скорости*, т. е. скорости распространения фазы колебания. Они получаются дифференцированием фазы

$$n\theta \pm pt = \text{const}$$

по времени.

Для невращающегося диска представление главного колебания в виде наложения двух синусоидальных волн (9.85) имеет больше формальный характер: на невращающемся диске эти волны неразличимы. На вращающемся диске по отношению к неподвижному наблюдателю одна волна, «вперед бегущая» (в сторону вращения диска), движется со скоростью большею, чем другая, «назад бегущая». Для такого наблюдателя обе волны окажутся разделенными и вследствие этого реально различимыми. На такой возможности разделения волн на вращающемся диске и основан экспериментальный способ определения частоты колебаний диска.

Пусть ω 1/сек — угловая скорость вращения диска. Тогда абсолютная угловая скорость (по отношению к неподвижному наблюдателю) «вперед бегущей» волны будет равна $\frac{p}{n} + \omega$, а абсолютная угловая скорость «назад бегущей» волны равна $\frac{p}{n} - \omega$.

Кэмпбелл построил установку («кэмпбелл-машина»), с помощью которой можно не только отдельно обнаружить обе волны, но и определить частоты и формы колебаний диска, т. е. число узловых диаметров. Принципиальная схема устройства кэмпбелл-машины такова. На вращающемся диске монтируется датчик $C_{дв}$ (индукционная

¹⁾ Кэмпбелл В., Аксиальная вибрация дисков паровых турбин и меры защиты от нее, ОНТИ, 1937.

катушка), движущийся вместе с диском (рис. 97). Другая катушка C_n устанавливается вне диска; она играет роль неподвижного наблюдателя. Обе катушки по определенной схеме соединяются с осциллографом. При колебаниях диска в катушках наводится переменный ток, регистрируемый на осциллограммах.

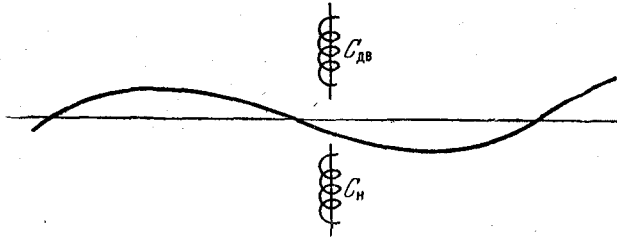


Рис. 97.

Когда диск не вращается, обе катушки подают на осциллограф одну частоту, например 50 1/сек. Когда диск начинает вращаться, постепенно увеличивая свою скорость, сразу же появляются различия в записях частот подвижной и неподвижной катушек. Пусть λ — длина волны (как вперед, так и назад бегущей), T_0 — период полного колебания невращающегося диска. Тогда

$$\lambda = T_0 \frac{p}{n}. \quad (9.86)$$

На вращающемся диске длина волн, понятно, остается прежней, но число волн, проходящих мимо неподвижного наблюдателя, и, следовательно, кажущаяся ему частота (или период) будут различны для волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Абсолютная скорость распространения вперед бегущей волны будет теперь не $\frac{p}{n}$, а $\frac{p}{n} + \omega$. Поэтому соотношение (9.86) напомним для этой волны следующим образом:

$$\lambda = T_1 \left(\omega + \frac{p}{n} \right). \quad (9.87)$$

Сопоставляя (9.86) и (9.87), находим

$$T_0 \frac{p}{n} = T_1 \left(\frac{p}{n} + \omega \right),$$

откуда для периода T_1 имеем

$$T_1 = T_0 : \left(1 + \frac{n\omega}{p} \right), \quad T_1 < T_0.$$

для частоты

$$H_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{T_0} \left(1 + \frac{n\omega}{p} \right) = p + n\omega. \quad (9.88)$$

Для назад бегущей волны

$$\lambda = T_0 \frac{p}{n} = T_2 \left(\frac{p}{n} - \omega \right)$$

и, следовательно,

$$T_2 = T_0 : \left(1 - \frac{n\omega}{p} \right), \quad T_2 > T_0.$$

Частота в этом случае будет

$$H_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{T_0} \left(1 - \frac{n\omega}{p} \right) = p - n\omega. \quad (9.89)$$

Катушка, движущаяся вместе с диском, регистрирует частоту стоячей волны. Эта частота с увеличением ω растет от центробежной силы.

С помощью специального устройства неподвижная катушка передает на осциллограф, а последний регистрирует сразу обе частоты: возрастающую вместе с увеличением числа оборотов диска для вперед бегущей волны и убывающую — для назад бегущей волны.

Из формул (9.88) и (9.89) можно найти и частоту колебаний диска и число узловых диаметров. В самом деле из уравнений

$$H_1 = p + n\omega,$$

$$H_2 = p - n\omega$$

следует, что

$$p = \frac{H_1 + H_2}{2}, \quad n = \frac{H_1 - H_2}{2\omega}. \quad (9.90)$$

11. Критическое число оборотов диска. Как показывает опыт, диск теряет упругую устойчивость, когда скорость распространения волны по диску становится равной скорости вращения диска, т. е. когда

$$\omega_{кр} = \frac{p}{n}. \quad (9.91)$$

Эта угловая скорость называется *угловой критической скоростью* диска. При условии (9.91) назад бегущая волна останавливается для неподвижного наблюдателя и H_2 становится равным нулю. Из формулы (9.91) для критического числа оборотов (секундного) имеем:

$$N_{кр} = \frac{\omega_{кр}}{2\pi} = \frac{p}{2\pi n}.$$

Наиболее опасными для диска являются колебания с двумя и тремя узловыми диаметрами.

Критическое число оборотов диска, определяемое по формуле (9.91), следует отличать от числа оборотов, «критического для лопаток», при котором частота возмущающей силы, действующей на лопатку, становится равной собственной частоте колебаний лопатки. Так как периодическая возмущающая сила за один оборот диска пробегает целое число полных циклов своих изменений, то критическая частота будет равна целому кратному секундному числу N оборотов диска, которое в этом случае и будет критическим для лопатки. Из формулы (8.35)

$$p_{\text{дин}} = \sqrt{p_{\text{ст}}^2 + BN^2}$$

имеем для критического числа оборотов $N_{\text{кр}}$:

$$kN_{\text{кр}} = \sqrt{p_{\text{ст}}^2 + BN_{\text{кр}}^2},$$

откуда

$$N_{\text{кр}} = \frac{p_{\text{ст}}}{\sqrt{k^2 - B}}. \quad (9.92)$$

Во избежание возникновения опасных резонансных колебаний лопатки $p_{\text{ст}}$ нужно подобрать так, чтобы при двух значениях k , отличающихся на единицу, получились бы по формуле (9.92) значения N , не совпадающие с рабочим числом оборотов диска в секунду. Такой подбор $p_{\text{ст}}$ для данной лопатки осуществляется путем так называемой «настройки» лопатки (например, снятия некоторого количества материала со спинки лопатки).

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ И НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

ГЛАВА X

ВВЕДЕНИЕ В ОБЩУЮ ТЕОРИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

1. Предварительные замечания. Стационарные состояния движения нелинейных систем осуществляются обычно в виде или состояний устойчивых периодических колебательных движений, или устойчивых равновесных состояний, которые можно считать также периодическими движениями с периодом, равным ∞ . Но наряду с устойчивыми периодическими движениями в нелинейных системах возможны и неустойчивые периодические движения. Только устойчивые состояния осуществляются в действительности, и только такие состояния могут иметь практический интерес. Понятно поэтому, какое большое значение имеет установление признаков устойчивости периодических движений нелинейных систем. Иногда самое нахождение периодических движений является решением некоторой задачи на устойчивость, как это имеет место, например, в так называемых нелинейных системах А. М. Ляпунова¹⁾. Именно по этим соображениям учению о нелинейных колебаниях предпосылается краткое введение в теорию устойчивости движения.

Изучение теории устойчивости движения мы начнем с изложения некоторых общих теорем, установленных А. М. Ляпуновым, ограничиваясь при этом состояниями покоя или движения голономных механических систем с конечным числом степеней свободы. Состояние движения таких систем кинематически определяется заданием *обобщенных координат* и *скоростей* в виде однозначных функций времени. В частности, состоянию покоя (равновесному состоянию) соответствуют постоянные значения координат и равные нулю скорости.

Почти всюду в исследованиях устойчивости движения и покоя обобщенные координаты и скорости формально играют одинаковую

¹⁾ Малкин И. Г., Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1949.

роль. Представляется поэтому целесообразным сразу же ввести для них единообразные обозначения, положив, например

$$\xi_i = q_i, \quad \xi_{k+i} = \dot{q}_i \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Дальше и те, и другие называются просто *координатами системы* с одним счетом индексов от 1 до n , где $n = 2k$.

Для выражения соотношений между координатами ξ_i мы будем часто прибегать к геометрическому языку. Мы будем говорить, что одновременные значения величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ($n = 2k$) определяют положение точки в пространстве $n = 2k$ измерений, подобно тому как одновременные значения координат x, y, z определяют положение геометрической точки в пространстве трех измерений. Пространство точек $M(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ с координатами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, из которых первые k обозначают обобщенные координаты, а последние k — обобщенные скорости называется *фазовым пространством*, а точка M этого пространства с координатами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — *изображающей точкой* или, подробнее, точкой, изображающей состояние движения рассматриваемой системы.

Уравнения движения системы

$$\dot{\xi}_i = \xi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10.1)$$

можно в соответствии с вышеизложенным истолковать как уравнения движения изображающей точки в фазовом пространстве. Их можно также считать параметрическими уравнениями траектории изображающей точки в фазовом пространстве — так называемой *фазовой траектории*. Конечно, движение изображающей точки в фазовом пространстве — это не движение заданной системы, а только особая форма геометрической интерпретации последнего, и фазовые траектории ничего общего не имеют с траекториями каких-либо точек заданной системы.

Важно заметить, что *состоянию* движения системы в некоторый момент времени в фазовом пространстве сопоставляется определенное *положение* изображающей точки и *изменению состояния* движения с течением времени соответствует в фазовом пространстве *изменение положения* изображающей точки. Так, *состоянию покоя* или так называемому *равновесному состоянию* системы, в котором координаты системы сохраняют постоянные значения, а скорости равны нулю, будет соответствовать некоторое *положение равновесия* изображающей точки, и устойчивость равновесного состояния системы будет, таким образом, определяться устойчивостью соответствующего положения изображающей систему точки.

Следуя той же интерпретации, мы будем считать уравнение

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0$$

уравнением некоторой поверхности в фазовом пространстве. Так, например, уравнение

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = R^2 \quad (10.2)$$

мы будем называть *уравнением сферы в фазовом пространстве*, а R^2 — квадратом расстояния точки $M(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ от начала координат. Неравенство

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 < R^2$$

будем рассматривать как определение области, расположенной внутри сферы (10.2). Такое геометрическое толкование соотношений между n переменными часто дает возможность использовать наглядные представления обычного трехмерного пространства для обнаружения некоторых свойств многомерных совокупностей.

В задачах, рассматриваемых дальше, дифференциальные уравнения движения системы приводятся к виду

$$\frac{d\xi_i}{dt} = F_i(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (10.3)$$

т. е. к уравнениям первого порядка, разрешенным относительно первых производных координат по времени.

В фазовом пространстве уравнения (10.3) определяют *поле направлений*. Каждой точке этого пространства они сопоставляют направление скорости изображающей точки или направление касательной к фазовой траектории, проходящей через эту точку. Когда функции F_i явно зависят от времени, направления касательных в точках фазового пространства изменяются с течением времени: поле направлений будет переменным, или, как мы будем говорить, *установившимся*.

Если же функции F_i не зависят явно от времени, т. е. уравнения движения имеют вид

$$\frac{d\xi_i}{dt} = F_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (10.4)$$

то поле направлений не будет изменяться со временем, будет *установившимся*, или *стационарным* полем направлений. Иногда и движение системы, изображаемое стационарным полем направлений, т. е. уравнениями (10.4), называют *установившимся движением*. Системы, совершающие такое движение, называются *автономными системами*.

Фазовая интерпретация движения автономной системы приобретает особенно простой и наглядный вид для системы с одной

степенью свободы. В этом случае фазовое пространство обращается в плоскость, фазовые траектории — в обыкновенные плоские кривые. Так, например, уравнение гармонического осциллятора

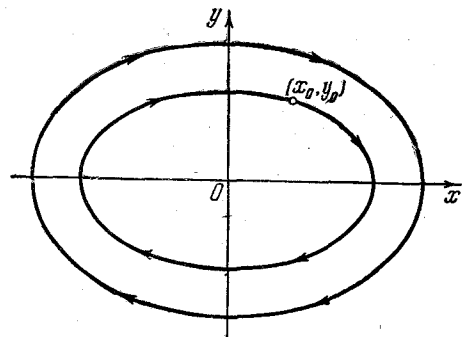


Рис. 98.

$$\ddot{q} + k^2 q = 0$$

подстановкой

$$x = q, \quad y = \dot{q}$$

приводится к эквивалентной системе двух уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -k^2 x.$$

Фазовым пространством здесь будет координатная плоскость Oxy . Фазовые траектории имеют уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -k^2 \frac{x}{y}, \quad k^2 x^2 + y^2 = \text{const} = C.$$

Они представляют для различных значений постоянной C вложенные друг в друга эллипсы с центром в начале координат (рис. 98). Изображающая точка будет двигаться по эллипсу, проходящему через точку, координаты (x_0, y_0) которой определяются начальным отклонением $q = x_0$ и начальной скоростью $\dot{q} = y_0$. При этом движение изображающей точки в верхней полуплоскости будет происходить всегда слева направо, так как здесь $y = \frac{dx}{dt} > 0$, а в нижней полуплоскости всегда справа налево, так как здесь $y = \frac{dx}{dt} < 0$.

2. Определение устойчивости равновесного состояния системы.

Мы будем предполагать, что в рассматриваемом нами равновесном состоянии все

$$\xi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В фазовом пространстве это равновесное состояние системы будет представлено «нулевым положением» изображающей точки, т. е. положением изображающей точки в начале координат.

Отличные от нуля значения координат ξ_i будут определять отклонения изображающей точки от нулевого положения равновесия, или так называемые *возмущения* равновесного состояния системы. Получив некоторое начальное возмущение, определяемое совокупностью начальных значений координат ξ_i , например

$$\xi_i = \xi_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

и предоставленная затем самой себе, система будет совершать движение, которое мы называем *возмущенным движением*. Ему отвечает некоторое возмущенное движение изображающей точки в фазовом пространстве. В той теории, которая дальше излагается, устойчивость равновесного состояния системы определяется по изменениям координат ξ_i в возмущенном движении системы, т. е. по ее поведению после того, как, получив начальное возмущение, она затем представляется самой себе.

В возмущенном движении система или удаляется от равновесного состояния, так что квадрат расстояния изображающей систему точки от начала растет с течением времени, или пребывает в ближайшей окрестности равновесного состояния, так что квадрат расстояния $\sum \xi_i^2$ изображающей точки от начала все время остается ограниченным, т. е. не превосходящим некоторого заданного, достаточно малого положительного числа, или, наконец, возвращается в равновесное состояние, совершая около него более или менее быстро затухающие колебания. В последнем случае $\sum \xi_i^2 \rightarrow 0$. Вот эти стороны поведения системы и изображающей ее точки в возмущенном движении и будут характеризовать устойчивость или неустойчивость невозмущенного равновесного состояния. С этой точки зрения естественно считать устойчивым равновесное состояние, в ближайшей окрестности которого пребывает система во все время возмущенного движения или в которое она возвращается, получив некоторое начальное возмущение.

Изложенную описательную характеристику устойчивости равновесного состояния системы мы и положим в основу точного определения устойчивости.

Мы будем считать равновесное состояние системы, определяемое нулевыми значениями координат ξ_i , *устойчивым по Ляпунову* или просто — *устойчивым*, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\epsilon > 0$ можно будет найти такое другое положительное число $\eta(\epsilon) > 0$, зависящее от ϵ^1 , что во время возмущенного движения координаты ξ_i будут удовлетворять неравенствам

$$|\xi_i| \leq \epsilon,$$

коль скоро их начальные значения ξ_{i0} будут выбраны согласно условиям

$$|\xi_{i0}| \leq \eta.$$

Иначе говоря, равновесное состояние системы устойчиво по Ляпунову, если для любого сколь угодно малого положительного числа ϵ можно подобрать другое положительное число $\eta(\epsilon)$ так, что во время возмущенного движения изображающая точка не выйдет за пределы сферы

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = \epsilon^2$$

¹⁾ Для обозначения этой зависимости мы и пишем $\eta(\epsilon)$.

и ее расстояние от начала не превзойдет ε , если начальное положение изображающей точки будет взято внутри сферы

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = \eta^2,$$

т. е. на расстоянии от начала, не превосходящем η .

В своем классическом труде «Общая задача об устойчивости движения» А. М. Ляпунов¹⁾ развил два метода решения задач об устойчивости движения: метод характеристических показателей решений уравнений возмущенного движения и так называемый «второй метод» — качественный метод определения устойчивости, где суждения об устойчивости делаются по изменениям в возмущенном движении системы некоторых функций ее координат. Именно этот второй метод и рассматривается в дальнейшем.

3. Функции Ляпунова. Если бы мы сумели проинтегрировать уравнения возмущенного движения системы, которое она совершает, получив достаточно малое возмущение равновесного состояния, то решение вопроса об устойчивости или неустойчивости последнего не представило бы особых затруднений. Однако большей частью уравнения возмущенного движения нелинейны, а общих методов интегрирования нелинейных уравнений мы не знаем. Суждения об устойчивости по линеаризованным уравнениям возмущенного движения, вообще говоря, возможны, но только при соблюдении некоторых специальных условий²⁾. Во многих случаях линеаризация, как об этом говорил сам Ляпунов, подменяет данную задачу новой, которая может не иметь ничего общего с первой, и заключения об устойчивости линеаризованной системы нельзя будет отнести к заданной. Такого рода затруднения привели А. М. Ляпунова к созданию особого метода исследования устойчивости, позволяющего устанавливать свойства системы в отношении устойчивости или неустойчивости ее невозмущенного равновесного состояния непосредственно по дифференциальным уравнениям возмущенного движения, не интегрируя последних.

Сущность этого «качественного», как его иногда называют, метода можно было бы в упрощенной форме в применении к задаче об устойчивости равновесного состояния описать следующим образом. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{d\xi_l}{dt} = F_l(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (l=1, 2, \dots, n), \quad (10.5)$$

причем невозмущенное равновесное состояние определяется нулевыми значениями координат

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0.$$

¹⁾ Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950. (Первое издание — 1892 г.)

²⁾ Эти условия установлены А. М. Ляпуновым в его теории устойчивости «по первому приближению» (см. гл. XI).

() помощью этих уравнений можно найти скорость изменения с течением времени некоторой функции координат ξ_i

$$V = V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

вычислив ее производную по времени

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \xi_1} \frac{d\xi_1}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial \xi_n} \frac{d\xi_n}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \xi_1} F_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial \xi_n} F_n. \quad (10.6)$$

В силу уравнений (10.5) эта производная будет известной функцией координат $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Ее знак устанавливает общее направление изменений функции V , из чего можно иногда получить сведения об изменениях координат в возмущенном движении системы, достаточные для суждения об устойчивости ее равновесия.

Предположим, например, что, вычислив производную (10.6), мы нашли бы, что она в силу уравнений (10.5) тождественно равна нулю. Отсюда мы заключили бы, что функция V для всех значений ξ_i , какие только ξ_i могут принимать в возмущенном движении, сохраняет постоянное значение. Пусть это значение будет малым положительным числом. В некоторых случаях достаточно одного этого факта, чтобы сделать вывод об ограниченности изменений координат ξ_i в возмущенном движении, т. е. об устойчивости равновесного состояния, в котором

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0.$$

Но для возможности таких выводов функция V должна обладать некоторыми особыми свойствами, так как из ограниченности функции не всегда, конечно, следует ограниченность ее аргументов. Так, из того, что функция

$$V = x^2 - y^2$$

сохраняет для всех значений x и y постоянное значение, например

$$V = x^2 - y^2 = 1,$$

не следует, что x и y ограничены. Но если бы мы нашли, что в силу уравнений возмущенного движения функция

$$V = x^2 + y^2$$

сохраняет постоянное значение

$$V = x^2 + y^2 = 1,$$

то отсюда с определенностью следовало бы, что в возмущенном движении ни одна из координат x и y не делается по абсолютной величине больше единицы.

А. М. Ляпунов установил, какими свойствами должны обладать функции

$$V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

чтобы по скорости изменения этих функций, определяемой уравнениями возмущенного движения (10.5), можно было судить об изменении координат ξ_i и вместе с тем решать вопрос об устойчивости невозмущенного равновесного положения изображающей точки, в котором все

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0.$$

Для функций V , явно от времени не зависящих, эти свойства выражаются следующими определениями.

Прежде всего функция

$$V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

должна быть конечной, однозначной и непрерывной функцией всех своих аргументов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Далее, должна существовать область, окружающая со всех сторон нулевую точку, например область

$$\sum \xi_i^2 \leq R^2 \quad (R),$$

ограниченная сферой

$$\sum \xi_i^2 = R^2,$$

радиус R которой может быть весьма малым, но всегда отличным от нуля, — область, в которой функция $V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ принимала бы значения одного знака, обращаясь в нуль только в нулевой точке, где все без исключения ξ_i равны нулю.

Функция V , обладающая последним свойством, называется *знакоопределенной в области (R)*, причем, если принимаемые ею значения, кроме нулевого, все положительны, то функция V называется *определенно положительной в области (R)*; если эти значения отрицательны, то — *определенно отрицательной в области (R)*.

Знакоопределенные функции в области (R), конечные, однозначные, непрерывные и явно от времени не зависящие, мы будем называть *функциями Ляпунова первого рода*.

Знакоопределенные функции необходимо отличать от так называемых *знакопостоянных* в той же области (R) функций. Знакопостоянные функции в области (R) могут обращаться в нуль не только в нулевой точке, где все $\xi_i = 0$, но и в других точках области, сохраняя при этом один и тот же знак для своих ненулевых значений в этой области. В зависимости от знака они могут быть как *постоянно положительными*, так и *постоянно отрицательными*. Так, функция

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\xi_1\xi_2 = (\xi_1 + \xi_2)^2$$

будет, очевидно, постоянно положительной функцией, так как она может принимать нулевые значения не только в точке $\xi_1 = \xi_2 = 0$, но и во всех точках, где $\xi_1 = -\xi_2$, оставаясь положительной во всех других точках.

Функции, которые в пределах области (R) могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, называются *знакопеременными* в области (R).

В дополнение к этим определениям приводим некоторые признаки знакоопределенности и знакопеременности функций, явно от времени не зависящих, ограничиваясь при этом только формулировкой относящихся сюда теорем¹⁾:

1) Всякая форма нечетного порядка есть функция знакопеременная.
2) Формы четного порядка могут быть как знакоопределенными, так и знакопеременными. Для квадратичных форм необходимый и достаточный признак определенной положительности дает теорема Сильвестра, сформулированная на стр. 41.

3) Знакоопределенность или знакопеременность однородной формы сохраняется, если к ней добавить любую форму от тех же переменных и того же порядка с достаточно малыми коэффициентами.

4) Знакоопределенность или знакопеременность аналитических функций определяется совокупностью членов наименьшего порядка в разложениях этих функций, за исключением случаев, когда эта совокупность представляет знакопостоянную функцию. В последнем случае вопрос о знакоопределенности или знакопеременности решается на основании рассмотрения членов более высоких порядков.

5) Знакоопределенная функция должна содержать все координаты, определяющие состояние движения системы. Если какая-либо координата отсутствует, то функция может быть только знакопостоянной. Такова, например, полная энергия консервативной системы с циклическими координатами.

Примеры. Рассмотрим функцию $V(x_1, x_2, x_3)$ трех переменных x_1, x_2, x_3 . Эта функция будет определено положительной, если, например,

$$V(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Функция

$$V(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1^2 + x_2^2$$

постоянно положительная, так как в ней отсутствует переменная x_3 . Функция

$$V(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$$

на основании теоремы Сильвестра — определено положительная.

Функция

$$V(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2$$

¹⁾ См. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, «Наука», 1963; Дубошин Г. Н., Основы теории устойчивости движения, Изд. МГУ, 1952.

постоянно положительная. В самом деле, ее можно представить следующим образом:

$$V = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2.$$

Она обращается в нуль, не только когда $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, но и когда $x_1 = -x_2$ и $x_3 = 0$, оставаясь положительной для всех других значений переменных.

Функция двух переменных $V(x_1, x_2)$ будет знакопостоянной в области

$$x_1^2 + x_2^2 \leq R^2,$$

если в этой области $V(x_1, x_2) \equiv x_1^2$; будет знакопеременной в той же области, если

$$V \equiv x_1 \text{ или } V \equiv x_1^2 - x_2^2.$$

Для малых значений x_1, x_2 функция

$$V \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2^2 + x_3^2$$

определенно положительная; функция

$$V \equiv x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2^2 + x_3^2$$

знакопеременная.

Функция

$$V \equiv x_1^2 - 2x_1 x_2^2 + x_1^4 + x_3^2 = (x_1 - x_2^2)^2 + x_1^4$$

представляет пример знакоопределенной функции, для суждения о знакоопределенности или знакопеременности которой нужно привлекать к рассмотрению члены высших порядков, так как совокупность членов наинизшего порядка, представленная здесь x_1^2 , есть функция постоянно положительная.

Так же и для функции

$$V(x_1, x_2) \equiv x_1^2 - 2x_1 x_2^2 + x_2^4 + x_1^4 + x_1 x_2^6$$

решение вопроса о знакоопределенности или знакопеременности возможно только с привлечением членов высших порядков. На параболе $x_1 = x_2^2$ функция V приобретает значение $x_2^4 + x_3^2$. Она является, таким образом, для малых значений x_2 функцией знакопеременной.

Возможность использования функций Ляпунова для суждения об устойчивости равновесного состояния системы, определяемого нулевыми значениями ξ_i , основана на следующих теоремах, устанавливающих важнейшие свойства этих функций.

Рассмотрим сферу

$$\sum \xi_i^2 = \epsilon^2 \quad (\epsilon),$$

расположенную внутри области (R) , так что $\epsilon < R$. Пусть

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

— определено положительная функция Ляпунова в области (R) . Обозначим через P нижний предел V на сфере (ϵ) . Очевидно,

$$P > 0.$$

Теорема 1. Если $0 < c \leq P$, то поверхность

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) = c$$

замкнутая, она окружает со всех сторон начало координат и расположена внутри сферы (ϵ) ¹⁾.

Для доказательства проследим за изменениями V при перемещении изображающей точки вдоль какого-либо радиуса сферы (ϵ) , начиная от нулевой точки (центра сферы). В начале этого перемещения $V = 0$, в конце, в некоторой точке сферы, $V \geq P$. Так как V — функция однозначная и непрерывная, то при изменении ее на конечном интервале от нуля до $V \geq P$ она обязательно пройдет через все промежуточные между указанными пределами значения и, следовательно, в некоторой точке между началом и концом радиуса примет значение c . В этой точке радиус встретит и пересечет поверхность

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) = c.$$

Такая встреча произойдет на любом радиусе, проведенном из начала координат в какую угодно сторону. Следовательно, поверхность $V = c$ — замкнутая; она со всех сторон окружает начало координат и расположена внутри сферы (ϵ) ²⁾.

Существует и аналитическое доказательство изложенной теоремы. С ним можно ознакомиться, например, в книге Н. А. Кильчевского³⁾.

Следствие. Если $c_1 < c_2 \leq P$, то поверхность

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) = c_1$$

расположена внутри поверхности

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) = c_2,$$

нигде не касаясь последней.

При изменении c от нуля до P мы получаем бесконечную совокупность, целый континуум замкнутых поверхностей, вложенных одна в другую и нигде не соприкасающихся и не пересекающихся, окружающих начало координат, где они равномерно стягиваются в точку.

Теорема 2. Если установлено, что функция V при всех изменениях ξ_i в возмущенном движении остается меньше своего нижнего предела на сфере (ϵ) , т. е. если для всех $t \geq 0$

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) < P,$$

то изображающая система точка не выйдет за пределы сферы (ϵ) ,

¹⁾ Иногда касаясь изнутри сферы (ϵ) в одной или нескольких точках.

²⁾ Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952.

³⁾ Кильчевский М. О., Курс теоретической механики, ч. II, Радянська школа, 1952.

т. е. квадрат ее расстояния от начала будет удовлетворять неравенству¹⁾

$$\sum \xi_i^2 \leq \varepsilon^2.$$

4. О функциях, обладающих бесконечно малым высшим пределом. Функция $V(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ²⁾ обладает бесконечно малым высшим пределом, если, как бы мало ни было заданное положительное число $Q > 0$, найдется такой радиус $\eta > 0$ и такая сфера

$$\sum \xi_i^2 = \eta^2,$$

на которой Q будет высшим пределом функции $V(\xi_1, \dots, \xi_n)$, так что для всех ξ_i , удовлетворяющих условию

$$\sum \xi_i^2 \leq \eta^2,$$

будет иметь место неравенство

$$V \leq Q. \quad (10.7)$$

Функция Ляпунова первого рода, явно от времени не зависящая, обладает бесконечно малым высшим пределом в силу своей непрерывности в нулевой точке. В самом деле, если функция $V(\xi_1, \dots, \xi_n)$ непрерывна в точке

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0,$$

то, как бы мало ни было наперед заданное положительное число $Q > 0$, найдется такое $\eta > 0$, что для значений ξ_i , не превосходящих по абсолютной величине η , т. е. удовлетворяющих неравенству $\sum \xi_i^2 \leq \eta^2$, функция V будет не больше Q , т. е. $V \leq Q$.

Таким образом, определение непрерывности V в нулевой точке выражается теми же соотношениями, что и условия обладания этой функцией бесконечно малым высшим пределом.

Теорема 3. Пусть Q — высший предел функции $V(\xi_1, \dots, \xi_n)$ на сфере

$$\sum \xi_i^2 = \varepsilon^2. \quad (\varepsilon)$$

Тогда, если $c \geq Q > 0$, то сфера (ε) расположена внутри поверхности³⁾

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) = c, \quad (10.8)$$

¹⁾ Так как на сфере ε , через которую должна пройти изображающая точка, чтобы выйти за пределы сферы, $V \geq Q$.

²⁾ Функции, о которых идет речь в этом параграфе, являются функциями Ляпунова первого рода.

³⁾ Может быть, касаясь этой поверхности изнутри в одной или нескольких точках.

так что по крайней мере одна из координат ξ_i , удовлетворяющих уравнению

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) = c, \quad (10.9)$$

не сделается по абсолютной величине меньше ε .

Утверждение, что по крайней мере одна из координат, удовлетворяющих уравнению (10.9), не сделается по абсолютной величине меньше ε , равносильно утверждению, что на поверхности (10.9) $\sum \xi_i^2 \geq \varepsilon^2$. В самом деле, если бы последнее неравенство не было выполнено на поверхности (10.9), т. е. если бы на этой поверхности $\sum \xi_i^2 < \varepsilon^2$, то согласно определению бесконечно малого высшего предела, которым функция V обладает в силу своей непрерывности в нулевой точке, мы имели бы для таких ξ_i

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) < Q,$$

что противоречит условию теоремы.

Изложенная теорема имеет место только для функций V , допускающих бесконечно малый высший предел, и иногда рассматривается как другое определение таких функций.

5. Геометрическая интерпретация свойств функций Ляпунова первого рода двух переменных. Совокупность значений функции Ляпунова

$$V(\xi_1, \xi_2)$$

в области

$$\sum \xi_i^2 \leq R^2 \quad (R)$$

можно представить в пространстве трех измерений частью поверхности

$$z = V(\xi_1, \xi_2). \quad (10.10)$$

Эта часть поверхности (10.10) всеми своими точками располагается по одну сторону фазовой плоскости $O\xi_1\xi_2$ (определенно положительная — со стороны положительных z) и касается этой плоскости в нулевой точке. Область (ε) на рис. 99 представлена площадью круга радиуса ε , описанного пунктирной линией из начала координат O . Значения функции V на окружности (ε) представлены параллельными оси Oz отрезками образующих цилиндра, построенного на окружности (ε) . Нижняя граница P значений V на окружности (ε) представлена отрезком AB , верхняя Q — отрезком CD .

На основании определения функций Ляпунова и их свойств, установленных теоремами 1 и 2, поверхность

$$z = V(\xi_1, \xi_2)$$

должна обладать в области (R) следующими свойствами:

1) В области (R) — это непрерывно расширяющаяся поверхность, не загибающаяся внутрь, к оси Oz . Это следует из однозначности функции $V(\xi_1, \xi_2)$ в этой области.

2) Кривые $V(\xi_1, \xi_2) = c$ для разных значений c получаются как проекции на плоскость $O\xi_1\xi_2$ сечений поверхности $z = V(\xi_1, \xi_2)$

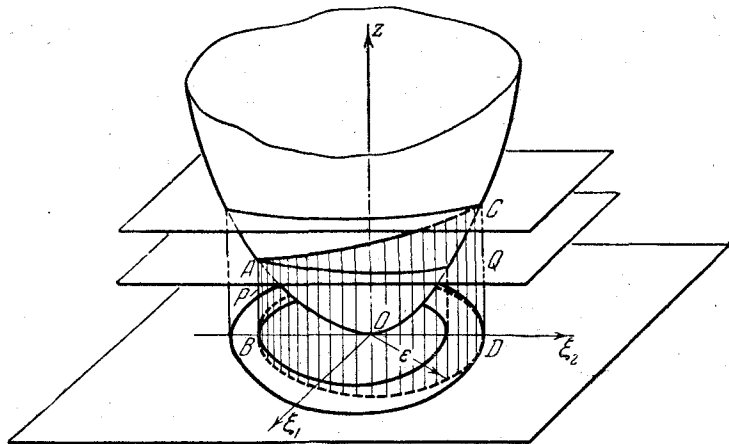


Рис. 99.

плоскостями $z = c$, перпендикулярными к оси Oz . Эти сечения проектируются на плоскость $O\xi_1\xi_2$ в натуральную величину. Так, кривая

$$V(\xi_1, \xi_2) = P$$

получится от сечения поверхности (10.10) плоскостью, проходящей через A на расстоянии от начала, равном P — нижнему пределу V на окружности (ϵ) . Согласно теореме 1 эта кривая будет лежать внутри окружности (ϵ) , касаясь последней в точке B .

3) Кривая

$$V(\xi_1, \xi_2) = Q,$$

где Q — верхняя граница V на окружности (ϵ) , охватывает со всех сторон окружность (ϵ) , касаясь последней в точке D .

6. Теорема об устойчивости равновесного состояния системы. Если уравнения возмущенного движения системы таковы, что можно найти знакоопределенную функцию $V(\xi_1, \dots, \xi_n)$, производная которой по времени была бы в силу уравнений возмущенного движения знакопостоянной функцией, противоположного знака с V или тождественно равной нулю, то равновесное состояние системы, определяемое нулевыми значениями координат

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0,$$

устойчиво по Ляпунову.

Нужно доказать, что при выполнении условий теоремы, как бы мало ни было наперед заданное число $\epsilon > 0$, к нему всегда можно подобрать такое $\eta(\epsilon) > 0$, что во время возмущенного движения (т. е. для всех $t \geq 0$) будет иметь место неравенство

$$\sum \xi_i^2 \leq \epsilon^2,$$

если скоро начальные значения координат будут выбраны в соответствии с условием

$$\sum \xi_{i0}^2 \leq \eta^2.$$

Предположим, что, задавшись сколь угодно малым числом $\epsilon > 0$, мы нашли функцию Ляпунова $V(\xi_1, \dots, \xi_n)$, удовлетворяющую условиям теоремы в области

$$\sum \xi_i^2 \leq \epsilon^2 \quad (\epsilon).$$

Пусть в этой области функция V будет определено положительной, а ее производная по времени \dot{V} в силу уравнений возмущенного движения — постоянно отрицательной или тождественно равной нулю, так что имеют место неравенства

$$V > 0, \quad \dot{V} \leq 0. \quad (10.11)$$

Обозначим через P нижнюю границу V на сфере

$$\sum \xi_i^2 = \epsilon^2.$$

Число P обязательно больше нуля. Так как V непрерывна в нулевой точке, явно от времени не зависит и, следовательно, допускает бесконечно малый высший предел, то, как бы мало ни было число P , всегда можно найти такой радиус $\eta > 0$ и такую сферу

$$\sum \xi_i^2 = \eta^2,$$

на которой P будет высшим пределом функции V , так что для всех значений ξ_i , удовлетворяющих условию

$$\sum \xi_i^2 \leq \eta^2,$$

будет иметь место неравенство

$$V \leq P. \quad (10.12)$$

Дадим нашей системе начальное возмущение, выбрав начальные значения координат ξ_{i0} так, чтобы

$$\sum \xi_{i0}^2 \leq \eta^2. \quad (10.13)$$

Тогда

$$V_0 = V(\xi_{10}, \dots, \xi_{n0}) \leq P.$$

Чтобы установить, как будет вести себя функция после того, как, получив начальное возмущение согласно (10.13), система начнет возмущенное движение, воспользуемся указанием теоремы о том, что производная от V по времени в силу уравнений возмущенного движения остается постоянно отрицательной или тождественно равной нулю. Из неравенства

$$\dot{V} \leq 0,$$

после интегрирования по t в пределах от нуля до произвольного t получим:

$$V_0 - V \geq 0, \quad V \leq V_0 \leq P.$$

Сопоставляя полученное неравенство с (10.12), заключаем, что во все время возмущенного движения (т. е. для $t \geq 0$) функция V остается меньше своей нижней границы на сфере (ϵ). Следовательно, при выбранных согласно условию (10.13) начальных значениях ξ_{i0} изображающая точка не выйдет за пределы сферы (ϵ), т. е. в возмущенном движении координаты ξ_i будут удовлетворять условию

$$\sum \xi_i^2 < \epsilon^2$$

для всех $t \geq 0$.

7. Теорема Лагранжа — Дирихле об устойчивости равновесия консервативной системы. Одним из поучительных приложений изложенной теоремы, в котором отвлеченные свойства функций А. М. Ляпунова получают конкретное физическое истолкование, может служить известная теорема об устойчивости равновесия консервативной системы, впервые сформулированная Лагранжем и строго доказанная Дирихле¹⁾. Эта теорема излагается обычно следующим образом:

Если в положении равновесия потенциальная энергия консервативной системы имеет изолированный минимум, то равновесие в этом положении устойчиво.

Мы внесем как в формулировку теоремы, так и в ее доказательство некоторые изменения, не затрагивающие существа ее содержания, но лучше подчеркивающие ее непосредственную связь со вторым методом Ляпунова. Изменения будут заключаться в том, что мы будем рассматривать устойчивость *равновесного состояния или покоя* системы, предполагая, что в этом состоянии все обобщенные координаты и скорости системы равны нулю, и вести рассуждения, пользуясь представлением полной энергии в фазовом пространстве.

В фазовом пространстве равновесное состояние нашей системы будет представлено *нулевым положением* изображающей точки,

так что применительно к фазовому пространству речь будет идти об устойчивости *нулевого положения* изображающей точки. Всегда можно предполагать, что потенциальная энергия системы в равновесном состоянии равна нулю. Равна нулю будет здесь, конечно, и кинетическая энергия. Когда системе сообщается начальное возмущение, она получает некоторые количества потенциальной и кинетической энергии, т. е. некоторый запас полной механической энергии

$$V_0 = T_0 + P_0.$$

В фазовом пространстве такому начальному возмущению системы будет соответствовать начальное положение изображающей точки. Этим начальным положением будет определяться и начальный запас энергии изображающей точки, равный начальному значению полной энергии системы. Полная энергия нашей системы в фазовом пространстве будет представлена *энергией положения* изображающей точки, т. е. своего рода «потенциальной энергией» точки в фазовом поле. Применительно к фазовому представлению состояния системы и ее полной энергии мы и изложим измененную формулировку теоремы Лагранжа — Дирихле.

Если в нулевом положении «энергия положения» изображающей системы точки имеет равный нулю изолированный минимум, то равновесие в этом положении устойчиво по Ляпунову.

Выражение: «энергия в нулевом положении имеет равный нулю изолированный минимум» означает, что можно указать, может быть, весьма малое, но конечное число $\epsilon > 0$, такое, что для всех ξ_i , удовлетворяющих условию

$$\sum \xi_i^2 \leq \epsilon^2 \quad (\epsilon),$$

полная энергия системы будет принимать положительные значения, обращаясь в нуль только когда все без исключения ξ_i равны нулю, т. е. только в нулевой точке. Другими словами, это означает, что в области (ϵ) полная энергия является определенно положительной функцией координат ξ_i . Если к этому добавить, что полная энергия есть также непрерывная, однозначная и конечная функция в области (ϵ), то в этой области она, очевидно, будет функцией Ляпунова первого рода и ее можно использовать для определения характера изменения координат системы в возмущенном движении. Для этого нужно еще установить, как будет изменяться полная энергия в возмущенном движении. Так как система — консервативная, то вопрос об изменении полной энергии в возмущенном движении решается без составления уравнений возмущенного движения: полная энергия системы сохраняет свое значение во все время движения. Следовательно, производная от нее по времени тождественно равна нулю:

$$\frac{d}{dt}(T + P) = 0.$$

¹⁾ Лагранж, Аналитическая механика, т. I. Дополнения, стр. 537, Гостехиздат, 1950.

Таким образом, существует область (ε) , в которой полная энергия системы — определенно положительная функция координат, производная которой по времени тождественно равна нулю. Следовательно, рассматриваемое равновесное состояние устойчиво по Ляпунову.

Поверхности

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) = c,$$

о которых речь шла при исследовании свойств функций Ляпунова, являются в случае консервативной системы поверхностями энергетических уровней, или *эквипотенциальными поверхностями* в фазовом потенциальном поле. Затрачивая на начальное возмущение, т. е. на начальное перемещение изображающей точки, положительную работу и сообщая ей тем самым некоторый запас энергии, мы забрасываем изображающую точку на некоторый энергетический уровень, с какого она в силу консервативности системы не сойдет во все время возмущенного движения. Этот энергетический уровень представляет эквипотенциальную поверхность

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0, \quad (10.14)$$

на которой и будет все время оставаться изображающая точка. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно убедиться, что эквипотенциальная поверхность (10.14) при надлежащем выборе начального возмущения целиком располагается внутри сферы (ε) . Для этого, как было установлено выше, достаточно выбрать начальное возмущение, т. е. начальные координаты $\xi_{10}, \dots, \xi_{n0}$, так, чтобы начальная энергия $T_0 + \Pi_0$ была меньше нижнего предела значений энергии $T + \Pi$ на сфере (ε) .

Теорема Лагранжа—Дирихле дает достаточное условие устойчивости равновесного состояния консервативной системы. Будет ли справедлива обратная теорема, т. е. можно ли утверждать, что все равновесные состояния консервативной системы, в которых потенциальная энергия не достигает минимума, неустойчивы?

Ляпунов доказал¹⁾, что *равновесное состояние консервативной системы, определяемое нулевыми значениями координат, в котором потенциальная энергия системы не достигает минимума, неустойчиво, если отсутствие минимума определяется уже членами второго порядка в разложении потенциальной энергии по степеням координат q_i .*

Другая доказанная Ляпуновым теорема о неустойчивости равновесного состояния консервативной системы гласит:

¹⁾ Ляпунов А. М., О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть максимум, 1897. В книге: Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.

Равновесие консервативной системы неустойчиво, если в равновесном положении потенциальная энергия имеет максимум, причем этот максимум обусловлен членами наименьшего (но не обязательно второго) порядка в разложении потенциальной энергии по степеням q_i .

Таким образом, обратная теорема доказана Ляпуновым для некоторых частных случаев, которые, впрочем, наиболее часто встречаются в приложениях.

Н. Г. Четаев¹⁾ дал более простое доказательство обратной теоремы, основанное на установленной им обобщенной теореме о неустойчивости движения.

Пример 1. Полная энергия материальной точки массы m , притягиваемой неподвижным центром в начале координат пропорционально расстоянию, имеет выражение

$$V = \frac{mv^2}{2} + \frac{kr^2}{2},$$

где r — расстояние точки от центра, v — ее скорость, k — коэффициент пропорциональности.

Положив

$$\frac{m}{2} = \beta^2, \quad \frac{k}{2} = \alpha^2, \quad r = \xi_1, \quad v = \xi_2,$$

представим это выражение в таком виде:

$$V = \alpha^2 \xi_1^2 + \beta^2 \xi_2^2. \quad (10.15)$$

Пусть $\alpha^2 < \beta^2$. В положении $\xi_1 = \xi_2 = 0$ полная энергия (10.15) имеет изолированный минимум. Следовательно, нулевое положение или равновесное состояние системы устойчиво.

Как подобрать к заданному сколь угодно малому числу $\varepsilon > 0$ число $\eta > 0$ так, чтобы в возмущенном движении имело место неравенство

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 \leq \varepsilon^2,$$

если начальные значения ξ_{i0} выбраны согласно условию $\xi_{10}^2 + \xi_{20}^2 \leq \eta^2$? Для этого, согласно вышеизложенному, нужно, задавшись ε , найти нижнюю границу функции V на окружности:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = \varepsilon^2. \quad (10.16)$$

Нижняя граница функции V на окружности (10.16) найдется по правилу разыскания относительного экстремума V при условии (10.16), т. е. из уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_1} + 2\lambda \xi_1 = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi_2} + 2\lambda \xi_2 = 0, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 = \varepsilon^2$$

или

$$\begin{aligned} \alpha^2 \xi_1 + \lambda \xi_1 &= 0, \\ \beta^2 \xi_2 + \lambda \xi_2 &= 0, \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 &= \varepsilon^2. \end{aligned}$$

¹⁾ Четаев Н. Г., Устойчивость движения, гл. III, «Наука», 1965.

Эти уравнения имеют два решения

$$\begin{aligned} 1) \xi_1 &= 0, \quad \lambda = -\beta^2, \quad \xi_2^2 = \epsilon^2, \\ 2) \xi_2 &= 0, \quad \lambda = -\alpha^2, \quad \xi_1^2 = \epsilon^2. \end{aligned}$$

Первому решению соответствует максимум V , равный $\beta^2\epsilon^2$; второму — минимум V , равный $\alpha^2\epsilon^2$.

Поверхность уровня

$$V = \alpha^2\epsilon^2,$$

или

$$\alpha^2\xi_1^2 + \beta^2\xi_2^2 = \alpha^2\epsilon^2, \quad (10.17)$$

представляет собой эллипс с полуосями ϵ и $\epsilon \frac{\alpha}{\beta}$, расположенный внутри окружности $\xi_1^2 + \xi_2^2 = \epsilon^2$ и касающийся ее в точках A и B (рис. 100).

Чтобы изображающая точка в возмущенном движении оставалась внутри окружности (ϵ), нужно начальные значения ξ_{10}, ξ_{20} выбрать внутри окружности некоторого радиуса η , на которой $\alpha^2\epsilon^2$ — нижняя граница V на (ϵ) — была бы верхней границей (высшим пределом).

Согласно вышеизложенному верхняя граница V на окружности (η) равна $\beta^2\eta^2$; с другой стороны, она должна равняться $\alpha^2\epsilon^2$, т. е. нижней границе V на окружности (ϵ). Следовательно,

$$\beta^2\eta^2 = \alpha^2\epsilon^2,$$

откуда

$$\eta^2 = \frac{\alpha^2\epsilon^2}{\beta^2}.$$

Таким образом, чтобы изображающая точка не вышла за пределы окружности (ϵ) начальное ее положение нужно взять внутри заштрихованного круга

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = \frac{\alpha^2\epsilon^2}{\beta^2}.$$

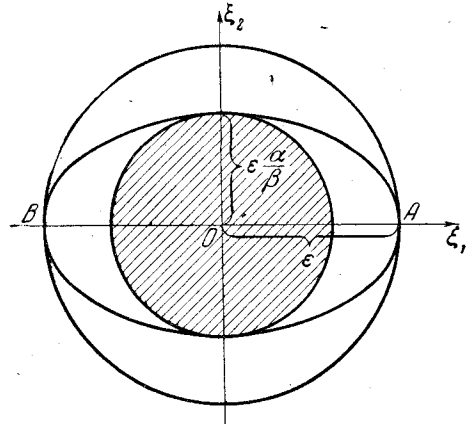


Рис. 100.

8. Определение устойчивости движения. Рассмотрим материальную систему с k степенями свободы, уравнения движения которой приведены к виду

$$\frac{d\xi_i}{dt} = F_i(t, \xi_1, \dots, \xi_n) \quad (i=1, 2, \dots, n; n=2k). \quad (10.18)$$

Относительно функций $F_i(t, \xi_1, \dots, \xi_n)$ мы будем предполагать, что в рассматриваемых далее областях значений переменных ξ_1, \dots, ξ_n и для всех $t \geq t_0$, где t_0 — некоторый фиксированный момент, принимаемый обычно за начальный (например, $t_0 = 0$), эти функции разлагаются в равномерно сходящиеся ряды по целым степеням переменных ξ_i , коэффициенты которых суть вещественные непрерыв-

ные функции t . Для краткости функции $F_i(t, \xi_1, \dots, \xi_n)$, обладающие такими свойствами, называются дальше *аналитическими* в заданной области.

Предположим, что нам известно частное решение уравнений (10.18)

$$\xi_i = \xi_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (10.19)$$

соответствующее начальным условиям

$$t=0, \quad \xi_i = \xi_{i0} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (10.20)$$

Это решение определяет некоторое движение системы. Сравнивая это движение с другими возможными для системы движениями *при тех же действующих на систему силах и, следовательно, определяемых теми же дифференциальными уравнениями, но при других начальных условиях*, мы будем называть движение, соответствующее известному частному решению (10.19), *невозмущенным движением*, а все остальные, с которыми оно сравнивается, — *возмущенными движениями*.

Возмущенные движения получаются, таким образом, из невозмущенного в результате изменения начальных условий, т. е. изменения координат и скоростей системы в некоторый момент времени t_0 , принимаемый затем за начало отсчета времени, а не в результате непрерывного воздействия на систему каких-либо возмущающих сил.

Дадим начальным значениям координат, соответствующим невозмущенному движению, т. е. числам ξ_{i0} , некоторые приращения x_{i0} . Другими словами, предположим, что в начальный момент переменные ξ_i имеют значения

$$\bar{\xi}_{i0} = \xi_{i0} + x_{i0} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (10.21)$$

Новым начальным условиям будет соответствовать некоторое возмущенное движение с уравнениями

$$\bar{\xi}_i = \bar{\xi}_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (10.22)$$

Невозмущенное движение (10.19) называется *устойчивым*, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\epsilon > 0$ мы найдем другое число $\eta(\epsilon) > 0$ так, что для всех $t \geq t_0$ будут иметь место неравенства

$$|\bar{\xi}_i(t) - \xi_i(t)| \leq \epsilon \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

когда скоро начальные значения координат будут выбраны в соответствии с условиями

$$|\bar{\xi}_{i0} - \xi_{i0}| \leq \eta \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Определение устойчивости движения можно привести к определению устойчивости некоторого относительного равновесного состояния рассматриваемой системы. Обозначим разности между одновременными значениями соответствующих координат возмущенного и невозмущенного движений через $x_i(t)$, положив

$$\bar{\xi}_i(t) - \xi_i(t) = x_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (10.23)$$

Эти разности называются *возмущениями координат*. В частности, числа

$$x_{i0} = \bar{\xi}_{i0} - \xi_{i0} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (10.24)$$

равные разностям начальных значений координат возмущенного и невозмущенного движений, представляют *начальные возмущения координат*.

Введем теперь вспомогательную систему координат, оси которой сохраняют неизменные направления в фазовом пространстве, а начало движется согласно уравнениям невозмущенного движения:

$$\dot{\xi}_i = \xi_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

В такой системе координат положение изображающей точки в возмущенном движении будет определяться относительными координатами $x_i(t)$. Невозмущенному движению будет соответствовать относительное равновесное состояние изображающей точки, определяемое нулевыми значениями относительных координат

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0. \quad (10.25)$$

Тем самым изложенное выше определение устойчивости невозмущенного движения

$$\xi_i = \xi_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

будет приведено к определению устойчивости равновесного состояния (10.25).

В дальнейшем мы, однако, это относительное равновесное состояние будем называть *невозмущенным движением* нашей системы. Мы приходим, таким образом, к следующему изложению определения устойчивости движения:

Невозмущенное движение, определяемое нулевыми значениями относительных координат

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0,$$

устойчиво по Ляпунову, если для сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ мы найдем другое положительное число $\eta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $t \geq t_0$, как бы велико t_0 ни было, относительные координаты будут удовлетворять неравенствам

$$|x_i(t)| \leq \varepsilon,$$

или, что то же, неравенству

$$\sum x_i^2 \leq \varepsilon^2,$$

когда скоро их начальные значения будут выбраны в соответствии с условиями

$$|x_{i0}| \leq \eta,$$

или

$$\sum x_{i0}^2 \leq \eta^2.$$

9. Уравнения возмущенного движения в относительных координатах. Так как функции

$$\bar{\xi}_i = \bar{\xi}_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

должны удовлетворять тем же уравнениям движения (10.18), что и функции

$$\xi_i = \xi_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

то

$$\frac{d\bar{\xi}_i}{dt} = F_i(t, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Подставив сюда

$$\bar{\xi}_i = \xi_i + x_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

получим

$$\frac{d(\xi_i + x_i)}{dt} = F_i(t, \xi_1 + x_1, \dots, \xi_n + x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (10.26)$$

Разложим теперь правые части последних уравнений по степеням относительных координат x_i . Принимая во внимание (10.18), будем иметь

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} x_\nu + \sum_j P_{ij} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (10.27)$$

где во второй сумме

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n > 1.$$

Если в правой части уравнений (10.27) отбросить вторые суммы (т. е. нелинейные члены), то получатся уравнения возмущенного движения в первом приближении, или так называемые «уравнения в вариациях»

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} x_\nu \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (10.28)$$

До тех пор, пока не будет надобности в выделении линейных членов в правых частях уравнений (10.26), мы будем их писать следующим образом:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (10.29)$$

помня при этом, что

$$X_i(t, 0, \dots, 0) \equiv 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (10.30)$$

для всех $t \geq 0$.

Пример 2. Составить уравнения возмущенного движения около положений равновесного состояния системы, движение которой задано уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - x - x^2, \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - y - x^2. \end{aligned} \right\}$$

Значения координат равновесных состояний мы получим из уравнений

$$\left. \begin{aligned} y - x - x^2 &= 0, \\ 3x - y - x^2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Таких состояний будет два:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0; \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 2.$$

Уравнения возмущенного движения для равновесного состояния $x_1 = y_1 = 0$ получим, сделав подстановку:

$$x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta.$$

Уравнения возмущенного движения будут те же уравнения, только с другими обозначениями координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \eta - \xi - \xi^2, \\ \frac{d\eta}{dt} &= 3\xi - \eta - \xi^2. \end{aligned} \right\}$$

Уравнения возмущенного движения около равновесного состояния $x_2 = 1; y_2 = 2$ получим после подстановки

$$x = 1 + \xi, \quad y = 2 + \eta.$$

Это будут уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = -3\xi + \eta - \xi^2, \quad \frac{d\eta}{dt} = \xi - \eta - \xi^2.$$

10. Функции Ляпунова второго рода. При исследовании устойчивости неустановившихся движений по второму методу Ляпунова функции, скорость изменения которых в силу уравнений возмущенного движения определяет при известных условиях общее направле-

ние изменений координат системы, как правило, явно зависят от времени. Такие функции мы будем называть в дальнейшем *функциями Ляпунова второго рода*. Они зависят, кроме t , от относительных координат x_1, x_2, \dots, x_n , обращаются в нуль для $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ и для них, так же как и для функций первого рода, должна существовать область

$$\sum x_i^2 \leq R^2,$$

в которой для всех $t \geq 0$ эти функции конечны, однозначны, непрерывны по всем переменным и знакоопределенны. Однако определение знакоопределенности функций, явно зависящих от времени, существенным образом отличается от определения знакоопределенности функций первого рода. По Ляпунову функция

$$V(t, x_1, \dots, x_n)$$

называется *знакоопределенной в области (R)*, если существует в той же области определенно положительная функция первого рода (явно от времени не зависящая)

$$W(x_1, \dots, x_n)$$

такая, что для всех $t \geq 0$ и

$$\sum x_i^2 \leq R^2$$

имеет место одно из неравенств

$$V \geq W \quad \text{или} \quad -V \geq W. \quad (10.31)$$

В первом случае функция $V(t, x_1, \dots, x_n)$ считается *определенно положительной*, во втором — *определенно отрицательной*.

Определенно положительной функцией Ляпунова второго рода будет, например, функция

$$V = t(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2 \cos t$$

при любом R для $t > 2$. В самом деле, перепишем эту функцию так:

$$V = (t-1)(x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos t).$$

После этого, приняв во внимание, что

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos t \geq 0,$$

найдем, что для $t > 2$

$$(t-1)(x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos t) \geq x_1^2 + x_2^2.$$

Роль функции первого рода $W(x_1, \dots, x_n)$ здесь играет определенно положительная форма

$$x_1^2 + x_2^2.$$

В качестве другого примера рассмотрим кинетическую энергию приведенного колечатого вала. В приближенных расчетах колечатого вала на крутильные колебания кинетическая энергия системы приводится к определено положительной квадратической функции от угловых скоростей с постоянными коэффициентами:

$$2T = J_1 \dot{\theta}_1^2 + J_2 \dot{\theta}_2^2 + \dots + J_k \dot{\theta}_k^2,$$

где J_i — моменты инерции приведенных масс. Эти моменты считаются постоянными. В действительности приведенные моменты инерции масс кривошипно-шатунных механизмов являются периодическими функциями времени с периодом, соответствующим одному обороту вала. В простейшем случае («бесконечно длинный» шатун) можно положить

$$J_l = J_{l0} + a_l^2 \sin^2 \omega t \quad (l = 1, 2, \dots, m),$$

где m — число цилиндров, $J_{l0} = \text{const}$, $a_l \neq 0$ для цилиндрических масс и $a_l = 0$ — для масс с постоянными моментами инерции, ω — угловая скорость вращения вала.

Учитывая эти изменения моментов инерции, мы получим для кинетической энергии выражение

$$2T = \sum_{i=1}^m [J_{i0} + a_i^2 \sin^2 \omega t] \dot{\theta}_i^2 + J_{m+1} \dot{\theta}_{m+1}^2 + \dots = V(t, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k).$$

Эта функция, явно зависящая от времени, является определено положительной функцией переменных θ_i , так как можно указать определено положительную, явно от времени не зависящую функцию, именно

$$W = \sum_{i=1}^k J_{i0} \theta_i^2,$$

такую, что для всех $t \geq 0$ и для любых θ_i будет иметь место неравенство

$$V(t, \theta_1, \dots, \theta_k) \geq W.$$

Определение знакоопределенности функций Ляпунова второго рода получает простую геометрическую интерпретацию для систем с одной степенью свободы, когда эти функции зависят, кроме времени t , только от двух переменных x_1 и x_2 . Эта интерпретация не только наглядно разъясняет конкретное содержание условий знакоопределенности функций Ляпунова второго рода, но и в весьма элементарной форме позволяет выяснить значение этих условий в суждениях об устойчивости неустановившихся движений.

Рассмотрим прежде всего поверхность

$$z = W(x_1, x_2), \quad (10.32)$$

где $W(x_1, x_2)$ — определено положительная в области

$$x_1^2 + x_2^2 \leq R^2 \quad (R)$$

функция координат x_1 и x_2 , уничтожающаяся для $x_1 = x_2 = 0$. Часть этой поверхности вблизи нулевой точки представлена на

рис. 101. Эта поверхность с течением времени не изменяется. Постоянным положительным значениям

$$z = c > 0$$

соответствуют плоскости, перпендикулярные к оси Oz и пересекающие поверхность (10.32) по кривым $W(x_1, x_2) = c$, проектирующимся

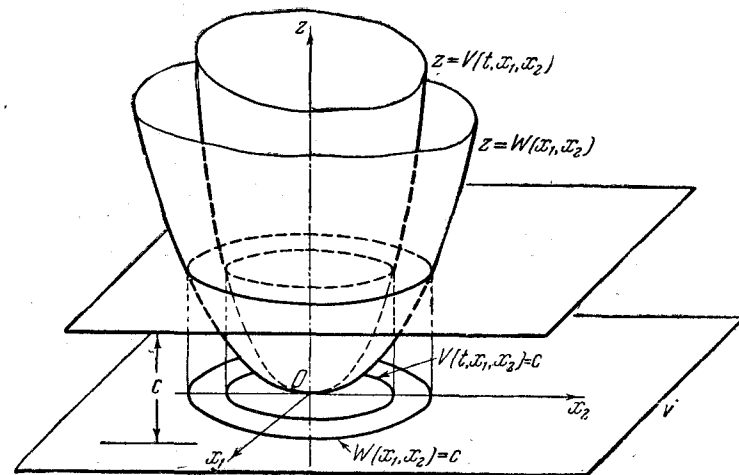


Рис. 101.

на фазовую плоскость Ox_1x_2 в натуральную величину. Свойства этих кривых в области определения функции W , например в области

$$\sum_{i=1}^2 \xi_i^2 \leq \varepsilon^2 < R^2, \quad (\varepsilon)$$

нам известны: это замкнутые кривые, окружающие нулевую точку со всех сторон и вложенные одна в другую. В частности, если P — нижняя граница $W(x_1, x_2)$ на окружности

$$x_1^2 + x_2^2 = \varepsilon^2 \quad (\varepsilon)$$

и

$$c \leq P, \quad (10.33)$$

то кривая

$$W(x_1, x_2) = c$$

помещается внутри окружности (ε) , может быть, касаясь ее в некоторых точках.

Рассмотрим теперь поверхность

$$z = V(t, x_1, x_2), \quad (10.34)$$

изменяющуюся с течением времени. Если для всех $t \geq 0$ в рассматриваемой нами области (ε) имеет место неравенство

$$V(t, x_1, x_2) \geq W(x_1, x_2),$$

то поверхность (10.34) располагается внутри поверхности (10.32), как показано на рис. 101, так что при всех изменениях кривой

$$V(t, x_1, x_2) = c, \quad (10.35)$$

полученной от пересечения поверхности (10.34) плоскостью

$$z = c,$$

эта кривая остается внутри кривой

$$W(x_1, x_2) = c. \quad (10.36)$$

Следовательно, если c выбрано в соответствии с условием (10.33), то кривая (10.35) при всех своих изменениях будет оставаться, так же как и кривая (10.36), внутри окружности (ε) . Можно сказать, что условие знакоопределенности функции $V(t, x_1, x_2)$ налагает ограничение на изменения координат x_1 и x_2 , соответствующие перемещениям изображающей точки наружу, т. е. по направлению от нулевой точки. В этом отношении функции Ляпунова второго рода ведут себя аналогично функциям первого рода. В частности, если каким-либо образом будет установлено, что в возмущенном движении координаты изображающей точки удовлетворяют условию

$$W(t, x_1, x_2) \leq P$$

для всех $t \geq 0$, то отсюда будет следовать, что расстояние изображающей точки в этом движении от начала координат не станет больше ε , т. е. будет иметь место неравенство

$$\sum x_i^2 \leq \varepsilon^2.$$

Определение функций Ляпунова второго рода, допускающих бесконечно малый высший предел, почти не отличается по форме от изложенного выше определения допускающих бесконечно малый высший предел функций первого рода.

Функция второго рода V допускает *бесконечно малый высший предел*, если для сколь угодно малого положительного числа $Q > 0$ найдется такой радиус η и такая сфера

$$\sum x_i^2 = \eta^2,$$

на которой Q будет верхней границей функции $V(t, x_1, x_2)$, так что для x_i , удовлетворяющих условию

$$\sum x_i^2 \leq \eta^2$$

при всех $t \geq 0$, будет иметь место неравенство

$$V(t, x_1, x_2) \leq Q.$$

Обладание бесконечно малым высшим пределом не является свойством функции второго рода, вытекающим, например, из их непрерывности, как это было у функции первого рода. Существуют функции второго рода, не обладающие бесконечно малым высшим пределом.

Но когда таковыми они обладают, то из этого свойства можно сделать выводы в отношении изменения координат x_1 и x_2 , аналогичные изложенным в теореме 3 (стр. 376). В частности, если каким-либо образом будет установлено, что для всех $t \geq 0$

$$V(t, x_1, \dots, x_n) \geq Q,$$

то для значений координат x_i будет иметь место неравенство

$$\sum x_i^2 \geq \eta^2$$

для всех $t \geq 0$.

Обладание функцией $V(t, x_1, \dots, x_n)$ бесконечно малым высшим пределом обеспечивает равномерное по t стягивание поверхностей

$$V(t, x_1, \dots, x_n) = c$$

к нулю, когда $\sum x_i^2 \rightarrow 0$, налагая тем самым некоторое ограничение на изменения координат, соответствующие перемещениям во внутрь области к нулевой точке.

В самом деле, обращаясь к рис. 105, мы легко обнаружим, что кривая

$$V(t, x_1, x_2) = c, \quad (10.37)$$

где $c \geq Q$, лежащая внутри кривой

$$W(x_1, x_2) = c,$$

охватывающей при том же c окружность (ε) , может пересекать эту окружность и даже целиком внутри ее располагаться. И только обладание этой функцией бесконечно малым высшим пределом повлечет за собой вместе с неравенством

$$V(t, x_1, x_2) = c \geq Q$$

также и условие

$$\sum x_i^2 \geq \eta^2,$$

в силу которого, как бы мало ни было $c \geq Q$, кривая

$$V(t, x_1, x_2) = c \geq Q$$

при всех своих изменениях с течением времени будет оставаться вне некоторой достаточно малой области, определяемой окружностью

$$\sum x_i^2 = \eta^2.$$

11. Теорема Ляпунова об устойчивости неустановившегося движения. Если уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

таковы, что можно найти такую знакоопределенную функцию $V(t, x_1, \dots, x_n)$, производная которой в силу уравнений возмущенного движения была бы знакопостоянной функцией противоположного знака с V или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

устойчиво по Ляпунову.

Предположим, что условия теоремы выполнены и найдена определенно положительная функция

$$V(t, x_1, \dots, x_n),$$

для которой в области

$$\sum x_i^2 \leq R^2 \quad (R)$$

для всех $t \geq 0$ имеют место неравенства

$$V \geq W, \quad \dot{V} \leq 0, \quad (10.38)$$

где $W(x_1, \dots, x_n)$ — не зависящая явно от t определенно положительная в области (R) функция координат x_i . Требуется доказать, что, как бы мало ни было наперед заданное положительное число ϵ , к нему можно подобрать другое число $\eta(\epsilon) > 0$ так, что при начальных условиях

$$t = 0, \quad \sum x_{i0}^2 \leq \eta^2$$

переменные x_i , начавшие свои изменения в возмущенном движении в момент $t = 0$ с начальных значений x_{10}, \dots, x_{n0} , в дальнейшем для всех $t > 0$ будут удовлетворять неравенству

$$\sum x_i^2 \leq \epsilon^2. \quad (10.39)$$

Для доказательства задаемся числом ϵ

$$0 < \epsilon \leq R$$

и строим сферу

$$\sum x_i^2 = \epsilon^2. \quad (\epsilon)$$

Пусть P — нижний предел функции W на этой сфере. Очевидно, $P > 0$. Из условия теоремы

$$\dot{V} \leq 0$$

следует, что в возмущенном движении для всех $t \geq 0$

$$V(t, x_1, \dots, x_n) \leq V_0,$$

где V_0 — начальное значение функции V .

Рассмотрим функцию

$$V_1 = V(0, x_1, \dots, x_n),$$

которая получается из V , если зафиксировать значение t , положив $t = 0$, и изменять x_i в области (10.39) произвольно.

Функция V_1 , как явно от времени не зависящая, допускает бесконечно малый высший предел и, следовательно, как бы мало ни было P , всегда можно найти такое число $\eta(P) > 0$, что для всех значений x_i , удовлетворяющих условию

$$\sum x_i^2 \leq \eta^2,$$

V_1 не будет превосходить P , т. е.

$$V_1(0, x_1, \dots, x_n) \leq P.$$

Согласно этому условию мы и выберем начальные значения координат x_{10}, \dots, x_{n0} , положив

$$\sum x_{i0}^2 \leq \eta^2.$$

Тогда для выбранных таким образом начальных значений x_{i0}

$$V_0 = V(0, x_{10}, \dots, x_{n0}) \leq P$$

и

$$W = V(t, x_1, \dots, x_n) \leq P$$

для всех $t \geq 0$. Следовательно, $\sum x_i^2 \leq \epsilon^2$ для всех $t \geq 0$.

Доказанная теорема содержит в себе как частный случай и теоремы об устойчивости равновесных состояний, рассмотренные в предыдущих параграфах. Следует отметить, что теорема Ляпунова, как, впрочем, все общие теоремы «второго метода», устанавливает достаточные условия устойчивости невозмущенного движения.

12. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Определение устойчивости невозмущенного движения по Ляпунову не предполагает обязательного возвращения системы в невозмущенное состояние, хотя и не исключает возможности такого возвращения. В этом отношении «устойчивость по Ляпунову» отличается от общепринятого представления об устойчивости, в котором существенным образом предполагается наличие в возмущенном движении восстанавливающих сил, возвращающих систему через более или менее продолжительный промежуток времени в невозмущенное состояние. А. М. Ляпунов поведение системы, в котором она в возмущенном движении безгранично приближается к невозмущенному движению, рассматривал как частный случай устойчивости и ввел для него наименование *асимптотической устойчивости*.

В случае асимптотической устойчивости изображающая система точка при надлежаще выбранных начальных значениях координат x_i и последующем движении будет вести себя так, что

$$\sum x_i \rightarrow 0.$$

Условия асимптотической устойчивости даны Ляпуновым в теореме об асимптотической устойчивости. Эта теорема формулируется следующим образом:

Если уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

таковы, что можно найти знакоопределенную функцию $V(t, x_1, \dots, x_n)$, допускающую бесконечно малый высший предел, производная которой по времени в силу уравнений возмущенного движения была бы знакоопределенной функцией противоположного знака с V , то всякое возмущенное движение, достаточно близкое в начальный момент к невозмущенному, будет асимптотически приближаться к последнему.

Доказательство. Если найдена определенно положительная функция V , удовлетворяющая условиям теоремы, то существует область значений переменных x_i

$$\sum x_i^2 \leq R^2, \quad (R)$$

в которой для всех $t \geq 0$ имеют место неравенства

$$V \geq W \quad \text{и} \quad -\dot{V} \geq W_1,$$

где W и W_1 — известные определенно положительные в области (R) функции координат x_i , явно от времени не зависящие. Вместе с тем выполнены, очевидно, условия первой теоремы Ляпунова и поэтому, как бы мало ни было наперед заданное положительное число $\epsilon > 0$, можно найти такое $\eta(\epsilon) > 0$, что в возмущенном движении изображающая система точка не выйдет за пределы сферы

$$\sum x_i^2 = \epsilon^2, \quad (\epsilon)$$

если начальные значения координат будут выбраны согласно условию

$$\sum x_{i0}^2 \leq \eta^2.$$

Теперь нужно доказать, что при выбранных согласно этому неравенству начальных значениях координат при указанных в теореме свойствах функций V и \dot{V} нельзя найти столь малого положительного числа $l > 0$, меньше которого не стала бы с течением времени функция V .

Предположим, однако, что такое число l существует. Так как V допускает бесконечно малый высший предел, то, как бы это число l мало ни было, к нему можно подобрать такое $\epsilon_1 > 0$, что для всех x_i , для которых

$$V \geq l,$$

будет иметь место неравенство

$$\sum x_i^2 \geq \epsilon_1^2. \quad (\epsilon_1)$$

Таким образом, при сделанном предположении координаты x_i изменились бы в возмущенном движении в области

$$\epsilon_1^2 \leq \sum x_i^2 \leq \epsilon^2.$$

Обозначим через P_1 нижнюю границу W_1 в этой области. Тогда в этой области

$$0 < P_1 \leq W_1 \leq -\dot{V}.$$

Интегрируя по t от 0 до некоторого t , получим

$$-\int_0^t \dot{V} dt \geq P_1 \int_0^t dt \geq 0$$

или

$$V - V_0 \leq -P_1 t, \quad V \leq V_0 - P_1 t.$$

Как бы мало ни было P_1 , наступит такой момент времени t , когда V станет отрицательным, а это в силу определенной положительности V невозможно.

Следовательно, как бы мало ни было число l , настанет момент, когда V делается меньше l . А так как V — постоянно убывающая функция t , то, сделавшись меньше l , она навсегда останется таковой, асимптотически стягиваясь в нулевую точку. Вместе с тем, конечно, и

$$\sum x_i^2 \rightarrow 0.$$

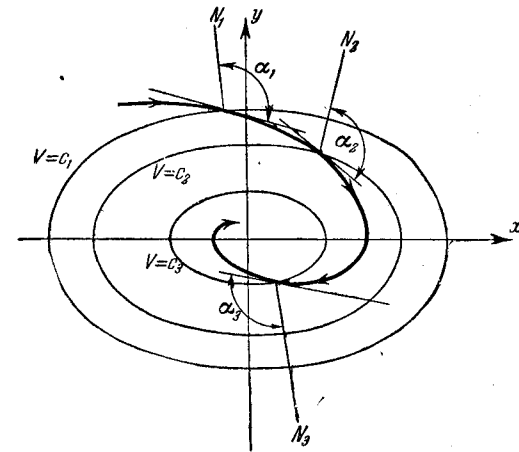


Рис. 102.

Для системы с одной степенью свободы, с двумя переменными x_1 и x_2 теорема об асимптотической устойчивости допускает простую геометрическую интерпретацию.

Пусть V зависит от двух переменных x и y :

$$V = V(x, y).$$

Кривые семейства

$$V = c$$

окружают начало, как показано на рис. 102. Уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = F_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = F_2(x, y)$$

определяют направления касательных к фазовым траекториям в соответствующих точках фазовой плоскости, или проекции скорости изображающей точки на оси координат. Составим производную V по времени

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (10.40)$$

Как видно из этой формулы, производная V пропорциональна косинусу угла α между направлением внешней нормали N к кривой $V=c$ и направлением касательной к фазовой траектории, которую в возмущенном движении описывает изображающая точка. Если этот косинус нигде не обращается в нуль, а это так и будет, если \dot{V} — знакоопределенная функция, то траектория изображающей точки нигде не будет касаться ни одной из кривых $V=c$.

Если при этом

$$\dot{V} < 0,$$

то косинус (10.40) будет отрицательным, т. е. траектория изображающей точки будет пересекать кривые $V=c$ под тупыми углами. Изображающая точка переходит с одной кривой на другую, заворачиваясь снаружи во внутрь каждой кривой $V=c$ и описывая вокруг начала координат направленную к нему кривую, имеющую форму спирали (рис. 102).

Пример 3. Исследовать устойчивость невозмущенного движения

$$x=y=0,$$

если уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2y \sin t - x^3 \sin^2 t, \\ \frac{dy}{dt} &= 4x \sin t - y^2 \cos^2 t. \end{aligned} \right\} \quad (10.41)$$

Хотя движение неустановившееся, однако здесь можно найти не зависящую явно от времени функцию, удовлетворяющую в силу уравнений (10.41) условиям теоремы Ляпунова. Такой функцией будет

$$V = 2x^2 + y^2.$$

Ее производная по времени в силу уравнения (10.41)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 4x(-2y \sin t - x^3 \sin^2 t) + 2y(4x \sin t - y^2 \cos^2 t) = \\ &= -4x^4 \sin^2 t - 2y^3 \cos^2 t \leq 0 \end{aligned}$$

есть постоянно-отрицательная функция, так как при $t=\pi$ она обращается в нуль при $y=0$ и любом x . Следовательно, невозмущенное движение $x=y=0$ устойчиво.

Пример 4. Уравнения возмущенного движения системы имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = -(x - \beta^2 y)(1 - ax^2 - by^2), \quad \frac{dy}{dt} = -(y + \alpha^2 x)(1 - ax^2 - by^2),$$

где $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$. Доказать, что невозмущенное движение $x=y=0$ устойчиво асимптотически.

Функцией, удовлетворяющей условиям теоремы Ляпунова, здесь будет

$$V = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2.$$

Это определено положительная функция, явно от времени не зависящая. Ее производная по времени в силу уравнений возмущенного движения равна

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2\alpha^2 x [-(x - \beta^2 y)(1 - ax^2 - by^2)] + \\ &+ 2\beta^2 y [-(y + \alpha^2 x)(1 - ax^2 - by^2)] = -2(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2)(1 - ax^2 - by^2). \end{aligned}$$

Она будет определено отрицательной в области

$$x^2 + y^2 \leq \frac{1}{b} \quad (a),$$

так как в этом случае $ax^2 + by^2 \leq 1$. Таким образом, существует область (a), в какой выполняются условия теоремы, причем в этой области

$$V > 0, \quad \dot{V} < 0.$$

Следовательно, невозмущенное движение

$$x=y=0$$

устойчиво асимптотически.

Пример 5. Уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = y - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y^3.$$

Доказать, что движение $x=y=0$ устойчиво асимптотически.

Функция

$$V = x^2 + y^2$$

и ее производная

$$\dot{V} = -2(x^4 + y^4)$$

— знакоопределенные функции противоположных знаков, причем V , как не зависящая явно от времени, допускает бесконечно малый высший предел.

Следовательно, невозмущенное движение

$$x=y=0$$

устойчиво асимптотически: выведенная из этого состояния система, представленная затем самой себе, будет неограниченно к нему приближаться.

13. Об устойчивости стационарного движения системы с циклическими координатами (теорема Рауса)¹⁾. Циклическими координатами называются координаты, не входящие явно в функцию Лагранжа L . Стационарным движением системы с циклическими

¹⁾ Routh E. J., On Stability of a given State of Motion, London, 1877. Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике, Физматгиз, 1966, гл. VII.

координатами называется движение, в котором нециклические координаты и циклические скорости сохраняют постоянные значения. Для такого движения Раус построил энергетический критерий устойчивости, аналогичный критерию Лагранжа — Дирихле для равновесного состояния консервативной системы. Этот критерий можно получить как простое следствие из теорем об устойчивости Ляпунова.

Система с n степенями свободы и с $n - s$ циклическими координатами имеет $n - s$ циклических интегралов

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \beta_\alpha \quad (\alpha = s + 1, \dots, n), \quad (10.42)$$

где L — функция Лагранжа ($L = T - \Pi$).

С помощью этих интегралов можно исключить $n - s$ циклических скоростей, выразив их через нециклические координаты и скорости. Как известно, уравнения движения с исключенными циклическими скоростями могут быть приведены к форме уравнений Лагранжа ¹⁾

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (10.43)$$

где вместо функции Лагранжа L стоит функция Рауса

$$R = L - \sum_{\alpha=s+1}^n \dot{q}_\alpha \beta_\alpha \quad (10.44)$$

куда подставлены найденные из уравнений (10.42) циклические скорости, выраженные через нециклические координаты, нециклические скорости и постоянные β_α . Дальше система уравнений (10.43) с исключенными циклическими скоростями называется системой (R) , а первоначальная — системой (L) .

Предположим, что при некоторых значениях постоянных β_α уравнения (10.43) допускают частное решение

$$q_1 = q_2 = \dots = q_s = 0. \quad (10.45)$$

Этому решению будет соответствовать стационарное движение первоначальной системы (L) , в котором будут изменяться только одни циклические координаты q_α .

Для системы (R) это же частное решение, в котором $q_1 = q_2 = \dots = q_s = \text{const} = 0$, а следовательно и $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dots = \dot{q}_s = 0$, определяет ее равновесное состояние. Таким образом, равновесному состоянию (10.45) системы (R) будет соответствовать стационарное движение системы (L) . Дадим теперь системе (R) некоторое начальное возмущение, не изменяя постоянных β_α , и предоставим ее самой себе. Она будет двигаться согласно уравнениям (10.43), которые будут уравнениями ее возмущенного движения. Если эти уравнения

¹⁾ См. стр. 21.

такими, что можно найти знакоопределенную функцию V координат q_1, q_2, \dots, q_s , производная которой по t будет знакопостоянной функцией противоположного знака с V или тождественно равной нулю, то равновесное состояние (10.45) устойчиво, а следовательно, будет устойчиво и соответствующее ему стационарное движение системы (L) .

В частном случае, когда R не зависит явно от времени, система (10.43) имеет интеграл, выражающий закон сохранения энергии. Чтобы его получить, умножим каждое из уравнений (10.43) на соответствующее \dot{q}_j и просуммируем по j . Тогда получим

$$\sum_j \left[\dot{q}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{q}_j \frac{\partial R}{\partial q_j} \right] = 0$$

или

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - R \right] = 0,$$

откуда

$$\sum_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - R = H_R = \text{const.}$$

Этот интеграл можно также получить из интеграла энергии системы (L) , если исключить из него циклические скорости с помощью уравнений (10.42). В возмущенном движении полная энергия H_R будет оставаться постоянной, причем величина этой постоянной будет определяться начальным возмущением. Обозначим полную энергию в равновесном состоянии (10.45) через H_R^0 . Составим функцию

$$V = H_R - H_R^0. \quad (10.46)$$

В силу уравнений возмущенного движения (10.43)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dH_R}{dt} \equiv 0.$$

Равновесное состояние (10.45) будет устойчиво, если функция (10.46) будет знакоопределенной функцией координат $q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$. Равновесному состоянию (10.45) системы (R) соответствует стационарное движение системы (L) . Мы приходим таким образом к теореме Рауса об устойчивости стационарного движения системы с циклическими координатами. Эта теорема в изложении самого Рауса гласит:

Данное стационарное движение устойчиво относительно нециклических координат и скоростей, если полная энергия системы после исключения циклических скоростей для значений нециклических координат и скоростей, соответствующих ста-

циональному движению, является экстремумом при возмущениях, оставляющих неизменными постоянные циклических интегралов β_α .

Пример 6. Материальная точка массы m описывает окружность радиуса r_0 под действием центральной притягивающей силы F , пропорциональной n -й степени расстояния r : $F = -ar^n$. Требуется найти условия, при которых траектория возмущенного движения будет близка к исходной окружности.

Устойчивость движения, выражающаяся в том, что при достаточно малом начальном возмущении точка движется по траектории, сколь угодно близкой к невозмущенной, называется *орбитальной устойчивостью*. В рассматриваемой задаче требуется, таким образом, найти условия орбитальной устойчивости невозмущенного движения. Для нахождения этих условий мы воспользуемся теоремой Рауса об устойчивости стационарного движения системы с циклическими координатами.

Полная энергия точки m в полярных координатах

$$E = \frac{1}{2} [m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2] + \frac{ar^{n+1}}{n+1}. \quad (10.47)$$

Циклической координатой является здесь θ . Соответствующий ей интеграл

$$mr^2\dot{\theta} = \beta.$$

С помощью этого интеграла исключаем из E циклическую скорость $\dot{\theta}$, после чего

$$E = \frac{1}{2} \left[m\dot{r}^2 + \frac{\beta^2}{mr^2} \right] + \frac{ar^{n+1}}{n+1}. \quad (10.48)$$

Экстремуму E будет соответствовать устойчивое движение точки по орбите радиуса r_0 . Из условий экстремума E находим

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{1}{2} \left[\frac{2\beta^2}{mr^3} - 2ar^n \right] = 0, \quad (10.49)$$

откуда

$$\dot{r} = 0, \quad r = \text{const} = r_0, \quad ar_0^n - \frac{\beta^2}{mr_0^3} = 0. \quad (10.50)$$

Эти условия являются только необходимыми. Из них еще не следует, что найденным r_0 и \dot{r} соответствует действительный экстремум E . Необходимо дальнейшее исследование этих решений. Для этого найденные из последних уравнений r_0 и \dot{r} нужно подставить в выражения вторых производных

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \dot{r}^2}, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{r} \partial r}, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial r^2}$$

и затем составить определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{r}^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{r} \partial r} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{r} \partial r} & \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} \end{vmatrix} = \Delta. \quad (10.51)$$

Если окажется, что $\Delta > 0$, то E имеет при $\frac{\partial^2 E}{\partial \dot{r}^2} < 0$ максимум, а при $\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} > 0$ — минимум. Если $\Delta < 0$, то E не имеет ни максимума, ни минимума.

В рассматриваемом случае

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \dot{r}^2} = m, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{r} \partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} = a(n+3)r_0^n - 1. \quad (10.52)$$

Следовательно,

$$\Delta = am(n+3)r_0^n - 1, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} = m > 0. \quad (10.53)$$

Движение по кругу будет орбитально устойчиво, если

$$\Delta > 0,$$

т. е. если

$$n+3 > 0 \text{ или } n > -3.$$

14. Теорема Ляпунова о неустойчивости движения. Если уравнения возмущенного движения таковы, что можно найти ограниченную функцию $V(t, x_1, \dots, x_n)$, которая обладала бы в силу этих уравнений знакоопределенной производной $\dot{V}(t, x_1, \dots, x_n)$, допускала бы бесконечно малый высший предел и была бы, кроме того, такова, что для t , большего некоторого предела t_0 , надлежащим выбором значений переменных x_i , численно сколь угодно малых, ее можно было бы сделать одинакового знака с \dot{V} , то невозмущенное движение

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

неустойчиво.

Предположим, что найдена функция $V(t, x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющая условиям теоремы, и ее производная \dot{V} — определено положительно. Следовательно, существует область

$$\sum x_i^2 \leq R^2, \quad (R)$$

в которой для всех $t \geq 0$

$$\dot{V} \geq W_1, \quad |V| < L, \quad (10.54)$$

где W_1 — определено положительная, явно от времени не зависящая функция координат x_i , L — некоторая положительная константа.

Задавшись сколь угодно малым положительным числом $\varepsilon < R$, рассмотрим возмущенное движение системы, для которого в некоторый момент $t = t_0 > 0$, принимаемый дальше за начальный, соответствующие значения координат («начальные значения») x_{i0} удовлетворяют неравенствам

$$\sum x_{i0}^2 \leq \varepsilon^2, \quad V(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0}) > 0. \quad (10.55)$$

По условиям теоремы такой выбор начальных значений x_{i0} возможен для достаточно малого ε .

Требуется доказать, что в рассматриваемом возмущенном движении изображающая точка выйдет за пределы области

$$\sum x_i^2 \leq R^2.$$

Допустим, однако, что изображающая систему точка не покинет области (R) . Тогда в силу первого неравенства (10.54), поскольку в этой области производная \dot{V} остается все время положительной,

$$V(t, x_1, \dots, x_n) > V(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0}) = V_0 > 0.$$

Так как V допускает бесконечно малый высший предел, то, как бы мало ни было $V_0 > 0$, найдется такое $\varepsilon_1 > 0$, что по крайней мере наибольшая из координат x_i не делается во время возмущенного движения меньше (по абсолютной величине) числа ε_1 . Таким образом, при сделанном нами допущении изображающая систему точка будет двигаться в области

$$\varepsilon_1^2 \leq \sum x_i^2 \leq R^2. \quad (10.56)$$

Обозначим через P_1 нижнюю границу W_1 в области (10.56). Тогда

$$0 < P_1 \leq W_1 \leq \dot{V}.$$

Интегрируя по t в пределах от t_0 до произвольного t , из последних неравенств получим

$$P_1(t - t_0) \leq V - V_0,$$

или

$$V \geq V_0 + P_1(t - t_0), \quad (10.57)$$

что невозможно, так как V — функция ограниченная, а правая часть (10.57) вместе с t растет неограниченно. Нельзя поэтому допустить, что точка не покинет области (R) , и, следовательно, движение $x_1 = \dots = x_n = 0$ неустойчиво.

Пример 7. Исследовать устойчивость движения

$$x = y = 0,$$

если уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = 3y + 4x^3 + x^5, \quad \frac{dy}{dt} = -5x + 3y^5.$$

Рассмотрим функцию

$$V = 5x^2 + 3y^2.$$

Ее производная по t в силу уравнений возмущенного движения

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 10x \frac{dx}{dt} + 6y \frac{dy}{dt} = 10x(3y + 4x^3 + x^5) + 6y(-5x + 3y^5) = \\ &= 40x^4 + 10x^6 + 18y^6 > 0. \end{aligned}$$

При любых x и y функции V и \dot{V} обе определено положительны, т. е. имеют одинаковые знаки. Следовательно, движение

$$x = y = 0$$

неустойчиво.

ГЛАВА XI

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

1. Предварительные замечания. Теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости движения, изложенные в гл. X, составляют содержание так называемой качественной теории устойчивости. С помощью этих теорем можно судить об устойчивости движения на основании уравнений возмущенного движения, не интегрируя последних. Однако построение нужных для таких суждений функций А. М. Ляпунова в большинстве случаев затруднительно. Общих правил построения таких функций до настоящего времени не существует¹⁾.

В связи с этим в практических инженерных расчетах, в частности, в теории автоматического регулирования, большое распространение получили приближенные методы, одним из основоположников которых является профессор Петербургского Технологического института И. А. Вышнеградский (1831 — 1895). В 1876 г. И. А. Вышнеградский впервые применил свой приближенный метод к задаче об устойчивости регуляторов прямого действия. Основной предпосылкой метода Вышнеградского было допущение, что свойства системы в отношении устойчивости установившегося ее движения обнаруживаются уже в тех малых возмущенных движениях, какие возникают около невозмущенного движения в течение небольшого промежутка времени след за моментом сообщения системе достаточно малого начального возмущения. На этом основании при решении вопросов об устойчивости движения в уравнениях возмущенного движения отбрасывались все члены выше первого порядка (относительно координат и скоростей) и по форме интегралов линеаризованных уравнений делались заключения об устойчивости невозмущенного движения. Совокупность методов исследования устойчивости на основании линеари-

¹⁾ Некоторые указания по этому поводу см. в книгах: Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, Изд. АН СССР, 1962; Дубошин Г. Н., Основы теории устойчивости движения, МГУ, 1952; Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.

или

$$\frac{d}{dt}(e^{-\lambda_i t} \xi_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Отсюда

$$e^{-\lambda_i t} \xi_i = \text{const} = C_i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

и, следовательно,

$$\xi_i = C_i e^{\lambda_i t} \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (11.7)$$

Приведение уравнения (11.1) к каноническому виду, когда корни характеристического уравнения кратны, весьма сложно. Мы ограничимся поэтому изложением окончательных результатов, отсылая за подробностями к специальным курсам, в частности к книге Н. Г. Четаева¹⁾.

3. Случай кратных корней характеристического уравнения.

Предположим, что определитель $D(\lambda)$ имеет кратный корень λ_0 , кратности l . Наибольшая степень двучлена $(\lambda - \lambda_0)$, на которую делится $D(\lambda)$, равна l . Пусть наибольшая степень двучлена $(\lambda - \lambda_0)^{l_1}$, на которую делятся все миноры $D(\lambda)$ $(k-1)$ -го порядка, будет $(\lambda - \lambda_0)^{l_1}$; наибольшая степень $(\lambda - \lambda_0)$, на которую делятся все миноры $(k-2)$ -го порядка, будет $(\lambda - \lambda_0)^{l_2}$ и т. д.; наибольшей степенью $(\lambda - \lambda_0)$, на которую делятся все миноры $(k-\mu+1)$ -го порядка, является $(\lambda - \lambda_0)^{l_{\mu-1}}$, и пусть по крайней мере один из миноров $(k-\mu)$ -го порядка не делится на $(\lambda - \lambda_0)$, т. е. не обращается в нуль при $\lambda = \lambda_0$. Очевидно,

$$l > l_1 > l_2 > \dots > l_{\mu-1} > 0.$$

Положим

$$l - l_1 = e_1, \quad l_1 - l_2 = e_2, \quad \dots, \quad l_{\mu-2} - l_{\mu-1} = e_{\mu-1}, \quad l_{\mu-1} = e_\mu.$$

Числа e_i не возрастают:

$$e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_{\mu-1} \geq e_\mu.$$

Тогда

$$(\lambda - \lambda_0)^l = (\lambda - \lambda_0)^{e_1} (\lambda - \lambda_0)^{e_2} \dots (\lambda - \lambda_0)^{e_\mu}.$$

Множители

$$(\lambda - \lambda_0)^{e_1}, (\lambda - \lambda_0)^{e_2}, \dots, (\lambda - \lambda_0)^{e_\mu}$$

называются *элементарными делителями* $D(\lambda)$, соответствующими корню λ_0 . Каждому корню $D(\lambda)$ соответствует по крайней мере один элементарный делитель: простому — один простой, кратному — несколько простых или кратных элементарных делителей.

¹⁾ Четаев Н. Г., Устойчивость движения.

Предположим, что $D(\lambda)$ имеет только простые элементарные делители. В этом случае корни уравнения

$$D(\lambda) = 0$$

являются или простыми (неравными), или же среди корней имеются кратные, но этим кратным корням соответствуют несколько простых элементарных делителей. И в том и в другом случае каноническая форма уравнений возмущенного движения одинакова — это форма, установленная для простых корней:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \lambda_1 \xi_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \lambda_k \xi_k,$$

где теперь некоторые λ_i могут повторяться.

Предположим, что $D(\lambda)$ имеет кратные корни с кратными элементарными делителями:

$$(\lambda - \lambda_1)^{\mu_1}, (\lambda - \lambda_2)^{\mu_2}, \dots, (\lambda - \lambda_m)^{\mu_m} \quad (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m = k),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ не обязательно различны.

Каждому кратному элементарному делителю, например

$$(\lambda - \lambda_i)^{\mu_i},$$

будет соответствовать группа канонических уравнений числом μ_i такого вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_{i1}}{dt} &= \lambda_i \xi_{i1}, \\ \frac{d\xi_{i2}}{dt} &= \xi_{i1} + \lambda_i \xi_{i2}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d\xi_{i\mu_i}}{dt} &= \xi_{i\mu_i-1} + \lambda_i \xi_{i\mu_i}. \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

Чтобы найти интегралы группы уравнений (11.8), умножим все уравнения на одно и то же $e^{-\lambda_i t}$. Тогда всю группу (11.8) можно привести к виду:

$$\frac{d}{dt}(e^{-\lambda_i t} \xi_{i1}) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-\lambda_i t} \xi_{i2}) = e^{-\lambda_i t} \xi_{i1},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-\lambda_i t} \xi_{i\mu_i}) = e^{-\lambda_i t} \xi_{i\mu_i-1}$$

или, опуская индекс i ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t} \xi_1) &= 0, \\ \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t} \xi_2) &= e^{-\lambda t} \xi_1, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t} \xi_\mu) &= e^{-\lambda t} \xi_{\mu-1}. \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \xi_1 &= c_1, \\ e^{-\lambda t} \xi_2 &= c_1 t + c_2, \\ e^{-\lambda t} \xi_3 &= \frac{c_1 t^2}{2} + c_2 t + c_3, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= c_1 e^{\lambda t}, \\ \xi_2 &= (c_1 t + c_2) e^{\lambda t}, \\ &\dots \dots \dots \\ \xi_\mu &= \left[\frac{1}{(\mu-1)!} c_1 t^{\mu-1} + \dots + c_{\mu-1} t + c_\mu \right] e^{\lambda t}. \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

Из рассмотрения формы интегралов (11.7) и (11.9) можно сделать следующие заключения об условиях устойчивости линеаризованной системы (11.1):

1. Если все корни характеристического уравнения

$$\lambda_s = \alpha_s + i\beta_s \quad (i = \sqrt{-1})$$

имеют отрицательную вещественную часть, то невозмущенное движение линеаризованной системы устойчиво асимптотически, независимо от того, будут ли эти корни простые или кратные (с простыми или кратными элементарными делителями). В этом случае

$$e^{\lambda t} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t).$$

2. Если хотя бы один из корней λ_s имеет положительную вещественную часть, то движение линеаризованной системы неустойчиво.

3. Если некоторые корни имеют равную нулю вещественную часть (при не равной нулю и отрицательной вещественной части других корней), то движение будет устойчиво, когда корням с нулевой вещественной частью будут соответствовать простые элементарные делители $D(\lambda)$, и неустойчиво, когда этим корням будут соответствовать кратные элементарные делители $D(\lambda)$.

Пример 1¹⁾. Уравнения возмущенного движения системы с одной степенью свободы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2xy - x + y, \\ \frac{dy}{dt} &= 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{aligned} \right\}$$

Будет ли устойчивым невозмущенное движение $x = y = 0$?
Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0.$$

Его корни $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$ оба вещественны и отрицательны. Следовательно, невозмущенное движение $x = y = 0$ устойчиво асимптотически.

Пример 2. Тот же вопрос об устойчивости невозмущенного движения $x = y = 0$, если уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = \ln(4y + e^{-3x}), \quad \frac{dy}{dt} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}.$$

Разложив правые части в ряды по степеням x и y и ограничившись линейными частями этих разложений, получим систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} &= 2y - 2x. \end{aligned} \right\}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & 4 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Невозмущенное движение $x = y = 0$ устойчиво асимптотически.

Пример 3. Уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = -2x + x^2 + y^2, \quad \frac{dy}{dt} = -x + 3y + 3x^2.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 0 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = +3$. Невозмущенное движение $x = y = 0$ неустойчиво.

¹⁾ В примерах 1, 2, 3 имеется в виду устойчивость линеаризованных систем, получаемых из заданных путем отбрасывания нелинейных членов.

4. Система с одной степенью свободы. Уравнения возмущенного движения системы с одной степенью свободы могут быть приведены к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by, \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy. \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

Мы будем предполагать, что

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Исследование различных случаев, какие могут встретиться при интегрировании линейных систем, в случае системы с одной степенью свободы допускает замечательную геометрическую интерпретацию, наглядно демонстрирующую поведение системы в возмущенном движении вблизи исследуемого невозмущенного состояния.

Уравнения (11.10), как об этом говорилось раньше, можно истолковать, как уравнения, определяющие проекции скорости изображающей систему точки, движущейся в фазовой плоскости Oxy . Невозмущенному движению $x=y=0$ на этой плоскости соответствует равновесное состояние изображающей точки в начале координат, так как, когда $x=y=0$, то $\dot{x}=\dot{y}=0$.

Исключая из уравнений (11.10) время, мы получим дифференциальное уравнение фазовой траектории

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}. \quad (11.11)$$

Начало координат, изображающее равновесное состояние, есть особая точка фазовой траектории, так как здесь $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Это единственная особая точка уравнения (11.11) на плоскости Oxy .

Следуя общей теории, будем искать линейную подстановку

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \gamma_{11}x + \gamma_{12}y, \\ \eta &= \gamma_{21}x + \gamma_{22}y \end{aligned} \right\} \quad (11.12)$$

для приведения системы (11.10) к каноническому виду. Чтобы не все γ_{ij} одновременно обращались в нуль, необходимо, чтобы был равен нулю определитель

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (11.13)$$

Это — характеристическое уравнение для системы (11.10). Корни этого уравнения определяют форму интегралов уравнений (11.10) и

вместе с тем дают возможность судить об устойчивости невозмущенного движения нашей системы.

Если уравнение (11.13) имеет простые корни или один кратный, но с простыми элементарными делителями, то уравнения (11.10) могут быть приведены к каноническим уравнениям вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_1 \xi, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \lambda_2 \eta. \end{aligned} \right\} \quad (11.14)$$

Если корень (11.13) λ — двойной и ему соответствует двойной элементарный делитель, то каноническая система будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda \xi, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi + \lambda \eta. \end{aligned} \right\} \quad (11.15)$$

Координаты ξ, η , связанные с прямоугольными координатами x, y линейными соотношениями (11.12), будут, вообще говоря, косоугольными. Поэтому определяемые каноническими уравнениями (11.14) и (11.15) фазовые траектории построены дальше в косоугольной системе координат.

Возможны четыре случая, каждому из которых будет соответствовать особый тип расположения фазовых траекторий около особой точки — начала координат, — изображающей невозмущенное равновесное состояние системы. Этими типами расположения фазовых траекторий около начала и будет геометрически определяться характер устойчивости невозмущенного состояния линейной системы с одной степенью свободы.

1-й случай. Корни уравнения (11.13) λ_1, λ_2 вещественны и разных знаков. В этом случае каноническая система и ее решения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_1 \xi, & \frac{d\eta}{dt} &= \lambda_2 \eta, \\ \xi &= \alpha e^{\lambda_1 t}, & \eta &= \beta e^{\lambda_2 t}. \end{aligned} \right\} \quad (11.16)$$

Уравнение фазовых траекторий получим, исключив t из первых двух уравнений:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_2 \eta}{\lambda_1 \xi}; \quad \ln |\eta| = a \ln |\xi| + \ln C, \quad \eta = \pm C \xi^a,$$

где $a = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, C — постоянная.

Фазовые траектории будут кривыми, похожими у точки O на гиперболы (рис. 103), в которые они и обращаются, когда $a = -1$.

Попав на одну из этих траекторий, изображающая точка будет в конце концов удаляться от начала, которое представит, таким образом, *неустойчивое* равновесное состояние. Особая точка такого типа называется *седлом*.

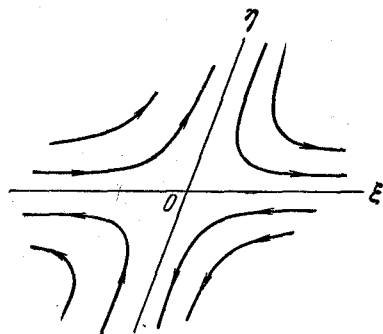


Рис. 103.

2-й случай («узел»). Корни уравнения (11.13) λ_1, λ_2 вещественны и одного знака. Предположим, что корни λ_1, λ_2 отрицательны: $\lambda_1 = -\mu_1^2, \lambda_2 = -\mu_2^2$, причем $\mu_1^2 < \mu_2^2$. Канонические уравнения имеют ту же форму, что и в первом случае:

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \eta.$$

Их решения можно записать так:

$$\xi = \alpha e^{-\mu_1^2 t}, \quad \eta = \beta e^{-\mu_2^2 t}.$$

Исключив из этих уравнений t , получим уравнения фазовых траекторий

$$\frac{d\eta}{d\xi} = a \frac{\eta}{\xi}, \quad \eta = \pm C \xi^a,$$

где $a = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$, C — постоянная. Фазовые траектории имеют форму полупарабол и располагаются около начала, как показано на

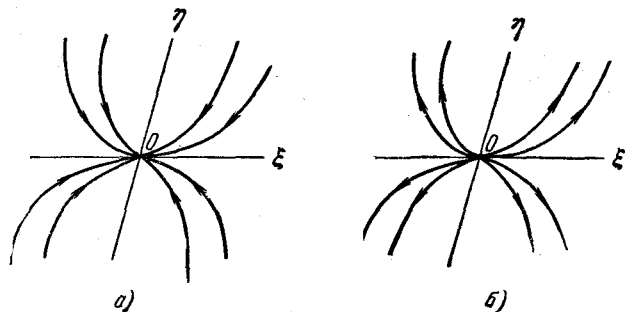


Рис. 104.

рис. 104, *a* и *б*. При этом, если $t \rightarrow \infty$, то

$$\frac{d\eta}{d\xi} \rightarrow 0,$$

т. е. все кривые касаются оси $O\xi$. Когда $\mu_2^2 < \mu_1^2$, то по отношению к фазовым траекториям оси координат меняются ролями и фазовые

траектории касаются оси η , располагаясь около начала, как показано на рис. 105. Особая точка с таким расположением фазовых траекторий носит название *узла*. При этом, если $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, то изображающая точка будет двигаться к узлу, как показано стрелками на рисунках, и изображаемое началом координат равновесное состояние будет *асимптотически устойчивым*. Если $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, то имеет место неустойчивость.

Каноническая форма уравнения (11.14) сохраняется в одном случае равных корней, когда

$$a = d, \quad b = c = 0.$$

Это случай простых элементарных делителей определителя

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - a \end{vmatrix} = 0,$$

соответствующих двойному корню $\lambda_1 = \lambda_2 = a$. В самом деле, наивысшая степень $(\lambda - a)$, на которую делится $D(\lambda)$, равна 2, наивысшая степень $(\lambda - a)$, на которую делятся все миноры 1-го порядка, равна 1. Следовательно, $e_1 = e_2 = 1$.

В последнем случае прямо из уравнений (11.10), которые будут иметь вид

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad \frac{dy}{dt} = ay,$$

получим

$$\ln y = \ln x + \ln a,$$

или

$$y = ax.$$

Фазовые траектории — прямые, заканчивающиеся (рис. 106, *a*) или начинающиеся (рис. 106, *б*) в начале координат. Особая точка — устойчивый или неустойчивый узел.

Может, наконец, встретиться случай равных корней $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ с кратным (двойным) элементарным делителем. В этом случае канонические уравнения и их интегралы будут иметь вид

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda \xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = \lambda \eta + \xi, \\ \xi = \alpha e^{\lambda t}, \quad \eta = (\alpha t + \beta) e^{\lambda t}.$$

Если $\lambda < 0$ — равновесное состояние в начале координат устойчиво, если $\lambda > 0$, то неустойчиво. Уравнения фазовых траекторий будут

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi} + \frac{1}{\lambda}, \quad \eta = C\xi + \frac{\xi}{\lambda} \ln |\xi|.$$

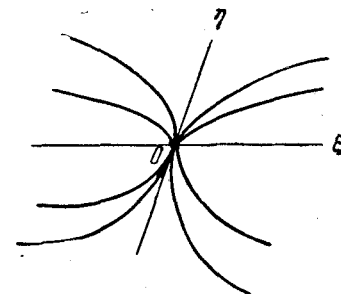


Рис. 105.

Из первого уравнения следует, что при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{d\eta}{d\xi} \rightarrow \infty$$

и, следовательно, все фазовые траектории в точке O касаются оси $O\eta$. Каждая фазовая траектория, асимптотически заканчиваясь или

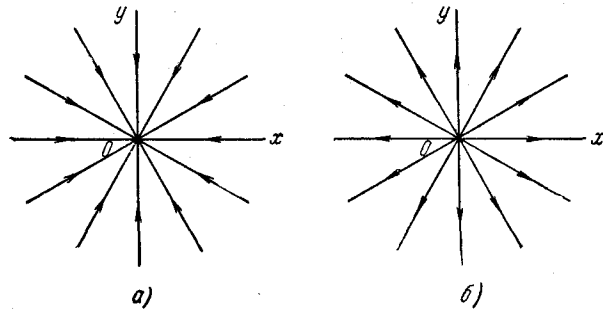


Рис. 106.

начинаясь в точке O , пересекает ось в точке с координатами

$$\eta = 0, \quad \xi = \pm e^{-c\lambda}$$

и имеет экстремум в точках, для которых

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 0,$$

т. е. в точках с координатами $\xi = \pm e^{-(c\lambda+1)}$; $\eta = \mp \frac{1}{\lambda} e^{-(c\lambda+1)}$. Расположение фазовых траекторий около начала O для устойчивого и неустойчивого узлов показано на рис. 107, а и б.

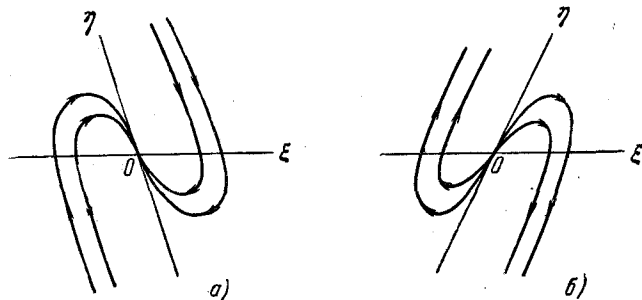


Рис. 107.

3-й случай. Корни характеристического уравнения — комплексные с не равной нулю вещественной

частью. Каноническая система будет в этом случае иметь вид¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda\xi, \\ \frac{d\bar{\xi}}{dt} &= \bar{\lambda}\bar{\xi} \end{aligned} \right\}$$

(так как $\bar{\lambda}\bar{\xi} = \overline{\lambda\xi}$). Положим

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha + i\beta, & \bar{\lambda} &= \alpha - i\beta, \\ \xi &= u + iv, & \bar{\xi} &= u - iv. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в каноническую систему, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + i \frac{dv}{dt} &= (\alpha + i\beta)(u + iv), \\ \frac{du}{dt} - i \frac{dv}{dt} &= (\alpha - i\beta)(u - iv). \end{aligned}$$

Из этих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \alpha u - \beta v, \\ \frac{dv}{dt} &= \alpha v + \beta u. \end{aligned} \right\}$$

Введем полярные координаты на плоскости (u, v) , положив

$$u = r \cos \theta, \quad v = r \sin \theta.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} &= \alpha r \cos \theta - \beta r \sin \theta, \\ \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} &= \alpha r \sin \theta + \beta r \cos \theta, \end{aligned}$$

и

$$\frac{dr}{dt} = \alpha r, \quad \frac{d\theta}{dt} = \beta.$$

Из уравнения фазовых траекторий

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\alpha}{\beta} r$$

после интегрирования имеем:

$$\ln r = \frac{\alpha}{\beta} \theta + \ln C,$$

или

$$r = Ce^{\frac{\alpha}{\beta} \theta}.$$

¹⁾ Черточки над буквами обозначают здесь комплексно сопряженные величины.

Фазовые траектории — логарифмические спирали, вложенные одна в другую, с асимптотической точкой в начале координат. При этом, если $\alpha < 0$ (вещественная часть отрицательна), то с возрастанием θ величина r убывает и кривая имеет вид, показанный на рис. 108, а. Это так называемый *устойчивый фокус*. Если $\alpha > 0$, то r растет вместе с θ . Особая точка в этом последнем случае называется

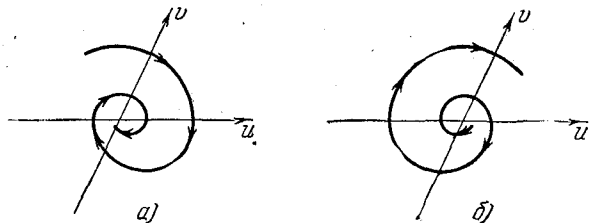


Рис. 108.

неустойчивым фокусом (рис. 108, б). Изображающая точка в первом случае асимптотически приближается к началу, во втором — удаляется.

4-й случай. Корни характеристического уравнения — чисто мнимые ($\alpha = 0$). В этом случае

$$\alpha = 0, \quad \beta \neq 0$$

и уравнения фазовых траекторий в полярных координатах будут иметь вид

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \beta,$$

откуда

$$r = \text{const} = r_0, \quad \theta = \beta t + \theta_0.$$

Фазовые траектории — окружности, описываемые изображающей точкой вокруг начала координат с угловой скоростью β . Особая точка в этом случае носит название *центра*. Равновесие, изображаемое особой точкой типа «центра», является устойчивым равновесием.

Пример 4. Как известно¹⁾, движение тела вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром тяжести, в отсутствие других сил (случай Эйлера), можно представить, согласно интерпретации Пуансо, качением эллипсоида инерции тела относительно неподвижной точки по неподвижной плоскости.

¹⁾ Аппель П., Теоретическая механика, т. II, Физматгиз, 1960, § 392. Приведенный пример следует рассматривать только как аналогию некоторых траекторий полюса с фазовыми траекториями около особых точек центра и седла. Полодия — это, конечно, не фазовая траектория, и концы осей эллипсоида не особые точки фазовой плоскости.

При этом точка пересечения мгновенной оси вращения с поверхностью эллипсоида инерции («полюс») описывает на поверхности эллипсоида кривые («полодия»), приблизительное расположение которых показано на рис. 109. Вблизи концов наибольшей AA и наименьшей BB оси эллипсоида полюдия представляют замкнутые кривые, окружающие эти концы подобно кривым, окружающим особую точку типа центра. Вокруг осей, совпадающих с осями эллипсоида инерции. Вращения вокруг осей, совпадающих с наибольшей или наименьшей осями эллипсоида, будут, очевидно, устойчивыми, так как малое отклонение оси вращения переведет полюс на близкую к концу оси эллипсоида полюдию, по которой он и будет двигаться в возмущенном движении, оставаясь в ближайшей окрестности невозмущенного состояния. Вращения вокруг средней оси неустойчиво. Малое отклонение мгновенной оси переместит полюс на полюдию, по которой он будет удаляться от конца средней оси эллипсоида.

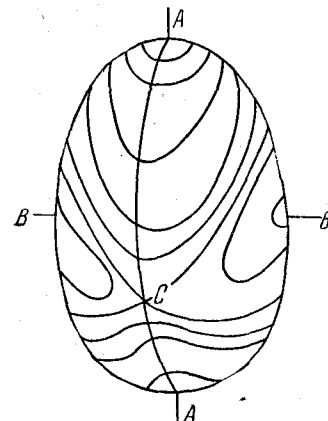


Рис. 109.

Пример 5. Уравнения

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \mu(ax + by) \quad (\mu > 0)$$

имеют особую точку в начале координат $x = y = 0$ (равновесное состояние). Характеристическое уравнение имеет здесь вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a\mu - 1 & b\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - b\mu\lambda + (1 - a\mu) = 0.$$

При достаточно малом $\mu > 0$ корни этого уравнения комплексные и их вещественные части имеют знак коэффициента b . Начало координат — особая точка типа фокуса — устойчивого, когда $b < 0$, неустойчивого, когда $b > 0$.

Пример 6. Уравнение Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (\mu > 0)$$

эквивалентно системе

$$\frac{dx}{dt} = y - \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right), \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

Начало координат — особая точка. Для выяснения типа этой особой точки и характера равновесия нужно составить характеристическое уравнение линеаризованной системы

$$\frac{dx}{dt} = y + \mu x, \quad \frac{dy}{dt} = -x$$

и найти его корни. Характеристическое уравнение здесь будет

$$\begin{vmatrix} \mu - \lambda & +1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0.$$

Его корни

$$\lambda_{1, 2} = \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 1}.$$

Если $\mu > 2$, то оба корня вещественны и положительны; если $\mu < 2$, то оба корня комплексные с положительной вещественной частью. Следовательно, начало координат — неустойчивый узел или неустойчивый фокус.

Пример 7. Найти и исследовать особую точку фазовых траекторий для уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y - 1, \\ \frac{dy}{dt} &= x - y - 3. \end{aligned} \right\} \quad (11.17)$$

Особой точкой будет равновесное состояние, координаты которого, найденные из уравнений

$$\left. \begin{aligned} x + y - 1 &= 0, \\ x - y - 3 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

будут $x = 2$, $y = -1$. Уравнения возмущенного движения вблизи этой точки, которые мы получим, подставив в (11.17)

$$x = 2 + \xi, \quad y = -1 + \eta,$$

будут иметь вид

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi + \eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = \xi - \eta.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1, 2} = \pm \sqrt{2}.$$

Следовательно, особая точка $(2, -1)$ — седло, и равновесное состояние системы в этой точке неустойчиво.

5. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Заключение об устойчивости, сделанные на основании исследования линеаризованных уравнений возмущенного движения системы, не всегда остаются в силе для исходной (неупрощенной) системы. Устойчивость или неустойчивость последней определяется во многих случаях как раз отбрасываемыми при линеаризации нелинейными

членами. Рассмотрим, например, задачу об устойчивости невозмущенного состояния системы

$$x = y = 0,$$

если уравнения ее возмущенного движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + ax^3, \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay^3. \end{aligned} \right\} \quad (11.18)$$

Выбросив члены с кубами x и y , получим линеаризованную систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y, \\ \frac{dy}{dt} &= x, \end{aligned} \right\} \quad (11.19)$$

решение которой имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha \cos t + \beta \sin t, \\ y &= \alpha \sin t - \beta \cos t. \end{aligned} \right\}$$

Состояние

$$x = y = 0$$

линеаризованной системы устойчиво. Получив достаточно малое возмущение, система в возмущенном движении пребывает в окрестности начала координат.

Рассмотрим теперь заданную неупрощенную систему (11.18). В качестве функции Ляпунова возьмем определенно положительную функцию

$$V = x^2 + y^2.$$

Ее производная по времени в силу уравнений (11.18)

$$\frac{dV}{dt} = 2x(-y + ax^3) + 2y(x + ay^3) = 2a(x^4 + y^4).$$

При $a > 0$ невозмущенное состояние

$$x = y = 0$$

неустойчиво, при $a < 0$ — устойчиво асимптотически, при $a = 0$ — просто устойчиво. Таким образом, характер устойчивости определяется в нашем примере именно отбрасываемыми при линеаризации нелинейными членами.

А. М. Ляпунов установил, при каких условиях заключения об устойчивости, сделанные для линеаризованной системы, сохраняют силу и для исходной (неупрощенной) системы.

Для этих переменных группа уравнений возмущенного движения будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{\xi}_{i1}}{dt} &= \lambda_i \bar{\xi}_{i1} + Z_{i1}, \\ \frac{d\bar{\xi}_{i2}}{dt} &= \lambda_i \bar{\xi}_{i2} + \bar{\xi}_{i1} + Z_{i2}, \\ &\dots \\ \frac{d\bar{\xi}_{i\mu_i}}{dt} &= \lambda_i \bar{\xi}_{i\mu_i} + \bar{\xi}_{i\mu_i-1} + Z_{i\mu_i} \end{aligned} \right\} (11.25)$$

Пусть снова все корни

$$\lambda_s = \alpha_s + i\beta_s$$

имеют не равную нулю отрицательную вещественную часть

$$\alpha_s < 0 \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Рассмотрим определенно положительную функцию

$$V = \sum_{i=1}^m (\bar{\xi}_{i1} \bar{\xi}_{i1} + \alpha_i^2 \bar{\xi}_{i2} \bar{\xi}_{i2} + \dots + \alpha_i^{2(\mu_i-1)} \bar{\xi}_{i\mu_i} \bar{\xi}_{i\mu_i}).$$

Эта функция явно от времени не зависит, и, следовательно, допускает бесконечно малый высший предел. Ее производная по t в силу уравнений (11.25) равна

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sum_{i=1}^m \left[\left(\bar{\xi}_{i1} \frac{d\bar{\xi}_{i1}}{dt} + \bar{\xi}_{i1} \frac{d\bar{\xi}_{i1}}{dt} \right) + \alpha_i^2 \left(\bar{\xi}_{i2} \frac{d\bar{\xi}_{i2}}{dt} + \bar{\xi}_{i2} \frac{d\bar{\xi}_{i2}}{dt} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \alpha_i^{2(\mu_i-1)} \left(\bar{\xi}_{i\mu_i} \frac{d\bar{\xi}_{i\mu_i}}{dt} + \bar{\xi}_{i\mu_i} \frac{d\bar{\xi}_{i\mu_i}}{dt} \right) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^m \{ [\bar{\xi}_{i1} (\lambda_i \bar{\xi}_{i1} + Z_{i1}) + \bar{\xi}_{i1} (\lambda_i \bar{\xi}_{i1} + Z_{i1})] + \alpha_i^2 [\bar{\xi}_{i2} (\lambda_i \bar{\xi}_{i2} + \bar{\xi}_{i1} + Z_{i2}) + \\ &\quad + \bar{\xi}_{i2} (\lambda_i \bar{\xi}_{i2} + \bar{\xi}_{i1} + Z_{i2})] + \dots \} = \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \{ 2 (\bar{\xi}_{i1} \bar{\xi}_{i1} + \alpha_i^2 \bar{\xi}_{i2} \bar{\xi}_{i2} + \dots + \alpha_i^{2(\mu_i-1)} \bar{\xi}_{i\mu_i} \bar{\xi}_{i\mu_i}) + \\ &\quad + [\alpha_i (\bar{\xi}_{i2} \bar{\xi}_{i1} + \bar{\xi}_{i1} \bar{\xi}_{i2}) + \dots + \alpha_i^{2\mu_i-3} (\bar{\xi}_{i\mu_i} \bar{\xi}_{i\mu_i-1} + \bar{\xi}_{i\mu_i-1} \bar{\xi}_{i\mu_i})] + \\ &\quad + \sum_{i=1}^m [(\bar{\xi}_{i1} Z_{i1} + \bar{\xi}_{i1} Z_{i1}) + \dots + \alpha_i^{2(\mu_i-1)} (\bar{\xi}_{i\mu_i} Z_{i\mu_i} + \bar{\xi}_{i\mu_i} Z_{i\mu_i})]. \end{aligned}$$

Вторая сумма правой части содержит $\bar{\xi}_s$ (а, следовательно, и x_s) в степени не ниже третьей. Квадратичная форма в фигурных скоб-

ках — определенно положительная. В самом деле, введем новые переменные

$$\begin{aligned} \eta_{i1} &= \bar{\xi}_{i1}, \\ \eta_{i2} &= \alpha_i \bar{\xi}_{i2}, \\ &\dots \\ \eta_{i\mu_i} &= \alpha_i^{\mu_i-1} \bar{\xi}_{i\mu_i}. \end{aligned}$$

В переменных η_i эта форма напишется в виде

$$2\eta_{i1}\bar{\eta}_{i1} + 2\eta_{i2}\bar{\eta}_{i2} + \dots + 2\eta_{i\mu_i}\bar{\eta}_{i\mu_i} + (\bar{\eta}_{i1}\eta_{i2} + \bar{\eta}_{i2}\eta_{i1}) + \dots + (\eta_{i\mu_i-1}\bar{\eta}_{i\mu_i} + \eta_{i\mu_i}\bar{\eta}_{i\mu_i-1}).$$

Дискриминант этой формы равен

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} = \Delta_{\mu_i}.$$

Все его главные диагональные миноры

$$\Delta_1 = 2, \Delta_2 = 3, \Delta_3 = 4, \dots, \Delta_{\mu_i-1} = \mu_i, \Delta_{\mu_i} = \mu_i + 1$$

положительны. Следовательно, квадратичная форма в фигурных скобках определенно положительна. Если поэтому все α_s отрицательны, то $\frac{dV}{dt}$ для достаточно малых $\bar{\xi}_s$ — определенно отрицательная функция, независимо от членов высших порядков в Z_s , и невозмущенное состояние системы асимптотически устойчиво.

6. Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению. Если среди корней характеристического уравнения имеется по крайней мере один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво, независимо от членов высших порядков.

Пусть вещественные части α_s всех корней характеристического уравнения отличны от нуля. Обозначим группу канонических переменных, соответствующих элементарному делителю $(\lambda - \lambda_i)^{\mu_i}$, через

$$\bar{\xi}_{i1}, \bar{\xi}_{i2}, \dots, \bar{\xi}_{i\mu_i}.$$

В качестве функции Ляпунова возьмем квадратичную форму

$$V = \sum_{i=1}^m \alpha_i [\bar{\xi}_{i1} \bar{\xi}_{i1} + \alpha_i^2 \bar{\xi}_{i2} \bar{\xi}_{i2} + \dots + \alpha_i^{2(\mu_i-1)} \bar{\xi}_{i\mu_i} \bar{\xi}_{i\mu_i}].$$

От функции V предыдущей теоремы она отличается множителем α_i перед квадратными скобками. Производная по времени от этой

функции в силу нелинеаризованных уравнений возмущенного движения будет равна

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \Phi_i + \text{члены высших порядков,}$$

где Φ_i — определено положительная форма, тождественная с аналогичной формой предыдущей теоремы. Теперь эта форма стоит под знаком суммы с множителем α_i^2 . Следовательно, $\frac{dV}{dt}$ для достаточно малых ξ_i — определено положительная функция. Так как по крайней мере одно из α_s положительно, например $\alpha_1 > 0$, то можно выбрать ξ_i так, что знак V будет такой же, как и знак $\frac{dV}{dt}$. Следовательно, невозмущенное состояние неустойчиво.

Предположим теперь, что при одном или нескольких корнях характеристического определителя с положительной вещественной частью среди других корней имеются корни, вещественная часть которых равна нулю. Этот случай можно привести к рассмотренному, если сделать подстановку

$$u_j = x_j e^{-\epsilon t},$$

где ϵ — положительное число, меньшее, чем абсолютные величины всех отличных от нуля вещественных частей корней характеристического уравнения. При неустойчивости переменных u_j (т. е. при неограниченном возрастании u_j) будут неустойчивы и переменные x_j (но не наоборот). Дифференциальные уравнения возмущенного движения после сокращения на $e^{\epsilon t}$ будут иметь вид

$$\frac{du_s}{dt} + \epsilon u_s = a_{s1}u_1 + \dots + a_{sk}u_k + e^{\epsilon t} X_s \quad (s = 1, 2, \dots, k)$$

или

$$\frac{du_s}{dt} = a_{s1}u_1 + \dots + (a_{ss} - \epsilon)u_s + \dots + a_{sk}u_k + e^{\epsilon t} X_s \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \epsilon - \mu & a_{21} & \dots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} - \epsilon - \mu & \dots & a_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1k} & a_{2k} & \dots & a_{kk} - \epsilon - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Его корни

$$\mu_s = \lambda_s - \epsilon,$$

где λ_s — корни характеристического уравнения системы:

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{s1}x_1 + \dots + a_{sk}x_k \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

При сделанных относительно λ_s и ϵ предположениях среди корней μ_s будет по крайней мере один с положительной вещественной частью, тогда как все другие будут иметь отличную от нуля вещественную часть. Следовательно, невозмущенное движение неустойчиво.

Случаи, когда один или несколько корней *чисто мнимые* или *равны нулю* при прочих с отрицательной вещественной частью, являются «критическими» в том смысле, что для этих случаев вопрос об устойчивости или неустойчивости не может быть решен на основании уравнений первого приближения. Исследование вопроса об устойчивости в таких случаях представляет одну из труднейших задач механики, не разрешенную полностью и в настоящее время. Сам Ляпунов дал ее решение для двух случаев: 1) один нулевой корень; 2) два чисто мнимых корня. Рассмотрение этих критических случаев не входит в задачи настоящей книги.

В примере

$$\frac{dx}{dt} = -y + ax^3, \quad \frac{dy}{dt} = x + ay^3$$

мы встречаемся как раз со вторым критическим случаем: характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

имеет два чисто мнимых корня. Следовательно, здесь судить об устойчивости по первому приближению нельзя.

Пример 8. Тело, закрепленное в одной неподвижной точке, расположенной в его центре тяжести, движется по инерции (случай Эйлера). Требуется исследовать устойчивость вращения тела вокруг главных осей эллипсоида инерции.

Обозначим через p, q, r проекции угловой скорости тела на неизменно связанные с ним оси координат, совпадающие с главными осями инерции для центра тяжести, и через A, B, C — моменты инерции тела относительно этих осей. Пусть уравнения невозмущенного движения будут

$$p = p_0 = \text{const} = 0, \quad q = q_0 = 0, \quad r = r_0 \neq 0.$$

Подставив в уравнения Эйлера ¹⁾

$$A \frac{dp}{dt} = (B - C) qr,$$

$$B \frac{dq}{dt} = (C - A) pr,$$

$$C \frac{dr}{dt} = (A - B) pq$$

¹⁾ См. Аппель П., Теоретическая механика, т. II, §§ 387, 389, 443, Физматгиз, 1960.

возмущенные значения угловых скоростей

$$p = p_0 + \xi = \xi, \quad q = q_0 + \eta = \eta, \quad r = r_0 + \zeta,$$

получим уравнения возмущенного движения

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d\xi}{dt} &= (B-C)r_0\eta + (B-C)\eta\zeta, \\ B \frac{d\eta}{dt} &= (C-A)r_0\xi + (C-A)\xi\zeta, \\ C \frac{d\zeta}{dt} &= (A-B)\xi\eta. \end{aligned} \right\} \quad (11.26)$$

В первом приближении

$$\begin{aligned} A \frac{d\xi}{dt} &= (B-C)r_0\eta, \\ B \frac{d\eta}{dt} &= (C-A)r_0\xi, \\ C \frac{d\zeta}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение линеаризованной системы здесь будет

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{B-C}{A}r_0 \\ \frac{C-A}{B}r_0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - \frac{(C-A)(B-C)}{AB}r_0^2 = 0.$$

Если $A > B > C$ или $A < B < C$, т. е. если вращение происходит вокруг оси с наибольшим или с наименьшим моментом инерции, то

$$\frac{(A-C)(B-C)}{AB}r_0^2 > 0$$

и корни чисто мнимые. Следовательно, по первому приближению судить об устойчивости нельзя. Однако можно доказать, что рассматриваемые вращения — устойчивы. Возьмем в качестве функции Ляпунова выражение

$$\frac{(A-C)}{B}\xi^2 + \frac{(B-C)}{A}\eta^2 + [A\xi^2 + B\eta^2 + 2Cr_0\xi + C\zeta^2]^2,$$

составленное из двух первых интегралов ¹⁾ уравнений (11.26): интеграла

$$A(A-C)\xi^2 + B(B-C)\eta^2 = \text{const}$$

и интеграла сохранения энергии

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C(\zeta + r_0)^2 = \text{const}.$$

¹⁾ См. Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, Изд. АН СССР, 1962.

При $A > B > C$ — это определено положительная функция, производная которой в силу уравнений (11.26) равна нулю. Если $A < B < C$, то в качестве функции Ляпунова следует взять функцию

$$\frac{(A-C)}{B}\xi^2 + \frac{(B-C)}{A}\eta^2 - [A\xi^2 + B\eta^2 + 2Cr_0\xi + C\zeta^2]^2.$$

Это — определено отрицательная функция, производная которой в силу уравнений (11.26) равна нулю. Если $p_0 = r_0 = 0$, $q_0 \neq 0$, т. е. если вращение происходит вокруг оси со средним моментом инерции, то уравнения возмущенного движения будут

$$\begin{aligned} A \frac{d\xi}{dt} &= (B-C)q_0\zeta + (B-C)\eta\zeta, \\ B \frac{d\eta}{dt} &= (C-A)\xi\zeta, \\ C \frac{d\zeta}{dt} &= (A-B)q_0\xi + (A-B)\eta\xi. \end{aligned}$$

В первом приближении

$$\begin{aligned} A \frac{d\xi}{dt} &= (B-C)q_0\zeta, \\ B \frac{d\eta}{dt} &= 0, \\ C \frac{d\zeta}{dt} &= (A-B)q_0\xi. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \frac{(A-B)(B-C)}{AC}q_0^2 = 0$$

имеет при $A > B > C$ или $A < B < C$ два вещественных корня, один из которых — положительный. Следовательно, движение неустойчиво.

7. Критерии отрицательности вещественных частей корней характеристического уравнения. Как следует из теорем Ляпунова, для суждения об устойчивости движения по первому приближению необходимо иметь в своем распоряжении точные сведения о знаках вещественных частей корней характеристического уравнения. Иначе говоря, нужно знать, как расположены корни характеристического уравнения на комплексной плоскости относительно мнимой оси. Когда все корни характеристического уравнения лежат слева от мнимой оси, т. е. имеют отрицательные вещественные части, полином, соответствующий развернутому определителю характеристического уравнения, называется *устойчивым полиномом*. Решить вопрос об устойчивости или неустойчивости полинома можно без предварительного вычисления его корней с помощью специальных *критериев устойчивости*, предложенных Раусом, Гурвицем, Найквистом, Михайловым ¹⁾ и др. В основе этих критериев лежат известные теоремы

¹⁾ Михайлов А. В., Метод гармонического анализа в теории автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, 1938, № 3.

Коши о числе корней функции внутри замкнутого контура. Некоторые из этих критериев дают возможность не только установить распределение корней полинома на комплексной плоскости, но также и определить необходимые изменения параметров системы, для того чтобы сделать ее движение устойчивым.

Мы приведем краткое изложение простейшего критерия — критерия Рауса вместе с вытекающим из него критерием Гурвица.

8. Критерий Рауса. Рассмотрим полином четной степени n с вещественными коэффициентами, который запишем следующим образом:

$$f(z) = a_0 z^n + b_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + \dots + a_{n/2} \quad (a_0 > 0).$$

Подставив $z = x + iy$ ($i = \sqrt{-1}$) и отделив вещественную часть от мнимой, представим $f(z)$ суммой

$$f(z) = P + iQ,$$

где P и Q — полиномы n -й степени от x и y .

Согласно одной из теорем Коши число нулей полинома $f(z)$ внутри замкнутого контура равно половине избытка числа нулей дроби P/Q на контуре при обходе его в положительном направлении ¹⁾ с переменной знака плюс на минус над числом нулей с переменной знака минус на плюс.

Построим замкнутый контур, состоящий из полуокружности, описанной из начала координат и расположенной справа от мнимой оси, и из отрезка мнимой оси, равного диаметру полуокружности. Радиус полуокружности должен быть достаточно большим, чтобы внутри построенного контура оказались все корни с положительной вещественной частью (если, конечно, таковые имеются) ²⁾. Подсчитаем теперь, обходя контур в положительном направлении, число нулей дроби P/Q как с изменением ее знака (при переходе через нуль) плюс на минус, так и минуса на плюс. Чтобы сосчитать нули дроби P/Q на полуокружности, подставим в $f(z)$

$$z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

После этой подстановки

$$P = a_0 r^n \cos n\theta + b_0 r^{n-1} \cos(n-1)\theta + \dots,$$

$$Q = a_0 r^n \sin n\theta + b_0 r^{n-1} \sin(n-1)\theta + \dots$$

При $r \rightarrow \infty$

$$\frac{P}{Q} \rightarrow \operatorname{ctg} n\theta.$$

¹⁾ То есть так, чтобы ограничиваемая контуром площадь была все время слева.

²⁾ При этом предполагается, что на самом контуре нет нулей полинома $f(z)$.

Все нули дроби P/Q на полуокружности при обходе ее в указанном направлении будут нулями с переменной знака плюс на минус, и число их равно числу нулей $\operatorname{ctg} n\theta$, т. е. n .

Число нулей дроби P/Q при переходе по мнимой оси от $+\infty$ до $-\infty$ можно подсчитать, построив для полиномов P и Q , по правилу нахождения общего наибольшего делителя, ряд Штурма. На оси Oy имеем $z = iy$. Поэтому на этой оси (при n четном)

$$P = (-1)^{n/2} (a_0 y^n - a_1 y^{n-2} + a_2 y^{n-4} - \dots),$$

$$Q = (-1)^{\frac{n}{2}-1} (b_0 y^{n-1} - b_1 y^{n-3} + b_2 y^{n-5} - \dots)$$

и

$$-\frac{P}{Q} = \frac{a_0 y^n - a_1 y^{n-2} + a_2 y^{n-4} - \dots}{b_0 y^{n-1} - b_1 y^{n-3} + b_2 y^{n-5} - \dots}$$

Введем обозначения:

$$f_1 = a_0 y^n - a_1 y^{n-2} + a_2 y^{n-4} - \dots,$$

$$f_2 = b_0 y^{n-1} - b_1 y^{n-3} + b_2 y^{n-5} - \dots$$

Пусть частное от деления f_1 на f_2 будет q_1 , а остаток $-f_3$; частное от деления f_2 на f_3 будет q_2 , а остаток $-f_4$ и т. д. Тогда

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= q_1 f_2 - f_3, \\ f_2 &= q_2 f_3 - f_4, \\ &\dots \dots \dots \\ f_{n-1} &= q_{n-1} f_n - f_{n+1}, \\ f_n &= q_n f_{n+1}. \end{aligned} \right\}$$

Ряд полиномов

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_{n+1} \quad (11.27)$$

обладает следующими свойствами:

1) когда один из промежуточных членов обращается в нуль, то два соседние не равны нулю и имеют противоположные знаки;

2) последний член ряда f_{n+1} — постоянное число, не равное нулю.

Следовательно, ряд (11.27) есть ряд Штурма для функций f_1 и f_2 .

Обозначим через $V(y)$ число перемен знака в ряду (11.27) для некоторого фиксированного значения y и покажем, что приобретенное этим рядом число перемен знака при переходе по мнимой оси от $+\infty$ до $-\infty$, т. е. разность

$$V(-\infty) - V(+\infty),$$

равно избытку числа нулей дроби f_1/f_2 на мнимой оси с переменной знака плюс на минус над числом нулей с переменной минуса на плюс

В самом деле, изменение числа перемен знака в ряду Штурма может произойти только при переходе через нуль первого члена f_1 , так как, когда переходит через нуль какой-либо промежуточный член, то общее число перемен знака в силу указанных выше свойств ряда не изменяется. При этом, когда дробь f_1/f_2 переходит через нуль с изменением знака плюс на минус, то ряд Штурма *приобретает* одну переменную знака, а когда дробь f_1/f_2 , проходя через нуль, меняет знак минус на плюс, ряд Штурма *теряет* одну переменную знака. Поэтому избыток числа переходов дроби f_1/f_2 с плюса на минус над числом переходов с минуса на плюс при изменении y от $+\infty$ до $-\infty$ равен числу перемен знака, *приобретенных* рядом (11.27). Это число равно разности

$$V(-\infty) - V(+\infty),$$

или для дроби P/Q

$$V(+\infty) - V(-\infty).$$

На всем контуре избыток числа перемен знака дроби P/Q с плюса на минус над числом перемен с минуса на плюс равен

$$V(+\infty) - V(-\infty) + n.$$

Внутри контура не будет нулей полинома $f(z)$, если

$$V(+\infty) - V(-\infty) + n = 0,$$

т. е. если

$$V(-\infty) = V(+\infty) + n.$$

Так как число перемен знака, приобретенное рядом (11.27), не может быть больше n , то из последнего равенства следует, что

$$V(+\infty) = 0.$$

Знаки полиномов ряда (11.27) при $y = +\infty$ определяются знаками членов высших степеней. Следовательно, $f(z)$ не будет иметь внутри контура нулей, если коэффициенты при высших степенях членов ряда (11.27) все одного знака. Отсюда получаем *критерий Рауса*.

Для того чтобы вещественные части всех корней полинома $f(z)$ были отрицательны, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при высших степенях полиномов

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_{n-1}$$

были все одного знака.

Коэффициенты полиномов ряда (11.27), в том числе и коэффициенты при высших степенях y , можно получить с помощью следующего элементарного приема. Из равенства

$$f_3(y) = q_1 f_2(y) - f_1(y) = \frac{a_0}{b_0} y f_2(y) - f_1(y) = c_0 y^{n-2} - c_1 y^{n-4} + \dots$$

находим коэффициенты c_0, c_1, c_2, \dots

$$c_0 = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0}, \quad c_1 = \frac{a_2 b_0 - a_0 b_2}{b_0}, \dots$$

По аналогичным формулам из коэффициентов полиномов f_2 и f_3 найдутся коэффициенты полинома $f_4(y)$:

$$f_4(y) = \frac{b_0}{c_0} y f_3(y) - f_2(y) = d_0 y^{n-3} - d_1 y^{n-5} + \dots$$

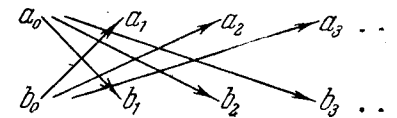
$$d_0 = \frac{c_0 b_1 - b_0 c_1}{c_0}, \quad d_1 = \frac{c_0 b_2 - b_0 c_2}{c_0}, \dots$$

и т. д.

Из чисел $a_i, b_i, c_i, d_i, \dots$ строим так называемую *схему Рауса*:

$$\left. \begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots \\ d_0 & d_1 & d_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\} \quad (11.28)$$

Числа каждой строки, начиная с третьей, получаются с помощью перекрестного умножения первых элементов двух предшествующих строк на все последующие члены этих строк и деления разности соответствующих произведений на первый элемент предшествующей строки. Например, третья строка получается по такой схеме:



Соответствующие числа равны

$$c_0 = \frac{b_0 a_1 - a_0 b_1}{b_0}, \quad c_1 = \frac{b_0 a_2 - a_0 b_2}{b_0}, \quad c_2 = \frac{b_0 a_3 - a_0 b_3}{b_0}.$$

При этом ни один из элементов первого столбца схемы Рауса не должен обращаться в нуль. Для случая, когда один из этих элементов, например h_0 , обращается в нуль, Раус рекомендует вместо $h_0 = 0$ подставить малую величину $\epsilon > 0$ и продолжать по-прежнему заполнение схемы. При этом последующие элементы первого столбца схемы будут рациональными функциями от ϵ , знаки которых определяются при малом ϵ без затруднений.

Может случиться, что все элементы некоторой, например $(k+1)$ -й, строки обратятся в нуль. В этом случае Раус рекомендует заменить $(k+1)$ -й нулевой полином $f_{k+1}(y)$ производной k -го полинома, т. е. $f'_k(y)$, и продолжить заполнение схемы по-прежнему.

Обоснование рекомендаций Рауса, а также разбор других особых случаев, которые могут встретиться при применении критериев Рауса и Гурвица, можно найти в цитированной книге Ф. Р. Гантмахера¹⁾.

Правило составления схемы Рауса остается тем же самым и для полинома нечетной степени. Чтобы убедиться в этом, мы, следуя Раусу²⁾, рассмотрим вместо заданного уравнения

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

с нечетным n уравнение

$$a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + a_2 z^{n-1} + \dots + a_n z = -a_n h$$

с четным показателем $n+1$.

Предположив, что h — бесконечно малое положительное число, легко убеждаемся, что добавочный корень последнего уравнения будет так же бесконечно малым и в конце концов равным $-h$. Можно считать поэтому, что корни обоих уравнений, лежащие внутри контура (L), одни и те же. Для полученного уравнения четной степени $n+1$ схема Рауса составляется по прежнему правилу и ее первые две строки будут

$$\begin{array}{l} a_0, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n h, \\ a_1, a_3, \dots, a_n. \end{array}$$

Вычислив некоторое число дальнейших последовательных строк, увидим, что, кроме крайних справа, никакие другие элементы схемы не содержат множителя h , и потому, когда h будет положено равным нулю, эти элементы останутся конечными с тем же самым знаком, как если бы они были вычислены до добавления $a_n h$. В частности, два последних элемента первой колонки, если удержать только члены с наиминишей степенью h , будут a_n и $a_n h$, и так как $h > 0$, то перемены знака между ними не будет. Можно поэтому опустить член $a_n h$ совсем и вести построение схемы Рауса одинаково — будет ли степень уравнения четная или нечетная.

Пример 9. а) Полином

$$f(z) = z^4 + 3z^3 + 5z^2 + 4z + 2$$

устойчив. Схема Рауса имеет вид³⁾

$$\begin{array}{l|l} y^4 & 1 \ 5 \ 2 \\ y^3 & 3 \ 4 \\ y^2 & 11 \ 6 \\ y & 26 \\ y^0 & 6 \end{array}$$

б) Полином

$$f(z) = z^4 + 2x^3 + x^2 + 1$$

¹⁾ Гантмахер Ф. Р., Теория матриц.

²⁾ См. Routh, Advanced Rigid Dynamics, 1892, Mac-Millan, § 298.

³⁾ Так как нас интересуют только знаки, а не абсолютные значения членов первого столбца схемы Рауса, то все числа одной и той же строки этой схемы, начиная с третьей, можно умножить или разделить на одно и то же положительное число.

В данном примере элементы третьей строки умножены на первый элемент предшествующей строки, т. е. на 3, а четвертой строки — на 11.

неустойчив. Схема Рауса

$$\begin{array}{l|l} y^4 & 1 \ 1 \ 1 \\ y^3 & 2 \\ y^2 & 2 \ 2 \\ y & -4 \\ y^0 & 2 \end{array}$$

в) Полином

$$f(z) = z^3 + 6z^2 + 11z + 6$$

имеет корни $-1, -2, -3$. Схема Рауса

$$\begin{array}{l|l} y^3 & 1 \ 11 \\ y^2 & 6 \ 6 \\ y & 60 \\ y^0 & 360 \end{array}$$

Полином устойчив.

г) Полином

$$f(z) = z^4 + z^3 + 2z^2 + 2z + 1$$

неустойчив. Схема Рауса

$$\begin{array}{l|l} y^4 & 1 & 2 \ 1 \\ y^3 & 1 & 2 \\ y^2 & \varepsilon & 1 \\ y & 2\varepsilon - 1 \\ y^0 & 2\varepsilon - 1 \end{array}$$

При достаточно малом $\varepsilon \rightarrow 0$

$$2\varepsilon - 1 < 0.$$

9. Критерий Гурвица. Элементы первого столбца схемы Рауса, т. е. величины $a_0, b_0, c_0, d_0, \dots$, можно представить в виде отношений главных диагональных миноров так называемого *определителя Гурвица*:

$$H = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ 0 & 0 & b_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \Delta_n. \quad (11.29)$$

В самом деле, положив $\Delta_1 = b_0$, найдем из формулы для коэффициента c_0 :

$$c_0 = \frac{b_0 a_1 - a_0 b_1}{b_0} = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}}{b_0} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}.$$

Из формулы для d_0 находим

$$d_0 = \frac{c_0 b_1 - b_0 c_1}{c_0} = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} b_1 - \begin{vmatrix} b_0 & b_2 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} b_0}{\begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \quad (11.30)$$

и т. д. до $\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$ включительно.

Полином $f(z)$ устойчив, если все элементы первого столбца схемы Рауса одного знака, т. е. если при $a_0 > 0$ все остальные элементы b_0, c_0, d_0, \dots положительны. Необходимые и достаточные условия устойчивости полинома можно поэтому представить следующими неравенствами:

$$\Delta_1 > 0; \frac{\Delta_2}{\Delta_1} > 0; \frac{\Delta_3}{\Delta_2} > 0; \dots; \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} > 0,$$

или

$$\Delta_1 > 0; \Delta_2 > 0; \Delta_3 > 0; \dots; \Delta_n = H > 0. \quad (11.31)$$

Таким образом, для устойчивости полинома

$$f(z) = a_0 z^n + b_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + \dots$$

необходимо и достаточно, чтобы при $a_0 > 0$ определитель Гурвица (11.29) и его главные диагональные миноры были больше нуля, т. е. чтобы выполнены были неравенства

$$a_0 > 0; \quad b_0 > 0; \quad \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} > 0$$

и т. д. и, наконец, $\Delta_n = H > 0$. Эти неравенства и выражают критерий Гурвица.

Если коэффициенты полинома $f(z)$ имеют обычные обозначения, т. е.

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n,$$

то условия (11.31) переписутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.32)$$

Формулы (11.30) дают простой способ вычисления определителей Гурвица.

10. Влияние возмущающих диссипативных и гироскопических сил на устойчивость равновесия консервативной системы. Если в равновесном состоянии обобщенные координаты системы равны нулю и в этом же состоянии равна нулю потенциальная энергия системы, т. е. $\Pi(0, 0, \dots, 0) = 0$, то уравнения возмущенного движения (в первом приближении) могут быть представлены уравнениями Лагранжа, составленными в предположении, что удвоенные потенциальная и кинетическая энергии являются квадратичными формами

$$2T = \sum a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad 2\Pi = \sum c_{ij} q_i q_j$$

с постоянными коэффициентами. Кинетическая энергия — всегда определено положительная форма обобщенных скоростей. Следовательно, можно найти такие координаты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, в которых обе формы T и Π будут иметь канонический вид

$$2T = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2, \quad 2\Pi = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \dots + \lambda_n \xi_n^2,$$

где λ_i — корни векового уравнения

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda - c_{11} & \dots & a_{1n}\lambda - c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\lambda - c_{n1} & \dots & a_{nn}\lambda - c_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (11.33)$$

Уравнения Лагранжа в координатах ξ_i будут иметь вид

$$\ddot{\xi}_i + \lambda_i \xi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Эти уравнения и будут уравнениями возмущенного движения системы. Интегралы этих уравнений:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \xi_i = A_i \cos(t \sqrt{\lambda_i} + \beta_i) && \text{при } \lambda_i > 0; \\ 2) \quad & \xi_i = A_i t + B_i && \text{при } \lambda_i = 0; \\ 3) \quad & \xi_i = A_i e^{t \sqrt{-\lambda_i}} + B_i e^{-t \sqrt{-\lambda_i}} && \text{при } \lambda_i < 0. \end{aligned} \quad (11.34)$$

Из формы интегралов можно сделать следующие заключения:

1. Если все корни векового уравнения

$$D(\lambda) = 0$$

положительны, то равновесие устойчиво и возмущенное движение представляет собой наложение гармонических колебаний с частотами $\sqrt{\lambda_i}$.

2. Во всех других случаях равновесие неустойчиво: координаты растут с течением времени по линейному или экспоненциальному закону.

Влияние на устойчивость равновесия наложения линейной связи¹⁾. Если связь $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0$ не смещает положения равновесия, то

$$f(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

В области этого положения разложение функции f начнется с линейных членов. В первом приближении уравнение связи имеет вид

$$A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + \dots + A_n \xi_n = 0. \quad (11.35)$$

Наложением связи мы уменьшаем число степеней свободы системы. При этом частоты связанной системы располагаются между частотами исходной. Отсюда следует: а) если все корни λ_i положительны, то положительны будут и корни характеристического уравнения связанной системы и равновесие останется устойчивым, как и до введения связи; б) если одно *наименьшее* λ отрицательно, то введение новой связи может «упрочнить» равновесие до устойчивого; в) если два первых λ отрицательны, то введением *одной* связи нельзя упрочнить равновесия до устойчивого.

Влияние на устойчивость равновесия введения в систему диссипативных сил. Диссипативные силы равны взятым со знаком минус частным производным от положительной квадратичной формы

$$2F = \sum b_{ij} \xi_i \xi_j$$

по обобщенным скоростям $\dot{\xi}_i$. Если обозначить эти силы через X_i , то

$$X_i = -\frac{\partial F}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Функция F — мера скорости рассеяния механической энергии, так как

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = -2F. \quad (11.36)$$

Когда F содержит производные от всех ξ_i , то диссипация называется

полной; в противном случае она *неполная*. Уравнения возмущенного движения системы, на которую, кроме консервативных, действуют и диссипативные силы, могут быть приведены к такой форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\dot{\xi}_i}{dt} &= \dot{\xi}_i, \\ \frac{d\dot{\xi}_i}{dt} &= -\lambda_i \xi_i - \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (11.37)$$

Диссипативные силы не меняют характера устойчивости равновесия консервативной системы, т. е. равновесие, устойчивое или неустойчивое при одних консервативных силах, остается таким же и после введения диссипативных сил. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Равновесие, устойчивое при одних консервативных силах, остается устойчивым и после введения диссипативных сил.*

Когда равновесие консервативной системы устойчиво, то все λ_i положительны и полная энергия системы

$$H = \frac{1}{2} \sum \dot{\xi}_i^2 + \frac{1}{2} \sum \lambda_i \xi_i^2 \quad (11.38)$$

есть определено положительная функция всех ξ_i и $\dot{\xi}_i$. Производная от H по времени в силу уравнений (11.37)

$$\frac{dH}{dt} = -\sum \dot{\xi}_i \left(\lambda_i \xi_i + \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \right) + \sum \lambda_i \xi_i \dot{\xi}_i = -\sum \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i = -2F$$

— постоянно отрицательная (так как зависит только от $\dot{\xi}_i$, а не от ξ_i и $\dot{\xi}_i$).

Теорема 2. *Равновесие, устойчивое при одних консервативных силах, введением диссипативных сил с полной диссипацией упрочняется до асимптотически устойчивого.*

Уравнениями возмущенного движения системы после введения диссипативных сил будут уравнения (11.37), где все $\lambda_i > 0$.

Рассмотрим функцию

$$V = H + \beta \sum \xi_i \dot{\xi}_i = \frac{1}{2} \sum \dot{\xi}_i^2 + \frac{1}{2} \sum \lambda_i \xi_i^2 + \beta \sum \xi_i \dot{\xi}_i.$$

Положительную постоянную β можно выбрать так, чтобы V была функцией определено положительной. Производная от V по t в силу уравнений (11.37) равна

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sum \dot{\xi}_i \left(-\lambda_i \xi_i - \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \right) + \sum \lambda_i \xi_i \dot{\xi}_i + \beta \sum \left(\dot{\xi}_i^2 - \lambda_i \xi_i^2 - \xi_i \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \right) = \\ &= -(2F + \beta \sum \lambda_i \xi_i^2) + \beta \left(\sum \dot{\xi}_i^2 - \sum \xi_i \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \right). \end{aligned}$$

¹⁾ Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, Изд. АН СССР, 1962, стр. 75.

При достаточно малом β производная $\frac{dV}{dt}$ определено отрицательная функция¹⁾, и следовательно, выполнены условия теоремы об асимптотической устойчивости.

Теорема 3. *Изолированное неустойчивое равновесие при одних консервативных силах, если все $\lambda_i \neq 0$, не может быть сделано устойчивым введением диссипативных сил с полной диссипацией.*

Пусть одно из λ_i , например λ_1 , отрицательно, а все остальные $\lambda_i > 0$, и следовательно, равновесие при одних консервативных силах неустойчиво. Рассмотрим функцию

$$V = \frac{1}{2} \sum \dot{\xi}_i^2 + \frac{1}{2} \sum \lambda_i \xi_i^2 + \beta \sum \lambda_i \xi_i \dot{\xi}_i.$$

Эта ограниченная функция допускает бесконечно малый высший предел, так как не зависит явно от t . Ее производная по t в силу уравнений возмущенного движения

$$\frac{dV}{dt} = - \left(2F + \beta \sum \dot{\xi}_i^2 \lambda_i \right) + \beta \left[\sum \left(\lambda_i \dot{\xi}_i^2 - \lambda_i \xi_i \frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}_i} \right) \right].$$

При достаточно малом β производная $\frac{dV}{dt}$ — функция определено отрицательная. Так как $\lambda_1 < 0$, то можно выбрать значения $\xi_i, \dot{\xi}_i$ так, что и V станет также отрицательной. Следовательно, равновесие и после введения диссипативных сил остается неустойчивым.

Когда какое-либо λ_i равно нулю, то равновесие неустойчиво. Такая неустойчивость может быть упрочнена надлежаще выбранными диссипативными силами, если все не равные нулю λ_i положительны. Пусть, например, $\lambda_1 = 0$, а все остальные $\lambda_i > 0$. Возьмем диссипативную силу

$$X_1 = -k \dot{\xi}_1 \quad (k > 0).$$

Тогда вместо уравнения $\ddot{\xi}_1 = 0$ с решением $\xi_1 = A_1 t + B_1$ будем иметь уравнение

$$\ddot{\xi}_1 + k \dot{\xi}_1 = 0$$

с решением

$$\xi_1 = -\frac{c}{k} e^{-kt} + C_1.$$

Гироскопические силы. Гироскопическими силами называются силы

$$Y_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} \dot{\xi}_j \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

¹⁾ См. признаки знакоопределенности и знакопеременности функций (стр. 373).

где $g_{ij} = -g_{ji}$. Матрица коэффициентов g_{ij} — кососимметричная с нулями на главной диагонали

$$\begin{vmatrix} 0 & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & 0 & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Работа гироскопических сил на действительных перемещениях системы равна нулю. В самом деле, умножив каждое Y_i на соответствующее $\dot{\xi}_i$ и сложив, получим, принимая во внимание, что $g_{ij} = -g_{ji}$,

$$Y_1 \dot{\xi}_1 + \dots + Y_n \dot{\xi}_n = 0$$

или

$$Y_1 d\xi_1 + \dots + Y_n d\xi_n = 0.$$

Теорема 4. *Равновесие, устойчивое при одних консервативных силах, остается устойчивым и при введении гироскопических сил, а также гироскопических сил совместно с диссипативными.*

При введении гироскопических и диссипативных сил уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\dot{\xi}_i}{dt} &= \dot{\xi}_i, \\ \frac{d\xi_i}{dt} &= -\lambda_i \xi_i - \frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}_i} + Y_i \end{aligned} \right\} \quad (11.39)$$

($i = 1, 2, \dots, n$).

Рассмотрим функцию

$$V = \frac{1}{2} \sum \dot{\xi}_i^2 + \frac{1}{2} \sum \lambda_i \xi_i^2.$$

Когда все $\lambda_i > 0$, то функция V определено положительна. Ее производная по времени, равная в силу уравнений возмущенного движения (11.39)

$$\frac{dV}{dt} = \sum \dot{\xi}_i \left(-\lambda_i \xi_i - \frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}_i} + Y_i \right) + \sum \lambda_i \xi_i \dot{\xi}_i = -2F,$$

постоянно отрицательна. Отсюда следует справедливость утверждения теоремы.

Теорема 5. *Равновесие, неустойчивое при одних консервативных силах, если все $\lambda_i \neq 0$, остается неустойчивым при одновременном добавлении гироскопических и диссипативных сил (с полной диссипацией).*

Рассмотрим функцию

$$V = \frac{1}{2} \sum \dot{\xi}_i^2 + \frac{1}{2} \sum \lambda_i \xi_i^2 + \beta \sum \lambda_i \xi_i \dot{\xi}_i.$$

Эта функция при достаточно малом β имеет определенно отрицательную производную. Она допускает бесконечно малый высший предел, и так как некоторые λ_i отрицательны, то можно подобрать ξ_i и $\dot{\xi}_i$ так, чтобы V было одинакового знака с $\frac{dV}{dt}$.

Теорема 6. Если степень неустойчивости¹⁾ системы, находящейся под действием одних консервативных сил, четная, то возможна стабилизация системы введением одних только гироскопических сил.

Если степень неустойчивости нечетная, то гироскопическая стабилизация невозможна.

Уравнения возмущенного движения системы после введения гироскопических сил можно написать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \lambda_1 \dot{\xi}_1 &= g_{12} \dot{\xi}_2 + \dots + g_{1n} \dot{\xi}_n \\ \ddot{\xi}_2 + \lambda_2 \dot{\xi}_2 &= g_{21} \dot{\xi}_1 + \dots + g_{2n} \dot{\xi}_n \\ &\dots \dots \dots \\ \ddot{\xi}_n + \lambda_n \dot{\xi}_n &= g_{n1} \dot{\xi}_1 + \dots + g_{nn-1} \dot{\xi}_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (11.40)$$

Подстановка

$$\xi_i = A_i e^{kt}$$

приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (k^2 + \lambda_1) A_1 - k g_{12} A_2 - \dots - k g_{1n} A_n &= 0, \\ -k g_{21} A_1 + (k^2 + \lambda_2) A_2 - \dots - k g_{2n} A_n &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ -k g_{n1} A_1 - k g_{n2} A_2 - \dots + (k^2 + \lambda_n) A_n &= 0. \end{aligned}$$

Условие, при котором не все A_i одновременно равны нулю; выражается равенством нулю определителя:

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} k^2 + \lambda_1 & -k g_{12} & \dots & -k g_{1n} \\ -k g_{21} & k^2 + \lambda_2 & \dots & -k g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -k g_{n1} & -k g_{n2} & \dots & k^2 + \lambda_n \end{vmatrix} = 0.$$

¹⁾ Степень неустойчивости системы определяется числом отрицательных коэффициентов λ_i в выражении потенциальной энергии.

Когда $k=0$, то

$$\Delta(0) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

Когда $k = +\infty$, то

$$\Delta(+\infty) > 0.$$

Если число отрицательных λ_i нечетно, то

$$\Delta(0) < 0$$

и, следовательно, между 0 и $+\infty$ лежит по крайней мере один положительный корень уравнения

$$\Delta(k) = 0.$$

Соответствующее этому корню значение ξ_i растет с течением времени неограниченно, и равновесие неустойчиво. Если число отрицательных λ_i четное, то

$$\Delta(0) > 0$$

и между 0 и $+\infty$ будет располагаться или четное число положительных корней, или ни одного. В этом случае гироскопическая стабилизация оказывается возможной. Но для ее реализации требуется выполнение некоторых дополнительных условий. Для системы с двумя степенями свободы эти условия можно установить следующим образом. Уравнения возмущенного движения (11.40) здесь будут иметь вид

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \lambda_1 \dot{\xi}_1 &= g \dot{\xi}_2, \\ \ddot{\xi}_2 + \lambda_2 \dot{\xi}_2 &= -g \dot{\xi}_1, \end{aligned}$$

где $g = g_{12} = -g_{21}$; $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ (степень неустойчивости четная). Исключив $\dot{\xi}_2$, получим одно уравнение четвертого порядка относительно ξ_1 :

$$\xi_1^{(IV)} + (g^2 + \lambda_1 + \lambda_2) \ddot{\xi}_1 + \lambda_1 \lambda_2 \xi_1 = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$z^4 + (g^2 + \lambda_1 + \lambda_2) z^2 + \lambda_1 \lambda_2 = 0$$

будет иметь отрицательные корни, если

$$g^2 + \lambda_1 + \lambda_2 > 0$$

и

$$(g^2 + \lambda_1 + \lambda_2)^2 > 4\lambda_1 \lambda_2.$$

Гироскопическая стабилизация возможна только при отсутствии диссипативных сил с полной диссипацией. Но так как последние неизбежны, то, как бы малы они ни были, действуя достаточно долго, они разрушат гироскопическую стабилизацию, так как при одновременном действии гироскопических и диссипативных сил с полной диссипацией первоначальная неустойчивость консервативной системы сохраняется.

Устойчивость, созданная гироскопическими силами, называется поэтому «временной», в отличие от так называемой «вековой» устойчивости консервативной системы.

ГЛАВА XII

ПРОСТЕЙШИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

1. Нелинейные системы. Теория нелинейных колебаний или, как иногда ее называют, *нелинейная механика*, занимается изучением периодических колебательных движений, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями. Системы, совершающие такие движения, называются обычно *нелинейными системами*¹⁾. Таким образом, нелинейная механика занимается изучением периодических движений нелинейных систем. По сравнению с линейной теорией нелинейная механика является дальнейшим углублением наших познаний о законах механического движения. Освобождаясь от многих искусственных построений линейной теории, нелинейная механика дает, как правило, более точное и полное отображение свойств колебательных движений механических систем. Дело в том, что «линейность» редко бывает свойством, присущим самой системе, вытекающим из ее устройства или ее физической природы. В большинстве случаев линейность есть результат упрощения реальной системы, чаще всего осуществляемого путем пренебрежения в уравнениях движения членами второго и высших порядков относительно координат и скоростей. Так, например, составляются линейные уравнения малых колебаний упругих систем около положения устойчивого равновесия. Основываясь на допущении, что, получив достаточно малое начальное возмущение, в дальнейшем возмущенном движении система пребывает в ближайшей окрестности невозмущенного состояния²⁾, в выражениях кинетической и потенциальной энергии сохраняют только члены низшего порядка, отбрасывая все другие, подобно бесконечно малым высших порядков. В результате такой операции приходят к линейным дифференциальным уравнениям движения с постоянными коэффициентами. Изучение построенных таким искусственным способом линейных систем дает, правда, возможность

¹⁾ Выражение «нелинейная система» дальше употребляется еще и в смысле системы уравнений, определяющих движение нелинейной системы.

²⁾ Которое принимается за начало отсчета координат и потенциальной энергии.

сделать заключения о свойствах их колебаний, полезные во многих практических расчетах. Однако в большом числе случаев линеаризация системы, хотя и осуществляемая путем пренебрежения весьма малыми величинами, дает грубое, упрощенное представление действительных процессов с количественными результатами, иногда неприемлемыми даже в ориентировочных расчетах. Во всяком случае линеаризация ограничивает возможность полного и всестороннего раскрытия всех колебательных свойств системы. Часто она приводит к неправильным заключениям о поведении системы и является вообще недопустимой.

Напомним некоторые общеизвестные факты такого рода. Как известно, сопротивление среды (в частности, так называемое *вязкое*

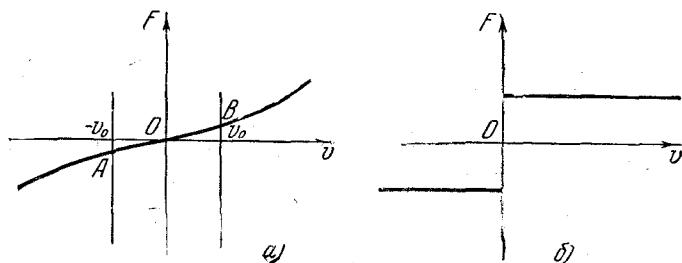


Рис. 110.

трение) зависит от скорости и с уменьшением последней может сделаться сколь угодно малым. «Характеристика» такого сопротивления имеет вид кривой на рис. 110, а в системе координат (F, v) , где F — сила сопротивления, v — скорость. Для небольших скоростей, например в пределах

$$-v_0 \leq v \leq v_0,$$

где кривая почти не отличается от прямой, линеаризация сопротивления, т. е. замена участка AB кривой прямолинейным отрезком, является вполне допустимой, так как прямая здесь достаточно точно воспроизводит общий характер изменения сопротивления. Иначе дело обстоит с *сухим* (кулоновым) трением, упрощенная характеристика которого представлена на рис. 110, б. Линеаризация уравнения с сухим трением невозможна, как бы мал ни был промежуток, на котором рассматриваются изменения скорости около начала координат.

Многие весьма употребительные в машиностроении материалы не следуют закону Гука и для малых деформаций. Характеристики растяжения или сжатия таких, например, материалов как кожа, резина, бетон и др. не имеют прямолинейных участков. Их модуль упругости изменяется вместе с величиной деформации. На рис. 111 представ-

лены характеристики растяжения (и сжатия) таких материалов. В зависимости от расположения кривой $F(x)$ относительно прямой (которая соответствует линейной характеристике), касательной к ней в начале координат O (пунктир на рис. 111), мы будем иметь «жесткую» (рис. 111, а) и «мягкую» (рис. 111, б) системы. Такие свойства указанных материалов, очевидно, не могут быть учтены в линейной теории, а между тем, именно эти свойства имеют иногда существенное значение, например, в расчетах резонансных колебаний и динамической прочности. Частоты колебаний деталей некоторых устройств, включающих элементы из таких материалов, зависят от амплитуды колебаний; в одних случаях они растут с увеличением амплитуд («жесткие» системы), в других, наоборот, убывают («мягкие» системы).

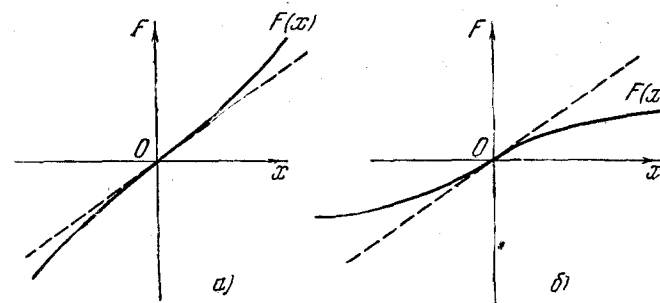


Рис. 111.

Включение в колеблющиеся системы таких «нелинейных элементов» может иногда в значительной степени ослабить последствия резонанса. Увеличение амплитуды вызовет изменение частоты, а это повлечет за собой автоматический выход системы из условий резонанса.

Замечательным примером системы, линеаризация которой ограничивает возможности обнаружения ее важнейших колебательных свойств, могут служить обыкновенные часы с маятником, приводимые в движение, например, падающим грузом. Линейная трактовка колебаний маятника предполагает, что отклонения маятника от вертикального положения равновесия весьма малы. Такие малые колебания маятник будет совершать, если ему сообщить достаточно малое начальное возмущение (отклонение). Но, как легко проверить, при малом начальном возмущении маятник, предоставленный затем самому себе, будет совершать затухающие колебания с быстро убывающими амплитудами, пока не остановится в вертикальном положении. Часы от такого малого начального возмущения «не пойдут», так как источник пополнения расходуемой маятником энергии (падающий груз) при таких колебаниях не включается. Таким образом, линеаризация

системы. — часы с маятником — не дает возможности обнаружить в ней те свойства, которые являются наиболее характерными для часов, как инструмента для измерения времени. Эти свойства проявляются только при достаточно большом начальном возмущении и при колебаниях с конечной амплитудой. Когда маятник получит возмущение, большее некоторого предела, то в дальнейшем своем движении он ведет себя резко отлично от привычного в линейной теории поведения систем с сопротивлением. Амплитуды колебаний маятника начинают расти или убывать, приближаясь в том и другом случае к одному предельному стационарному значению, достигнув которого они дальше не изменяются, так что маятник совершает устойчивые изохронные колебания, обеспечивая тем самым более или менее точный отсчет времени. Открыть существование такого устойчивого периодического движения в системе с сопротивлением, оставаясь в пределах линейной теории, описать средствами последней свойства этого движения мы, конечно, не можем. Линейная трактовка задачи о колебаниях маятника часов связана с отказом от исследования наиболее важных с практической точки зрения колебательных свойств системы, наиболее характерных для ее назначения и использования.

Можно было бы привести и другие примеры, где линейная трактовка задачи о колебаниях не только не дает возможности открыть многие важные колебательные свойства системы, но и заметно искажает даже обнаруживаемые ею свойства. Класс нелинейных систем бесконечно шире и многообразнее узкой области искусственно построенных линейных систем и была бы безнадежной попытка перечисления всех неучитываемых линейной теорией их особенностей. Но некоторые общие свойства нелинейных систем, связанные с определением задач дальнейшего их исследования, можно отметить сейчас же, в предварительной характеристике их отличий от линейных. К таким свойствам относятся следующие.

а) К нелинейным системам неприменим принцип линейного наложения. Линейная суперпозиция двух или нескольких колебательных движений нелинейной системы не будет колебанием последней. Иначе говоря, из найденных независимых частных решений дифференциальных уравнений нелинейной системы нельзя составить общего решения, подобно тому, как составляется общее решение системы линейных уравнений. Если действующая на систему сила разложена в ряд Фурье, то действие ее на нелинейную систему не будет равно линейной сумме действий каждого отдельного гармонического слагаемого этого ряда.

б) Свободные колебания линейных систем — всегда затухающие. Это одно из основных свойств линейных колебаний: в реальных условиях действие на линейную систему сопротивлений выражается в убывании отклонений системы от равновесного положения, которое, таким образом, оказывается единственным стационарным состоянием

такой системы. Строго периодические колебания в линейных системах возможны только в форме так называемых вынужденных колебаний, возникающих от действия внешних возмущающих периодических сил. В нелинейных системах и при наличии сопротивления возможны строго периодические устойчивые свободные колебания. Потери энергии в некоторых нелинейных системах могут иногда автоматически компенсироваться поступлениями ее из неколебательного источника, дозировка которых во времени и по величине регулируется самой колеблющейся системой. Это имеет место в рассмотренном выше примере с колебаниями маятника часов и в других так называемых *автоколебательных* системах.

в) В линейных системах вынужденные колебания от гармонической возмущающей силы происходят с частотой или периодом последней. В нелинейных системах вынужденные колебания от гармонической возмущающей силы могут происходить не только с периодом возмущающей силы, но и с периодами, равными целым кратным последнего. В связи с этим в данной нелинейной системе с одной степенью свободы, на которую действует только одна гармоническая возмущающая сила, возможны несколько резонансных режимов.

г) В линейных системах собственные частоты не зависят от начальных условий, и, в частности, от амплитуды. Изменить частоту линейных колебаний можно только путем существенных изменений конструкции системы, распределения в ней масс и жесткостей. В нелинейных системах частота большей частью зависит от амплитуды колебаний. Эта зависимость имеет место главным образом в нелинейных консервативных системах: такие системы обладают целым континуумом периодических колебательных движений с непрерывно изменяющейся частотой, получаемых от непрерывного изменения начальных условий.

2. Метод изоклин. В дальнейшем изложении теории нелинейных колебаний мы ограничимся главным образом системами с одной степенью свободы, наметив в общих чертах некоторые методы общей теории нелинейных систем со многими степенями свободы. В частности, в этой главе мы будем заниматься простейшими нелинейными системами с одной степенью свободы, объединив их изучение одним общим *методом фазовой плоскости* или *методом изоклин*. Это — один из графических методов интегрирования системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y).\end{aligned}$$

Как мы знаем, эти уравнения определяют стационарное *поле направлений*, относя каждой точке этого поля направление касательной

к проходящей через нее фазовой траектории. Линии, проходящие через точки с одинаковым наклоном касательных, называются *изоклинами*. Уравнение изоклин для фазовых траекторий рассматриваемого типа будет

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \text{const} = k.$$

Задав ряд значений k , достаточно близких друг к другу, получим семейство изоклин, с помощью которых можно, если не построить

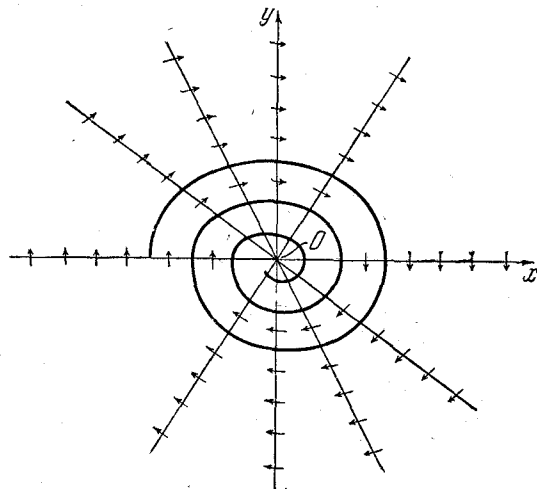


Рис. 112.

точно фазовые траектории, то во всяком случае приближенно представить общий характер их расположения, чего иногда достаточно для качественного решения нелинейной задачи. На рис. 112 построено поле направлений для уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2ny - k^2x,$$

т. е. для затухающего линейного осциллятора

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0.$$

Из этого рисунка можно сразу усмотреть, что фазовые траектории имеют характер спиралей, асимптотически сходящихся к началу O , которое является, таким образом, особой точкой типа фокуса.

3. Нелинейные консервативные системы с одной степенью свободы. Нелинейные консервативные системы представляют частный случай класса систем А. М. Ляпунова и их исследование входит в состав общих методов, построенных для систем Ляпунова. Но случай консервативной системы с одной степенью свободы допускает наглядную и важную по своим практическим приложениям геометрическую интерпретацию, и поэтому независимо от общей теории ляпуновских систем предварительное рассмотрение этого частного случая имеет значение, во-первых, как элементарное введение в теорию нелинейных колебаний вообще, во-вторых, как простой способ ознакомления с основами качественной теории нелинейных систем — с *методом фазовой плоскости*.

Уравнение нелинейной консервативной системы может быть приведено к виду

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (12.1)$$

в котором $f(x)$ можно рассматривать как отнесенную к единице массы восстанавливающую силу. Мы будем предполагать, что функция $f(x)$ разлагается в ряд по степеням x , как, например, это имеет место в уравнении колебаний математического маятника

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} \sin x = 0,$$

где роль $f(x)$ играет функция $\frac{g}{l} \sin x$, разлагающаяся в ряд

$$\frac{g}{l} \sin x = \frac{g}{l} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right).$$

В простейших задачах $f(x)$ — полином от x невысокой степени, причем, будучи выражением восстанавливающей силы, он меняет знак при перемене знака x .

Уравнение (12.1) интегрируется в квадратурах. В частности, оно имеет первый интеграл

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^x f(x) dx = h$$

— интеграл сохранения энергии, который мы, положив

$$\Pi(x) = \int_0^x f(x) dx,$$

будем писать следующим образом:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \Pi(x) = h. \quad (12.2)$$

Постоянная h определяется начальным отклонением и начальной скоростью, т. е. начальным запасом полной энергии.

На фазовой плоскости уравнению (12.1) будут соответствовать два уравнения движения изображающей точки:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -f(x). \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

При этом первый интеграл (12.2) обращается в конечное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{y^2}{2} + \Pi(x) = h. \quad (12.4)$$

Этим уравнением решаются полностью все вопросы о движении рассматриваемой нелинейной системы, и, в частности, вопрос о периодических решениях, их существовании и устойчивости. Тем не менее мы проведем исследование движений, определяемых уравнениями (12.1), (12.3) и (12.4), еще и методом фазовой плоскости по соображениям, изложенным выше.

Большей частью функция $f(x)$ — нелинейная характеристика жесткости — задается графически. В этом случае и функция $\Pi(x)$ находится графическим интегрированием. Кривую

$$z = \Pi(x),$$

изображающую зависимость потенциальной энергии от отклонения x , мы будем называть *кривой энергетического баланса*. В дальнейшем эта кривая строится на той же фазовой плоскости, где расположены и фазовые траектории, в системе координат (z, x) , ось z которой совпадает с осью y фазовой плоскости, а ось x параллельна оси Ox фазовой плоскости. С помощью кривой энергетического баланса легко могут быть построены фазовые траектории рассматриваемой системы. Переходя к описанию таких построений, отметим сначала некоторые общие свойства этих траекторий, вытекающие из уравнений (12.3) и (12.4).

1) Уравнение (12.4) не меняется при изменении знака y . Следовательно, фазовые траектории системы (12.3) симметричны относительно оси Ox .

2) Точки оси Ox , в которых одновременно

$$y = 0 \text{ и } f(x) = 0,$$

т. е. точки оси Ox с абсциссами, равными корням уравнения

$$f(x) = 0,$$

соответствуют равновесным состояниям системы, так как в этих точках

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Эти точки обладают, кроме того, еще и следующими свойствами. В них

$$\Pi'(x) = 0,$$

т. е. потенциальная энергия имеет стационарное значение, в частности, достигает минимального или максимального значения, что, как известно, определяет характер устойчивости соответствующего равновесного состояния. Наконец, эти точки являются особыми точками фазовых траекторий, так как в этих точках угловой коэффициент

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{y},$$

касательной к проходящей через эту точку траектории, становится неопределенным.

3) В обыкновенных точках пересечения фазовых траекторий с осью Ox касательные к фазовым траекториям перпендикулярны к оси Ox , так как здесь при $f(x) \neq 0$ равняется нулю y и, следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \infty.$$

Сообщив системе некоторое начальное возмущение с начальным запасом полной энергии h , строим в системе (z, x) кривую энергетического баланса

$$z = \Pi(x)$$

и прямую

$$z = h.$$

Разность

$$h - \Pi(x)$$

определяет значения ординат фазовой траектории по формуле

$$\frac{y}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{h - \Pi(x)}. \quad (12.5)$$

Эти ординаты вещественны на участках, где

$$h - \Pi(x) \geq 0.$$

На участках, где

$$h - \Pi(x) < 0,$$

фазовые траектории отсутствуют. Для упрощения построений мы будем откладывать на фазовой плоскости ординаты фазовых траекторий, уменьшенные в $\sqrt{2}$ раз, что не скажется на форме кривых, а только отразится на масштабе их размеров по вертикали.

Рассмотрим вид фазовых траекторий, соответствующих отдельным участкам кривой энергетического баланса.

а) Участок кривой энергетического баланса, где кривая $z = \Pi(x)$ пересекает прямую

$$z = h$$

(рис. 113).

Соответствующий этому участку отрезок фазовой траектории пересекает ось Ox в обыкновенной¹⁾ точке A , где касательная к фазовой траектории перпендикулярна к оси Ox . Справа от A нет вещественных ветвей фазовой траектории, так как здесь

$$h - \Pi(x) < 0.$$

Движение изображающей точки по фазовой траектории направлено в верхней полуплоскости слева направо, так как здесь $y = \frac{dx}{dt} > 0$, а в нижней — справа налево, так как когда $y < 0$, то и $\frac{dx}{dt} < 0$. При небольшом изменении значения h общий характер фазовых траекторий не изменяется, т. е. качественная картина остается прежней (см. пунктирные линии на фазовой плоскости (x, y) для $z = h_1$ и $z = h_2$).

б) Участок кривой энергетического баланса с одним изолированным минимумом (рис. 114).

Пусть этот минимум равен h_0 . Если начальное значение полной энергии тоже h_0 , то фазовая траектория, соответствующая этому ми-

нимуму, вырождается в особую точку A на оси Ox , изображающую равновесное состояние системы, так как здесь $y = 0$ и $\Pi'(x) = f(x) = 0$. Фазовые траектории при h , большем h_0 , но достаточно близком к h_0 , представляют замкнутые кривые, окружающие точку A . Точка A является особой точкой типа центра, изображающей устойчивое равновесное состояние системы.

в) Участок кривой энергетического баланса с одним изолированным максимумом.

Максимуму $\Pi(x)$, равному h_0 , соответствуют, как видно из рис. 115, четыре ветви фазовой траектории (так называемые «усы»), сходящиеся в точке A : ветви I, II и симметричные им III и IV. Вблизи точки A «усы» делят фазовую плоскость на четыре участка. При значениях $h > h_0$ фазовые траектории располагаются в верхнем и нижнем участках. При $h < h_0$ фазовые траектории располагаются в левом и правом участках. Попав на одну из таких траекторий (кроме «усов» I и IV) изображающая точка с течением времени удаляется от A . Особая точка с таким расположением около нее фазовых траекторий называется, как мы знаем, «седлом». Ей соответствует неустойчивое равновесное состояние¹⁾.

Попав на «усы» I и IV, изображающая точка приближается к A .

Это, однако, не противоречит утверждению, что точка A изображает неустойчивое равновесное состояние. Во-первых, мы не можем в данном случае указать область около A , попав в которую, изображающая точка не выйдет в дальнейшем возмущенном движении за ее пределы. Вероятность следования по «усам» I и IV (т. е. задания начальных условий, точно соответствующих положению точки на «усах») бесконечно мала²⁾. Во-вторых, попав в начальный момент на один из «усов» I и IV изображающая точка никогда не достигла бы A , так как на это потребовался бы бесконечный промежуток времени. Спра-

¹⁾ Изложенное рассуждение является элементарным доказательством обратной теоремы о неустойчивости положения равновесия консервативной системы, когда в этом положении потенциальная энергия имеет изолированный максимум.

²⁾ Движение по «усам» неустойчиво и физически не осуществляется.

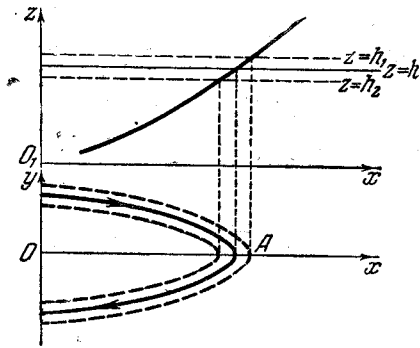


Рис. 113.

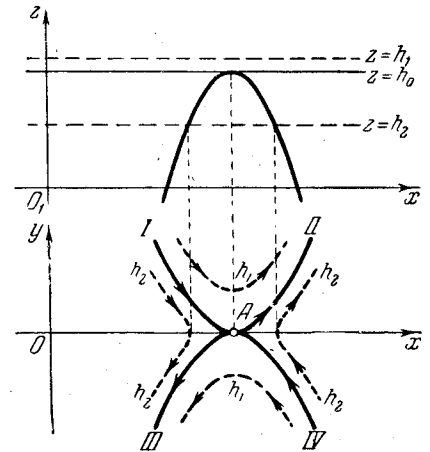


Рис. 115.

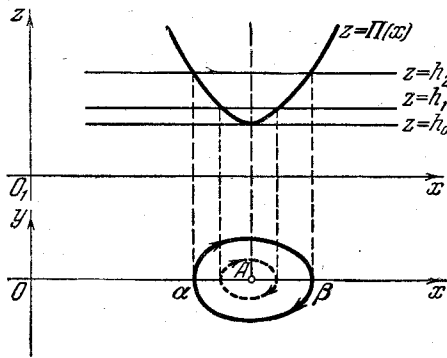


Рис. 114.

¹⁾ Так как в этой точке $\Pi'(x) = -f(x) \neq 0$.

ведливость этого утверждения мы покажем ниже на примере колебаний маятника.

г) Убегающие траектории.

Если прямая

$$z = h$$

нигде не пересекает кривую энергетического баланса

$$z = \Pi(x)$$

и нигде ее не касается и если при этом прямая $z = h$ лежит ниже кривой $z = \Pi(x)$, то движение системы не осуществляется. Если

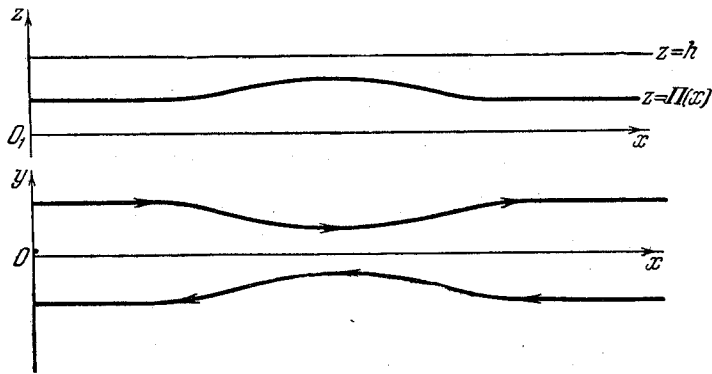


Рис. 116.

кривая $z = \Pi(x)$ лежит всеми своими точками ниже прямой $z = h$, то фазовая траектория будет состоять из двух симметричных относительно оси Ox ветвей, уходящих в обе стороны в бесконечность (рис. 116). Изображающая точка будет двигаться по такой траектории, не останавливаясь, в одном направлении до бесконечности. Такое движение изображающей точки называется *убегающим движением*, а соответствующие фазовые траектории — *убегающими траекториями*.

д) Фазовые траектории на всей фазовой плоскости.

Рассмотрим сначала случай, когда прямая $z = h_0$ пересекает в нескольких точках кривую $z = \Pi(x)$, нигде не касаясь ее (рис. 117). Для тех значений x , для которых $\Pi(x) > h_0$, фазовые траектории отсутствуют (участки ab и cd). На остальных участках фазовые траектории или замкнутые кривые (участки bc и de), изображающие возможные в системе периодические движения, или убегающие в одну

сторону траектории типа рис. 113 (у точки A на рис. 117). Для значений h , близких к h_0 , характер расположения фазовых траекторий существенно не меняется.

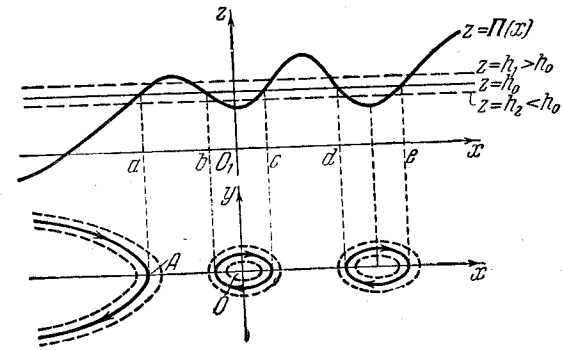


Рис. 117.

Предположим теперь, что прямая $z = h_0$ пересекает и в некоторых точках касается кривой $z = \Pi(x)$ (рис. 118).

Фазовыми траекториями в одном случае будут изолированные точки, соответствующие изолированным минимумам функции $\Pi(x)$, изображающие устойчивые равновесные состояния системы (точка A).

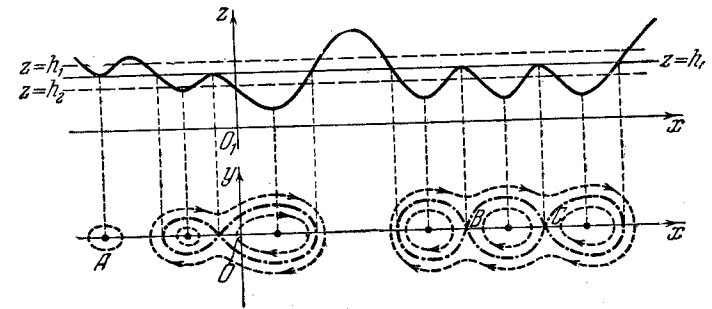


Рис. 118.

При увеличении h вокруг такой точки, как A , образуются замкнутые траектории, изображающие периодические движения системы.

В другом случае на изолированных конечных участках будут замкнутые фазовые траектории, соответствующие периодическим движениям, либо замкнутые кривые особого типа — кривые с самопересечением (в точках B и C) — так называемые *сепаратрисы*. Точки

самопересечения соответствуют изолированным максимумам потенциальной энергии и являются особыми точками типа «седла», изображающими неустойчивые равновесные состояния. Сепаратрисы разделяют области фазовой плоскости с фазовыми траекториями различного типа. Сами по себе они не являются кривыми, изображающими реальные движения. Последние всегда отклоняются от сепаратрис или в сторону замкнутых траекторий, заключенных в звеньях сепаратрисы, или же наружу в сторону убегающих траекторий или замкнутых траекторий, охватывающих сразу несколько смежных звеньев сепаратрисы. Они являются лишь граничными кривыми, разделяющими указанные два вида траекторий. Потому им и присвоено название сепаратрис, т. е. «разделяющих».

Как видно из рис. 118, особые точки типа центра и седла чередуются на оси абсцисс. Это чередование является простым следствием чередования максимумов и минимумов функций $\Pi(x)$. Далее, внутри замкнутой фазовой траектории всегда находится нечетное число особых точек, причем число центров на единицу больше числа седел. Пусть, например, на фазовой плоскости имеется одна замкнутая траектория, пересекающая ось Ox в точках α и β . В этих точках функция $h - \Pi(x)$ обращается в нуль. Следовательно, между α и β лежит по крайней мере одна точка (или нечетное число таких точек), в которой обращается в нуль $\Pi'(x)$. Из геометрических соображений ясно, что если внутри замкнутой кривой таких точек одна, то она обязательно будет «центром», соответствующим изолированному минимуму потенциальной энергии.

4. Периодические движения нелинейных консервативных систем. Замкнутые фазовые траектории, изображающие периодические движения или «нелинейные колебания» консервативных систем, образуют на фазовой плоскости целые континуумы, заполняющие конечные участки, причем одна замкнутая фазовая траектория охватывает другую, не пересекая ее (траектории как бы вложены одна в другую). Поэтому, если в консервативной системе возможно одно периодическое движение, то их может быть в ней бесконечное множество и все они могут быть получены непрерывным изменением начальных условий в пределах некоторой ограниченной области. Амплитуды и периоды нелинейных колебаний консервативных систем зависят от начальных условий (начального h_0). Период колебаний системы можно вычислить следующим образом. Из уравнения

$$\frac{dx}{dt} = y$$

находим

$$dt = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{2[h - \Pi(x)]}}$$

Если абсциссы точек пересечения замкнутой фазовой траектории с осью Ox обозначить через α и β (рис. 114), то для периода T полного колебания найдем выражение

$$T = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{2[h - \Pi(x)]}}. \quad (12.6)$$

Следует отметить, что малые свободные колебания консервативной линейной системы на фазовой плоскости изображаются также континуумом замкнутых траекторий, окружающих точку устойчивого равновесного положения системы. Амплитуды колебаний линейных систем, так же как и нелинейных консервативных, зависят от начальных условий, но период колебаний линейной системы есть постоянная, не зависящая от начальных условий и от начального запаса энергии системы, в чем можно убедиться, подставив в общую формулу (12.6) соответствующие значения $\Pi(x)$ и h .

Так как период колебаний нелинейной консервативной системы, изображаемых на фазовой плоскости замкнутыми траекториями, не один и тот же, а зависит от начальных условий, то две изображающие точки, начавшие свои движения, например от оси Oy , одновременно по двум близким траекториям, с течением времени отойдут одна от другой на конечное расстояние. Вследствие этого периодические движения консервативных систем нельзя, строго говоря, считать устойчивыми по Ляпунову. Но они обладают так называемой *орбитальной устойчивостью*, выражающейся в том, что при весьма малом изменении начальных условий возмущенное периодическое движение изображающей точки переходит на другую траекторию, сколь угодно близкую к первоначальной (невозмущенной).

Пример 1. Колебания математического маятника с конечной амплитудой.

Обозначив через l длину маятника и через θ — угол отклонения от вертикали, из закона изменения момента количества движения получим уравнение

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

Уравнения движения изображающей точки на фазовой плоскости Oxy будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{g}{l} \sin x, \end{aligned}$$

где $x = \theta$, $y = \dot{\theta}$. Эти уравнения имеют первый интеграл

$$\frac{y^2}{2} - \frac{g}{l} \cos x = h$$

или

$$\frac{y^2}{2} = \frac{g}{l} (\cos x - \cos x_0), \quad (12.7)$$

где x_0 — начальное отклонение маятника от вертикали. Функция $\Pi(x)$ и постоянная h здесь равны

$$\Pi(x) = -\frac{g}{l} \cos x, \quad h = -\frac{g}{l} \cos x_0.$$

Уравнение фазовых траекторий, представленное интегралом (12.7), можно преобразовать к такому:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{2g}{l} \left(\sin^2 \frac{x_0}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right). \quad (12.8)$$

Период полного колебания T мы получим из формулы (12.6), положив в ней

$$h = -\frac{g}{l} \cos x_0, \quad \Pi(x) = -\frac{g}{l} \cos x, \quad \alpha = -x_0, \quad \beta = x_0.$$

Так как подынтегральная функция четная, то

$$T = 2 \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{g}{l} \left(\sin^2 \frac{x_0}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right)}}. \quad (12.9)$$

Это — эллиптический интеграл, который подстановкой

$$\sin \frac{x}{2} = u \sin \frac{x_0}{2} = ku$$

может быть приведен к стандартной форме

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

В линейной теории колебаний маятника, приняв

$$\sin^2 \frac{x_0}{2} \approx \frac{x_0^2}{4}, \quad \sin^2 \frac{x}{2} \approx \frac{x^2}{4},$$

мы получаем из (12.9) общеизвестное выражение для периода

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Период линейных колебаний не зависит от x_0 , т. е. от амплитуды колебаний (или начальных условий). В нелинейной теории период существенным образом зависит от амплитуды. Эту зависимость можно выразить явно, заменив в выражении (12.9) эллиптический интеграл его известным разложением по степеням k

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right]$$

или

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{x_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{x_0}{2} + \dots \right]. \quad (12.10)$$

Ограничившись в этом разложении двумя первыми членами и положив

$$\sin^2 \frac{x_0}{2} \approx \frac{x_0^2}{4},$$

получим уточненную приближенную формулу для периода

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{x_0^2}{16} \right).$$

Эффект этого уточнения не очень велик. Если $x_0 = 30^\circ$, то из последней формулы находим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + 0,014) = 1,014T_0.$$

Чтобы получить фазовую картину (рис. 119) колебаний маятника, строим, согласно общей теории, на плоскости (z, x) кривую энергетического баланса

$$z = -\frac{g}{l} \cos x.$$

Это будет косинусоида с изолированными минимумами в точках

$$x = 0, \quad \pm 2\pi, \quad \pm 4\pi, \dots$$

и максимумами в точках

$$x = \pm \pi, \quad \pm 3\pi, \dots$$

Начальный запас полной энергии определяется начальным отклонением и равен

$$h_0 = -\frac{g}{l} \cos x_0.$$

Когда $0 < |x_0| < \pi$ и, следовательно, $|\cos x_0| < 1$ и $|h_0| < \frac{g}{l}$, то маятник совершает периодические колебания, изображаемые замкнутыми кривыми

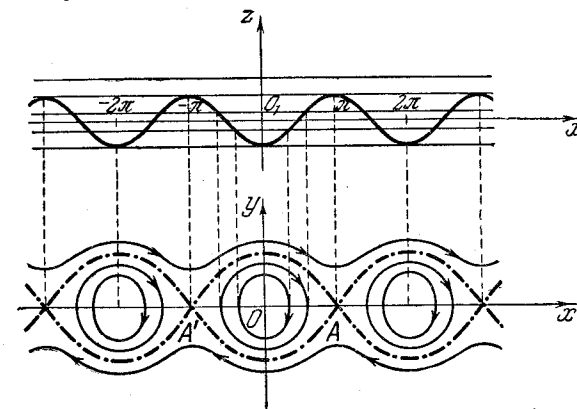


Рис. 119.

внутри звеньев сепаратрисы. Эти кривые окружают особые точки, соответствующие устойчивым равновесным положениям маятника. Замкнутыми кривыми, расположенными внутри участка $(-\pi, +\pi)$, определяется полная

фазовая картина движения маятника; другие звенья просто повторяют это изображение, так как значениям $x=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ и т. д. соответствует одно и то же устойчивое равновесное положение маятника.

Когда $h_0 > \frac{g}{l}$, что может иметь место только, если в начальный момент маятнику вместе с отклонением x_0 сообщается достаточно большая начальная скорость y_0 , т. е. если

$$h_0 = -\frac{g}{l} \cos x_0 + \frac{y_0^2}{2},$$

то разность

$$h_0 - \Pi(x) = \frac{y^2}{2}$$

будет больше нуля при условии

$$\frac{y_0^2}{2} > \frac{g}{l} (1 + \cos x_0).$$

Соответствующие этому случаю фазовые траектории не будут пересекать ось Ox ; это будут убегающие траектории. Маятник будет вращаться вокруг оси подвеса в вертикальной плоскости все время в одну и ту же сторону.

Когда $h_0 = \frac{g}{l}$, $x_0 = \pm \pi, \pm 3\pi$

$$h_0 - \Pi(x) = \frac{g}{l} (1 + \cos x),$$

то на фазовой плоскости получается сепаратриса $A'A$. Как было указано раньше, движение изображающей точки по сепаратрисе практически неосуществимо, хотя теоретически возможно. Попав в силу специально подобранных начальных условий на сепаратрису, изображающая точка будет двигаться по ней к неустойчивому равновесному положению, но никогда не достигнет этого положения, так как для этого потребуется бесконечный промежуток времени. В самом деле, предположим, что маятник, находившийся в покое в устойчивом равновесном положении ($x=0$), получает начальную скорость, достаточную для достижения вертикального неустойчивого положения равновесия ($x=\pi$). Время, которое потребуется для этого, равно четверти периода, мы найдем по формуле, аналогичной (12.9)

$$t \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 \frac{x_0}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}},$$

где теперь $x_0 = \pi$ и

$$\sin^2 \frac{x_0}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1.$$

Следовательно,

$$t \sqrt{\frac{g}{l}} = \int_0^{\pi} \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos \frac{x}{2}} = 2 \lim_{x \rightarrow \pi} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Из последнего соотношения видно, что при приближении x к π , t растет безгранично. Маятник, получив надлежащую начальную скорость, будет приближаться к неустойчивому равновесному положению, но никогда его не достигнет.

Пример 2. Тяжелая точка движется по окружности, расположенной в вертикальной плоскости и вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикального диаметра (рис. 120). Такое движение точки можно трактовать как колебания математического маятника, ось подвеса которого вращается вокруг вертикальной оси со скоростью ω .

Относительное движение точки по вращающейся окружности можно рассматривать как абсолютное, если добавить к заданной силе — весу точки mg — силы инерции. Силы инерции являются переносная центробежная сила инерции $F = m\omega^2 \xi$, где ξ — расстояние точки от оси вращения $O\eta$ и кориолисова сила инерции, которая не влияет на движение точки по окружности, так как направлена перпендикулярно к плоскости окружности; она дает добавочную реакцию, которая нас сейчас не интересует.

За обобщенную координату примем угол θ (рис. 124). Координаты движущейся точки будут

$$\begin{aligned} \xi &= a \sin \theta, \\ \eta &= a (1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

Массу точки положим равной единице ($m=1$). Тогда ее кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) = \frac{a^2 \dot{\theta}^2}{2}.$$

Потенциальная энергия Π равна работе сил, приложенных к точке, на перемещении из положения θ в нулевое, за которое мы примем положение точки в нижнем конце вертикального диаметра. Тогда

$$\Pi = g\eta - \frac{\xi^2 \omega^2}{2} = ga(1 - \cos \theta) - \frac{a^2 \omega^2}{2} \sin^2 \theta.$$

Уравнение движения точки, составленное по схеме уравнений Лагранжа, будет иметь вид

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta (\cos \theta - \lambda), \quad (12.11)$$

где

$$\lambda = \frac{g}{a\omega^2}, \quad (12.12)$$

а уравнения движения изображающей точки на фазовой плоскости

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= \omega^2 \sin x (\cos x - \lambda), \end{aligned} \right\} \quad (12.13)$$

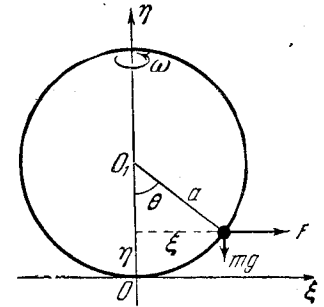


Рис. 120.

где $x = \theta$, $y = \dot{\theta}$. Дифференциальное уравнение фазовых траекторий получим, разделив второе уравнение (12.13) на первое

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 \sin x (\cos x - \lambda)}{y}. \quad (12.14)$$

Из последнего уравнения легко получается первый интеграл системы (12.13)

$$y^2 + \frac{\omega^2}{2} [\cos 2x - 4\lambda \cos x] = h. \quad (12.15)$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$\lambda > 1,$$

например, $\lambda = 1,5$. Это случай «малой» угловой скорости

$$\omega < \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Особыми точками, изображающими равновесные состояния, в этом случае будут точки на оси Ox с абсциссами, удовлетворяющими уравнению

$$\sin x (\cos x - \lambda) = 0$$

или уравнению

$$\sin x = 0,$$

так как $\cos x \neq \lambda$. Абсциссы таких точек

$$x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$$

Им будут соответствовать изолированные минимумы и максимумы функции

$$\Pi(x) = \frac{\omega^2}{2} (\cos 2x - 4\lambda \cos x),$$

производная которой

$$\Pi'(x) = -2\omega^2 \sin x (\cos x - 1,5)$$

в этих точках обращается в нуль.

Переходим к построению фазовых траекторий изображающей систему точки. Кривая энергетического баланса

$$z = \Pi(x) = \frac{\omega^2}{2} (\cos 2x - 6 \cos x)$$

складывается из двух наложенных одна на другую косинусоид I и II (рис. 121):

$$z_1 = -3\omega^2 \cos x,$$

$$z_2 = \frac{\omega^2}{2} \cos 2x.$$

Построив эти косинусоиды и сложив их ординаты, мы получим кривую

$$z = \Pi(x),$$

представленную на рисунке 121 жирной линией.

В точках $x = 0, \pm 2\pi, \dots$ кривая энергетического баланса имеет изолированные минимумы, которым соответствуют устойчивые равновесные положения. В точках $x = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots$ расположатся изображения неустойчивых

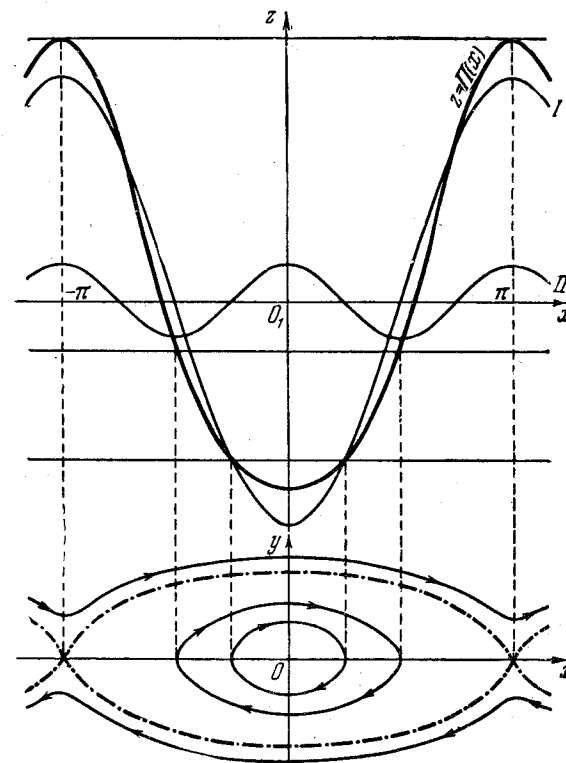


Рис. 121.

равновесных положений¹⁾. В общем картина расположения фазовых траекторий с качественной стороны не будет отличаться от построенной в примере 1 для колебаний маятника в вертикальной (неподвижной) плоскости и дальнейшее обсуждение поведения изображающей точки ничего нового не прибавит к изложенному в примере 1.

¹⁾ Фактически в данном случае существуют два положения равновесия — одно устойчивое ($x = 0$) и одно неустойчивое ($x = \pi$). Остальные повторяют эти два.

Новые явления обнаруживаются в случае, когда $\lambda < 1$. Предположим для определенности, что $\lambda = 0,5$. Из уравнения фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 \sin x (\cos x - 0,5)}{y}$$

находим первый интеграл

$$y^2 + \frac{\omega^2}{2} (\cos 2x - 2 \cos x) = h \quad (12.16)$$

и уравнения

$$\sin x = 0, \quad \cos x = 0,5,$$

корни которых

$$x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots, \pm \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \dots$$

определяют абсциссы особых точек, расположенных на оси x .

Кривую энергетического баланса

$$z = \Pi(x) = \frac{\omega^2}{2} (\cos 2x - 2 \cos x)$$

строим, складывая соответственные ординаты двух косинусоид (кривые I и II на рис. 122):

$$\begin{aligned} z_1 &= -\omega^2 \cos x, \\ z_2 &= \frac{\omega^2}{2} \cos 2x. \end{aligned}$$

В отличие от предыдущего случая здесь кривая энергетического баланса в промежутке от $-\pi$ до $+\pi$ имеет два изолированных минимума и один максимум. Минимумы соответствуют точкам с абсциссами $-\frac{\pi}{3}$ и $+\frac{\pi}{3}$; максимум — точке $x=0$. Точки $-\frac{\pi}{3}$ и $+\frac{\pi}{3}$ являются особыми точками типа центра. На вращающейся окружности этим точкам соответствуют два устойчивых равновесных положения $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$. Будучи выведена из этих положений, точка совершает около них периодические колебания, которые изображаются на фазовой плоскости замкнутыми траекториями, окружающими центры, соответствующие $x = \pm \frac{\pi}{3}$. Особой точке $x=0$ соответствует изолированный максимум: это особая точка типа «седла», изображающая неустойчивое равновесное состояние в нижнем конце вертикального диаметра. В первом случае ($\lambda > 1$) здесь было единственное устойчивое равновесное положение системы.

Значение $h = -\frac{\omega^2}{2}$ является «критическим». Этому значению на фазовой плоскости соответствует первая сепаратриса с уравнением

$$y^2 + \frac{\omega^2}{2} (\cos 2x - 2 \cos x) = -\frac{\omega^2}{2}.$$

Для значений h в промежутке

$$-\frac{\omega^2}{2} < h < \frac{3\omega^2}{2}$$

на фазовой плоскости снова появляются замкнутые траектории. Они изображают колебания точки на окружности, в которых точка движется со столь большой скоростью, что свободно проходит через два устойчивых положения

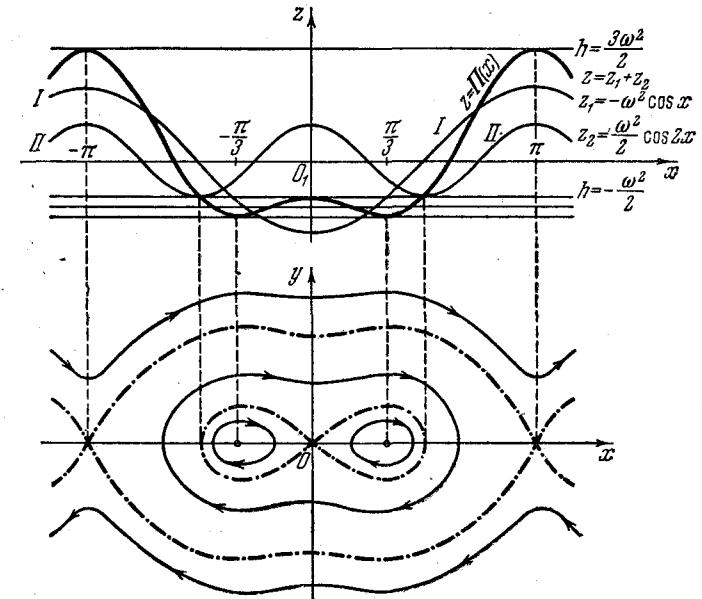


Рис. 122.

равновесия $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$, совершая колебания большой амплитуды около среднего положения $x=0$.

Значение

$$h = +\frac{3\omega^2}{2}$$

снова «критическое». Ему соответствует вторая сепаратриса с бесконечным числом звеньев и с точками самопересечения, абсциссы которых равны

$$x = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots$$

Это — особые точки типа седла, изображающие неустойчивые положения равновесия в верхнем конце вертикального диаметра.

Когда

$$h > \frac{3\omega^2}{2},$$

то точка описывает окружность, нигде не останавливаясь и не совершая при этом никаких колебаний. На фазовой плоскости такое движение изображается «убегающими» траекториями, охватывающими сверху и снизу все особые точки и сепаратрисы.

5. Формулы прямой линеаризации¹⁾. Решение уравнения (12.1)

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + f(x) &= 0, \\ f(-x) &= -f(x) \end{aligned} \right\}$$

при начальных условиях $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$ можно получить с достаточной для практических приложений точностью, заменив, это уравнение линейным

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

где k^2 — некоторое среднее взвешенное жесткости $f'(x)$ на интервале $(0, A)$:

$$k^2 = \frac{\int_0^A f'(x) p(x) dx}{\int_0^A p(x) dx}. \quad (12.17)$$

Удачным подбором весовой функции $p(x)$ можно иногда обеспечить довольно большую точность в определении частоты колебаний нелинейной системы (12.1) при постоянной амплитуде A . По крайней мере все предложенные для прямой линеаризации формулы могут быть получены из формулы (12.17) при надлежащем образом выбранной функции $p(x)$.

Положив в формуле (12.17) $p(x) = 1$, получим формулу Н. К. Куликова²⁾

$$k^2 = \frac{f(A)}{A}.$$

Графически это означает замену кривой $y = f(x)$ хордой

$$y = \frac{f(A)}{A} x.$$

Положив

$$p(x) = 1 - \frac{x^4}{A^4},$$

получим формулу Я. Г. Пановко³⁾

$$k^2 = \frac{5}{A^5} \int_0^A x^3 f(x) dx.$$

Эта формула найдена Я. Г. Пановко путем замены кривой $y = f(x)$ прямой $y = k^2 x$ при условии обращения в минимум интеграла

$$\int_0^A [f(x) - k^2 x]^2 x^2 dx.$$

¹⁾ Ланцевичский И. Л., Об одном методе прямой линеаризации нелинейной системы с помощью разрывной весовой функции, Изв. вузов СССР, № 12, 1963.

²⁾ Куликов Н. К., Приближенное определение периода свободных колебаний нелинейной системы с одной степенью свободы. Инженерный сборник, т. XIII, 1952, стр. 187.

³⁾ Пановко Я. Г., Способ прямой линеаризации в нелинейных задачах теории упругих колебаний, Инженерный сборник, т. XIII, 1952, стр. 113.

Если в формуле (12.17) положить

$$p(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}},$$

то получится результат, аналогичный формуле Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова⁴⁾:

$$k^2 = \frac{4}{\pi A} \int_0^A f(A \sin x) \sin x dx.$$

Наконец, полагая

$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{A}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{A}{2} < x < A, \end{cases}$$

приходим к формуле Я. З. Цыпкина⁵⁾

$$k^2 = \frac{2}{3A} \left[f\left(\frac{A}{2}\right) + f(A) \right].$$

Формула Я. З. Цыпкина дает, как правило, более точный результат, чем все другие приведенные выше формулы³⁾. В этом можно убедиться, если, следуя А. Д. Мышкису⁴⁾, сравнить разложения периода колебаний, определяемого приведенными формулами, по степеням отклонения A с точным решением уравнения (12.1).

Так, для маятника, совершающего свободные колебания, согласно уравнению

$$\ddot{x} + \sin x = 0,$$

при начальных условиях

$$x(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{x}(0) = 0$$

так называемое «точное» значение частоты $k^2 = 0,847$.

По формуле Куликова

$$k^2 = 0,917 (+ 8,25\%);$$

по формуле Пановко

$$k^2 = 0,856 (+ 1,06\%);$$

по формуле Цыпкина

$$k^2 = 0,851 (+ 0,47\%).$$

¹⁾ Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику, Изд. АН УССР, 1937.

²⁾ Цыпкин Я. З., Автоматика и телемеханика, 1956, № 4.

³⁾ При разрывах жесткости $f'(x)$ точность ухудшается.

⁴⁾ Мышкис А. Д., О точности приближенных методов анализа малых нелинейных свободных колебаний с одной степенью свободы, Сб. «Вопросы динамики и динамической прочности», Изд. АН Латв. ССР, 1953, вып. 1.

6. Диссипативные системы. Диссипативные системы составляют группу неконсервативных систем, движение которых связано с некомпенсируемыми потерями энергии и затуханием колебаний. В диссипативных системах невозможны строго периодические колебательные движения, чем они существенным образом отличаются от других нелинейных неконсервативных систем, например от автоколебательных. Движение последних также сопровождается потерями энергии, но эти потери автоматически компенсируются поступлениями из неколебательного источника, регулируемые самой колеблющейся системой. В таких системах возможны периодические колебательные движения. В диссипативных системах единственными стационарными состояниями являются равновесные состояния, обладающие асимптотической устойчивостью.

Потери энергии в нелинейных диссипативных системах вызываются большей частью сухим (кулоновым) трением, иногда в сочетании с вязким, а также внутренним неупругим сопротивлением, которое возникает в материале частей системы, деформирующихся при колебаниях. Все эти сопротивления, как правило, нелинейны и не линеаризуемы. Расчет колебаний систем с такими сопротивлениями представляет существенно нелинейную задачу, которая не может быть решена методами линейной теории.

Мы рассмотрим некоторые простейшие диссипативные системы с одной степенью свободы, качественное исследование которых можно выполнить методом фазовой плоскости.

Наиболее характерным признаком диссипативных систем является, как уже было указано, некомпенсируемое рассеяние энергии. По этому признаку диссипативные системы и распознаются среди других неконсервативных систем.

Признаку диссипативности системы можно дать различные выражения.

Предположим, что уравнение движения системы имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q(q, \dot{q}), \quad (12.18)$$

где T и Π — соответственно кинетическая и потенциальная энергия системы, $Q(q, \dot{q})$ — обобщенная сила сопротивления, зависящая от координаты и скорости. Умножим обе части уравнения (12.18) на \dot{q} и перепишем его следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \ddot{q} - \frac{\partial T}{\partial q} \dot{q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} \dot{q} + Q\dot{q}.$$

Из этого уравнения находим:

$$\frac{d}{dt} (T + \Pi) = Q\dot{q}.$$

Система будет диссипативной, если во все время движения

$$Q\dot{q} \leq 0^1), \quad (12.19)$$

так как в этом случае полная энергия системы с течением времени убывает.

Условие (12.19) можно иначе истолковать как условие, при котором скорость точки \dot{q} и приложенная к ней сила сопротивления Q во все время движения направлены в противоположные стороны.

Так, например, линейная система, описываемая дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + k^2x = 0$$

будет диссипативной, если $\alpha > 0$, так как в этом случае сила сопротивления $Q = -2\alpha\dot{x}$, умноженная на скорость \dot{x} , во все время движения будет меньше нуля.

Система с уравнением

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

где $\mu > 0$, не будет диссипативной, так как для малых x ($x^2 < 1$) произведение силы сопротивления

$$Q = -\mu(x^2 - 1)\dot{x}$$

на \dot{x} будет больше нуля:

$$Q\dot{x} = -\mu(x^2 - 1)\dot{x}^2 > 0,$$

а для больших значений x ($x^2 > 1$) — меньше нуля:

$$Q\dot{x} = -\mu(x^2 - 1)\dot{x}^2 < 0.$$

На фазовой плоскости условию диссипативности можно дать следующую интерпретацию. Полная энергия изображающей систему точки на фазовой плоскости в предположении, что масса точки равна единице, выражается суммой

$$\frac{y^2}{2} + \Pi(x).$$

При отсутствии сопротивлений, т. е. для консервативной системы

$$\frac{y^2}{2} + \Pi(x) = \text{const} = h. \quad (12.20)$$

Это уравнение для различных h представляет семейство фазовых траекторий консервативной системы. Для диссипативной системы скорость изменения полной энергии изображающей точки

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{y^2}{2} + \Pi(x) \right] = Qy < 0.$$

¹⁾ Знак равенства только когда $\dot{q} = 0$.

Это неравенство, положив в нем

$$\frac{y^2}{2} + \Pi(x) = H(x, y),$$

перепишем следующим образом:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} < 0.$$

Выражение

$$\frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

пропорционально косинусу угла между внешней нормалью к кривой системы (12.20) в некоторой точке и касательной к фазовой траектории, проходящей через эту точку. Так как этот косинус меньше нуля, то фазовые траектории диссипативной системы пересекают кривые (12.20), направляясь при этом внутрь кривых (12.20) к началу координат, где $x = y = 0$ (рис. 102).

7. Метод Льенара построения фазовых траекторий. Для качественного исследования диссипативных систем удобным во многих случаях оказывается способ построения фазовых траекторий, предложенный Льенаром¹⁾ для систем с уравнением

$$\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + x = 0 \quad (12.21)$$

и являющийся разновидностью метода изоклин. К виду уравнения (12.21) могут быть приведены многие нелинейные системы, причем не только диссипативные.

Дифференциальное уравнение фазовых траекторий системы (12.21) имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\varphi(y) - x}{y}.$$

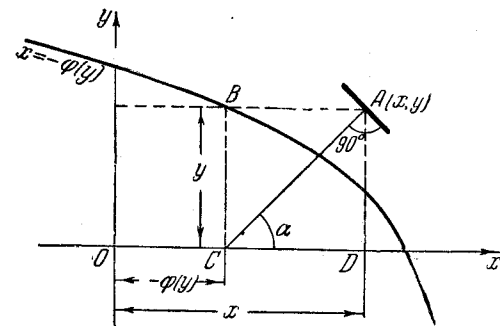


Рис. 123.

Чтобы получить направление касательной к искомой фазовой траектории в какой-либо точке A с координатами (x, y), строим (рис. 123) кривую

$$x = -\varphi(y) \quad (12.22)$$

и затем проводим из A прямую, параллельную оси Oх до встречи с кривой (12.22) в точке B с координатами (-φ(y), y). Из B опу-

¹⁾ См. Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, ИЛ, 1952.

скаем перпендикуляр BC на ось Oх. Направление касательной в точке A совпадает с проведенным через A перпендикуляром к AC. Это следует из того, что произведение углового коэффициента касательной к фазовой траектории

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\varphi(y) - x}{y}$$

на угловой коэффициент прямой CA

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AD}{OD - OC} = \frac{y}{\varphi(y) + x}$$

равно -1.

Чтобы построить фазовую траекторию, проходящую через данную точку A, находим указанным способом направление фазового поля в этой точке и заменяем элемент фазовой траектории в окрестности этой точки небольшим отрезком касательной, проведенной через точку A в надлежащем направлении. В конце полученного отрезка снова находим тем же способом направление поля и т. д. В результате получится приближенная фазовая траектория в виде ломаной, которую можно пострить с необходимой точностью, беря достаточно малыми отрезки касательных. В некоторых случаях способ Льенара дает сразу искомую траекторию в целом и необходимость построения ломаной линии отпадает. Например, для линейного осциллятора

$$\ddot{x} + x = 0$$

уравнение фазовой траектории имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Здесь $\varphi(y) \equiv 0$, кривая $x = -\varphi(y)$ совпадает с осью Oу и, следовательно, точка C в построении Льенара будет для всех точек A фазовой плоскости лежать в начале координат. Направления фазовых траекторий будут перпендикулярны к прямым, проходящим через начало координат. Следовательно, фазовыми траекториями будут окружности, описанные из O различными радиусами.

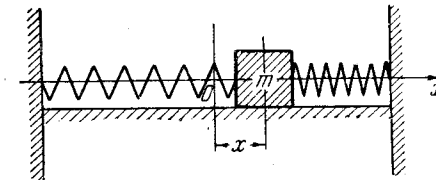


Рис. 124.

Пример 3. Другим примером, где способ Льенара дает возможность строить фазовые траектории в целом, является система с кулоновым трением, которую мы и рассмотрим в качестве первого примера существенно нелинейной диссипативной системы.

Предположим, что масса $m = 1$ (рис. 124) совершает прямолинейные колебания под действием линейной восстанавливающей силы по горизонталь-

ной поверхности с сухим трением. Сила трения постоянна по величине, но меняет знак, когда изменяется направление движения. Движение массы m будет определяться уравнениями

$$\ddot{x} + x = B,$$

когда $\dot{x} < 0$ ($B = \frac{R}{c}$, где R — сила трения, c — жесткость), т. е. когда масса движется справа налево, и

$$\ddot{x} + x = -B,$$

когда $\dot{x} > 0$, т. е. когда масса движется слева направо. Оба уравнения имеют общий вид уравнения (12.21)

$$\ddot{x} + x = \varphi(\dot{x}),$$

где $\varphi(\dot{x})$ имеет следующие определения:

$$\varphi(\dot{x}) = \begin{cases} +B & \text{при } \dot{x} < 0, \\ -B & \text{при } \dot{x} > 0 \end{cases}$$

(B — положительная постоянная).

Кривая (12.22) в построении Льенара обращается здесь в прямые

$$x = +B,$$

когда $y < 0$, и

$$x = -B,$$

когда $y > 0$ (рис. 125). Отрезки фазовых траекторий в нижней полуплоскости, изображающие движение массы m справа налево, представляют собой фазовые траектории линейного осциллятора

$$\ddot{z} + z = 0,$$

в который обращается рассматриваемая система при подстановке

$$x = z + B.$$

Это — полуокружности, описанные из S_1 ($OS_1 = OS_2 = B$) в нижней полуплоскости. Фазовые траектории в верхней полуплоскости по аналогичным основаниям будут полуокружностями, описанными из S_2 . Концы полуокружностей нижней полуплоскости на оси Ox , если они не попадают на отрезок S_1S_2 , служат началом соответствующих полуокружностей верхней полуплоскости (рис. 125). В целом фазовые

траектории в нашем случае будут иметь вид спиралей, составленных из полуокружностей, лежащих в нижней и верхней полуплоскости.

Фазовую картину осциллятора с кулоновым трением можно было бы получить еще и таким способом. Строим на плоскости Oxy фазовые траектории линейного осциллятора без трения

$$\ddot{x} + x = 0.$$

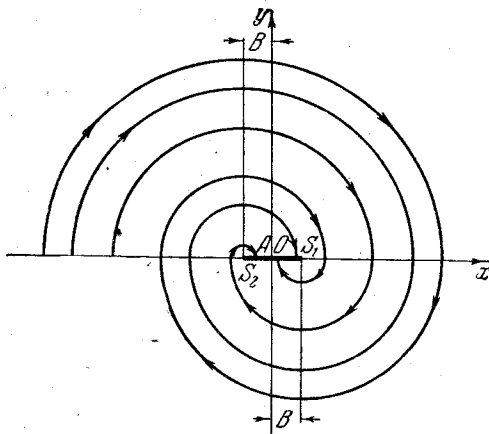


Рис. 125.

Это будут окружности, описанные из начала O всевозможными радиусами. Затем, разрезав рисунок вдоль оси Ox , сдвигаем верхнюю часть влево на B , а нижнюю вправо тоже на B . После этого остается, как говорят, «сшить» траектории верхней полуплоскости с соответствующими траекториями нижней так, чтобы левый конец каждой нижней траектории (кроме концов, попавших на отрезок $(-B, +B)$) сделался началом некоторой верхней, а правый конец верхней — началом соответствующей нижней траектории. В результате такого «сшивания» мы получим то же расположение фазовых траекторий, что и на рис. 125.

Когда левый конец нижней полуокружности или правый конец верхней полуокружности оказывается на отрезке S_2S_1 , то дальнейшее движение изображающей точки прекращается, так как на отрезке S_2S_1 восстанавливающая сила меньше силы трения B и, попав на этот отрезок в какой-либо точке A (со скоростью, равной нулю), масса m и изображающая ее точка останутся в ней в покое. Отрезок S_2S_1 называется *полосой* или *областью застоя*.

За каждый размах отклонение массы от начала уменьшается на $2B$ и если a — начальное отклонение (например, справа) при равной нулю начальной скорости, то число размахов, которое совершит масса, прежде чем попадет в полосу застоя, будет равно целой части отношения $\frac{a}{2B}$.

Пример 4. Рассмотрим теперь систему с кулоновым и вязким трением.

Сила сопротивления Q , действующая на массу m (рис. 124), имеет здесь следующие определения

$$Q = \begin{cases} +R - \alpha\dot{x} & \text{при } \dot{x} < 0, \\ -R - \alpha\dot{x} & \text{при } \dot{x} > 0. \end{cases}$$

Уравнение движения массы m будет иметь вид

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = \pm R$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = \pm k^2B, \quad (12.23)$$

если обозначить

$$\frac{\alpha}{m} = 2n, \quad \frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{R}{c} = B.$$

Верхний знак, плюс, соответствует движению массы m справа налево ($\dot{x} < 0$), нижний, минус, — движению слева направо ($\dot{x} > 0$).

На отрезке $(-B, +B)$

$$|cx| < R.$$

Попав на этот отрезок, масса m дальнейшее движение прекращает. Отрезок $(-B, +B)$ представляет таким образом область застоя.

Изображение движения на фазовой плоскости можно построить следующим образом.

Положив в уравнении

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = k^2B$$

(движение справа налево)

$$x = x_1 + B,$$

приведем его к виду

$$\ddot{x}_1 + 2n\dot{x}_1 + k^2x_1 = 0.$$

В предположении, что $n^2 < k^2$ (случай «малого» линейного сопротивления), можно сказать, что движение массы m справа налево происходит по закону затухающих линейных колебаний около среднего положения, смещенного относительно начала координат вправо на B . Отношение двух последовательных максимальных отклонений в противоположные стороны ¹⁾

$$\delta = e^{-\frac{n\pi}{k_1}},$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

Точно так же, положив в уравнении

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = -k^2B$$

(движение слева направо)

$$x = x_2 - B,$$

получим для x_2

$$\ddot{x}_2 + 2n\dot{x}_2 + k^2x_2 = 0.$$

Таким образом, движение слева направо происходит по тому же закону затухающих линейных колебаний, что и движение справа налево, но это будут колебания около среднего положения, смещенного относительно начала координат влево на B .

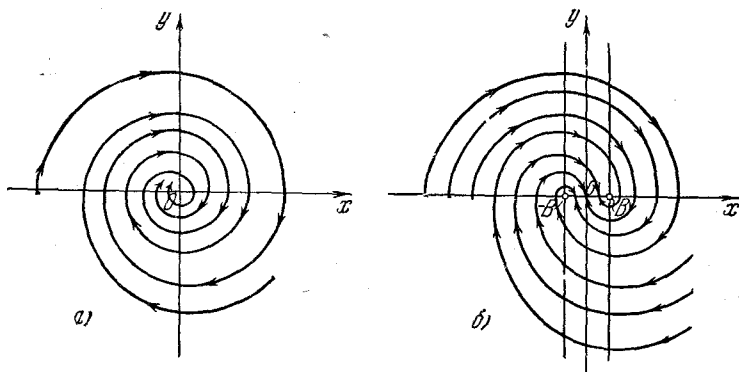


Рис. 126.

Отсюда вытекает следующий прием построения фазовой картины движения массы m , аналогичный описанному в предыдущем примере. Построив фазовые траектории линейного затухающего осциллятора

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0$$

с асимптотической точкой в начале координат O (рис. 126, а), делаем разрез рисунка по оси Ox и затем сдвигаем нижнюю часть вправо на B , верхнюю влево также на B . Фазовые траектории непрерывным образом заполняют фазовую плоскость. Поэтому в верхней полуплоскости (сдвинутой влево) найдутся траектории, которые будут служить продолжением соответствующих траекторий сдвинутой направо нижней части, а траектории нижней

¹⁾ Здесь δ в два раза меньше декремента δ на стр. 65.

части будут служить продолжением траектории верхней. В результате такого «сшивания» отрезков траекторий нижней и верхней части, смещенных одна относительно другой вдоль оси Ox на $2B$, мы получим фазовую картину рассматриваемой диссипативной системы (рис. 126, б). При этом ни один из отрезков фазовых траекторий не может начинаться из какой-либо точки полосы застоя ($-B, +B$): в полосе застоя фазовые траектории могут только заканчиваться.

Изложенный способ построения фазовых траекторий позволяет легко получить формулы, связывающие последовательные отклонения массы в ту и другую сторону. Обозначим через a_i отклонение массы от начала координат, например вправо. Тогда для абсолютной величины отклонения влево a_{i+1} будем иметь

$$a_{i+1} = (a_i - B)\delta - B = a_i\delta - B(1 + \delta). \quad (12.24)$$

Масса m действительно перейдет на другую сторону от начала, если

$$a_i\delta - B(1 + \delta) > 0,$$

т. е. если

$$a_i > B\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) > 2B.$$

Формула (12.24) дает ряд убывающих отклонений и остается верной до значения i , при котором

$$0 < a_i \leq B\left(1 + \frac{1}{\delta}\right).$$

Если при этом

$$0 < a_i \leq B,$$

то i -е отклонение будет последним. Если

$$B < a_i \leq B\left(1 + \frac{1}{\delta}\right),$$

то масса m продвинется к началу, но не перейдет на другую от него сторону, остановившись в области застоя. Таким образом, масса не будет асимптотически приближаться к положению устойчивого равновесия, как это имело место в линейной системе с вязким трением. Колебания массы прекратятся через сравнительно короткий конечный промежуток времени в полосе застоя. В этом и сказывается главное отличие рассматриваемой системы от затухающей линейной.

8. Автоколебательные системы. Автоколебательные системы относятся к системам неконсервативным, так как в составе действующих на такие системы сил имеются сопротивления, и движение системы сопровождается расходом энергии. В этом отношении автоколебательные системы ведут себя аналогично диссипативным. Но в то время как в диссипативных системах энергия, расходуемая на преодоление сопротивлений, ничем не компенсируется и колебания таких систем затухают, в автоколебательных системах расход энергии на сопротивление точно компенсируется поступлениями из некоторого входящего в состав системы неколебательного источника — поступлениями, дозировка которых по времени подачи и по величине регулируется самой колебательной системой. Вследствие этого в автоколебательной

системе могут возникать устойчивые периодические незатухающие колебания — так называемые *автоколебания*¹⁾. Примером таких колебаний могут служить колебания маятника часов, в которых энергия падающего груза передается через храповой механизм маятнику порциями, величина и время подачи которых определяются колебаниями самого маятника.

Способ компенсации расхода энергии является наиболее характерным свойством автоколебательной системы, по которому большей частью и распознаются эти системы в отличие от систем диссипативных, или систем, совершающих вынужденные колебания под действием периодических возмущающих сил. Таким же характерным

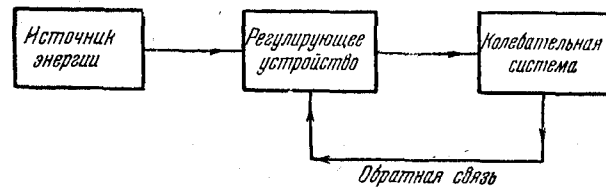


Рис. 127.

свойством автоколебательной системы является наличие в ее конструктивной схеме следующих четырех частей:

- 1) постоянный (неколебательный) источник энергии;
- 2) колебательная система;
- 3) устройство, регулирующее поступления в колебательную систему энергии из источника энергии;
- 4) обратная связь между колебательной системой и регулирующим устройством, осуществляющая управление дозировкой подачи энергии в колебательную систему.

Схема автоколебательной системы представлена на рис. 127.

В автоколебательной системе регулирующее устройство управляет движением колебательной системы, а эта последняя через обратную связь управляет работой регулирующего устройства. В этом двустороннем взаимодействии колебательной системы и регулирующего устройства с помощью обратной связи и осуществляется самоуправление энергетическим балансом системы, в результате чего в ней могут возникнуть устойчивые незатухающие колебания. Колебания эти, как правило, не зависят от начальных условий. В так называемых автоколебательных системах с самовозбуждением при любых начальных условиях система стремится к некоторому устойчивому периодическому движению.

¹⁾ Термин «автоколебания» впервые введен А. А. Андроновым в статье «Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний». См. Андронов А. А., Собрание трудов, Изд. АН СССР, 1956.

Принимая во внимание сделанные замечания, можно следующим образом определить автоколебательную систему, имея в виду главным образом ее конструктивную схему:

Автоколебательной системой называется неконсервативная система, способная совершать незатухающие периодические колебания и характеризующаяся наличием следующих основных составных частей: 1) постоянного источника энергии; 2) колебательной системы; 3) устройства, регулирующего поступления энергии в колебательную систему из источника энергии; 4) обратной связи между колебательной системой и регулирующим устройством.

Не всегда, однако, можно легко распознать автоколебательную систему по наличию в ней указанных частей. Механизм обратной связи иногда совсем не очевиден, так как во многих случаях обратная связь действует по скрытым путям, обнаружить которые не всегда удается.

Большой частью автоколебания возникают в системах с нелинейным сопротивлением, изменения которого, в зависимости от положения и скорости колеблющейся системы, происходят по особому характерному именно для автоколебаний закону. Примером такого рода изменений сопротивления может служить система, описываемая уравнением Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad (12.25)$$

где $\mu > 0$. Равновесное состояние системы в положении $x = 0$, как мы знаем (пример 6 гл. XI), неустойчиво. Система выходит из этого положения без какого-либо внешнего воздействия¹⁾ и, пока $x^2 < 1$, колеблется с возрастающими амплитудами, так как в этом случае

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = -\mu(x^2 - 1)\dot{x} > 0^2)$$

— приток энергии превышает расход. Когда $x^2 > 1$, система ведет себя как диссипативная и ее колебания затухают. В этом случае

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = -\mu(x^2 - 1)\dot{x}^2 < 0.$$

Некоторое представление таких изменений дает диаграмма энергетического баланса (рис. 128), на которой представлен ход изменений в зависимости от отклонений энергии E , поступающей в систему, и энергии R , расходуемой на преодоление сопротивлений. Самовозбуждающаяся система на участке Oa получает энергии больше, чем расходует, и поэтому раскачивается. На участке ab , наоборот,

¹⁾ Такие системы носят название «самовозбуждающихся» или систем с «мягким» возбуждением.

²⁾ См. уравнение (12.19).

расход энергии превышает поступление и колебания начинают затухать. В точке A расход и поступление энергии балансируются, и система в состоянии, изображаемом точкой A , совершает устойчивые колебания. При небольших возмущениях система, предоставленная затем самой себе, возвращается снова в состояние A или от увеличения

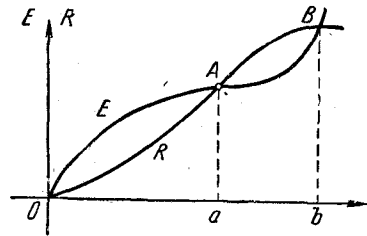


Рис. 128.

притока энергии (при отклонении влево), или от увеличения расхода и торможения (при отклонении вправо).

В точке B поступление и расход энергии снова балансируются. В этом состоянии система теоретически могла бы совершать незатухающие колебания, но эти колебания оказываются неустойчивыми и в действительности не осуществляются. Таким образом, в некоторой области рассматриваемая система стремится к устойчивому колебательному режиму независимо от начальных условий.

С аналогичным явлением мы встречаемся в некоторых нелинейных системах с сухим (кулоновым) трением. Такой системой будет, например, ленточный тормоз, схема которого представлена на рис. 129. Ползун, прикрепленный к неподвижной точке с помощью пружины c ,

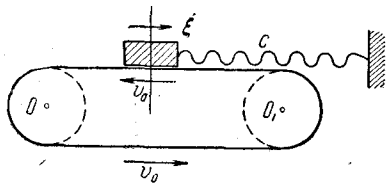


Рис. 129.

лежит на шероховатой бесконечной ленте, движущейся со скоростью v_0 в сторону, показанную стрелкой. При некоторых значениях скорости v_0 наблюдаются незатухающие колебательные движения ползуна по ленте. Подробный анализ причин возникновения этих колебаний довольно сложен¹⁾. Мы ограничимся поэтому упрощенным описанием воз-

никающих здесь явлений, имея в виду главным образом показать их аналогию с автоколебаниями в системе Ван-дер-Поля (12.25).

Когда лента начинает двигаться, набирая скорость v_0 , то ползун, растягивая пружину, движется сначала вместе с лентой до положения, в котором сила трения R , будучи все время уравновешенной соответствующей упругой восстанавливающей силой пружины, не достигнет максимальной величины. В этом положении ползун должен был бы остановиться, скачком изменив относительную скорость (скорость скольжения по ленте) от 0 до $-v_0$. Если бы сила трения R

¹⁾ Костерин Ю. И., Механические автоколебания при сухом трении, Изд. АН СССР, 1960.

была постоянной и не зависела от скорости, то это положение было бы положением устойчивого равновесия ползуна. Но как показывает опыт, указанное равновесие оказывается на самом деле неустойчивым: ползун, достигнув этого положения, срывается с него вправо¹⁾ и затем совершает незатухающие колебания.

Возникновение таких колебаний, не входя в большие подробности, можно объяснить следующим образом. Дело в том, что трение скольжения зависит от относительной скорости движения ползуна по ленте. Пусть абсолютная скорость колебаний ползуна будет $\dot{\xi}$. Тогда сила трения R во время движения груза по ленте будет некоторой функцией от разности $\dot{\xi} - v_0$:

$$R = \varphi(\dot{\xi} - v_0).$$

При этом, когда скорость $\dot{\xi} - v_0$ уменьшается, то сила трения, не меняя своего направления, растет и, наоборот, когда $\dot{\xi} - v_0$ увеличивается, то сила трения убывает. График силы R в зависимости от относительной скорости $\dot{\xi} - v_0$ выглядит приблизительно так, как показано на рис. 130. Это не прямая, параллельная оси $\dot{\xi} - v_0$, как на рис. 110, б, а кривая с *ниспадающим* участком AB и точкой перегиба на этом участке. Около точки перегиба можно выделить отрезок ab , который в нашем приближенном рассмотрении можно принять за прямолинейный. На этом отрезке производная от R по $\dot{\xi} - v_0$

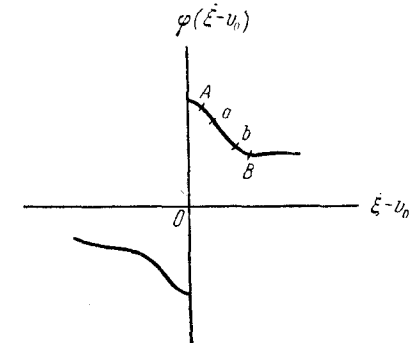


Рис. 130.

будет постоянной и *отрицательной*. В какой-либо точке этого отрезка система будет вести себя как *линейная с отрицательным сопротивлением*. Энергия ее будет расти в силу соотношения

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\xi}} = f$$

будет постоянной и *отрицательной*. В какой-либо точке этого отрезка система будет вести себя как *линейная с отрицательным сопротивлением*. Энергия ее будет расти в силу соотношения

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = f \dot{\xi}^2 > 0,$$

и отклонения будут увеличиваться. Когда состояние системы достигнет точки, лежащей на участке графика за точкой b , трение увеличивается, приток энергии станет меньше сопротивления, а вместе с этим начнут убывать и амплитуды. В конце концов устанавливается

¹⁾ В сторону возрастающей относительной скорости.

устойчивый автоколебательный режим, в котором приход и расход энергии балансируются.

Представленная на рис. 129 схема ленточного тормоза и приведенные объяснения возникновения автоколебаний ползуна могут быть без существенных изменений отнесены ко многим другим системам, сходным с тормозом по действию в них кулонова трения. Такими системами будут, например, скрипичная струна, совершающая автоколебания при движении по ней смычка; маятник, подвешенный на горизонтальном валу, вращающемся с некоторым трением о втулку (фрикционный маятник Фроуда¹⁾.

Автоколебательный характер некоторых простейших систем с одной степенью свободы может быть иногда обнаружен из рассмотрения уравнений движения системы. Существуют многочисленные критерии, позволяющие по некоторым свойствам коэффициентов дифференциального уравнения системы доказать возможность существования в этой системе незатухающих периодических колебаний. Мы ограничимся здесь формулировкой двух таких критериев — Льенара и Бендиксона²⁾, сделав предварительно следующее замечание. На фазовой плоскости периодические движения автоколебательной системы с одной степенью свободы изображаются замкнутыми траекториями, которые, по соображениям, приведенным дальше, называются *предельными циклами*.

Критерий Льенара относится к системам, уравнение движения которых имеет вид

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0. \quad (12.26)$$

Уравнения весьма многих нелинейных систем могут быть приведены к такому виду, например, уравнение

$$\ddot{y} + F(y)\dot{y} + y = 0,$$

для которого Льенар дал описанный выше способ построения фазовых траекторий. В самом деле, продифференцировав это уравнение по t и положив $\dot{y} = x$, получим

$$\dot{x} + F'(x)x + x = 0,$$

т. е. уравнение (12.26), в котором $f(x) = F'(x)$ и $g(x) = x$.

Система (12.26), согласно Льенару, будет иметь один устойчивый предельный цикл при следующих условиях, которым должны удовлетворять функции $f(x)$ и $g(x)$:

¹⁾ Теория маятника Фроуда рассмотрена в книге: Бутенин Н. В., Элементы теории нелинейных колебаний, Судпромгиз, Ленинград, 1962, стр. 81—86.

²⁾ Немыцкий В. В. и Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1949.

1) функция $f(x)$ должна быть четной, а $g(x)$ — нечетной функцией переменной x ;

2) $f(0) < 0$;

3) $xg(x) > 0$ для всех $x \neq 0$;

4) $F(x) = \int_0^x f(x) dx \rightarrow +\infty$, когда $x \rightarrow +\infty$;

5) функция $f(x)$ имеет один нуль в точке $x = a > 0$ и монотонно возрастает для $x \geq a$.

Нечетность функции $g(x)$ и условие

$$xg(x) > 0$$

означают, что сила

$$-g(x)$$

всегда имеет знак, противоположный знаку x (знаку отклонения), т. е. действует как восстанавливающая сила в линейной упругой системе, всегда направленная к среднему, нулевому положению.

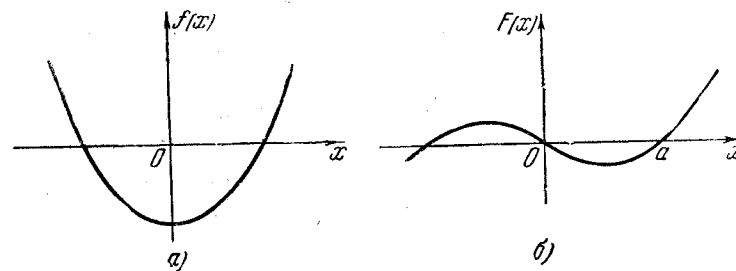


Рис. 131.

Четность функции $f(x)$ вместе с условием $f(0) < 0$ означает, что коэффициент сопротивления имеет отрицательный знак для малых значений $|x|$, т. е. при малых отклонениях сопротивление раскачивает систему. График $f(x)$ при указанных условиях вблизи начала координат имеет вид параболической кривой (рис. 131, а). Для больших $|x|$ сопротивление становится положительным и вызывает затухание колебаний.

Условия 4 и 5 выражают прежде всего, что система (12.26) не является диссипативной вблизи нулевого положения, чем подтверждают аналогичный вывод из условий 1 и 2. Кроме того, из этих условий следует, что рассматриваемая система представляет собой так называемую «систему с самовозбуждением» с графиком функции $F(x)$, имеющим в точке $x = 0$ ниспадающую часть (рис. 131, б).

Такой автоколебательной системой с самовозбуждением будет система, описываемая уравнением Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (12.27)$$

где $\mu > 0$. В самом деле, для уравнения (12.27) выполнены все условия критерия Льенара:

1) $f(x) \equiv -\mu(1 - x^2)$ — функция четная, а $g(x) \equiv x$ — функция нечетная;

2) $f(0) < 0$;

3) $xg(x) = x^2 > 0$ для всех $x \neq 0$;

4) $F(x) = -\mu \int_0^x (1 - x^2) dx = -\mu x + \frac{\mu x^3}{3} \rightarrow +\infty$,

когда $x \rightarrow +\infty$;

5) функция $F(x) = 0$ для $x = \pm\sqrt{3}$ и для $x > \sqrt{3}$ растет вместе с x монотонно, оставаясь все время положительной.

Критерий Бендиксона представляет достаточное условие отсутствия предельных циклов в некоторых областях фазовой плоскости. Предположим, что уравнения движения изображающей систему точки на фазовой плоскости приведены к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (12.28)$$

Критерий Бендиксона можно формулировать так:

«Если в некоторой односвязной области (S) на фазовой плоскости выражение

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

сохраняет знак и не обращается тождественно в нуль, то в этой области не существует замкнутых фазовых траекторий».

Для доказательства рассуждаем от противного. Предположим, что в области S существует периодическое решение уравнений (12.28). Обозначим замкнутую траекторию, соответствующую этому решению, через L , а ограничиваемую этой траекторией область, лежащую в области S , через D . Тогда

$$\oint_L (P dy - Q dx) = \int_0^t (PQ - QP) dt \equiv 0.$$

Но по известной теореме Грина

$$\oint_L (P dy - Q dx) = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Последнее равенство возможно когда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y} \text{ или когда } \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

меняет в области D знак, что противоречит условиям теоремы.

9. Метод Ван-дер-Поля. Мы используем здесь этот метод в качестве одного из общих приближенных способов построения предельных циклов автоколебательных систем на фазовой плоскости. В наглядной и простой форме этот метод дает также возможность проследить за движением изображающей точки в переходных состояниях системы и сформулировать законы установления стационарных режимов. В дальнейшем своем развитии он приводит к одному эффективному методу расчета квазилинейных неавтономных систем — *методу осреднения*, первое обоснование которого было дано Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси¹⁾.

Мы изложим метод Ван-дер-Поля применительно к уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = \mu f_1\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

приведя его предварительно подстановкой

$$\tau = kt$$

к уравнению

$$\ddot{x} + x = \frac{\mu}{k^2} f_1(x, k\dot{x}) = \frac{\mu}{k^2} f(x, \dot{x}), \quad (12.29)$$

где

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{d\tau^2}.$$

Движение изображающей систему (12.29) точки на фазовой плоскости (x, y) будет происходить согласно уравнениям

$$\frac{dx}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = -x + \frac{\mu}{k^2} f(x, y). \quad (12.30)$$

Когда $\mu = 0$, система (12.30) превращается в линейный осциллятор

$$\frac{dx}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = -x. \quad (12.31)$$

Фазовыми траекториями линейного осциллятора (12.31) будут окружности

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (12.32)$$

¹⁾ См. Андронов А. А., Витт А. А. и Хайкин С. Э., Теория колебаний, Физматгиз, 1959.

непрерывно заполняющие некоторую область около нулевой точки (вместе с непрерывным изменением радиуса r). По одной из этих окружностей движется изображающая систему (12.31) точка с угловой скоростью $\omega = 1$ в направлении часовой стрелки.

Решение уравнений (12.31) можно представить следующими выражениями:

$$x = a \cos \tau + b \sin \tau, \quad y = -a \sin \tau + b \cos \tau, \quad (12.33)$$

где a и b — произвольные постоянные.

Когда $\mu \neq 0$, но достаточно мало, возникающие периодические решения уравнения (12.29) будут мало отличаться от решений (12.33). Ван-дер-Поль допускает, что форма решений (12.33) для линейного

осциллятора сохраняется и для нелинейной системы (12.29), и имеет уравнения, каким будут при этом предположении удовлетворять параметры a и b , которые для системы (12.29), очевидно, не будут постоянными, но изменения которых при малом μ сравнительно с изменениями $\sin t$ и $\cos t$ в течение одного периода, т. е. за 2π секунд, будут весьма медленными. Только при этом условии форма решения (12.33) будет сохраняться достаточно долго. Все эти утверждения будут, конечно, тем ближе к действительности, чем меньше μ .

Обращаясь к фазовому изображению движения линейного осциллятора, будем рассматривать уравнения (12.33)

как формулы перехода от координат (x, y) изображающей точки в неподвижной системе Oxy к координатам (a, b) той же точки в системе Oab , вращающейся вокруг начала по часовой стрелке с угловой скоростью $\omega = 1$ (рис. 132).

В системе координат Oab точка M , изображающая линейный осциллятор, неподвижна. Как будет двигаться в этой системе точка, изображающая нелинейную систему (12.30) при $\mu \neq 0$? Чтобы ответить на этот вопрос, преобразуем уравнения (12.30) к координатам a, b с помощью формул (12.33), считая в них a и b некоторыми пока неизвестными функциями времени τ . В координатах a и b уравнения (12.30) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} \cos \tau + \frac{db}{d\tau} \sin \tau &= 0, \\ -\frac{da}{d\tau} \sin \tau + \frac{db}{d\tau} \cos \tau &= \frac{\mu}{k^2} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau). \end{aligned}$$

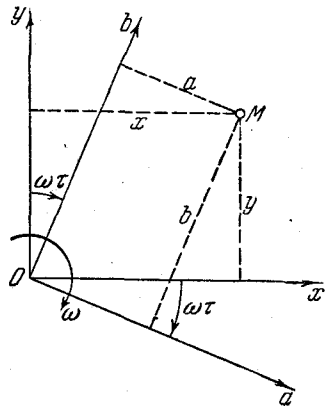


Рис. 132.

Из этих уравнений находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\frac{\mu}{k^2} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \sin \tau, \\ \frac{db}{d\tau} &= \frac{\mu}{k^2} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \cos \tau. \end{aligned} \right\} (12.34)$$

Принимая во внимание в соответствии со сделанными выше замечаниями, что при малом μ функции $a(\tau)$ и $b(\tau)$ изменяются медленно, заменяем правые части уравнений (12.34) их интегральными средними за период 2π . Тогда придем к следующим уравнениям движения изображающей систему (12.30) точки на вращающейся плоскости Oab :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\frac{\mu}{2\pi k^2} \int_0^{2\pi} f(a \cos \xi + b \sin \xi, -a \sin \xi + b \cos \xi) \sin \xi d\xi, \\ \frac{db}{d\tau} &= \frac{\mu}{2\pi k^2} \int_0^{2\pi} f(a \cos \xi + b \sin \xi, -a \sin \xi + b \cos \xi) \cos \xi d\xi. \end{aligned} \right\} (12.35)$$

С помощью еще одного перехода к полярным координатам на плоскости Oab в уравнениях (12.35) можно разделить переменные и привести решение этих уравнений к квадратурам. Подставим в (12.35)

$$a = R \cos \theta, \quad b = R \sin \theta,$$

где R — радиус-вектор изображающей точки, а θ — полярный угол. После несложных выкладок получим для R и θ уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR}{d\tau} &= -\frac{\mu}{2\pi k^2} \int_0^{2\pi} f[R \cos(\xi - \theta), -R \sin(\xi - \theta)] \sin(\xi - \theta) d\xi, \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{\mu}{2\pi R k^2} \int_0^{2\pi} f[R \cos(\xi - \theta), -R \sin(\xi - \theta)] \cos(\xi - \theta) d\xi. \end{aligned} \right\} (12.36)$$

Рассматривая θ в подынтегральных выражениях как параметр, не изменяющийся при интегрировании по ξ , и принимая во внимание, что подынтегральные выражения являются периодическими с периодом 2π , перепишем уравнения (12.36), положив $\xi - \theta = u$, следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR}{d\tau} &= -\frac{\mu}{2\pi k^2} \int_0^{2\pi} f(R \cos u, -R \sin u) \sin u du, \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{\mu}{2\pi R k^2} \int_0^{2\pi} f(R \cos u, -R \sin u) \cos u du. \end{aligned} \right\} (12.37)$$

Введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} F(R) &= -\frac{1}{2\pi k^2} \int_0^{2\pi} f(R \cos u, -R \sin u) \sin u \, du, \\ \Phi(R) &= \frac{1}{2\pi k^2 R} \int_0^{2\pi} f(R \cos u, -R \sin u) \cos u \, du, \end{aligned} \right\} \quad (12.38)$$

представим уравнения (12.37) в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR}{d\tau} &= \mu F(R), \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \mu \Phi(R). \end{aligned} \right\} \quad (12.39)$$

Полученные уравнения называются *уравнениями установления* по соображениям, изложенным ниже. В них действительно переменные R и θ разделены в том смысле, что в первое из них входит только R и оно может быть проинтегрировано независимо от второго. После того как из первого будет найдено R и подставлено во второе, приведет к квадратурам и вычисление θ .

О фазовых траекториях на плоскости Oab можно получить достаточно полное представление по расположению и типу особых точек. Дифференциальное уравнение фазовых траекторий мы получим, поделив первое уравнение (12.39) на второе:

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{F(R)}{\Phi(R)}.$$

Особые точки определяются уравнениями

$$F(R) = 0, \quad \Phi(R) = 0. \quad (12.40)$$

Здесь могут встретиться разные случаи, из которых мы рассмотрим два.

Первый случай. Этот случай имеет место, когда

$$\Phi(R) \equiv 0.$$

В этом случае из второго уравнения (12.39) находим

$$\theta = \text{const} = \theta_0,$$

что означает, что особые точки лежат на радиальных прямых, проходящих через начало O под углом θ_0 к оси a , определяемым начальными условиями. Положение особых точек на этих радиальных

лучах определяется корнями первого уравнения (12.39)

$$F(R) = 0, \quad (12.41)$$

которые мы обозначим через R_0, R_1, R_2, \dots , причем $R_0 = 0$, так что к особым точкам относится и начало координат. Можно сказать, что особые точки на фазовой плоскости Oab являются точками пересечения радиальных лучей с окружностями радиусов R_i (рис. 133).

Чтобы выяснить вопрос о том, как по этим радиальным лучам движется изображающая точка, нужно решить уравнение

$$\frac{dR}{d\tau} = \mu F(R).$$

В этом уравнении переменные разделяются, и его решение можно представить следующим образом:

$$\mu(\tau - \tau_0) = \int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{dR}{F(R)}. \quad (12.42)$$

Это уравнение имеет смысл только в промежутке между двумя окружностями, описанными из O радиусами, равными двум последовательным корням уравнения

$$F(R) = 0.$$

Фазовые траектории представляют собой, таким образом, отрезки радиальных лучей между двумя окружностями радиусов R_i и R_{i+1} ($i = 0, 1, 2, \dots$). Попав в соответствии с начальными условиями на один из этих отрезков, например в точку M (рис. 133), изображающая точка будет двигаться по нему в ту или другую сторону, асимптотически приближаясь или к окружности радиуса R_i , или к окружности радиуса R_{i+1} , на которых подынтегральная функция

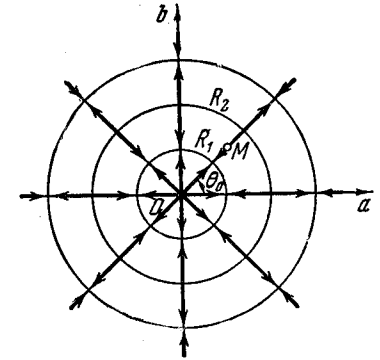


Рис. 133.

в уравнении (12.42), как и сам интеграл, обращается в бесконечность. Сторона направления движения изображающей точки определяется характером устойчивости равновесных состояний в особых точках на окружностях радиусов $R = R_i$. По отрезкам радиальных лучей изображающая точка движется от неустойчивых равновесных положений к устойчивым, совершая эти свои движения в каждую сторону за бесконечный промежуток времени. Особая точка в начале координат — узел. Если этот узел неустойчивый, то направления движения изображающей точки по соответствующим отрезкам будут такие, как показано на

рис. 133. В этом случае первая окружность радиуса $R=R_1$ будет геометрическим местом устойчивых равновесных положений, вторая — радиуса $R=R_2$ — неустойчивых и т. д.

Такова в рассматриваемом случае фазовая картина движения нашей системы на вращающейся плоскости Oab . Каково будет расположение фазовых траекторий на неподвижной плоскости Oxy ? Чтобы ответить на этот вопрос, обращаемся к формулам

$$\begin{aligned}x &= a \cos \tau + b \sin \tau, \\y &= -a \sin \tau + b \cos \tau,\end{aligned}$$

с помощью которых можно от координат (a, b) вернуться снова к координатам (x, y) на плоскости Oxy . Если обратить внимание на то, что преобразование, устанавливаемое этими формулами, ортогональное и что, следовательно,

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2,$$

то можно будет утверждать, что окружности радиусов $R=R_i$ при переходе на плоскость Oxy сохраняют свои радиусы и свое расположение вокруг начала. Однако на плоскости Oxy эти окружности уже не будут изображать равновесные положения нашей системы. Изображающая точка, неподвижная на этой окружности в плоскости Oab , в плоскости Oxy будет двигаться по этой окружности по часовой стрелке. Траектория изображающей точки, попавшей с самого начала на такую окружность, будет замкнутой круговой траекторией, изображающей периодическое колебательное движение рассматриваемой нелинейной системы.

В то время как линейный осциллятор, получающийся из заданной нелинейной системы при $\mu=0$, обладает целым континуумом замкнутых круговых траекторий, изображающих множество возможных в ней периодических движений, нелинейная система (12.29) только некоторые из этих окружностей будет иметь в качестве фазовых траекторий, изображающих ее периодические движения, именно окружности радиусов R_i , равных корням уравнения

$$F(R) = 0.$$

Уравнения движения изображающей систему (12.30) точки по фазовым траекториям получатся из формул

$$\begin{aligned}x &= a \cos \tau + b \sin \tau, \\y &= -a \sin \tau + b \cos \tau,\end{aligned}$$

если в них подставить

$$a = R_i \cos \theta_0, \quad b = R_i \sin \theta_0.$$

Эти уравнения будут

$$\left. \begin{aligned}x &= R_i \cos(\tau - \theta_0), \\y &= -R_i \sin(\tau - \theta_0).\end{aligned} \right\} \quad (12.43)$$

Период обращения изображающей точки по окружности R_i будет равен 2π , как и у линейного осциллятора (12.31). Нелинейность системы в первом приближении не влияет на частоту или период колебаний.

Во что обращаются на плоскости Oxy отрезки радиальных лучей, представляющих на плоскости Oab фазовые траектории системы? Уравнения движения изображающей точки в координатах (x, y) будут иметь ту же форму, что и уравнения (12.43)

$$\left. \begin{aligned}x &= R \cos(\tau - \theta_0), \\y &= -R \sin(\tau - \theta_0).\end{aligned} \right\} \quad (12.44)$$

но теперь уже R — не постоянная величина. В промежутке между R_i и R_{i+1} R монотонно растет или убывает с течением времени. Изображающая точка, очутившись в силу начальных условий между окружностями с радиусами R_i и R_{i+1} , будет

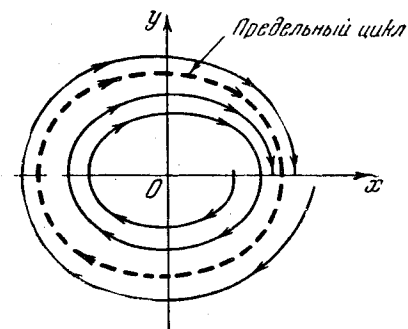


Рис. 134.

описывать безграничную (в обе стороны) спираль. Будет ли при этом R возрастать или убывать, зависит от устойчивости или неустойчивости равновесных положений на окружностях плоскости Oab . Между R_i и R_{i+1} R растет, если равновесные положения окружности радиуса R_i неустойчивы, а на окружности R_{i+1} — устойчивы, и наоборот. При этом спирали наворачиваются на окружности, соответствующие окружностям устойчивых равновесных положений, и раскручиваются с окружностей неустойчивых. В каком бы положении изображающая точка ни оказалась в начальный момент, она будет стремиться к некоторому устойчивому периодическому движению, изображаемому окружностью радиуса, равного соответствующему корню уравнения (12.41). Именно в связи с этими свойствами окружности, изображающие периодические движения нелинейной системы, носят название *предельных циклов*. На рис. 134 представлен пунктиром один устойчивый предельный цикл, на который наворачиваются фазовые траектории, расположенные как внутри, так и снаружи цикла.

Второй случай. Предположим теперь, что функция $\Phi(R)$ не равна тождественно нулю и, в частности, не равна нулю для корней R_i уравнения

$$F(R) = 0.$$

В этом случае из уравнения

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \mu\Phi(R_i),$$

будем иметь

$$\theta = \mu\Phi(R_i)\tau + \theta_0.$$

Изображающая точка, попав на окружность радиуса R_i , где $\Phi(R_i) \neq 0$, уже на плоскости Oab будет двигаться по этой окружности со скоростью

$$\mu\Phi(R_i).$$

Прежние окружности равновесных положений становятся уже на плоскости Oab предельными циклами, по которым изображающая точка движется согласно уравнениям

$$\begin{aligned} a &= R_i \cos [\mu\Phi(R_i)\tau + \theta_0], \\ b &= R_i \sin [\mu\Phi(R_i)\tau + \theta_0]. \end{aligned}$$

Другие фазовые траектории в плоскости Oab являются сложными кривыми, которые около циклов ведут себя как спирали, наворачивающиеся на устойчивые и раскручивающиеся с неустойчивых (рис. 135). В областях между двумя последовательными циклами эти кривые могут менять направление

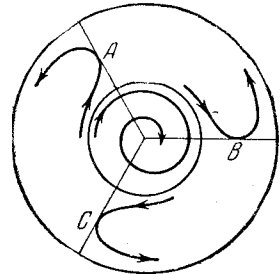


Рис. 135.

на противоположные в точках, где $\Phi(R)$ обращается в нуль (например, в точках A, B, C на рис. 135)¹⁾.

При переходе на неподвижную плоскость Oxy предельные циклы радиусов R_i на плоскости Oab остаются предельными циклами и на плоскости Oxy . По этим циклам изображающая точка будет двигаться согласно уравнениям

$$\begin{aligned} x &= a \cos \tau + b \sin \tau = R_i \cos \{[1 - \mu\Phi(R_i)]\tau - \theta_0\}, \\ y &= -a \sin \tau + b \cos \tau = -R_i \sin \{[1 - \mu\Phi(R_i)]\tau - \theta_0\}. \end{aligned}$$

Остальные траектории, как и в первом случае, растягиваются при переходе на плоскость Oxy в спирали, наворачивающиеся на устойчивые циклы, подобно спиралям на рис. 134.

Таким образом, нелинейность системы во втором случае, помимо отбора радиусов порождающих окружностей, влияет также и на частоту колебаний, которая теперь уже не совпадает с частотой по-

¹⁾ Подробные сведения о фазовых траекториях на плоскости Oab в рассматриваемом случае можно найти в книге Андронова А. А., Витта А. А. и Хайкина С. Э., цит. на стр. 485.

рождающего линейного осциллятора (равной 1), а отличается от нее на величину $-\mu\Phi(R_i)$, зависящую от параметра μ .

10. Устойчивость предельных циклов. Метод Ван-дер-Поля устанавливает закон движения изображающей точки не только по предельному циклу, но и в областях между предельными циклами. Этот закон выражается уравнениями (12.39), которые определяют поведение изображающей точки в неустановившемся режиме, когда она еще не находится на устойчивом предельном цикле, но приближается к нему. Именно это обстоятельство подчеркнуто в наименовании, присвоенном этим уравнениям, — *уравнения установления*.

С помощью уравнений установления легко решается вопрос о так называемой *орбитальной устойчивости* предельных циклов. Предположим, что изображающая точка движется по некоторому циклу радиуса R_i . Чтобы установить характер устойчивости этого цикла, дадим радиусу R_i малое возмущение δR . Тем самым мы переведем изображающую точку в область между циклами, где ее движение будет определяться уравнениями (12.39). В частности, в этом движении радиус $R_i + \delta R$ будет изменяться согласно уравнению

$$\frac{d}{d\tau}(R_i + \delta R) = \mu F(R_i + \delta R). \quad (12.45)$$

Ограничиваясь в разложении F по степеням δR только членом первого порядка, получим для δR уравнение

$$\frac{d(\delta R)}{d\tau} = \mu F'(R_i) \delta R.$$

Отсюда

$$\delta R = ae^{\mu F'(R_i)\tau}.$$

Рассматриваемый предельный цикл будет устойчив асимптотически, если¹⁾

$$F'(R_i) < 0,$$

и неустойчив, если

$$F'(R_i) > 0.$$

Пример 5. Составить уравнения установления и выяснить устойчивость предельных циклов уравнения Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}.$$

¹⁾ Можно доказать, что движение изображающей точки по асимптотически устойчивому предельному циклу является устойчивым и по Ляпунову. См. книгу Андронова А. А., Витта А. А. и Хайкина С. Э., цит. на стр. 485.

По формулам (12.38) находим

$$F(R) = \frac{R}{8} (4 - R^2), \quad \Phi(R) \equiv 0.$$

Уравнения установления будут поэтому иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR}{d\tau} &= \frac{\mu R}{8} (4 - R^2), \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.46)$$

Предельные циклы имеют здесь радиусы $R_0 = 0$ и $R_1 = 2$. Первый цикл — нулевая точка, изображающая равновесное состояние системы, — неустойчив, так как

$$F'(0) = \frac{1}{2} > 0.$$

Второй цикл — окружность радиуса $R_1 = 2$ — устойчив асимптотически, так как

$$F'(2) = -1 < 0.$$

Первое уравнение (12.46) легко интегрируется, и закон изменения R , получаемый из решения этого уравнения, подтверждает сделанное только что заключение об асимптотической устойчивости предельного цикла радиуса $R = 2$. В самом деле, разделив в этом уравнении переменные R и τ , найдем

$$R(\tau) = \frac{2a_0}{\sqrt{a_0^2 + e^{-\mu\tau}}},$$

где

$$a_0^2 = \frac{R^2(0)}{R^2(0) - 4},$$

откуда следует, что $R \rightarrow 2$, когда $\tau \rightarrow \infty$.

Решение уравнения Ван-дер-Поля в первом приближении имеет вид

$$x = R \cos(\tau + \theta_0).$$

Пример 6. Теория часов¹⁾. Всякий часовой механизм состоит из трех основных частей:

1) колебательная (постоянный) источник энергии или так называемый заводной механизм (падающий груз, пружина); на рис. 136 показана часть этого механизма — приводимое во вращательное движение падающим грузом или пружиной храповое колесо A ;

2) спусковой механизм, т. е. механизм, регулирующий подачу энергии из постоянного источника (заводного механизма) в колебательную систему — жестко связанный с маятником якорь D , снабженный двумя специальной формы зубцами («палеттами») a и b ;

3) колебательная система — маятник вместе с якорем. Обратная связь здесь не выделена конструктивно, а объединена с колебательной системой и выражается в управлении якорем подачей энергии из источника через храповое колесо. Механизм этого управления осуществляется следующим образом. Когда зубец колеса попадает на скошенный торец зубца a якоря, он подталкивает якорь, а с ним и маятник. В это время второй зубец

¹⁾ Булгаков Б. В., Колебания, ГТТИ, 1954.

якоря b опускается и, скользя по боковой поверхности зубца храпового колеса, задерживает последнее до тех пор, пока маятник, совершив отклонение вправо, не вернется в среднее положение. Время между последовательными толчками определяется длиной маятника и соответственно подобранными размерами зубцов якоря. Чаще всего спусковой механизм приходит в действие два раза за полный цикл колебания маятника: один раз, когда маятник движется справа налево, другой — когда он движется слева направо. В этих положениях скорость маятника сразу изменяется на конечную величину.

Обозначим восстанавливающий момент, действующий на маятник, в предположении, что отклонения маятника невелики, через

$$M = -mgl\theta = -c\theta,$$

где θ — угол отклонения, m — масса маятника, l — расстояние его центра тяжести от оси подвеса. Можно считать, что доминирующим сопротивлением движению маятника является кулоново трение R , которое мы примем равным

$$R = \begin{cases} -cB & \text{при } \dot{\theta} > 0, \\ +cB & \text{при } \dot{\theta} < 0, \end{cases}$$

где $B = \text{const}$; участок $(-B, +B)$ — полоса застоя.

Если бы на маятник никакие другие силы, кроме указанных, не действовали, то он бы представлял собой диссипативную систему: часы с таким маятником, будучи приведены в движение, через некоторое время остановились бы. Для поддержания движения на маятник через спусковой механизм подаются импульсы, создаваемые падающим грузом или раскручивающейся пружиной. Мы допустим, что результатом действия на маятник спускового механизма является мгновенное изменение (увеличение) на конечную величину ΔH кинетической энергии маятника и что это изменение происходит два раза за полный цикл колебания в положениях $\theta = \pm \alpha$, где $\pm \alpha$ — углы импульса. Другие допущения, например предположение, что результатом действия спускового механизма является мгновенное изменение количества движения на некоторую конечную величину, приводят к выводам, не подтверждающимся на опыте.

В соответствии с принятым допущением составим энергетическое уравнение для изображающей систему точки на фазовой плоскости. Положив $x = \theta$, $y = \dot{\theta} \sqrt{J}$ (J — момент инерции колеблющейся системы относительно оси O), получим:

$$d\left(\frac{y^2}{2} + \frac{cx^2}{2}\right) = \mp cB dx. \quad (12.47)$$

Верхний знак соответствует размаху (полуколебанию) слева направо ($\dot{\theta} > 0$), а нижний — размаху справа налево ($\dot{\theta} < 0$).

Из уравнения (12.47) имеем:

$$c(x \pm B)^2 + y^2 = \text{const}. \quad (12.48)$$

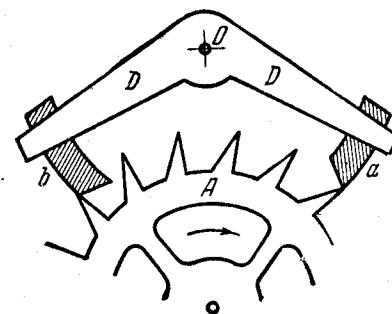


Рис. 136.

Пусть в начальный момент ($t=0$) маятник отклонен вправо на угол $x=\theta=A_1$ и отпущен без начальной скорости ($y=0$). Изображающая точка на фазовой плоскости будет двигаться справа налево согласно уравнению

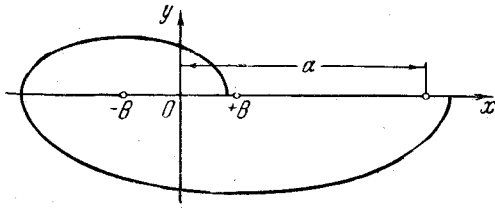


Рис. 137.

$$c(x-B)^2 + y^2 = c(A_1 - B)^2.$$

Фазовая траектория будет представлять собой полуэллипс, расположенный в нижней полуплоскости и пересекающий ось Ox в двух точках, симметрично расположенных относительно точки $+B$ (рис. 137).

В верхней полуплоскости мы получим полуэллипс, симметричный относительно оси $x=-B$. Этот эллипс закончился бы справа в полосе застоя ($-B, +B$), и маятник остановился бы. Но так было бы, если бы никаких пополнений энергии маятник не получал. В действительности при значении $x=\alpha$ он получает первую порцию энергии ΔH . Ордината в этом положении равна

$$y_1 = -\sqrt{c[(A_1 - B)^2 - (\alpha - B)^2]} = -\sqrt{c(A_1 - \alpha)(A_1 - 2B + \alpha)}.$$

Чтобы y_1 было вещественным, должны выполняться условия

$$A_1 > \alpha, \quad A_1 > 2B - \alpha. \quad (12.49)$$

В самом деле, если бы было

$$A_1 < \alpha, \quad A_1 < 2B - \alpha,$$

то движение вообще бы не началось, так как из последних неравенств следовало бы, что $A_1 < B$, т. е. маятник уже в начальном отклонении был бы в полосе застоя.

Условия (12.49) можно заменить одним из следующих неравенств:

$$A_1 > \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha > B, \\ 2B - \alpha, & \text{если } \alpha < B. \end{cases} \quad (12.50)$$

Получив в положении $C_1(x=\alpha, y=y_1)$ порцию энергии ΔH (рис. 138), изображающая точка сразу оказывается в положении $C'_1(x, y'_1)$ и мы имеем:

$$\left(\frac{y'_1{}^2}{2} + \frac{1}{2}c\alpha^2\right) - \left(\frac{y_1^2}{2} + \frac{1}{2}c\alpha^2\right) = \Delta H$$

или

$$y'_1{}^2 - y_1^2 = 2\Delta H.$$

Отсюда

$$y'_1 = -\sqrt{y_1^2 + 2\Delta H} = -\sqrt{c[(A_1 - B)^2 - (\alpha - B)^2 + h]}, \quad (12.51)$$

где

$$h = \frac{2\Delta H}{c}.$$

После этого точка будет двигаться по эллипсу

$$c(x-B)^2 + y^2 = c(\alpha - B)^2 + y_1^2,$$

уравнение которого получится из (12.48) при начальных условиях $x=\alpha, y=y_1$ (рис. 138)¹⁾. С помощью (12.51) это последнее уравнение можно переписать так:

$$c(x-B)^2 + y^2 = c[(A_1 - B)^2 + h].$$

Положив здесь $y=0$, получим отклонение A_2 точки влево от начала координат. Его абсолютная величина

$$A_2 = \sqrt{(A_1 - B)^2 + h} - B. \quad (12.52)$$

Фазовая траектория в верхней полуплоскости будет иметь аналогичное расположение с прямолинейным, параллельным оси Oy участком с абсциссой $-\alpha$ (место второго толчка со стороны якоря).

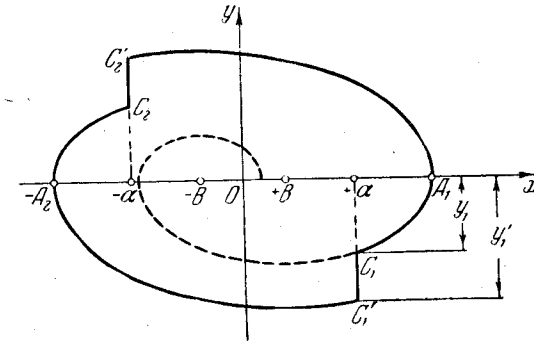


Рис. 138.

Последовательные отклонения маятника в противоположные стороны будут расти, если

$$\sqrt{(A_1 - B)^2 + h} - B > A_1$$

или

$$(A_1 - B)^2 + h > (A_1 + B)^2,$$

т. е. если

$$A_1 < \frac{h}{4B} = \frac{\Delta H}{2Bc} = A. \quad (12.53)$$

Если

$$A_1 > A,$$

то амплитуды будут убывать. Докажем, что при условии

$$B < A_1 < A$$

отклонения, возрастая, будут стремиться к A . В самом деле, если

$$B < A_1 < A,$$

¹⁾ Пунктир на рис. 138 изображает фазовую траекторию при отсутствии толчка в C_1 .

то, как это следует из формул (12.52) и (12.53):

$$A_2 < \sqrt{(A-B)^2 + h} - B = \sqrt{(A-B)^2 + 4AB} - B = A,$$

$$A_2 < A.$$

Таким образом, возрастая, отклонения остаются ограниченными сверху. Далее

$$A_2 - A_1 = \sqrt{(A_1 - B)^2 + h} - (A_1 + B) = \frac{(A_1 - B)^2 + h - (A_1 + B)^2}{\sqrt{(A_1 - B)^2 + h} + (A_1 + B)} =$$

$$= \frac{h - 4A_1 B}{\sqrt{(A_1 - B)^2 + h} + (A_1 + B)} = \frac{4B(A - A_1)}{\sqrt{(A - B)^2 + h} + (A + B)}$$

и так как $B < A_1 < A$, то

$$A_2 - A_1 > \frac{4B(A - A_1)}{\sqrt{(A - B)^2 + h} + (A + B)} = \frac{2B(A - A_1)}{A + B}.$$

Но A_1 и A_2 стремятся к одному и тому же пределу; следовательно, разность

$$A_2 - A_1$$

стремится к нулю, а вместе с тем

$$\lim A_1 = A.$$

Так же можно доказать, что когда начальное отклонение больше A , то последующие отклонения стремятся к A , убывая.

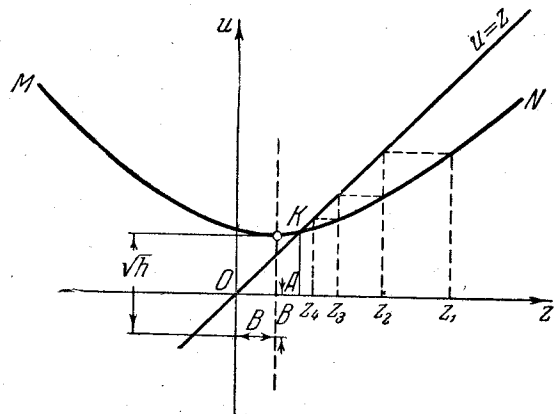


Рис. 139.

Соотношение (12.52) между двумя последовательными отклонениями A_1 и A_2 можно, обозначив $A_1 = z$, $A_2 = u$, представить в таком виде:

$$-\frac{(z-B)^2}{h} + \frac{(u+B)^2}{h} = 1.$$

В системе координат (z, u) это будет уравнение равнобочной гиперболы с центром в точке $(B, -B)$ и с асимптотой

$$u = z - 2B.$$

Построив эту гиперболу, проводим биссектрису $z = u$. Точка пересечения K биссектрисы с гиперболой определяет стационарную амплитуду периодических колебаний системы (рис. 139).

Задавшись теперь некоторым начальным отклонением $z_1 > A$, мы получим следующее отклонение влево как ординату точки гиперболы MN с абсциссой z_1 . С помощью прямой $u = z$ переносим это отклонение на ось Oz в точку z_2 . Ордината точки гиперболы MN , соответствующая абсциссе z_2 , даст следующее отклонение вправо z_3 и т. д. Отклонения идут убывая, приближаясь к предельному A , изображаемому ординатой точки K . Если начальное отклонение вправо взято меньшим A , то отклонения будут возрастать, асимптотически приближаясь снизу к тому же пределу.

Амплитуда A не зависит от начальных условий. Однако начальные условия здесь вообще играют известную роль в определении последующей судьбы системы: от начальных условий зависит, будет ли система вести себя как диссипативная или как автоколебательная.

Стационарный автоколебательный режим устанавливается, если начальное отклонение удовлетворяет условиям

$$A_1 > \begin{cases} \alpha, & \text{если } B < \alpha, \\ 2B - \alpha, & \text{если } B > \alpha. \end{cases}$$

Периодическое движение с предельной амплитудой A асимптотически устойчиво. При небольшом возмущении амплитуды ΔA мы получим отклонение, расположенное справа или слева от A , которое будет или уменьшаться или увеличиваться, неизменно приближаясь к A .

Автоколебания — один из самых распространенных видов свободных нелинейных колебаний неконсервативных систем. Часто ими пользуются для создания автоматически действующих незатухающих колебательных систем, как, например, в часах, в поршневых двигателях, в музыкальных духовых язычковых и смычковых струнных инструментах. Еще чаще автоколебания, возникающие во многих аппаратах и механизмах, оказываются вредными для нормальной работы, а иногда даже и целости последних. Таковы, например, автоколебания в системах автоматического регулирования. Последние уже по самому устройству своему сходны с автоколебательными системами, так что почти всегда при конструировании регуляторов приходится принимать специальные меры к устранению условий, при которых возможно возникновение автоколебаний. Весьма опасными являются автоколебания крыльев и хвостового оперения самолета — так называемый «флягтер», — возникающий при определенных скоростях полета и приводящий иногда к полному разрушению самолета и его гибели. Много примеров автоколебательных систем приведено в прекрасной книжке А. А. Харкевича «Автоколебания»¹⁾, чтение которой может служить введением в общую теорию автоколебаний.

¹⁾ Харкевич А. А., Автоколебания, Гостехиздат, 1954. Об автоколебаниях см. также Стокер Д., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, ИЛ, 1952; Теодорчик К. Ф., Автоколебательные системы, 1952; Рокар И., Неустойчивость в механике, ИЛ, 1959.

ГЛАВА XIII

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ

1. Предварительные замечания. В дальнейшем под общими методами нелинейной механики разумеются методы построения периодических решений нелинейных систем с помощью рядов, расположенных по степеням малого параметра, существенным образом связанного с нелинейными характеристиками системы, или по степеням малых начальных отклонений системы из устойчивого невозмущенного состояния. Эти построения относятся к некоторым частным видам нелинейных систем, главным образом к так называемым квазилинейным системам. При некоторых условиях, которым обычно удовлетворяют уравнения движения системы для известной области значений входящих в них параметров, степенные ряды, представляющие периодические решения этих уравнений, являются сходящимися на сколь угодно большом промежутке времени. Однако в меньшем числе случаев, встречающихся в приложениях, ряды, представляющие периодические решения нелинейных систем, оказываются рядами асимптотическими, вообще говоря, расходящимися, но такими, конечное число первых членов которых при известных условиях может представить это решение на достаточно большом промежутке времени с любой точностью.

В настоящее время имеется весьма обширная литература, посвященная общим методам нелинейной механики¹⁾. Само собой разумеется, дальнейшее изложение методов нелинейной механики ни в коей мере не может претендовать на полное и везде строго обоснованное воспроизведение относящихся сюда теорий. Мы ограничиваемся упрощенным *описанием содержания* только некоторых теорем существования и вытекающих из них приемов построения периодических решений, достаточно простых в практическом их применении и ограниченных, главным образом, первым приближением. Более подробное изложение этих теорем и надлежащее их обоснование можно найти в цитиро-

¹⁾ См. Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям, Киев, 1961, Изд. АН УССР, 1963.

ванной далее литературе, главным образом в книгах: И. Г. Малкина¹⁾, А. А. Андропова, А. А. Витта и С. Э. Хайкина²⁾, А. Н. Крылова³⁾, Э. Пикара⁴⁾, Н. В. Бутенина⁵⁾, Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского⁶⁾.

2. Теорема Пуанкаре (случай вынужденных колебаний). Теорема Пуанкаре относится к системам, уравнения движения которых содержат малый параметр μ и обладают периодическим решением, когда этот параметр равен нулю. Такие системы мы будем называть *системами Пуанкаре*. Частным случаем систем Пуанкаре являются так называемые *квазилинейные системы*, в которых нелинейные члены входят умноженными на малый параметр μ и которые обращаются при $\mu = 0$ в *линейные уравнения с постоянными коэффициентами*. Такой будет, например, система, описываемая уравнением Ван-дер-Поля.

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}$$

или уравнением более общей формы

$$\ddot{x} + k^2x = \mu f(x, \dot{x}; t),$$

где $f(x, \dot{x}; t)$ — некоторая заданная функция, разложение которой по степеням x и \dot{x} начинается с членов не ниже второго порядка. Квазилинейными системами мы и ограничимся в изложении содержания теоремы Пуанкаре.

Основной факт, устанавливаемый теоремой Пуанкаре, заключается в том, что возможные в квазилинейных системах при достаточно малом μ периодические движения располагаются вблизи периодических движений соответствующих линейных систем, в которые они обращаются при $\mu = 0$. В связи с этим линейная система, получаемая из квазилинейной при $\mu = 0$, и ее периодические решения, вблизи которых возникают периодические решения квазилинейной, называются по отношению к последней *порождающими*. В применении теоремы Пуанкаре приходится иметь дело с двумя видами порождающих систем и решений и соответственно с двумя методами построения периодических решений квазилинейных систем. Первый относится к случаю, когда порождающие уравнения являются уравнениями вынужденных колебаний с периодической правой частью, явно зависящей от времени, периодическое решение которых не содержит

¹⁾ Малкин И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956; Малкин И. Г., Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1949.

²⁾ Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., цит. на стр. 485.

³⁾ Крылов А. Н., Вибрация судов, Собрание трудов, т. X, Изд. АН СССР, 1948.

⁴⁾ Picard E., Traite d'analyse, т. III, Gauthier — Villars, 1908.

⁵⁾ Бутенин Н. В., цит. на стр. 482.

⁶⁾ Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.

никаких произвольных параметров. Большей частью это порождающее решение будет единственным периодическим решением порождающей системы, вблизи которого расположится единственное периодическое решение квазилинейной системы, непрерывно переходящее в порождающее, когда $\mu \rightarrow 0$. Так будет, например, в квазилинейной системе с уравнением

$$\ddot{x} + k^2 x = \sin t + \mu x^3, \quad (13.1)$$

где k не равно целому числу. При $\mu = 0$ эта система превращается в линейную

$$\ddot{x} + k^2 x = \sin t$$

с единственным периодическим решением

$$x = \frac{\sin t}{k^2 - 1},$$

не содержащим никаких произвольных постоянных.

Другой существенно отличный случай имеет место, когда порождающее решение зависит от некоторых произвольных параметров, т. е. когда порождающая система имеет бесчисленное множество решений. Так будет, например, в консервативной системе с уравнением

$$\ddot{x} + k^2 x = \mu x^3. \quad (13.2)$$

Порождающее уравнение

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

имеет решение

$$x = A \cos kt + B \sin kt,$$

зависящее от произвольных параметров A и B . В этом последнем случае квазилинейная система (13.2) может иметь несколько периодических решений, которые возникнут вблизи некоторых отобранных решений порождающей системы с особыми значениями параметров A и B .

Указанные два случая различаются между собой и формой уравнений движения системы. В первом случае квазилинейная система (13.1) содержит явно время под знаком периодической функции с заданным или известным периодом, совпадающим с периодом порождающего решения (2π в приведенном выше примере). Во втором случае уравнение квазилинейной системы (13.2) явно от времени не зависит. Период возможного в ней периодического решения заранее не известен и может быть, вообще говоря, каким угодно. В частности, он не будет равен периоду порождающего решения, так как, очевидно, будет зависеть от параметра μ .

Переходим к изложению содержания теоремы Пуанкаре. Предположим, что уравнения движения квазилинейной системы приведены к виду

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(t, x_1, \dots, x_n, \mu) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (13.3)$$

где функции F_i явно зависят от времени, являются периодическими функциями времени заданного известного периода, например 2π , и аналитическими функциями координат x_1, x_2, \dots, x_n в некоторой области значений последних и параметра μ для достаточно малых его значений. Пусть далее при $\mu = 0$ система (13.3) имеет частное периодическое решение

$$x_i = \varphi_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (13.4)$$

того же периода 2π , что и функции F_i .

В этом случае при начальных условиях

$$x_i(0) = \varphi_i(0) + \alpha_i^1 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (13.5)$$

система (13.3) будет иметь решение

$$x_i = x_i(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \mu) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (13.6)$$

аналитическое относительно $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \mu$ для достаточно малых значений этих величин, обращающееся в (13.4) при $\mu = 0$.

Давая α_i различные значения, мы получим бесчисленное множество решений системы (13.3) указанного типа. Среди этих решений будут и периодические, если они в системе (13.3) вообще существуют. Они будут соответствовать таким значениям $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, при которых функции (13.6) будут периодическими периода 2π .

Теорема Пуанкаре утверждает, что система (13.3) имеет периодическое решение периода 2π , разлагающееся в ряд по степеням малого параметра μ и обращающееся в (13.4) при $\mu = 0$, если при выполнении всех перечисленных выше условий, наложенных на функции F_i , можно будет определить из необходимых и достаточных условий периодичности функций (13.6)

$$\psi_i \equiv x_i(2\pi, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \mu) - x_i(0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \mu) = 0 \quad (13.7) \\ (i=1, 2, \dots, n),$$

начальные значения $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ как такие функции μ , которые для достаточно малых значений μ разлагаются в ряды по степеням μ и обращаются в нули для $\mu = 0$. В этом случае решение (13.6)

¹⁾ Где α_i — малые возмущения начальных условий периодического решения (13.4) порождающей системы.

после подстановки в него найденных из (13.7) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ будет иметь вид

$$x_i = \varphi_i(t) + \mu\varphi_{i1}(t) + \mu^2\varphi_{i2}(t) + \dots \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (13.8)$$

где $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots$ — непрерывные периодические функции периода 2π .

Уравнения (13.7) имеют нулевое решение для всех $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ при $\mu=0$, так как при $\mu=0$ они обращаются в уравнения

$$\varphi_i(2\pi) - \varphi_i(0) - \alpha_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

из которых в силу периодичности $\varphi_i(t)$:

$$\alpha_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Следовательно, левые части этих уравнений, т. е. функции ψ_i ($i=1, 2, \dots, n$) разлагаются в ряды по степеням $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \mu$, исчезающие при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \mu = 0$. Линейные части этих разложений имеют вид

$$\psi_i = b_{i1}\alpha_1 + b_{i2}\alpha_2 + \dots + b_{in}\alpha_n + c_i\mu + \dots \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \quad (13.9)$$

не равен нулю, то, как известно из теории неявных функций, из уравнений (13.7) можно найти все α_i ($i=1, 2, \dots, n$), как функции μ , обладающие указанными выше свойствами. В квазилинейных системах составление определителя (13.9) не представит особых затруднений, если предварительно будет найдено *общее решение порождающей системы*:

$$x_i = \varphi_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Условия периодичности этого решения будут совпадать с условиями периодичности решения (13.4).

Самое построение периодического решения уравнений (13.3), после того как установлена форма этого решения, не представляет особых трудностей. Подставив в уравнения (13.3)

$$x_i(t) = \varphi_i(t) + \mu\varphi_{i1}(t) + \mu^2\varphi_{i2}(t) + \dots,$$

сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях μ в обеих частях уравнений. Тогда получим ряд рекуррентных дифференциальных уравнений, из которых при выполнении одного и того же условия периодичности последовательно найдутся все функции $\varphi_i(t)$ и $\varphi_{ik}(t)$.

Рассмотрим в качестве примера нелинейную систему с уравнением

$$\ddot{x} + k^2x = h \sin t + \mu x^3, \quad (13.10)$$

где k не равно целому числу. Это уравнение удовлетворяет всем условиям теоремы Пуанкаре. Правая часть зависит явно от времени и является периодической функцией t с периодом 2π . Решение этого уравнения можно поэтому искать в виде ряда

$$x(t) = \varphi(t) + \mu\varphi_1(t) + \mu^2\varphi_2(t) + \dots$$

Подставив этот ряд в (13.10) и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях μ слева и справа, получим для $\varphi(t)$ и $\varphi_k(t)$ дифференциальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} + k^2\varphi &= h \sin t, \\ \ddot{\varphi}_1 + k^2\varphi_1 &= \varphi^3, \\ \ddot{\varphi}_2 + k^2\varphi_2 &= 3\varphi^2\varphi_1, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (13.11)$$

Общее решение первого уравнения будет иметь вид

$$\varphi(t) = A \cos kt + B \sin kt + \frac{h \sin t}{k^2 - 1}. \quad (13.12)$$

Постоянные A и B находим из условий периодичности, которые напишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} A(\cos 2k\pi - 1) + B \sin 2k\pi &= 0, \\ -A \sin 2k\pi + B(\cos 2k\pi - 1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.13)$$

Определитель системы (13.13) будет определителем (13.9), неравенство нулю которого является условием возможности найти из уравнений (13.13) такие значения постоянных A и B , при которых решение первого уравнения (13.11) будет периодическим с периодом 2π . В рассматриваемом случае этот определитель

$$\begin{vmatrix} \cos 2k\pi - 1 & \sin 2k\pi \\ -\sin 2k\pi & \cos 2k\pi - 1 \end{vmatrix} = \\ = (\cos 2k\pi - 1)^2 + \sin^2 2k\pi = 2(1 - \cos 2k\pi) \neq 0. \quad (13.14)$$

Следовательно, $A=B=0$ и решением первого уравнения (13.11) будет периодическая функция

$$\varphi(t) = \frac{h \sin t}{k^2 - 1}, \quad (13.14')$$

не содержащая никаких произвольных параметров. Подставив ее во второе уравнение (13.11), представим его в виде

$$\ddot{\varphi}_1 + k^2\varphi_1 = \frac{h^3}{4(k^2 - 1)^3} (3 \sin t - \sin 3t).$$

Его общее решение

$$\varphi_1(t) = A_1 \cos kt + B_1 \sin kt + \frac{3h^3 \sin t}{4(k^2 - 1)^3} - \frac{h^3 \sin 3t}{4(k^2 - 1)^3(k^2 - 9)}.$$

Условия периодичности здесь выражаются теми же однородными уравнениями (13.13) с неравным нулю определителем (13.14). Следовательно, и здесь периодическое решение для $\varphi_1(t)$ получится при $A_1 = B_1 = 0$ и оно будет

$$\varphi_1(t) = \frac{3h^3 \sin t}{4(k^2 - 1)^3} - \frac{h^3 \sin 3t}{4(k^2 - 1)^3(k^2 - 9)}$$

и т. д. Условия периодичности для всех функций $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ будут одни и те же, именно условия периодичности (13.14). Функции $\varphi_2(t), \varphi_3(t)$ и т. д. найдутся аналогичным путем. Остановившись на первом приближении, получим в качестве единственного периодического решения уравнения (13.10) ряд

$$x(t) = \frac{h \sin t}{k^2 - 1} + \mu \left[\frac{3h^3 \sin t}{4(k^2 - 1)^3} - \frac{h^3 \sin 3t}{4(k^2 - 1)^3(k^2 - 9)} \right].$$

Это решение при достаточно малом μ будет близким к (13.14'), обращаясь в последнее, когда $\mu = 0$.

Как видно из разобранных примера и как это следует из теоремы Пуанкаре, между периодическим решением квазилинейной системы и решением (13.4) в случае, когда $\Delta \neq 0$, имеет место определенное соответствие, выражающееся в том, что первое близко ко второму при достаточно малом μ и непрерывно переходит во второе, когда $\mu \rightarrow 0$. Можно сказать, что в этом случае принципиального различия между нелинейной системой и получающейся из последней при $\mu = 0$ линейной нет, так что замена первой второю при достаточно малом μ является вполне допустимой.

Иначе обстоит дело, когда определитель Δ равен нулю. В этом случае указанное выше соответствие между квазилинейной и линеаризованной (порождающей) системами нарушается. Линеаризованная система уже не воспроизводит достаточно точно даже при малом μ все колебательные свойства квазилинейной системы. Последняя является в этом случае существенно нелинейной системой, линеаризация которой, вообще говоря, недопустима. В условии неравенства нулю определителя Δ мы получаем, таким образом, своего рода критерий допустимости линеаризации квазилинейных систем.

Предположим, что определитель Δ равен нулю и пусть ранг этого определителя будет m . Тогда из уравнений (13.7) можно будет найти m величин $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, выразив их через μ и остальные $n - m$ величин $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$, которые могут принимать произвольные значения. Подставив найденные таким образом $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ в (13.6), получим периодические решения уравнений (13.3), зависящие от одного или

нескольких произвольных параметров. Такой случай будет, например, иметь место, когда система (13.3) имеет первый интеграл или когда уже в порождающее решение входят произвольные параметры.

3. Теорема Пуанкаре (случай свободных колебаний автономных квазилинейных систем). Уравнения движения автономных систем

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n, \mu) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13.15)$$

не зависят явно от времени, а потому период возможного в таких системах периодического решения заранее не предопределен и может быть, вообще говоря, каким угодно. Далее, если известно периодическое решение $x_i(t)$ системы (13.15), то периодическими решениями этой системы будут также и функции $x_i(t - t_1)$, где t_1 — некоторый произвольный момент времени. Эти функции будут описывать тот же периодический процесс, что и $x_i(t)$, только запаздывающий на t_1 сравнительно с $x_i(t)$. Таким образом, периодические решения системы (13.15) будут зависеть по крайней мере от одного произвольного параметра.

Отмеченные свойства автономных систем существенным образом влияют на процесс построения периодических решений уравнений (13.15). В остальном для функций F_i сохраняются прежние условия: функции F_i являются аналитическими функциями координат x_1, \dots, x_n в рассматриваемой далее области значений последних и параметра μ для малых его значений; при $\mu = 0$ уравнения (13.15) обращаются в линейную систему с постоянными коэффициентами, обладающую периодическим решением с некоторым периодом T . Только период этот уже не будет совпадать с периодом возможного для системы (13.15) периодического решения. Период T_1 последнего решения, когда оно существует, будет отличаться от T на некоторую величину αT , зависящую от параметра μ , что мы запишем следующим образом:

$$T_1 = T(1 + \alpha).$$

Принимая во внимание эти замечания, мы изложим теорему Пуанкаре для автономных систем следующим образом.

Если правые части уравнений движения системы

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n, \mu) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13.16)$$

являются аналитическими функциями переменных x_1, x_2, \dots, x_n в некоторой области значений последних и параметра μ для достаточно малых его значений; если далее уравнения (13.16) при $\mu = 0$ имеют периодическое решение

$$x_i = \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

с периодом T , то решение системы (13.16), соответствующее начальным условиям

$$x_i(0) = \varphi_i(0) + \alpha_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

и записываемое в виде

$$x_i = x_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \mu) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

будет 1) аналитическим относительно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и μ для малых значений этих величин; 2) периодическим с периодом $T(1 + \alpha)$, если величины $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ можно будет найти из условий периодичности

$$\psi_i \equiv x_i(T(1 + \alpha), \alpha_1, \dots, \alpha_n, \mu) - \varphi_i(0) - \alpha_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (13.17)$$

положив одну из них, например α_n , равной нулю, как аналитические функции μ , которые для $\mu=0$ обращаются в нуль.

При выполнении всех условий теоремы периодическое решение автономной системы (13.16) может быть представлено рядами

$$x_i(t) = \varphi_i(t) + \mu \varphi_{i1}(t) + \mu^2 \varphi_{i2}(t) + \dots \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (13.18)$$

сходящимися для достаточно малых μ .

Следует обратить внимание на то, что число неизвестных функций параметра μ

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n,$$

которые нужно найти из условий периодичности (13.17) на единицу больше числа уравнений. Эта неопределенность устраняется тем, что одно из чисел α_i , например α_n , принимается равным нулю. Общность решения будет восстановлена возможностью произвольно выбрать начало отсчета времени или постоянную t_1 , о которой выше шла речь.

Несмотря на то, что в рассматриваемом случае свободных колебаний автономной системы форма искомого периодического решения (13.18) — такая же, как и форма периодического решения (13.8) неавтономной системы (13.3), фактическое его получение связано с одним своеобразным затруднением. Коэффициенты ряда (13.18) — функции $\varphi_{ik}(t)$ — после подстановки (13.18) в уравнения (13.16), сравнения коэффициентов при одинаковых степенях μ и решения получающихся таким образом дифференциальных уравнений оказываются непериодическими, содержащими вековые члены, несмотря на то, что ряд (13.18) в целом, т. е. функции $x_i(t)$, удовлетворяют условиям периодичности. Из периодичности функций $x_i(t)$ здесь не вытекает периодичность коэффициентов $\varphi_{ik}(t)$, как это имело место в неавтономных системах. Иначе говоря, из равенства

$$x_i[t + T(1 + \alpha)] = x_i(t)$$

не следуют равенства

$$\begin{aligned} \varphi_i[t + T(1 + \alpha)] &= \varphi_i(t), \\ \varphi_{ik}[t + T(1 + \alpha)] &= \varphi_{ik}(t). \end{aligned}$$

Эти последние вообще невозможны, так как их левые части зависят от μ (через α), а правые от μ не зависят. Это обстоятельство не должно показаться неожиданным. В разложение периодической функции могут входить вековые члены, как это можно видеть на примере разложения функции

$$\sin(1 + \mu)t \quad (\mu > 0).$$

Это периодическая функция с периодом $\frac{2\pi}{1 + \mu}$. Разложение этой функции по степеням μ приводит к ряду

$$\sin(1 + \mu)t = \sin t + \mu t \cos t - \frac{\mu^2 t^2}{2} \sin t + \dots,$$

отдельные члены которого, содержащие t не под знаком синуса и косинуса, растут вместе с t неограниченно. Пользоваться такими рядами, несмотря на их сходимости в целом, в практических расчетах, где приходится ограничиваться конечным числом членов разложения, нельзя. Таким конечным числом членов с вековыми слагаемыми нельзя дать представления периодичности функции.

С такого рода затруднениями встретились астрономы XVIII в., когда пытались, решая при помощи рядов дифференциальные уравнения движения планет, получить периодические выражения для координат планеты. Тогда же в связи с этим были предложены некоторые специальные способы освобождения решений от вековых членов. Наиболее известны работы в этом направлении Лапласа и Лагранжа. Однако способы, предложенные этими учеными, хотя и приводят в конце концов к цели, весьма сложны и связаны с громоздкими выкладками.

Первое простое решение задачи о построении периодических решений автономных систем дал М. В. Остроградский. Учитывая, что нелинейность в автономных системах влияет на период, Остроградский предложил строить одновременно два разложения по степеням параметра μ : искомой функции $x(t)$ и ее периода $T(1 + \alpha)$. Прием, предложенный Остроградским, был развит и обобщен А. М. Ляпуновым; распространившим его на системы с n степенями свободы и установившим условия сходимости получаемых при этом рядов. Существенные упрощения метода сделаны А. Н. Крыловым¹⁾.

¹⁾ Крылов А. Н., О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах, Изд. АН СССР, 1932.

Сущность приема Ляпунова заключается в преобразовании уравнений автономной системы к так называемому «собственному времени», в котором единицей времени является искомый период колебаний системы, который оказывается, таким образом, заранее известным, что позволяет оперировать с автономными системами так же, как и с неавтономными.

Переход к такому «собственному» времени τ осуществляется при помощи формулы

$$\tau = \frac{1}{T(1+\alpha)} t,$$

где T — период порождающего решения, α — зависящий от μ поправочный множитель к периоду T . В дальнейшем, однако, оказывается более удобным пользоваться единицей собственного времени, в 2π раз меньшую, так что периоду $T(1+\alpha)$ будет соответствовать 2π единиц собственного времени в силу соотношения

$$\tau = \frac{2\pi}{T(1+\alpha)} t.$$

Мы будем предполагать, что зависящая от μ поправка $\alpha(\mu)$ разлагается по степеням μ в ряд с постоянными коэффициентами, исчезающий при $\mu=0$, в связи с чем положим

$$T(1+\alpha) = T(1+h_1\mu+h_2\mu^2+\dots). \quad (13.19)$$

Такое представление искомого периода $T(1+\alpha)$ дает возможность надлежащим выбором значений коэффициентов h_i выполнять условия периодичности для функций φ_{ik} на каждом этапе их определения.

Для более удобного ознакомления с деталями построения периодического решения квазилинейной автономной системы рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + k^2x = \mu f(x, \dot{x}). \quad (13.20)$$

Это одно из важнейших по своим приложениям квазилинейное уравнение, которому посвящено большое число исследований. Общая теория периодических решений этого уравнения разработана А. А. Андроновым и А. А. Виттом¹⁾. Уравнением такого же типа является уже встречавшееся нам уравнение Ван-дер-Поля, имеющее важные приложения в радиотехнике.

Для перехода к собственному времени в уравнении (13.20) полагаем

$$\tau = \frac{2\pi}{T(1+\alpha)} t = kt(1+h_1\mu+h_2\mu^2+\dots)^{-1},$$

¹⁾ Андронов А. А. и Витт А. А., К математической теории автоколебательных систем, ЖТФ, т. IV, вып. 1, 1934.

где $k = \frac{2\pi}{T}$ — частота периодического решения порождающего уравнения

$$\ddot{x} + k^2x = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} k(1+h_1\mu+h_2\mu^2+\dots)^{-1}, \\ \ddot{x} &= \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{d\tau^2} k^2(1+h_1\mu+h_2\mu^2+\dots)^{-2}. \end{aligned}$$

После подстановки в уравнение (13.20) получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} + x(1+h_1\mu+h_2\mu^2+\dots)^2 &= \\ = \frac{\mu}{k^2} f\left[x, k \frac{dx}{d\tau} (1+h_1\mu+h_2\mu^2+\dots)^{-1}\right] (1+h_1\mu+h_2\mu^2+\dots)^3. \end{aligned} \quad (13.21)$$

Решение этого уравнения будем искать, как и для неавтономной системы, в виде ряда

$$x(\tau) = \varphi(\tau) + \mu\varphi_1(\tau) + \mu^2\varphi_2(\tau) + \dots,$$

период которого не зависит от μ и равен как для $x(\tau)$, так и для всех функций $\varphi(\tau)$, $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$, ... одному и тому же числу 2π . Подставив это выражение $x(\tau)$ в (13.21), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \mu \frac{d^2\varphi_1}{d\tau^2} + \mu^2 \frac{d^2\varphi_2}{d\tau^2} + \dots + \\ + (\varphi + \mu\varphi_1 + \mu^2\varphi_2 + \dots)(1+h_1\mu+h_2\mu^2+\dots)^2 &= \\ = \frac{\mu}{k^2} f[\varphi + \mu\varphi_1 + \mu^2\varphi_2 + \dots; k(\dot{\varphi} + \mu\dot{\varphi}_1 + \mu^2\dot{\varphi}_2 + \dots)(1+h_1\mu + \\ + h_2\mu^2 + \dots)^{-1}] (1+h_1\mu+h_2\mu^2+\dots)^3. \end{aligned}$$

Сравнив коэффициенты при одинаковых степенях μ в левой и правой частях последнего уравнения, получим рекуррентные дифференциальные уравнения для φ , φ_1 , φ_2 , ...

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \varphi &= 0, \\ \frac{d^2\varphi_1}{d\tau^2} + \varphi_1 &= -2h_1\varphi + \frac{1}{k^2} f(\varphi, k\dot{\varphi}), \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (13.22)$$

Из первого уравнения находим

$$\varphi = A \cos \tau + B \sin \tau.$$

Одну из произвольных постоянных, а именно B , полагаем согласно общей теории равной нулю. Тогда

$$\varphi = A \cos \tau.$$

Предположение, что $B=0$ равносильно выбору для $\varphi(t)$ начальных условий

$$\tau=0, \quad \varphi(0)=A, \quad \dot{\varphi}(0)=0.$$

Так как $\varphi(\tau)$ является периодической функцией, то всегда найдется такой момент времени τ_1 , когда $\dot{\varphi}$ обратится в нуль. Этот момент можно принять за начальный, положив $\tau_1=0$, так как перемена начала отсчета времени, как было отмечено выше, в автономных системах ничего не меняет ни в самом решении, ни в его построении.

Подставив найденное значение φ во второе уравнение (13.22) получим для φ_1

$$\frac{d^2\varphi_1}{d\tau^2} + \varphi_1 = -2h_1A \cos \tau + \frac{1}{k^2} f(A \cos \tau, -Ak \sin \tau).$$

Решение этого уравнения можно представить в таком виде¹⁾:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) = & A_1 \cos \tau + B_1 \sin \tau - 2h_1A \int_0^\tau \cos \xi \sin(\tau - \xi) d\xi + \\ & + \frac{1}{k^2} \int_0^\tau f(A \cos \xi, -Ak \sin \xi) \sin(\tau - \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Условия периодичности

$$\begin{aligned} \varphi_1(2\pi) - \varphi_1(0) &= 0, \\ \dot{\varphi}_1(2\pi) - \dot{\varphi}_1(0) &= 0 \end{aligned}$$

приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} 2h_1A \int_0^{2\pi} \cos \xi \sin \xi d\xi - \frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} f(A \cos \xi, -Ak \sin \xi) \sin \xi d\xi &= 0, \\ 2h_1A \int_0^{2\pi} \cos^2 \xi d\xi - \frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} f(A \cos \xi, -Ak \sin \xi) \cos \xi d\xi &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(A \cos \xi, -Ak \sin \xi) \sin \xi d\xi &= 0, \\ h_1 - \frac{1}{2A\pi k^2} \int_0^{2\pi} f(A \cos \xi, -Ak \sin \xi) \cos \xi d\xi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.23)$$

Первое из этих уравнений «отбирает» те значения A или те порождающие решения

$$\varphi = A \cos \tau,$$

¹⁾ См. формулу (2.42).

около которых возникают периодические решения уравнения (13.20) при достаточно малом, но отличном от нуля μ . Второе уравнение (13.23) дает поправку на период или частоту колебаний в первом приближении. Ему можно дать более удобную для некоторых приложений форму. Полагая в первом приближении

$$T_1 \approx T(1 + \mu h_1)$$

и обозначив частоту колебаний нелинейной системы (13.20) через ω , найдем при достаточно малом μ

$$\omega = \frac{k}{1 + h_1\mu} \approx k(1 - h_1\mu),$$

или

$$\omega = k - \frac{\mu}{2\pi Ak} \int_0^{2\pi} f(A \cos \xi, -Ak \sin \xi) \cos \xi d\xi.$$

С той же степенью точности последнюю формулу можно заменить следующей:

$$\omega^2 = k^2 - \frac{\mu}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \cos \xi, -Ak \sin \xi) \cos \xi d\xi.$$

4. Метод А. Н. Крылова¹⁾. Сущность этого метода заключается, по выражению самого А. Н. Крылова, «в совместном и одновременном построении разложений для искомой функции $x(t)$ и квадрата искомой частоты». Метод А. Н. Крылова с удобством может быть применен для систем с одной степенью свободы и приводит большей частью к асимптотическим разложениям искомого периодического решения, которые с небольшим числом первых слагаемых дают при достаточно малом μ хорошие приближения, но оказываются расходящимися для $t \rightarrow \infty$.

Содержание метода Крылова мы демонстрируем на конкретном примере, взяв для этого систему, описываемую уравнением

$$\ddot{x} + k^2x + \mu x^3 = 0. \quad (13.24)$$

Это уравнение удовлетворяет всем условиям теоремы Пуанкаре для автономных систем, поэтому если в формально составленном разложении

$$x(t) = \varphi(t) + \mu\varphi_1(t) + \mu^2\varphi_2(t) + \dots \quad (13.25)$$

функции $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ... будут определены как периодические с одним и тем же периодом, то ряд (13.25) представит периодическое

¹⁾ Крылов А. Н., О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах, изд. АН СССР, 1932.

решение уравнения (13.24). Для выполнения условий периодичности А. Н. Крылов одновременно с построением ряда (13.25) строит разложение по малому параметру μ квадрата искомой частоты p , полагая

$$p^2 = k^2 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots$$

Имея в виду получить периодическое решение уравнения (13.24) с точностью до второй степени μ (включительно), полагаем

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t) + \mu\varphi_1(t) + \mu^2\varphi_2(t), \\ p^2 &= k^2 + h_1\mu + h_2\mu^2. \end{aligned}$$

Эти выражения подставляем в уравнение (13.24):

$$\ddot{\varphi} + \mu\ddot{\varphi}_1 + \mu^2\ddot{\varphi}_2 + (p^2 - h_1\mu - h_2\mu^2)(\varphi + \mu\varphi_1 + \mu^2\varphi_2) + \mu(\varphi + \mu\varphi_1 + \mu^2\varphi_2)^3 = 0.$$

Приравняв нулю коэффициенты при различных степенях μ , получим для нахождения функций φ , φ_1 , φ_2 и постоянных h_1 , h_2 уравнения

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} + p^2\varphi &= 0, \\ \ddot{\varphi}_1 + p^2\varphi_1 &= h_1\varphi - \varphi^3, \\ \ddot{\varphi}_2 + p^2\varphi_2 &= h_1\varphi_1 + h_2\varphi - 3\varphi^2\varphi_1. \end{aligned} \right\}$$

Решение уравнения (13.24) будем искать, как и раньше, при начальных условиях для $x(t)$:

$$t=0, \quad x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Эти условия для $x(t)$ будут выполнены, если функции φ , φ_1 , φ_2 будут найдены так, что

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) &= A, & \dot{\varphi}(0) &= 0; \\ \varphi_1(0) &= 0, & \dot{\varphi}_1(0) &= 0; \\ \varphi_2(0) &= 0, & \dot{\varphi}_2(0) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Из первого уравнения находим

$$\varphi(t) = A \cos pt.$$

Это решение подставляем во второе уравнение, которое с помощью формулы

$$\cos^3 pt = \frac{1}{4}(\cos 3pt + 3 \cos pt)$$

представляем в виде

$$\ddot{\varphi}_1 + p^2\varphi_1 = \left(h_1A - \frac{3}{4}A^3\right) \cos pt - \frac{A^3}{4} \cos 3pt. \quad (13.26)$$

Чтобы не получить векового члена, выбираем h_1 так, чтобы коэффициент при $\cos pt$ в правой части был равен нулю, т. е. чтобы

$$h_1A - \frac{3}{4}A^3 = 0,$$

откуда

$$h_1 = \frac{3}{4}A^2.$$

После этого решение уравнения (13.26) будет иметь вид

$$\varphi_1(t) = M_1 \cos pt + N_1 \sin pt + \frac{A^3}{32p^2} \cos 3pt.$$

При нулевых начальных условиях

$$M_1 = -\frac{A^3}{32p^2}, \quad N_1 = 0$$

и

$$\varphi_1(t) = \frac{A^3}{32p^2} (\cos 3pt - \cos pt).$$

Таким образом, решение уравнения (13.24) в первом приближении имеет вид

$$x(t) = A \cos pt + \frac{\mu A^3}{32p^2} (\cos 3pt - \cos pt),$$

где

$$p^2 = k^2 + \frac{3}{4}\mu A^2.$$

Чтобы получить второе приближение, подставляем найденные φ и φ_1 в третье уравнение. После некоторых элементарных преобразований получим

$$\ddot{\varphi}_2 + p^2\varphi_2 = \left(h_2A + \frac{3}{128} \frac{A^5}{p^2}\right) \cos pt - \frac{3}{128} \frac{A^5}{p^2} \cos 5pt.$$

Чтобы исключить вековой член, полагаем

$$h_2A + \frac{3}{128} \frac{A^5}{p^2} = 0,$$

откуда находим

$$h_2 = -\frac{3}{128} \frac{A^4}{p^2};$$

затем из уравнения

$$\ddot{\varphi}_2 + p^2\varphi_2 = -\frac{3}{128} \frac{A^5}{p^2} \cos 5pt$$

получаем для φ_2

$$\varphi_2(t) = M_2 \cos pt + N_2 \sin pt + \frac{A^5}{1024p^4} \cos 5pt.$$

При нулевых начальных условиях

$$\varphi_2(t) = \frac{A^3}{1024p^4} (\cos 5pt - \cos pt).$$

Таким образом, во втором приближении

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A \cos pt + \frac{\mu A^3}{32p^2} (\cos 3pt - \cos pt) + \\ &\quad + \frac{\mu^2 A^5}{1024p^4} (\cos 5pt - \cos pt), \\ p^2 &= k^2 + \frac{3}{4} \mu A^2 - \frac{3}{128} \mu^2 \frac{A^4}{p^2}. \end{aligned} \right\}$$

Для вычисления p^2 нужно решить второе уравнение. При этом нет надобности решать его точно. Достаточно получить значение p^2 с точностью до второй степени μ , а для этого следует положить справа в уравнении $p^2 \approx k^2$, переписав его следующим образом:

$$p^2 = k^2 + \frac{3}{4} \mu A^2 - \frac{3}{128} \mu^2 \frac{A^4}{k^2}.$$

В самом деле, так как

$$\frac{1}{p^2} = (k^2 + h_1\mu + \dots)^{-1} \approx k^{-2} \left(1 + \frac{h_1\mu}{k^2} \right)^{-1} \approx \frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{h_1\mu}{k^2} \right),$$

то, взяв в скобках кроме 1 хотя бы один следующий член с первой степенью μ , мы все равно должны были бы отбросить его после умножения на $\frac{3}{128} \mu^2 A^4$.

Пример 1. Колебания маятника с конечной амплитудой. Уравнение колебаний маятника для сравнительно небольших, но конечных отклонений мы возьмем в таком виде¹⁾:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} x = \frac{g}{6l} x^3.$$

Здесь $k^2 = \frac{g}{l}$ и $\mu = \frac{g}{6l}$. Подставив в это уравнение разложения

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t) + \mu\varphi_1(t) + \dots, \\ p^2 &= \frac{g}{l} + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots, \end{aligned}$$

получим для $\varphi, \varphi_1, \dots, h_1, h_2, \dots$ уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + p^2\varphi &= 0, \\ \ddot{\varphi}_1 + p^2\varphi_1 &= h_1\varphi + \varphi^3, \\ &\dots \end{aligned}$$

¹⁾ См. пример 1 гл. XII.

5) Из первого находим

$$\varphi = A \cos pt.$$

Подставив полученное выражение для φ во второе уравнение, получим для φ_1

$$\ddot{\varphi}_1 + p^2\varphi_1 = \left(h_1A + \frac{3A^3}{4} \right) \cos pt + \frac{A^3}{4} \cos 3pt.$$

Чтобы исключить вековой член, полагаем

$$h_1A + \frac{3}{4} A^3 = 0,$$

откуда

$$h_1 = -\frac{3A^2}{4}.$$

Теперь для φ_1 из уравнения

$$\ddot{\varphi}_1 + p^2\varphi_1 = \frac{A^3}{4} \cos 3pt$$

находим периодическое решение

$$\varphi_1(t) = M_1 \cos pt - \frac{A^3}{32p^2} \cos 3pt,$$

где M_1 определяется из условия периодичности для $\varphi_2(t)$. Частота в первом приближении найдется по формуле

$$p^2 = k^2 - \frac{3\mu A^2}{4} = \frac{g}{l} \left(1 - \frac{A^2}{8} \right).$$

Нелинейность уравнения в первом приближении сказывается на частоте, которая оказывается зависящей от амплитуды, как это имеет место вообще в консервативных системах. Период колебаний равен

$$T_1 \cong 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{A^2}{16} \right) = T \left(1 + \frac{A^2}{16} \right), \quad (13.27)$$

где T — период порождающего решения, что даст при $A = 10^\circ; 20^\circ; 30^\circ$ соответственно следующие значения для T_1 : $T_1 = 1,002 T; 1,008 T; 1,017 T$.

К таким же результатам мы пришли в примере 1 гл. XII, но после более сложных расчетов.

5. Метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Теория Ван-дер-Поля устанавливает возможность при известных условиях представить на достаточно большом промежутке времени решение квазилинейной задачи в форме решения соответствующего порождающего уравнения

$$\begin{aligned} x &= a \cos kt + b \sin kt, \\ y &= -a \sin kt + b \cos kt, \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \psi, \\ y &= -R \sin \psi, \end{aligned} \right\} \quad (13.28)$$

где R и ψ должны удовлетворять уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \mu F(R), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\mu}{R} \Phi(R) + 1. \end{aligned} \right\} \quad (13.29)$$

Эту основную идею метода Ван-дер-Поля в сочетании с некоторыми положениями общей теории квазилинейных систем Пуанкаре можно взять за исходную в построении обобщенного асимптотического метода Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова¹⁾, получившего в последнее время развитие в работах Ю. А. Митропольского²⁾. Не входя в подробности и имея в виду практическую сторону дела, мы приведем самое краткое изложение существа метода применительно к уравнению

$$\ddot{x} + k^2 x = \mu f(x, \dot{x}). \quad (13.30)$$

Предполагается, что функция $f(x, \dot{x})$ является аналитической функцией своих аргументов и что периодическое решение уравнения (13.30) в первом приближении может быть представлено в форме

$$x = R \cos \psi.$$

При выполнении этих условий решение уравнения (13.30) может быть представлено с большой точностью при достаточно малом μ *конечным числом* первых членов ряда

$$x(t) = R \cos \psi + \mu u_1(R, \psi) + \mu^2 u_2(R, \psi) + \dots, \quad (13.31)$$

где $u_i(R, \psi)$ суть некоторые, сначала неизвестные, подлежащие в дальнейшем определению функции аргументов R и ψ , причем относительно ψ — периодические периода 2π . Эти аргументы должны удовлетворять обобщенным уравнениям установления

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \mu A_1(R) + \mu^2 A_2(R) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= k + \mu B_1(R) + \mu^2 B_2(R) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (13.32)$$

Для однозначности решения задачи на функции $u_i(R, \psi)$ налагаются еще дополнительные условия

$$\int_0^{2\pi} u_i(R, \psi) \cos \psi d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} u_i(R, \psi) \sin \psi d\psi = 0 \quad (13.33)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots),$$

¹⁾ Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику, Изд. АН УССР, 1937.

²⁾ См. Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1958.

5] при которых первые гармоники в разложениях $u_i(R, \psi)$ в ряд Фурье, содержащие $\cos \psi$ и $\sin \psi$, выпадают, так что R оказывается полной амплитудой первого приближения

$$x = R \cos \psi.$$

Для определения функций $u_i(R, \psi)$, $A_i(R)$ и $B_i(R)$ формально составленные выражения (13.31) и (13.32) подставляем в уравнение (13.30) и после разложения $f(x, \dot{x})$ по степеням параметра μ сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях μ в обеих частях уравнения. Тогда для функций $u_i(R, \psi)$ получаются рекуррентные дифференциальные уравнения, правые части которых будут периодическими функциями ψ . Разложив эти функции в ряды Фурье и сравнив затем в обеих частях рекуррентных уравнений коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем из первого уравнения A_1, B_1 и все гармонические составляющие¹⁾ функции $u_1(R, \psi)$. Сделав надлежащие подстановки во второе уравнение, аналогичным образом найдем A_2, B_2 и гармонические составляющие функции $u_2(R, \psi)$ и т. д.

Мы не приводим здесь этих расчетов, так как первое приближение

$$x = R \cos \psi,$$

построение которого легко выполняется по формулам (13.29), приводит к результатам, по точности совпадающим с результатами расчета методом Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова для разложений (13.31) и (13.32), содержащих только члены с первой степенью μ :

$$x(t) = R \cos \psi + \mu u_1(R, \psi),$$

$$\frac{dR}{dt} = \mu A_1(R), \quad \frac{d\psi}{dt} = k + \mu B_1(R).$$

Вычисление же последующих приближений до второй степени μ оказывается весьма громоздким и, поскольку речь идет о системе с одной степенью свободы, менее предпочтительным, чем метод А. Н. Крылова.

Одним из преимуществ метода Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова является доставляемая им возможность доводить расчет до желаемой степени точности, ограничиваясь конечным числом членов разложений (13.31) и (13.32). Являясь, как правило, расходящимися, эти разложения обладают свойством, которое делает их вполне пригодными для практических расчетов, причем для расчетов, требующих иногда сравнительно большой точности. Дело в так называемых асимптотических свойствах этих разложений, в силу которых конечное число первых членов такого ряда при $\mu \rightarrow 0$ может дать представление

¹⁾ Начиная с гармоники второго порядка, так как первые гармоники выпадают в силу условий (13.33).

периодического решения уравнения (13.30) с высокой точностью для длительного промежутка времени.

6. Системы А. М. Ляпунова¹⁾. В системах Ляпунова отсутствует малый параметр, на который в квазилинейных системах умножены нелинейные члены. Большинство это консервативные системы, обладающие в качестве первого интеграла интегралом сохранения полной механической энергии. При известных условиях такие системы допускают периодическое решение, разлагающееся в ряды по степеням начального значения одной из координат в предположении, что это значение достаточно мало. Вопрос о существовании периодического решения в таких системах был связан у Ляпунова с вопросом об устойчивости невозмущенного движения системы, определяемого нулевыми значениями координат в одном из «критических случаев», именно, когда характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней. Устанавливая условия периодичности возмущенного движения системы, можно, следуя Ляпунову, получить также в этих условиях условия устойчивости невозмущенного движения в этом довольно часто встречающемся критическом случае. Общая теория нелинейных систем Ляпунова вместе с обобщением этой теории на класс так называемых систем, близких к системам Ляпунова, развита И. Г. Малкиным. Из цитированной монографии И. Г. Малкина мы и заимствуем изложение теоремы Ляпунова о существовании и форме периодических решений рассматриваемых систем, приводимой дальше без доказательства.

Теорема Ляпунова. Если уравнения нелинейной системы ($n+2$)-го порядка могут быть приведены к виду²⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x, y, x_1, \dots, x_n), \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x, y, x_1, \dots, x_n), \\ \frac{dx_s}{dt} &= b_{s1}x_1 + \dots + b_{sn}x_n + X_s(x, y, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \right\} \quad (13.34)$$

($s = 1, 2, \dots, n$),

где λ — положительное число; b_{sk} — постоянные коэффициенты; X, Y, X_s — аналитические функции переменных x, y, x_1, \dots, x_n для достаточно малых их значений, начинающиеся в своих разложениях с членов не ниже второго порядка относительно этих

¹⁾ Малкин И. Г., Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1949.

²⁾ Предполагается, что характеристическое уравнение системы (13.34), кроме двух чисто мнимых корней, имеет остальные корни с отрицательными вещественными частями.

переменных; если, далее, уравнения (13.34) обладают первым интегралом вида

$$H \equiv x^2 + y^2 + W(x_1, x_2, \dots, x_n) + S(x, y, \dots, x_n) = \text{const},$$

где $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — квадратичная форма переменных x_1, x_2, \dots, x_n , а $S(x, y, x_1, \dots, x_n)$ — функция всех координат, разложение которой начинается членами не ниже 3-го порядка, то система (13.34) имеет в достаточно малой окрестности точки $x = y = x_1 = \dots = x_n = 0$ периодическое решение, разлагающееся в ряды по степеням начального значения $x = A$ (предполагаемого достаточно малым), которые исчезают при $A = 0$ и обладают периодом, разлагающимся в ряд по степеням A и обращающимся в $2\pi/\lambda$ для $A = 0$.

Для построения периодического решения системы (13.34) необходимо предварительно преобразовать ее к собственному времени τ по формуле

$$\tau = \frac{2\pi}{T_1} t,$$

где T_1 — неизвестный период искомого решения, разлагающийся согласно условию теоремы в ряд по степеням A

$$T_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + h_1 A + h_2 A^2 + \dots). \quad (13.35)$$

После преобразования система (13.34) будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \left(-y + \frac{1}{\lambda} X\right) (1 + h_1 A + h_2 A^2 + \dots), \\ \frac{dy}{d\tau} &= \left(x + \frac{1}{\lambda} Y\right) (1 + h_1 A + h_2 A^2 + \dots), \\ \frac{dx_s}{d\tau} &= \left(c_{s1}x_1 + \dots + c_{sn}x_n + \frac{1}{\lambda} X_s\right) (1 + h_1 A + \dots), \end{aligned} \right\} \quad (13.36)$$

где $c_{sk} = \frac{1}{\lambda} b_{sk}$ и $s = 1, 2, \dots, n$.

Решение системы (13.36) ищем согласно теореме в виде рядов, расположенных по степеням начального значения координаты $x = x_0 = A$:

$$\left. \begin{aligned} x &= Ax_1(\tau) + A^2x_2(\tau) + \dots, \\ y &= Ay_1(\tau) + A^2y_2(\tau) + \dots, \\ x_s &= Ax_{s1}(\tau) + A^2x_{s2}(\tau) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (13.37)$$

Коэффициенты при A, A^2, \dots находятся из уравнений, получающихся после подстановки рядов (13.37) в уравнения (13.36) путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях A . Так, например,

для коэффициентов при первой степени A получим указанным способом уравнения

$$\frac{dx_1}{d\tau} = -y_1, \quad \frac{dy_1}{d\tau} = x_1,$$

$$\frac{dx_{s1}}{d\tau} = c_{s1}x_{11} + \dots + c_{sn}x_{n1} \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Искомые функции должны при этом удовлетворять начальным условиям

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = x_3(0) = \dots = 0,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = \dots = 0,$$

$$x_{s1}(0) = x_{s2}(0) = \dots = 0$$

$$(s = 1, 2, \dots, n).$$

Коэффициенты h_1, h_2, \dots разложения искомого периода определяются последовательно из условий периодичности. Прием, предложенный А. Н. Крыловым для решения квазилинейных систем, и здесь оказывается эффективным способом быстрого построения приближенных периодических решений систем Ляпунова, не требующим предварительного преобразования уравнений к собственному времени.

Нелинейные консервативные системы типа

$$\ddot{x} + k^2x + f_1(x) = 0,$$

где $f_1(x)$ — функция, разложение которой по степеням начинается с членов не ниже второй степени, как уже отмечалось выше, относится к ляпуновским системам. Такую систему можно преобразовать к виду

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x + f(x) = 0, \quad (13.38)$$

после чего ее можно заменить двумя уравнениями:

$$\frac{dx}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = -x - f(x).$$

Эти уравнения имеют первый интеграл — интеграл сохранения энергии, обладающий всеми свойствами интеграла H теоремы Ляпунова. Отсюда следует, что уравнение (13.38) обладает периодическим решением, разлагающимся по степеням достаточно малого начального отклонения $x = A$, с периодом T_1 , тоже разлагающимся по степеням A и обращающимся в $2\pi/k$ при $A = 0$.

Решая задачу по методу А. Н. Крылова, мы будем искать решение уравнения (13.38) при начальных условиях

$$x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

представив это решение, в предположении, что A мало, в виде ряда

$$x(t) = Ax_1(t) + A^2x_2(t) + \dots,$$

совместно с разложением квадрата частоты p^2 искомого решения

$$p^2 = 1 + h_1A + h_2A^2 + \dots,$$

определяя коэффициенты h_i из условий периодичности функций $x_i(t)$.

Пример 2. Найти периодическое решение уравнения

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0. \quad (13.39)$$

Подставив в это уравнение, с целью найти решение до третьего приближения (включительно), формально составленные ряды

$$x(t) = Ax_1(t) + A^2x_2(t) + A^3x_3(t), \quad \left. \begin{aligned} p^2 = 1 + h_1A + h_2A^2 + h_3A^3 \end{aligned} \right\} \quad (13.40)$$

и приравняв нулю коэффициенты при A, A^2, A^3 , получим рекуррентные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + p^2x_1 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + p^2x_2 &= h_1x_1, \\ \ddot{x}_3 + p^2x_3 &= h_1x_2 + h_2x_1 - x_1^3. \end{aligned} \right\} \quad (13.41)$$

Эти уравнения будем решать при начальных условиях

$$x_1(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = 0,$$

$$x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0,$$

$$x_3(0) = \dot{x}_3(0) = 0.$$

Из первого уравнения (13.41) находим

$$x_1 = \cos pt.$$

Второе уравнение теперь напишем в виде

$$\ddot{x}_2 + p^2x_2 = h_1 \cos pt.$$

Чтобы оно имело периодическое решение, h_1 должно равняться нулю. Но тогда в силу нулевых начальных условий для x_2 решение этого уравнения будет тривиальным. Таким образом,

$$h_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

Для $x_3(t)$ теперь получается уравнение

$$\ddot{x}_3 + p^2x_3 = h_2 \cos pt - \cos^3 pt$$

или

$$\ddot{x}_3 + p^2x_3 = \left(h_2 - \frac{3}{4}\right) \cos pt - \frac{1}{4} \cos 3pt,$$

откуда

$$h_2 = \frac{3}{4},$$

$$x_3 = \frac{1}{32p^2} (\cos 3pt - \cos pt).$$

Подставив найденные значения x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 в выражения (13.40), получим для искомого решения

$$x = A \cos pt + \frac{A^3}{32p^2} (\cos 3pt - \cos pt),$$

$$p^2 = 1 + \frac{3}{4} A^2.$$

7. Вынужденные колебания нелинейных систем (метод осреднения). Теорема Пуанкаре для неавтономных систем содержит всю общую теорию вынужденных колебаний квазилинейных систем. Мы возвращаемся снова к вынужденным колебаниям с целью ознакомления с некоторыми другими методами их расчета, которые могут быть использованы при решении более широкого круга нелинейных задач и, в частности, квазилинейных, со многими степенями свободы. Такими методами являются, например, метод осреднения и метод Б. Г. Галеркина, которые мы и рассмотрим в этом параграфе.

Метод осреднения с успехом применяется к расчету вынужденных колебаний систем с малым возмущением, уравнения движения которых имеют вид

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \omega^2 x_k = \mu X_k(t, x_k, \dot{x}_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (13.42)$$

а также к исследованию устойчивости периодических решений в первом приближении. Сущность метода легко выясняется на примере тех преобразований, которые были выполнены при изложении метода Ван-дер-Поля¹⁾. Имеется в виду преобразование (12.33) координат (x, y) к координатам (a, b) и переход от уравнений (12.34) к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\frac{\mu}{2\pi k^2} \int_0^{2\pi} f(a \cos \xi + b \sin \xi, -a \sin \xi + b \cos \xi) \sin \xi d\xi, \\ \frac{db}{d\tau} &= \frac{\mu}{2\pi k^2} \int_0^{2\pi} f(a \cos \xi + b \sin \xi, -a \sin \xi + b \cos \xi) \cos \xi d\xi, \end{aligned} \right\}$$

в которых правые части являются интегральными средними за период 2π правых частей уравнений (12.34). Основанием для такого перехода послужили следующие соображения. Производные координат a и b по τ определяют скорости их изменения с течением времени. Эти скорости, как видно из уравнений (12.34), малы при достаточно малом μ . Следовательно, координаты a и b суть медленно изменяющиеся величины в сравнении, например, со скоростью изменения функции f в течение периода 2π . Можно было поэтому полагать, что замена правых частей уравнений (12.34) их средними значениями за период 2π не внесет заметных искажений в поведение функций a и b на длительном промежутке времени, как это и было обнаружено в окончательных результатах расчета, совпавших с результатами, полученными в первом приближении строгими методами Пуанкаре и Ляпунова.

Сопоставляя уравнения (12.34) с (12.35), легко видеть, что правые части последних представляют собой не что иное, как первые члены

¹⁾ См. стр. 485—489.

разложений правых частей уравнений (12.34) в ряды Фурье. Писанные без каких-либо упрощений, эти уравнения имели бы вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \mu \left[\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\tau + b_n \sin n\tau) \right], \\ \frac{db}{d\tau} &= \mu \left[\frac{1}{2} a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos n\tau + b'_n \sin n\tau) \right], \end{aligned} \right\} \quad (13.43)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{\pi k^2} \int_0^{2\pi} f(a \cos \xi + b \sin \xi, -a \sin \xi + b \cos \xi) \sin \xi d\xi, \\ a'_0 &= \frac{1}{\pi k^2} \int_0^{2\pi} f(a \cos \xi + b \sin \xi, -a \sin \xi + b \cos \xi) \cos \xi d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (13.44)$$

Таким образом, переход от уравнений (12.34) к уравнениям (12.35) равносильно замене точных уравнений (13.43) приближенными

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \mu \frac{a_0}{2}, \\ \frac{db}{d\tau} &= \mu \frac{a'_0}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (13.45)$$

т. е. отбрасыванию в разложениях Фурье гармонических слагаемых. Л. И. Мандельштаму и Н. Д. Папалекси принадлежит первое обоснование утверждения, что решения уравнения (13.43) и так называемых *укороченных уравнений Ван-дер-Поля* (13.45) при одних и тех же начальных условиях сколь угодно мало отличаются друг от друга на протяжении достаточно большого заданного промежутка времени, если μ достаточно мало. Изложение этого обоснования приведено в цитированной выше книге А. А. Андропова, А. А. Витта и С. Э. Хайкина.

Уравнения (13.45), как и уравнения Ван-дер-Поля, имеют специальную форму: в этих уравнениях первые производные от координат равны некоторым функциям, умноженным на малый параметр μ . Такая форма уравнений называется иногда «стандартной». К стандартной форме могут быть приведены уравнения вынужденных колебаний с малым возмущением довольно общего вида, например, уравнения

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \omega^2 x_k = \mu X_k(t, x_k, \dot{x}_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (13.46)$$

Приведение осуществляется с помощью подстановки, аналогичной преобразованию Ван-дер-Поля (12.33)

$$x_k = A_k \cos \omega t + B_k \sin \omega t \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (13.47)$$

где A_k и B_k связаны дополнительными условиями

$$\frac{dA_k}{dt} \cos \omega t + \frac{dB_k}{dt} \sin \omega t = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Пример 3. Рассмотрим так называемые резонансные колебания системы

$$\ddot{x} + p^2 x = \mu (x^3 - ax + H \sin pt). \quad (13.48)$$

Для приведения уравнения (13.48) к стандартной форме полагаем

$$x = A \cos pt + B \sin pt,$$

где

$$\frac{dA}{dt} \cos pt + \frac{dB}{dt} \sin pt = 0. \quad (13.49)$$

В переменных A и B уравнение (13.48) напишется в виде

$$-p \sin pt \frac{dA}{dt} + p \cos pt \frac{dB}{dt} = \mu [(A \cos pt + B \sin pt)^3 - a(A \cos pt + B \sin pt) + H \sin pt].$$

Из этого уравнения и из условия (13.49) находим

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\mu}{p} [(A \cos pt + B \sin pt)^3 - a(A \cos pt + B \sin pt) + H \sin pt] \sin pt,$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\mu}{p} [(A \cos pt + B \sin pt)^3 - a(A \cos pt + B \sin pt) + H \sin pt] \cos pt.$$

Последние уравнения имеют требуемую стандартную форму. Заменяя в них правые части интегральными средними за период $2\pi/p$, приходим к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\frac{\mu}{2p} \left(\frac{3}{4} A^2 B + \frac{3}{4} B^3 - aB + H \right), \\ \frac{dB}{dt} &= \frac{\mu}{2p} \left(\frac{3}{4} A^3 + \frac{3}{4} AB^2 - aA \right). \end{aligned} \right\} \quad (13.50)$$

В установившемся колебательном режиме

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dB}{dt} = 0.$$

Следовательно,

$$B \left(\frac{3}{4} A^2 + \frac{3}{4} B^2 - a \right) + H = 0,$$

$$A \left(\frac{3}{4} A^2 + \frac{3}{4} B^2 - a \right) = 0.$$

8. Вынужденные колебания нелинейных систем (метод Б. Г. Галеркина). Не входя в обсуждение вопроса о применимости ва-

риационных методов к решению нелинейных задач и трактуя вариационное уравнение как выражение принципа виртуальных перемещений, мы ознакомимся с применением этого уравнения на конкретном примере вынужденных колебаний системы

$$\ddot{x} + k^2 x + \mu x^3 = H \sin pt. \quad (13.51)$$

Имея в виду нахождение периодического решения уравнения (13.51) того же периода $2\pi/p$, что и период возмущающей силы $H \sin pt$, мы ограничим класс привлекаемых для сравнения функций периодическими функциями того же периода, что и искомая, различающимися формой или амплитудой колебания, причем промежуток времени, за который система, совершив полное колебание, возвратится в исходное положение на всех путях — действительном и окольных, — выберем равным периоду $2\pi/p$. Тогда вариационное уравнение для нашей задачи напишем следующим образом:

$$\int_0^{2\pi/p} (\ddot{x} + k^2 x + \mu x^3 - H \sin pt) \delta x dt = 0. \quad (13.52)$$

Решение уравнения (13.51) $x(t)$ будет нечетной функцией t , а потому в минимизирующей функции следует взять только синусные члены. Ограничиваясь одночленным приближением, мы положим

$$\begin{aligned} x &= B \sin pt, \\ \delta x &= \delta B \sin pt. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (13.52) и выполнив интегрирование, приходим к уравнению

$$(p^2 - k^2) B - \frac{3}{4} \mu B^3 + H = 0. \quad (13.53)$$

Построив в системе координат (B, y) кубическую параболу (рис. 140)

$$y = \frac{3}{4} \frac{\mu}{k^2} B^3 \quad (13.54)$$

и прямую

$$y = \left(\frac{p^2}{k^2} - 1 \right) B + \frac{H}{k^2}, \quad (13.55)$$

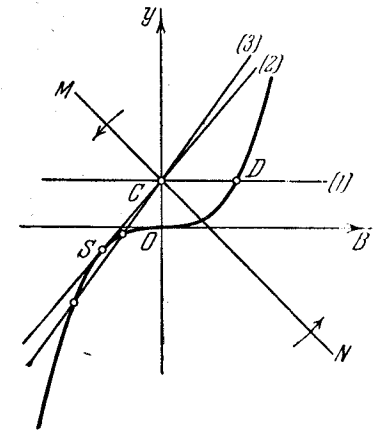


Рис. 140.

найдем резонансные амплитуды B по абсциссам точек пересечения прямой (13.55) с параболой (13.54).

Прямая MN проходит через точку $C(0, H/k^2)$ и при $p=0$ составляет с осью B угол 135° . Начиная от $p=0$, будем увеличивать p до $+\infty$. Тогда прямая MN будет поворачиваться вокруг C против часовой стрелки до совпадения с осью Oy . При небольших значениях p прямая MN пересекает параболу в одной точке, абсцисса которой дает одну вещественную амплитуду единственного возможного здесь периодического колебательного движения с частотой p . В частности, при резонансе, когда прямая MN расположится параллельно оси OB , система совершает периодическое колебание с конечной амплитудой

$$B = CD = \sqrt[3]{\frac{4H}{3\mu}}$$

В положении (2), когда прямая MN касается в точке S нижней ветви параболы, уравнение (13.53) имеет три вещественных корня, причем два из них равные. В положении (3) прямая MN трижды пересекает параболу и в соответствии с этим уравнение (13.53) имеет три вещественных корня. В этом случае теоретически оказываются возможными три периодических решения. Однако не все эти решения осуществляются, так как не все они обладают одинаковой устойчивостью. Система совершает одно устойчивое периодическое движение с амплитудой, равной одному из трех корней уравнения (13.53). Выбор устойчивой амплитуды происходит автоматически, причем необычным для линейных систем способом.

Чтобы ознакомиться с поведением системы в этом случае, построим так называемую *резонансную кривую*, т. е. кривую, представляющую при заданном H ход изменения амплитуды B в зависимости от квадрата частоты p^2 . Построение удобно вести следующим образом. Переписав уравнение (13.53) в таком виде:

$$p^2 = k^2 + \frac{3}{4}\mu B^2 - \frac{H}{B},$$

строим в системе координат (p^2, B) (рис. 141) две кривые — параболу

$$p^2 = k^2 + \frac{3}{4}\mu B^2$$

и гиперболу

$$p^2 = -\frac{H}{B}.$$

Затем абсциссы, соответствующие одному и тому же B , алгебраически складываем. На рис. 141, а построена гипербола с ветвями в квадрантах II и IV. Резонансная кривая, соответствующая ветви, расположенной в квадранте II, пойдет над осью Op^2 и над

параболой. Резонансная кривая, соответствующая гиперболе в квадранте IV, расположится ниже оси Op^2 , в области между этой осью и нижней ветвью параболы. Так как нужны абсолютные значения амплитуд, то нижнюю резонансную кривую заменяют обычно симметричной ей, расположенной в первом квадранте, как показано

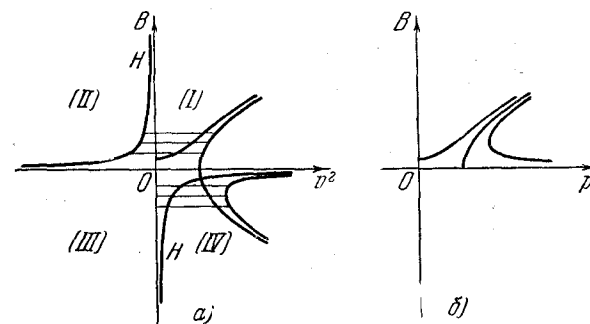


Рис. 141.

на рис. 141, б. Для линейной системы резонансная кривая, как известно, имела бы вид, показанный на рис. 142. В случае $\mu < 0$, что соответствует «мягкой» восстанавливающей силе, резонансная кривая загибалась бы влево к оси OB .

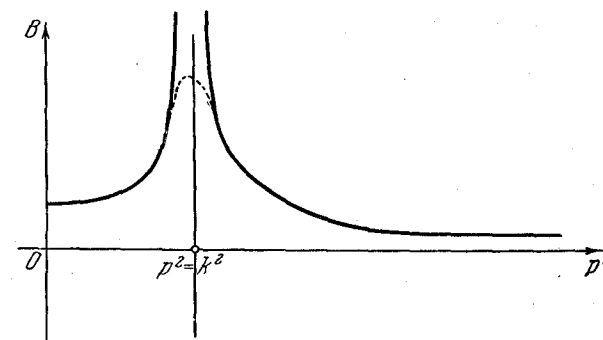


Рис. 142.

Опыт подтверждает показанное на рис. 141 расположение резонансной кривой. Однако при непрерывном изменении частоты p изменения амплитуды происходят не непрерывно. Для некоторых областей значений p амплитуды колебаний становятся неустойчивыми, что выражается в явлении так называемого *сброса амплитуд* — скачкообразного перехода с одной ветви резонансной кривой на другую и соответственно с одного колебательного режима на другой. Пусть, например, при заданном H резонансная кривая имеет вид рис. 143.

При непрерывном увеличении p (начиная от нуля) амплитуда изменяется непрерывно, и каждому значению p^2 отвечает одно значение B . Но так будет только до значений p^2 , не превышающих p_1^2 , для которого ордината касается правой ветви резонансной кривой в точке S .

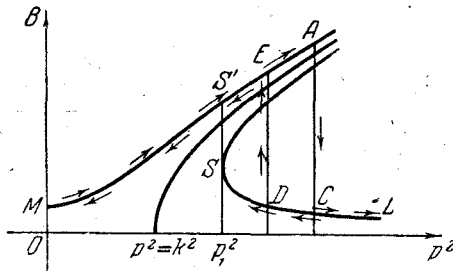


Рис. 143.

При значениях p^2 , больших p_1^2 , мы попадаем в область неустойчивых режимов, где одному значению p^2 соответствуют три возможные вещественные амплитуды. Однако и в этой области система будет сначала совершать колебания с амплитудами, соответствующими участку $S'A$ верхней части резонансной кривой. В точке A , положение которой определяется в каждом частном случае особо,

амплитуда «срывается» с кривой $S'EA$ и скачком перебрасывается на нижний участок резонансной кривой CL и при дальнейшем возрастании p^2 убывает, асимптотически приближаясь к оси Op^2 (к нулю). На рисунке ход изменений амплитуды по резонансной кривой при возрастании p^2 показан стрелками, расположенными сверху соответствующих участков.

Если, начав с больших p^2 , мы будем непрерывно уменьшать p , следуя сначала по участку LCD влево (стрелки снизу), то в некоторый момент снова произойдет перескок, теперь уже из некоторой точки D снизу вверх в точку E . Дальнейшее изменение амплитуд будет происходить по участку $ES'M$ влево, как показывают нижние стрелки¹⁾.

Пример 4. Рассмотрим вынужденные крутильные колебания приведенного колеччатого вала с одним нелинейным элементом от однофазных гармонических моментов одной частоты²⁾.

Предположим, что на третьем участке вала (рис. 144) расположена нелинейная муфта M с заданной характеристикой $f(\alpha_3)$. Уравнения крутильных колебаний вала здесь удобно взять в обратной и несимметризованной форме³⁾,

¹⁾ См. книги: Митропольский Ю. А., Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, Изд. «Наука», 1964; Иориш Ю. И., Виброметрия, Машгиздат, 1963, гл. VIII.

²⁾ Лурье А. И. и Чекмарев А. И., Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из двух прямолинейных отрезков. Прикладная математика и механика, т. 1, вып. 3, 1938. См. также статьи: Айзерман М. А. и Гантмахер Ф. Р., Об определении периодических режимов в нелинейной динамической системе с кусочно-линейной характеристикой. Прикладная математика и механика, 1956, вып. 5; Ланцевич И. Л., Об одном методе прямой линеаризации нелинейной системы с помощью разрывной весовой функции. Изв. вузов СССР, № 12, 1963 (Машиностроение).

³⁾ См. стр. 102.

написав их так:

$$\left. \begin{aligned} c_1 \alpha_1 &= - \sum_{k=1}^4 b_{1k} \alpha_k + H_1 \sin pt, \\ c_2 \alpha_2 &= - \sum_{k=1}^4 b_{2k} \alpha_k + H_2 \sin pt, \\ f(\alpha_3) &= - \sum_{k=1}^4 b_{3k} \alpha_k + H_3 \sin pt, \\ c_4 \alpha_4 &= - \sum_{k=1}^4 b_{4k} \alpha_k + H_4 \sin pt, \end{aligned} \right\} (13.56)$$

где α_k — углы кручения участков вала, c_k — погонные жесткости, H_k — амплитуды гармонических возмущающих моментов, действующих на участках вала, и, наконец,

$$b_{ik} = \frac{(J_1 + \dots + J_i)(J_{k+1} + \dots + J_n)}{J_1 + J_2 + \dots + J_n} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

В первом одночленном приближении полагаем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= B_i \sin pt, \\ \delta \alpha_i &= \delta B_i \sin pt. \end{aligned} \right\} (13.57)$$

Умножив каждое из уравнений (13.56) на соответствующее $\delta \alpha_i$ и подставив вместо α_i (13.57), интегрируем каждое уравнение по t в пределах одного

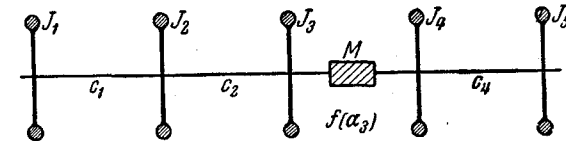


Рис. 144.

периода от 0 до $2\pi/p$ и приравняем нулю. Тогда получим систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 1) & (b_{11} p^2 - c_1) B_1 + b_{12} p^2 B_2 + b_{13} p^2 B_3 + b_{14} p^2 B_4 + H_1 = 0, \\ 2) & b_{21} p^2 B_1 + (b_{22} p^2 - c_2) B_2 + b_{23} p^2 B_3 + b_{24} p^2 B_4 + H_2 = 0, \\ 3) & b_{31} p^2 B_1 + b_{32} p^2 B_2 + b_{33} p^2 B_3 + b_{34} p^2 B_4 + H_3 = \\ & = \frac{p}{\pi} \int_0^{2\pi/p} f(B_3 \sin pt) \sin pt dt, \\ 4) & b_{41} p^2 B_1 + b_{42} p^2 B_2 + b_{43} p^2 B_3 + (b_{44} p^2 - c_4) B_4 + H_4 = 0. \end{aligned} \right\}$$

С помощью уравнений 1), 2), 4) находим B_1, B_2, B_4 , выражая их через B_3 , и подставляем в уравнение 3). После подстановки получим для B_3 одно уравнение

$$LB_3 + N = \frac{p}{\pi} \int_0^{2\pi/p} f(B_3 \sin pt) \sin pt dt. \quad (13.58)$$

Чтобы наметить дальнейший ход решения задачи, рассмотрим часто встречающийся случай, когда нелинейная характеристика муфты задана

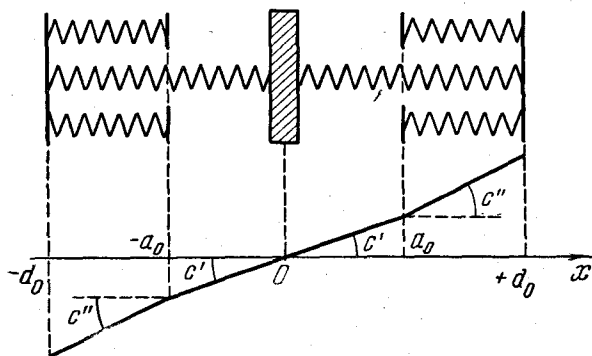


Рис. 145.

ломаной линией (рис. 145) с угловыми коэффициентами c' и c'' . На различных участках графика $f(x)$ будет иметь следующие определения:

$$\begin{aligned} f(x) &= c'x && \text{при } -a_0 \leq x \leq a_0, \\ f(x) &= c''x + (c' - c'')a_0 && \text{при } a_0 \leq x < +d_0, \\ f(x) &= c''x - (c' - c'')a_0 && \text{при } -d_0 < x \leq -a_0. \end{aligned}$$

Обозначим через t_1 наименьший корень уравнения

$$a_0 = B \sin pt$$

и пусть $B > a_0$ ¹⁾. Интеграл правой части уравнения (13.58) вычисляем, разбив предварительно период — полный промежуток интегрирования — на пять частных промежутков с различными выражениями для f на каждом:

- | | |
|---|---|
| 1) $0 \leq t \leq t_1$ | $f(B \sin pt) = c'B \sin pt,$ |
| 2) $t_1 \leq t \leq \frac{\pi}{p} - t_1$ | $f(B \sin pt) = c'B \sin pt + (c' - c'')a_0,$ |
| 3) $\frac{\pi}{p} - t_1 \leq t \leq \frac{\pi}{p} + t_1$ | $f(B \sin pt) = c'B \sin pt,$ |
| 4) $\frac{\pi}{p} + t_1 \leq t \leq \frac{2\pi}{p} - t_1$ | $f(B \sin pt) = c'B \sin pt - (c' - c'')a_0,$ |
| 5) $\frac{2\pi}{p} - t_1 \leq t \leq \frac{2\pi}{p}$ | $f(B \sin pt) = c'B \sin pt.$ |

¹⁾ Здесь и везде дальше B_3 обозначено через B .

Выполнив интегрирование на каждом промежутке, найдем для всего интеграла правой части уравнения (13.58) выражение

$$\begin{aligned} \frac{p}{\pi} \int_0^{2\pi/p} f(B \sin pt) \sin pt dt &= \\ &= c'B \pm \frac{2}{\pi} (c' - c'') \left[B \arcsin \frac{a_0}{B} + a_0 \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{B}\right)^2} \right]. \end{aligned}$$

Теперь уравнение (13.58) после деления всех членов на $a_0(c' - c'')$ и подстановки $y = B/a_0$ будет иметь вид

$$Ky + P = \pm \frac{2}{\pi} \left[y \arcsin \frac{1}{y} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{y}\right)^2} \right], \quad (13.59)$$

где

$$K = \frac{L - c''}{c' - c''}, \quad P = \frac{N}{a_0(c' - c'')}.$$

Решается это уравнение графически по точкам пересечения кривой

$$z = \pm \frac{2}{\pi} \left[y \arcsin \frac{1}{y} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{y}\right)^2} \right] \quad (13.60)$$

с прямой

$$z = Ky + P.$$

На рис. 146 представлено возможное расположение этих кривых. На участке

$$-1 \leq y \leq +1$$

кривая (13.60) отсутствует. Она начинается сверху от точки $(+1, +1)$, внизу — от точки $(-1, -1)$. При увеличении y от 1 до $+\infty$ верхняя ветвь

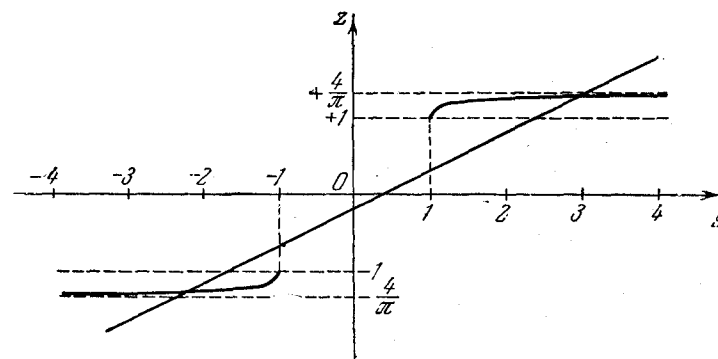


Рис. 146.

кривой (13.60) асимптотически приближается к прямой, параллельной оси y и отстоящей от нее на расстоянии $4/\pi$, так как

$$y \arcsin \frac{1}{y} \rightarrow 1,$$

когда $y \rightarrow \infty$. То же имеет место и для нижней ветви кривой (13.60). Дальнейшие подробности см. в цитированной статье А. И. Лурье и А. И. Чекмарева.

9. **Линейные уравнения с периодическими коэффициентами и задача об устойчивости периодических решений нелинейных систем.** К линейным уравнениям с периодическими коэффициентами приводят прежде всего задачи об устойчивости периодических решений нелинейных систем, рассматриваемые в первом приближении. Так, например, для исследования устойчивости известного периодического решения

$$x = \bar{x}(t) \quad (13.61)$$

уравнения

$$\ddot{x} + k^2 x = \mu f(x, \dot{x}), \quad (13.62)$$

мы даем координате $\bar{x}(t)$ в некоторый момент времени t малое возмущение δ , в результате чего система, начиная с этого момента, будет совершать возмущенное движение

$$x = \bar{x}(t) + \delta.$$

Это движение определяется тем же уравнением (13.62). Следовательно,

$$\ddot{\bar{x}} + \ddot{\delta} + k^2(\bar{x} + \delta) = \mu f(\bar{x} + \delta, \dot{\bar{x}} + \dot{\delta}). \quad (13.63)$$

Ограничившись в разложении правой части по степеням δ и $\dot{\delta}$ членами первого порядка, мы получим «уравнение в вариациях»

$$\ddot{\delta} + k^2 \delta = \mu \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 \delta + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right)_0 \dot{\delta} \right], \quad (13.64)$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right)_0$ — значения производных от правой части (13.63) при $\delta = \dot{\delta} = 0$. Эти величины являются известными периодическими функциями времени. Если бы удалось установить ограниченность изменений δ , то этим был бы определенным образом решен вопрос об устойчивости рассматриваемого периодического решения

$$x = \bar{x}(t).$$

К уравнениям с периодическими коэффициентами приводят и некоторые другие задачи. Такова, например, задача о колебаниях маятника с периодически изменяющейся длиной. Изменения длины такого маятника можно представить как результат действия на точку A — конец нити MOA (рис. 147) — периодической горизонтальной силы F . Обозначив переменную длину маятника через l , массу через m и угол отклонения от вертикали через θ , получим уравнение коле-

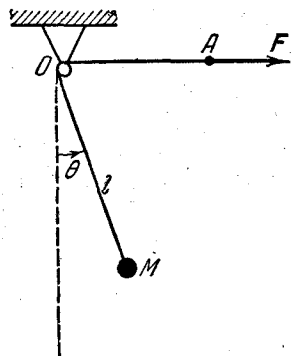


Рис. 147.

баний маятника из закона изменения момента количества движения

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) = -mgl \sin \theta$$

или

$$l\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta} + g \sin \theta = 0.$$

Если отклонения маятника невелики, так что $\sin \theta \approx \theta$, то мы приходим к уравнению

$$\ddot{\theta} + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0, \quad (13.65)$$

являющемуся линейным уравнением с периодическими коэффициентами. В более общем виде это уравнение можно написать так:

$$\ddot{\theta} + 2\psi_1\dot{\theta} + \psi_2\theta = 0. \quad (13.66)$$

Положив здесь

$$\theta = ye^{-\int \psi_1 dt},$$

придем к уравнению

$$\ddot{y} + p(t)y = 0, \quad (13.67)$$

где

$$p(t) = \psi_2(t) - \psi_1^2(t) - \dot{\psi}_1(t).$$

В частности, для маятника переменной длины

$$p(t) = \frac{g}{l} - \frac{\dot{l}}{l}.$$

Если функцию $p(t)$ можно представить в виде

$$p(t) = k^2 + \mu f(t),$$

где k^2 — постоянное число, μ — малый параметр, то уравнение (13.67) будет определять движение, мало отличающееся от гармонических колебаний. Такое колебательное движение называется *квазигармоническим*.

В системах, движение которых определяется уравнениями (13.66) или (13.67), могут возникать явления резонанса, отличные по своей природе от явлений резонанса в линейных системах. В последних резонанс имеет место, когда частота возмущающей силы совпадает с собственной частотой свободных колебаний системы, и выражается в значительном усилении колебаний (при отсутствии сопротивлений — до бесконечности). Это усиление происходит за счет притока в систему энергии, которая поглощается системой в резонансном ее состоянии. Установившийся режим возможен при наличии сопротивлений, когда энергия, расходуемая на преодоление сопротивлений,

становится равной энергии, поступающей в систему за счет работы возмущающих сил.

В примере с маятником переменной длины изменения последней вызываются силой F . Работа этой силы положительна при уменьшении длины маятника и отрицательна при увеличении. Если при периодических изменениях силы F ее положительная работа больше отрицательной, то энергия, поглощаемая маятником, будет расти и размахи его увеличиваться. Возникнет явление, аналогичное по своим внешним проявлениям явлению резонанса в линейных системах. Так как этот резонанс вызывается изменением одного из параметров системы — длины маятника, то он называется *параметрическим резонансом*.

Параметрический резонанс может возникнуть и при наличии рассеивания энергии, т. е. в системе с сопротивлением, если рассеивание

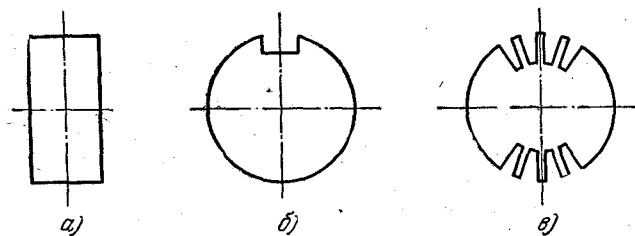


Рис. 148.

энергии не превышает ее положительной части, поглощаемой системой. Вызванное избытком энергии, поглощаемой системой, увеличение амплитуды колебаний происходит большей частью по экспоненциальному закону¹⁾. При этом могут существовать целые области частот возмущающей силы, которым отвечают явления параметрического резонанса. Вследствие этого с параметрическим резонансом труднее бороться, чем с резонансом линейных систем. Здесь необходимо применение специальных antivibrators, автоматически настраивающихся на сплошные зоны спектра частот параметрического резонанса.

Другим примером может служить вал с переменной жесткостью на прогиб в различных направлениях, например вал с поперечным сечением в виде прямоугольника (рис. 148, а); вал с продольными выточками (рис. 148, б) или вал двухполюсного ротора турбогенератора (рис. 148, в). Сюда же относятся колебания спарников электроваза, крутильные колебания вала с переменными моментами инерции маховых масс и др.

¹⁾ Кильчевский М. О., Курс теоретической механики, ч. II, «Радянська школа».

Ряд примеров такого рода рассмотрен в книге Г. В. Бондаренко¹⁾, а также в цитированном на стр. 151 курсе С. П. Тимошенко, в цитированной на стр. 217 статье Н. Е. Кочина и в фундаментальных работах В. В. Болотина²⁾ и А. С. Вольмира³⁾. Здесь эти примеры не рассматриваются. Главная задача излагаемого краткого экскурса в область линейных уравнений с периодическими коэффициентами — это построение критериев устойчивости периодических решений нелинейных систем.

10. Устойчивость периодических решений. Дальнейшие исследования в этом направлении мы ограничим рассмотрением уравнения

$$\ddot{y} + p(t)y = 0, \quad (13.67)$$

к которому могут быть приведены уравнения в вариациях для систем с одной степенью свободы.

В приложениях функция $p(t)$ имеет большей частью вид

$$p(t) = b + \mu\varphi(t),$$

где μ — малый параметр, b — постоянная, $\varphi(t)$ — периодическая функция того же периода, что и $p(t)$. Такие уравнения носят общее название *уравнений Хилла*. Частный случай уравнения Хилла представляет *уравнение Матье*, в котором $\varphi(t)$ — гармоническая функция $\sin t$ или $\cos t$.

Мы попытаемся установить условия, при которых решение уравнения (13.67) будет ограниченным для всех t . При этом возмущения исследуемого периодического движения (для которого (13.67) является уравнением в вариациях) будут также ограниченными и невозмущенное периодическое движение системы — устойчивым. Существуют различные приближенные способы решения уравнения (13.67). В частности, его можно было бы трактовать как квазилинейное и применить к нахождению решения метод Пуанкаре или А. Н. Крылова. Однако для наших целей достаточно будет установить только форму решения этого уравнения, что можно сделать более простыми средствами.

Обозначим через $y_1(t)$ и $y_2(t)$ два линейно независимых частных решения уравнения (13.67), и пусть при $t=0$

$$\left. \begin{aligned} y_1(0) &= 1, & \dot{y}_1(0) &= 0, \\ y_2(0) &= 0, & \dot{y}_2(0) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (13.68)$$

¹⁾ Бондаренко Г. В., Уравнение Хилла и его применение в области технических колебаний, 1936. См. также книгу Хаяси Т., Вынужденные колебания в нелинейных системах, ИЛ, 1957.

²⁾ Болотин В. В., Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1950.

³⁾ Вольмир А. С., Устойчивость упругих систем, Физматгиз, 1960.

Такая система частных решений называется *нормальной*. По свойству линейных уравнений всякое другое решение уравнения (13.67) выражается линейно через нормальную систему

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \quad (13.69)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные величины. Если ω — период функции $p(t)$, то решениями уравнения (13.67) будут также функции $y_1(t + \omega)$ и $y_2(t + \omega)$. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} y_1(t + \omega) &= a_{11} y_1(t) + a_{12} y_2(t), \\ y_2(t + \omega) &= a_{21} y_1(t) + a_{22} y_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (13.70)$$

где коэффициенты a_{ik} — постоянные числа, причем в силу условий (13.68)

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= y_1(\omega), & a_{12} &= \dot{y}_1(\omega), \\ a_{21} &= y_2(\omega), & a_{22} &= \dot{y}_2(\omega). \end{aligned} \right\}$$

Прибавив к аргументу общего решения $y(t)$ (13.69) период ω , получим из (13.70)

$$\begin{aligned} y(t + \omega) &= C_1 y_1(t + \omega) + C_2 y_2(t + \omega) = \\ &= (C_1 a_{11} + C_2 a_{21}) y_1(t) + (C_1 a_{12} + C_2 a_{22}) y_2(t). \end{aligned} \quad (13.71)$$

Если постоянные C_1 и C_2 выбрать так, чтобы

$$\left. \begin{aligned} C_1 a_{11} + C_2 a_{21} &= \lambda C_1, \\ C_1 a_{12} + C_2 a_{22} &= \lambda C_2, \end{aligned} \right\}$$

то равенство (13.71) переписывается так:

$$y(t + \omega) = \lambda y(t). \quad (13.72)$$

Таким образом, если C_1 и C_2 не равны нулю одновременно, то можно найти такое решение уравнения (13.67), которое при прибавлении к аргументу периода ω приобретает постоянный множитель λ^1 . Этот множитель является корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (13.73)$$

или

$$\begin{vmatrix} y_1(\omega) - \lambda & \dot{y}_1(\omega) \\ y_2(\omega) & \dot{y}_2(\omega) - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение (13.73) называется *характеристическим*.

¹⁾ Функция, которая при прибавлении к аргументу постоянного числа («периода») умножается на некоторый постоянный множитель, называется периодической функцией второго рода.

Обозначим корни характеристического уравнения через λ_1 и λ_2 и положим

$$\alpha_i = \frac{1}{\omega} \ln \lambda_i. \quad (13.74)$$

Числа α_i называются по Ляпунову *характеристическими показателями* решения уравнения (13.67). С помощью характеристических показателей уравнение (13.72) можно будет переписать так:

$$y_i(t + \omega) = e^{\omega \alpha_i} y_i(t) \quad (i = 1, 2), \quad (13.75)$$

откуда следует, что частные интегралы уравнения (13.67) должны иметь вид

$$y_i(t) = e^{\alpha_i t} \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2), \quad (13.76)$$

где $\varphi_i(t)$ — периодические функции t с периодом ω . В самом деле, эти интегралы преобразуются точно по формуле (13.75)

$$y_i(t + \omega) = e^{\alpha_i(t + \omega)} \varphi_i(t + \omega) = e^{\alpha_i t} e^{\alpha_i \omega} \varphi_i(t) = e^{\alpha_i \omega} y_i(t).$$

Таким образом, задачу о форме общего интеграла уравнения (13.67) можно считать решенной: общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$y(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} \varphi_1(t) + C_2 e^{\alpha_2 t} \varphi_2(t), \quad (13.77)$$

где α_1, α_2 — характеристические показатели; C_1, C_2 — произвольные постоянные; $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — периодические функции периода ω . Как видно из (13.77) свойства решений уравнения (13.67) в отношении устойчивости или неустойчивости определяются знаками характеристических показателей, которые зависят от корней характеристического уравнения (13.73).

Для составления характеристического уравнения нужно найти нормальную систему интегралов уравнения (13.67), чего мы сделать, вообще говоря, не умеем. Но для суждения об устойчивости нужно знать только знаки характеристических показателей. Для этой цели достаточно иметь приближенные значения коэффициентов уравнения (13.73). Собственно, дело идет об одном коэффициенте характеристического уравнения. В самом деле, развернув уравнение (13.73)

$$\lambda^2 - [y_1(\omega) + \dot{y}_2(\omega)] \lambda + [y_1(\omega) \dot{y}_2(\omega) - \dot{y}_1(\omega) y_2(\omega)] = 0,$$

мы легко обнаруживаем, что

$$y_1(\omega) \dot{y}_2(\omega) - \dot{y}_1(\omega) y_2(\omega) = 1,$$

так как если

$$\dot{y}_1 + p(t) y_1 = 0, \quad \dot{y}_2 + p(t) y_2 = 0,$$

то

$$\dot{y}_2 y_1 - \dot{y}_1 y_2 = \frac{d}{dt} (\dot{y}_2 y_1 - \dot{y}_1 y_2) = 0$$

и

$$\dot{y}_2 y_1 - \dot{y}_1 y_2 = \text{const} = 1.$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - A\lambda + 1 = 0, \tag{13.78}$$

где

$$A = y_1(\omega) + \dot{y}_2(\omega). \tag{13.79}$$

Значением коэффициента A и определяется устойчивость или неустойчивость решения (13.77). В самом деле, из уравнения (13.78) находим

$$\lambda_1 = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - 1}, \quad \lambda_2 = \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - 1},$$

или, положив $\text{ch } a = \frac{A}{2}$,

$$\lambda_1 = e^a, \quad \lambda_2 = e^{-a}.$$

Отсюда заключаем, что если $|A| > 2$, т. е. если $\text{ch } a > 1$, и, следовательно, $a > 0$, то одно из слагаемых общего интеграла (13.77) растет неограниченно и решение уравнения (13.67) неустойчиво.

Если $|A| < 2$, то $\text{ch } a < 1$ и a — число чисто мнимое. В этом случае $e^{a_1 t}$ и $e^{a_2 t}$ будут выражаться через \sin и \cos и решение уравнения (13.67) будет ограниченным, т. е. устойчивым.

Когда $|A| = 2$, то уравнение (13.78) имеет один кратный корень, равный или $+1$ или -1 . В этом случае решение уравнения (13.67) будет периодическим с периодом ω , если $\lambda = +1$, и с периодом 2ω , если $\lambda = -1$. Последнее непосредственно видно из уравнения (13.72), где, положив $\lambda = +1$, будем иметь

$$y(t + \omega) = y(t),$$

а положив $\lambda = -1$, получим

$$y(t + 2\omega) = -y(t + \omega) = y(t).$$

Периодические решения уравнения Матье называются *функциями Матье*. Функции Матье имеют некоторые важные приложения в механике и электротехнике¹⁾.

Для приближенного вычисления коэффициента A Ляпуновым был предложен следующий прием. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{y} = -\mu p(t) y, \tag{13.80}$$

где μ — некоторый параметр. При $\mu = 1$ уравнение (13.80) переходит в уравнение (13.67). Будем искать интегралы этого уравнения $y_1(t)$, $y_2(t)$ при начальных условиях

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \\ y_2(0) &= 0, \quad \dot{y}_2(0) = 1 \end{aligned}$$

¹⁾ См. Мак-Лахлан, Теория и приложения функций Матье, ИЛ, 1953.

в виде рядов, расположенных по степеням μ

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= 1 + \mu \varphi_1(t) + \mu^2 \varphi_2(t) + \dots, \\ y_2(t) &= t + \mu \psi_1(t) + \mu^2 \psi_2(t) + \dots \end{aligned} \right\} \tag{13.81}$$

Подставив последовательно $y_1(t)$ и $y_2(t)$ в уравнение (13.80), сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях μ . Тогда получим систему уравнений для функций $\varphi_i(t)$ и $\psi_i(t)$. Подставив в (13.80) первое разложение (13.81), получим, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= -p(t), \\ \ddot{\varphi}_2 &= -p(t) \varphi_1, \\ \ddot{\varphi}_3 &= -p(t) \varphi_2, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \tag{13.82}$$

Из этих уравнений последовательно найдутся функции $\varphi_i(t)$, причем, для того чтобы интегралы $y_1(t)$ и $y_2(t)$ удовлетворяли начальным условиям, функции $\varphi_i(t)$ должны быть найдены из этих уравнений при условиях $\varphi_i(0) = \dot{\varphi}_i(0) = 0$. При таких условиях из первого уравнения (13.82) находим

$$\varphi_1(t) = - \int_0^t \int_0^\xi p(\xi) d\xi dt,$$

из второго

$$\varphi_2(t) = - \int_0^t \int_0^\xi p(\xi) \varphi_1(\xi) d\xi dt \tag{13.83}$$

и т. д.

Аналогичным путем, подставив в (13.80) второе разложение (13.81) для $y_2(t)$, получим

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(t) &= - \int_0^t \int_0^\xi p(\xi) \xi d\xi dt, \\ \psi_2(t) &= - \int_0^t \int_0^\xi p(\xi) \psi_1(\xi) d\xi dt \\ &\dots \end{aligned} \right\} \tag{13.84}$$

Найденные выражения для $\varphi_i(t)$ и $\psi_i(t)$ подставляем в разложения (13.81) и находим решения уравнения (13.80), а положив в этих последних $\mu = 1$, получим

$$A = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_k(\omega) + \psi_k(\omega)]. \tag{13.85}$$

С помощью формулы (13.85) можно в некоторых случаях сделать оценку значений A непосредственно по уравнению (13.67).

Если $p(t)$ — постоянно отрицательная функция для $t > 0$, то из формул (13.83) и (13.84) следует, что все $\varphi_i, \psi_i, \phi_i$ положительны. В этом случае $A > 2$ и решение уравнения (13.67) неустойчиво.

Если

$$p(t) \geq 0$$

для $t > 0$ и

$$\omega \int_0^{\omega} p(t) dt \leq 4, \quad (13.86)$$

то $A < 2$ и движение устойчиво¹⁾. Последние условия являются достаточными.

Приводим без доказательств некоторые другие критерии устойчивости периодических решений нелинейных систем с одной степенью свободы. Рассмотрим систему, уравнения движения которой приведены к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) \end{aligned} \right\}$$

и пусть

$$x = \bar{x}(t), \quad y = \bar{y}(t) \quad (13.87)$$

— известное периодическое решение этой системы периода ω . Положив

$$x = \bar{x} + \xi, \quad y = \bar{y} + \eta,$$

строим уравнения в вариациях

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= P'_x(\bar{x}, \bar{y})\xi + P'_y(\bar{x}, \bar{y})\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= Q'_x(\bar{x}, \bar{y})\xi + Q'_y(\bar{x}, \bar{y})\eta, \end{aligned} \right\}$$

где

$$P'_x(\bar{x}, \bar{y}), \quad P'_y(\bar{x}, \bar{y}), \quad \dots$$

— производные от $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ по x и y , куда подставлены вместо x и y известные периодические функции $\bar{x}(t)$ и $\bar{y}(t)$.

Возмущения ξ и η будут ограничены и движение (13.87) устойчиво, если

$$\frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} [P'_x(\bar{x}, \bar{y}) + Q'_y(\bar{x}, \bar{y})] dt < 0, \quad (13.88)$$

¹⁾ Ляпунов А. М., цит. на стр. 406.

и неустойчиво, если

$$\frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} [P'_x(\bar{x}, \bar{y}) + Q'_y(\bar{x}, \bar{y})] dt > 0.$$

Случай, когда

$$\frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} [P'_x(\bar{x}, \bar{y}) + Q'_y(\bar{x}, \bar{y})] dt = 0,$$

требует особого рассмотрения¹⁾.

Для уравнения

$$\ddot{x} + k^2 x = \mu f(x, \dot{x}) \quad (13.89)$$

или эквивалентной ему системы

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -k^2 x + \mu f(x, y)$$

условие устойчивости периодического решения

$$x = \bar{x}(t), \quad y = \bar{y}(t)$$

будет на основании (13.88)

$$\frac{\mu}{\omega} \int_0^{\omega} \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} dt < 0. \quad (13.90)$$

Уравнение (13.89) может быть приведено к «стандартной» форме, и тогда вопрос об устойчивости возможных для него периодических решений можно исследовать с помощью уравнений установления, как это имело место в § 10 гл. XII.

Для неавтономной системы вида

$$\ddot{x} + k^2 x + f(x) = \mu F(t, x, \dot{x})$$

условие устойчивости периодического решения

$$x = \bar{x}(t), \quad y = \bar{y}(t)$$

в нерезонансном случае имеет вид

$$\frac{\mu}{\omega} \int_0^{\omega} \frac{\partial F(t, \bar{x}, \bar{y})}{\partial y} dt < 0. \quad (13.91)$$

¹⁾ Андронов А. А., Витт А. А. и Хайкин С. Э., цит. на стр. 485.

Иногда задача об устойчивости решения уравнений в вариациях

$$\frac{dy_s}{dt} = b_{s1}y_1 + \dots + b_{sn}y_n \quad (13.92)$$

($s = 1, 2, \dots, n$),

где b_{sj} — известные периодические функции времени, может быть приведена к таковой же для системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, соответственно равными интегральным средним за период коэффициентов b_{sj} . Устойчивость или неустойчивость осредненной таким образом системы при известных условиях сопровождается устойчивостью или неустойчивостью решений заданной системы (13.92).

Условия, при которых такой прием действительно дает возможность сделать правильные заключения об устойчивости заданной (неосредненной) системы, установлены Н. Г. Четаевым¹⁾. Если ограничиться первым приближением, то условия Н. Г. Четаева можно изложить следующим образом.

Пусть коэффициенты b_{sk} уравнений (13.92) — периодические функции периода ω . Введя обозначения

$$c_{sk} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} b_{sk} dt,$$

представим усредненную систему в таком виде:

$$\frac{dx_s}{dt} = c_{s1}x_1 + \dots + c_{sn}x_n \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (13.93)$$

Предположим, что вещественные части всех корней характеристического уравнения усредненной системы отрицательны. Тогда, в силу одной теоремы Ляпунова²⁾, можно будет найти определенно отрицательную квадратичную форму V , такую, что

$$\sum_{s=1}^n (c_{s1}x_1 + \dots + c_{sn}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2. \quad (13.94)$$

Если полная производная от V , составленная в силу уравнений (13.92), будет определенно положительной, то асимптотическая устойчивость невозмущенного движения в уравнениях (13.93) сопутствует таковой в заданных уравнениях (13.92).

¹⁾ Четаев Н. Г., Устойчивость движения, «Наука», 1965, § 75.

²⁾ Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Госстехиздат, 1950, стр. 106.

Пример. Уравнения возмущенного движения заданы в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left(-\frac{1}{2} + \mu a \cos 2t\right)x + (1 - \mu a \sin 2t)y, \\ \frac{dy}{dt} &= (-1 - \mu a \sin 2t)x + \left(-\frac{1}{2} - \mu a \cos 2t\right)y, \end{aligned} \right\} \quad (13.95)$$

где $a > 0$, μ — некоторый параметр. Усредненные уравнения будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{2}x + y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x - \frac{1}{2}y. \end{aligned} \right\} \quad (13.96)$$

Характеристическое уравнение усредненной системы

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + \frac{5}{4} = 0$$

имеет корни

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i.$$

Следовательно, существует определенно отрицательная квадратичная форма V , разрешающая уравнение

$$\left(-\frac{1}{2}x + y\right) \frac{\partial V}{\partial x} + \left(-x - \frac{1}{2}y\right) \frac{\partial V}{\partial y} = x^2 + y^2.$$

Такой формой будет здесь

$$V = -(x^2 + y^2).$$

Составим ее производную по t в силу уравнений (13.95):

$$\frac{dV}{dt} = x^2(1 - 2\mu a \cos 2t) + 4\mu a xy \sin 2t + y^2(1 + 2\mu a \cos 2t).$$

Дискриминант функции \dot{V} имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 - 2\mu a \cos 2t & 2\mu a \sin 2t \\ 2\mu a \sin 2t & 1 + 2\mu a \cos 2t \end{vmatrix} = 1 - 4\mu^2 a^2.$$

Он будет больше нуля, если $\mu < \frac{1}{2a}$. При этом будет выполнено и условие

$$1 - 2\mu a \cos 2t > 0,$$

и, следовательно, форма \dot{V} определенно положительная. Таким образом, в рассматриваемом примере из асимптотической устойчивости усредненной системы (13.96) можно сделать вывод об асимптотической устойчивости невозмущенного движения $x = y = 0$ в силу заданных уравнений (13.95).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица I

Значения параметров λ_i и коэффициентов A_i, B_i и C_i балочных функций¹⁾

$$X_i = \sin \frac{\lambda_i x}{l} + A_i \cos \frac{\lambda_i x}{l} + B_i \operatorname{sh} \frac{\lambda_i x}{l} + C_i \operatorname{ch} \frac{\lambda_i x}{l}$$

Условия закрепления	i	λ_i	λ_i^2	λ_i^3	λ_i^4	A_i	B_i	C_i
	1	3,142	9,869	31,007	97,409	0	0	0
	2	6,283	39,479	248,05	1558,6	0	0	0
	3	9,425	88,83	837,18	7890,4	0	0	0
	4	12,566	157,91	1984,4	24937	0	0	0
	5	15,708	246,74	3875,8	60881	0	0	0
	1	4,730	22,373	105,82	500,55	-1,0178	-1	1,0178
	2	7,853	61,670	484,29	3803,1	-0,999223	-1	0,999223
	3	10,996	120,91	1329,5	14620	-1,0000335	-1	1,0000335
	4	14,137	199,86	2825	37117	-0,9999986	-1	0,9999986
	5	17,279	298,56	5158,9	89140	-1,0000001	-1	1,0000001
	1	4,730	22,373	105,82	500,55	-1,0178	1	-1,0178
	2	7,853	61,670	484,29	3803,1	-0,999223	1	-0,999223
	3	10,996	120,91	1329,5	14620	-1,0000335	1	-1,0000335
	4	14,137	199,86	2825	37117	-0,9999986	1	-0,9999986
	5	17,279	298,56	5158,9	89140	-1,0000001	1	-1,0000001
	1	3,927	15,421	60,558	237,81	0	0,027875	0
	2	7,069	49,971	353,24	2497,1	0	-0,0012041	0
	3	10,210	104,24	1064,3	10867	0	-0,0000520	0
	4	13,352	178,28	2380,3	31782	0	-0,0000022	0
	5	16,494	272,02	4486,4	73994	0	0,0000001	0
	1	1,875	3,516	6,5918	12,359	-1,3622	-1	1,3622
	2	4,694	22,034	103,43	485,50	-0,98187	-1	0,98187
	3	7,855	61,701	484,66	3807,0	-1,000777	-1	1,000777
	4	10,996	120,91	1329,5	14620	-0,999965	-1	0,999965
	5	14,137	199,86	2825	37117	-1,0000015	-1	1,0000015

¹⁾ Таблицы I, II, III заимствованы из книги: Сорокин Е. С., Динамика междуэтажных перекрытий, Стройиздат, 1941.

Таблица II

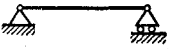
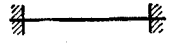

Численные значения некоторых интегралов, встречающихся в расчетах

A. Интегралы с одним индексом

Условия закрепления концов	i	$\frac{1}{l} \int_0^l X_i^2 dx$	$l \int_0^l X_i'^2 dx$	$l^3 \int_0^l X_i''^2 dx$	$\frac{1}{l} \int_0^l X_i dx$
	1	0,5	4,9343	48,705	0,6366
	2	0,5	19,739	779,28	0
	3	0,5	44,413	3945,1	0,2122
	4	0,5	78,955	12468	0
	5	0,5	123,37	30440	0,1273
	1	1,0359	12,775	518,52	0,8445
	2	0,9984	45,977	3797,1	0
	3	1,0000	98,920	14619	0,3637
	4	1,0000	171,58	39940	0
	5	1,0000	264,01	89138	0,2314
	1	0,4996	5,5724	118,80	0,6147
	2	0,5010	21,451	1250,4	-0,0586
	3	0,5000	47,017	5433,0	0,2864
	4	0,5000	82,462	15892	-0,0310
	5	0,5000	127,79	36998	0,1464
	1	1,8556	8,6299	22,933	1,0667
	2	0,9639	31,24	467,97	0,4252
	3	1,0014	77,763	3808,5	0,2549
	4	1,0000	152,83	14619	0,1819
	5	1,0000	205,521	39940	0,1415

Таблица III

Б. Интегралы с двумя индексами

Условия закрепления концов	$l \int_0^l x_i' x_j' dx = -l \int_0^l x_i x_j'' dx$					
	$i \backslash j$	1	2	3	4	5
	1	4,9343	0	0	0	0
	2	0	19,739	0	0	0
	3	0	0	44,413	0	0
	4	0	0	0	78,955	0
	5	0	0	0	0	123,37
	$i \backslash j$	1	2	3	4	5
	1	12,775	0	-9,9065	0	-7,7511
	2	0	45,977	0	-17,114	0
	3	-9,9065	0	98,920	0	-6,2833
	4	0	-17,114	0	171,58	0
5	-7,7511	0	-6,2833	0	246,01	
	$i \backslash j$	1	2	3	4	5
	1	5,5724	2,1424	-1,9001	1,6426	-1,4291
	2	2,1424	21,451	3,9098	-3,8226	3,5832
	3	-1,9001	3,9098	47,017	5,5836	-5,6440
	4	1,6426	-3,8226	5,5836	82,462	7,2171
5	-1,4291	3,5832	-5,6440	7,2171	127,79	

Некоторые тригонометрические формулы, встречающиеся в расчетах

- $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$
- $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$
- $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$
- $\sin^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$
- $\cos^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$
- $\sin \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} (\sin \alpha + \sin 3\alpha)$
- $\cos \alpha \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} (\cos \alpha - \cos 3\alpha)$
- $\sin^4 \alpha = \frac{1}{8} (3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$
- $\cos^4 \alpha = \frac{1}{8} (3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$
- $\sin^3 \alpha \cos \alpha = \frac{1}{8} (2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha)$
- $\sin \alpha \cos^3 \alpha = \frac{1}{8} (2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha)$
- $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{8} (1 - \cos 4\alpha)$
- $\sin^5 \alpha = \frac{1}{16} (\sin 5\alpha - 5 \sin 3\alpha + 10 \sin \alpha)$
- $\cos^5 \alpha = \frac{1}{16} (\cos 5\alpha + 5 \cos 3\alpha + 10 \cos \alpha)$
- $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$
- $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)]$
- $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)]$
- $\int_0^l \varphi^2(x) dx = \frac{l}{4} \left[\frac{\varphi'^2(l)}{k^4} - \frac{2\varphi'(l)\varphi'''(l)}{k^4} + \varphi^2(l) \right]^1$

1) Вывод формулы 18 см. в книге Тимошенко С. П., цит. на стр. 151.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Айзерман М. А. 530
 Ананьев И. В. 261, 279
 Андронов А. А. 478, 485, 492, 501, 525
 Аппель П. (Appell P.) 28, 418, 427
- Бабаков И. М. 100, 159, 160, 161, 168, 223
 Безухов Н. И. 206, 277
 Бендиксон (Bendixon) 482
 Бернулли Д. (Bernoulli D.) 113
 Бернштейн С. А. 162, 284
 Бикли (Bickley W.) 319
 Бицено (Biezeno C. B.) 192
 Боголюбов Н. Н. 469, 501, 517
 Болотин В. В. 537
 Бондаренко И. Г. 537
 Бубнов И. Г. 294
 Булгаков Б. В. 494
 Буныковский 327
 Бутенин Н. В. 10, 482, 501
- Ван-дер-Поль (Van der Pol) 419, 480, 485, 501, 525
 Витт А. А. 485, 492, 501
 Вольмир А. С. 537
- Галеркин Б. Г. 294, 302, 319, 327, 342, 348, 526
 Гамильтон (Hamilton W.) 26, 256, 294
 Гантмахер Ф. Р. 28, 29, 113, 121, 141, 236, 434, 530
 Гельфанд И. М. 247
 Гершгорин С. А. 283
 Гильберт (Hilbert D.) 140
 Глазман И. М. 10
 Граммель (Grammel R.) 192
 Гурвиц (Hurwitz A.) 429, 438
- Давиденков Н. Н. 153
 Даламбер (D'Alembert I. L.) 26, 113
 Данилевский А. М. 36
- Демидович Б. П. 36
 Ден-Гартог (Den Hartog J.) 232
 Дубошин Г. Н. 373, 405
 Дункан (Dunkan W. J.) 29, 277
- Ельяшевич М. А. 110
- Жуковский Н. Е. 26
- Зиманенко С. 219
- Иориш Ю. И. 530
- Картер 219
 Кильчевский Н. А. 375, 536
 Кимбол (Kimball A.) 293
 Коллар (Collar A. R.) 29
 Коллатц (Collatz L.) 321
 Корчинский И. Л. 153
 Костерин Ю. И. 480
 Кочин Н. Е. 217, 537
 Коши (Cauchy A. L.) 327
 Крейн М. Г. 113, 121, 141, 143, 236
 Крылов А. Н. 9, 36, 110, 131, 144, 204, 239, 240, 246, 249, 259, 273, 276, 286, 344, 501, 509, 513, 537
 Крылов Н. М. 319, 469, 517, 518
 Куликов Н. К. 468
 Курант Р. (Courant R.) 140
 Кэмпбелл (Campbell W.) 361
- Лаваль (Laval) 191
 Лагранж (Lagrange J.) 17, 19, 36, 380, 400, 509
 Ланцевицкий И. Л. 468, 530
 Лаплас (Laplace P. S.) 36, 509
 Леверье (Leverrier C.) 36
 Левин А. В. 267, 281, 312
 Лейбензон Л. С. 333, 342
 Лойцянский Л. Г. 68
 Луиц Е. Б. 164, 284

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

553

- Лурье А. И. 28, 51, 53, 68, 405, 530
 Лурье И. А. 87, 218, 229, 230
 Льенар (Liénard A.) 482
 Ляпунов А. М. 9, 370, 392, 382, 388, 393, 403, 420, 425, 450, 501, 509, 520, 542, 544
- Маякин И. Г. 365, 373, 375, 501, 520
 Мандельштам Л. И. 485, 525
 Марон И. А. 36
 Матье 537, 540
 Микеладзе Ш. Е. 36, 205
 Митропольский Ю. А. 501, 518, 530
 Михайлов А. В. 429
 Михлин С. Г. 299, 342
 Мышкис А. Д. 469
- Найквист (Nyquist N.) 429
 Натансон В. Я. 253
 Немьцкий В. В. 482
 Николан Е. Л. 199
- Остроградский М. В. 26, 256, 294, 509
- Панов Д. Ю. 153
 Пановко Я. Г. 468
 Папалекси Н. Д. 485, 525
 Папкович П. Ф. 162
 Пикар (Picard E.) 501
 Писаренко Г. С. 289
 Пуанкаре (Poincaré H.) 501, 507, 520, 524, 537
 Пуансо (Poinsot L.) 418
- Раус (Routh E. J.) 20, 21, 131, 399, 429, 430, 434
 Ритц (Ritz W.) 178, 190, 294, 297, 305, 319, 392, 348
 Рокар (Rocard J.) 499
 Рэлей (Rayleigh) 9, 135, 174, 176, 200, 235, 294, 301, 307, 319, 327, 342
- Сахнин А. В. 359
 Смирнов В. И. 19
 Спитко П. К. 205
 Сорокин Е. С. 153, 287, 288, 300, 305, 342, 548
 Степанов Б. И. 110
 Степанов В. В. 482
- Стодола (Stodola A.) 169, 182, 191, 360
 Стокер (Stoker J. J.) 472, 499
 Стретт см. *Рэйли* 131, 148, 171, 341, 347
- Темпль (Temple G.) 319
 Теодорчик К. Ф. 499
 Терехих В. П. 218
 Тимошенко С. П. 151, 281, 291, 304, 341, 537, 551
 Толле (Tolle M.) 220, 223
 Томсон (Thomson W. T.) 285
- Фаддеев Д. К. 34
 Фаддеева В. П. 34, 184
 Фальк (Falk S.) 252
 Филиппов А. П. 289
 Фохт (Voigt) 287
 Фрезер (Frazer R. A.) 29
 Фридман В. М. 314
 Функ (Funk P.) 142
 Фурке (Führke H.) 209, 252
 Фурье (Fourier J.) 84
- Хайкин С. Э. 485, 492, 525
 Харкевич А. А. 499
 Харитонов Н. Н. 359
 Хаяси 536
 Хилл (Hill) 537
 Хольба (Holba J.) 371, 178, 194
 Хюбнер (Hübner E.) 249
- Цыпкин Я. З. 469
- Чекмарев А. И. 530
 Четаев Н. Г. 383, 405, 407, 428, 438, 544
 Чудновский В. Г. 284
- Шилов Г. Е. 247
 Шнее Я. И. 293, 359
- Эйлер Л. (Euler L.) 19, 29, 113, 256
 Эльсгольц Л. Э. 28, 29
- Якоби (Jacobi K.) 28, 110
 Яновский М. И. 194

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аварии лопаток и дисков 359
 Автоколебания 478
 — в музыкальных инструментах 499
 — в самолете 499
 Амплитуда 59, 447
 — резонансная 156
 Анализ гармонический 86

Балансировка роторов паровых турбин 191
 Биения 191

Вал безмассовый 203
 — гибкий 22, 193, 197, 201
 — жесткий 193, 202
 — коленчатый 89, 213, 390
 — переменного сечения 205
 — переменной жесткости 536
 — приведенный 105, 142, 150, 390
 — прямой 89, 191
 — ступенчатый 89, 157, 177, 205, 209, 285

Вариация изохронная 12
 Вектор матрицы собственный 30, 34
 Взаимность перемещений 95
 Вибрации 191
 — аксиальные 359

Виброгаситель 75, 151
 Виброграф 75
 Возмущение движения 42, 60
 Возмущения координат начальные 386
 Время собственное 510

Гармоника 85, 87, 229
 — опасная 88
 Гироскоп 24
 Гистерезис 153

Движение аperiodическое 67
 — возмущенное 60, 369, 385, 387, 396, 411

Движение невозмущенное 385, 398
 — неустановившееся 388
 — неустойчивое периодическое 365
 — убегающее 456
 — установившееся 367
 — устойчивое 60, 365, 385
 — — по Ляпунову 385

Действие по Остроградскому—Гамильтону 28

Декремент логарифмический колебаний 65

Демпфер гидравлический 68

Диаметр приведения 220

— узловой 354, 359

Дискриминант формы 39

Диссипация 438

Длина приведенная участка вала 218

Жесткость упругая 217

Закон Гука 68
 — обобщенный 94, 105, 193

Закрепление упругое 257

Затухание колебаний 64, 72, 448, 470

Зона критическая резонансная 142

Изображение функции (по Карсону) 42

Изоклина 449

Импульс обобщенный 42

Интеграл Крылова 273

— сохранения энергии 401

— уравнений движения 20

— циклический 20

Интерпретация фазовая движений 367

Исчисление матричное 10

— операционное 9, 42, 204

Катаракт 68

Колебание главное 258

Колебания 59

Колебания аксиальные (дисков паровых турбин) 359, 361
 — вынужденные 42, 143, 150, 153, 214, 271, 501, 524, 526
 — — линейной системы с одной степенью свободы 69
 — гармонические 59, 109
 — главные 107, 109
 — груза, подвешенного на пружине 76, 78, 86, 90
 — затухающие 64, 72
 — изохронные 64, 448
 — клина 320, 327
 — крутильные вала с дисками 99, 105, 142, 150, 162, 225, 233, 250, 295

— — диска 68, 90

— — коленчатого вала 213

— линейные 60

— лопаток 291, 309

— малые 60, 61, 62, 67, 89, 92, 95, 110

— нелинейные 9, 365, 445, 450, 458, 524, 526

— нити с бусинками 113

— поперечные балки с сосредоточенными массами 90, 104, 106, 150, 163, 175, 305, 316

— — однородного стержня 125, 260, 307

— — пластинки 329, 342

— — прямых стержней 248, 254, 260—266, 270, 294, 305

— — — переменного сечения 322

— — продольные прямых стержней 233, 237, 250, 294, 295, 317

— — резонансные 364, 447

— — свободные 62, 507

— — затухающие 72, 448, 470

— — сопровождающие 70

— — с сопротивлением 129, 242, 289

— — сложных систем 249

— — собственные 109

— — струны 113, 482

— — тангенциальные лопаток турбины 260

— — фундамента 75

Координаты нормальные 107

— обобщенные (независимые) 14, 365

— относительные 387

— состояния системы 17

— циклические 20, 399

Коэффициент влияния гармонический 85, 147, 186

— — статический 95

Коэффициент динамичности 74

— жесткости статический 94

— затухания 65

— поглощения 154

Кривая резонансная 74, 528

— энергетического баланса 452

Критерии устойчивости 400, 429

Критерий Бендиксона 482

— Гурвица 435

— Ляпунова 482

— Рауса 430

— Сильвестра 41

Кэмпбелл-машинка 361

Линсаризация 60, 129, 405, 446, 468

Линия узловая 339

Масса маховая эквивалентная 152, 214

Матрица 29—39

— жесткости 209, 250

— массы 209, 250

— перехода 250

Маятник двойной 97

— математический 67, 459, 516

— фрикционный Фроуда 482

— часов 59, 447, 478

Метод Бубнова—Галеркина 294

— Ван-дер-Поля 485, 501

— Галеркина 294, 312, 327, 348, 526

— гармонических коэффициентов влияния 147, 157, 186

— Данилевского 36

— изоклин 449, 472

— исключения первой формы 183

— итераций 157, 169, 178

— качественный 370

— Крылова А. Н. 513

— Крылова Н. М. и Боголюбова 517

— Лагранжа 509

— Ляпунова построения фазовых траекторий 472

— Ляпунова 369, 394

— начальных параметров 10, 203, 223, 250, 284

— осреднения 485, 524

— понижения 184

— последовательной диагонализации 110

— Рунта 178, 190, 254, 297, 313, 342, 348

— Рэлея 174, 176, 294, 301, 307, 327, 342

— Стодола 169, 182

— Толле 220

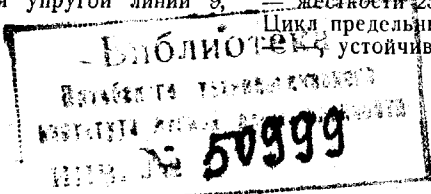
— фазовой плоскости 449

- Метод Фредгольма (бесконечных определителей) 319
 — Фридмана 314
 Методы вариационные 10, 174, 294, 319, 332, 527
 — —, их погрешность 319
 — графические 169, 178, 182
 — нелинейной механики 500
 — приближенные 10, 157, 169, 294, 322, 405
 — прямые 294
 Момент гармонический 229
 — гироскопический 26, 194
 — остаточный 22
 — приведения 172
 — цилиндрической массы 217
 Муфта нелинейная 75
 Нагрузка собственная 235
 Напряжения усталостные 75
 Оператор Карсона 42, 55
 Определитель Гурвица 433
 Оригинал 42
 Ортогональность собственных форм 119
 Осциллятор линейный 62, 69, 473
 — — гармонический 368
 — — затухающий (диссипативный) 64
 Ось упругая 254
 Параметры начальные 205, 250, 284
 Перемещения виртуальные 12
 Период колебаний 59
 — — затухающих 64
 Петли гистерезиса 153
 Пластика, ее колебания 329
 — квадратная 347
 — круглая 350
 — прямоугольная 337, 339
 Плоскость фазовая 449
 Поглочитель колебаний динамический 151
 Податливость упругая 217, 257
 Поле направлений 367, 449
 — — неустановившееся 367
 — — установившееся (стационарное) 367
 Полином устойчивый 429
 Потери гистерезисные энергии деформации 153
 Преобразование квадратичной формы 39
 — функции по Карсону 43
 Прецессия 192
 Прецессия обратная (отрицательная) 197
 — прямая (положительная) 196
 — регулярная 24
 Приведение длины вала 214
 — масс 214
 — матрицы коэффициентов 164
 — — кривошипно-шатунного механизма 216
 — системы 61
 Принцип взаимности обобщенный Рэлея 148
 — — перемещений 95
 — — сил 95, 258
 — наименьшего действия Остроградского—Гамильтона 26
 — Рэлея 175, 200
 Пространство фазовое 366
 Разложение возмущающей силы 84
 — по собственным формам колебаний 124, 144
 Разнос массы вала 283
 Рассеяние энергии некомпенсируемое 470, см. Диссипация
 Реакция связей 11
 — — динамические 12
 — — статические 12
 Режим переходный 42
 Резонанс 71, 85, 88, 147, 191
 — параметрический 536
 Решение периодическое 501, 534, 537
 — порождающее 501
 Ряд Фурье 84
 Сброс амплитуд 529
 Свертка функций 51
 Связи 11
 —, влияние на устойчивость 437
 — голономные 11
 — двусторонние (удерживающие) 11
 — неголономные 11
 — обратные 478
 — реономные (нестационарные) 12
 — склерономные 12
 — совершенные (идеальные) 13
 — стационарные 12, 61
 Сдвиг фазы 73
 Седло (особая точка) 414, 455
 Сепаратриса 457
 Сила активная 12
 — возмущающая 42, 69, 75, 84
 — восстанавливающая 69
 — гироскопическая 437
 — диссипативная 437
 — консервативная 19

- Сила обобщенная 14
 — центробежная (влияние на частоты) 309
 Симметризация уравнений 103
 Система автоколебательная 449, 477
 — автономная 367, 507
 — голономная 12
 — диссипативная 470
 — квазилинейная 485, 500, 501, 507
 — консервативная 17, 61, 92, 400, 437, 458
 — линейная 8, 11, 62, 233, 365
 — Ляпунова 520
 — неконсервативная 28, 477
 — нелинейная 365, 445, 450, 458, 524, 526
 — порождающая 504
 — приведенная эквивалентная 61, 89
 — Пуанкаре 501, 507
 — с бесконечным числом степеней свободы 89, 233
 — с внутренним неупругим сопротивлением 153
 — с конечным числом степеней свободы 8, 11, 89, 157, 178
 — с одной степенью свободы 59, 450, 513
 — с самовозбуждением 483
 — с сопротивлением, пропорциональным скорости 82
 Скорость критическая 191
 — обобщенная 365
 — угловая критическая вала 24, 193
 — — — с дисками 197
 — — — диска 363
 — — — колесчатого вала 213
 — фазовая 361
 Слой нейтральный в пластинке 329
 Сопротивление 63
 — внутреннее неупругое 153, 446, 470
 Состояние движения 17
 — — асимптотически устойчивое 415
 — критическое (резонансное) 110
 — равновесное 17, 60, 66, 95
 — — неустойчивое 414
 — — устойчивое по Ляпунову 369
 Стабилизация гироскопическая 442
 Степень неустойчивости 442
 Схема Рауса 433
 Таблица Толле 220, 223
 Теорема запаздывания 47
 — Лагранжа Дирихле об устойчивости равновесия консервативной системы 380
 Теорема Ляпунова о неустойчивости движения 403
 — — — по первому приближению 425
 — — об асимптотической устойчивости 395
 — — об устойчивости неустановившегося движения 393
 — — — по первому приближению 420
 — о положительности и о разделении корней векового уравнения 111
 — о разложении функций 52
 — об ортогональности собственных форм 118
 — об узлах собственных форм 120
 — об устойчивости равновесного состояния систем 378
 — Пуанкаре 501, 507
 — Рауса 399
 — свертывания функций 51, 76, 204
 Теорема Ляпунова о неустойчивости равновесия консервативных систем 382, 383
 — о влиянии на частоты измененных масс и жесткостей 141
 — о границах основной частоты 160
 — об изменении частот системы при наложении связей 133
 — об экстремальных свойствах собственных частот 138
 Тормоз ленточный 480
 Точка изображающая 366
 Траектория убегающая 456
 — фазовая 366, 412, 413
 Трение вязкое 68, 446
 — сухое (кулоново) 446
 Углы прецессии 24
 — фазовые 87
 Узел (особая точка) 414
 Упрочнение равновесия 438
 Уравнение Ван-дер-Поля 419
 — вариационное 312
 — — поперечных колебаний пластинки 332
 — вековое 110, 142, 194, 203
 — Лагранжа 17
 — Матье 537
 — характеристическое 237, 407, 538
 — Хилла 537
 — частот (вековое) 110, 237

- Уравнение частот Галеркина 314
 — — Ритца 298
 — в вариациях 387
 — Лагранжа 17, 95, 97
 — основные малых колебаний 110
 — первого приближения 406
 — Рауса 20
 — с периодическими коэффициентами 534
 — укороченные Ван-дер-Поля 525
 — установления 488
 — Эйлера—Лагранжа 29
 Условие ортогональности 119
 Условия геометрические 257, 337
 — динамические 257, 337
 — краевые 256
 — начальные 256
 Устойчивость асимптотическая 395, 440
 — неустановившаяся движения 393
 — орбитальная 402, 459
 — периодических решений 534, 537
 — по Ляпунову 369, 394
 — по первому приближению 405
 — предельных циклов 493
 — равновесного состояния системы 368, 378, 437
 — стационарного движения системы с циклическими координатами 22
 Усы фазовой траектории 455
 Фаза колебаний 59, 73
 Фигуры Хладни 339
 Фляттер 499
 Фокус неустойчивый 418
 — устойчивый 418
 Форма квадратичная 39
 — — определено положительная 40
 — —, приведение к каноническому виду 35, 40, 95
 — колебаний 157, 169, 243, 271, 322, 336
 — — собственная 116, 118, 124, 144, 236, 257, 258
 — — — для пластинок 338, 351
 — — — для стержня 125
 Формула Куликова 468
 — Пановко 468
 — Сорокина 285, 288
 — Темпля 319
 — универсальная упругой линии 9, 203
 — Фохта 287
 Формула Цыпкина 469
 Формулы Зиманенко 219
 — Картера 219
 — Крылова А. Н. 246, 249
 — Натансона 259
 — прямой линеаризации 468
 Функции базисные (координатные) 297
 — балочные 344, 548
 — Крылова (функции с единичной матрицей) 259, 286, 344
 — Ляпунова 370, 372
 Функционал Остроградского — Гамильтона 256
 Функция, аналитическая в области 385, 451
 — диссипативная 130
 — единичная 43
 — знакоопределенная 372
 — знакопеременная 373
 — знакопостоянная 372
 — импульсивная второго порядка 57
 — — первого порядка 56
 — Лагранжа 19, 20, 400
 — Ляпунова второго рода 388
 — — —, геометрическая интерпретация 377, 390
 — — — — знакоопределенная 372, 389
 — — — — обладающая бесконечно малым высшим пределом 376
 — — — — определено отрицательная 372
 — — первого рода 372
 — Матвея 540
 — начальная (оригинал) 42, 51
 — однородная 19
 — определено отрицательная 372, 389
 — определено положительная 372, 389
 — периодическая 50, 84
 — — второго рода 538
 — постоянно отрицательная 372
 — постоянно положительная 372
 — разрывная 48
 — рассеяния (диссипативная) 130
 — Рауса 21
 — Рэлея 135
 Центр (особая точка) 418, 458
 — жесткости 254
 Цикл предельный 482
 — устойчивый 493

- Частота колебаний 59, 449
 — — круговая 60
 — — лопатки динамическая 300
 — — основная 90, 160, 168
 — — пластинки 342, 344
 — — собственная 59, 109, 118, 157, 258
 — — —, экстремальные свойства 138
 Частоты высшие 178
 Часы 59, 447, 494
 Число оборотов критическое 157, 191, 281, 363, 364
 — степеней свободы 11, 214
 Член вековой 71
 Энергия кинетическая 61, 92, 390
 — полная механическая 19
 — положения изображающей точки 381
 — положения системы 16, 381
 — потенциальная 16, 61, 92



СПИСОК ИСПРАВЛЕНИЙ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
21	9 стр.	координатами	координатами и скоростями
66	11 св.	пра-	ле-
83	10 и 13 св.	\int_0^t	$\frac{1}{n_2} \int_0^t$
130	14 св.	$= \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$	$= - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$
137	7 св.	подставить	подставить вместо u_{si}
189	2 св.	на первом участке	к различным участкам вала
215	1 и 3 стр.	R^2	R_0^2
217	18, 21 и 22 св.	R^2	R_0^2
360	22 св.	диаметр	радиус
371	2 св.	некоторой	некоторой заданной
375	22 св.	c_1	$0 < c_1$
377	3 стр.	1 и 2	1, 2 и 3
416	5 св.	ось	ось ξ
424	12 стр.	функция	функция непрерывна,
442	1 стр.	энергии	энергии, приведенной к каноническому виду
492	5 стр.	порождающих окружностей	предельных циклов
513	5 стр.	$\mu \varphi_1 t$	$\mu \varphi_1(t)$
528	1 св.	резонансные амплитуды	амплитуды
537	1 стр.	упругих систем, Физматгиз 1960	деформируемых систем, «Наука», 1967