Оглавление

1 КРАТКАЯ ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА **8**

2 НАУЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ **10**

3 ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ **40**

3.1 «Новые задачи теории пластичности и разрушения», 1 год. Лектор — академик Шемякин Е. И. 42

3.2 «Распространение волн в сплошных средах», 1 год (обязательный спецкурс). Лектор — академик Шемякин Е. И. 43

3.3 «Газовая и волновая динамика», 1 год (обязательный спецкурс). Лектор — проф. Смирнов Н. Н. 44

3.4 «Неравновесная термодинамика», 1/2 года. Лектор — доцент Куксенко Б. В. 46

3.5 «Детонация и горение», 1 год. Лектор — проф. Смирнов Н. Н. 46

3.6 «Динамика многофазных сред с химическими и физическими превращениями», 1 год. Лектор — проф. Смирнов Н. Н. 49

3.7 «Неустановившиеся движения сжимаемых сред», 1/2 года. Лектор — проф. Смирнов Н. Н. 50

3.8 «Гетерогенное горение», 1 год. Лектор — проф. Смирнов Н. Н. 51

3.9 «Численное моделирование в динамике упругопластических сред», 1 год. Лектор — профессор Киселев А. Б. 52

3.10 «Расщепление вычислительных алгоритмов в задачах механики», 1 год. Лектор — профессор Коробейников В. П. 54

3.11 «Прочность и разрушение твердых тел», 1 год. Лектор — профессор Никитин Л. В. 54

3.12 «Динамика гибких связей», 1 год. Лектор — доцент Максимов В. Ф. 55

3.13 «Численное моделирование в газовой и волновой динамике», 1 год.
Лекторы — Профессор А. Б.Киселев, доцент Душин В. Р. 55
3.14 «Гидроаэродинамика», 1 год.
Лектор — профессор Ковалев В. Л. 58
3.15 «Основы физико-химической газовой динамики», 1 год.
Лектор — д.ф.-м.н. Ковалев В. Л. 60
3.16 «Методы граничных элементов в механике сплошных сред», 1 год.
Лектор — доцент Звягин А. В. 61
3.17 «Термодинамика газовых потоков», 1 год.
Лектор — доцент Куксенко Б. В. 62
3.18 «Динамика вязкого газа», 1/2 года.
Лектор — вед.н.сотр. Гендугов В. М. 63
3.19 «Гиперзвуковое обтекание тел газом», 1 год.
Лектор — вед.н.с. Гендугов В. М. 64
3.20 «Вычислительные методы в газовой динамике», 1 год.
Лектор — доцент Филиппов Ю. Г. 65
3.21 «Компьютерные технологии в прикладной механике жидкости и газа», 1 год.
Лекторы — доцент Гувернюк С. В., с.н.с. Лоханский Я. К. 66
3.22 «Статистические и структурные методы обработки эмпирических данных», 1 год.
Лектор — ст. научн. сотр. Ильюшина Е. А. 66
3.23 «Магнитная гидродинамика и электровихревые течения», 1 год.
Лектор — доцент Натяганов В. Л. 68
3.24 «Электродинамика сплошных сред», 1 год.
Лектор — доцент Натяганов В. Л. 69
3.25 «Динамика разреженного газа», 1 год.
Лектор — доцент Куксенко Б. В. 70
3.26 «Распространение волн в сплошных средах», 1 год.
Лектор — доцент Куксенко Б. В. 71
3.27 Спецсеминар 3-го курса 72
3.28 Спецсеминар 4-го курса 73
3.29 Спецсеминар 5-го курса 74

4 ОСНОВАТЕЛИ КАФЕДРЫ И ЛАБОРАТОРИЙ 76
4.1 Халил Ахмедович РАХМАТУЛИН 76
4.2 Игорь Николаевич ЗВЕРЕВ 80
4.3 Георгий Александрович ТЮЛИН 82
4.4 Артур Яковлевич САГОМОНЯН 88
4.5 Абрам Исаакович БУНИМОВИЧ 90
4.6 Анатолий Леонтьевич ПАВЛЕНКО 92
4.7 Юрий Индрикович ГРИМЗА 93

5 БИОГРАФИЧЕСКАЯ СПРАВКА О КОЛЛЕКТИВЕ КАФЕДРЫ 95

6 ВЫПУСКНИКИ КАФЕДРЫ 106

7 НАУЧНЫЕ РАБОТЫ СОТРУДНИКОВ КАФЕДРЫ 114

7.1 Шемякин Е. И. Деформации и разрушение горных пород (о кольцевой прочности) 114
7.2 Звягин А. В. О расклинивании упругой среды 121
7.3 Смирнов Н. Н., Никитин В. Ф. Переход горения в детонацию в газах 128
7.4 Киселев А. Б. Математическое моделирование процессов необратимого динамического деформирования, микро- и макроразрушения твердых тел 156
7.5 Ковалев В. Л., Крупнов А. А. Об образовании оксида азота в каталитических реакциях на поверхности многоразовых космических аппаратов 168
7.6 Демьянов Ю. А., Малашин А. А. Вынужденные продольные колебания музыкальных струн, обусловленные их поперечными колебаниями 178
7.7 Дубровский В. А. Электрогидродинамика и шаровая молния 188
7.8 Куксенко Б. В. Критерий разрушения в синтетической теории прочности 195
7.9 Натяганов В. Л. Ломоносов и успехи в изучении атмосферного электричества 201
7.10 Натяганов В. Л. Ломоносов и парадоксальный феномен атмосферного электричества — шаровая молния 215
7.11 Локшин А. А., Сагомонян Е. А. Головная волна от точечного источника в слоистой наследственно-упругой среде 232
7.12 Гувернюк С. В. О гиперзвуковом обтекании тел с сетчатыми экранами 236
7.13 Гендугов В. М., Глазунов Г. П. Глобальная модель ветровой эрозии почвы и ее проверка с использованием космической съемки 243
7.14 Колпаков В. П., Козлов В. П. Экспериментальное изучение процесса отражения гибкой растяжимой нити от поверхностей различной формы 257
7.15 Мосин А. Ф., Павлова Е. С., Фалунин М. П. Стационарные и нестационарные аэродинамические характеристики оперенных тел 263
7.16 Димитриенко И. Д., Димитриенко Ю. И. Проблемы моделирования горения твердых топлив в перспективных двигательных установках . 273
7.17 Ивашнев О. Е., Смирнов Н. Н. Структура фронта неустойчивого вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу 284
7.18 Афонина Н. Е., Громов В. Г., Ковалев В. Л. Об использовании низкокаталитических материалов для теплозащиты космических аппаратов, входящих в атмосферу Марса 297
7.19 Куксенко Б. В. Макромеханика и микромир. Механическая модель фотона 309
7.20 Гендугов В. М. Модель газовой детонации 315
7.21 Натяганов В. Л., Чайка А. А. Сингулярный метод в ЭГД течениях Стокса для сферических капель с поверхностным зарядом 327

7.22 Ивашнев О. Е., Шахмардан М. М. Перемешивание при вытеснении вязких жидкостей из ячейки Хеле-Шоу 336
7.23 Кончакова Н. А. К вопросу о единственности построения решения задачи Прандтля 344
7.24 Козлов В. П. Модель движения разгонных вихрей в следе за цилиндром 350
7.25 Миронов И. В. Сравнительный анализ величин силы Магнуса, вычисленных для вращающейся сферы в различных приближенных моделях 355
7.26 Стагурова О. В. Изучение напряженного состояния породного массива в окрестности разломов и магистральных трещин 361

8 АННОТАЦИИ 372

Глава 1

КРАТКАЯ ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Послевоенные годы — время становления сверхзвуковой авиации, ракетостроения и космонавтики. Большие сверхзвуковые скорости полетов сопровождались новыми для техники явлениями: ударными волнами, высокими температурами и химическими реакциями. Разные высоты полета диктовали моделирование аэродинамических характеристик летательных аппаратов и ракет в очень широком диапазоне плотности атмосферы и скорости полета. Это потребовало подготовки специалистов по газовой динамике, новому для тех времен разделу аэромеханики.

Развитие техники привело к необходимости изучения и математического моделирования переходных, нестационарных процессов, сопровождающихся распространением волн в различных средах. Оказалось, что несмотря на разнообразие физических свойств материалов, в которых наблюдаются динамические, и волновые процессы, в них есть много общих свойств, характерных для условий существования и взаимодействия волн.

Возросший уровень скоростей взаимодействия тел, сопровождался существенно необратимыми явлениями, что требовало развития термодинамики необратимых процессов.

Настоятельная необходимость изучения и моделирования динамического поведения материалов и свойств газов при высоких скоростях и температурах, а также подготовки специалистов по этим направлениям науки, привели к необходимости создания кафедры газовой и волновой динамики.

Кафедра газовой динамики была создана в 1951 году. Организовал кафедру и бессменно руководил ею до 10 января 1988 г. Герой Социалистического Труда, академик АН УзССР, доктор физико-математических наук, Заслуженный деятель науки и техники РСФСР и УзССР, лауреат Государственной премии СССР (дважды), премии Совета министров СССР (дважды), Государственной премии УзССР им. Бируни и Ломоносовской премии профессор **Халил Ахмедович Рахматулин** (23.04.1909 – 10.01.1988). В 1954 г. под руководством профессора Х.А. РАХМАТУЛИНА была создана кафедра волновой динамики. Через несколько месяцев обе кафедры были

объединены под названием кафедры газовой и волновой динамики.

В настоящее время кафедрой заведует академик РАН, лауреат Государственной премии СССР, Заслуженный профессор МГУ **Евгений Иванович Шемякин**. На кафедре газовой динамики с момента ее создания работал Заслуженный преподаватель МГУ, ученый секретарь кафедры, доцент Зверев И. Н. (14.04.1917 – 29.05.2001). С 1954 г. на кафедре работал Заслуженный деятель науки РСФСР, Заслуженный профессор МГУ Сагомонян А. Я. (23.03.1914 – 18.08.2001), с 1961 г. — Заслуженный профессор МГУ Бунимович А. И. (22.12.1917 – 3.07.1999), профессор Тюлин Г. А. (6.12.1914 – 22.04.1990). В последующие годы в состав кафедры вошли профессора Смирнов Н. Н., Киселев А. Б., Ковалев В. Л., совместители профессора Коробейников В. П. (15.03.1929 – 6.02.2003), Демьянов Ю. А., Никитин Л. В., Дубровский В. А.; доценты — Павленко А. Л. (6.10.1914 – 25.08.1987), Максимов В. Ф., Куксенко Б. В., Филимонов В. А. (31.05.1944 – 22.03.1997), Звягин А. В., Натяганов В. Л., Филиппов Ю. Г., Душин В. Р., Сагомонян Е. А., Никитин В. Ф., совместители Гувернюк С. В., Андронов П. Р.; старшие преподаватели — Гримза Ю. И. (18.08.1921 – 18.08.1982), совместитель Фалунин М. П.; ведущий научный сотрудник Гендугов В. М.; научные сотрудники Козлов В. П., совместитель Зубков А. Ф.

На кафедре в разные годы работали: Надеева Р. И., Мардонов Б. М., Воротынцев М. А.; по совместительству — профессор Паничкин И. А., академик РАН, профессор Нигматулин Р. И., профессора Демьянов Ю. А., Лунев В. В., Хабеев Н. С., доценты Прокофьев В. А., Никитин Н. Н.

В 1979 г. при кафедре была организована лаборатория волновых процессов. Ее первым заведующим с 1979 г. по 1990 г. был Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской премии, Заслуженный деятель науки и техники РСФСР, генерал-лейтенант, профессор Тюлин Г. А. С 1990 г. по настоящее время лабораторией заведует член-корреспондент РАЕН, лауреат премии им. И. И. Шувалова, профессор Смирнов Н. Н. В настоящее время в лаборатории работают ведущий научный сотрудник Ивашнев О. Е., старший научный сотрудник Ильюшина Е. А., научный сотрудник Димитриенко И. Д., младшие научные сотрудники Кульчицкий А. В., Ермакова М. С., Зверев Н. Н., Сорокин А. Н., Глебов С. М.

В 1987 г. на механико-математическом факультете по инициативе и при участии профессора Тюлина Г. А. был создан Отдел прикладных исследований по математике и механике, которым с момента основания заведует ректор МГУ академик РАН Садовничий В. А. В составе Отдела при кафедре газовой и волновой динамики была создана вторая научно-исследовательская лаборатория — лаборатория динамики деформируемых сред. Заведует лабораторией с момента ее создания лауреат премии Совета Министров СССР, доцент Максимов В. Ф. В настоящее время в лаборатории работают старшие научные сотрудники Зеленский А. С., Юмашев М. В., младшие научные сотрудники Зацепин А. В., Кокорева А. В.

В лабораториях в разные годы работали Моргунов М. Н., Гендугов В. М., Киселев А. Б., Аксенов А. В., Прошкин В. А., Натяганов В. Л., Колпаков В. П., Демьянов А. Ю., Панфилов И. И., Ждан Л. И., Кореняко В. В., Румянцева С. И., Нерченко В. А., Голенева Л. А., Еременко Б. М.

Глава 2

НАУЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Специфика кафедры газовой и волновой динамики, отраженная в ее названии, состоит в том, что с самого момента создания круг научных проблем, исследующихся на кафедре, не ограничивался механикой твердого деформируемого тела или механикой жидкости, газа и плазмы, поскольку проблемные динамические задачи для физически очень разных сред имеют много общего с точки зрения их математического моделирования. Поэтому на кафедре рассматривался очень широкий спектр задач по следующим основным направлениям:

1. нелинейные задачи динамики газа и жидкости;
2. теория распространения волн в упруго-вязко-пластических повреждаемых средах;
3. теория движения многофазных сред;
4. механика грунтов, горных пород и сыпучих материалов;
5. физико–химическая газовая динамика;
6. гиперзвуковая аэродинамика и теплообмен;
7. теория детонации и горения;
8. динамика гибких связей;
9. электромагнитная механика сплошных сред;
10. аэрогазодинамика проницаемых тел, теория парашюта;
11. проникание и динамика удара;
12. механика разрушения;
13. динамика разреженного газа;
14. групповые методы решения систем дифференциальных уравнений;

С приходом на кафедру в 1989 г. нового заведующего, видного ученого в области динамических задач механики твердого деформируемого тела академика РАН **Шемякина Е. И.**, автора работ в области динамики упругопластических сред и разрушения материалов (*Шемякин Е. И.* «Динамические задачи теории упругости и пластичности», Новосибирск: Наука, 1969; *Никифоровский В. С.*, *Шемякин Е. И.*

«Динамическое разрушение твердых тел», М.: Наука, 1979; *Шемякин Е. И.* «Синтетическая теория прочности», Физическая мезомеханика. 2000, № 1, № 5; *Шемякин Е. И.* «Об инвариантах напряженного и деформированного состояния в математических моделях механики сплошной среды», ДАН, 2000, Т. 373, № 6; *Шемякин Е. И.* «Диссипативная функция в моделях идеального упруго-пластического тела», ДАН, 2002, Т. 376, № 4) ему удалось сохранить как традиционные направления работы, так и активно поддержать *новые научные направления, связанные прежде всего с моделированием крупномасштабных природных процессов и явлений*. Одним из ярких примеров таких исследований является предложенная в 1995 г. Шемякиным Е. И. гипотеза о происхождении алмазоносных кимберлитовых трубок. Анализ месторождений алмазов и существующих объяснений их происхождения привел к революционной гипотезе о том, что возникновение кимберлитовых трубок связано с падением на Землю крупных метеоритов, их ударом и высокоскоростным проникание (*Шемякин Е. И.* «О происхождении алмазных трубок (физико-механическая гипотеза)», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1995, № 5). В этой работе аккумулирующей опыт, идеи и методы современной механики, сформулированы новые задачи о взаимодействии больших космических тел с Землей. Сама постановка таких задач приобретает особую значимость в связи с растущим осознанием человечеством глобальных экологических угроз, в том числе и связанных с космосом и необходимостью разработки различных способов защиты.

Другим примером моделирования крупномасштабных природных явлений может служить гипотеза, связывающая движение материи внутри Земли и происхождение ее магнитного поля с процессами сложного циклического нагружения, которое происходит в земной коре под действием Луны и Солнца (*Шемякин Е. И.* «Геомеханическая модель магнитного поля Земли», Сб. науч. тр.: Динамические процессы в геосферах под действием внешних и внутренних потоков энергии и вещества (Геофизика сильных возмущений), М.: ИДГ РАН, 1998).

В перечисленных выше традиционных направлениях исследований учеными кафедры получены важные и интересные результаты, многие из которых представляют не только теоретический интерес, но и широко использовались при создании изделий новой техники.

К числу **классических результатов в области механики деформируемого твердого тела** надо отнести волны разгрузки, открытые в 1945 г. (*Рахматулин Х. А.* «О распространении волны разгрузки», ПММ, 1945, Т. 9, № 1). Волны разгрузки, получившие название «волн Рахматулина», обусловлены необратимостью процесса пластической деформации материала. В области динамической теории упруго-пластических сред установлены законы распространения упруго-пластических волн, законы накопления остаточных деформаций при многократных нагрузках, разработана методика получения динамических диаграмм растяжения и сжатия материалов за пределами упругости. Как пример технических приложений этой теории можно привести динамический расчет фундаментов и проблем расчета брони стволов, работающих в условиях многократного приложения высоких давлений. Одним из применений теории волн разгрузки является решение задачи о многократных уда-

рах по стержню, интенсивность которых превышает предел упругости и приводит к накоплению упруго-пластических деформаций. Эти вопросы нашли отражение во множестве статей и в монографиях: *Рахматулин Х. А.*, *Демьянов Ю. А.* «Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках», М.: Физматгиз, 1961; *Рахматулин Х. А. и др.* «Двумерные задачи по неустановившемуся движению сплошных сред», Ташкент: ФАН, 1969.

Широкое применение в парашютостроении нашла созданная Рахматулиным Х. А. теория деформирования гибкой каркасированной оболочки (купола парашюта) под действием перепада давления. Благодаря остроумному сведению сложной пространственной задачи о форме наполненного купола с конечным числом строп (с учетом гофр и складок) к задаче о равновесии гибкой растяжимой нити под действием переменной распределенной нагрузки, Рахматулину Х. А. удалось эффективно решить ряд важных для практики задач оптимизации конструкций парашютов (наипрочнейший и максимального сопротивления парашюты, конструкции с конусным и коническим раскроями купола, с центральной стропой и мн. др.). Пионерская работа Рахматулина Х. А. по теории парашюта была опубликована в открытой печати лишь спустя более 30 лет после ее написания (*Рахматулин Х. А.* «Теория осесимметричного парашюта, часть1», Научные труды Института механики МГУ, М: Изд-во Моск. ун-та, 1975, номер 35; *Рахматулин Х. А.* «Теория осесимметричного парашюта, часть 2», в кн.: Парашюты и проницаемые тела, М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980). Однако и в 70-е годы эта теория вызвала новую волну интереса и нашла многочисленные применения в рамках набиравшего тогда силу потока работ по численному моделированию аэродинамики парашютных систем, поскольку давала наиболее удобный способ нахождения формы наполнения купола парашюта при заданном распределении перепада давления. Были также разработаны обобщения этой теории на случаи некруглых форм купола (например: *Рахматулин Х. А.*, *Джалалова М. В.* «Исследование параметров формы и напряженного состояния купола квадратного парашюта численным методом», в кн.: Парашюты и проницаемые тела, М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987).

Во многих случаях распространение волн в телах сопровождается трением с окружающей средой. Наличие трения приводит к тому, что такие задачи даже при малых упругих деформациях становятся существенно нелинейными и сводятся к неклассическим задачам математической физики. Основной трудностью является определение неизвестных границ областей движения и покоя, в которых используются разные по характеру уравнения. Практическое приложение такого рода задач очень велико. Вот только некоторые из них: забивка свай; вытаскивание труб при бурении; расчет прочности трубопроводов при сейсмических воздействиях и мн. др. Многие результаты, относящиеся к данному кругу вопросов, приведены в монографии: *Никитин Л. В.* «Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением», М.: Московский лицей, 1998.

На кафедре выполнены основополагающие исследования в **теории поперечного удара по гибким связям**. Открыты и исследованы сильные поперечные волны. Эти результаты послужили основой разработки современной теории поперечного удара

по связям типа нитей, мембран, оболочек. Теория поперечного удара широко используется при расчетах динамических задач для тонкой брони, сетей и в технологиях текстильной промышленности. Выявлены особенности взаимодействия тел и связей. Основы теории поперечного удара опубликованы в работах: *Рахматулин Х. А.* «О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями», ПММ, 1945, Т. 9, вып. 1; *Рахматулин Х. А.* «Об ударе по гибкой нити», ПММ, 1947, Т. 11, вып. 3; *Павленко А. Л.* «О распространении разрывов в гибкой нити», Изв. АН СССР, ОТН, 1959, № 4; *Павленко А. Л.* «Обобщение теории поперечного удара по гибкой нити», Изв. АН СССР, ОТН, 1960, № 2. Зверевым И. Н. исследован удар тонким клином по нити, когда нить соприкасается не только с вершиной клина, но и со щеками клина. Впервые введен ударный импульс (сосредоточенная сила в точках удара нити по щекам клина), действующий на щеки клина со стороны нити (1949 г.). Исследованием динамики гибких связей на кафедре продолжают заниматься Звягин А. В., Куксенко Б. В. и Максимов В. Ф. Некоторые результаты отражены в работах: *Максимов В. Ф.* «Динамика гибкой нити на круговом барабане», в кн.: Газовая и волновая динамика, вып. 1, М.: Изд-во МГУ, 1975; *Максимов В. Ф.* «Взаимодействие поперечной волны с геометрическим изломом линейно упругой нити», там же; *Максимов В. Ф.*, *Оснач Л. А.* «Взаимодействие продольной волны с изломом нити», в кн.: Газовая и волновая динамика, вып. 2, М.: Изд-во МГУ, 1979; *Максимов В. Ф.*, *Оснач Л. А.* «Нормальный удар конусом по тонкой пластине с трением», в кн.: Газовая и волновая динамика, вып. 3, М.: Изд-во МГУ, 1979; *Алимов С. И.*, *Куксенко Б. В.* «Исследование процесса формирования бунта в моталках проволочных станов», Труды ВНИКИ «Цветметавтоматика», вып. 6, 1970; *Григорян С. С.*, *Куксенко Б. В.* «Основные особенности осесимметричного автомодельного движения свободной несморщенной мембраны», Изд. АН СССР, МТТ, 1988, № 4; *Звягин А. В.* «О движении гибкой нити по поверхности вращения», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1993, № 6; *Голенева Л. А.*, *Куксенко Б. В.* «Вытягивание нити из прямолинейной однородной укладки», в кн.: Вопросы механики сплошных сред, М: Изд-во МГУ, 1993; *Звягин А. В.*, *Куксенко Б. В.* «Стационарная размотка нити в вязкой жидкости», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1995, № 4; *Куксенко Б. В.* «Формы нерастяжимой нити при квазистационарном протягивании через сопротивляющуюся среду», ДАН, 1998, Т. 359, вып. 4.

В направлении теории **моделирования грунтов и горных пород** созданы математические модели грунтов. Проведены экспериментальные исследования, давшие возможность определить уравнения состояния грунтов. Разработана модель твердой среды с трением, которая описывает поведение горных пород при взрывах и сейсмический эффект подземных взрывов в ближней зоне. Разработаны новые принципы деформации и смешения сыпучих материалов, учитывающие необратимые деформации и разрушение. Эти работы позволили исследовать и решить проблему подземного взрыва и многие другие вопросы динамики грунтов и горных материалов. Эти вопросы отражены в следующих работах: *Рахматулин Х. А.*, *Сагомонян А. Я.* , *Алексеев Н. А.* «Вопросы динамики грунтов», М.: Изд-во МГУ, 1964; *Никитин Л. В. и др.* «Механика разрушения горных пород», М.: Наука, 1987.

Целый ряд исследований кафедры посвящен развитию **теории динамики соударения тела со средой, проблеме высокоскоростного взаимодействия твердых деформируемых тел** (жидкости, металлы, грунты, бетон, лед). Это вторая (после волн разгрузки) группа классических результатов. Фундаментальными работами в этом направлении стали монографии: *Сагомонян А. Я.* «Проникание», М.: Изд-во МГУ, 1974; *Сагомонян А. Я.* «Удар и проникание в жидкость», М.: Изд-во МГУ, 1986; *Сагомонян А. Я.* «Динамика пробивания преград», М.: Изд-во МГУ, 1988; *Сагомонян А. Я.*, *Поручиков В. Б.* «Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости», М.: Изд-во МГУ, 1970. В этих монографиях исследован широкий круг практически важных задач. Полученные в них результаты активнейшим образом используются в инженерной практике. *Зверевым И. Н.* исследовано распространение волн в вязко-упругом и вязко-пластическом стержне (1949 г.).

Продолжением исследований в этом направлении послужили работы Киселева А. Б., Максимова В. Ф. и Звягина А. В. На основе современных численных методов детально исследованы задачи взаимодействия реальных проникающих тел с тонкими преградами с учетом процессов откола и разрушения. Эти результаты опубликованы в работах: *Киселев А. Б.*, *Максимов В. Ф.* «Численное моделирование нормального пробивания тонкой преграды деформируемым телом вращения», Изв. РАН, МТТ, 1995, № 5; *Киселев А. Б.* «Численное моделирование в трехмерной постановке наклонного пробивания тонких преград», в кн.: Численное решение задач волновой динамики. Кишинев: Штиинца, 1989. Построен ряд новых термодинамически конкретных моделей повреждаемых термоупруговязкопластических сред для описания динамического деформирования и микроразрушения материалов (*Киселев А. Б.*, *Юмашев М. В.* «Деформирование и разрушение при ударном нагружении. Модель повреждаемой термоупругопластической среды», ПМТФ, 1990, № 5; *Киселев А. Б.*, *Юмашев М. В.* «Математическая модель деформирования и разрушения твердого топлива при ударном нагружении», ПМТФ, 1992, № 6; *Киселев А. Б.*, *Юмашев М. В.* «Численное исследование ударного сжатия микропоры в термоупруговязкопластическом материале», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1992, № 1; *Киселев А. Б.*, *Юмашев М. В.* «Численное исследование динамических процессов деформирования и микроразрушения повреждаемых термоупругопластической среды», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1994, № 1; *Киселев А. Б.* «Математическое моделирование динамического деформирования и комбинированного микроразрушения термоупруговязкопластической среды», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1998, № 6; *Kiselev A. B.*, *Yumashev M. V.*, *Volod O. V.'ko* «Deforming and fracture of metals. The model of damageable thermoelastoviscoplastic medium'. J. of Materials Processing Technology, 1998, Vol. 80 – 81; *Kiselev A. B.* «Mathematical modelling of dynamical deforming and combined microfracture of damageable thermoelastoviscoplastic medium», In: Studies in Applied Mechanics 45, Advanced Methods in Materials Processing Defects. Amsterdam: Elsevier, 1997; *Киселев А. Б.* «Математическое моделирование динамических процессов необратимого деформирования и разрушения твердых тел», Математическое моделирование, 2000, Т. 12, № 6). Исследования наклонного проникания в различные

мишени, взрывного метания пластин проведены в работах *Звягина А. В.*.

На основе большого научного задела сотрудников кафедры в этой области разработаны модели высокоскоростного нормального и наклонного проникания в среды и пробивания преград, позволившие решить многие прикладные задачи аналитическими методами и улучшить методики решения этих задач на ЭВМ. Сформулированы и решены оптимальные задачи о форме тел минимального сопротивления при проникании в деформируемые среды, о минимальной скорости пробивания (*Бунимович А. И.*, *Якунина Г. Е.* «О форме пространственных тел минимального сопротивления, движущихся в пластически-сжимаемой и упругопластической средах», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1987, № 3; *Бунимович А. И.*, *Якунина Г. Е.* «О форме тел вращения минимального сопротивления, движущихся в пластически сжимаемой и упругопластической средах», ПММ, 1987, Т. 51, № 3). Решен ряд нестационарных пространственных задач для удара, проникания и пробивания преград оболочками с заполнителем и некоторые задачи штамповки взрывом. Эти результаты отражены в следующих работах: *Звягин А. В.* «К вопросу наклонного проникания в грунт», в кн.: Проблемы динамики взаимодействующих сред. Ереван: Изд-во АН Арм ССР, 1984; *Звягин А. В.*, *Сагомонян А. Я.* «Косой удар по пластине из упруго-пластического материала», Изв. АН СССР, МТТ, 1985, № 1; *Бунимович А. И.*, *Якунина Г. Е.* «О форме тела вращения минимального сопротивления при безотрывном проникании в пластически сжимаемые среды», ПММ, 1989, Т. 53, № 5; *Звягин А. В.*, *Богданов В. И.* «Штамповка взрывом», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1990, № 2; *Звягин А. В.*, *Богданов В. И.* «Метание пластины взрывом», Вестн. МГУ, Сер. 1, 1991, № 2.; *Звягин А. В.*, *Богданов В. И.* «Численное исследование пространственного проникания жесткого тела в упругопластическую плиту», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1993, № 4; *Гендугов В. М.*, *Киселев А. Б.* «Численное исследование откола в пластине при взрыве накладного заряда ВВ», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1990, № 5.

Особенности пространственного трехмерного деформирования упругопластических тел при ударе численно исследованы *Киселевым А. Б.* («Численное исследование в трехмерной постановке процесса соударения упругопластических тел с жесткой преградой», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1985, № 4; «К расчету трехмерной задачи высокоскоростного соударения упругопластического стержня с жесткой преградой», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1988.№ 2; «Численное моделирование рикошета жесткого ударника от упругопластической преграды в трехмерном случае», в кн.: Механика деформируемых сред, М.: Изд-во МГУ, 1985).

Вопросы динамики упругопластических оболочек с упругим заполнителем численно исследовались в работах: *Киселев А. Б.* «Поведение упругопластической оболочки вращения при осесимметричном нагружении», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1981, № 2; *Максимов В. Ф.*, *Киселев А. Б.* «Численное моделирование сложного взаимодействия упругопластической оболочки вращения с упругим заполнителем», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1982, № 1; *Максимов В. Ф.*, *Киселев А. Б.* «К численному моделированию сложного взаимодействия оболочки вращения с упругим заполнителем с учетом трения», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1984,

№ 2.

За исследования динамических процессов, сопровождающих проникание тел в плотные преграды звания лауреатов **премии Совета Министров СССР** в 1990 г. удостоены Рахматулин Х. А. (посмертно), Сагомонян А. Я., Бунимович А. И., Киселев А. Б., Максимов В. Ф., Звягин А. В. и Гендугов В. М.

Интересные результаты получены в работах Сагомонян Е. А. по исследованию нелинейных волн в твердых средах. Получены точные и асимптотические формулы для интенсивности простых волн и приволновая асимптотика. Разработан усовершенствованный подход к вычислению собственных функций и собственных значений эллиптических операторов, содержащих сингулярность. Результаты опубликованы в монографиях: *Локшин А. А.*, *Сагомонян Е. А.* «Нелинейные волны в механике твердого тела», М.: Изд-во МГУ, 1989; *Lokshin A. A.*, *Sagomonyan E. A.* «Nonlinear waves in Inhomogeneous and Xeseditory media», Springer Ser.: Research Reports in Physics, 1992; *Локшин А. А.* , *Сагомонян Е. А.* «Геометрические методы в теории спектров», М.: Изд-во МГУ, 1996; *Локшин А. А.*, *Сагомонян Е. А.* «Нелинейное волновое уравнение», М.: Вузовская книга, 1996.

В последние годы на кафедре активно развиваются исследования по **механике разрушения твердых тел** вплоть до разделения их на отдельные фрагменты. Интерес к этому направлению связан, в частности, с проблемой засорения околоземного космического пространства техногенными отходами, а также техническими проблемами дробления горных пород. Такие задачи дробления и фрагментации рассматриваются в работах *Шемякина Е. И.* («Свободное разрушение твердых тел», ДАН, 1991, Т. 300, № 5; «Задача о хрупком шарнире», Изв. РАН, МТТ, 1996, № 2; «О хрупком разрушении твердых тел (плоская деформация)», Изв РАН, МТТ, 1997, № 1), *Киселева А. Б.* («Простейшие математические модели разрушения космического аппарата при взрыве», ПМТФ, 1995, № 2; «Математическое моделирование фрагментации тонкостенных сферических оболочек под действием динамического внутреннего давления», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1996, № 3; «Математическое моделирование взрывного разрушения сферических оболочек с образованием двух фракций осколков», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1999, № 2; «Модель фрагментации при высокоскоростном соударении частиц космического мусора», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 2001, № 3) и работах: *Smirnov N. N.*, *Nikitin V. F.*, *Kiselev A. B.* «Peculiarities of Space debris production in different types of orbital breakups», Proc. of the Second European Conf. on Space Debris, Darmstadt: ESOC, 1997; *Смирнов Н. Н.*, *Киселев А. Б.*, *Никитин В. Ф.* «К исследованию высокоскоростного взаимодействия элементов космического мусора с газонаполненными оболочками», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Матем, 2002, № 6. Результаты исследований по этой тематике вошли и в коллективную монографию, посвященную широкому кругу вопросов, связанных с высокоскоростным взаимодействием тел: *Фомин В. М.*, *Гулидов А. И.*, *Киселев А. Б. и др.* «Высокоскоростное взаимодействие тел», Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.

Весомые результаты получены сотрудниками кафедры по многим вопросам **динамики газов и жидкостей, теории горения и детонации, электромагнитной механики сплошных сред, механики многофазных сред**.

Бурное развитие ракетно-космической техники, создание сверхзвуковых летательных аппаратов выдвинули новые задачи обтекания тел газом. Общепризнанными работами в этом направлении являются работы Бунимовича А. И. Ему принадлежат фундаментальные исследования движения тонких тел с большими сверхзвуковыми скоростями, обтекания тел потоком слабо разреженного газа, теории пограничного слоя. Им создана научная школа по исследованию обтекания тел и систем тел во всем диапазоне высот полета в разреженном газе и построена общая теория локального взаимодействия тел с различными средами, которая нашла широкое применение в задачах определения характеристик и формы тел минимального сопротивления при их движении в среде. Этим вопросам посвящена книга: *Bynimovich A. I.*, *Dybinsky A. V.* «Mathematical Models and Methods of Localized Interaction Theory World scientific», N.Y., 1995) а также статьи: *Бунимович А. И.*, *Дубинский А. В.*: «Вариационный метод для обобщенного класса функционалов и его применение к задачам аэромеханики», Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1; «Метод оптимизации для обобщенного класса функционалов и его применение к задаче об определении формы тела максимального аэродинамического качества», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1973, № 6; *Бунимович А. И.* «Об обтекании плоской полубесконечной пластины потоком вязкого разреженного газа», Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1959, № 5; *Бунимович А. И.* «Соотношения между силами, действующими на тела, движущиеся в разреженном газе, в потоке света и в гиперзвуковом ньютоновском потоке», Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4.; *Бунимович А. И.* «Аэродинамические характеристики осесимметричных тел при обтекании в условиях закона локальности», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1974, № 4; *Бунимович А. И.*, *Дубинский А. В.* «Развитие, современное состояние и приложения теории локального взаимодействия», Изв. РАН, МЖГ, 1996, № 3.

На кафедре ведутся теоретические и экспериментальные исследования задач аэродинамического обтекания вращающихся тел, в том числе с учетом возможного срыва потоков. По этим проблемам выполнены работы: *Шкадова В. П.*, *Козлов В. П.* «Модель предсказания силы Магнуса на вращающихся осесимметричных телах», Изв. АН СССР, МЖГ, 1988, № 4; *Козлов В. П.* «Эффекты движущейся стенки, возникающие при поперечном обтекании вращающегося цилиндра дозвуковым потоком», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1993, № 1; *Козлов В. П.*, *Фалунин М. П.*, *Шкадова В. П.* «Экспериментальное исследование поперечного обтекания одиночного и пары авторотирующих цилиндров», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1996, № 2. Бунимовичем А. И. и его учениками проведен большой цикл работ по исследованию обтекания вращающихся тел в потоке разреженного газа: *Бунимович А. И.*, *Дубинский А. В.* «Аэродинамические характеристики произвольно вращающихся тел в газе различной разреженности», Космические исследования, 1989, Т. XXVII, вып. 2; «О расчете вращательных производных при локальном взаимодействии потока с поверхностью тела», ПММ, 1998, Т. 62, вып. 1.

Выполнен цикл исследований движений вращающихся парашютов (ротошютов), в частности, экспериментально обнаружен новый тип движения таких объектов (переход от прямой к обратной «прецессии»), что позволило дать важную для прак-

тики классификацию границ существования стационарных режимов балансировки оси вращения ротошютов в потоке газа (*Гувернюк С. В.*, *Фалунин М. П.*, *Фещенко С. А.* «Исследование движения вращающегося парашюта», в кн.: Парашюты и проницаемые тела, М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980).

Газодинамика тел с проницаемыми границами является одной из трудных задач математического и численного моделирования в механике жидкостей и газов. Знаменитая работа Рахматулина Х. А. «Обтекание проницаемого тела» (Вестн. МГУ, сер. физ-мат. и естеств. наук, 1950, номер 3) легла в основу большого количества исследований по проблеме моделирования течений около проницаемых границ. Возникая во многих актуальных приложениях газовой и волновой динамики (таких, например, как экранировка тел от воздействия интенсивных ударно-волновых и тепловых нагрузок, аэродинамика парашютных систем, расчет систем распределенного вдува/отсоса с поверхности летательных аппаратов и иных тел, управление неоднородными турбулентными течениями путем преобразования крупномасштабной турбулентности в мелкомасштабную, газоструйные технологии сушки, распыления, перемешивания, и др.), проблема выбора системы граничных условий на проницаемой поверхности до сих пор еще содержит ряд нерешенных вопросов, особенно в случаях, когда проницаемая поверхность является внутренней границей течения.

На кафедре это направление развивают Гувернюк С. В. и его ученик Андронов П. Р.

В проблеме обтекания проницаемых тел несжимаемой средой показано, что любая поверхность гидродинамического разрыва с условиями склейки наветренного и подветренного течений, отвечающими законам просачивания среды через пористость, в общем случае, является источником объемной завихренности (*Рахматулин Х. А.*, *Гувернюк С. В.*«О постановке задач обтекания проницаемых тел несжимаемой средой», в кн.: Парашюты и проницаемые тела, М.: Изд.-во Моск. ун.-та, 1987). Найдены подходы, позволяющие конструировать течения около проницаемых тел, с выполнением всех граничных условий и определением нестационарных нагрузок на движущиеся проницаемые поверхности (*Гувернюк С. В.*, *Андронов П. Р.* «Дискретные модели течений идеальной жидкости с источниками объемной завихренности», Труды VII международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Феодосия, 1997; *Андронов П. Р.*«Численное моделирование обтекания двух круглых соосных дисков с учетом диссипации завихренности в следе», Труды VII международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Орел, Орловский госуниверситет, 2000). Получены точные аналитические решения струйных задач установившегося обтекания проницаемых экранов несжимаемой жидкостью (*Бучин В. А.*,*Гувернюк С. В.*, *Фещенко С. А.*,«Решение задачи об истечении жидкости из полупространства через частично проницаемую стенку», Изв. АН СССР, МЖГ, 1985, номер 5; *Андронов П. Р.*, *Гувернюк С. В.* «Решение задачи о плоской струе, натекающей на бесконечный проницаемый экран», в сб.: «Проблемы современной механики» (к юбилею Седова Л. И., МГУ им. М. В. Ломоносова, Институт механики), Изд-во Моск. ун.-та, 1998).

Для задач обтекания проницаемых поверхностей сжимаемым газом Гувернюком С. В. сформулирована новая постановка проблемы отыскания замкнутой системы граничных условий на основе построения обобщенной адиабаты проницаемой поверхности, дана полная классификация режимов взаимодействия газовой среды с тонкими проницаемыми границами. Соответствующая геометрическая структура обобщенной адиабаты, удовлетворяющей условиям эволюционности разрывов, включает ветви различной размерности (кривые, точки и конечные области). На этой основе предсказаны и обнаружены экспериментально новые режимы взаимодействия сжимаемой среды с проницаемыми телами, решена обобщенная задача Римана о распаде произвольного разрыва на проницаемой поверхности, исследован ряд задач обтекания газом проницаемых экранов (*Гувернюк С. В.*, *Ульянов Г. С.* « Обтекание сверхзвуковым потоком пластинки с перфорированной хвостовой частью », в кн.: Парашюты и проницаемые тела, М.: Изд.-во Моск. ун.-та, 1980; *Гувернюк С. В.*, *Фещенко С. А.* « Автомодельные сверхзвуковые течения газа через проницаемый экран », Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1985, номер 5; *Гувернюк С. В.*, *Савинов К. Г.*, *Ульянов Г. С.* « Сверхзвуковое обтекание затупленных перфорированных экранов», Изв. АН СССР, МЖГ, 1985, номер 1; *Гувернюк С. В.*, *Симоненко М. М.* « Взаимодействие цилиндрической ударной волны с тонкостенным проницаемым экраном», Изв. СО АН СССР, ПМТФ, 1985, номер 6; *Гувернюк С. В.*, *Савинов К. Г.* « О сверхзвуковом обтекании затупленных тел, экранированных проницаемой поверхностью», Изв. АН СССР, МЖГ, 1986, номер 2; *Гувернюк С. В.*, *Савинов К. Г.* « О равновесии гибкой проницаемой оболочки в сверхзвуковом потоке газа», Изв. АН СССР, МЖГ, 1989, номер 5; *Гувернюк С. В.* « Нестационарные течения с ударными волнами около тел сложной конфигурации», в сб.: Нестационарные течения газов с ударными волнами, Л.: Изд-во ФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР, 1990; *Гувернюк С. В.* « Адиабата проницаемой поверхности», АМГД, 2002, номер 3.).

За разработку теории обобщенной адиабаты проницаемой поверхности Гувернюк С. В. награжден медалью им. П. Л. Капицы. академии естественных наук РФ и Ассоциации авторов научных открытий (1996).

Поле деятельности современной науки о горении и взрыве значительно шире, чем это было несколько десятилетий назад, и аккумулирует достижения традиционной газодинамики и механики многофазных сред. Уже в начале XX века были сформулированы гипотезы, применяемые для вычисления скорости детонации и дефлаграции, опирающиеся на законы сохранения и законы термодинамики. С осознанием роли химических реакций в этих процессах законы термодинамики временно отступили на второй план. Работы И. Н. Зверева и его учеников Гендугова В. М., Смирнова Н. Н. и др. по термодинамике реагирующих потоков, **теории детонации и горения** убедительно показали, что при изучении этих процессов необходим учет всех законов сохранения и термодинамики. Область научных интересов Зверева И. Н. — исследование сильных возмущений в гомогенных и гетерогенных средах с учетом неравновесных химических и физических превращений. Им исследовано распространение ударных волн в гомогенных и гетерогенных средах. Изучены ударные волны в двухфазной среде (воздух и твердая порошкообразная фаза) с учетом межграну-

лярного давления. Выявлено, что плотность твердой фазы и скорость звука в смеси оказывают решающее влияние на процессы распространения волн. Исследовано распространение собственной волны детонации.

В работах *Зверева И. Н.* исследовано распространение неоднородной детонации в предварительно не перемешанных двухфазных системах (криогенный окислитель и тонкий слой горючего на стенках). Показано, что образуется самоподдерживающийся нестационарный комплекс, содержащий сильные и слабые разрывы и зоны горения или зоны детонации, периодически возникающие у стенок. Исследована детонация в тонких пластинах, пропитанных жидким кислородом с учетом разлета в зоне детонации. Выявлена зависимость скорости распространения детонации от толщины пластины.

Многоплановы интересы *Гендугова В. М.*. Его пионерские работы посвящены созданию теории детонации гетерогенных систем с предварительно неперемешанными фазами, поведению пленок жидкости за ударной волной, выявлению пространственных особенностей внутренней баллистики взрывного компрессора.

Созданная И. Н. Зверевым школа по процессам детонации и горения внесла весомый вклад в подготовку специалистов этих направлений науки. Основные этапы научной работы отражены в двух монографиях (*Зверев И. Н.*, *Смирнов Н. Н.* «Газодинамика горения», М.: Изд-во МГУ, 1987; *Смирнов Н. Н.*, *Зверев И. Н.* «Гетерогенное горение», М.: Изд-во МГУ, 1992) и следующих статьях: *Зверев И. Н.*, *Гендугов В. М.*, «Детонация гетерогенных систем предварительно не смешанных фаз», ФГВ, 1975, № 6; *Гендугов В. М.*, *Зверев И. Н.* «Температура поверхности теплопроводящей жидкости за ударной волной при наличии массообмена и химических реакций в пограничном слое», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1973, № 1; *Гендугов В. М.* «Детонация гетерогенных систем предварительно несмешанных фаз», ФГВ, 1972, № 4; *Гендугов В. М.* «О структуре волн детонации в гетерогенных системах с предварительно несмешанными фазами», ФГВ, 1979, № 5; *Гендугов В. М.* «Об устойчивости границы раздела газ-жидкость за фронтом ударной волны, скользящей вдоль поверхности пленки жидкости», ФГВ, 1978, № 1; *Гендугов В. М.* «Диффузионное пламя в турбулентном пограничном слое за ударной волной, скользящей вдоль поверхности жидкого топлива», ФГВ, 1979, № 2; *Гендугов В. М.*, *Моргунов Ю. А.* «Внутренняя баллистика взрывного компрессора», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1987, № 1; *Зверев И. Н.*, *Смирнов Н. Н.* «Тепло-массообмен над слоем горючего за ударной волной», ФГВ, 1981, № 6; *Смирнов Н. Н.* «Горение слоя топлива при обдувании поверхности потоком окислителя», ФГВ, 1982, № 5; *Смирнов Н. Н.* «Нестационарное гетерогенное горение топлива», ФГВ, 1991, № 2; *Smirnov N. N.* «Combustion and detonation in multiphase media. Initiation of detonation in dispersed-film systems behind a shock wave», Int. J. of Heat and Mass Transfer, 1988, Vol. 31, No. 4; *Смирнов Н. Н.* «Горение и детонация в многофазных средах, содержащих жидкое горючее», ФГВ, 1988, Т. 24, № 3.

Эффект образования кумулятивной струи при взрывном обжатии металлического конуса был открыт еще в конце позапрошлого века и достаточно широко используется по настоящее время для разрушения и перфорации твердых массивов в добываю-

щей промышленности и в военном деле. На кафедре проводились как аналитические, так и численные исследования нестационарных процессов формирования кумулятивных струй. Получено аналитическое решение задачи нестационарного формирования кумулятивной струи в рамках модели несжимаемой жидкости, обобщающее известное стационарное решение Лаврентьева М. А. (*Смирнов Н. Н.* «Формирование кумулятивных струй», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матема. Механ, 1981, № 4; *Смирнов Н. Н.* «Нестационарное формирование кумулятивной струи в плотной среде», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1985, № 6; *Смирнов Н. Н.* «Разлет продуктов детонации трубчатого заряда», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1987, № 5).

Кумуляция нестационарных ударных и акустических волн в газе при их отражении от вогнутых стенок изучалась в работах Сагомоняна А. Я. и Гувернюка С. В., в частности, объяснен механизм разрушения автомодельного режима регулярного отражения, приводящего к неограниченной кумуляции для сильной плоской ударной волны, проникающей вглубь конической полости (*Гувернюк С. В.*, *Сагомонян А. Я.* «Особенности регулярного отражения ударной волны от стенок конической воронки», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1983, № 3);

Разработана модель конвективного горения унитарных сжимаемых пористых топлив. Установлено существование самоподдерживающихся режимов, обладающих характеристиками как детонационных, так и дефлаграционных волн (*Смирнов Н. Н.* «Конвективное горение в каналах и трещинах в твердом топливе», ФГВ, 1985, № 5; *Смирнов Н. Н.* «Конвективное горение и слабая детонация в твердых топливах», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1987, № 3; *Смирнов Н. Н.*, *Димитриенко И. Д.* «Исследование конвективного горения в сжимаемом твердом топливе с продольными каналами», ФГВ, 1990, № 4; *Смирнов Н. Н.* «Модель горения пористых диспергирующих топлив», ФГВ, 1991, № 1; *Смирнов Н. Н.*, *Бердюгин А. Г.* «О существовании стационарных самоподдерживающихся режимов сгорания пористых и канальных топлив», ФГВ, 1991, № 4).

Проведены комплексные экспериментальные и теоретические исследования механизмов перехода горения в детонацию в гомогенных и гетерогенных топливовоздушных смесях. Впервые обнаружено, что при переходе горения в детонацию в газах возможна реализация пяти различных сценариев. Показано, что существовавшие ранее теоретические представления о двух возможных механизмах: «взрыва во взрыве» А. Оппенгейма и «спонтанного пламени» Зельдовича Я. Б., — суть не взаимно исключающие, а взаимно дополняющие механизмы, но работающие на различных характерных масштабах. Именно комбинацией этих двух механизмов и вызвано экспериментально обнаруженное многообразие сценариев переходных процессов (*Смирнов Н. Н.*, *Бойченко А. П.* «Переход горения в детонацию в бензино-воздушных смесях», ФГВ, 1986, № 2; *Смирнов Н. Н.*, *Панфилов И. И.* «Режимы развития горения и детонации в газовых смесях», ФГВ, 1992, № 5; *Смирнов Н. Н.*, *Панфилов И. И.* «Численное моделирование перехода горения в детонацию в гомогенных горючих газовых смесях», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1993, № 3; *Смирнов Н. Н.*, *Тюрников М. В.* «Переход горения в детонацию в углеводородо-воздушной газовой смеси», ФГВ, 1994, № 1; *Smirnov N. N.*, *Panfilov I. I.* «Deflagration to detonation transition in

combustible gas mixtures», Combustion and Flame, 1995, Vol. 101, № 1/2; *Smirnov N. N.*, *Tyurnikov M. V.* «Experimental investigation of deflagration to detonation transition in hydrocarbon-air gaseous mixtures», Combustion and Flame, 1995, Vol. 100, № 4; *Smirnov N. N.*, *Zverev N. I.*, *Tyurnikov M. V.* «Theoretical and experimental study of shock wave propagation in multiphase hydrocarbon-air mixture», Shock Waves, Eds. R. Brun, Dumitrekcu L. Z., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995, vol. 4; *Smirnov N. N.*, *Panfilov I. I.*, *Tyurnikov M. V.*, *Berdyugin A. G.* «Theoretical and experimental Study of deflagration to detonation transition and instability of detonation structure in gases», Archivum Combustionis, 1996, № 1 – 2; *Smirnov N. N.*, *Nikitin V. F.*, *Boichenko A. P.*, *Tyurnikov M. V.*, *Legros J. C.*, *Shevtsova V. M.* «Control of Detonation Onset in Combustible Gases», High Speed Deflagration and Detonation: Fundamentals and Control, Moscow, Elex-KM Pbl, 2001; Smirnov N. N., Nikitin V. F. The influence of confinement geometry on deflagration to detonation transition in gases. Journ. Phys. IV France, 2002, v.12, Pr. 7).

Проведенные исследования по переходу горения в детонацию в смесях бензина и дизельного топлива с воздухом позволили разработать эффективный генератор детонационных волн импульсного периодического действия. Созданное на его базе устройства для бурения грунтов было отмечено медалями ВДНХ, выставок в Хельсинки и Берлине (*Смирнов Н. Н.*, *Зверев И. Н.*, *Бойченко А. П.*, *Курников С. А.* «Внутренняя баллистика детонационной установки для разработки грунтов», в кн.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван, 1987; *Smirnov N. N.*, *Zverev N. I.*, *Boytchenko A. P.* «Der einsatz des gasdetonationsprinzipes zur durchdringung herter und gefrorener bodenschichten», Harvard des Ostens, Berlin, 1993).

Исследованы режимы нестационарного диффузионного горения топлив, когда горючее и окислитель не перемешаны и динамика горения определяется процессами смешения. Получены автомодельные решения и численно исследованы осесимметричные нестационарные задачи. Показано существование колебательного режима диффузионного горения (*Смирнов Н. Н.* «Диффузионное горение жидкого топлива в потоке с распределенными параметрами», ФГВ, 1984, № 3; *Smirnov N. N.* «Heat and mass transfer in unsteady-state diffusion combustion of a condensed fuel surface», Int. J. of Heat and Mass Transfer, 1986, Vol. 29, № 5; *Смирнов Н. Н.*, *Плотников С. А.* «Поверхностное диффузионное горение гетерогенных систем с жидким топливом», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1983, № 5; *Смирнов Н. Н.* «Гетерогенное диффузионное горение конденсированного топлива в невесомости», ФГВ, 1994, Т. 30, № 5; *Smirnov N. N.*, *Nikitin V. F.* «Unsteady-state turbulent diffusive combustion in confined volumes», Combustion and Flame, 1997, Vol. 111, № 3).

Исследованы гетерогенные каталитические реакции и влияние внешнедиффузионного торможения на динамику реакции при трехстадийном адсорбционном механизме реакции. Впервые установлено, что внешняя диффузия не только количественно влияет на скорость протекания реакции, но и качественно меняет фазовый портрет реакции: возрастает количество стационарных состояний и меняется их место расположения на фазовой плоскости. Объяснена природа гистерезиса скорости

каталитической реакции при изменении парциального давления одного из реагентов (*Смирнов Н. Н.*, *Южаков В. В.* «Динамика каталитической реакции окисления CO на Pt катализаторе с учетом диффузионного торможения», ФГВ, 1993, Т. 29, № 6; *Смирнов Н. Н.*, *Южаков В. В.* «Стационарное и нестационарное окисление CO на платине с учетом внешнедиффузионного торможения», ФГВ, 1996, Т. 32, № 6).

Труды коллектива специалистов по химической физике, посвященные релаксации колебательной энергии, диссоциации и рекомбинации двухатомных молекул в газовой фазе, в составе которой работал Куксенко Б. В. (*Kuksenko B. V.*, *Losev S. A.* «On the vibrational exitation of rotating molecules», 5-th ICPEAC, Ленинград, 1967; *Куксенко Б. В.*, *Лосев С. А.* «Возбуждение колебаний и распад двухатомных молекул при атом-молекулярных столкновениях в газе высокой температуры», ДАН СССР, 1969, Т. 185), получили широкое признание.

Важное научное направление, связанное с **исследованием движения тел в атмосфере Земли и других планет с учетом физико–химических процессов**, представляет на кафедре Ковалев В. Л.

Ковалевым В. Л. развито новое направление исследования теплообмена с каталитическими поверхностями высокотемпературных покрытий, применяемых для теплозащиты космических аппаратов. На основе учета детального механизма гетерогенных каталитических процессов получены граничные условия на поверхности в потоках диссоциированных и ионизованных многокомпонентных смесей газов. Показано, что эффективные коэффициенты каталитической активности теплозащитных покрытий являются немонотонными функциями температуры, существенно зависят от парциальных давлений компонентов и могут зависеть от диффузионных потоков. При этом температурные зависимости эффективных коэффициентов каталитичности имеют ярко выраженный максимум, величина и положение которого зависит от давления и состава газа у поверхности. Такое поведение коэффициентов рекомбинации от температуры подтверждается экспериментальными данными и имеет важное значение для проектирования перспективных космических аппаратов, входящих в атмосферу с большими скоростями, когда температура поверхности превышает 1500 K. Установлен также факт немонотонной зависимости коэффициентов рекомбинации от полного давления для современных теплозащитных плиточных покрытий.

В отличие от используемых ранее в таких задачах постоянных значений эффективных коэффициентов каталитической активности или их аррениусовых аппроксимаций от температуры предложенная модель описания каталитических свойств теплозащитных покрытий позволяет правильно интерпретировать как лабораторные, так и натурные экспериментальные данные и проводить исследования в широком диапазоне условий в набегающем потоке. В частности такой подход позволяет описать теплообмен на всей траектории входа вдоль боковой поверхности многоразовых космических аппаратов «Буран» и «Спейс Шаттл».

Ковалевым В. Л. разработаны и исследованы физико-математические модели описания течений у каталитических поверхностей при полете тел с большими сверхзвуковыми скоростями в атмосферах Земли и Марса. Исследовано влияние каталитических свойств поверхности на теплообмен, уровень ионизации в ударном слое

и другие характеристики течения. Рассчитаны аэродинамические характеристики и тепловые потоки к наветренной поверхности многоразовых космических аппаратов. Получены данные о процессах плазмообразования в ударном слое, необходимые для определения возможности радиосвязи с космическим аппаратом.

За разработку модели взаимодействия ионизованных смесей с каталитическими поверхностями при их сверхзвуковом обтекании Ковалев В. Л. награжден медалью им. П. Л. Капицы Академии естественных наук РФ и Ассоциации авторов научных открытий (1996). Эти исследования были отмечены в ряду лучших по Российской Академии наук (2001).

На основе асимптотического разложения решения уравнений многокомпонентного химически неравновесного пограничного слоя Ковалевым В. Л. получены аналитические формулы для тепловых и диффузионных потоков продуктов реакций и химических элементов к поверхности с произвольной каталитической активностью. Эти формулы являются обобщением классических формул Гуларда и Фея-Риддела на случаи произвольной каталитической активности поверхности, и неравновесного течения многокомпонентной смеси в пограничном слое. Сравнение полученных результатов с известными аналитическими и численными решениями показало высокую точность предложенных формул.

Ковалевым В. Л. создан новый эффективный численный метод для расчета теплообмена при входе тел в атмосферу с учетом реальных физико-химических процессов как для ламинарного, так и для турбулентного режимов течений. Для решения уравнений многокомпонентного, химически реагирующего полного вязкого ударного слоя разработан метод глобальных итераций по продольной составляющей градиента давления и форме головной ударной волны. Предложен и реализован такой способ их определения на каждой глобальной итерации, который позволил учесть влияние всех точек вдоль координатной линии на передачу возмущений вверх по потоку. Совместное решение всех уравнений позволило существенно повысить устойчивость численного алгоритма. Метод позволяет единым образом рассчитывать течение в дозвуковой и сверхзвуковой областях течения и является значительно более экономичным по времени расчета и используемой памяти ЭВМ по сравнению с методами установления. Для определения интегральных характеристик, таких, как тепловой поток и давление на теле, с точностью 1% необходимо не более 2–3 глобальных итераций.

Метод позволяет исследовать ламинарное, переходное и турбулентное течения во всем диапазоне изменения скоростей протекания гомогенных и гетерогенных каталитических реакций (от замороженных до равновесных). Для исследования течения диссоциированной и частично ионизованной многокомпонентной смеси с разными диффузионными свойствами компонент смеси газов разработан алгоритм, не требующий предварительного разрешения соотношений Стефана-Максвелла (уравнений переноса компонентов) относительно диффузионных потоков, что существенно уменьшает объем вычислений, так как время счета становится пропорциональным числу компонентов, а не его квадрату. Указанный подход позволяет использовать компьютеры с параллельными процессорами, что значительно экономит время рас-

чета.

Помимо факта снижения каталитических свойств теплозащитных покрытий при высоких температурах Ковалевым В. Л. установлен и ряд других физических эффектов. В том числе, обнаружен и объяснен эффект диффузионного разделения химических элементов смесей, обусловленный избирательностью каталитического воздействия на процесс рекомбинации атомов. Диффузионное разделение элементов на поверхности обладающей таким свойством, в отличие от случая идеально каталитической поверхности, имеет место даже тогда, когда на внешней границе пограничного слоя присутствуют одни атомы.

Новые интересные результаты получены Ковалевым В. Л. и при исследовании нестационарного движения плазмы в электромагнитном поле. Им проанализирована реакция системы плазма — ускоряемое тело на внезапное изменение плотности тока и вдув массы в канале ускорителя. Показано, что в каждом рассмотренном случае возникают затухающие осцилляции около соответствующего стационарного решения. Разработан эффективный численный метод исследования нестационарного движения плазмы и ускоряемого тела в канале ускорителя, с помощью которого исследовано изменение со временем параметров плазмы, скорости и ускорения тела во время их движения от состояния покоя вплоть до выхода на стационарный режим.

Основные результаты опубликованы в монографиях и научных статьях:

Ковалев В. Л. «Гетерогенные каталитические процессы при входе в атмосферу», М.: ЦПИ при мех-мат ф-те МГУ, 1999; *Ковалев В. Л.* «Гетерогенные каталитические процессы в аэротермодинамике», М.: Физматлит, 2002; *Ковалев В. Л.*, *Суслов О. Н.* «Модель взаимодействия частично ионизованного воздуха с каталитической поверхностью. Исследования по гиперзвуковой аэродинамике и теплообмену с учетом неравновесных химических реакций», М.: Изд-во МГУ, 1987; *Ковалев В. Л. , Суслов О. Н.* Эффект диффузионного разделения химических элементов на каталитической поверхности// Изв. АН СССР: МЖГ. 1988. № 4; *Ковалев В. Л., Звездин А. М.* Численное исследование нестационарного движения плазмы и ускоряемого тела в канале рельсотрона. Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1992, № 5; *Ковалев В. Л., Вомпе А. Г.* О некоторых нестационарных процессах в канале рельсотрона. Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1993, № 3; *Ковалев В. Л.*, *Крупнов А. А.*, *Тирский Г. А.* «Решение уравнений вязкого ударного слоя методом простых глобальных итераций по градиенту давления и форме ударной волны», ДАН, 1994, Т. 338, № 3; *Ковалев В. Л.*, *Крупнов А. А.*, *Тирский Г. А.* «Метод глобальных итераций решения задач сверхзвукового обтекания затупленных тел идеальным газом», ДАН, 1994, Т. 339, № 3; *Ковалев В. Л.*, *Суслов О. Н.* «Асимптотические формулы для исследования тепломассообмена в химически неравновесном пограничном слое на каталитической поверхности», ДАН, 1995, Т. 345, № 4; *Ковалев В. Л.* «Моделирование процессов диффузии при описании неравновесных течений у каталитических поверхностей», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1995, № 1; *Ковалев В. Л.*, *Крупнов А. А.*, *Лохин В. В.* «Численное исследование гиперзвукового обтекания затупленных тел химически реагирующим запыленным газом», в кн.: Современные газодинамические и физико-химические модели гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена, Часть II,

М.: Изд-во МГУ, 1995); *Ковалев В. Л.*, *Суслов О. Н.*, Моделирование взаимодействия частично ионизованного воздуха с каталитической поверхностью высокотемпературной теплоизоляции. Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 5; *Ковалев В. Л.*, *Колесников А. Ф.*, *Крупнов А. А.*, *Якушин М. И.* «Анализ феноменологических моделей, описывающих каталитические свойства поверхности высокотемпературной многоразовой теплоизоляции», Изв. РАН, МЖГ, 1996, № 6; *Kovalev V. L., Krupnov A. A.* Catalytical Activity Models of Thermal Protection Reusable Surface Insulation. 15th IMACS World Congress. August 24–29, 1997. Berlin. V.3: Computational Physics, Chemistry and Biology. Edited by Achim Sydow. 1997; *Ковалев В. Л.* , *Крупнов А. А.* «Особенности моделирования теплообмена с каталитическими поверхностями при входе тел в атмосферу Земли», Вест. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1998, № 5; *Kovalev V. L., Krupnov A. A.* Details of Heat–Transfer Modeling with Catalytic Surface in the Atmospheric Re-entry Problem. Rarefied Gas Dynamics. CEPAD. 1999. Vol.1 Proceedings of the 21st International Symposium on Rarefied Gas Dynamics 26–31 July 1998, Marseille, France. Editors: R. Brun, R. Campaegue, R. Gatingol, Lengrand R. J. P.; *Ковалев В. Л.* Феноменологические модели каталитических свойств теплозащитных покрытий космических аппаратов, входящих в атмосферу Марса. Труды XIV сессии международной школы по моделям механики сплошной среды. Издательство Московского физико-технического института (государственного университета), 1998; *Ковалев В. Л.* «Моделирование каталитических свойств теплозащитных покрытий при входе в атмосферу Марса», Вест. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1999, № 1; *Афонина Н. Е.*, *Громов В. Г.*, *Ковалев В. Л.* Моделирование каталитических свойств покрытий высокотемпературных теплозащитных материалов в диссоциированной смеси углекислого газа и азота. Изв. РАН; МЖГ. 2000. № 1; *Афонина Н. Е., Громов В. Г. Ковалев В. Л.* Влияние каталитических свойств современных теплозащитных покрытий космических аппаратов на теплообмен при входе в атмосферу Марса. Вест. МГУ. Сер. 1. Матем. Механ. 2000. № 6; *Afonina N. E., Gromov V. G., Kovalev V. L.* Finite Rate Heterogeneous Catalysis Modeling for Thermal Protection Systems of Space Vehicles Entering into Martian Atmosphere. 16th IMACS WORLD CONGRESS 2000 on Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation. Proceedings 08/00 Lausanne-August 21-25, 2000. Copyright IMACS-Department of Computer Science - Rutgers University, ISBN 3-9522075-1-9. New Brunswick-N.J 08903-U.S.A.; *Афонина Н. Е., Громов В. Г. Ковалев В. Л.* Модель гетерогенной рекомбинации на теплозащитных покрытиях космических аппаратов, входящих в атмосферу Марса, с учетом конечной скорости адсорбции атомов кислорода. Вест. МГУ; сер. 1. Матем. Механ. 2001. № 3; *Afonina N. E., Gromov V. G., Kovalev V. L.* Catalysis modeling for thermal protection systems of vehicles entering into Martian atmosphere. AIAA Paper 01-2832. 2001; *Афонина Н. Е., Громов В. Г. Ковалев В. Л.* Влияние физической адсорбции атомов на тепловые потоки к каталитической поверхности высокотемпературных теплозащитных материалов в диссоциированной смеси углекислого газа. Вест. МГУ. Сер. 1. Матем. Механ. 2002. № 1; *Афонина Н. Е., Громов В. Г., Ковалев В. Л.* Исследование влияния различных механизмов гетерогенной рекомбинации на тепловые потоки к каталитической поверхности в диссоциированном углекислом га-

зе// Изв. РАН: МЖГ. № 1, 2002; *Afonina N. E., Gromov V. G., Kovalev V. L.* Effect of different heterogeneous recombination mechanisms on heat fluxes to catalytic surfaces in carbon dioxide// Proceedings of 4-th European Symposium on Aerothermodynamics for Space Vehicles. Capua, Italy, 15-19 October 2001. ESA Publication Division. ESTEC, Noordwijk. The Netherlands. 2002; *Afonina N. E., Gromov V. G., Kovalev V. L.* Effect of Physical Adsorption on Heat Fluxes to Catalytic Surfaces in Carbon Dioxide. In Rarefied Gas Dynamics 23, Canada, 2002.

Многие природные явления, в том числе и катастрофического характера типа землетрясений, атмосферных смерчей или торнадо, требуют для адекватного описания и успешного прогнозирования применения методов и моделей **электромагнитной механики сплошных сред**. Все чаще и современные технологии используют результаты электро- и магнитной гидродинамики. В этом направлении Натягановым В. Л. получены фундаментальные решения трехмерных задач безындукционного магнитогидродинамического обтекания, предложено обобщение классического метода точечных сил Озеена для описания МГД-обтекания тел при малых числах Рейнольдса и Гартмана, на основе которого решен ряд конкретных задач. Основные результаты опубликованы в работах: «Магнитогидродинамическое обтекание капли при малых числах Рейнольдса и Гартмана», Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 6; «Диффузия к частице при больших числах Пекле и малых числах Рейнольдса и Гартмана» (совместно с Головиным А. М.). Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 1; «Магнитогидродинамическое обтекание вращающегося шара при малых числах Рейнольдса и Гартмана в приближении Озеена», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1980, № 3; «О фундаментальном решении задач МГД-обтекания тел при малых числах Рейнольдса», В кн: Вопросы механики сплошных сред, М: Изд-во МГУ, 1993; «О фундаментальном решении задач МГД-обтекания тел в приближении Озеена при нарушении осевой симметрии», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1995, № 6.

Принципиальными проблемами являются задачи об атмосферном электричестве. В данном направлении Дубровским В. А. получены уравнения электрогидродинамики сплошной среды с дипольным электрическим моментом. Периодическая перекачка энергии электрического поля в энергию движения диэлектрической сплошной среды может лежать в основе всего механизма генерации атмосферного электричества и дать объяснения его многочисленных загадок типа электромагнитных предвестников сильных землетрясений, образования тайфунов, атмосферных смерчей и возникновения шаровых молний. Основные результаты опубликованы в работах: «Уравнения электрогидродинамики и электроупругости», ДАН, 1984, т. 279, № 4; «Механизм генерации электрического поля» (совместно с Русаковым Н. Н.). ДАН, 1989, т. 306, № 1; а на способ локации мощных атмосферных электромагнитных волн выдано авторское свидетельство (1990).

В последнее время Натягановым В. Л. и Кульчицким А. В. (последний три года работал по контракту в Японии) были получены обнадеживающие результаты по электромагнитным предвестникам и сопутствующим сильным землетрясениям явлениям, которые опубликованы в работах: Натяганов В. Л. «Магнитогидродинамическая аналогия и сейсмоэлектрический эффект», ДАН, 2003, т. 391, № 1; Натяганов

В. Л. «Математическое моделирование и метод гидроэлектромагнитных аналогий», в кн. Современные проблемы механики и прикладной математики, Воронеж, 2003; A. Kulchitsky, O. Molchanov, M. Hayakawa «Inductive seismo-electromagnetic effect in relation to seismogenic ULF emission», Natural Hazards and Earth System Sciences (journal of EGS), Vol. 1, Num. 1/2, 2001, ISSN 1561-8633; A. Kulchitsky, O. Molchanov, M. Hayakawa «ULF emission due to inductive seismo-electromagnetic effect», Seismo Electromagnetics (Lithosphere-Atmosphere-Ionosphere Coupling), Ed. by M. Hayakawa and Molchanov O. A., TERRAPUB, Jan, 2002.

Сотрудниками кафедры был также решен ряд задач о взаимодействии веществ с сильными электромагнитными полями применительно к задачам электродинамического ускорения масс (*Никитин В. Ф.*, *Смирнов Н. Н.* «Формирование электромагнитного поля в несимметричных рельсах и защитном кожухе рельсотрона при нарастающем импульсе тока», ПМТФ, 1997, № 1; *Смирнов Н. Н.*, *Никитин В. Ф.* «Диффузия магнитного поля внутрь проводящего полупространства при линейном нарастании силы тока», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1992, № 2; *Алексеева Н. А.*, *Натяганов В. Л.* «Влияние эффекта Пельтье на джоулев нагрев проводников», в кн. Динамические задачи механики деформируемых сред, М.: Изд-во МГУ, 1990; *Алексеева Н. А.*, *Натяганов В. Л.* «Нагрев проводников электрическим током в зоне биметаллического контакта», в кн. Вопросы механики сплошных сред, М.: Изд-во МГУ, 1993).

Проводившиеся на Кафедре исследования вопросов внутренней баллистики газодинамических ускорителей (*Максимов В. Ф.*, *Филиппов Ю. Г.* «Ускорение тела при сжатии газа поршнем», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1987, № 1) дали дополнительный толчок развитию метода характеристик и основанных на нем численных схем.

Большинство сред, встречающихся в природе и используемых в технике, не являются однородными и не могут быть отнесены к классу жидкостей, газов или твердых деформируемых тел. Это, так называемые, **многофазные (гетерогенные) среды**, содержащие поверхности разрыва непрерывности свойств. К таким средам могут быть отнесены суспензии и эмульсии, парожидкостные потоки, газопылевые облака, нефтегазоносные пористые среды (грунты и горные породы), композиционные материалы. На границах раздела фаз в таких средах возможны фазовые переходы (испарение, газификация, конденсация) и химические реакции (горение, каталитические гетерогенные реакции). Различия в свойствах отдельных фаз, составляющих среду, и межфазные взаимодействия играют определяющую роль в динамике таких сред, что потребовало разработки новых моделей и методов.

Статья *Рахматулина Х. А.* («Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред», ПММ, 1956, Т. 20, вып. 2) положила начало новому этапу развития **механики многофазных сред**. В ней последовательно объединились достижения, идеи и методы газодинамики, механики взаимопроникающих континуумов и реальных процессов межфазного взаимодействия. Это **третья группа классических результатов**, полученных на кафедре. Оформилась получившая мировое признание советская школа специалистов по механике многофазных сред, одним из

признанных основателей которой был Рахматулин Х. А. Не случайно эта школа возникла в конце 50-х годов на кафедре газовой и волновой динамики. Именно здесь сформировались и методы теории многофазных сред, созданной учеником Рахматулина Х. А. академиком РАН *Нигматулиным Р. И.* («Основы механики гетерогенных сред», М.: Наука, 1978; «Динамика многофазных сред», тт. 1 и 2, М.: Наука, 1987).

Дальнейшие исследования в области механики многофазных сред на кафедре были продолжены под руководством Зверева И. Н. Смирновым Н. Н., Никитиным В. Ф., докторантом Ивашневым О. Е. и Натягановым В. Л. совместно со студентами и аспирантами кафедры.

Впервые разработаны физические и математические модели горения турбулизованных полидисперсных аэровзвесей, учитывающие фазовые переходы на поверхности конденсированных частиц или капель, выход летучих фракций, гетерогенные и газофазные реакции. Для моделирования турбулентности в газе и ее влияния на динамику дисперсной фазы применен эффективный метод, сочетающий детерминистский и стохастический подходы в рамках совместного эйлерова и лагранжева описания. Результаты исследований показали, что увеличение турбулизации потока приводит к возрастанию скорости распространения пламени, но затрудняет инициирование горения. Другой важный результат состоит в том, что наличие неоднородностей в распределении концентрации диспергированного горючего в объеме снижает концентрационные пределы воспламенения смесей (*Смирнов Н. Н.*, *Никитин В. Ф.*, *Легро Ж. К.* «Моделирование зажигания и горения турбулизованных пылевоздушных смесей», Хим. физика, 1999, № 8; *Smirnov N. N., Nikitin V. F. et. al.* «Theoretical modeling of turbulent combustion of dust-air mixtures», Archivum Combustionis, 1997, Vol. 17, №№ 1 – 4; *Smirnov N. N.*, *Nikitin V. F.*, *J. Klammer et al.* «Dust-air mixtures evolution and combustion in confined and turbulent flows», Proc. of the 7th International Colloquium on Dust Explosions, Bergen, Norway, June, 1996; *Smirnov N. N.*, *Nikitin V. F.*, *Kiselev A. B.*, *Baskakov V. V.*, *Boichenko A. P.*, *R. Klemens*, *P. Wolanski*, *Legros J. C.* «Turbulent combustion of organic dust-air mixtures in confined flows and explosion hazards», Proc. 4th Asian-Pasific International Symposium on Combustion and Energy Utilization, Bangkok, Tailand, 1997).

Модели химически реагирующих многофазных сред успешно применялись при исследовании условий устойчивой работы химических реакторов (*Пушкин В. Н.*, *Смирнов Н. Н.*, *Никитин В. Ф.* «Об устойчивости стационарных режимов двухфазного газокапельного химического реактора идеального смешения», Вест МГУ, Сер. 1, Матем. механ, 2001, № 2; *Пушкин В. Н.*, *Смирнов Н. Н.*, *Никитин В. Ф.* «Теория двухфазного газокапельного химического реактора идеального смешения», Хим. физика, 2000, т. 19, № 7; *Смирнов Н. Н.*, *Пушкин В. Н.*, «О нормальной скорости распространения ламинарного пламени в монодисперсной газокапельной смеси», Вест. МГУ, Сер. 1, Матем. механ, Москва, 2001, № 6).

Разработанные модели и методы с успехом применялись при анализе процессов эволюции и оседания аэрозольных загрязнений в турбулентной стратифицированной атмосфере (*Смирнов Н. Н.*, *Никитин В. Ф.* «Моделирование дрейфа и оседания частиц в турбулентной атмосфере», Обозрение Прикладной и Промышленной Ма-

тематики, М.: ТВП, 1996, т. 3, вып. 2; *Smirnov N. N.*, *Nikitin V. F.*, *Legros J. C.* «Mathematical modelling of aerosol evolution and sedimentation in the atmosphere of big cities», Int. J. of Aerosol Science, 1996, Vol. 27, sup. 1).

В последние годы были выполнены новые исследования по горению пылегазовых смесей за ударными волнами и проведен численный анализ развития взрывов в каменноугольных шахтах. Выяснена возможность возникновения квазидетонации при взаимодействии проходящей ударной волны с пылевыми слоями в длинном тоннеле (работы Коробейникова В. П., его учеников и коллег: *Korobeinikov V. P.*, *R. Klemens*, *P. Wolanski*, *Markov V. V.*, *Men I. S.'shov* «Models and Numerical Methods for coal mine explosion development», Computational Fluid Dynamics Journal, 2000, v. 9, № 2; *R. Klemens*, *P. Kosinski*, *P. Wolanski*, *Korobeinikov V. P.*, *Markov V. V.*, *Men I. S.'shov*, *Semenov I. V.* «Numerical modeling of coal mine explosion», Archivum Combustionis, 2001, v. 21, № 1; *Беспалов В. М.*, *Коробейников В. П.*, *Святуха В. А.*, *Цициашвили Г. Ш.* «Численное моделирование пылегазовой смеси», Дальневост. Матем. Журнал, 2001, том 2, № 1).

В последнее время большое внимание уделяется новому направлению в механике гетерогенных сред с особыми свойствами на границе раздела фаз, способам управления их движением и процессами переноса с помощью электромагнитных полей. В этом направлении Натягановым В. Л. получены приоритетные результаты по электрогидродинамике однородных эмульсий с поверхностным зарядом двойного слоя. На основе решения в классе обобщенных функций конкретных задач ЭГД-обтекания капель и последующего осреднения по ансамблю возможных конфигураций или методом самосогласованного поля получены осредненные уравнения электрогидродинамики суспензий и обобщения классических формул Эйнштейна-Тейлора для эффективной вязкости и Максвелла для эффективной электропроводности и диэлектрической проницаемости суспензий. Основные результаты опубликованы в работах: «Некоторые особенности электрокапиллярного движения капель», в кн. Механика деформируемых сред, М.: Изд-во МГУ, 1985; «О постановке задач реологии монодисперсных суспензий в электрическом поле», в кн. Динамические задачи механики деформируемых сред, М.: Изд-во МГУ, 1990; «Электрические свойства однородных суспензий сферических частиц», в кн. Современные проблемы механики и прикладной математики, Воронеж, Изд-во ВГУ, 2000; «Электрогидродинамика монодисперсных эмульсий, Ч. 1. Осаждение эмульсии капель с двойным электрическим слоем, Ч. 2. Электрофоретическое движение сферических капель эмульсии» (совместно с Орешиной И. В.), Коллоид. Журнал, 2000, Т. 62, № 1; «Эффективная вязкость суспензий в электрогидродинамических течениях» (совместно с Чайкой А. А.), в сб. докладов VII Междунар. конф. «Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей», С.-Петербург, 2003

При этом для теоретического объяснения аномального эффекта гигантской диэлектрической проницаемости суспензий было предложено принципиально новое электромагнитное обобщение модели электрокапиллярного дрейфа проводящей капли, на основе которого удалось объяснить не только этот интересный эффект, но и построить принципиально новую электрокапиллярновихревую модель шаровой мол-

нии, объясняющую многие ее странности и парадоксы. Эти последние результаты были анонсированы в докладах а VIII Всеросс. съезде по теор. и приклад. механике (Пермь, 2001); «Сингулярный метод в моделях электрогидродинамики суспензий» (в кн. Упругость и неупругость, М.: Изд-во МГУ, 2001); «Электрокапиллярновихревая модель и мнимые парадоксы шаровой молнии» (Тез. — Междунар. конф. «Колмогоров и современная математика», М: 2003) и опубликованы в следующих работах Натяганова В. Л.: «Электровихревая модель электрокапиллярного движения сферической капли и шаровой молнии. Эффект гигантской электрической проницаемости однородной суспензии», в кн. «Математика. Компьютер. Образование», вып. 8, М.: Прогресс-Традиция, 2001; «Электрокапиллярновихревая модель сферического вихря Хилла-Тейлора», ДАН, 2001, т. 381, № 1; «Математическое моделирование и метод гидроэлектромагнитных аналогий», в кн. Современные проблемы механики и прикладной математики, Воронеж, 2003; «Электрокапиллярновихревая модель шаровой молнии», ДАН, 2003, т. 390, № 6; «Четочная молния как промежуточная стадия между линейной и шаровой», в сб. докладов VII Междунар. конф. «Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей», С.-Петербург, 2003.

Распространение волн в пористых средах отличается целым рядом особенностей по сравнению с волнами в однородных материалах. Проведенные на кафедре исследования структуры волн в пористых средах (*Смирнов Н. Н.*, *Сафаргулова С. И.* «О скорости распространения малых возмущений в пористых средах», ПММ, 1991, Т. 55, вып. 3; *Смирнов Н. Н.*, *Сафаргулова С. И.* «О распространении слабых возмущений при горении сжимаемых пористых топлив», ФГВ, 1991, № 2) позволили определить области в фазовом пространстве параметров, в которых система уравнений механики многофазных сред теряет гиперболичность.

Разработаны **математические модели многофазной фильтрации несмешивающихся жидкостей в пористых средах** с учетом влияния капиллярных сил, особенно важных в условиях микрогравитации (*Смирнов Н. Н. и др.* «Multiphase flow in porous media — mathematical model and microgravity experiments», Microgravity Science and Technology, 1996, Vol. IX (3); *Smirnov N. N.*, *Dushin V. R.*, *Douguinova K. I.*, *Legros J. C.*, *E. Istasse*, *N. Boseret*, *Mincke J. C.*, *S. Goodman* «Multiphase flow in porous media — mathematical model and microgravity experiments», Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics, Pisa: Edisioni ETS, 1997; *Smirnov N. N.*, *Nikitin V. F.*, *Norkin A. V.*, *Legros J. C.*, *E. Istasse*, *Shevtsova V. M.* «Microgravity Investigations of Capillary Filtration in Porous Media», Proc. Drop Tower Days 1998 in Hokkaido, 1998; *Smirnov N. N.*, *Nikitin V. F.*, *Kudryavtseva O. V. et al.* «Capillary driven filtration in porous media», Microgravity Sci. Technol., vol. XII/1, pp. 23 – 35, 1999; *Smirnov N. N.*, *Nikitin V. F.*, *Norkin A. V.*, *Legros J. C.*, *E. Istasse*, *Shevtsova V. M.* «Capillary Driven Filtration», Proc. Int. Conf. on Modern Approaches to Flows in Porous Media, dedicated to P. Ya. Polubarinova-Kochina, Moscow, p. 23 – 25, 1999; *Smirnov N. N.*, *Nikitin V. F.*, *Kiselev A. B.*, *Norkin A. V.*, *Legros J. C.*, *E. Istasse*, *Shevtsova V. M.* «Microgravity investigation of capillary forces in porousnmedia», Space Forum, 2000, Vol. 1 – 4). Созданные модели получили широкое применение при разработке капиллярных насосов в невесомости и при прогнозировании эволюции

жидких неводных загрязняющих веществ в почвах.

Исследовались **равновесные и неравновесные фазовые переходы, вскипание криогенных жидкостей**. Впервые И. Н. Зверевым исследовано образование гейзерного выброса при транспортировке криогенных жидкостей. В последнее время его учениками также активно исследуются процессы неравновесного испарения и конденсации (*Зверев Н. И.*, *Дехтяренко Л. А.*, *Смирнов Н. Н.*, *Щепотьев Н. А.*, *Якубович Д. М.* «Нестационарное испарение жидкого кислорода в атмосферу», ФГВ, 1989, № 3; *Dectyarenko L. A.*, *Zverev N. I.*, *Smirnov N. N.* «Condensed gas evaporation into the atmosphere», Int. J. of Heat and Mass Transfer, 1993, Vol. 36, № 13; *Smirnov N. N.*, *Kulchitsky A. V.* «Unsteady-state evaporation in weightlessness», Acta Astronautica, 1997, Vol. 39, № 8; *Smirnov N. N.*, *Kulchitsky A. V.* «Nonequilibrium phase transitions. Evaporation of liquified gases», Exp. Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics, Pisa: Edisioni ETS, 1997, vol. 2; *Kulchitsky A. V.*, *Smirnov N. N.* «Allowing for non-equilibrium effects at evaporation of a solution droplet», Russian J. Eng. Thermophysics, 2000, Vol. 10, № 4).

Развита теория самораспространяющихся волн в метастабильных вскипающих жидкостях (*Ivashnyov O. E.*, *Ivashneva M. N.*, *Smirnov N. N.* «Slow waves of boiling under hot water depressurization», J. of Fluid Mech, 2000, Vol. 413; *Ивашнев О. Е.*, *Ивашнева М. Н.*, *Смирнов Н. Н.* «Ударные волны разрежения в потоках неравновесно кипящей жидкости», Изв. РАН, МЖГ, 2000, № 4); Ивашнев О. Е., Смирнов Н. Н. Автомодельное решение задачи о тепловом росте парового пузырька, движущегося в перегретой жидкости, Вест. МГУ, сер. 1, Матем., механ., 2002, № 2, которые аналогичны самораспространяющимся волнам в химически реагирующих средах (детонации и горению). Показано, что при расширении продуктов вскипания в область низкого давления реализуется режим с максимальной скоростью волны кипения, соответствующей точке касания луча Михельсона с нижней ветвью кривой Гюгонио.

На кафедре создана модель новой техногенной среды, возникшей на низких околоземных орбитах — «**космического мусора**» — позволившая прогнозировать процессы засорения и самоочищения орбит и уточнить (на порядок) время потенциального начала процесса цепного саморазрушения элементов космического мусора и лавинного нарастания их числа (Смирнов Н. Н. «Эволюция космического мусора в околоземном космическом пространстве», Успехи механики, 2002, Т. 1, № 2, с 37 – 104; *Смирнов Н. Н. и др.* «Space Debris Evolution Mathematical Modelling», Proc. 1-st Europ. Conf. on Space Debris, Darmstadt, 1993; *Смирнов Н. Н.*, *Киселев А. Б.*, *Никитин В. Ф.* «Peculiarities of Space Debris Production in Orbital Breakups», Proc. 2nd Europ. Conf. on Space Debrism, Darmstadt, 1997; *Smirnov N. N.*, *Nazarenko A. I.*, *Kiselev A. B.* «LEO technogeneous ontaminants evoluation modeling with account of satellites collisions», Space Debris 2000 (Ed. J. Bendisch), Sc. and Technol. Series American Austronaut Society, 2001, Vol. 103; *Смирнов Н. Н.*, *Киселев А. Б.*, *Назаренко А. И.* «Математическое моделирование эволюции космического мусора на околоземных орбитах», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 2002, № 4). Разработанные модели и методы необходимы для оценки степени риска при долговре-

менном функционировании космических аппаратов (спутников связи, космических исследовательских станций) на низких околоземных орбитах. Результаты исследований опубликованы, в частности в монографиях: «Space Debris. Hazard evaluation and mitigation», Edited by *Smirnov N. N.*, London – New York: Taylor and Francis, 2002; «Экологические проблемы и риски воздействий ракетно-космической техники на окружающую природную среду», Под общей редакцией *Адушкина В. В.*, *Козлова С. И. и Петрова А. В.*, М.: Анкил, 2000 (один из авторов — *Киселев А. Б.*).

С позиций механики многофазных сред разработана модель накопления повреждений в композиционных материалах с термоупругими фазами, приводящих впоследствии к разрушению композита (*Киселев А. Б.* «Численное моделирование деформирования и разрушения тонкостенной сферической оболочки из слоистого вязкоупругого композита, заполненной жидкостью, под действием взрыва заряда, расположенного в центре конструкции», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1997, № 5).

Разработанные модели механики многофазных сред привели к созданию методологии нового научного направления — фундаментальной экологии — включающего разработку математических моделей крупных природных и техногенных процессов и прогнозирование их взаимовлияния. В частности, разработанные модели позволили прогнозировать распространение техногенных и антропогенных загрязнений в грунтах, в приземных и верхних слоях атмосферы, в околоземном космическом пространстве (*Smirnov N. N.*, *Legros J. C.*, *Nikitin V. F.*, *E. Istasse*, *Norkin A. V.*, *Shevtsova V. M.*, *Kudryavtseva O. V.* «Capillary Driven Filtration in Porous Media», Microgravity Science and Technology, Hanser Publ, 1999, vol. XII; *Smirnov N. N.* 'Space Debris Hazard Evaluation and Mitigation», Taylor and Francis, London – New York, 2002; *Smirnov N. N.*, *Nikitin V. F.*, *Legros J. C.*, *Shevtsova V. M.* «Motion and sedimentation of particles in turbulent atmospheric flows above sources of heating», Aerosol Science and Technology, The Journal of American Association for Aerosol Research, 2002, v. 36).

На кафедре авторитетно представлено научное направление связанное с **групповыми методами анализа дифференциальных уравнений, необходимых для решения задач механики**.

Бунимович А. И. и его ученики (Душин В. Р., Сиперштейн Б. И., Краснослободцев А. В.) проделали большой объем исследований групповыми методами новых задач механики, имеющих важные практические приложения. Душин В. Р. выполнил построение групп Ли точечных преобразований уравнений движения нелинейно-вязких жидкостей и нашел для них системы оптимальных подгрупп допускаемых групп преобразований. Им выполнена групповая классификация уравнений двумерного пограничного слоя, а также построен ряд точных решений для нелинейно-вязких жидкостей. Основные результаты содержатся в работах: *Душин В. Р.* «Инвариантные решения уравнений движения «степенных» жидкостей», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1988, № 2; *Душин В. Р.* «Неустановившееся радиальное движение кольца неньютоновской жидкости со свободными границами», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1988, № 5; *Душин В. Р.* «Численное исследование инвариантно-

группового решения системы уравнений движения «степенных» жидкостей», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1993, № 2; *Душин В. Р.* «Групповая классификация уравнений двумерного пограничного слоя «степенной» жидкости», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1993, № 6; *Бунимович А. И.*, *Сиперштейн Б. И.* «О групповых свойствах и инвариантных решениях одной системы уравнений, описывающей нестационарное неизотермическое движение газа в трубопроводах», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1976, № 5; *Бунимович А. И.*, *Краснослободцев А. В.* «Инвариантно-групповые решения кинетических уравнений», Изв. АН СССР, МЖГ, 1982, № 4.

Аксеновым А. В. в период его работы на кафедре (с 1988 по 1999 годы) предложен метод нахождения симметрий линейных дифференциальных уравнений с частными производными с дельта-функцией в правой части. Этот метод позволяет находить инвариантные фундаментальные решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Были построены инвариантные решения системы уравнений, описывающей нелинейную эволюцию возмущений в абсолютно неустойчивых средах; найдены точные решения системы уравнений одномерной газовой динамики; получены лоренц-инвариантные решения уравнения Шредингера релятивистски свободной частицы. Основные результаты опубликованы в работах: «Лоренц-инвариантные решения псевдодифференциального уравнения Шредингера», Дифференциальные уравнения, 1990, Т. 26, № 2 (совместно с Самаровым К. Л.); «Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения», ДАН, 1995, Т. 342, № 2; «CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 2. Applications in Engineering and Physical Sciences», 1995, CRC Press, USA (с соавторами); «Инвариантные решения уравнений движения абсолютно неустойчивых сред», Изв. РАН, МТТ, 1998, № 1; «Точные решения, описывающие изэнтропическое одномерное движение политропного газа», Труды Математического института им. В. А. Стеклова, РАН, 1998, Т. 223.

На основе известного группового принципа замещения Гувернюком С. В. разработан метод сравнения аэродинамических следов в сверхзвуковом потоке за динамическим препятствием (источником импульса) и за областью внешнего энергоподвода (источником тепла). Показано, что способность аэродинамического следа за источниками изменять структуру обтекания расположенных вниз по потоку других тел определяется, в главном, профилем поперечного распределения неоднородности динамических параметров в ядре следа, при этом для поддержания динамически эквивалентных неоднородностей в следе за источниками тепла или импульса более энергозатратным всегда является тепловой источник (*Гувернюк С. В.* «Динамические инварианты в задачах установившегося обтекания тел идеальным газом », Доклады РАН,1996, том. 49, № 4; *Guvernyuk S. V.* «Comparison of energetic and dynamic devices of non-uniformity formation in the supersonic flow around a blunt body », Proc. of the 3rd Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics in Aerospace Applications. Moscow, IVTAN, 2001). Этот результат был отмечен в ряду лучших по Российской Академии наук (2001).

Получило на кафедре развитие и направление, называемое в последнее время «**вычислительной механикой**». В частности, для решения задач динамики взаимо-

действия упругопластических сред в трехмерной и двумерной постановках, наиболее сложных для численного моделирования, был развит лагранжев конечно-разностный метод в направлении учета сложных граничных условий на контактных поверхностях (отрыв тел, восстановление контакта, скольжение с трением), перестройки расчетной сетки для явного выделения поверхностей разрушения во взаимодействующих телах. Дано полное обоснование процедуры «приведения напряжений на поверхность текучести», численно реализующей уравнения упругопластического течения, даны постановки и предложены численные методы реализации граничных условий на осях симметрии и в центре симметрии, введены специальные искусственные вязкости (тензорная, угловая, контурная) и т.д. (*Киселев А. Б.* «Развитие метода Уилкинса для решения трехмерных задач соударения деформируемых твердых тел», в кн.: Взаимодействие волн в деформируемых средах, М.: Изд-во МГУ, 1984; *Киселев А. Б.* «О расчете пространственных задач динамики упругопластических сред с большими деформациями в лагранжевых координатах». в кн.: Волновые задачи механики деформируемых сред, М.: Изд-во МГУ, 1990; *Киселев А. Б.* «О граничных условиях для задач МДТТ с центральной и осевой симметриями», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. механ, 1995, № 6; *Киселев А. Б.* «О численном интегрировании уравнений течения упрочняющейся упругопластической среды», Вестник МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1995, № 4; *Kiselev A. B.* «Computational simulation of boundary conditions in problems of elastoplastic bodies interaction», Systems Analysis Modelling Simulation, 1995, Vol. 18 – 19; *Зеленский А. С.*, *Кукуджанов В. Н.* «Численное решение пространственных динамических задач для осесимметричных упругопластических тел», Препринт ИПМех АН СССР № 384, М., 1989). Предложен оригинальный метод построения двумерных расчетных лагранжевых сеток в областях сложной геометрии с выделением внутренних контактных границ для решения динамических задач МДТТ (*Киселев А. Б.*, *Кабак Н. Е.* «Метод построения расчетных сеток с выделением внутренних контактных границ», Моделирование в механике, 1990, Т. 4 (21), № 5; *Кабак Н. Е.*, *Киселев А. Б.*, *Максимов В. Ф.* «Метод построения расчетных сеток в двумерных областях с выделением внутренних контактных границ», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1992, № 3).

Для решения задач турбулентного течения многофазных полидисперсных сред с химическими реакциями и фазовыми переходами разработан эффективный численный метод, сочетающий эйлеров и лагранжев подходы для описания движения различных фаз, детерминистские и стохастические модели. Метод включает процедуры выделения представительных частиц, являющихся носителями свойств диспергированной фазы, прямого численного моделирования их стохастического блуждания в поле турбулентного течения, пересчета воздействия на газовую фазу всего ансамбля дисперсных частиц по параметрам представительных частиц (*Смирнов Н. Н.*, *Никитин В. Ф.* «Моделирование дрейфа и оседания частиц в турбулентной атмосфере», Обозрение Прикл. и Пром. Матем, М.: ТВП, 1996, т. 3, вып. 2; *Smirnov N. N.*, *Nikitin V. F.*, *Legros J. C.* «Turbulent combustion in multiphase gas-particle mixtures. Thermogravitational instability». Advanced Computation and Analysis of Combustion, Moscow, ENAS Publishers, 1997; *Smirnov N. N.*, *Nikitin V. F.*, *Legros J. C.* «Ignition

and combustion of turbulized dust — air mixtures», Combustion and Flame, 2000, 123, № 1/2.). Метод позволил решить ряд важных задач прогнозирования формирования, циркуляции и оседания аэрозольных и других загрязнений в атмосфере.

Численный метод дискретных вихрей был успешно адаптирован для моделирования полностью пульсирующих и прерывистых затопленных струй (*Андронов П. Р.*, *Гувернюк С. В.*, *Зубков А. Ф.*«Распространение пульсирующих турбулентных струй в затопленное пространство », М.: Труды 14 Международной школы по моделям механики сплошных сред, 1998; *Андронов П. Р.* «Периодическое возбуждение затопленных турбулентных струй», АМГД, 2001, № 1). Такие струи обладают повышенными эжектирующими свойствами и находят применение в технологиях перемешивания дисперсных материалов и интенсификации тепломассообмена в сушильных аппаратах распылительного типа.

Для моделирования наблюдаемых в эксперименте газодинамических эффектов влияния частоты следования интенсивных кратковременных импульсов (в оптическом разряде от лазерного источника энергии) на сверхзвуковое обтекание затупленных тел был разработан эффективный теоретический метод расчета таких источников импульсно-периодического энергоподвода (*Гувернюк С. В.*, *Самойлов А. Б.* «Об управлении сверхзвуковым обтеканием тел с помощью пульсирующего теплового источника. », Письма в ЖТФ, 1997, том 23, выпуск 9). Данный метод был внедрен в состав инструментов известного универсального лицензионного пакета вычислительных кодов GasDynamicsTool.

В последние годы на кафедре возник **ряд новых направлений** работы, связанных с применением методов механики сплошной среды в смежных областях знаний.

Первое связано с **математическим моделированием процессов эрозии и загрязнения почвы**. Это непосредственно связано с тем, что угроза ускоренной деградации плодородных почв из гипотетической стала объективной реальностью. Моделированию дождевой и ветровой эрозии почв посвящены работы Сагомоняна А. Я. и Гендугова В. М., выполненные в сотрудничестве с факультетом почвоведения МГУ: *Сагомонян А. Я.* «К вопросу дождевой эрозии почв», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 1995, № 2; *Кузнецов М. С.*, *Гендугов В. М.* «Критические для почв скорости и касательные напряжения водных потоков», Вестн. МГУ, Сер. 17, Почв., 1995, № 5; *Гендугов В. М.* «Об устойчивости границы раздела потока на почве», Вестн. МГУ, Сер. 17, Почв., 1997, № 2; *Глазунов В. П.*, *Гендугов В. М.* «Ветровая эрозия», Вестн. МГУ, Сер. 17, Почв., 1997, № 3; *Гендугов В. М.*, *Кузнецов М. С.* «Новый подход к оценке эродирующего действия потока на почву», Вестн. МГУ, Сер. 17, Почв., 1997, № 3; *Глазунов В. П.*, *Гендугов В. М.* «О подъемной силе ветра, переносящего почвенные частицы», Вестн. МГУ, Сер. 17, Почв., 2000, № 3; *Глазунов В. П.*, *Гендугов В. М.* «Механизмы ветровой эрозии почв», Вестн. МГУ, Сер. 17, Почв., 2001, № 6.

Вторым новым направлением является **математическое моделирование потоков автомобильного транспорта** по магистралям. Созданные математические модели хорошо описывают особенности движения транспорта по дорогам. Показано, что рассматриваемая среда (потоки транспорта) обладает целым рядом коренных отличий от традиционно рассматриваемых в механике сред. Разработанная модель

позволяет правильно качественно и количественно описать такие характеристики движения, как условия обеспечения максимальной пропускной способности, возникновение и эволюция «подвижных пробок» на магистралях. Модель учитывает ограничения транспортного потока на скорость и ускорение отдельных элементов, а также технические характеристики транспортных средств и особенности реакции водителя на изменение дорожной обстановки (*Киселев А. Б.*, *Никитин В. Ф.*, *Смирнов Н. Н.*, *Юмашев М. В.* «Неустановившиеся движения автотранспорта на кольцевой магистрали», ПММ, 2000, Т. 64, вып. 4; *Смирнов Н. Н.*, *Киселев А. Б.*, *Никитин В. Ф.*, *Юмашев М. В.* «Математическое моделирование автотранспортных потоков на магистралях», Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. Механ, 2000, № 4; *Smirnov N. N.*, *Kiselev A. B.*, *Nikitin V. F.*, *Yumashev M. V.* «Mathematical modelling of traffic flow», Proc. of 9th IFAC Symp. in Transport. Systems 2000, Oxford: Elsevier Sc. Ltd, 2000).

Третье направление может определить ряд работ Дубровского В. А. Это задачи о вихревой неустойчивости деформационных течений сплошной среды (Дубровский В. А. О генерации вихрей, Докл. АН СССР, 1994, т. 337, № 2; Дубровский В. А. О связи вихрей и деформаций в гидродинамических течениях, Докл. АН СССР, 1997, т. 356, № 1; Дубровский В. А. О связи деформаций и вихрей в гидродинамических течениях, ДАН, 2000, т. 370, № 6). Сформулирован новый принцип об универсальном предвестнике катастроф в системах с неустойчивым равновесием (Дубровский В. А. Тектонические волны, Изв. АН СССР, Физика Земли, 1985, № 1; Дубровский В. А. Тектонические волны и современные движения. Литосфера Центральной и Восточной Европы. Геодинамика, 1988, Наукова Думка, Киев, 138 с.; Дубровский В. А., Сергеев В. Н. Обязательный предвестник катастроф. Тектоника Неогея: общие и региональные аспекты, 2001, Москва, ГЕОС).

На основе моделей сред, допускающих продольные и сдвиговые деформации, выведены уравнения упругой модели, физического вакуума, позволяющие получить теоретическую и экспериментальную оценку скорости распространения гравитационных волн (Дубровский В. А. Упругая модель физического вакуума, Докл. АН СССР, 1985, т. 282, № 1; Dubrovskiy V. A., Smirnov N. N. «Measurements of the gravity waves velocity», 2001, Proc 52nd Internat. Astronomical Congress, Toulouse, France, IAF-01-J.2.03; Dubrovskiy V. A., Smirnov N. N. «The physical vacuum and the gravity wave velocity», Proc. 54-th Internat. Astronautical Congress, Bremen 2003, IAC-03-J.1.07).

На кафедре в последние годы также активизировались научные исследования в интересах нефтегазовой промышленности. Тематика исследований при этом оказалась традиционной для кафедры — это динамические задачи деформирования и разрушения упруго-пластических сред и повреждаемых сред, задачи механики многофазных сред, в том числе задачи фильтрации смешивающихся и несмешивающихся жидкостей в деформируемой пористой матрице, и другие. Последние годы кафедра тесно сотрудничает со Шлюмберже (Schlumbergber Oilfield Services) — транснациональной корпорацией в области нефтяной и газовой промышленности.

Кафедрой ведутся теоретические и экспериментальные исследования по фундаментальным проблемам, относящимся к гидравлическому разрыву. Основной целью

этих исследований является создание физических и математических моделей и поиск решений, способных предсказать процессы развития трещины гидроразрыва и ее очистки в зависимости от значений различных управляющих параметров. Наличие адекватных математических моделей позволяет производить выбор оптимальных стратегий по формированию гидроразрывов и последующей их очистке.

При формировании трещины с помощью гидравлического разрыва ее конец является самым сложным участком, поскольку там взаимодействие между потоком жидкости и деформируемым материалом, окружающим трещину, является наиболее сильным. Существующие теории формирования трещин гидроразрыва, основанные на линейной теории упругости, дают неограниченное увеличение значений напряжений при приближении к концу трещины.

При изучении распространения трещины гидроразрыва проблема взаимовлияния между потоком жидкости и окружающей средой в окрестности конца трещины весьма важна для определения граничных условий. Стенки разрыва и разрываемая среда являются проницаемыми, что оказывает сильное влияние на формирование трещины. Некоторые новые автомодельные решения представлены в работе Ивашнева О. Е., Смирнова Н. Н. «Формирование трещины гидроразрыва в пористой среде», Вестник МГУ, сер. 1, Матем. мех., 2003, №6.

Проводятся прямые численные исследования двумерной модели, описывающей формирование трещины гидроразрыва в термовязкоупругопластическом повреждаемом материале под воздействием закачиваемой в трещину жидкости (Киселев А. Б., Лукьянов А. А., Тьерсилэн М. «Численное моделирование динамики распространения криволинейных трещин гидроразрыва», Вестник МГУ, сер. 1, Мат., мех., №1, 2004).

Взаимодействие наполненного жидкостью гидроразрыва с сетью существующих трещин весьма важно как для определения граничных условий на поверхности краев трещины, так и в окрестности ее конца. Анализ блочной иерархической структуры скальных пород показывает наличие нескольких характерных масштабных уровней сети трещин.

Очистка гидроразрыва производится продувкой через трещину газа под действием градиента давления, что приводит к вытеснению из трещины вязкой жидкости, формировавшей гидроразрыв. При этом возникает неустойчивость и языкообразование, играющие ключевую роль в процедуре очистки. Захват областей остающейся жидкости нефтегазовым потоком понижает качество очистки трещины и снижает производительность скважины.

При фронтальном вытеснении более плотной и вязкой жидкости с помощью менее плотной и вязкой неустойчивости поверхности раздела типа Релея-Тейлора или Саффмана-Тейлора могут привести к росту «языков» газа, проникающих в жидкость. Рост языков и их последующее слияние не могут быть описаны линейным анализом. Рост языков вызывает нерегулярность зоны смешения. Разность тангенциальных скоростей у поверхности раздела может вызвать неустойчивость типа Кельвина-Гельмгольца, что ведет к «диффузии языков» и частичной регуляризации зоны смешения. Комбинация этих эффектов управляет процессом вытеснения. Эф-

фекты гравитации также могут играть существенную роль. Кафедрой совместно с организациями-партнерами проводятся теоретические и экспериментальные исследования неустойчивости вытеснения плотной и вязкой жидкости с помощью менее вязкой из двумерного канала и определение характерных размеров областей захвата жидкости. Экспериментальные исследования проводятся в модифицированных ячейках Хеле-Шоу с препятствиями, расположенными различным образом. Эксперименты нацелены на верификацию численной модели вытеснения. Численное моделирование позволяет изучить чувствительность процесса вытеснения к изменениям внешних определяющих параметров. Результаты исследований показали, что при фронтальном вытеснении вязкой жидкости менее вязкой жидкостью из однородной пористой среды неустойчивость и смешение возрастает при увеличении отношения вязкостей, в то время как при вытеснении из неоднородной среды (ячейки Хеле-Шоу с препятствиями) зависимость от отношения вязкостей может быть обратной. При определенных условиях уменьшение отношения вязкостей приводит к более нерегулярному вытеснению. (Smirnov N. N., Nikitin V. F., Legros J. C., Effect of Fingering in Porous Media. Proc. 52-nd Internat. Astronautical Congress, Toulouse 2001, IAF-01-J.4.10. Smirnov N. N., Nikitin V. F., Ivashnyov O. E., Legros J. C., Vedernikov A., Scheid B., Istasse E. Instability in viscous fluids displacement from cracks and porous samples. Proc. 53-d Internat. Astronautical Congress, Houston 2002, IAC-02-J.2.02. Smirnov N. N., Nikitin V. F., Ivashnyov O. E., Maximenko A., Thiercelin M. Vedernikov A., Scheid B., Istasse E., Legros J. C. Theoretical and experimental study of instability and the mixing flux in frontal displacement of fluids. Proc. 54-th Internat. Astronautical Congress, Bremen 2003, IAC-03-J.2.03. Legros J. C., Nikitin V. F., Istasse E., Schramm L., Wassmuth F., D'Arcy Hart Filtration in artificial porous media and natural sands under microgravity conditions. Microgravity Science and Technology, XIV/2, 2003, pp. 3-28.)

Вибрационное воздействие на пористую среду с упругим скелетом может оказывать сильное влияние на скорость фильтрации жидкости в этой среде. На применении этого эффекта основаны различные инженерные принципы повышения нефтеотдачи пластов при их возбуждении с определенной частотой. Данная проблема родственна проблеме переноса жидкости в каналах с осциллирующими стенками, положенной в основу создания вибронасосов. Результаты исследований по этой тематике отражены в статьях: Shugan I. V., Smirnov N. N. Peristaltic mass transfer in a channel under standing walls vibrations. Physics of Vibrations, 2001, vol. 9, No 2, pp.71-78. Shugan I. V., Smirnov N. N., Legros J. C. Streaming flows in a channel with elastic walls. Phys. Fluids, 2002, v.14, No.10, pp. 3502-3511.

Глава 3

ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Кафедрой на механико-математическом факультете и для геофизиков геологического факультета читаются основные курсы: «Механика сплошной среды», «Введение в механику сплошной среды»; созданы оригинальные спецкурсы:

- Новые задачи теории пластичности и разрушения;
- Распространение волн в сплошных средах;
- Газовая и волновая динамика;
- Гиперзвуковое обтекание тел газом;
- Динамика разреженного газа;
- Гидроаэродинамика;
- Термодинамика газовых потоков;
- Динамика многофазных сред с физическими и химическими превращениями;
- Неустановившиеся движения сжимаемых сред;
- Детонация и горение;
- Гетерогенное горение;
- Численное моделирование в динамике упругопластических сред;
- Метод граничных элементов в механике сплошной среды;
- Вычислительные методы в газовой и волновой динамике;
- Расщепление вычислительных алгоритмов в задачах механики;
- Компьютерные технологии в прикладной механике жидкости и газа;
- Статистические и структурные методы обработки экспериментальных данных;
- Теория пограничного слоя;
- Основы физико-химической газовой динамики;
- Динамика гибких связей;
- Динамические задачи упругости и пластичности;

- Прочность и разрушение твердых тел;
- Электродинамика сплошных сред;
- Магнитная гидродинамика и электровихревые течения;
- Численное моделирование в газовой и волновой динамике;
- Групповой анализ дифференциальных уравнений;
- Неравновесная термодинамика;
- Динамика вязкого газа.

Опубликованы учебные пособия:

1. *Рахматулин Х. А., Сагомонян А. Я., Бунимович А. И., Зверев И. Н.* Газовая динамика, М.: Высшая школа, 1965.
2. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред, М.: Наука, 1978.
3. *Рахматулин Х. А.* Газовая и волновая динамика, М.: Изд-во МГУ, 1983.
4. *Сагомонян А. Я.* Волны напряжения в сплошных средах, М.: Изд-во МГУ, 1985.
5. *Зверев И. Н., Смирнов Н. Н.* Газодинамика горения, М.: Изд-во МГУ, 1987.
6. *Смирнов Н. Н., Зверев И. Н.* Гетерогенное горение, М.: Изд-во МГУ, 1992.
7. *Шемякин Е. И.* Введение в теорию упругости, М.: Изд-во МГУ, 1993.
8. Задачи физико-механического практикума (Под ред. *Козлова В. П., Сагомонян Е. А.*), М.: Изд-во МГУ, 1993.
9. Конспект лекций по курсу «Механика сплошной среды» (*Шемякин Е. И., Смирнов Н. Н.*), М.: Изд-во МГУ, 1995.

и учебно-методическая литература:

1. *Сагомонян Е. А., Локшин А. А., Саакян А. С.* Элементарная теория кривых, М.: Изд-во МГУ, 1996.
2. *Зеленский А. С.* Сборник конкурсных задач по математике 1992 – 1995 годов, М.: НТЦ «Университетский», 1996.
3. *Звягин А. В., Ковалев В. Л.* Задачи по математике для абитуриентов, М.: Изд. Мех-мат ф-та МГУ, 2000.
4. *Лужина Л. М., Натяганов В. Л.* Сборник задач по геометрии, М.: Изд. МГУ, 2000.
5. *Зеленский А. С., Василенко О. Н.* Сборник задач вступительных экзаменов, М.: НТЦ «Университетский», 2001.
6. *Лужина Л. М., Натяганов В. Л.* Сборник задач по геометрии и тригонометрии, М.: УНЦ ДО, 2001.
7. *Кравцев С. В., Макаров Ю. Н., Максимов В. Ф., Нараленков М. И., Чирский В. Г.* Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных, М.: Экзамен, 2001.

8. *Натяганов В. Л., Лужина Л. М.* Методы решения задач с параметрами, М.: Изд. МГУ, 2003.

В создании и проведении физико-механического практикума участвовали лаборатории сверхзвуковой аэродинамики и динамических испытаний НИИ механики МГУ, заведующие лабораторий Алексеев Н. А., Фалунин М. П., Гувернюк С. В., Созоненко Ю. А.

Студентами кафедры выполняются курсовые и дипломные работы как теоретического характера (на кафедре), так и экспериментальные на базе лабораторий НИИ механики МГУ. Студенты, аспиранты и докторанты ведут научную работу в лабораториях при кафедре.

Ниже приведены программы основных и специальных курсов, а также программы спецсеминаров, читаемых на кафедре.

3.1 «Новые задачи теории пластичности и разрушения», 1 год.

Лектор — академик Шемякин Е. И.

1. **Лекции, посвященные введению в язык площадок скольжения.**
   Физические основы пластичности. Новые приборы и техника для исследования физико-механических свойств твердых тел, горных пород и сыпучих сред. Синтетическая теория прочности. Роль площадок скольжения в формировании напряженного и деформированного состояний. Краткая история вопроса, начиная от Сен-Венана.

   - Опыты с чистым сдвигом, чистым кручением, роль параметра Лодэ-Надаи. Опыты Лодэ.
   - Подобие напряженного и деформированного состояний. Пропорциональность параметров Лодэ для напряжений и деформаций. Опыты Тэйлора-Квини.
   - Зависимость между максимальным касательным напряжением и главным сдвигом. Введение предельного и остаточного касательного напряжений. Ниспадающая ветвь.
   - Предполагаемая структура материала на ниспадающей ветви. Роль площадок скольжения в формировании этой структуры — новый материал.

2. **Введение новых инвариантов напряженного и деформированного состояний, связанных с языком площадок скольжения.**
   Три инварианта напряженного состояния, описывающие максимальное касательное напряжение, нормальное на главной площадке и параметр вида напряженного состояния — параметр Лодэ-Надаи. Соответствующие инварианты для деформированного состояния. Возможные связи между параметрами напряженного и деформированного состояний, модель Кармана-Христиановича.

Пример модели идеально-пластического тела. Диссипативная функция. Примеры моделей пластических сред, уравнения равновесия и постановки краевых задач в таких моделях. Уравнения равновесия в состоянии неполной и полной пластичности.

3. **Задачи с осевой симметрией.**
   Плоская задача (плоская деформация). Напряженное и деформированное состояние в окрестности скважины или заглубленной выработки. Роль исходного (in situ) напряженного состояния. Анализ решений и их приложения.

3.2 «Распространение волн в сплошных средах», 1 год (обязательный спецкурс). Лектор — академик Шемякин Е. И.

1. Динамические задачи теории упругости и пластичности. Введение.
2. Уравнения динамики упругого тела в форме, предложенной Ляме, другие формы. Скалярный и векторный потенциалы. Основные краевые задачи, единственность решения краевых задач, роль начальный условий (данные Коши), условия согласованности начальных и краевых условий.
3. Исследование уравнений динамики однородного упругого тела. Кинематические и динамические условия совместности, продольные и поперечные волны. Задача Стокса о волнах в безграничной упругой среде.
4. Методы решения краевых задач для упругого тела. Метод функционально-инвариантных решений Смирнова В. И. – Соболева С. Л., групповые свойства решений волнового уравнения.
5. Метод неполного разделения переменных (Смирнов В. И., Петрашень Г. И.). Асимптотические методы исследования. Численные методы в динамических задачах теории упругости (общее представление).
6. Краевые задачи динамики неидеально-упругих сред, основные особенности процесса: затухание и дисперсия волн. Основная теорема — обобщение принципа Вольтерра-Работнова на случай нестационарных волн.
7. Упруго-пластические волны в стержнях, теория Рахматулина Х. А. о волнах разгрузки.
8. Одномерные (сферические и цилиндрические) задачи о распространения волн в твердых средах.
9. Волны напряжений в твердых средах. Затухание волн в средах с внутренним трением (пример с горными породами).
   Приложение 1. Сейсмические волны при подземном взрыве, задача Лэмба для внутреннего источника.
   Приложение 2. Волны при подводном взрыве в слое жидкости на скалистом дне.

3.3 «Газовая и волновая динамика», 1 год (обязательный спецкурс). Лектор — проф. Смирнов Н. Н.

1. Гипотеза сплошности. Понятие макроскопически малого объема. Интенсивные и экстенсивные параметры. Введение средних параметров. Скорости диффузии.
2. Закон изменения массы для многокомпонентной газовой смеси. Уравнение неразрывности для смеси в целом. Условие согласования. Вывод уравнений для подвижного и фиксированного объемов.
3. Закон изменения количества движения в газах. Уравнения движения в интегральной и дифференциальной формах.
4. Уравнение изменения кинетической энергии (Теорема живых сил).
5. Закон энергии. Первое начало термодинамики. Уравнение изменения полной энергии в интегральной и дифференциальной форме для вязкого теплопроводного газа.
6. Работа внутренних поверхностных сил в идеальном и в вязком газе.
7. Уравнение для изменения внутренней энергии. (Уравнение притока тепла).
8. Второе начало термодинамики. Понятие энтропии.
9. Газ как простая двухпараметрическая среда. Соотношение взаимности. Удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме. Соотношение Гиббса.
10. Модель совершенного газа. Формула Майера. Политропный газ. Энтропия политропного газа. Скорость звука.
11. Понятие локального термодинамического равновесия в макроскопически неравновесных процессах. Понятие некомпенсированного тепла.
12. Определение вектора потока тепла. Изменение энтропии при необратимых процессах в вязких теплопроводных газах. Приток энтропии извне и рождение энтропии внутри системы. Вектор потока энтропии.
13. Положительность коэффициентов вязкости и теплопроводности в газах как следствие второго начала термодинамики.
14. Производство энтропии в неравновесных необратимых процессах. Линейная связь между обобщенными термодинамическими силами и термодинамическими потоками.
15. Полная система уравнений неустановившегося движения вязкого теплопроводного газа в безразмерных переменных. Физический смысл параметров подобия. Система уравнений и граничные условия в случае идеального нетеплопроводного сжимаемого газа.
16. Движения с малыми возмущениями. Линеаризация уравнений нестационарного одномерного течения газа. Оператор Даламбера. Волновое уравнение и его решение.

17. Установившиеся движения сжимаемого газа. Интеграл Бернулли. Число Маха. Максимальная и критическая скорости газа. Параметры торможения. Нагревание тел в потоке газа.
18. Трубки тока в установившемся течении, их форма при дозвуковом и сверхзвуковом режиме. Теория сопла Лаваля.
19. Одномерные неустановившиеся течения. Классификация систем квазилинейных уравнений с частными производными. Задача Коши. Метод характеристик. Задача с начальными и граничными условиями. Слабые разрывы.
20. Уравнения одномерного неустановившегося движения сжимаемой двухпараметрической среды и их характеристическая форма. Одноэнтропическое плоское неустановившееся течение. Отображение физической плоскости в плоскость годографа. «Потерянные» решения.
21. Инварианты Римана. Точные решения для некоторых сред со специальными свойствами. Формула Адамара.
22. Решение простой волны. Свойства простых волн в нормальном газе. Градиентная катастрофа. Пример задачи о поршне, движущемся в трубе с положительной и отрицательной скоростью.
23. Поверхности сильного разрыва в совершенном газе. Рождение энтропии на поверхности разрыва. Типы разрывов. Контактные разрывы. Перетекание массы через поверхность разрыва. Адиабата Гюгонио.
24. Аналитический метод решения задач о взаимодействии волн. Распад произвольного разрыва в совершенном газе. Встречные и догонные взаимодействия ударных волн и волн разрежения. Взаимодействия ударных волн и волн разрежения с контактными разрывами. Задача о сильном взрыве.
25. Волны с энерговыделением. Основные соотношения на фронте реакции. Кривая Гюгонио в средах с энерговыделением. Дефлаграция как скачок разрежения.
26. Детонация и дефлаграция Чепмена-Жуге. Основные свойства фронта реакции. Степень определенности течения при детонации и горении. Автомодельные течения, содержащие фронт детонации или дефлаграции. Модели течений, учитывающие конечный размер зоны детонации.
27. Двумерные установившиеся сверхзвуковые течения. Характеристики. Угол Маха. Преобразования годографа. Граница в плоскости годографа. Характеристики в плоскости годографа для изоэнтропического течения.
28. Решение простой волны. Течение около искривленной стенки, обтекание угла. (Течение Прандтля-Майера.) Обтекание вогнутого контура, образование разрывов.
29. Соотношения на косом скачке. Ударные поляры в плоскости u,v и p,*. Сверхзвуковое течение внутри угла. Обтекание клина с присоединенной и отошедшей ударной волной.
30. Взаимодействия косых скачков. Отражение от стенки и от контактного разрыва. Регулярное и махово отражение.

31. Гиперзвуковое обтекание тел.

3.4 «Неравновесная термодинамика», 1/2 года. Лектор — доцент Куксенко Б. В.

1. Поведение энтропии в условиях слабой неравновесности. Рождение энтропии в примерах с динамической неравновесностью, термической неравновесностью, диффузией. Неравновесная теплопередача. Диффузия у химически не реагирующих совершенных газов. Элементарная теория ударной трубы. Малая неравновесность при изменении внешних параметров. Неравновесный адиабатический процесс.
2. Экстремальность термодинамических функций как критерий устойчивости равновесия. Общие условия равновесия термодинамических систем. Химическая реакция в условиях слабой неравновесности.
3. Основания неравновесной термодинамики. Основные положения. Определение энтропии.
4. Термодинамические силы и потоки. Теорема Кюри. Соотношения Онзагера. Формула Журкова. Замечания по поводу моделирования потоков.
5. Приложения неравновесной термодинамики. Термодинамические аспекты в механике. Критика правила Максвелла в изотермах Ван-дер-Ваальса. Критика примера обратимого потока. Булевы переменные в термодинамике.

3.5 «Детонация и горение», 1 год. Лектор — проф. Смирнов Н. Н.

1. Основные характеристики горения. Предварительно перемешанные и не перемешанные системы, гомогенные и гетерогенные смеси. Горение и «фальшивое» горение. Теория Михельсона-Чепмена-Жуге.
2. Основные соотношения на фронте реакции в гомогенных газовых смесях, рассматриваемом как поверхность разрыва. Рассмотрение течений, содержащих волны горения и детонации, как областей неустановившегося непрерывного течения газов, разделенных поверхностями сильного разрыва, на которых происходит энерговыделение вследствие химических реакций.
3. Уравнения неустановившегося одномерного движения сжимаемой двухпараметрической среды и их характеристическая форма. Понятия нормального и исключительного газа. Простые волны. Существование простых волн разрежения в нормальном газе и невозможность длительного существования волн сжатия без образования ударной волны.
4. Ударные волны. Адиабата Гюгонио. Невозможность ударных волн разрежения в нормальном газе (теорема Цемплена).

5. Задача о сильном взрыве. Распад произвольного разрыва в газе.
6. Кривая Гюгонио в средах с энерговыделением. Дефлаграция как скачок разрежения.
7. Детонация и дефлаграция Чепмена-Жуге. Основные свойства фронта реакции.
8. Основные характеристики сильной (пересжатой) и слабой (недосжатой) детонации, сильной (быстрой) и слабой (медленной) дефлаграции.
9. Степень определенности течения при детонации и горении. О корректности постановки задач, содержащих поверхности разрыва с химическими реакциями.
10. Автомодельные течения, содержащие фронт детонации или дефлаграции. Определение скорости распространения детонационных волн. Гипотеза Жуге.
11. Модели течений, учитывающие конечный размер зоны детонации.(Модели Гриба-Зельдовича-Неймана-Деринга). Детонация как дефлаграция, введенная ударной волной. Случаи немонотонного энерговыделения в зоне реакции за ударной волной. Псевдонедосжатая детонация.
12. Структура течения в стационарной зоне детонации (модель с одной обобщенной брутто реакцией). Устойчивость решения для сильной детонации и неустойчивость решения для слабой детонации.
13. Расчет структуры зоны детонации с учетом внешних воздействий: трения на стенках трубы, теплопотерь, притока или оттока массы, изменения площади сечения. Закон обращения воздействий.
14. Условие самоподдерживающегося распространения головной ударной волны как условие существования звуковой поверхности (плоскости Чепмена-Жуге) в течении за волной. Множественность скоростей звука. Определение скорости самоподдерживающейся детонации.
15. Определение скорости нормального горения гомогенных смесей. Экспериментальное определение, основанное на законе Михельсона В. А. Модель и определяющие уравнения тепловой теории распространения пламени.
16. Приближенное определение скорости горения по Малляру-Ле Шателье, по Зельдовичу-Франк-Каменецкому, и с учетом потерь в рамках модели конечной длины зоны реакции.
17. Исследование уравнений классической теории горения в постановке Колмогорова-Петровского-Пискунова.
18. Твердопламенное безгазовое горение — волновая локализация твердофазных реакций Мержанова-Боровинской-Шкиро. Самораспространяющийся высокотемпературный синтез как область приложения твердопламенного горения.
19. Влияние крупномасштабной и мелкомасштабной турбулентности на распространение фронта горения. Неустойчивость фронта горения в газах, явление автотурбулизации. Ускорение турбулентного пламени. Контроль скорости турбулентного горения при избирательном внешнем подводе энергии.

20. Переход горения в детонацию в газах. Различие сценариев переходных процессов. Возникновение детонационных волн на контактных неоднородностях потока перед ускоряющимся фронтом пламени.
21. Развитие моделей переходных процессов. Модель спонтанного перехода Зельдовича. Модель «взрыва во взрыве» Оппенгейма. Модель формирования очагов детонации в «горячих точках».
22. Взаимодействие ударной волны с фронтом пламени. Эксперименты Томаса. Прямое численное моделирование Оран.
23. Волны детонации и дефлаграции со сферической и цилиндрической симметрией. Решение Л. И.Седова.
24. Спиновая детонация в газах. Структура детонационного фронта. Схема Зельдовича. Модель Войцеховского-Митрофанова-Топчияна. Две схемы сопряжения поперечной волны с головной.
25. Ячеистая структура детонации. Численное моделирование формирования двумерных ячеек в плоском канале при задании начального возмущения. Возможные трехмерные структуры детонационных ячеек. Спиновая детонация как предел ячеистой, когда размер одной ячейки становится сравнимым с размером трубы.
26. Связь неустойчивости плоского одномерного фронта с ячеистой структурой в многомерном случае. Модель Коробейникова-Левина-Маркова-Черного.
27. Горение и детонация в гетерогенных средах. Структура зоны реакции.
28. Определяющая система уравнений неустановившегося движения многофазных химически реагирующих сред. Параметры межфазных взаимодействий. Определение источниковых членов.
29. Диффузионные режимы горения в гетерогенных системах. Метод Шваба-Зельдовича. Обобщение Гендугова для N реакций. Задача Вильямса о горении одиночной капли в атмосфере окислителя. Горение газифицирующихся частиц в газофазном и гетерогенном режимах.
30. Зажигание аэровзвесей при контакте с нагретой поверхностью. Механизм распространения конвективного горения. Особенности выхода на самоподдерживающийся режим распространения ламинарного пламени. Зависимость скорости горения от диаметра частиц.
31. Зажигание и горение турбулизованных полидисперсных смесей. Зависимость пределов воспламенения от концентрации горючего, энергии инициирования, интенсивности турбулентности, неоднородности распределения конденсированной фазы.
32. Инициирование детонации ударными волнами в аэродисперсных смесях. Начальное затухание ударной волны. Образование слоя Коробейникова за волной. Ускорение и выход на самоподдерживающийся режим через пересжатые режимы на нестационарной стадии.

3.6 «Динамика многофазных сред с химическими и физическими превращениями», 1 год.

Лектор — проф. Смирнов Н. Н.

1. Понятие гомогенных и гетерогенных систем. Химически однородные компоненты. Фазы. Агрегатные состояния.
2. Гипотеза сплошности. Понятие макроскопически малого объема. Интенсивные и экстенсивные параметры. Введение средних параметров. Скорости диффузии.
3. Химические реакции и фазовые переходы. Термодинамические условия равновесия для адиабатических, изотермических и изотермически изобарических систем.
4. Скорости химических реакций. Константы равновесия.
5. Условия равновесия фаз. Правило фаз. Фазовые переходы 1-го и 2-го рода.
6. Равновесные фазовые переходы 1-го рода. Уравнение Клапейрона-Клаузиуса. Теплота фазового перехода.
7. Неравновесные фазовые переходы. Модель Герца-Кнудсена.
8. Особые свойства поверхностной фазы. Поверхностное натяжение. Неаддитивность термодинамических функций по массе. Аддитивность по фазе.
9. Условия сохранения потоков массы, импульса и энергии на поверхностях разрывов в многокомпонентных средах.
10. Рождение энтропии на поверхности разрыва. Типы разрывов. Контактные разрывы. Перетекание массы через поверхность разрыва.
11. Теорема о дифференцировании интеграла, взятого по подвижному объему в многокомпонентных средах (Теорема переноса).
12. Закон изменения массы для компонентов и фаз в смеси. Уравнение неразрывности для смеси в целом. Условие согласования. Вывод уравнений для подвижного и фиксированного объемов.
13. Закон изменения количества движения для многокомпонентных и многофазных систем. Макроскопические и микроскопические вязкие напряжения в многофазных средах. Условия равновесия для многокомпонентных и для многофазных сред.
14. Уравнение изменения полной энергии для гомогенной многокомпонентной смеси. Уравнение притока тепла. Изменение энтропии в многокомпонентной смеси. Соотношение Гиббса.
15. Уравнения изменения энергии фаз в гетерогенной системе.
16. О замыкании задач механики многофазных сред. Определение межфазных взаимодействий из решений локальных задач. Начальные и граничные условия.
17. Испарение одиночной капли в смеси газов как пример простейшей локальной задачи определения источниковых членов в уравнениях динамики многофазных сред.

18. Горение одиночной частицы в атмосфере окислителя в газофазном и гетерогенном режиме.
19. Фильтрация жидкости в пористой среде. Уравнения Дарси. Влияние капиллярных сил.

3.7 «Неустановившиеся движения сжимаемых сред», 1/2 года.

Лектор — проф. Смирнов Н. Н.

1. Классификация систем квазилинейных уравнений с частными производными.
2. Задача Коши. Метод характеристик.
3. Задача с начальными и граничными условиями.
4. Слабые разрывы.
5. Уравнения одномерного неустановившегося движения сжимаемой двухпараметрической среды и их характеристическая форма.
6. Одноэнтропическое плоское неустановившееся течение. Отображение физической плоскости в плоскость годографа. «Потерянные» решения.
7. Инварианты Римана. Точные решения для некоторых сред со специальными свойствами. Формула Адамара.
8. Решение простой волны. Свойства простых волн в нормальном газе. Градиентная катастрофа.
9. Пример задачи о поршне, движущемся в трубе с положительной и отрицательной скоростью.
10. Поверхности сильного разрыва в совершенном газе. Адиабата Гюгонио.
11. Аналитический метод решения задач о взаимодействии волн.
12. Распад произвольного разрыва в совершенном газе.
13. Встречные и догонные взаимодействия ударных волн и волн разрежения.
14. Взаимодействия ударных волн и волн разрежения с контактными разрывами.
15. Волны с энерговыделением. Основные соотношения на фронте реакции.
16. Кривая Гюгонио в средах с энерговыделением. Дефлаграция как скачек разрежения.
17. Детонация и дефлаграция Чепмена-Жуге. Основные свойства фронта реакции.
18. Степень определенности течения при детонации и горении.
19. Автомодельные течения, содержащие фронт детонации или дефлаграции.
20. Модели течений, учитывающие конечный размер зоны детонации.

3.8 «Гетерогенное горение», 1 год.
Лектор — проф. Смирнов Н. Н.

1. Гомогенные и гетерогенные системы. Химически однородные компоненты. Фазы. Агрегатные состояния. Газофазные и гетерогенные реакции.
2. Термодинамические условия равновесия для адиабатических, изотермических и изотермически изобарических систем.
3. Скорости химических реакций. Константы равновесия. Закон действующих масс.
4. Условия равновесия фаз. Правило фаз. Фазовые переходы 1-го и 2-го рода.
5. Равновесные и неравновесные фазовые переходы 1-го рода. Уравнение Клапейрона-Клаузиуса. Теплота фазового перехода. Модель Герца-Кнудсена.
6. Закон изменения массы компонентов в многокомпонентной смеси в интегральной и дифференциальной форме. Определение средней скорости и плотности смеси. Скорости диффузии. Закон Фика. Уравнение неразрывности для смеси в целом. Условие согласования.
7. Закон изменения количества движения для многокомпонентных смесей. Тензор напряжений для различных компонентов в собственной системе координат и в системе координат, связанной с движением центра масс смеси.
8. Закон теплопроводности Фурье. Уравнение изменения полной энергии для гомогенной многокомпонентной смеси. Уравнение притока тепла. Изменение энтропии в многокомпонентной смеси. Соотношение Гиббса.
9. Граничные условия сохранения потоков массы, импульса и энергии на поверхностях раздела фаз в многокомпонентных средах.
10. Пример решения задачи об испарении одиночной капли в смеси газов при постоянном давлении с применением моделей равновесных и неравновесных фазовых переходов.
11. Задачи диффузионного и поверхностного горения конденсированных материалов. Гомобарическое приближение. Метод Шваба-Зельдовича. Первые интегралы в задачах горения.
12. Задача Ф. А. Вильямса о горении одиночной капли в газофазном режиме в атмосфере покоящегося окислителя. Решение А. М. Головина для случая горения капли в потоке.
13. Гетерогенное диффузионное горение частиц горючего в окислителе.
14. Решение задачи гетерогенного горения частиц при одновременном учете влияния кинетики химических реакций и внешнедиффузионного торможения.
15. Совместное гетерогенное и газофазное горение одиночной газифицирующейся частицы в атмосфере газообразного окислителя.

16. Гетерогенные каталитические реакции дожигания CO на сферических катализаторах из металлов платиновой группы. Стационарная задача с учетом внешнедиффузионного торможения. Нестационарное состояние поверхности катализатора.
17. Плоские одномерные нестационарные задачи диффузионного горения поверхности горючего в газофазном или гетерогенном режиме.
18. Численное решение нестационарных задач диффузионного горения капель в невесомости.
19. Горение плоского слоя топлива при обдувании поверхности потоком окислителя. Определение безразмерного параметра массообмена, характеризующего скорость выгорания поверхности.
20. Диффузионное пламя в потоке газообразного окислителя над полубесконечным слоем жидкого горючего. Влияние течения, индуцированного в жидкости, на скорость межфазного массообмена.
21. Диффузионное горение за ударной волной, скользящей над слоем горючего.
22. Горение твердых унитарных топлив. Режимы конвективного горения канальных и пористых составов.
23. Уравнения нестационарного распространения пламени в каналах и трещинах в твердом топливе. Численное решение задач конвективного горения. Определение стационарных самоподдерживающихся режимов.
24. Учет сжимаемости конденсированной фазы при распространении конвективного горения в твердых топливах. О гиперболичности получаемой системы уравнений.

3.9 «Численное моделирование в динамике упругопластических сред», 1 год.

Лектор — профессор Киселев А. Б.

1. Область вычислительной механики сплошной среды. Краткий исторический обзор. Основные этапы вычислительного эксперимента.
2. Понятия сходимости, аппроксимации и устойчивости конечно-разностных схем уравнений в частных производных.
3. Спектральный признак устойчивости.
4. Аппроксимационная вязкость. П- и Г- формы первого дифференциального приближения.
5. Простейшие приемы построения аппроксимирующих разностных схем: замена производных разностными отношениями, метод неопределенных коэффициентов, схемы с пересчетом или предиктор – корректор.
6. Неявные разностные схемы.

7. О решении разностных уравнений неявных разностных схем.
8. Расчет разрывных решений. Искусственная вязкость.
9. Дивергентные разностные схемы.
10. Волны одноосных напряжений в длинных стержнях. Анализ по теории с независящим от скорости деформаций уравнением состояния (теория Рахматулина-Тейлора- Кармана).
11. Метод характеристик применительно к задаче распространения волн одноосных напряжений. Анализ по теории с зависящим от скорости деформаций уравнением состояния (теория Соколовского-Малверна).
12. Конечно-разностное решение задачи о соударении тонкого стержня с жесткой стенкой.
13. Волны одноосных деформаций: задача о плоском соударении пластин с откольным разрушением (определяющие уравнения модели упругопластического течения; конечно-разностная схема метода Уилкинса; численная реализация граничных условий; введение параметров поврежденности; критерии разрушения Губера-Мизеса-Генки и предельной удельной диссипации; метод явного выделения поверхностей разрушения; анализ результатов расчетов).
14. Двумерные упругопластические течения: постановка задач; основные модели деформируемых твердых сред, применяемых при решении пространственных динамических задач (модели упругого, термоупругого, термовязкоупругого тел, упругопластического течения типа Прандтля-Рейса, упруговязкопластические модели типа Соколовского-Пэжины, модели сред с внутренними параметрами состояния, моделирующими микроразрушения типа пор, трещинок, полос сдвига).
15. Конечно-разностная схема метода Уилкинса на четырехугольных сетках.
16. Обоснование процедуры «приведения напряжений на поверхность текучести» при численном интегрировании уравнений упругопластического течения типа Прандтля-Рейса.
17. Возможные варианты развития метода Уилкинса при больших деформациях в двумерном случае: треугольные сетки, искуственные вязкости специального типа и сглаживание, локальная и глобальная перестройки сетки.
18. Особенности постановки и численного решения двумерных осесимметричных задач соударения и проникания (граничные условия на контактных поверхностях взаимодействующих тел, условия на оси симметрии). Анализ результатов расчетов задачи нормального соударения тела вращения с жесткой преградой и задачи нормального пробивания телом вращения пластины конечной толщины.
19. Трехмерные упругопластичсекие задачи: постановка задач, определяющие уравнения; конечно-разностная схема метода Уилкинса, численное моделирование граничных условий. Соударение упругопластического тела с жесткой стенкой: особенности процесса взаимодействия в трехмерном случае.
20. Современные тенденции развития численных методов решения динамичсеких задач деформирования и разрушения твердых тел.

3.10 «Расщепление вычислительных алгоритмов в задачах механики», 1 год.

Лектор — профессор Коробейников В. П.

1. Вводные замечания. Особенности многомерных задач математической физики. Задача Коши для системы линейных уравнений в частных производных. Линейные пространства. Корректность и устойчивость решения задачи Коши.
2. Понятие вычислительного алгоритма. Сведения из систем линейных уравнений и теории матриц. Алгоритмы расщепления для решения систем линейных уравнений и отыскания корней алгебраических уравнений. Факторизация полиномиальных выражений.
3. Квадратичные формы, полиномы и тензоры. Пространства квадратичных форм. Тензорные функции.
4. Системы линейных и квазилинейных уравнений. Характеристические многообразия. Линейные системы физической механики. Корректность эволюционных задач для уравнений Максвелла. Примеры некорректных задач.
5. Метод конечных разностей. Конечноразностные аналогии дифференциальных уравнений. Сходимость и устойчивость. Явные и неявные схемы. Устойчивость различных разностных схем.
6. Разностные схемы для систем уравнений Навье-Стокса и теории упругости.
7. Метод дробных шагов и другие приемы расщепления численных алгоритмов в задачах механики. Сведение к последовательности локально одномерных задач.
8. Примеры из газодинамики и теории упругости.

3.11 «Прочность и разрушение твердых тел», 1 год.

Лектор — профессор Никитин Л. В.

1. Основы механики твердого тела.
2. Кинематика твердого тела.
3. Напряженное состояние в твердом теле.
4. Основные уравнения механики твердого тела.
5. Определяющие уравнения.
6. Теории прочности.
7. Линейная механика хрупкого разрушения
8. Задача Гриффитса.
9. Критерии хрупкого разрушения.
10. Инвариантные интегралы.
11. Кинематика трещин в вязкоупругом теле.

12. Разрушение упруго-пластических тел
13. Динамика трещин в твердом теле.
14. Повреждаемость твердых тел.

3.12 «Динамика гибких связей», 1 год.
Лектор — доцент Максимов В. Ф.

1. Введение
2. Понятие гибкой нити. Параметры, характеризующие гибкую нить.
3. Система уравнений движения гибкой нити в пространстве.
4. Уравнение состояния гибкой нити. Замкнутая система уравнений движения.
5. Характеристики системы уравнений нити.
6. Слабые разрывы.
7. Автомодельные решения.
8. Сильные разрывы, условия их существования.
9. Поперечный удар с постоянной скоростью по гибкой нити без проскальзывания для линейного случая диаграммы «Т-а».
10. Разгрузка нити в линейной постановке.
11. Плоское движение нити.
12. Поперечный удар по нити с постоянной скоростью с проскальзыванием и без проскальзывания для нелинейно-упругой нити. Схема Прандтля.
13. Различные автомодельные решения задач о гибкой нити.

3.13 «Численное моделирование в газовой и волновой динамике», 1 год.
Лекторы — Профессор А. Б.Киселев, доцент Душин В. Р.

1. Введение.
   Проблемы численного моделирования. Терминология, типы физических моделей, связь теории и эксперимента, проблемы дискретного представления, размерности и временного масштабирования, список литературы. Общая схема реализации вычислительного эксперимента:

   - физико-математическая модель;
   - численный метод;
   - вычислительный алгоритм;

- пакет программ (языки программирования, компиляторы, средства графической визуализации), обработка и анализ результатов.

Численное интегрирование начально-краевых задач на основе систем ОДУ (включая жесткие системы). Методы Эйлера, Адамса, Рунге-Кутта, Гира. Численное интегрирование уравнений в частных производных, основные понятия:

- конечно-разностная дискретизация по времени и пространству;
- аппроксимация, устойчивость и сходимость разностных методов;
- типы конечно-разностных ошибок;
- области влияния и зависимости;
- явные и неявные разностные методы;
- аппроксимационная вязкость;
- методы расчета разрывных решений;
- искусственная вязкость, сглаживание;
- монотонность, консервативность, положительность решения;
- численная реализация начальных и граничных условий.

2. Численное моделирование в газовой динамике.
Проблемы чилсенного моделирования в газовой динамике. Законы сохранения (локальные и нелокальные формы записи, примеры квазиодномерных течений), уравнения кинетики химических реакций. Постановка начально-краевых задач. Особенности реализации вычислительного эксперимента. Примеры численного моделирования процессов конвекции, диффузии с иллюстрацией:

- различных типов искусственной вязкости (диффузии) и антидифузии, особенностей применения;
- понятий монотонности, консервативности, положительности решения.

Примеры численного интегрирования ОДУ (включая жесткие системы) для расчета членов уравнений, описывающих взаимодействие. Примеры вычислительных алгоритмов:

- метод Годунова С. К. и его модификации;
- методы Лакса-Вендроффа, Рихтмайера, Мак-Кормака, Лере-Пейре;
- FCT и TVD схемы;
- метод характеристик;
- метод крупных частиц;
- метод Уилкинса;
- комбинированные лагранжево-эйлеровы методы.

Примеры применения рассмотренных методов для тестовых задач с демонстрацией пакетов программ для случаев одномерных течений с плоской, цилиндрической и сферической симметрией.

- задача о поршне;

- задача о распространении и отражении У.В. от жесткой стенки;
- задача о распаде произвольного разрыва;
- задача о взаимодействии волновых структур.

3. Численное моделирование в динамике упругопластических сред.
   Одномерные динамические задачи (механико-математическая постановка, численный метод решения, особенности численной реализации граничных условий, анализ основных результатов):

   - волны одноосных напряжений (модели Рахматулина-Тейлора-Кармана и Соколовского-Малверна, волны разгрузки);
   - волны одноосных деформаций: задача о плоском соударении пластин с откольным разрушением (модель упругопластического течения, введение параметров повреждаемости, критерии разрушения, метод явного выделения поверхностей разрушения);
   - задачи со сферической симметрией (ударное сжатие и расширение газонаполненной микропоры из термовязкоупругопластического материала).

   Двумерные упругопластические задачи:

   - постановка задач, основные модели деформируемых твердых сред, применяемых при решении пространственных динамических задач (модели упругого и термоупругого тел, термовязкоупругого, упругопластического течения типа Прандтля-рейса, упруговязкопластические модели типа Пэжины, модели сред с внутренними параметрами состояния, численное моделирование разрушения);
   - конечно-разностная схема метода Уилкинса на четырехугольных сетках, обоснование процедуры приведения напряжений на поверхность текучести;
   - возможные варианты развития метода Уилкинса (треугольные сетки, искусственные вязкости специального типа и сглаживание, локальная и глобальная перестройка сетки);
   - особенности постановки и численного решения двумерных осесимметричных задач соударения и проникания, анализ результатов расчетов.

   Трехмерные упругопластические задачи:

   - постановка задач, определяющие уравнения;
   - конечно-разностная схема метода Уилкинса;
   - удар упругопластического тела по жесткой стенке, особенности волновой картины в трехмерном случае.

   Метод конечных элементов (МКЭ):

   - основные особенности конечно-элементной аппроксимации в одномерном и двумерном случаях;

- сравнение МКЭ с конечно-разностными методами.

Современные тенденции развития численных методов решения динамических задач деформирования и разрушения твердых тел.

3.14 «Гидроаэродинамика», 1 год. Лектор — профессор Ковалев В. Л.

1. Введение: предмет, цель и задачи курса. Краткий исторический обзор развития аэрогидродинамики.
2. Основные физические характеристики капельной жидкости (воды) и газа (воздуха). Идеальный газ, идеальная жидкость. Сведения из термодинамики жидкости и газа.
3. Основные уравнения движения идеальной жидкости и газа. Линии тока в плоских течениях и в меридианальной плоскости осесимметричного движения. Уравнения Эйлера, их первые интегралы: интегралы Бернулли и Коши-Лагранжа. Скорость звука в газе и жидкости. Введение моделей сжимаемых и несжимаемых жидкостей и газов. Разделение потоков жидкости и газа на дозвуковые и сверхзвуковые.
4. Вихрь. Кинематика вихревых и потенциальных движений жидкости и газа. Примеры на применение интегралов Бернулли и Коши-Лагранжа.
5. Теоремы количества движения и моменты количества движения в гидроаэродинамике. Приложение этих теорем в задачах: движение жидкости в изогнутом канале; удар плоской косой струи о плоскость; нормальный удар осесимметричной струи о плоскость; определение тяги воздушно-реактивных двигателей (ВРД), воздушного и корабельного винта в задаче «зависания» вертолета; парадокс Эйлера-Даламбера.
6. Движение жидкости, возникшее под действием импульсивных сил давления и импульсных внешних сил.
7. Вихревое движение жидкости и газа. Меры завихренности, интенсивность завихренности (циркуляция). Вихревая линия, вихревая трубка, вихревая поверхность, нить.
8. Уравнение Бельтрами и уравнение конвекции вихря при движении баротропной жидкости. Интеграл уравнения конвекции вихря. Теоремы Лагранжа, Томсона, Гельмгольца о вихрях.
9. Осесимметричные и плоские вихревые движения баротропной жидкости. Поведение вихря вдоль линии тока в случае установившегося движения.
10. Источники, стоки, диполи и их приложение к задачам гидроаэродинамики.
11. Сферический взрыв в несжимаемой жидкости.
12. Движение сферы в несжимаемой идеальной жидкости.

13. Постановка задачи определения поля скоростей движения жидкости по значению вихря и дивергенции скорости. Представление общего решения в виде объемных интегралов, удовлетворяющих уравнению Пуассона.
14. Вихревая нить, формула Био-Савара. Прямолинейная нить, точечный вихрь и его циркуляция. Вихрь в сжимаемой жидкости.
15. Плоскопараллельное движение жидкости. Решение плоской задачи методами теории аналитических функций комплексного переменного. Комплексный потенциал. Комплексная скорость.
16. Простейшие примеры решения задачи плоскопараллельного движения жидкости с помощью функций комплексного переменного. Источники, стоки, диполь.
17. Обтекание кругового цилиндра потенциальным потоком жидкости.
18. Обтекание кругового цилиндра с циркуляцией. Подъемная сила.
19. Обтекание произвольного профиля. Теорема Н. Е.Жуковского о подъемной силе профиля. Формулы Чаплыгина-Блазиуса, определяющие силу и момент, действующие на профиль.
20. Применение конформного отображения теории функций комплексного переменного к плоскопараллельным течениям.
21. Сведение задачи обтекания произвольного профиля с помощью конформных отображений к задаче обтекания кругового цилиндра.
22. Обтекание профиля с входящими и выходящими угловыми точками на его контуре.
23. Реальные профили крыла. Обтекание профиля с затупленной передней и острой задней кромкой. Возникновение циркуляции вокруг профиля, как следствие проявления вязкости жидкости.
24. Постулат (гипотеза) Чаплыгина-Жуковского. Присоединенный вихрь. Определение циркуляции вокруг профиля.
25. Теорема Н. Е.Жуковского, определяющая подъемную силу произвольного профиля в потоке жидкости.
26. Примеры: обтекание пластины, обтекание дуги окружности.
27. Обтекание профилей Жуковского-Чаплыгина. Руль Жуковского. Профили Кармана-Треффтца с конечным углом задней острой кромки.
28. Крыло конечного размаха в несжимаемой жидкости. Схема «несущей вихревой нити». Интегро-дифференциальные уравнения теории крыла.
29. Индуктивное лобовое сопротивление. Крыло минимального индуктивного сопротивления.
30. Обтекание тонкого крыла сжимаемым дозвуковым потоком.
31. Теория идеального винта Ренкина-Фруда.
32. Вихревая теория винта Жуковского Н. Е. Винт с бесконечным числом лопастей.
33. Отрывные и струйные течения жидкости. Кавитация, число кавитации. Струйное движение жидкости по схеме Гельмгольца.

34. Обтекание тел с отрывом струй по методу Кирхгоффа. Обтекание пластины.
35. Видоизменение Н. Е.Жуковским метода Кирхгоффа.
36. Истечение струи жидкости через отверстие. Прямой удар струи о пластину.

3.15 «Основы физико-химической газовой динамики», 1 год.

Лектор — д.ф.-м.н. Ковалев В. Л.

1. Физико-химические процессы (введение). Упругие и неупругие столкновения. Диссоциация и ионизация, фотодиссоциация и фотоионизация, излучение, возбуждение внутренних степеней свободы.
2. Ансамбль химических веществ и ансамбль химических реакций. Моноатомные частицы, молекулы. Компоненты и элементы. Линейная независимость, максимальное число линейно независимых соединений. Химическая реакция — вектор N-мерного пространства. Реакции в собственном смысле. Зависимые и независимые реакции. Максимальное число независимых химических реакций и число степеней свободы реагирующей смеси.
3. Числовая концентрация, плотность, массовая концентрация. Диффузия, вектор потока диффузии. Химические реакции: закон кратных отношений, закон сохранения массы в реакциях, закон действующих масс, закон Аррениуса.
4. Закон сохранения массы. Уравнения неразрывности, уравнения диффузии компонентов и элементов. Уравнение неразрывности для смеси в целом. Заряд в единице объема, плотность электрического тока. Уравнение баланса заряда. Ток проводимости и ток конвекции. Уравнения Максвелла.
5. Закон изменения импульсов для частично ионизованной смеси газов. Плотность потока импульса электромагнитного поля. Тензор максвелловских напряжений. МГД приближение. Теорема живых сил.
6. Уравнение энергии для многокомпонентной частично ионизованной смеси. Уравнение притока тепла. Джоулево тепло, вектор Умова-Пойнтинга, плотность электромагнитной энергии.
7. Второй закон термодинамики. Тождество Гибса. Принцип Кюри. Теорема Онзагера. Скорость возникновения энтропии в вязких теплопроводных химически реагирующих смесях газов. Феноменологические уравнения переноса.
8. Гетерогенные каталитические реакции на поверхности. Теория однородного и неоднородного адсорбированного слоя Ленгмюра. Теория сложных стационарных реакций.
9. Аэротермохимия турбулентного течения. Поток и параметры переноса, химическое образование соединений в турбулентном течении; уравнения баланса.

10. Гиперзвуковое обтекание тел вязким газом. Теория пограничного слоя. Современные газодинамические модели течения: теория тонкого и полного вязкого ударного слоя, параболизованные уравнения Навье-Стокса.
11. Граничные условия на поверхности разрыва для многокомпонентной химически реагирующей смеси газов. Граничные условия на ударной волне, на термохимически разрушающейся и неразрушающейся каталитической поверхности.
12. Численные методы решения. Метод установления и метод глобальных итераций.

3.16 «Методы граничных элементов в механике сплошных сред», 1 год.

Лектор — доцент Звягин А. В.

1. Введение в методы граничных элементов на примерах одномерного течения жидкости и статического изгиба балки под действием произвольной системы внешних сил и моментов.
2. Методы решения краевых задач для линейных уравнений с частными производными. Фундаментальные решения. Сведение краевых задач к решению граничных интегральных уравнений.
3. Потенциальные течения идеальной несжимаемой жидкости. Задачи фильтрации. Фундаментальные решения и постановка основных краевых задач.
4. Основные этапы построения решения методом граничных элементов для стационарных двумерных течений жидкости и задач фильтрации.
5. Плоские задачи теории упругости. Основные уравнения и постановка краевых задач. Потенциалы вектора перемещений.
6. Фундаментальные решения теории упругости. Задача Фламана. Задачи Кельвина. . Задачи Буссинеска. Использование интегральных преобразований для решения краевых задач.
7. Полупрямой метод граничных элементов в задаче о давлении штампа на упругую полуплоскость.
8. Теорема взаимности. Граничные интегральные уравнения теории упругости. Прямой метод граничных элементов.
9. Использование функций комплексной переменной в плоских задачах теории упругости. Общее решение, представление перемещений и напряжений.
10. Свойства интеграла типа Коши. Основные краевые задачи ТФКП. Задачи Дирихле, Неймана, Римана-Гильберта.
11. Введение в теорию трещин. Аналитическое решение задачи об одиночной трещине под действием давления.

12. Фундаментальное решение о разрыве смещения в упругой среде. Построение на основе этого решения метода граничных элементов для упругой среды с системой трещин. Метод разрывных смещений.
13. Динамические задачи теории упругости. Движение сосредоточенной силы по границе упругого полупространства. Построение решения для движения произвольно распределенной нагрузки.
14. Стационарное движение штампа по границе упругого полупространства. Учет силы трения.
15. Расклинивание упругого пространства давлением, действующим на берегах полубесконечного подвижного разреза.
16. Плоская задача о расклинивании упругого пространства тонким телом, двигающимся с постоянной скоростью.
17. Нестационарные задачи теории упругости. Метод функционально инвариантных решений Смирнова-Соболева. Общее решение волнового уравнения.
18. Построение решения для подвижной трещины. Осесимметричная задачи о движении трещины.
19. Теорема взаимности в динамических задачах теории упругости. Граничные интегральные уравнения. Метод граничных элементов в динамических задачах теории упругости.

3.17 «Термодинамика газовых потоков», 1 год. Лектор — доцент Куксенко Б. В.

1. Вводные замечания. Место термодинамики среди естественных наук. Общая характеристика методов термодинамики.
2. Основные понятия и терминология. Термодинамическая система. Основные характеристики систем. Основные типы параметров. Исходные положения термодинамики. Равновесие. Самопроизвольный переход от неравновесия к равновесию. О причинах релаксации. Температура. Уравнения состояния.
3. Первое начало термодинамики. Элементарная работа. Калориметрия. Теплота и работа. Квазистатический процесс. Уравнение энергии. Энергия системы.
4. Второе начало термодинамики. Существование свободной и связанной энергии. Метод Каратеодори. Голономность дифференциала dQ. Интегрирующий делитель. Уравнения взаимности для простых и непростых систем. Абсолютная температура. Ее независимость от термометра. Температура газового термометра. Энтропия термически неоднородной системы. Пример Афанасьевой-Эренфест.
5. Среды с разделяющейся энергией. Примеры. Баротропная среда. Совершенный газ. Термодинамические функции совершенного газа. Политропические процессы. Микроскопическая теория теплоемкости. Понятие о квантовом замораживании степеней свободы. Элементарная модель сил давления. Среда Ван-дер-Ваальса. Устойчивость состояний. Термодинамические функции.

6. Термодинамические потенциалы (характеристические функции). Прикладная равновесная термодинамика.
7. Классификация фазовых переходов. Уравнение Клапейрона-Клаузиуса. Фазовое равновесие однокомпонентной системы. Две фазы. Тройная точка. Понятие о метастабильном состоянии на примере среды Ван-дер-Ваальса и на примере упругого твердого тела. Критическая точка равновесия жидкости и пара на примере среды Ван-дер-Ваальса. Представление о ближнем и дальнем порядке. Учет поверхностных явлений.
8. Равновесие химически реагирующих компонентов в газовой фазе. Понятие константы равновесия. Закон действующих масс. Вывод Гиббса. Реакция диссоциации. Влияние наличия нейтрального газа. Взаимное влияние химических реакций через общие компоненты. Сопряженные реакции.
9. Влияние наличия химической реакции на теплоемкости системы и на скорость звука. Идеальный диссоциирующий газ (модель Лайтхилла). Понятие скорости химической реакции. Массовые стехиометрические коэффициенты. Уравнения изменения концентраций.
10. Динамика и термодинамика смесей. Уравнение массы для смесей. Уравнение импульса для смесей. Уравнение энергии для смесей. Условия согласования. Уравнение живых сил и уравнение внутренней энергии для смесей. Уравнение рождения энтропии для смесей.
11. Уравнения, описывающие однокомпонентную однофазную неподвижную среду. Течение однокомпонентного вязкого теплопроводного газа. Уравнения для химически неравновесного газового потока без обычных видов диссипации. Характеристики для химически неравновесного газового потока. Одномерное плоское нестационарное течение бинарной смеси совершенных газов. Линеаризация. Парадокс двух скоростей звука. Разновидности скорости звука.

3.18 «Динамика вязкого газа», 1/2 года. Лектор — вед.н.сотр. Гендугов В. М.

1. Законы сохранения механики. Законы термодинамики.
2. Уравнения Навье-Стокса. Несжимаемая жидкость.
3. Точки решения задач движения вязкой несжимаемой жидкости. Течение в трубе круглого и эллиптического сечения. Течения в трубе кольцевого сечения.
4. Уравнения в цилиндрических координатах. Движение жидкости между вращающимися цилиндрами.
5. Малые числа Re. Уравнения Стокса. Сопротивление.
6. Большие числа Re. Приближения пограничного слоя.
7. Уравнения пограничного слоя для несжимаемой жидкости.

8. Уравнения ламинарного пограничного слоя для совершенного газа в размерных и безразмерных переменных. Различные формы уравнения энергии.
9. Критерий подобия. Число Прандтля. Зависимость коэффициента вязкости от температуры. Формула Сагтерленда.
10. Граничные и начальные условия. Толщина пограничного слоя. Асимптотический пограничный слой и слой конечной толщины.
11. Преобразование уравнений пограничного слоя. Переменные Дородницина, Мизеса, Крокко.
12. Интегральные соотношения теории пограничного слоя.

3.19 «Гиперзвуковое обтекание тел газом», 1 год. Лектор — вед.н.с. Гендугов В. М.

- Гиперзвуковое движение тонких острых тел.

  1. Предмет курса. Уравнения и граничные условия в координатах движущихся с телом. Условия на ударной волне.
  2. Относительная толщина тела. Оценка порядка величин возмущенного движения газа. Случай тела типа снаряд. Случай гиперзвукового течения газа.
  3. Безразмерные приближенные уравнения гиперзвукового движения газа. Безразмерные граничные условия и условия на ударной волне.
  4. Законы подобия при гиперзвуковом движении тонкого тела. Подобие при наличии угла атаки.
  5. Распад безразмерных уравнений гиперзвукового движения и условий для них на две системы уравнений с соответствующими граничными условиями и условиями на ударной волне.
  6. Закон «плоских сечений» при гиперзвуковом движении тонких тел.
  7. Гиперзвуковое движение тела типа крыла.

- Гиперзвуковое обтекание тупоносых тел.

  1. Общая картина обтекания тупоносых тел сверхзвуковым потоком. Зона дозвукового движения газа за волной. Трансзвуковая и сверхзвуковая области. Предельная характеристика уравнений движения.
  2. Существующие методы приближенного решения задачи о движении газа за волной в области дозвукового течения в передней части обтекаемого тела: методы численного решения на вычислительных машинах; метод постоянной плотности за волной; метод Ньютона.
  3. Уравнение Бельтрами для вихревого движения и некоторые выводы для баротропной жидкости.
  4. Выражение вихря на произвольной пространственной ударной волне. Случай сильной ударной волны.

5. Исследование обтекания шара гиперзвуковым потоком на модели несжимаемой жидкости. Определение отхода ударной волны от точки торможения.
6. Сущность приближенного метода Ньютона для определения давления на обтекаемом теле. Возможность его применения при обтекании гиперзвуковым потоком тупоносых тел.
7. Случай обтекания криволинейных поверхностей.
8. Формула Буземана, обобщающая метод Ньютона для расчета давления на криволинейных поверхностях. Влияние допущений при ее выводе на результат расчета давления.

3.20 «Вычислительные методы в газовой динамике», 1 год.

Лектор — доцент Филиппов Ю. Г.

1. Введение. Вычислительный эксперимент как метод научного познания. Математическая модель газовой динамики. Нормальный газ. Законы сохранения. Обобщенные движения. Сильные разрывы. Гиперболические системы. Слабые разрывы. Характеристики. Бихарактеристики. Краевые задачи газовой динамики.
2. Вопросы разностной аппроксимации в задачах газовой динамики. Дискретные модели. Численное решение задачи Коши. Сходимость, аппроксимация, Устойчивость разностной схемы. Специфика постановки задач газовой динамики — начальные и граничные условия, внешние и внутренние задачи. Оценки эффективности численного алгоритма.
3. Метод характеристик численного интегрирования в газовой динамике. Постановка задач о квазиодномерном течении газа. Характеристическая форма. Порядок разностной аппроксимации. Расчет областей непрерывного течения. Выделение сильных разрывов. Методика расчета волновых взаимодействий. Характеристическая форма пространственно неодномерных задач. Метод подгонки скачков.
4. Методы расщепления по физическим процессам. Метод частиц в ячейках Харлоу (PIC). Применение метода для многокомпонентных сред. Метод крупных частиц. Модификации. Метод свободных точек. Схемная вязкость. Метод распада разрыва Годунова. Задача распада произвольного разрыва. Итерационный процесс. Явная и неявная схемы. Повышение порядка аппроксимации схемы Годунова.
5. Конечно-разностные методы. Схема Лакса-Вендроффа. Влияние диссипации. Методы псевдовязкости. Схема Мак-Кормака.Обобщение двухшаговых схем типа предиктор – корректор.
6. Заключение. Современные тенденции развития численных методов в газовой динамике.

3.21 «Компьютерные технологии в прикладной механике жидкости и газа», 1 год.

Лекторы — доцент Гувернюк С. В., с.н.с. Лоханский Я. К.

- Теоретические занятия

  1. Вводные сведения о современных лицензионных системах численного моделирования процессов в МЖГ.
  2. Базовые уравнения сохранения.
  3. Моделирование турбулентности.
  4. Дискретизация уравнений.
  5. Разностные сетки.
  6. Граничные условия.
  7. Стратегия вычислительного эксперимента.
  8. Верификация численных моделей.

- Практические занятия

  1. Структура и интерфейс прикладных программных систем STAR-CD и GasDynamicsTool.
  2. Создание геометрической модели.
  3. Команды препроцессора.
  4. Инструменты анализа и графического представления результатов расчета.
  5. Пользовательское программирование.
  6. Моделирование течений с учетом теплообмена.
  7. Моделирование химических процессов.
  8. Моделирование многофазных течений.
  9. Моделирование течений жидкости со свободной поверхностью.
  10. Моделирование нестационарных течений газа с ударными волнами и источниками внешнего энергоподвода.

3.22 «Статистические и структурные методы обработки эмпирических данных», 1 год.

Лектор — ст. научн. сотр. Ильюшина Е. А.

1. Основные понятия прикладной статистики:

   - Понятие выборки в статистике.
   - Выборочные характеристики.
   - Ранги и ранжирование.
   - Методы описательной статистики.

2. Основные законы распределения вероятностей, применяющиеся в математической статистике.

   - Дискретные распределения (биномиальное и полиномиальное распределения и распределение Пуассона).
   - Непрерывные распределения.

     (a) Нормальное распределение.
     (b) Распределения, связанные с нормальным (Стьюдента, F-распределения).
     (c) Распределение Вейбулла, показательное распре деление.
     (d) Двумерное нормальное распределение.

3. Теория оценивания.

   - Законы больших чисел., оценивание параметров распре деления по выборке.
   - Свойства оценок.
   - Метод максимального правдоподобия.
   - Интервальные оценки.

4. Основы проверки статистических гипотез и принятие решения.

   - Статистические модели. Статистические гипотезы.
   - Оптимальные стратегии принятия решения.
   - Прикладные задачи (критерий знаков, критерий Манна-Уитни и Уилкоксона).
   - Критерии согласия (Колмогорова)

5. Дисперсионный однофакторный анализ.

   - Параметрические модели.
   - Непараметрические модели (критерии Краскелла-Уоллиса и Джонкхиера).
   - Оценивание эффектов обработки в нормальной модели (метод Шеффе множественных сравнений).

6. Независимость признаков.

   - Шкалы измерений признаков.
   - Таблицы сопряженности.
   - Связь признаков, измеренных в шкале порядка.
   - Коэффициент корреляции, нормальная корреляция.

7. Основы корреляционного анализа данных.

   - Матрица данных.
   - Корреляционная матрица.
   - Статистическая модель порождения данных и аппроксимационный подход.

8. Линейный регрессионный анализ.

- Модель линейного регрессионного анализа.
- Простая линейная регрессия. МНК
- Непараметрическая линейная регрессия.
- Структурные уравнения линейной регрессии.

9. Модели и методы факторного анализа.

   - Основная идея факторного анализа.
   - Модели факторного анализа.
   - Метод главных компонент.
   - Метод центроидных компонент.
   - Вращение факторов.

10. Задача агрегирования (кластерный анализ).

    - Содержательная постановка задачи агрегирования.
    - Диагонализация матрицы связи произвольной природы.
    - Экстремальная группировка параметров.
    - Автоматическая классификация объектов.

11. Некоторые другие методы анализа данных (дискриминантный анализ, многомерное шкалирование).
12. Анализ временных рядов.

    - Модели временных рядов.
    - Методы сведения к стационарности.
    - Методы исследования структуры стационарных временных рядов.
    - Линейные модели временных рядов.
    - Вейвлет анализ (основные понятия).

3.23 «Магнитная гидродинамика и электровихревые течения», 1 год.

Лектор — доцент Натяганов В. Л.

1. Электродинамика жидких проводящих сред. Система уравнений МГД (магнитной гидродинамики). Кинематические аспекты МГД. Магнитное число Рейнольдса (R). Вмороженность магнитных линий при $R \gg 1$. МАГДА (магнитогидродинамическая аналогия) вихревых и токовых колец.
2. Электродинамическое и безындукционное приближения при $R \ll 1$. Числа Альфвена, Стюарта и Гартмана. МГД обтекание тел во внешнем поле. Обобщение метода точечных сил Озеена. Особенности МГД обтекания при больших и малых числах Гартмана. МГД течения в каналах. Пограничные слои в МГД.

3. Задачи МГД вращения тел. Магнитное поле Земли. Полоидальные и тороидальные поля. Основы теории Булларда и α-эффекта. Другие модели динамоэффекта. Невозможность осесимметричного динамо. Эффект выталкивания магнитного поля при дифференциальном вращении. Сохранение спиральности поля.
4. Успехи теории атмосферного электричества от Ломоносова до наших дней. Обычные явления (тлеющие разряды в газах, линейные молнии, огни св. Эльма) и загадки атмосферного электричества. Теория северного сияния Штермера. «Самолетная» теория сейсмоэлектрического эффекта. Модели электромагнитных предвестников сильных землетрясений.
5. МГД течения в диффузоре. Электровихревые течения (ЭВТ) от сосредоточенных источников. ЭГДА и МАГДА в ЭВТ. ЭВТ в воронке и МГД модель смерча в развитой стадии. Проблемы полного моделирования торнадо от «рождения до смерти».
6. Роль ЭВТ в электрокапиллярных явлениях. Шаровая молния, ее ЭГД парадоксы и загадки. Электрокапиллярновихревая модель шаровой молнии. Тройной электромагнитный слой на поверхности шаровой молнии. Эффекты левитации и гидирования шаровой молнии вдоль линейных проводников. Свечение и энергетика шаровой молнии. Четочная молния как промежуточная стадия между линейной и шаровой.
7. МГД однородных суспензий. Принцип обобщенной проводимости. Обобщение формулы Максвелла для электропроводности суспензий. Ток скольжения в законе Ома. Особенности МГД явлений для суспензий с поверхностным зарядом двойного слоя. Тройной электромагнитный слой и эффект гигантской диэлектрической проницаемости суспензий.

3.24 «Электродинамика сплошных сред», 1 год. Лектор — доцент Натяганов В. Л.

1. Основные законы электродинамики. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной форме. Граничные условия. Законы сохранения в электродинамике. Вектор Умова-Пойнтинга. Инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца.
2. Скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля. Электромагнитная сила Лоренца. Тензор электромагнитных натяжений Максвелла. Электрический и магнитный векторы Герца. Движение заряженных частиц в электромагнитном поле. Дрейфовая теория движения заряженных частиц. Теория северных сияний Штермера.
3. Галилеевская инвариантность уравнений электромагнитной механики сплошной среды. Электродинамическое ускорение плазмы. Обобщенный закон Ома.

Принцип работы МГД ускорителя и МГД генератора. Электротехническая модель рельсотрона. Электрический взрыв проводников.

4. Диффузия магнитного поля. Основы теории скин-эффекта. Магнитная гидродинамика при экстремальных процессах. Компрессия магнитного потока. Генераторы сверхсильных магнитных полей. ВМГ генераторы.
5. Основы магнитоупругости. Плоские магнитоупругие волны. Основы электротермоупругости. Перекрестные эффекты Томсона, Пельтье, Нернста, Ледюка-Риги, Эттингсхаузена.
6. Электродинамика жидких несжимаемых сред. Приближение электрогидродинамики (ЭГД) и феррогидродинамики (ФГД). Поляризация и электропроводность неидеальных диэлектриков. Магнитная проницаемость магнетиков. Пондеромоторные силы в ЭГД и ФГД. Системы уравнений ЭГД и ФГД.
7. Метод электрогидродинамической (ЭГДА) аналогии. Различные виды ЭГДА. Классы задач, решаемые методом ЭГДА. ЭГД аналог условия Чаплыгина-Жуковского (при изучении электризации самолетов и явлениях электрофореза). Магнитогидродинамическая (МАГДА) аналогия. МАГДА вихревых и токовых колец. МАГДА и «самолетная» теория сейсмоэлектрического эффекта. Другие модели электромагнитных предвестников сильных землетрясений.
8. ЭГД с поверхностным зарядом простого и двойного слоя. Электрокапиллярные явления и электрофорез частиц. ЭГД однородных суспензий. Задачи ЭГД обтекания и ЭГД вращения тел (сфера, цилиндр) с поверхностным зарядом простого и двойного слоя. Обобщения формулы Эйнштейна для эффективной вязкости и формулы Максвелла для электропроводности и диэлектрической проницаемости суспензий. Принцип обобщенной проводимости. Тройной электромагнитный слой. Эффект гигантской диэлектрической проницаемости суспензий.

3.25 «Динамика разреженного газа», 1 год. Лектор — доцент Куксенко Б. В.

1. Обзор состояния динамики разреженного газа. Аэрофизические проблемы полета на больших высотах и с большими скоростями.
2. Молекулярная структура газов. Классический подход. Длина свободного пробега молекул. Число Кнудсена. Статическая модель атмосферы Земли и планет. Элементы динамической модели.
3. Возможная подробность описания распределения. Основные режимы в движении и поведении газов. Начальные представления динамики разреженного газа. Несколько полезных интегралов. О распределении Гаусса. Распределение Максвелла, как предельно хаотичное. О смысле понятия «функция распределения молекул по скоростям». О неизбежности континуального описания. Функция распределения по скоростям в покоящемся газе. Одномерная схема явлений переноса.

4. Решение задач о свободномолекулярном течении через отверстие и по трубе. Свободномолекулярное течение через отверстие в плоской перегородке. Перенос при равновесии. Перенос через малое отверстие в плоской перегородке. Неравновесный обмен между равновесными отсеками.
5. Диффузный закон отражения молекул. Диффузное рассеяние с одной скоростью. Закон Ламберта. Плотность потока улетающих молекул. Плотность потока молекул, падающих на другую стенку. Диффузное рассеяние с максвелловским распределением модуля скорости. Задача Клаузинга. Явное выражение для интегралов.
6. Свободномолекулярное течение. Аэродинамические силы, действующие на выпуклое тело в свободномолекулярном потоке. Стационарное обтекание выпуклого тела. Падающий поток. Потоки импульса. Потоки энергии. Отраженный поток. Потоки импульса. Потоки энергии.
7. Молекулярная структура газов. Столкновение частиц. Понятие прицельного расстояния. Обратные столкновения. Вычисление длины свободного пробега молекул, моделируемых жесткими шариками.
8. Вывод интегрального уравнения кинетической теории одноатомных газов. Функции столкновений. Частота столкновений Q. Вероятность свободного пробега П. Ударная трансформанта Т. Вероятность Ф появления молекул с выделенной скоростью в результате соударений молекул, имеющих иные скорости.
9. Интегральное уравнение в безграничном газе. Интегральное уравнение на конечном отрезке времени. Переход к дифференциальному приближению.
10. Уравнение Больцмана для пространственно однородного случая. Н-теорема Больцмана.

3.26 «Распространение волн в сплошных средах», 1 год.

Лектор — доцент Куксенко Б. В.

1. Вывод уравнений. Постановка задач, контрольный объем. Баланс массы. Пример применения. Определение понятия силы. Пересмотр формулировок законов Ньютона. Баланс импульса. Уравнение моментов. Уравнение энергии. Пример из газовой динамики. Баланс энергии. Уравнение энтропии. Лагранжева капелька. Сводка условий на разрыве. Система уравнений. Уравнения в лагранжевом представлении. Уравнения для невязкого газа. Упрощение моделей. Акустическое приближение в газовой динамике. Акустическое приближение в теории упругости.
2. Уравнение трехмерной акустики. Пространственный случай. Построение решения осреднением. Правила дифференцирования осредненной функции по пространственным координатам. Правила дифференцирования по времени. Оценка

интеграла от производной. Решение волнового уравнения. Постановка задачи Коши. Решение Пуассона. Передний и задний фронты возмущения. Острая ситуация, обобщенные решения. Сферически симметричный случай. Метод спуска. Двумерная плоская нестационарная задача. Одномерная нестационарная задача. Задача Коши для одномерной нестационарной постановки.

3. Способы решения одномерного волнового уравнения. Инварианты Римана (линейный случай). Переход к характеристической форме уравнений. Определение характеристических направлений. Решение задачи Коши с помощью инвариантов Римана в линейном случае. Инварианты Римана (нелинейный случай). Характеристическая форма уравнений. Определение характеристических направлений. Сводка формул. Характеристики — переносчики информации. Начальные и граничные условия. Простейшие решения: постоянный поток, простая волна. Функция давления для политропного газа. Задача о поршне. Изображение процессов в плоскости годографа. Скорость звука. Центрированная волна разрежения. Крайние характеристики. Случай постоянной скорости поршня, меньшей, чем предельная скорость истечения газа. Центрированная волна начинается с разрыва. Волна сжатия (качественное описание). Качественное отличие задачи о сжатии от задачи о разрежении. Вторая особенность нелинейных задач. Автомодельное сжатие. Линеаризация соотношений на ударной волне, возникающей перед толкающим поршнем в совершенном газе.
4. Гравитационные волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости. Уравнения в форме Лагранжа. Аналогия с характеристиками. Использование времени в качестве параметра. Упрощение системы для несжимаемой жидкости и безвихревого течения.

3.27 Спецсеминар 3-го курса

1 семестр: Волновые движения.

1. Основные уравнения теории волн. Стоячие волны.
2. Прогрессивные волны. Понятие о фазовой и групповой скорости.
3. Волны при конечной глубине (стоячие и бегущие).
4. Капиллярные волны.
5. Трохоидальные волны.
6. Энергия волн.
7. Внутренние волны.

Литература.

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1 – 2. — Физматгиз, 1963.
2. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. — Мир, 1973.

3. Милн – Томсон Л. М. Теоретическая гидромеханика. — Мир, 1964.
4. Ламб Г. Гидродинамика. — ГТТИ, 1947.
5. Лайтхил Дж. Волны в жидкости. — Мир, 1981.

2 семестр: Стационарные течения газа в трубах.

1. Основные предположения и основные уравнения.
2. Интегралы основных уравнений.
3. Условия обращения воздействия.
4. Поверхности разрыва и их виды.
5. Адиабатическое течение идеального газа в трубе переменного сечения.
6. Движение газа в трубе постоянного сечения с подогревом (тепловое воздействие).
7. Адиабатическое течение газа в трубе при учете сопротивления трения.
8. Политропические процессы.

Литература.

1. Рахматулин Х. А., Сагомонян А. Я., Бунимович А. И., Зверев И. Н. Газовая динамика — Выс. Школа, 1965.
2. Липман Г. В., Рошко А. Элементы газовой динамики. — ИЛ, 1960.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — Наука, 1966.
4. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. — Наука, 1976.
5. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. — ИЛ, 1949 (РХД, 2000).
6. Основы газовой динамики. Под ред. Г. Эмонса — ИЛ, 1963.
7. Вулис Л. А. Термодинамика газовых потоков. — Госэнергоиздат, 1950.

3.28 Спецсеминар 4-го курса

1. Основные соотношения для плоского установившегося потенциального течения. Дозвуковые и сверхзвуковые течения.
2. Квазилинейные системы уравнений. Определения. Свойства приводимой системы уравнений. Граничные условия в методе годографа. «Закон подлости».
3. Вывод уравнений движения в естественной системе координат. Преобразование Моленброка-Чаплыгина. Уравнения и частные решения Чаплыгина.
4. Симметризация уравнений. Приближенные методы.
5. Точные решения (сравнение для несжимаемой жидкости и сжимаемого газа): a). радиальные течения; b). вихревые течения; c). спиральные течения.

6. Потерянные решения. Характеристики в физической плоскости и плоскости годографа. Течение Прандтля-Майера.
7. Отражение косого скачка от стенки. Соотношения на косом скачке. Ударные поляры (в плоскотях u, v и p, θ).
8. Сверхзвуковое течение внутри угла. Обтекание клина (с присоединенной и отошедшей волной).
9. Отражение и взаимодействие косых скачков. Отражение от стенки и контактного разрыва. Регулярное и маховское отражение.
10. Гиперзвуковое обтекание тел.

Литература.

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1 – 2. — Физматгиз, 1963.
2. Гласс. Ударные волны и человек. — М., 1977.
3. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. — ИЛ, 1961.
4. Липман, Пакет. Введение в аэродинамику сжимаемой жидкости.
5. Бай – Ши – И. Введение в теорию сжимаемой жидкости. — ИЛ, 1962.
6. Гудерлей К. Г. Теория околозвуковых течений. — ИЛ, 1960.
7. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. — ИЛ, 1950.
8. Берс. Математические вопросы околозвуковых течений.
9. Зауер. Течения сжимаемой жидкости.
10. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их применение к газовой динамике. — Наука, 1978.
11. Черный Г. Г. Газовая динамика. — Наука, 1988.

3.29 Спецсеминар 5-го курса

1. Задача Некрасова о нелинейных волнах на поверхности бесконечно глубокой жидкости.
2. Уравнение Бюргерса. Подстановка Коула-Хонфа. Структура ударной волны.
3. Волны на «мелкой воде». Уравнение Кортевега - де Фриза. Солитоны, «солитонные законы сохранения».
4. Другие солитонные уравнения: Шредингера, sin - Гордона, Буссинеска, Уизема. Физические задачи, приводимые к этим уравнениям.
5. Понятие о методе обратной задачи рассеяния. Преобразования типа Беклунда. Построение новых решений.
6. Распространение волн в однонаправленных потоках. Волны Римана, скачки уплотнения, применимость решения Адамара.

7. Эволюция самоподдерживающихся волн в метастабильных системах, смена режимов распространения. Примеры: переход горения в детонацию в газах и гетерогенных средах, вскипание перегретых жидкостей.
8. Фундаментальные проблемы в задаче повышения нефтеотдачи пластов.
   (a) Распространение трещин гидроразрыва в упругих и упругопластических средах.
   (b) Неустойчивость вытеснения вязкой жидкости из пористой среды менее вязкой жидкостью.

Литература.

1. Габов С. А. Введение в теорию нелинейных волн. — М.: Из-во МГУ, 1988.
2. Кудряшова Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Из-во МИФИ, 2002.
3. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. — Мир, 1989.
4. Додд Р., Гиббон Дж., Моррис Х., Эйлбек Дж. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир, 1988.
5. Зверев И. Н., Смирнов Н. Н. Газодинамика горения. — М.: Из-во МГУ, 1987.
6. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Из-во Мир, 1977.
7. Смирнов Н. Н., Зверев И. Н. Гетерогенное горение. — М.: Из-во МГУ, 1992.

Глава 4

ОСНОВАТЕЛИ КАФЕДРЫ И ЛАБОРАТОРИЙ

4.1 Халил Ахмедович РАХМАТУЛИН (23.04.1909 – 10.01.1988)

Выдающийся ученый, талантливый педагог и организатор науки, Герой Социалистического Труда, лауреат Государственных премий, академик АН Уз ССР, основатель и заведующий до конца своей жизни кафедрой газовой и волновой динамики Халил Ахмедович РАХМАТУЛИН — автор фундаментальных исследований по механике, отличающихся глубиной идей, плодотворностью методов исследований. Многие его идеи и методы стали отправными для ряда крупных исследований советских и зарубежных ученых по проблемам течений жидкости, газа, динамике упругопластических сред, движений взаимопроникающих (многокомпонентных) сред. Научно-педагогическая, организаторская, общественная деятельность Халила Ахмедовича многогранна и тесно связана с Московским университетом.

Рахматулин Х. А. родился 23 апреля 1909 года в г. Токмаке (Киргизская ССР). Трудовую деятельность он начал с 10-летнего возраста. В 1925 году поступил в Ташкентский областной педагогический техникум, по окончании которого был оставлен в нем преподавателем и продолжал учебу на физико-математическом факультете Среднеазиатского государственного университета. В 1931 году Халил Ахмедович перевелся, при личном содействии наркома просвещения, председателя Ученого комитета при ЦИК СССР, академика АН СССР Луначарского А. А., на механико-математический факультет МГУ, и с тех пор его жизнь неразрывно связана с Московским университетом. В 1937 году он защитил кандидатскую диссертацию по аэро-

динамике больших скоростей и был оставлен на факультете доцентом и заведующим аэродинамической лабораторией механико-математического факультета МГУ. В 1943 году Халил Ахмедович защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук (по теории парашюта). В 1947 году он избирается академиком АН УзССР. Кафедрой газовой и волновой динамики Рахматулин Х. А. заведует со дня ее основания в 1951 году.

Научная деятельность Халила Ахмедовича ярко характеризует многогранность его научных интересов. Его исследования охватывают динамические проблемы различных областей механики. Им получены фундаментальные результаты, имеющие научное и прикладное значения в областях: теории распространения упругих и упругопластических волн, дифракции ударных волн, распространяющихся в газе, теории парашюта и аэродинамики проницаемого тела, динамики грунтов, движения многокомпонентных сред, химической технологии и других. Во всех перечисленных направлениях Рахматулину Х. А. принадлежат основополагающие научные результаты решений динамических проблем механики, вошедшие в сокровищницу отечественной и мировой науки. Эти результаты находят широкие применения в важнейших областях техники, в научно-исследовательских и конструкторских организациях различных отраслей промышленности.

В области теории упругопластических сред Рахматулин Х. А. открыл особые волны разгрузки, обусловленные необратимостью процессов пластических деформаций. В литературе эти волны называются «волнами Рахматулина». Он установил закон распространения упругопластических волн, законы накопления остаточных деформаций при многократных нагрузках, разработал методики получения динамических диаграмм растяжения и сжатия материалов за пределами упругости. Эта теория является основой расчета различных сооружений, расчетов пробивания бетона и других преград. Его монография «Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках», написанная в соавторстве с профессором Демьяновым Ю. А., приобрела мировую известность.

Высокий уровень отечественного парашютостроения многие десятилетия базировался на научно-методическом фундаменте, заложенном Рахматулиным Х. А. в работах по теории парашютов и проницаемых тел. Халил Ахмедович создал научную школу, в которой выросли десятки высококвалифицированных специалистов, внесших большой вклад в развитие теоретических основ современного парашютостроения, в совершенствование эксплуатационных качеств отечественных парашютных систем различного назначения, в том числе - для космической техники.

Основополагающими явились также исследования Рахматулина Х. А. в теории поперечного удара. Им была выявлена волновая картина, возникающая при ударе по гибким нитям. Его теория использовалась для расчета тросов аэростатов воздушного заграждения, которые широко применялись для обороны Москвы в годы Великой Отечественной войны. За исследования по динамике упругопластических волн и волн в гибких связях Рахматулин Х. А. был удостоен Государственной премии СССР (1949) и премии им. М. В. Ломоносова (1945).

Большое практическое значение имеют исследования Рахматулина Х. А. по ди-

намике грунтов. Им были рассмотрены вопросы проникания тел и распространения взрывных волн в грунтах и бетоне. Результаты этих исследований нашли применение, в частности, при расчете гидротехнических и подземных сооружений на сильные взрывные нагрузки.

На основе идей, методов и результатов исследований Рахматулина Х. А. по теории обтекания проницаемых тел и теории движения многокомпонентных и многофазных сред возникли научные школы и научно-исследовательские лаборатории, в том числе и в Московском университете, сотрудники которых успешно ведут научные исследования по этим современным актуальным проблемам механики.

Рахматулин Х. А. — основоположник теории взаимопроникающего движения многофазных сред. Им впервые была получена замкнутая система уравнений движения смеси нескольких сжимаемых фаз, проанализированы основные законы распространения волн, даны основы теории пограничного слоя в двухфазной смеси. Впервые им была поставлена и решена задача о сверхзвуковом потоке газа, содержащего твердые и жидкие частицы. Этот интенсивно развивающийся раздел механики многим обязан Рахматулину Х. А. Результаты, полученные им, нашли применение в гидротехнике, химической технологии, атомной энергетике, при создании образцов новой техники. В 1979 году Рахматулин Х. А. был удостоен звания Героя Социалистического Труда, во многом за свои исследования по механике многофазных сред, а его ученик, академик РАН Нигматулин Р. И. получил в 1973 году премию Ленинского комсомола, а в 1983 году Государственную премию СССР за исследования по механике многофазных систем (вместе со своими учениками профессорами Ивандаевым А. И. и Хабеевым Н. С.).

Под руководством Рахматулина Х. А. разработана новая технология для аэрохимической очистки зерен риса, хлопковых семян и других культур, являющаяся наиболее совершенной и экономичной, превосходя все существовавшие в СССР и за рубежом.

Работа по экспериментальной аэродинамике, выполненная под руководством и при непосредственном участии Рахматулина Х. А., была удостоена Государственной премии СССР (1974).

Рахматулин Х. А. предложил численный метод решения линейных задач механики и математической физики, названный им методом источников, позволяющий наиболее экономично по сравнению с другими методами и без особых усложнений решать задачи с любой формой границы и любыми начальными условиями. Метод успешно используется для расчетов на прочность и газодинамических расчетов различных конструкций.

Под руководством Рахматулина Х. А. создана серия гидродинамических волновых установок для получения смесей и суспензий сверхвысокого качества, которые другими методами получать не удавалось. Ряд таких установок успешно работает в строительных организациях России и стран СНГ. За эти работы Рахматулин Х. А. был удостоен премии Совета Министров СССР (1985).

Исследования последних десяти лет жизни Рахматулина Х. А. по динамике ударного взаимодействия тел с плотными преградами, выполненные им совместно со

своими учениками и коллегами по кафедре газовой и волновой динамике (Бунимович А. И., Гендугов В. М., Звягин А. В., Киселев А. Б., Максимов В. Ф., Сагомонян А. Я.) были удостоены в 1990 году премии Совета Министров СССР.

Велики заслуги Халила Ахмедовича в подготовке высококвалифицированных научных кадров. Им подготовлены сотни специалистов, докторов и кандидатов наук, которые успешно работают в НИИ и Вузах страны, развивают научные исследования по механике во многих зарубежных странах.

Рахматулин Х. А. непрерывно вел большую научно-организационную работу. Он был зам. председателя Национального комитета СССР по теоретической и прикладной механике, председателем секции импульсных воздействий Научного совета по прочности и пластичности АН СССР, членом секции Международной Астронавтической Академии, бессменным руководителем методологического семинара отделения механики механико-математического факультета МГУ.

Выдающиеся заслуги академика Рахматулина Х. А. были высоко оценены: он удостоен звания Героя Социалистического Труда, награжден четырьмя орденами Ленина, орденом Трудового Красного Знамени, орденом Знак Почета, медалями. Ему присвоены звания Заслуженного деятеля науки и техники РСФСР и УзССР. Он — дважды лауреат Государственной премии СССР, дважды лауреат премии Совета Министров СССР, лауреат Государственной премии УзССР им. Бируни, премии им. М. В. Ломоносова.

Халил Ахмедович ушел из жизни внезапно 10 января 1988 года. Халила Ахмедовича отличали чуткое отношение к людям, справедливость. Это был обаятельный, щедрой души человек, глубоко уважаемый и любимый всеми, кто соприкасался с ним.

Светлый образ Халила Ахмедовича Рахматулина навсегда сохранится в сердцах всех, кто знал его. Всегда будут помнить о Халиле Ахмедовиче, выдающемся ученом и патриоте, в его родном Московском университете.

4.2 Игорь Николаевич ЗВЕРЕВ (14.04.1917 – 29.05.2001)

Бессменный ученый секретарь и первый сотрудник кафедры газовой и волновой динамики, Заслуженный преподаватель МГУ Игорь Николаевич ЗВЕРЕВ родился в г. Мценске в учительской семье. После окончания средней школы в 1935 году он поступил на механико-математический факультет МГУ, который окончил в 1941 г. В годы Великой Отечественной войны Зверев И. Н. работал в коллективе отраслевой научно-исследовательской лаборатории по созданию новой реактивной техники. В его обязанности входила научная экспертиза изобретений и рацпредложений на предмет выявления наиболее эффективных. С 1943 по 1944 г. Зверев И. Н. работал в НИИ номер 1, с 1944 по 1948 г. — ассистентом в Московском Станкоинструментальном институте. С 1944 г. Зверев И. Н. — аспирант механико-математического факультета МГУ, а с 10 мая 1949 г. — младший научный сотрудник. В 1949 г. Зверев И. Н. защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а в 1951 г. был переведен на должность доцента кафедры газовой динамики механико-математического факультета МГУ. Вся дальнейшая деятельность Зверева И. Н. была неразрывно связана с Московским университетом, где он работал до последних дней своей жизни, отдавая все силы развитию науки и подготовке специалистов.

Научная деятельность Зверева И. Н. охватывала важнейшие разделы механики сплошных сред. Его исследования по распространению волн в вязко-упругих и вязко-пластических стержнях (1949) позволили решить важные технические и прикладные проблемы. Зверевым И. Н. исследован удар тонким клином по нити, когда нить соприкасается не только с вершиной клина, но и с боковой поверхностью. Впервые введен ударный импульс (сосредоточенная сила в точках удара нити по щекам клина), действующий на щеки клина со стороны нити (1949). Решен ряд новых задач в области механики грунтов. Зверевым И. Н. исследовано распространение сильных возмущений в гомогенных и гетерогенных средах с учетом неравновесных химических и физических превращений. Им исследовано распространение ударных волн в гомогенных и гетерогенных средах. Изучены ударные волны в двухфазной среде (воздух и твердая порошкообразная фаза) с учетом межгранулярного давления. Выявлено, что плотность твердой фазы и скорость звука в смеси оказывают решающее влияние на процессы распространения волн. Исследовано распространение собственной волны детонации.

В работах Зверева И. Н. исследовано распространение неодномерной детонации в предварительно не перемешанных двухфазных системах (криогенный окислитель и тонкий слой горючего на стенках). Показано, что образуется самоподдерживаю-

щийся нестационарный комплекс, содержащий сильные и слабые разрывы и зоны горения или зоны детонации, периодически возникающие у стенок. Исследована детонация в тонких пластинах, пропитанных жидким кислородом с учетом разлета в зоне детонации. Выявлена зависимость скорости распространения детонации от толщины пластины.

Зверевым И. Н. опубликовано более 100 научных работ, в том числе в соавторстве с сотрудниками кафедры опубликованы учебные пособия «Газовая динамика», Москва: изд. Высшая Школа, 1965, «Газодинамика горения», Москва: изд. Московского Университета, 1987, «Гетерогенное горение», Москва: изд. Московского Университета, 1992. Под его руководством защищено 15 кандидатских диссертаций, многие его ученики впоследствии защитили докторские диссертации.

Зверев И. Н. читал общий курс «Механика сплошной среды». Им были созданы и продолжительное время читались на факультете оригинальные специальные курсы «Распространение волн в сплошных средах», «Детонация и горение», «Термодинамика газовых потоков», которые и по сей день читаются на кафедре. Зверев И. Н. обладал энциклопедическими знаниями практически во всех областях механики, а его незаурядный педагогический талант позволял эффективно донести эти знания до слушателей. Прирожденный Учитель, Зверев И. Н. считал педагогическую работу основой деятельности кафедры и так он воспитывал все поколения сотрудников кафедры. Он бессменно участвовал в работе студенческих научных семинаров всех курсов. На его конструктивных критических замечаниях воспитывались все поколения выпускников кафедры, в памяти которых он навсегда останется первым учителем и наставником.

4.3 Георгий Александрович ТЮЛИН (9.12.1914 – 22.04.1990)[1]

Георгий Александрович ТЮЛИН родился в г. Пензе. Его отец Александр Федорович Тюлин происходил из иконописцев Владимирской губернии (слобода Мстера), окончил Петербургский университет, стал специалистом по агропочвоведению. Мать — из семьи священника, окончила Петербургские высшие женские курсы и учительствовала до 70 лет.

Тюлин Г. А. окончил ФЗУ в г. Пермь при паровозоремонтном заводе с пятым разрядом токаря-железнодорожника; потом окончил рабфак и поступил в 1933 г. на механико-математический факультет Московского университета. На третьем курсе стал работать препаратором лаборатории аэродинамики по хоздоговору, заключенному молодым ученым Рахматулиным Х. А. с НИИ-3 по тематике Королева С. П.

Подрабатывая на должности ассистента кафедры теоретической механики, возглавляемой видным ученым Мерцаловым Н. И., в Московском институте механизации и электрификации сельского хозяйства, Тюлин Г. А. заканчивал второй год аспирантуры МГУ, приступив к работе над диссертационной темой по вихревому сопротивлению самолета, когда началась война.

25 июня 1941 г. Тюлин Г. А. обратился с просьбой о мобилизации в Красную Армию. Пройдя до осени переподготовку в Подольском военном училище, в ноябре 1941 г. он в чине лейтенанта получил должность командира 2-й отдельной батареи 38-го дивизиона реактивных минометов; принял боевое крещение на Волоколамском направлении, а в ноябре прибыл с батареей под г. Яхрому, где принимал участие в крупном сражении с применением реактивной артиллерии, опрокинувшем наступление гитлеровцев.

После контрнаступления Западного фронта, Тюлин Г. А. был награжден медалью «За боевые заслуги» и выдвинут заместителем командира дивизиона ГМЧ (гвардейских минометных частей). В мае 1942 г. он был назначен помощником начальника штаба, а в августе того же года — начальником штаба 3-ей армейской оперативной группы ГМЧ, куда входило несколько дивизионов, полков и других соединений реактивной артиллерии. За активную поддержку огнем войск Северо-Западного и 2-го Прибалтийского фронтов Тюлин Г. А. был награжден орденами Красной Звезды, Красного Знамени, Александра Невского, Отечественной войны II степени и медалями .

В сентябре 1944 г. Тюлин Г. А. был назначен старшим помощником начальника техотдела главного управления ГМЧ, вскоре реорганизованного в 5-ый отдел Глав-

[1]Историко-биографический материал предоставлен Тюлиной И. А.

ного управления командующего артиллерией Советской Армии. В конце войны по приказу Верховного Главнокомандующего участвовал в «охоте» за трофеями, среди которых особое место занимали ракеты ФАУ-1 и ФАУ-2. Подбором и отправкой специалистов ракетной техники занимался генерал Соколов А. И., возглавлявший в годы войны производство «катюш».

Так появилось в предместьях Берлина летом 1945 г. «хозяйство Тюлина», обозначенное так на указателях. Среди прибывших сюда специалистов были Победоносцев Ю. А., Лавров С. С., Глушко В. П., Пилюгин Н. А., Рязанский М. С., Воскресенский Л. А. В сентябре прибыл Королев С. П., потом Мозжорин Ю. А. К октябрю приехал командировавший ими генерал Соколов А. И. На основании анализа некоторых данных из немецких документов и личных наблюдений от поездок по нашей зоне Тюлин Г. А. и Шор Я. Б. составили перечень и карту со схемой размещения предприятий и фирм, участвовавших в изготовлении «оружия возмездия». Входившие в советскую зону предприятия были разбиты на три группы. Первая — район Большого Берлина и его пригородов, где под индексом А-4 технической документации находились некоторые фирмы по разработке аппаратуры и бортовой автоматики ФАУ-2. Вторая — в Тюрингии под г. Нордхаузеном, где был подземный завод по сборке ракет, стенд огневых испытаний двигателей ФАУ-2 и пр., поблизости после бомбежек был переведен научно-исследовательский Центр Пенемюнде в городок Бляйхероде. Третья группа была в Праге. В середине октября 1945 г. от Британского военного командования поступило приглашение наших специалистов на опытный запуск ФАУ-2, куда поехали Соколов А. И., Победоносцев Ю. А., Глушко В. П., Королев С. П. и Тюлин Г. А. Тюлин Г. А. возглавил расчетно-теоретическое бюро в Институте Рабе, вошедшем позже в институт Нордхаузен. Бюро проводило расчеты по аэродинамике, баллистике, устойчивости движения и прочности ракет. Тюлин Г. А. тесно контактировал с Королевым С. П., который уже присматривал себе сподвижников на будущее: Мозжорина Ю. А., Лаврова С. С., Герасюту Н. Ф. Королев С. П. вполне обратил в свою веру и Тюлина Г. А., но последнего смущало то, что он военный, и что Соколов А. И. его не отпустит из армии. Это огорчало Тюлина Г. А., т.к. он мечтал о научной работе, не предполагая, что в дальнейшем пути военного и научного работника могут соединиться.

В 1946 г. Тюлин Г. А. получил назначение на должность заместителя начальника 13-го ракетного отдела Главного Артиллерийского управления (ГАУ) Советской Армии; через два года он стал начальником этого отдела. Неоднократно он подавал рапорт о демобилизации, может быть, поэтому в 1948 г. он был переведен на научную должность, без оставления армии. Он возглавил лабораторию баллистики в НИИ-4 Академии артиллерийских наук. Его знания, каким-то образом не растерянные за время войны, обусловили ему поэтапное повышение: в 1955 г. он стал первым заместителем начальника НИИ-4 Соколова А. И. За семь лет научно-организационной работы Тюлин Г. А. выполнил десятки исследований расчетных и реальных траекторий объекта, по обработке данных измерительных средств. В 1950 г. он защитил кандидатскую диссертацию, а в 1958 г. стал доктором технических наук с присвоением ему ученого звания старшего научного сотрудника.

Не ограничиваясь чисто теоретическими расчетами параметров траектории объекта, Тюлин Г. А. с 1947 г. активно участвовал в ракетных испытаниях на полигоне «Капустин Яр». При первых пусках ракеты А-4 он руководил отделением баллистических расчетов, необходимых для выведения ракеты на орбиту, а также для дальнейшей обработки результатов наблюдений реальной траектории ракеты и сравнению тех и других данных.

Тюлин Г. А. неоднократно был председателем Госкомиссии по запуску сначала баллистических ракет, затем ракет, выводящих на орбиту ИСЗ и межпланетные автоматические станции. Примерами могут служить запуск автоматической межпланетной станции «Марс-1», запущенной в конце 1962 г. и передавшей 61 сеанс радиосвязи до марта 1963 г.; запуски межпланетных станций к Венере, многих лунников. Однако самыми неспокойными и ответственными были Госкомиссии, возглавляемые Тюлиным Г. А., по запуску пилотируемых космических кораблей. Таковыми были Госкомиссии по запуску корабля «Восток-5» с Валерием Быковским и «Восток-6» с Валентиной Терешковой. В. Быковский стартовал 15 июня 1963 г., 16 июня проводили в космос первую женщину-космонавта В. Терешкову. Тюлин Г. А. возглавлял также Госкомиссии по запуску В. Комарова, К. Феоктистова и Б. Егорова на «Восходе» 12 декабря 1964 г.; затем последовал запуск с П. Беляевым и А. Леоновым, который вышел в открытый космос.

В июне 1959 г. с целью усиления научно-исследовательского центра НИИ-88 в Подлипках (ныне г. Королев) заместитель председателя Совета Министров СССР Устинов Д. Ф. по согласованию с Королевым С. П. назначил Тюлина Г. А. директором Института.

Тюлин Г. А. развернул процесс превращения НИИ-88 из научно-прикладной организации, обслуживающей запросы конструкторов, в головной центр ракетной отрасли, разрабатывающий общую методику, прогнозы, государственные планы развития ракетно-космической техники, совмещая эти новые функции с прежними обязанностями обслуживания конструкторских бюро. Безусловно, провести такую существенную реорганизацию было не под силу одному директору: ему помогали его дружеские отношения с большинством главных конструкторов: Королевым С. П., Исаевым А. М., Пилюгиным Н. А., Бабакиным Г. Н., Кузнецовым В. И. Доброжелательные отношения были взаимными; например, Королев С. П. добивался создания специального ракетно-космического министерства во главе с Тюлиным Г. А. Через шесть лет эти чаяния Главного конструктора были реализованы: было создано Министерство общего машиностроения, Тюлин Г. А. стал первым заместителем министра.

Уйдя с головой в научно-организационную работу в НИИ-88 Тюлин Г. А. активно участвовал в запусках космических объектов с нового космодрома Байконур. Кроме того, он вел педагогическую работу в Московском физико-техническом институте (МФТИ), где возглавил закрытую кафедру по его профилю, получив ученое звание профессора.

Успехи работы Тюлина Г. А. в НИИ-88 были отмечены присвоением ему воинского звания генерал-майора инженерно-технической службы. К его фронтовым наградам прибавилось высокое звание Героя Социалистического Труда и Орден Ле-

нина (позже второй Орден Ленина, Орден Октябрьской революции), звание лауреата Ленинской премии.

В 1963 г. Тюлина Г. А. назначили первым заместителем председателя Государственного Комитета Обороны по ракетно-космической отрасли. С марта 1965 г. из этого Комитета было организовано Министерство общего машиностроения, возглавляемое Афанасьевым С. А., его первым заместителем стал Тюлин Г. А.

Тюлин Г. А. был председателем Госкомиссии при участии Келдыша М. В., Королева С. П. и Бабакина Г. Н. по мягкой посадке на Луну аппарата «Луна-9». 3 февраля 1966 г. «Луна-9» мягко прилунилась в Океане Бурь. Однако с прежними коллегами на заключительном этапе уже не было Королева С. П.: он скончался месяцем раньше. Программу по изучению Луны расширили: был организован специальный Лунный совет, возглавляемый Келдышем М. В.; Тюлин Г. А. стал его заместителем. Только в 1966 г. запустили еще 4 автоматические лунные станции, три из которых стали искусственными спутниками Луны, а «Луна-14» совершила вторую мягкую посадку вблизи Океана Бурь. Госкомиссия по лунной программе, возглавляемая Тюлиным Г. А., создала обширный коллектив разработчиков: селенологов, геохимиков, небесных механиков, который напряженно трудился по обработке и анализу полученных с Луны данных, уточняя программы очередных экспериментов, выполняя огромный объем наземных испытаний, изготовляя объекты для отправки на поверхность Луны.

В 1975 г. Тюлину Г. А. было доверено возглавлять международную комиссию по запуску и стыковке советского корабля «Союз» с американским «Аполлоном».

В Министерстве Общего Машиностроения Г. А. Тюлин проработал 11 лет. В 1976 г. в звании генерал-лейтенанта он вышел на пенсию.

В 1977 г. Тюлин Г. А. возвратился в альма-матер, где стал работать на полставки старшим научным сотрудником (впоследствии — главным научным сотрудником) кафедры газовой и волновой динамики, возглавляемой академиком АН Уз. ССР Рахматулиным Х. А. В 1979 г. Тюлин Г. А. организовал при кафедре и возглавил отраслевую лабораторию волновых процессов, финансируемую Министерством Машиностроения СССР. Постепенно рядом с этой лабораторией были созданы еще три лаборатории, финансируемые уже Министерством Общего Машиностроения СССР. Так в 1987 г. организовался и успешно работает на механико-математическом факультете МГУ Отдел прикладных исследований по математике и механике, возглавляемый ректором МГУ академиком РАН Садовничим В. А.

Лаборатория необратимых волновых процессов и высокоскоростного метания с момента создания комплектовалась выпускниками механико-математического факультета, многие из которых в дальнейшем перешли на педагогическую работу на кафедры факультета, либо на научную работу в НИИ. В числе сотрудников лаборатории в различное время были Смирнов Н. Н., Моргунов М. Н., Киселев А. Б., Гендугов В. М., Филиппов Ю. Г., Душин В. Р., Прошкин В. А., Натяганов В. Л., Колпаков В. П., Демьянов А. Ю., Панфилов И. И., Нерченко В. А., Голенева Л. А., Аксенов А. В., Кореняко В. В., Еременко Б. М., Никитин В. Ф. В научной работе лаборатории кроме штатных сотрудников участвовали и профессора и преподаватели кафедры. Основными направлениями работ лаборатории были фундаментальные ис-

следования и математическое моделирование закономерностей быстропротекающих процессов в физически и химически трансформирующихся многофазных средах, а также применение полученных фундаментальных результатов при решении практических задач внутренней и внешней баллистики и соударения, и разработке изделий новой техники. За время существования лаборатории ее сотрудниками были получены премия Совета Министров СССР (1990), премия им. И. И. Шувалова (1993), защищены 2 докторские и 9 кандидатских диссертаций.

Тюлин Г. А. совместно с Рахматулиным Х. А. осуществлял непосредственное научное руководство всеми научно-исследовательскими работами лаборатории. Он организовал еженедельный рабочий семинар для сотрудников лаборатории, на заседаниях которого докладывались только работы сотрудников лаборатории по заданной правительственной тематике. Приглашенные доклады и инициативные доклады сотрудников заслушивались на семинаре кафедры, руководившемся Рахматулиным Х. А. и также еженедельно проводившем свои заседания. Несмотря на то, что все молодые сотрудники и аспиранты, из которых в дальнейшем была сформирована лаборатория, к моменту прихода Тюлина Г. А. на кафедру уже имели научных руководителей, в части работ по тематике лаборатории Георгий Александрович лично руководил научной работой сотрудников. Поэтому в части прикладных исследований все сотрудники по праву считают его своим Учителем. Ни одна статья и ни один научно-технический отчет не выходили из лаборатории без того, чтобы Георгий Александрович не прочитал их неоднократно вместе с автором, выверяя каждый тезис, каждую формулу и даже каждую букву. При этом он категорически отказывался от соавторства, оставляя все приоритеты молодым сотрудникам лаборатории. Георгий Александрович уделял также много внимания составлению и редактированию сборников научных трудов кафедры газовой и волновой динамики, не будучи официально редактором серии.

Под руководством Тюлина Г. А. в конце восьмидесятых годов в лабораториях и на кафедре были начаты исследования возникновения и эволюции «космического мусора» - новой техногенной среды, образовавшейся в околоземном космическом пространстве в результате космической деятельности Человечества. Разработанные впоследствии новые механические модели, и полученные на их основе долгосрочные прогнозы эволюции объектов «космического мусора» оказались точнее зарубежных аналогов, и позволили нашей стране занять одно из лидирующих мест в данной области. Уже после смерти Георгия Александровича его учениками была опубликована первая в мире монография по данной тематике («Space Debris» Smirnov N. – Ed. Taylor and Francis, 2002.)

Тюлин Г. А. вел большую научно организационную работу в рамках всего механико-математического факультета, тесно сотрудничая с созданной в начале 80-х годов НИЧ факультета, которую возглавлял Кудрявцев В. Б. В результате этой деятельности на факультете появилось много новых хоздоговоров по важнейшей тематике. При непосредственном участии Тюлина Г. А. было начато оснащение подразделений факультета персональной компьютерной техникой.

За плодотворную научную и научно-организационную деятельность, как в стенах

Московского Университета, так и за его пределами, в 1984 г. Тюлину Г. А. было присвоено почетное звание Заслуженный деятель науки и техники РСФСР.

Тюлин Г. А. проводил серьезные научно-исторические исследования. Он был заместителем председателя Комиссии АН СССР по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства; сопредседателем секции пионеров космонавтики ежегодных Королевских чтений.

Тюлин Г. А. был требовательным руководителем, и, в то же время, чутким и доброжелательным человеком, внимательным к людям, работавшим под его началом. Он щедро делился своими знаниями и опытом с учениками. Светлый образ Георгия Александровича Тюлина навсегда сохранится в памяти его соратников и учеников.

4.4 Артур Яковлевич САГОМОНЯН (23.03.1914 – 18.08.2001)

Заслуженный профессор Московского Университета, заслуженный деятель науки РСФСР Артур Яковлевич САГОМОНЯН родился 23 марта 1914 г. в г. Андижане. В 1939 г. после окончания механико-математического факультета Московского Университета А. Я. Сагомонян был зачислен в аспирантуру НИИ Механики МГУ. С началом Великой Отечественной войны в 1941 году ушел на фронт и до конца войны сражался в рядах действующей армии, был тяжело ранен.

В октябре 1941 г. Сагомонян А. Я. в звании лейтенанта был направлен в отдельный противотанковый полк, который после кровопролитных боев на западном направлении влился в состав 108-й стрелковой дивизии. В июле 1942 г. он был ранен и, выйдя из госпиталя, получил направление в 3-ю (позже — гвардейскую) танковую армию начальником артснабжения бригады. В составе этой армии он участвовал в сражениях сначала на Украинском фронте, воевал в Польше. Потом, после второго ранения, брал Берлин, освобождал Прагу, закончил войну в Австрии. За боевые действия Сагомонян А. Я. награжден орденами Отечественной войны I степени, Красной Звезды и медалями.

По окончании войны Сагомонян А. Я. вернулся в Московский университет. В 1947 г. после защиты кандидатской диссертации был оставлен для научно-педагогической работы на кафедре аэромеханики механико-математического факультета МГУ. Одновременно был назначен заместителем директора по научной работе НИИ механики МГУ. В 1954 г. Сагомонян А. Я. защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. С 1956 г. Сагомонян А. Я. — профессор кафедры газовой и волновой динамики. Он активно участвовал в общественной жизни Московского университета, был членом партийного комитета МГУ, председателем комитета народного контроля МГУ, заместителем секретаря партийного комитета механико-математического факультета.

Сагомонян А. Я. был крупным ученым – механиком. Его научное творчество было посвящено исследованиям в различных областях механики сплошных сред. Им решен ряд новых нестационарных задач движения сплошных сред, созданы их математические модели. Результаты его исследований задач дифракции и взаимодействия ударных волн в сплошных средах, математического моделирования явления взрыва в средах типа грунтов и бетона, проблем проникания твердых тел в эти среды, а также пробивания слоистых преград имеют фундаментальное научное и прикладное значение. Результаты этих исследований способствовали решению важных **практических задач и созданию изделий новой техники**. Научные труды Сагомоняна А. Я. широко используются в инженерной практике и при подготовке специалистов для работы в области создания новой техники.

В последние годы жизни Сагомонян А. Я. уделял большое внимание научным исследованиям, имеющим экологическую направленность. Его научные интересы охватывали вопросы математического моделирования эрозии почв и оползней на склонах возвышенностей.

Сагомонян А. Я. вел большую педагогическую работу на кафедре. Им читались курсы по газовой динамике, распространению волн в сплошных средах, он был руководителем аспирантов. Сагомоняном А. Я. подготовлено большое число научных работников, под его руководством защищено 43 кандидатских диссертации, 5 учеников защитили впоследствии докторские диссертации. Многие его ученики успешно работают в различных научно-исследовательских институтах и высших учебных заведениях.

Сагомонян А. Я. — автор более 200 научных работ, в том числе шести монографий и двух учебных пособий. Им были опубликованы следующие монографии: «Пространственные задачи по неустановившемуся движению сжимаемой жидкости», М., 1962, «Вопросы динамики грунтов», М., 1964 (в соавторстве), «Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости», М., 1970 (в соавторстве), «Проникание», М., 1974, «Удар и проникание тел в жидкость», М., 1986, «Динамика пробивания преград», М., 1988. Сагомонян А. Я. — автор двух учебных пособий: «Газовая динамика», М., 1965 (в соавторстве), «Волны напряжения в сплошных средах», М., 1985.

Научная и педагогическая деятельность Сагомоняна А. Я. была отмечена орденом «Знак Почета». В 1990 г. за работы в области механики он был удостоен звания Лауреата премии Совета Министров СССР, а в 1995 г. решением Ученого Совета МГУ ему было присвоено почетное звание «Заслуженного профессора Московского университета».

В 2002 году Сагомоняну А. Я. в соавторстве с Кузнецовым М. С. и Гендуговым В. М. была присуждена Ломоносовская премия за цикл работ по математическому моделированию эрозии почв (посмертно).

4.5 Абрам Исаакович БУНИМОВИЧ (22.12.1917 – 03.07.1999)

Заслуженный профессор Московского Университета Абрам Исаакович Бунимович родился 22 декабря 1917 г. в городе Киеве. В 1934 году после окончания средней школы поступил и в 1940 году с отличием окончил механико-математический факультет МГУ по кафедре гидромеханики.

23 июня 1941 года со второго курса аспирантуры НИИ механики МГУ ушел на фронт. Участвовал в боях на Волховском, Степном, 1-м и 2-м Украинских фронтах, в Корсунь-Шевченковской, Днепровской, Ясско-Кишиневской, Бухарестской, Будапештской, Венской, Пражской и других боевых операциях в качестве офицера артиллерийской разведки. Прошел славный боевой путь от командира взвода разведки до старшего помощника начальника артиллерийской разведки 2-го Украинского фронта.

После демобилизации в сентябре 1945 года вернулся в аспирантуру и в январе 1948 года защитил кандидатскую диссертацию, в которой была построена теория и решен ряд задач об истечении газовых струй из каналов с произвольной формой стенок. С 1948 по 1961 г. работал старшим научным сотрудником в НИИ-1 МАП и ЦИАМ, где выполнил обширные циклы работ по теоретическому и экспериментальному исследованию обтекания решетчатых систем потоком газа с дозвуковыми скоростями, результаты которых нашли широкое применение при проектировании и разработке реактивных двигателей.

В 1961 году Абрам Исаакович был приглашен доцентом на кафедру газовой и волновой динамики механико-математического факультета МГУ. В период 1961 – 1963 гг. заведовал отделом газовой и волновой динамики НИИ механики МГУ.

Степень доктора физико-математических наук присуждена в 1969 году, звание профессора присвоено в 1980 году.

Общепризнанны научные результаты Бунимовича А. И., охватывающие широкую область механики. Одним из первых в 1948 году Бунимович А. И. провел исследования движения тонких тел с большими сверхзвуковыми скоростями: были строго доказаны законы подобия при наличии ударных волн и установлена аналогия между пространственными установившимися и плоскими неустановившимися движениями.

Бунимович А. И. — автор свыше 190 научных работ. Области его научных исследований — теория пограничного слоя, газовая динамика и динамика разреженного газа, проникание твердых тел с большими скоростями в различные среды (грунты, металлы), теоретико-групповые методы и их применение к различным проблемам механики (нестационарное неизотермическое движение газа в газопроводах, движение неньютоновских жидкостей, кинетические уравнения).

Бунимовичу А. И. принадлежат пионерские исследования по обтеканию тел и систем тел потоком разреженного газа в области течения со скольжением. Им создана научная школа по теоретическому исследованию обтекания тел потоком разреженного газа в области свободномолекулярного течения и в промежуточном диапазоне высот. Бунимовичу А. И. принадлежат многие работы по изучению течений разреженного газа в каналах и решетках; им разработаны теория и методы определения аэродинамических характеристик тел во всем диапазоне высот полета в разреженном газе, определения формы тел с оптимальными характеристиками, построена общая теория локального взаимодействия тел с различными средами, имеющая широкие приложения в различных задачах механики сплошной среды. Ряд работ посвящен применению методов теоретико-группового анализа в задачах механики.

Помимо научно-исследовательской деятельности Абрам Исаакович на протяжении многих лет вел большую педагогическую работу: преподавал основные и ряд оригинальных специальных курсов на механико-математическом факультете МГУ («Механика сплошной среды», «Гидроаэродинамика», «Динамика разреженного газа», «Газодинамика пограничного слоя»).

За время работы на кафедре он воспитал многих высококвалифицированных научных работников в области механики, которые успешно работают в различных научно-исследовательских институтах и высших учебных заведениях. Им подготовлено 18 кандидатов наук, при его консультации защищены 4 докторские диссертации. На протяжении многих лет он был членом Специализированного совета по присуждению ученых степеней, членом Ученого совета отделения механики.

На протяжении всей жизни Абрама Исааковича всегда отличала активная жизненная позиция. В студенческие годы он избирался заместителем секретаря комитета ВЛКСМ МГУ, членом Краснопресненского РК ВЛКСМ; в дальнейшие годы — член партбюро факультета, секретарь партбюро отделения механики, парторг кафедры. Очень жизнелюбивый и доброжелательный человек, Бунимович А. И., снискал громадное уважение и авторитет среди коллег и учеников.

За вклад в науку Абрам Исаакович был удостоен многих наград, премий и почетных званий. В 1990 году за научные результаты по спецтематике ему было присуждено звание лауреата премии Совета Министров СССР. За внедрение в практику народного хозяйства научных результатов он был награжден серебряной и бронзовой медалями ВДНХ, за пропаганду научных знаний — медалью «День советской науки», за педагогическую деятельность — почетным знаком «Отличник высшей школы».

Высоко оценены боевые заслуги Бунимовича А. И. Он был награжден орденом «Отечественной войны» I степени, двумя орденами «Отечественной войны» II степени, орденом «Красной звезды» и многими медалями.

До последних дней своей жизни Абрам Исаакович оставался энтузиастом науки, творческой личностью, которую отличала бьющая через край энергия.

4.6 Анатолий Леонтьевич ПАВЛЕНКО (06.10.1911 – 25.08.1987)

Одним из первых сотрудников кафедры газовой и волновой динамики был Анатолий Леонтьевич Павленко. Он родился 6 октября 1911 года на Украине. Нелегкая, и все же во многом схожая с другими из его поколения, дорога жизни привела его на механико-математический факультет Московского университета. Война застала Павленко А. Л. в г.Градижске Полтавской области, где он работал учителем математики и завучем средней школы. Уже в июле 1941 года Павленко А. Л. — командир пулеметной роты 2-го стрелкового полка 300-й стрелковой дивизии. Воюет на подступах к Днепру. За три месяца ожесточенных боев Павленко А. Л. прошел путь от младшего лейтенанта до исполняющего обязанности начальника штаба полка.

После ранения и лечения в госпиталях опять на фронте. В январе – феврале 1942 года завязались бои по окружению 16-й немецкой армии. Павленко А. Л. участвовал в них вместе с ротой автоматчиков под Старой Руссой. С 7-го по 9-е февраля был ранен дважды, причем второе ранение было очень тяжелым и в результате его он оказался на нейтральной полосе. Истекая кровью, временами теряя сознание он полз ночами 12 км при сорокаградусном морозе к своим. И когда цель была уже близка, до окопов оставалось всего несколько десятков метров, его ранило еще раз — осколком мины в живот. К счастью, выползавшие на разведку бойцы вынесли его на передовую и в тяжелейшем состоянии Павленко А. Л. был отправлен в госпиталь, где началась в буквальном смысле борьба со смертью, поскольку ранения были очень тяжелыми и сказалась огромная потеря крови. Возвращение к жизни продолжалось целый год. Был потерян счет пережитым операциям. Но самоотверженная работа врачей и сильная воля помогли выжить. Однажды он смог сказать — «Жив курилка». Участие А. Л.Павленко в войне отмечено Орденом Отечественной войны 2-й степени и многими медалями.

Инвалидность заставила задуматься над тем, что делать дальше. И в 1943 году Анатолий Леонтьевич поступил на 2-й курс механико-математического факультета МГУ. Закончив университет с отличием, Павленко А. Л. поступил в аспирантуру, а после аспирантуры остался работать в университете. Он работал на кафедре газовой и волновой динамики с момента основания кафедры в 1951 году. В 1954 году успешно защитил кандидатскую диссертацию по волновым задачам механики твердого деформируемого тела.

Вся его дальнейшая творческая жизнь связана с кафедрой газовой и волновой динамики. Павленко А. Л. был учителем многих поколений студентов и аспирантов. Его лекции были отточены до совершенства и здесь сказывалась одна из основных черт его характера — во всем разобраться до мельчайших подробностей, не

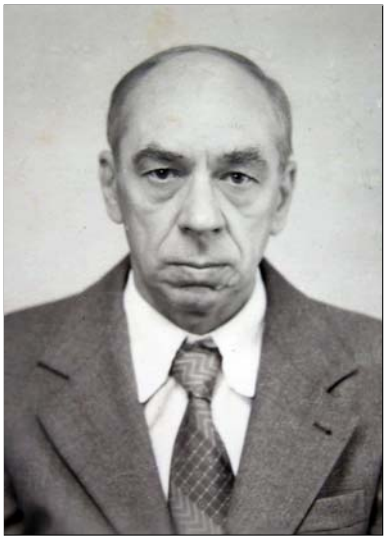
оставить никаких белых пятен. Исключительной научной добротностью отличаются более 60-ти научных работ Павленко А. Л. Очень большое значение он придавал экспериментальной работе. Многие задуманные и осуществленные им эксперименты до сих пор используются в учебном процессе в качестве задач физико-механического практикума студентов.

Анатолий Леонтьевич был человеком сильной воли, способным отстаивать свое мнение в любом вопросе. Он принимал активное участие в общественной жизни факультета, был прекрасным куратором многих студенческих групп кафедры, требовательным научным руководителем. За большую и плодотворную педагогическую работу в 1980 году Павленко А. Л. был награжден Почетной грамотой Верховного Совета РСФСР.

Тяжелая автомобильная авария и сказавшиеся фронтовые раны привели к болезни, еще нескольким операциям и как результат к уходу из жизни Павленко А. Л. 25 августа 1987 года.

Страстный рыболов, занимательный рассказчик, дотошный исследователь, прекрасный лектор, требовательный учитель — таким останется Анатолий Леонтьевич Павленко в памяти своих учеников.

4.7 Юрий Индрикович ГРИМЗА (18.08.1921 - 18.08.1982)



Юрий Индрикович Гримза родился 18 августа 1921 в г. Москве. В 1939 г. окончил 92-ю полную среднюю школу г. Москвы «на отлично» и по результатам собеседования в августе того же года был зачислен на первый курс механико-математического факультета МГУ. В сентябре 1939 г. был призван в ряды Красной Армии. Участник войны с белофиннами, Великой Отечественной войны (Западный, Калининский, Брянский, Белорусский, 1-ый и 2-ой Белорусские фронты). Награжден медалями «За боевые заслуги», «За освобождение Варшавы», «За победу над фашистской Германией в войне 1941-1945 гг.» и др. В июне 1946 г. был демобилизован из рядов Красной Армии сил в звании старшины. В июле 1946 г. вновь принят на механико-математический факультет, который в 1951 г. окончил с отличием. С октября 1951 г. по сентябрь 1954 г. учился в аспирантуре факультета, но последние два года тяжело болел туберкулезом легких. С октября 1954 г. до своей кончины работал на кафедре газовой и волновой динамики механико-математическом факультета - старшим лаборантом (до 1958 г.), ассистентом (до 1967 г.), старшим преподавателем. Активно участвовал в общественной жизни факультета.

Преподавательская деятельность Юрия Индриковича неразрывно связана со становлением студенческого практикума по газовой и волновой динамике. Им придуманы многие оригинальные установки, которые используются при выполнении студенческого практикума и по сей день, в частности установка для определения диаграммы состояния грунтов по данным динамических испытаний.

Проведенные Гримзой Ю. И. исследования распространения волн в грунтах показали существенную нелинейность исследуемых сред и экспериментально подтвердили сформулированную Рахматулиным Х. А. модель «пластического газа», продуктивно применяющуюся для описания динамики грунтов.

Глава 5

БИОГРАФИЧЕСКАЯ СПРАВКА О КОЛЛЕКТИВЕ КАФЕДРЫ

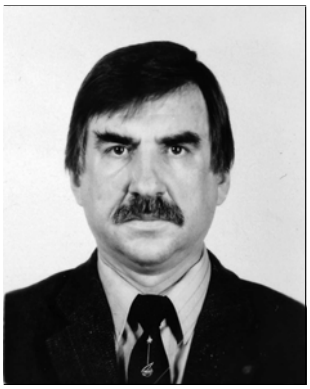
ШЕМЯКИН Евгений Иванович — заведующий кафедрой, родился 09.12.1929 в г. Новосибирске. Окончил матмех ЛГУ в 1952 г., доктор технических наук (1962), профессор (1966), академик АН СССР (1984, член-корреспондент с 1976), лауреат Государственной премии СССР (1984), Заслуженный профессор МГУ (1998), действительный член Королевской шведской академии инженерных наук и Чехословацкой академии наук. Область научных интересов: прикладная математика, механика, в том числе механика горных пород. Имеет более 250 научных работ; под его руководством защищено более 40 кандидатских диссертаций, около 20 учеников защитили докторские диссертации.

ЗВЯГИН Александр Васильевич — ученый секретарь кафедры, доцент, родился 6.05.1953 в Тамбовской области. Окончил мехмат МГУ в 1975 г., кандидат физико-математических наук (1980), доцент (1989), лауреат премии Совета Министров СССР (1990). Область научных интересов: механика деформируемого твердого тела, задачи разрушения, динамика нити. Имеет более 40 научных работ. Под его руководством защищена 1 кандидатская диссертация.

СМИРНОВ Николай Николаевич — профессор кафедры, заведующий лабораторией волновых процессов, зам. декана, родился 19.04.1954 в г. Москве. Окончил мехмат МГУ в 1976 г., доктор физико-математических наук (1990), профессор (1994), лауреат премии им. И. И. Шувалова (1993), член-корреспондент РАЕН (1998), член-корреспондент АТН РФ (1992), зам. председателя Совета по горению и взрыву при Президиуме РАН (1999), член Международного института горения (1992). Область научных интересов: динамика физико-химически трансформирующихся многофазных сред, фундаментальные проблемы экологии, математическое моделирование эволюции космического мусора, движения автотранспортных потоков. Имеет более 200 научных работ, под его руководством защищено 7 кандидатских диссертаций.

МАКСИМОВ Виктор Федорович — доцент кафедры, заведующий лабораторией динамики деформируемых сред, зам. проректора МГУ, родился 4.12.1940 в Саратовской области. Окончил мехмат МГУ в 1963 г., кандидат физико-математических наук (1974), доцент (1979), лауреат премии Совета Министров СССР (1990), заслуженный работник МГУ (2002). Область научных интересов: динамика гибких связей, динамика упругопластических оболочек, динамика удара. Имеет более 70 научных работ.

КИСЕЛЕВ Алексей Борисович — профессор кафедры, родился 11.01.1956 в г. Москве. Окончил мехмат МГУ в 1978 г., доктор физико-математических наук (1992), профессор (1997), лауреат премии Совета Министров СССР (1990). Область научных интересов: математическое моделирование процессов динамического деформирования и разрушения твердых тел, в том числе многофазных, математическое моделирование эволюции космического мусора, движения автотранспортных потоков. Имеет более 100 научных работ.



КОВАЛЕВ Валерий Леонидович — профессор кафедры, родился 13.08.1952 в Брянской области. Окончил мехмат МГУ в 1974 г., доктор физико-математических наук (1996), профессор (2000), член Американского Института Аэронавтики и Астронавтики (2001). Область научных интересов: механика жидкости, газа и плазмы, гиперзвуковая аэродинамика, физико-химические процессы. Имеет более 90 научных работ. Под его руководством защищена 1 кандидатская диссертация.

КОРОБЕЙНИКОВ Виктор Павлович — профессор, (15.03.1929 – 6.02.2003), родился в Татарской АССР. Окончил мехмат Казанского ун-та в 1952 г., доктор физико-математических наук (1968), профессор (1970), член-корреспондент АН СССР (1987), лауреат Государственной премии СССР (1975). Область научных интересов: математическое моделирование задач теории взрыва и детонации, динамики многофазных сред, моделирование катастрофических явлений природы. Автор около 200 научных работ. Под его руководством защищено 15 кандидатских диссертаций, 4 учеников защитили докторские диссертации.

ДЕМЬЯНОВ Юрий Андреевич — профессор кафедры (по совместительству), родился 1.08.1931 в Москве. Окончил мех-мат МГУ в 1953 г., доктор технических наук (1965), профессор (1969), лауреат Ленинской (1961) и им. Н. Е. Жуковского (1978) премий, заслуженный деятель науки РФ (2003), академик РАЕН и РАК им. К. Э. Циолковского, член Национального Комитета по теоретической и прикладной механике. Область научных интересов: теория пограничного слоя при гиперзвуковых скоростях, сверхзвуковые течения с зонами отрыва, теория поперечно-продольных колебаний струн и мембран. Имеет более 90 научных работ и 14 изобретений, под его руководством защищено 14 кандидатских диссертаций, 4 из которых защитили докторские диссертации.

НИКИТИН Лев Васильевич — профессор (по совместительству), родился 17.11.1931 в г. Воронеже. Окончил МФТИ в 1955 г., доктор физико-математических наук (1974), профессор (1976), лауреат премии им. А. Гумбольдта (1996), член-корреспондент РАЕН. Область научных интересов: механика деформируемого твердого тела, механика разрушения. Имеет более 100 научных работ. Под его руководством защищено более 30 кандидатских диссертаций, пятеро его учеников защитили докторские диссертации.

ДУБРОВСКИЙ Владимир Анатольевич — профессор (по совместительству), родился 20.03.1935 в г. Севастополе. Окончил физфак МГУ в 1959 г., доктор физико-математических наук (1986), старший научный сотрудник(1976). Область научных интересов: применение уравнений математической физики в геофизике, гидроаэродинамике и теории поля. Имеет более 80 научных работ. Под его руководством защищено 4 кандидатских диссертации.

КУКСЕНКО Борис Владимирович — доцент кафедры, родился 23.06.1934 в г. Челябинске. Окончил мехмат МГУ в 1957 г., кандидат физико-математических наук (1969), доцент (1984). Область научных интересов: механика сплошных сред. Имеет более 50 научных работ. Под его руководством защищено 5 кандидатских диссертаций.

ФИЛИМОНОВ Владимир Алексеевич (31.05.1944 – 22.03.1997) — доцент кафедры, родился в г. Москве. Окончил мехмат МГУ в 1971 г., кандидат физико-математических наук (1977), доцент (1985). Область научных интересов: аэродинамика околозвуковых течений, течения в струях, взаимодействие с преградами. Автор более 20 научных работ, в том числе пособий по элементарной математике. Научную и педагогическую работу на факультете сочетал с преподаванием в школе.

НАТЯГАНОВ Владимир Леонидович — доцент кафедры, родился 10.05.1952 в г. Валга Эстонской ССР. Окончил мехмат МГУ в 1975 г., кандидат физико-математических наук (1983), доцент (1990). Область научных интересов: электромагнитная гидромеханика и моделирование редких явлений атмосферного электричества, обратные задачи геофизики и сейсмоэлектромагнитные эффекты. Имеет более 50 научных работ. Под его руководством защищены 2 кандидатские диссертации.

ФИЛИППОВ Юрий Григорьевич — доцент кафедры, родился 10.12.1955 в г. Пинске Белорусской ССР. Окончил мехмат МГУ в 1979 г., кандидат физико-математических наук (1983), доцент (1992). Область научных интересов: вычислительные методы в газовой динамике, внутренняя баллистика. Имеет около 20 научных работ.

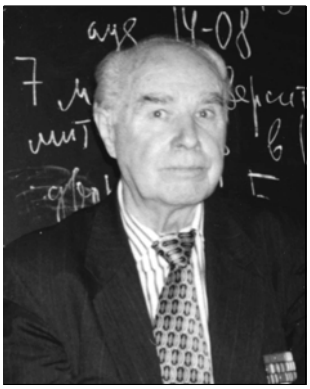
ДУШИН Владислав Роальдович — доцент кафедры, родился 10.05.1958 в г. Омске. Окончил мехмат МГУ в 1980 г., кандидат физико-математических наук (1988). Область научных интересов: групповые методы в механике, вычислительные методы в газовой динамике. Имеет около 20 научных работ.

САГОМОНЯН Елена Артуровна — доцент кафедры, родилась 7.11.1950 в г. Москве. Окончила мехмат МГУ в 1973 г., кандидат физико-математических наук (1976), старший научный сотрудник (1980). Область научных интересов: задачи динамики твердого деформируемого тела. Имеет около 50 научных работ.

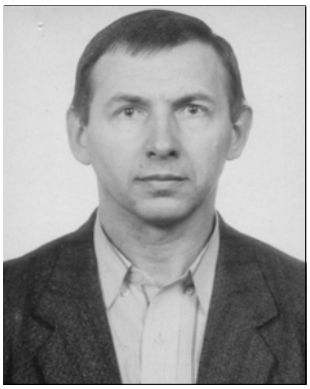
ГЕНДУГОВ Владимир Михайлович — ведущий научный сотрудник кафедры, родился 20.10.1945 в г. Сухуми. Окончил мехмат МГУ в 1968 г., кандидат физико-математических наук (1973), старший научный сотрудник (1976), лауреат премии Совета Министров СССР (1990) и премии им. М. В. Ломоносова. (2002). Область научных интересов: горение, детонация, образование алмазов, дождевая и ветровая эрозия почв. Имеет более 100 научных работ. Под его руководством защищено 3 кандидатских диссертации.

ГУВЕРНЮК Сергей Владимирович — доцент кафедры (по совместительству), родился 24.05.1950 в Луганской области. Окончил мехмат МГУ в 1972 г., кандидат физико-математических наук (1982), старший научный сотрудник (1988). Область научных интересов: экспериментальная аэромеханика, теория проницаемого тела, управление отрывными течениями, сопряженные задачи движения тел в сплошной среде с учетом динамики вихрей, сверхзвуковые течения газов с искусственными источниками неоднородности, пульсирующие турбулентные струи, прикладные компьютерные технологии в МЖГ. Имеет более 100 научных работ и 10 патентов на изобретения. Под его руководством защищено 2 кандидатских диссертации.

НИКИТИН Валерий Федорович — доцент кафедры, родился 5.09.1962 в г. Москве. Окончил мехмат МГУ в 1984 г., кандидат физико-математических наук (2002). Область научных интересов: численное моделирование в механике многофазных химически реагирующих сред. Имеет более 50 научных работ.



ФАЛУНИН Михаил Петрович — старший преподаватель (по совместительству), родился 13.01.1919 в Казахстане. Окончил мехмат МГУ в 1948 г., кандидат физико-математических наук (1957), старший научный сотрудник (1965). Область научных интересов: теоретическая и экспериментальная газовая динамика, теория парашюта. Имеет более 50 научных работ.



КОЛПАКОВ Виктор Петрович — старший преподаватель (по совместительству), родился 22.07.1952 в Курской области. Окончил мехмат МГУ в 1979 г., заслуженный работник МГУ (2002). Область научных интересов: механика деформируемого твердого тела. Имеет около 10 научных работ.

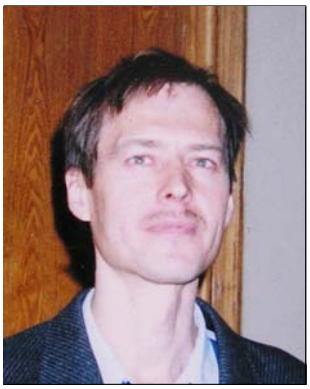
КОЗЛОВ Владимир Петрович — научный сотрудник кафедры, родился 9.06.1956 в Московской области. Окончил мехмат МГУ в 1982 г., кандидат физико-математических наук (1997). Область научных интересов: моделирование отрывных течений, динамические задачи осесимметричных вращающихся тел. Имеет около 20 научных работ.

ЗУБКОВ Александр Федорович — научный сотрудник кафедры (по совместительству), родился 19.04.1961 в г. Москве. Окончил мехмат МГУ (1986). Область научных интересов: экспериментальная аэромеханика, генераторы импульсных струй, автоматизация эксперимента и методология измерительных систем, прикладные компьютерные технологии в эксперименте. Имеет 15 научных работ.

АНДРОНОВ Петр Роальдович — доцент кафедры (по совместительству), родился 4.07.1971 в г. Москве. Окончил мехмат МГУ в 1973 г., кандидат физико-математических наук (2001). Область научных интересов: нестационарные вихревые взаимодействия неограниченных потоков и струй со сплошными и проницаемыми телами, численное моделирование. Имеет 25 научных работ.

КОКОРЕВА Анастасия Владимировна — младший научный сотрудник лаборатории динамики деформируемых сред, родилась 2.11.1976 в г. Москве. Окончила мехмат МГУ в 1999 г. Область научных интересов: динамика транспортных потоков.

ИЛЬЮШИНА Елена Алексеевна — старший научный сотрудник лаборатории волновых процессов, родилась 3.09.1943 в г. Москве. Окончила физфак МГУ в 1966 г., кандидат физико-математических наук (1976), доцент. Область научных интересов: динамика неоднородных многокомпонентных систем, задачи статистики. Имеет около 25 научных работ.



ИВАШНЕВ Олег Евгеньевич — ведущий научный сотрудник лаборатории волновых процессов, родился 22.10.1960 в г. Нижний Тагил Свердловской области. Окончил Харьковский Авиационный институт в 1983 г., затем аспирантуру МГУ на кафедре газовой и волновой динамики. Кандидат физико-математических наук с 1988 г. Имеет более 40 научных работ по механике многофазных сред, фазовым переходам и кипению перегретых жидкостей, неустойчивости поверхностей раздела в динамике жидкостей.

КУЛЬЧИЦКИЙ Антон Владимирович — младший научный сотрудник лаборатории волновых процессов, родился 30.08.1972 в г. Москве. Окончил мехмат МГУ в 1994 г., затем аспирантуру МГУ. Кандидат физико-математических наук с 1999 г. Область научных интересов: неравновесные фазовые переходы и тепломассообмен, сейсмоэлектрические эффекты, электромагнитные предвестники землетрясений. Опубликовано около 20 научных работ.

ЗЕЛЕНСКИЙ Александр Степанович — старший научный сотрудник лаборатории динамики деформируемых сред, родился 21.10.1956 в пос. Ольховчик г. Шахтерск Донецкой области. Окончил мехмат МГУ в 1979 г., кандидат физико-математических наук (1985). Область научных интересов: механика деформируемого твердого тела. Имеет около 20 научных работ.

ЮМАШЕВ Михаил Владиславович — старший научный сотрудник лаборатории динамики деформируемых сред, родился 08.05.1958 в г. Реутов Московской области. Окончил мехмат в 1981 г., кандидат физико-математических наук (1985). Область научных интересов: механика деформируемого твердого тела, механика разрушения. Имеет около 20 научных работ.

ЧАЙКА Александр Александрович — младший научный сотрудник лаборатории волновых процессов, родился 24.03.1980 в г. Калуга. Окончил мехмат МГУ в 2002 г. Область научных интересов: электровязкостный эффект, электрогидродинамика суспензий, электромагнитные взаимодействия.

Глава 6

ВЫПУСКНИКИ КАФЕДРЫ

Многочисленные выпускники кафедры работают практически во всех отраслях народного хозяйства. Среди них много известных ученых, преподавателей, инженеров, конструкторов, экономистов, экологов, политиков, сотрудников финансовых структур и банков, военных, сотрудников органов внутренних дел и служб безопасности. Это возможно благодаря специфике фундаментального образования, получаемого на кафедре и в Московском университете в целом. Перед преподавателями кафедры стоит задача дать студентам базовые фундаментальные знания законов, на которых строятся здания многих разделов науки, и научить общим методам построения физических и математических моделей динамических процессов и явлений, проистекающих в различных технических устройствах, в природе и в обществе. Студенты не изучают конкретные технические устройства или методы, к работе с которыми были бы привязаны в дальнейшей трудовой деятельности. Особенность получаемого ими базового фундаментального образования в том, что в начале трудовой деятельности требуется дополнительное обучение выполнению конкретных работ в выбранной области, иными словами, дополнительная настройка приобретенных знаний. Этот недостаток является одновременно и большим преимуществом получаемого на кафедре образования, т.к. позволяет производить настройку в очень широком диапазоне в зависимости от выбранного рода деятельности.

До последнего времени на кафедре, к сожалению, не поддерживалась база данных о выпускниках. Редакционной группе удалось составить списки выпускников только начиная с 1967 года. Всех, кто, прочтя эти строки, сможет внести какие-либо уточнения или дополнения, просим позвонить на кафедру (095) 939-37-54.

1967 год

1. Андреева И. Е.
2. Басиева Т. Х.
3. Богод А. Б.
4. Брюханова Т. В.
5. Бургасов М. П.
6. Гефтер В. М.
7. Индурский М. С.
8. Карцев Б. В.
9. Киселев Б. А.
10. Мацнев Д. А.
11. Нигматулин Б. И.
12. Поляков И. П.
13. Проценко Н. Ю.
14. Пугачев Б. А.
15. С. Чечеткина
16. Шереметьев М.
17. Шмидт В. М.

1968 год

1. Гендугов В. М.
2. Зиновьев А. С.
3. Иванов М. С.
4. Каменева М. В.
5. Кондрашова Т. П.
6. Ку-Ван-Тыонг
7. Лаптева О. В.
8. Петрухина Н. А.
9. Фурсова Л. С.
10. Шибанов А. В.
11. Шонина О. В.

1969 год

1. Болховитина Н. Н.
2. Гомазкова С. Я.
3. Липкина Э. Х.
4. Мухина А. М.
5. Погашева И. К.
6. Поливанова
7. Проценко Н. Ю.
8. Рондель В. С.
9. Хархан Э. М.
10. Холин Н. Н.
11. Шевченко Ю. В.

1970 год

1. Александрович В. Ф.
2. Белякова Т. А.
3. Бузанова Т. И.
4. Вильге Я. И.
5. Вознесенский А. С.
6. Голубев В. С.
7. Ивандаев А. И.
8. Койфман В. И.
9. Койфман М. Е.
10. Михайлов Н. В.
11. Панюшева О. И.
12. Рахматулина И. Х.
13. Селиверстова Т. М.
14. Ситников А. Т.
15. Смыслова Г. И.
16. Суркова С. Н.
17. Ташлицкий М. Я.
18. Хабеев Н. С.
19. Халап Г. Н.
20. Цымбалюк М. Я.
21. Чистолинов В. Г.

1971 год

1. Грудницкая Т. Я.
2. Данцер А. А.
3. Н. Дильмурадов
4. Дубинский А. В.
5. Зверев С. Ю.
6. Зинина Г. А.
7. Иванов В. К.
8. Керчман В. И.
9. Л. Княжанская
10. Куликов В. А.
11. Лыу-Нгуен
12. Лямина Б. И.
13. Маркелова Е. А.
14. Масленников А. Г.
15. Матвеева Н. И.
16. Нгуен Хну Минь
17. Некрасов М. П.
18. Николаенко В. П.
19. Рудерман Я. Л.
20. Румянцев М. В.
21. Федин В. А.
22. Шагапов В. Ш.
23. Шехтер Е. Г.
24. Шумилина Л. Е.

1972 год

1. Будко Н. А.
2. Буряковская Н. Ю.
3. Гаджиев В. Б.
4. Герасимова А. Г.
5. Гому Суаш Шми
6. Горенштейн Я. Д.
7. Гувернюк С. В.
8. Диконогова В. В.
9. Зверев Н. И.
10. Индельман П. Р.
11. Крамачев В. В.
12. Кривошеев А. Г.
13. Мансуров Ф. К.
14. Рамоданова Т. В.
15. Рысин Г. Б.
16. Рысина С. В.
17. Сазонова Н. И.
18. Симоненко М. М.
19. Спидеев С. Н.
20. Трухачев В. П.
21. Ярмолинский И. Г.

1973 год

1. Джалалова М. В.
2. Иванов М. Ю.
3. Ильясова Л. Г.
4. С. Калабухов
5. Левина О. А.
6. Петрова А. Б.
7. Сагомонян Е. А.
8. Филимонов И. М.
9. С. Фишкина
10. Фомченко В. М.
11. Ярмаков М. Р.

1974 год

1. Алескеров
2. Выск Н.

3. Я. Дворкин
4. Казаков
5. Классен
6. Клочков
7. Н. Корякин
8. Манаева-Трухина
9. Наумова
10. Нашев
11. Огнева
12. Пальцев
13. Посаженников
14. Ребрин
15. Рыбакин Б. П.
16. Симонов
17. Тупикин В. Н.
18. Урмамбетов
19. Хомяков
20. Цыганов
21. Е. Чумаченко

1975 год

1. Автухов В. В.
2. Аметов А. М.
3. Датнов Е. Л.
4. Звягин А. В.
5. Карпов В. Н.
6. Котельникова И. В.
7. Кузнецов
8. Кулов Т. А.
9. Лемак (Гувернюк) Е. В.
10. Лющин С. Л.
11. Матвеева Л. В.
12. Осипов В. Н.
13. Поляков А. С.
14. Попов В. В.
15. Шарадин А. В.
16. Шарадина Л. Г.
17. Шейнбаум Б. А.

1976 год

1. Абдулгалимов А. М.
2. Антонова О. Б.
3. Балова Е. А.
4. Босых Л. А.
5. Боченков Л. С.
6. Гаевская И. С.
7. Гродзенский В. Г.
8. Коваленко А. А.
9. Крошилин В. Е.
10. Кузнецов С. В.
11. Мартемьянов С. А.
12. Михайлов Д. А.
13. Моргунов М. Н.
14. Помилуйко А. Н.
15. Розин А. В.
16. Садыкова А. Г.
17. Семенова А. С.
18. Смирнов Н. Н.
19. Троянов М. М.
20. Удалов А. С.

1977 год

1. Беккер Дитер
2. Бендерская Е. В.
3. Биндер Уве
4. Галата В. П.
5. Глаксин А. А.
6. Голенева (Оснач) Л. А.
7. Жижина Г. А.
8. Зиновьев В. М.
9. Казакова Н.
10. Кравцова Л. И.
11. Кузнецов Д. Б.
12. Николаенко В.
13. Новиков Г. А.
14. Парубченко А. Н.

1978 год

1. Агафонов К. П.
2. Барыков А. Б.
3. Боброва Л. П.
4. Гончаров В. А.
5. Есинов В. В.
6. Иванов А. Ю.
7. Киселев А. Б.
8. Кухтин Е. В.
9. Никитина В. П.
10. Парахина О. В.
11. Покровская И. В.
12. Пыльский И. П.
13. Селивончик В. В.
14. Триандафилов Р. И.
15. Тропин Н. Л.
16. Фалл Усман
17. Хохлушина Т. Н.
18. Чайка Т. И.
19. Шуган И. В.
20. Яковлева И. И.

1979 год

1. Апальков В. В.
2. Байков Р. А.
3. Бондаренко В. И.
4. Веселовский А. М.
5. Горобчук Г. Г.
6. Горюнов В. Ю.
7. Джиноева М. И.
8. Захарова Л. В.
9. Знова О. П.
10. Зыонг Нгок Хай
11. Колпаков В. П.
12. Костенников Н. В.
13. Мухаметшина М. С.

14. Нгуен Туе Хунг
15. Пономарев И. П.
16. Порошин Б. В.
17. Порошина Н. Л.
18. Талыбин А. Н.
19. Третьяков П. В.
20. Филев К. С.

1980 год

1. Аванесян Г. Т.
2. Величкина Н. Е.
3. Доржиева И. Д.
4. Дубков Н. Г.
5. Душин В. Р.
6. Ефимов С. Н.
7. Кузнецова Н. Е.
8. Луконин А. В.
9. Мартыненко М. А.
10. Махора Л.
11. Митрохович В. В.
12. Николаев О. А.
13. Оганян Т. Х.
14. Прокофьев А. В.
15. Сидоров Г. Ф.
16. Тохтамышев Ф. И.
17. Шмаков М. В.
18. Шувалова
19. Юхименко А. В.

1981 год

1. Бессонова Т. М.
2. Булатова Л. В.
3. Булгакова Н. Н.
4. Геймур Г. А.
5. Еремеева А. Б.
6. Еременко Б. М.
7. Зюзин Ю. М.
8. Киселев А. А.
9. Ковтуненко Л. П.
10. Корчагин А. М.
11. Куксенко Д. Б.
12. Любченко В. И.
13. Матвиенко А. И.
14. Мацукатов В. А.
15. Михайлов А. Т.
16. Моргунов Ю. А.
17. Романенко Ю. Н.
18. Симошин А. Е.
19. Степин И. Д.
20. Теплова Н. В.
21. Тимофеев С. А.
22. Хойман П.
23. Хорошко О. В.
24. Чолаков Р. О.
25. Швецов Г. А.
26. Ясюнас О. Э.
27. Яцков А. П.

1982 год

1. Айдосов Г. А.
2. Асланян В. Н.
3. Билецкая Л. Ю.
4. Воейков И. В.
5. Герда Г. М.
6. Голубенкова Г. Е.
7. Грунин Е. Б.
8. Дехтяренко Л. А.
9. Драгунина А. А.
10. Захарцев А. В.
11. Козлов В. П.
12. Кононов А. Н.
13. Кравченко М. Н.
14. Мирзаахмедов М. М.
15. Миронова М. Ю.
16. Музипов Р. М.
17. Муратова Т. В.
18. Петров С. А.
19. Романова С. В.
20. Самойлова Н. Д.
21. Скурыгин Е. Ф.
22. Фадеева Е. П.

1983 год

1. Алешин В. В.
2. Балекова М. В.
3. Баринов В. С.
4. Белехов С. А.
5. Богданов В. И.
6. Богданова Е. В.
7. Бузыцкая Г.
8. Гамарц Л. А.
9. Дегтярев А. В.
10. Дубровина И. И.
11. Жуковин В. А.
12. Кабилов М. М.
13. Климович
14. Колюжная Л. Ф.
15. Корчагина Н. В.
16. Лекомцев В. С.
17. Митрохина О. Н.
18. Модов В. Г.
19. Нажмитдинов А. А.
20. Никифорович А. Э.
21. Прокудина С. Н.
22. Саксин Ю. П.
23. Семенов Г. Л.
24. Трофимов В. В.
25. Турдиев Ш. Г.
26. Хрестина А. В.
27. Хронов Н. В.
28. Шевелев А. Ю.

1984 год

1. Баринова Г. П.

2. Беляева А. Г.
3. Валиева Ф. Ф.
4. Галиева Л. Р.
5. Ганиев О. Р.
6. Жалилова Л. Г.
7. Забродоцкий Н. Г.
8. Зиннатулин И. С.
9. Демьянов А. Ю.
10. Димитриенко (Байбакова) И. Д.
11. Кашин Д. В.
12. Ковалевская (Иванова) Н.В.
13. Мешкова (Гурова) И. Е.
14. Митенкова И. Е.
15. Нерченко А. А.
16. Нерченко (Некрасова) М.М.
17. Никитин В. Ф.
18. Полевой О. Н.
19. Присмакова Т. М.
20. Скоромнюк (Саенко) Т.Т.
21. Сырцов С. А.
22. Тригуб А. Н.
23. Целищева Е. П.
24. Чернышенко М. В.
25. Чернышенко Ю. А.

1985 год

1. Ануфриева Л. А.
2. Боколишвили И. Б.
3. Дудорова М. Г.
4. Жуковец В. М.
5. Журавлев В. Ю.
6. Засимук Т. Н.
7. Золкин Н. Н.
8. Кондухова (Константинова) Е.Г.
9. Михайлов А. Х.
10. Репин И. В.
11. Спорынина Л. В.
12. Терскова С. Г.
13. Финькова Н. А.
14. Хафизов Г. Р.
15. Церковников А. Ю.

1986 год

1. Ахмедов Э. А.
2. Булгару Ф. Ш.
3. Галин Д. Г.
4. Жиренов Г. С.
5. Звягин О. Д.
6. Зубков А. Ф.
7. Кабак Н. Е.
8. Ковалева Н. М.
9. Кузьмин О. В.
10. Лаврентьева Н. Н.
11. Малыгина М. Е.
12. Мешкова О. Н.
13. Молотовник М. П.
14. Ожог С. Н.
15. Перфильева В. Ю.
16. Преображенский А. Н.
17. Рева С. Н.
18. Рудницкий В. Ф.
19. Сагитов Р. И.
20. Сагитов Р. Р.
21. Чаркин С. М.
22. Шишкин В. В.
23. Щелина Л. Е.
24. Щетинин И. Ю.
25. Юзефович О. Б.
26. Яшнева О. Н.

1987 год

1. Борисов И. А.
2. Борисова В. Е.
3. Борозин М. А.
4. Быков А. И.
5. Кадыков А. А.
6. Казаков С. В.
7. Капустняк Г. О.
8. Кравец С. И.
9. Кулмедова Г. С.
10. Макарова В. Б.
11. Марьин А. В.
12. Михеева Е. В.
13. Нараленкова И. И.
14. Нестеров Д. А.
15. Ожерелков А. В.
16. Ожерелкова Л. М.
17. Очеретяный С. А.
18. Павлов А. В.
19. Резванов Р. Г.
20. Рудаков Д. А.
21. Румянцев О. П.
22. Рыжков С. В.
23. Самойлов А. Б.
24. Сологубов В. В.
25. Тарба В. Г.
26. Топорова С. Л.
27. Филиппов В. В.
28. Филиппова Н. Н.
29. Филиппова Т. И.
30. Черезов В. В.
31. Шафиков Р. Ф.

1988 год

1. Антонов С. И.
2. Бахтин Ю. Ю.
3. Белютин С. В.
4. Бердюгин А. Г.

5. Богданова И. Н.
6. Бондарь О. В.
7. Ватунская И. Ю.
8. Дятлова О. В.
9. Егоров Б. Б.
10. Зимин А. В.
11. Козлов А. Ю.
12. Мошков С. Н.
13. Наумова А. Д.
14. Негматов И. Д.
15. Пузанов Е. Б.
16. Романов И. Н.
17. Руденя Н. Р.
18. Сапегин С. В.
19. Сафаргулова С. И.
20. Скребнев М. Ю.
21. Третьяков Д. В.
22. Хайретдинов Р. Н.
23. Шатохин А. Л.
24. Шафикова Е. Ж.

1989 год

1. Воробьев П. В.
2. Золовкин Н. А.
3. Иванюта А. А.
4. Кузин В. А.
5. Морареску Н. Ю.
6. Познанский В. А.
7. Сагитов А. Т.
8. Сагитова Н. В.
9. Свиридова А. В.
10. Фоломеев В. И.
11. Фоломеева Е.

1990 год

1. Ануфриева Е. Б.
2. Борисова Л. А.
3. Зубина О. В.
4. Котова В. В.
5. Мокин Д. В.
6. Павлова С. В.
7. Толмачев Д. А.
8. Фатьянова О. В.
9. Шокурова С. В.

1991 год

1. Алексеев А. В.
2. Алексеева Н. А.
3. Афанасьев А. А.
4. Афанасьев В. В.
5. Афанасьева М. Ю.
6. Белова С. С.
7. Берегулько П. Н.
8. Вонарх Е. Г.
9. Григорян Г. С.
10. Денискин Р. В.
11. Загорский А. Я.
12. Иванова Н. М.
13. Кисса Т. А.
14. Колесников А.
15. Конкина Н. В.
16. Кули-Заде Л. А.
17. Литвинов М. Б.
18. Лысов С. В.
19. Лысова В. М.
20. Любимцева Е. М.
21. Марченков А. П.
22. Михайловская А. С.
23. Мокина Н. В.
24. Муджири М. Г.
25. Пашнов А. А.
26. Подгорнова Ж. С.
27. Путера М. М.
28. Разумный А. И.
29. Руньковский В. Г.
30. Селиверстов П. В.
31. Стреляев Ю. М.
32. Халафов Д. Д.
33. Черкасов С. С.
34. Чугункова Е. В.

1992 год

1. Азизов Г. А.
2. Аксенов А. И.
3. Бодров В. Б.
4. Брехов Н. М.
5. Василенко А. В.
6. Витюк В. Н.
7. Вомпе А. Г.
8. Гапачило Л. Б.
9. Жебровская Ю. А.
10. Карельский К. В.
11. Колесникова И. В.
12. Костюк С. В.
13. Кулыгина В. Г.
14. Лебедев М. Н.
15. Максимов В. И.
16. Морареску И. Л.
17. Пугачев В. В.
18. Разумовский В. И.
19. Рогова Е. И.
20. Родионов А. В.
21. Руньковская О. Н.
22. Стоянова Т. А.
23. Терехин В. А.
24. Ульянова О. В.
25. Уткин Д. В.
26. Южаков В. В.
27. Яковлева Н.
28. Янукян Э. Г.

1993 год

1. Аббасов Х. А.
2. Аксентьев С. Л.

3. Андронов П. Р.
4. Васильев А. А.
5. Касьяненко Д. А.
6. Левин С. В.
7. Лукашин А. Ю.
8. Максименко А. И.
9. Марченков А. П.
10. Нигматулин Т. Р.
11. Нищев Д. Л.
12. Однодворцева А. А.
13. Паршин А. В.
14. Пикулова Е. Н.
15. Рогожин А. А.
16. Смирнова Н. А.
17. Трифонов А. В.
18. Трофимов А. В.
19. Филатов О. В.
20. Хомичева С. Е.
21. Чукин И. Ю.

1994 год

1. Богомолов А. Н.
2. Бучнева В. Ю.
3. Гладышева Е. В.
4. Гримза А. Ю.
5. Губайдулин А. А.
6. Дубровский Д. Е.
7. Журавский И. С.
8. Калинин О. В.
9. Крылова С. В.
10. Кульчицкая (Жильцова) Н. Б.
11. Кульчицкий А. В.
12. Кутлярова Н. В.
13. Кутнер О.
14. Любимова Л. Р.
15. Малинковская И. Ю.
16. Мартинес А.
17. Мошин А. Ю.
18. Орешина И. В.
19. Резник О. С.
20. Федотов М. Л.
21. Чкалов А. Н.
22. Шендрик А. Г.
23. Юришич И.

1995 год

1. Бухалов Б. В.
2. Зудин М. Ю.
3. Кислова Н. В.
4. Коломенская Е. В.
5. Леванков И. В.
6. Лесюк Е. В.
7. Лим И. В.
8. Сысоев П. В.
9. Темненков К. Д.
10. Чеботов В. И.

1996 год

1. Анисов Э. Б.
2. Баранов О. Ю.
3. Басиева И. Т.
4. Бушуев Б. Е.
5. Воронин В. И.
6. Гирич А. Л.
7. Дзенкевич Д. А.
8. Душнова К. И.
9. Ем Р. К.
10. Жариков П. А.
11. Захаров О. Г.
12. Зверев Н. Н.
13. Зимаков А. Н.
14. Клюка В. И.
15. Комарова А. В.
16. Корюкин Ю. Р.
17. Рогожин М. В.
18. Чаплыгина К. Н.

1997 год

1. Бабанина О. Ю.
2. Ващенко О. А.
3. Габуния Л. Э.
4. Ким М. Г.
5. Коломенская Ю. В.
6. Коннов С. Б.
7. Кудрявцева О. В.
8. Куинджи Н.
9. Марков С. Н.
10. Матушко Г. В.
11. Павлова Е. С.
12. Радичкина О. В.
13. Степанов Д. М.
14. Тимофеева Т. А.
15. Толмачев С. В.

1998 год

1. Вальехо-Роман А. М.
2. Володько О. В.
3. Глазкова Ж. Н.
4. Гришаев В. М.
5. Клунная Е. Ю.
6. Норкин А. В.
7. Салабаева Н. А.
8. Сорокин А. Н.
9. Старков А. В.

1999 год

1. Арсагов А. А.
2. Воложанцев Д. Н.
3. Дудецкий А. В.
4. Зацепин А. В.
5. Зуева И. В.
6. Иванченко Е. Б.
7. Кокарева А. В.
8. Полурезова О. Н.

9. Солодухов Ю. О.
10. Токтамысов Д. Ж.
11. Федоров К. П.
12. Чупин М. В.

2000 год

1. Аникина И. В.
2. Джикидзе П. Б.
3. Катасонов А. А.
4. Киселев И. В.
5. Кривошеин А. В.
6. Кучма И.
7. Летникова В.
8. Макаров А.
9. Малянов Д.
10. Матушко А. В.
11. Миронов И. В.
12. Николаев Ю. А.
13. Пекарь Р. Е.
14. Солодилова М. В.
15. Сосновских А. В.
16. Тонкогубов Д. Ю.
17. Усольцев А. В.

2001 год

1. Артамонова О. В.
2. Асташов Н. А.
3. Асташова Е. Г.
4. Афанасьев Е. В.
5. Ахматов Д. М.
6. Бураков Д. В.
7. Варюшкин А. А.
8. Дегтярева А. А.
9. Жаркова Н. В.
10. Зайцев М. В.
11. Комылятова Е. А.
12. Костяев А. А.
13. Кушнарев Д. С.
14. Левин А. В.
15. Нехаева О. В.
16. Попов Я. В.
17. Привальский А.
18. Русаков К. С.
19. Рябчун Л. А.
20. Сорокин С. Б.
21. Фролов С. А.
22. Шаймухаметов А.

2002 год

1. Вагнер А. В.
2. Голенев Д. А.
3. Дверницкий А. А.
4. Дорджиева И.
5. Приходько С. А.
6. Солодилова О. Ю.
7. Суворов А. В.
8. Федотова И. В.
9. Чайка А. А.

2003 год

1. Акулич А. В.
2. Богданов А. В.
3. Борисов А. В.
4. Воротынцев Г. И.
5. Гладких А. Л.
6. Глебов С. М.
7. Заварзина В. С.
8. Лукьянов А. А.
9. Мокрушин П. А.
10. Молчанов А. В.
11. Смирнова Ю. Т.
12. Окс Ф. С.
13. Солодухин Б. А.
14. Фролов А. Д.
15. Фролова Д. В.
16. Черных Т. П.

2004 год

1. Бажул Г. Т.
2. Болдырева Н. В.
3. Дворецкий А. С.
4. Зверев А. Н.
5. Кирюшкин Н. В.
6. Мартынов А. В.
7. Мартынова Е. С.
8. Некрасов С. Ю.
9. Рылов А. С.
10. Тронин А. В.
11. Шалина (Чистякова) А. А.
12. Щербатюк Т. Б.

Глава 7

НАУЧНЫЕ РАБОТЫ СОТРУДНИКОВ КАФЕДРЫ

Деформации и разрушение горных пород (о кольцевой прочности)

Шемякин Е. И.

1. В задачах механики горных пород основной является задача о прочности (устойчивости) горных пород в окрестности подземной выработки. Основной моделью для таких рассуждений является круговая выработка определенного диаметра, на заданной глубине и ориентировке относительно главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3 in situ со своими главными направлениями. Обсуждается новый набор системы инвариантов для описания напряженно-деформированного состояния горных пород в этом случае.

2. Самым ответственным моментом в создании такой выработки как подземного сооружения является изменение соотношений между главными напряжениями в окрестности выработки по отношению к исходному (главные направления при этом будем считать неизменными). Если принять пока для простоты, что на глубинах 1 – 2 – 3 км исходное напряженное состояние (in situ) было равномерным гидростатическим

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p \tag{1}$$

где p — литостатическое давление, то после проходки выработки, будь то скважина (горизонтальная или вертикальная) или шахтный ствол, напряженное состояние изменится.

Важно отметить, что это изменение есть отражение законов равновесия (или динамики, квазистатики в процессе проходки или бурения). Так, например, если главные направления напряженного состояния σ_1, σ_2, σ_3 выбрать в соответствии с цилиндрической системой координат горизонтальной выработки, то в ходе подготовки выработки (скважины) *обязательно* происходят два процесса [1, 2].

- Первый из них связан с тем, что радиальное напряжение обязательно падает по величине и, даже если со стороны выработки (скважины, например) оказывается возможным организовать подпор, по величине *меньший*, чем было радиальное напряжение до проходки скважины. Этот основной эффект приводит к тому, что в окрестности выработки возникает некоторый объем — «кольцо» горной породы, несущее основную нагрузку по сдвиговой прочности. В отличие от привычных для небольших глубин это кольцо не примыкает к выработке, а удалено на некоторое расстояние в несколько радиусов выработки. Обычно эту зону — кольцо называют зоной опорного давления, имея ввиду в основном то, что это кольцо воспринимает нагрузку на выработку.

- Механизм передачи усилий связан со сдвиговой прочностью горного массива (рис. 2 и рис. 3), при этом в зависимости от параметра Лодэ μ_σ (рис. 2) — это прочность и по другим площадкам скольжения, на которых может повториться та же связь между T и Г, что и на основной площадке.

- Второй частью процесса является развитие касательных напряжений за счет различия в главных напряжениях возникающего состояния. Так, в рассматриваемом примере (вертикальная выработка — скважина в равномерном in situ напряженном состоянии) возникают касательные напряжения, которых не было до работ, а именно: [1, 4]

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2T_{13} = 2T \qquad \sigma_1 - \sigma_2 = 2T_{12} \qquad \sigma_2 - \sigma_3 = 2T_{23} \tag{2}$$

если, например,

$$\sigma_\varphi \geq \sigma_z \geq \sigma_r \tag{3}$$

в окрестности вертикальной выработки.

Это рассуждение не связано с традиционными взглядами на прочность горных пород, а, скорее, восходит к Т. Карману [2], который считал, что при переходе от исходного (возможно, упругого) состояния, вместе с ростом разности по величине $T = T_{13}$ не обязательно σ_z теряет свою (упругую?) связь, существовавшую до проходки выработки или скважины. Возникновение анизотропии сопротивления сдвигам в результате роста касательных напряжений и изменения сопротивления сдвигам является едва ли не самым примечательным механическим эффектом создания выработок в горном массиве [2, 3].

Поэтому, естественно до детального подробного анализа различных вариантов (негидростатическое исходное напряженное состояние, горизонтальная или вертикальная скважина, слоистость окружающего массива и его блочная структура) обратить внимание на этот основной процесс — изменение сопротивления сдвигу на различных площадках, включая новые современные элементы: появление ниспадающей ветви (post-break behavior of rock under loading) со всеми эффектами парадоксального для сплошной среды проявлениями.

3. Таким образом, изучение напряженно-деформированного состояния в окрестности выработки сведено к исследованию *сдвиговой* прочности горного массива как

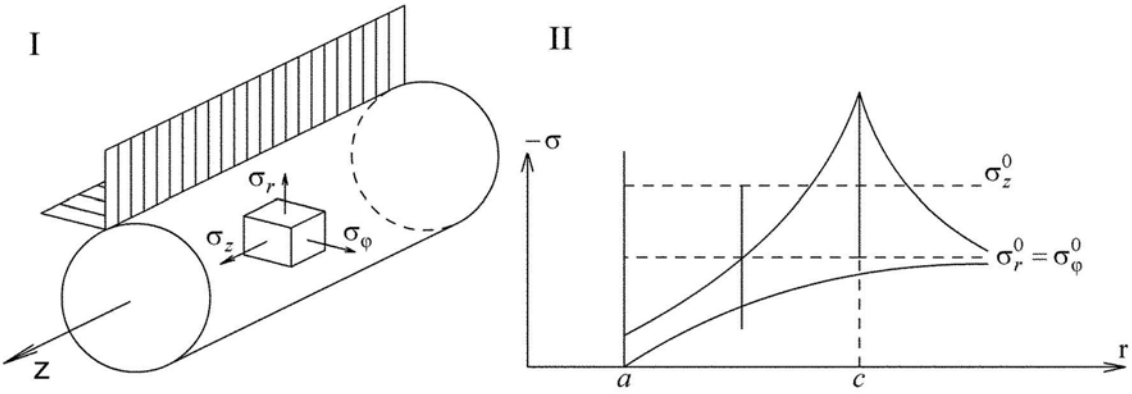


Рис. 1: Напряженное состояние в окрестности скважины (выработки) на большой глубине $P \approx 2T_{max}$; указаны основные площадки скольжения, определяющие прочность массива и его деформирование до разрушения

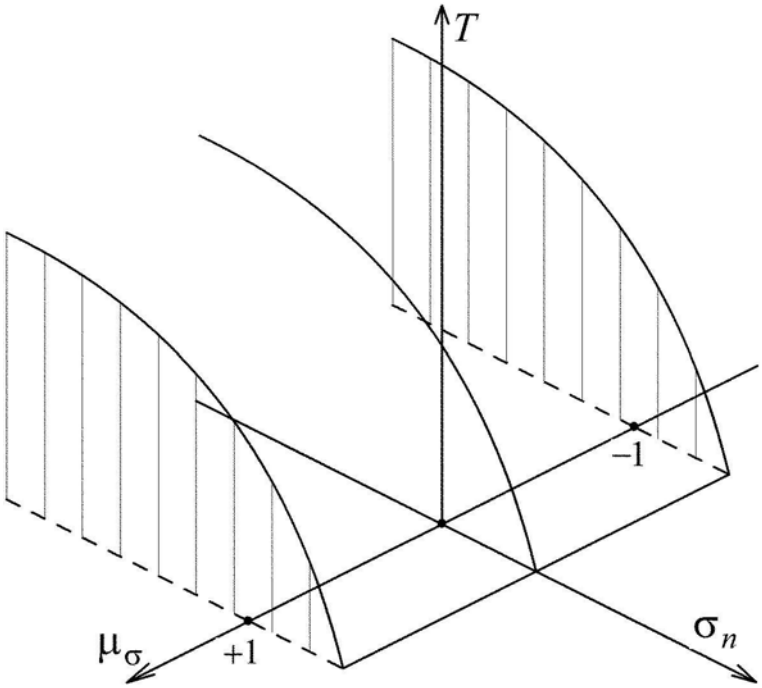


Рис. 2: Паспорт прочности пород $\sigma_n = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$, $\mu_\sigma = \dfrac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$

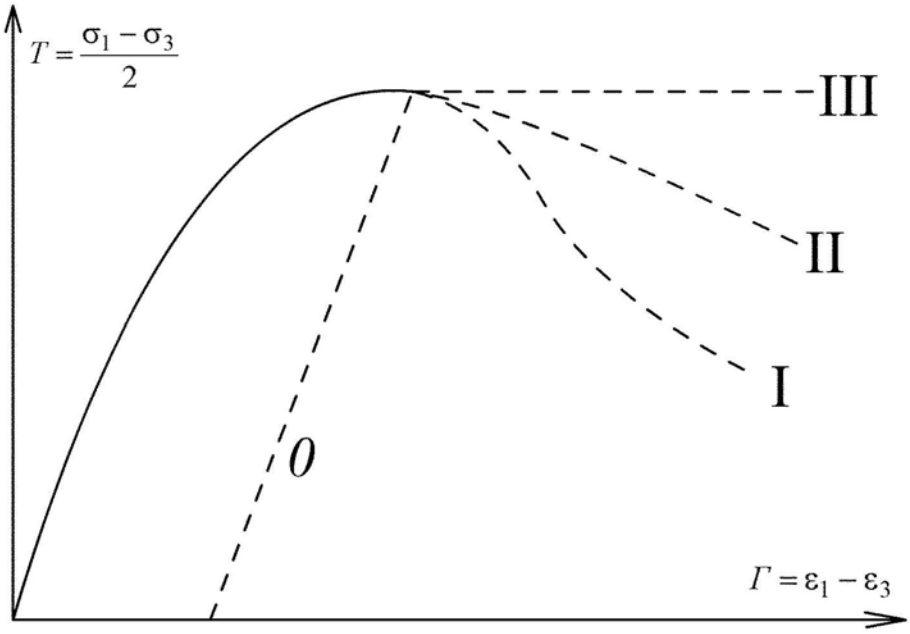


Рис. 3: Связь максимальных касательных напряжений T и деформаций сдвига Г; кривые I, II и III указывают на масштабный эффект

определенного свойства такой сплошной среды. Поэтому основное внимание будет уделено так называемому паспорту прочности горных пород в духе работ [2, 4], описывающему инвариантное представление сдвиговой прочности твердых тел.

При этом изменение объема, включая критическое разрыхление до вывала в обнаженное пространство, будет связано с эффектом *дилатансии* — изменением объема, связанным также со сдвигом. Это изменение объема позволит ввести в рассмотрение фильтрацию жидкости и газа (нефти и конденсата, в том числе) в окрестности скважины (выработки), подвергнутом изменению напряженного деформированного состояния.

Рассмотрим прежде основные особенности сдвигового деформирования, принимая первой гипотезу Т. Кармана, что наступление предельной деформации сдвига на основных площадках с касательными напряжениями T не нарушает упругих (или других подобных) связей между напряжениями и деформациями во втором главном направлении. В этом приближении можно считать, что на системах площадок с напряжениями T_{12} и T_{23} повторится (возможно, с некоторыми вариациями) та же самая ситуация, что и на главных площадках с касательным напряжением $T = T_{13}$. Поэтому рассмотрим внимательнее поведение среды при сопротивлении сдвигу на диаграмме $T = T(\Gamma)$ (рис. 3) где T_{13} — максимальное касательное напряжение, а $\Gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$ (при совпадающих главных направлениях напряженного и деформированного состояния) [2]. На этом рисунке из [4] представлены описательные результаты реальных испытаний опытных образцов грунтов (в том числе с эквивалентными материалами) и горных пород [6]. После практически обратимых деформаций до пика

касательных напряжений сопротивление сдвигу с постом деформаций падает, иногда это послепиковое поведение называют *разупрочнением*.

Это — самый важный для современных задач горного дела и механики грунтов участок необратимого поведения горной среды, который стал доступным после создания «жестких» машин для испытаний грунтов и горных пород, взамен машин с заданным нагружением по усилиям (напряжениям) [5].

Что обнаружилось в этих новых результатах, по мнению автора?

Первое. Возникновение структуры в изначально однородном и изотропном материале, вполне согласованной с подготовленными площадками максимальных касательных напряжений (возможно, с учетом трения по площадкам реального скольжения).

Второе. Несимметрия функционирования площадок скольжения (в отличие от предсказаний механики сплошной среды), которая явно проявляется уже при малых деформациях и является основным процессом при развитии деформаций вплоть до разрушения.

Третье. В области, где элементы горной породы и грунтов находятся в послепиковом состоянии (иногда это состояние и называют *запредельным состоянием разупрочнения* деформация в целом, в конечном объеме осуществляется как скольжение блоков (практически жестких) друг по другу с вращением относительно друг друга так, чтобы составить квази-сплошную среду. Это новое представление о деформации грунтов и горных пород за счет сдвигов и преодоления прочности на сдвиге сводится к тому, что в рассматриваемом конечном объеме *реально* проявляются площадки скольжения, разделение тела на блоки и, значит, несущая способность такой среды должна рассчитываться по этой схеме вплоть до разрушения среды.

Введение новой группы инвариантов, описывающих напряженно-деформированное состояние горной породы в окрестности подземной выработки (скважины) пригодно, конечно, в силу инвариантности и для других ситуаций в горном массиве.

В соответствии с этим вместо (1) или аналогичных утверждений, предлагается рассмотреть три инварианта [4]

$$T = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \qquad \sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \qquad \mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что этот набор инвариантов является новым, т.к. он опирается на параметры T и σ_n, и старым, т.к. вводит в рассмотрение параметр Лодэ-Надаи, характеризующий роль прочности массива по другим площадкам T_{12} и T_{23} [2, 4]

$$\mu_\sigma = \frac{T_{23} - T_{12}}{T}. \tag{5}$$

Это простое физическое истолкование, по-видимому, более адекватно обсуждению вопросов о прочности твердых тел [5].

Набор инвариантов (4), конечно, представляет определенные удобства при оценке прочности массива в конкретных ситуациях (так, например, сечение поверхности

$T(\sigma_n, \mu_\sigma)$ при $\mu_\sigma = 0$ дает вполне удовлетворительное описание огибающей кругов Мора, как это широко принято) рис. 2.

Но этого недостаточно. Достижение предельного напряженного состояния (в смысле величин (4)) недостаточно для суждения о достижении предела прочности или исчерпании несущей способности сплошной среды в конкретных ситуациях (в окрестности скважины, выработки, на откосе, при оползнях и т.д.).

Главным дополнительным рецептом исследования послепикового поведения горных пород является исследование деформаций (рис. 3)

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3. \tag{6}$$

Если при последовательном нагружении исходного (in situ) состояния не возникает вопрос ни о соответствии знаков в (3) и (6), ни о соответствии главных направлений напряженного и деформированного состояний, то в целом для характеристики необратимых деформаций и разрушения необходимо также ввести три новых инварианта:

$$\Gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \qquad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \qquad \mu_\varepsilon = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}. \tag{7}$$

И дело здесь не только в том, что $T = T(\Gamma)$ — зависимость, которая должна быть определена в «чистых» условиях, т.е. при $\mu_\sigma = \mu_\varepsilon = 0$, в состоянии основного сопротивления материала сдвигу, а еще и в том, что на ниспадающей ветви напряжения и деформации *не связаны* между собой однозначной зависимостью (вспомните идеальную пластичность!), а представляют независимо и по отдельности определяемые из законов механики величины:

- **напряжение** (усилие) определяется из законов равновесия или движения;
- **деформации** — из законов сохранения массы с учетом дилатансии [6].

В целом напряженное состояние в окрестности слабо подкрепленного пласта в окрестности скважины оказывается близким к состоянию чистого сдвига $\mu_\sigma = 0$.

Это явление до сих пор не получило бы признания, если бы не работы наших теоретиков в области механики грунтов и горных пород [1, 6]. Дело в том, по нашему мнению, что непонимание этого явления связано с отсутствием опытных фактов и наблюдений за поведением материалов на ниспадающей ветви. Поэтому очевиден наш интерес к ниспадающей ветви на диаграмме $T = T(\Gamma)$ (а, как следствие, и на диаграмме $\sigma = \sigma_\varepsilon$ одноосного сжатия).

В области $T > T_{max}$ (послепиковое давление) развиваются не только общие деформации, но и деформации сдвига (а, значит, и дилатансия) — и этот эффект в изменении объема (сумма изменений объема за счет изменения среднего напряжения и изменения объема за счет сдвига) оказывается самым существенным. Трудно переоценить эту гипотезу по сравнению с другими (изменение объема скелета, объема пористости, эффекта проницаемости), т.к. проявление площадок скольжения,

связанной с ним дилатансии, является, по-видимому, основной причиной для закона фильтрации. Изменение объема вследствие дилатансии оказывается в интересующей нас области (для задач нефти и газа) генеральным [1, 6].

Последние работы [4, 5] показали, что продолжаются исследования в этом же направлении, но пока отсутствует влияние μ_σ и детальное изучение структуры материала при послепиковом поведении.

Литература

[1] *Христианович С. А., Желтов Ю. П.* О гидравлическом разрыве нефтеносного плста. — Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 5.

[2] *Христианович С. А., Шемякин Е. И.* К теории идеальной пластичности. — МТТ, 1967, № 5.

[3] *Христианович С. А., Шемякин Е. И.* О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении. — МТТ, 1969, № 5.

[4] *Шемякин Е. И.* Об инвариантах напряженного и деформированного состояния в математических моделях сплошной среды. — ДАН, 2000, т.373, № 5.

[5] *Шемякин Е. И.* Синтетическая теория прочности. — Физическая мезомеханика, 1999, т.3, № 6.

[6] *Стажевский С. Б.* Приложение механики сыпучих сред к решению некоторых задач механики горных пород. — ФТПРПИ, 1987, № 3.

О расклинивании упругой среды

Звягин А. В.

1. Введение

Задачи о движении тел в различных средах в связи с практическими потребностями рассматриваются в механике с самого начала ее развития. Не является исключением и задача движения тела в упругой среде.Качественные характеристики задачи движения тела с дозвуковой скоростью по отношению к скорости волн Рэлея рассматривалась в [1]. Во многом родственные контактные задачи о движениии штампов рассматривались в работе [2]. В работе [3] автор рассматривал движение тела со скоростью, большей скорости волн Рэлея. Несмотря на это, многие аспекты данной проблемы требуют дальнейших исследований, поскольку с практической точки зрения необходимо эффективное построение аналитического решения. В данной работе предлагается метод решения, позволяющий достаточно эффективно построить решение при дозвуковом и сверхзвуковом режиме движения расклинивающего тела.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении в упругой среде с плотностью ρ и упругими постоянными λ, μ тонкого твердого симметричного тела. Будем считать, что тело двигается с постоянной дозвуковой скоростью V_o вдоль оси Ox в отсутствии сил трения, а движение среды плоско-параллельное (рис. 1).

Воспользуемся представлением Ляме для вектора перемещений

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{1}$$

Потенциалы вектора перемещений ϕ, ψ для продольных и поперечных волн, скорости которых равны соответственно a и b, удовлетворяют волновым уравнениям

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \qquad \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \tag{2}$$

$$a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \qquad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

При этом компоненты тензора напряжений выражаются [2] через потенциалы φ, ψ

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y},$$

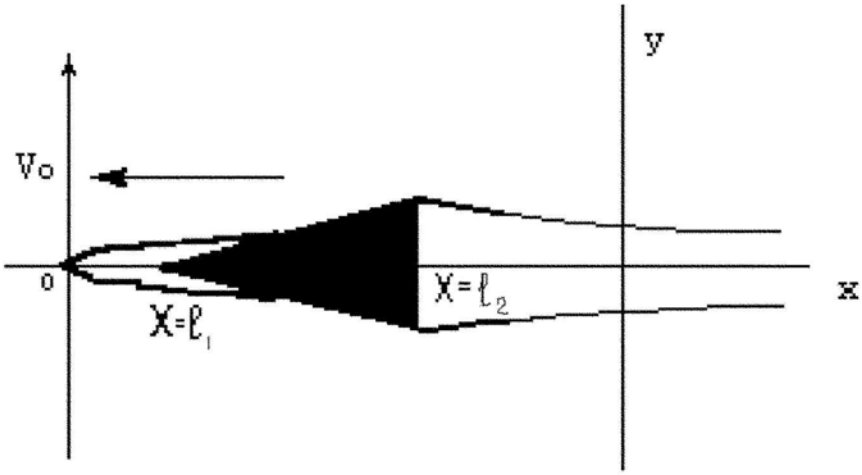


Рис. 1: Движение тела в упругой среде. V_o – скорость тела

$$\sigma_{yy} = \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \tag{3}$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right).$$

В подвижной системе координат, связанной с телом, движение можно считать установившимся, поэтому если перейти к новым переменным

$$x^* = x + V_o t, \quad y^* = y, \quad t^* = t, \tag{4}$$

искомые функции не будут явно зависеть от времени, а дифференциальные операторы изменятся по следующей форме

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^*}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y^*}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = V_o \frac{\partial}{\partial x^*}. \tag{5}$$

С учетом правил (4),(5) волновые уравнения (2) преобразуются к виду

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \beta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad \alpha^2 = 1 - \frac{V_o^2}{a^2}, \quad \beta^2 = 1 - \frac{V_o^2}{b^2}. \tag{6}$$

Здесь и в дальнейшем (*) не пишутся для упрощения записи. Без ограничения общности можно перейти к безразмерным переменным, в которых область контакта тела со средой будет иметь на оси Ox координаты $x = l_1$ – начало контакта и $x = l_2$ – отрыв среды от поверхности тела.

Скорость движения тела может быть больше или меньше скорости волн Рэлея. В зависимости от этого меняется характер движения. Как показано в [3], при движении со скоростью большей скорости волн Рэлея реализуется безотрывное движение в окрестности режущей кромки клина, а затем в зависимости от геометрии тела

происходит отрыв среды от его поверхности. В этом случае начало области контакта совпадает с началом координат, т.е. $l_1 = 0$. При движении тела со скоростью меньшей скорости волн Рэлея среда растрескивается перед телом и характер движения будет другим (рис. 1). В силу симметрии тела задачу можно рассматривать только для верхней полуплоскости, при этом должны быть выполнены следующие граничные условия: 1).На поверхности контакта тела со средой условия безотрывности обтекания $v_n = V_o \cdot \operatorname{tg}\gamma$ и отсутствие сил трения $\sigma_{n\tau} = 0$.
2).На свободной поверхности равенство нулю вектора напряжений $\sigma_{nn} = 0, \sigma_{n\tau} = 0$.
3).На остальной части оси Ox в силу симметрии равны нулю напряжение σ_{xy} и составляющая скорости V_y.

Если линеаризовать и снести граничные условия на невозмущенную границу $y = 0$ и считать, что контакт тела со средой будет в области $l_1 < x < l_2$, граничные условия можно записать в следующем виде

$$\begin{array}{l} 1 < x \quad \sigma_{xy} = 0,\ \sigma_{yy} = 0; \\ l < x < 1 \quad \sigma_{xy} = 0,\ V_y = V_o \operatorname{tg}\gamma; \\ 0 < x < l \quad \sigma_{xy} = 0,\ \sigma_{yy} = 0; \\ x < 0 \quad \sigma_{xy} = 0,\ V_y = 0. \end{array} \tag{7}$$

3. Построение решения

Для построения решения воспользуемся функциями комплексных переменных, которые, удовлетворяя уравнениям движения, позволяют свести задачу их определения к классическим краевым задачам ТФКП [5]. Уравнениям (6) удовлетворяют функции $\varphi = \Re\Phi(z_1)$ и $\psi = \Re\Psi(z_2)$, где $\Phi(z_1)$, и $\Psi(z_2)$ – аналитические функции своих комплексных аргументов $z_1 = x + i\alpha\, y,\ z_2 = x + i\beta\, y$. Знак $\Re$ обозначает действительную, а $\Im$ – мнимую часть комплексного числа.

Отметим, что производные функций φ, ψ в силу условий Коши-Римана будут такими:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \Re\Phi'(z_1),\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\alpha\Im\Phi'(z_1),\ \frac{\partial\psi}{\partial x} = \Re\Psi'(z_2),\ \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\beta\Im\Psi'(z_2).$$

Тогда компоненты скорости и тензора напряжений можно выразить при помощи введенных функций комплексного переменного

$$\begin{aligned} \frac{V_x}{V_0} &= \Re\Phi'' - \beta\cdot\Im\Psi''; \\ \frac{V_y}{V_o} &= -\alpha\cdot\Im\Phi'' - \Re\Psi''; \\ \frac{\sigma_{xx}}{\mu} &= \left(2\alpha^2 + 1 - \beta^2\right)\Re\Phi'' - 2\beta\cdot\Im\Psi''; \\ \frac{\sigma_{yy}}{\mu} &= -\left(1 + \beta^2\right)\Re\Phi'' + 2\beta\Im\Psi''; \\ \frac{\sigma_{xy}}{\mu} &= -2\alpha\Im\Phi'' - \left(1 + \beta^2\right)\Re\Psi''. \end{aligned} \tag{8}$$

Учитывая выражения (8) и граничные условия (7), получим для определения аналитических функций $\Phi(z_1), \Psi(z_2)$ следующую краевую задачу:

при $y = 0, \quad x > l_2$:

$$\begin{aligned} &2\alpha \Im \Phi''(x) + (1+\beta^2)\Re \Psi''(x) = 0, \\ &-(1+\beta^2)\Re \Phi''(x) + 2\beta \Im \Psi''(x) = 0; \end{aligned}$$

при $y = 0, \quad l_1 < x < l_2$:

$$\begin{aligned} &2\alpha \Im \Phi''(x) + (1+\beta^2)\Re \Psi''(x) = 0, \\ &\alpha \Im \Phi''(x) + \Re \Psi''(x) = -\operatorname{tg}\gamma. \end{aligned} \tag{9}$$

при $y = 0, \quad 0 < x < l_1$:

$$\begin{aligned} &2\alpha \Im \Phi''(x) + (1+\beta^2)\Re \Psi''(x) = 0, \\ &-(1+\beta^2)\Re \Phi''(x) + 2\beta \Im \Psi''(x) = 0; \end{aligned}$$

при $y = 0, \quad x < 0$:

$$\begin{aligned} &2\alpha \Im \Phi''(x) + (1+\beta^2)\Re \Psi''(x) = 0, \\ &\alpha \Im \Phi''(x) + \Re \Psi''(x) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку первое условие (9) выполняется на всей оси x можно искать функцию Ψ в виде

$$\Psi(z) = \frac{2\alpha}{1+\beta^2}\, i\, \Phi(z). \tag{10}$$

(10) Подстановка (10) в (9) приводит к следующей краевой задаче типа Римана-Гильберта [6] для функции Φ'' для полуплоскости $y > 0$. Необходимо определить аналитическую функцию по заданным условиям на границе полуплоскости, т.е. при $y = 0$:

$$\begin{aligned} &x > l_2: \quad \Re \Phi''(x) = 0; \\ &l_1 < x < l_2: \quad \Im \Phi''(x) = -\frac{1+\beta^2}{\alpha(1-\beta^2)} \operatorname{tg}\gamma; \\ &0 < x < l_1: \quad \Re \Phi''(x) = 0; \\ &x < 0: \quad \Im \Phi''(x) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Применим к полученной краевой задаче операцию регуляризации, т.е. будем искать функцию $T(z) = \sqrt{z}\sqrt{(z-l_1)/(z-l_2)} \cdot \Phi''(z)$. Для новой функции $T(z)$ задача сводится к классической задаче Дирихле для полуплоскости $y \geq 0$:

$$\Re T(x) = f(x), \quad \text{где} \quad f(x) = 0, \quad \text{если} \quad x < l_1 \quad \text{или} \quad x > l_2, \quad \text{и}$$

$$f(x) = -\sqrt{\frac{x(l_2-x)}{x-l_1}}\, \frac{1+\beta^2}{\alpha(1-\beta^2)}\, \gamma(x) \qquad \text{при} \quad l_1 < x < l_2.$$

Тогда, учитывая, что решение задачи Дирихле для полуплоскости $y \geq 0$ определяется интегралом типа Коши [6]

$$T(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)dt}{t-z}, \tag{12}$$

получим следующее решение для функции $\Phi''(z)$

$$\Phi''(z) = -\frac{1+\beta^2}{\alpha\,(1-\beta^2)} \sqrt{\frac{z-l_2}{z(z-l_1)}} \cdot \frac{1}{\pi i} \int_{l_1}^{l_2} \sqrt{\frac{t(t-l_1)}{l_2-t}} \frac{\gamma(t)dt}{t-z}\,. \tag{13}$$

Формально решение задачи сведено к квадратурам, но фактически оно не является завершенным, поскольку решение зависит от параметров l_1, l_2, которые пока не определены. Для их определения необходимо привлечение всех физических аспектов задачи. Примем в качестве критерия разрушения в конце трещины равенство коэффициента интенсивности напряжений σ_{yy} своему критическому значению K_I

$$\lim_{x \to -0} \sqrt{|x|} \cdot \sigma_{yy}(x) = K_I. \tag{14}$$

Используя выражения (8,10), получим при $y = 0$ в окрестности $x = -0$ следующее представление для σ_{yy}

$$\frac{\sigma_{yy}}{\mu} = \frac{\Omega}{\alpha(1-\beta^2)} \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x|}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{l_1}^{l_2} \sqrt{\frac{t-l_1}{l_2-t}} \frac{\gamma(t)\,dt}{\sqrt{t}}.$$

Осредним слабо меняющуюся на отрезке $l_1 \leq t \leq l_2$ функцию

$$\frac{\gamma(t)}{\sqrt{t}} \approx \gamma_o \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2}}$$

и после вычисления интеграла получим следующее условие в носике трещины

$$\frac{\Omega}{\alpha\,(1-\beta^2)} \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} \frac{\gamma_o(l_2-l_1)}{\sqrt{2(l_2+l_1)}} = \frac{K_I}{\mu}. \tag{15}$$

В приведенных выше условиях используется следующее выражение для функции Рэлея:

$$\Omega = 4\,\alpha\beta - \left(1+\beta^2\right)^2.$$

Она меняет знак в зависимости от того, является движение по отношению к скорости Рэлея V_R дозвуковым $V_o < V_R$, или сверхзвуковым $V_o > V_R$ и стремится к нулю при $V_o \to V_R$. Отметим, что при этом для выполнения условий разрушения (15) необходимо, чтобы параметр l_1 также стремился к нулю.

Учитывая формулы Сохоцкого-Племеля получим в области контакта

$$\frac{\sigma_{yy}}{\mu} = \frac{\Omega}{1+\beta^2} \cdot \Re\Phi''(x) = -\frac{\Omega}{\alpha\,(1-\beta^2)} \sqrt{\frac{l_2-x}{x(x-l_1)}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{l_1}^{l_2} \sqrt{\frac{t(t-l_1)}{l_2-t}} \frac{\gamma(t)\,dt}{t-x}. \tag{16}$$

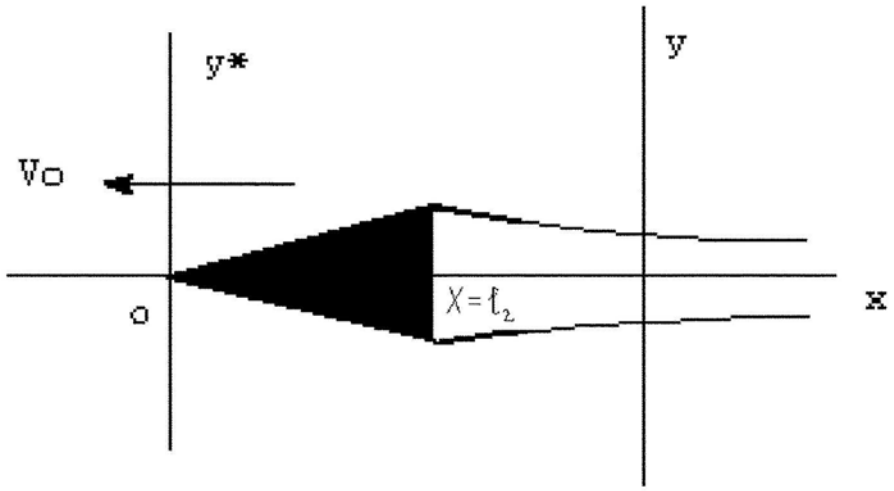


Рис. 2: Сверхзвуковое движение тела

В задаче участвует параметр l_2 – длина области контакта. Этот параметр определяется контуром образующей $y = y_o(x)$ поверхности расклинивающего тела. Точка отрыва среды от контура тела определяется, как показано в [3], условием непрерывности ускорения для плавно смыкающихся контуров, или совпадает с задней кромкой для тел, заканчивающихся угловыми точками. При этом, необходимым условием корректности постановки является условие физического контакта. В области контакта напряжение σ_{yy} должно быть отрицательным, что равнозначно положительному давлению среды на тело. При движении с дозвуковой скоростью физическое условие контакта, т.е. $\sigma_{yy} \leq 0$ выполняется. Таким образом решение задачи сведено к квадратурам.

Движение тела со скоростью превышающей скорость волн Рэлея, но меньшей скорости поперечных волн достаточно подробно рассматривалось в работе [3]. Для сверхзвукового случая движения отсутствует трещина, бегущая впереди тела. А это означает, что параметр $l_1 = 0$. В целом построение решения проводится аналогично и решение в этом случае сводится к следующей краевой задаче для функции $T(z) = \sqrt{z/(z-l_2)} \cdot \Phi''(z)$:

$$\Re T(x) = f(x),$$

где $f(x) = 0$ при $x < 0$ или $x > l_2$ и

$$f(x) = -\sqrt{\frac{t}{1-t}}\,\frac{1+\beta^2}{\alpha\,(1-\beta^2)}\,\gamma(x)$$

при $0 < x < l_2$.

Решением будет функция

$$\Phi''(z) = \frac{1+\beta^2}{\alpha\,(1-\beta^2)}\sqrt{\frac{z-l_2}{z}} \cdot \frac{1}{\pi i}\int_0^{l_2}\sqrt{\frac{t}{l_2-t}}\,\frac{\gamma(t)\,dt}{t-z} \tag{17}$$

В этом случае корневая особенность вблизи режущей кромки тела является устранимой, поскольку интеграл в данном выражении вблизи концевой точки контура $z = 0$ имеет порядок $\sqrt{z} \cdot \ln(z)$ [4].

Подводя итоги можно констатировать, что задача расклинивания упругой среды телом сводится для дозвукового и сверхзвукового случая к квадратурам с особыми сингулярными интегралами, существующими в смысле Коши. Корневая особенность, характерная для задач линейной механики разрушения в случае сверхзвукового расклинивания отсутствует, что означает изменение самого физического механизма разрушения при переходе через скорость волн Рэлея.

Литература

[1] *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* О расклинивании хрупких тел. — ПММ, 24, вып. 4, 1960.

[2] *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1953.

[3] *Звягин А. В.* Дозвуковое движение твердых тел конечных размеров в деформируемой среде и некоторые динамические контактные задачи. — Канд. диссертация, 1979.

[4] *Новацкий В.* Теория упругости. — М.: Изд. Мир, 1975.

[5] *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.

[6] *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи теории упругости. — М.: Изд. АН СССР, 1954.

Переход горения в детонацию в газах

Смирнов Н. Н., Никитин В. Ф.[1]

Без сомнения, среди всех процессов, связанных с горением и взрывом, переход горения в детонацию (ПГД) – один из наиболее интересных. Изучение этого процесса относится к исследованиям в области взрывоопасности газов и паров. Знание механизмов управления возбуждением детонации весьма важно для выработки эффективных превентивных мер, а именно: мер по предотвращению ПГД в случае возгорания газовой смеси, а также методов по остановке детонационной волны в случае, когда она уже образовалась. Представляет значительный интерес в этой связи исследование смесей углеводородного топлива с воздухом, поскольку внезапные выбросы горючих природных газов в атмосферу могут иметь очень серьезные последствия. Крайнюю опасность таких выбросов показали аварии в Фликсборо (1974, Великобритания), Мехико (1984, Мексика) и под Уфой (1989, СССР).

Статья содержит результаты теоретических и экспериментальных исследований процессов ПГД в смесях углеводородов с воздухом. Рассматривается влияние внутренней геометрии и турбулизации потока на возникновение детонации; также обсуждается влияние температуры и концентрации топлива в несгоревшей смеси. Работа является продолжением исследований ПГД, начатых на кафедре газовой и волновой динамики под руководством Зверева И. Н. в 1985 году.

1. Введение

Исследования перехода горения в детонацию (ПГД) в смесях водорода с воздухом (Oppenheim et al., 1966; Саламандра, 1959; Солоухин, 1969), а затем в смесях углеводородов с воздухом (Смирнов и др., 1986, 1995) показали множественность сценариев перехода. Различные механизмы возникновения детонации зависят от конкретной структуры течения, созданного ускоряющимся пламенем, что делает процесс перехода горения в детонацию не воспроизводимым экспериментально во всех деталях и мельчайших подробностях. В настоящее время существуют различные точки зрения на механизм ПГД: «взрыв во взрыве» Оппенгейма (Oppenheim et al., 1966) и градиентный механизм «спонтанного горения» Зельдовича (1970).

Последующий теоретический анализ показал, что на микроуровне увеличение неравномерности распределения температуры и рост градиентов концентраций в окрестности локальных экзотермических центров («горячих точек») перед фронтом пламени может быть достаточным для развития из отдельно взятого очага как волны детонации, так и волны нормального горения (Мержанов, 1966; Борисов, 1974; Kailasanath and Oran, 1983; Zeldovich et al., 1988; Смирнов и др., 1989, 1995). Анализ

[1]Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 02-03-32060) и INTAS (грант 00-0706).

и сравнение теоретических и экспериментальных результатов показали, что самовоспламенение в одной или нескольких горячих точках перед ускоряющимся пламенем с последующим развитием детонации или горения из каждого локального экзотермического центра является причиной существования множественности сценариев перехода горения в детонацию (Смирнов и др., 1999). Общей чертой всех этих сценариев является формирование локальных экзотермических центров по стохастическому механизму Оппенгейма с последующим развитием детонации на микроуровне согласно спонтанному механизму Зельдовича (Смирнов и др., 1999). Исследования ПГД при взаимодействии отраженной ударной волны с ламинарным пламенем (Brown and Thomas, 1999; Khohlov and Oran, 1999) также показали, что переход к детонации в горячих точках идет по градиентному механизму, в то время как взаимодействие ударной волны и волны горения, а также локальные неоднородности потока, создают условия для возникновения самих горячих точек.

Экспериментальным исследованиям чувствительности ПГД к изменениям параметров смеси присущи естественные ограничения на точность результатов, поскольку установление различных режимов ПГД зависит от случайных неоднородностей течения, создаваемого ускоряющимся пламенем. При этом незначительные изменения параметров потока могут привести к существенным изменениям сценария перехода. Кроме того, в физических экспериментах практически невозможно добиться независимого изменения отдельных параметров.

Численные исследования ПГД создают уникальную возможность плавного варьирования параметров независимо друг от друга с целью исследования их влияния на режим перехода к детонации. В статье представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований перехода горения в детонацию в гомогенных газовых смесях. Рассмотрены вопросы чувствительности ПГД к изменениям значений определяющих параметров.

2. Экспериментальные исследования

Экспериментальные исследования пульсирующих режимов возбуждения детонации в смесях углеводородных топлив с воздухом проводились с использованием установки, изображенной на рис. 1. Детальное описание процедуры и оборудования для этих экспериментов содержится в (Смирнов и др., 1999).

Исследование влияния геометрии рабочей зоны на ускорение турбулентного пламени и развитие детонации или дефлаграции проводилось с использованием камер, объем которых мог меняться от эксперимента к эксперименту. Боковые стенки камер (1) и (2) (рис. 1) имели резьбу на внутренней поверхности, что позволяло ввинчивать цилиндрические перегородки (3) и (4) на различную глубину внутрь камер, меняя таким образом их объем. Смесь поджигалась в камере (1) при помощи свечи зажигания (5). Поток газа, вызываемый расширением зоны горения, был сильно турбулизован из-за геометрии устройства: в камере (2) возникал тороидальный вихрь, что приводило к резкому ускорению пламени при переходе из одной камеры в другую. Подъем давления в обеих камерах приводил к закрытию обратного клапана

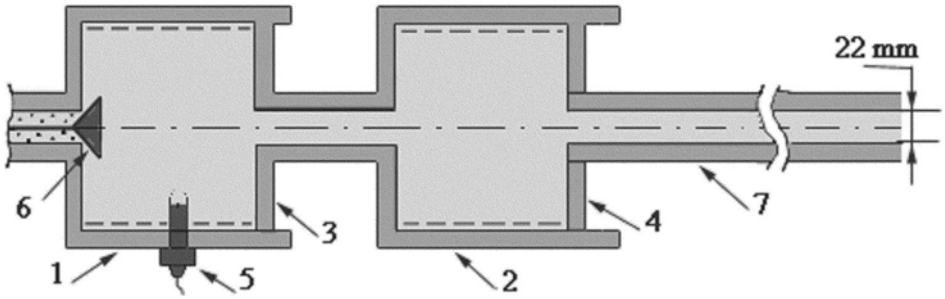


Рис. 1: Устройство для экспериментального исследования ПГД в трубе с камерами переменного объема

(6). Расширение продуктов сгорания в узкую трубу (7) вызывало дополнительное ускорение пламени за счет поршневого эффекта, улучшая таким образом условия развития ПГД.

Для бензино-воздушной смеси преддетонационное расстояние сокращалось до 1.5 – 2.0 м в трубах диаметром 22 мм. Шлирен-фотографии, иллюстрирующие множественность сценариев перехода, были опубликованы ранее (Смирнов и др., 1995, 1999). Рис. 2 – 4 иллюстрируют структуру течения на различных расстояниях от секции, где проходило инициирование. Пламя распространяется слева направо, время увеличивается снизу вверх. Тем самым шлирен-фотографии демонстрируют x-t диаграмму процесса. Ось x соответствует координате вдоль оси трубы, за начало отсчета принят клапан (6). Ось t обозначает ось времени, за точку отсчета принят момент начала регистрации.

Рис. 2 соответствует течению до перехода к детонации. Наличие турбулизационных камер приводит к возникновению существенных неоднородностей в потоке перед зоной пламени, что может привести к возникновению детонации. Поршневой эффект, создаваемый расширяющимися продуктами горения смеси в камерах, порождает серию первичных ударных волн, движущихся перед фронтом пламени. Некоторые волны образуются в результате взаимодействия поперечных волн сжатия, возникающих при ускорении турбулентного пламени. Пламя распространяется со скоростью до 950 м/с. Волны, формирующиеся позади фронта пламени, обгоняют его и взаимодействуют с первичными волнами сжатия, что в конце концов приводит к возникновению впереди сильной ударной волны, поддерживаемой волнами сжатия, формируемыми пламенем (рис. 3, 4).

Детонационная волна возникает вследствие воспламенения смеси в локальных экзотермических центрах («горячих точках») впереди зоны пламени. Сценарий перехода, иллюстрируемый на рис. 3, характеризуется образованием горячей точки в зоне высокой энтальпии на контактной поверхности, образовавшейся после взаимодействия двух первичных ударных волн. Рис. 4а демонстрирует переход, возникший при формировании вторичной зоны горения между головной ударной волной и фронтом пламени за счет самовоспламенения локального экзотермического центра. Зона

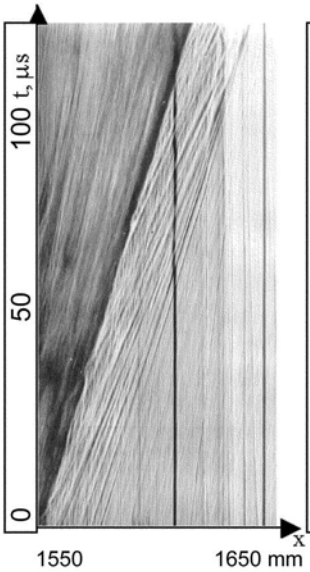


Рис. 2. Волны сжатия перед ускоряющимся турбулентным фронтом пламени

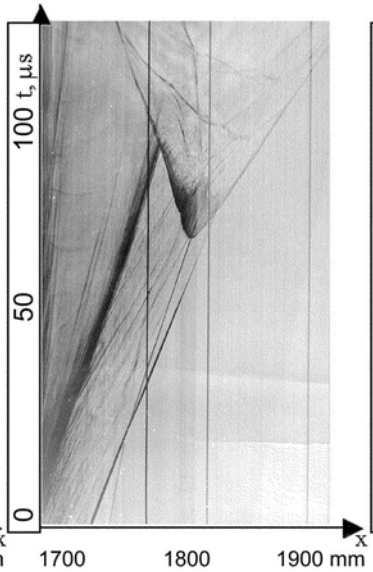


Рис. 3. Возникновение детонации перед фронтом турбулентного пламени на контактном разрыве

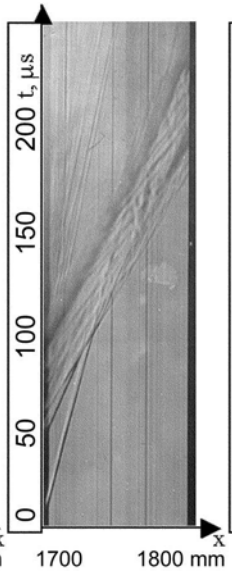


Рис. 4, a. Самовоспламенение в горячей точке перед фронтом пламени, порождающее новую зону горения

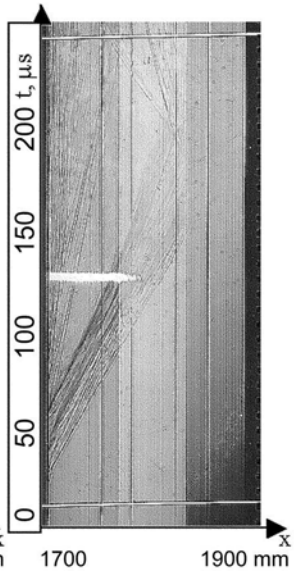


Рис. 4, b. Самовоспламенение в нескольких горячих точках перед фронтом пламени

горения расширяется во всех направлениях от горячей точки, и через 180 мкс возникает детонационная волна. Рис. 4b иллюстрирует случай, когда возгорание происходит последовательно в нескольких горячих точках перед фронтом пламени. Каждое из этих возгораний непосредственно не приводит к формированию детонационной волны. Пламя, распространяющееся во всех направлениях от горячих точек, приводит к формированию объемного горения и последующему сжатию смеси позади головной ударной волны. Детонационная волна возникает в одном из экзотермических центров, примыкающих к ударной волне, который находится вне зоны фотографирования. Возникновение детонации подтверждается наличием ретонационной волны, распространяющейся назад по потоку со скоростью 1350 м/с, которая появляется в верхней части рис. 4b. Анализ экспериментов показывает, что формирование детонации происходит в одном из экзотермических центров (в «горячей точке»), расположенном в области сжатого газа между головной ударной волной и зоной горения. В зависимости от локальной структуры и расположения горячих точек горение может привести либо к детонации, либо к дефлаграции, распространяющейся от одной из горячих точек (Смирнов и др., 1999).

Неоднородности в зоне сжатого газа перед фронтом пламени могут возникать, в частности, вследствие взаимодействия ударных волн, идущих впереди. Такая структура течения формируется при зажигании на расстоянии от закрытого торца и при использовании форкамер, обеспечивающих дополнительный поршневой эффект при расширении продуктов сгорания. Как видно из рис. 2, в последнем случае перед

фронтом пламени может образовываться серия волн сжатия. Взаимодействие в газе двух ударных волн, из которых одна догоняет другую, приводит к образованию одной ударной волны, распространяющейся в ту же сторону, отраженной центрированной волны разрежения и контактной поверхности между ними, разделяющей газы различной температуры и плотности.

Контактные разрывы, как зоны больших градиентов плотности, хорошо видны на шлирен-фотографиях рис. 3 – 4. Горячие точки перед фронтом пламени, порождающие волны детонации (рис. 3) или дефлаграции (рис. 4a), образуются именно на контактных поверхностях, являющихся результатом взаимодействия догоняющих друг друга головных ударных волн. Теоретическое объяснение этого факта было впервые предложено в работе (Смирнов, Панфилов, 1995), в которой было показано, что само воспламенение в области ударно сжатого газа происходит в отдельном экзотермическом центре, характеризуемом минимальным значением времени задержки воспламенения. Последнее зависит от температуры смеси и от физического времени экспозиции смеси при данной температуре. Температура газа перед контактной поверхностью, сжатого головной ударной волной, выше, чем температура газа за контактной поверхностью, прошедшего последовательно две стадии ударного сжатия и адиабатического расширения. Время индукции воспламенения с повышением температуры сокращается. В области течения между контактной поверхностью и ударной волной слои газа, примыкающие к контактной поверхности, характеризуются самым коротким временем индукции, так как они дольше всего находились при повышенной температуре. Поэтому самовоспламенение происходит в горячей точке на контактной поверхности. Эти рассуждения подтверждаются и результатами прямого численного моделирования (Смирнов, Панфилов, 1995; Смирнов и др., 1999).

После воспламенения газа в отдельном экзотермическом центре градиенты температуры и концентрации реагентов, установившиеся в окрестности зоны воспламенения, определяют, разовьется ли из данного очага воспламенения волна детонации или дефлаграции (Зельдович и др., 1970). При возникновении волны детонации реализуется картина течения, изображенная на рис. 3. При возникновении волны дефлаграции, которая распространяется от места воспламенения с гораздо меньшей скоростью (рис. 4a), возможно последующее воспламенение соседних «горячих точек», до которых волна дефлаграции еще не успела дойти (рис. 4b).

3. Математическая модель

Численные исследования процессов ПГД проводились с помощью системы уравнений, полученной осреднением по Фавру системы уравнений движения многокомпонентной смеси. Использовалась модифицированная ка-эпсилон модель турбулентности. Для моделирования флуктуаций температуры к основным уравнениям ка-эпсилон модели было добавлено третье уравнение, описывающее динамику среднеквадратичного отклонения температуры (Смирнов и др., 2001). Члены, отвечающие за производство и диссипацию этого параметра, а также нелинейные по температуре члены, отвечающие за скорость химических реакций, моделировались с использова-

нием метода квадратур Гаусса.

Система определяющих уравнений для осредненных величин газодинамических параметров имеет следующий вид:

$$\partial_t(\rho) + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \tag{1}$$

$$\partial_t(\rho Y_k) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} Y_k) = -\nabla \cdot \vec{I}_k + \dot{\omega}_k, \tag{2}$$

$$\partial_t(\rho \vec{u}) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \rho \vec{g} - \nabla p + \nabla \cdot \tau, \tag{3}$$

$$\partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} E) = \rho \vec{u} \cdot \vec{g} - \nabla \cdot p\vec{u} - \nabla \cdot \vec{I}_q + \nabla \cdot (\tau \cdot \vec{u}). \tag{4}$$

Уравнения (1) – (4) включают уравнение неразрывности для смеси в целом, уравнения баланса массы для k-го компонента, уравнения количества движения и энергии для смеси. Наряду с этими уравнениями должны также выполняться условия согласования: $\sum_k Y_k = 1$, $\sum_k \vec{I}_k = 0$, $\sum_k \dot{\omega}_k = 0$. Термическое и калорическое уравнения состояния для смеси газов имеют соответственно следующий вид: $p = R_g \rho T \sum_k Y_k / W_k$, $E = \sum_k Y_k \left(c_{vk} T + h_{0k}\right) + \vec{u}^2/2 + k$. Турбулентный тепловой поток в уравнении (4) представляется в виде суммы двух членов: $\vec{I}_q = \vec{J}_q + \sum_k \vec{I}_k \left(c_{pk} T + h_{0k}\right)$, где $\vec{J}_q$ играет роль кондуктивного теплового потока для турбулентного течения, а добавочный член характеризует перенос энергии в результате турбулентной диффузии. Кинематическая турбулентная вязкость ν^t в рамках ка-эпсилон модели определяется по следующей формуле: $\nu^t = C_\mu k^2/\varepsilon$. Для определения турбулентных потоков используются следующие соотношения:

$$\tau = (\mu + \rho\nu^t)(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T - (2/3)(\nabla \cdot \vec{u})U) - (2/3)\rho k U, \tag{5}$$

$$\vec{I}_k = -\rho(D + (\nu^t/\sigma_d))\nabla \cdot Y_k, \quad \vec{J}_q = -(\lambda + \sum_k c_{pk}\rho_k(\nu^t/\sigma_t))\nabla \cdot T, \tag{6}$$

Рождение k-го компонента в результате химической реакции происходит со скоростью $\dot{\omega}_k$, которая является суммой массовых скоростей ω_{kj} всех реакций, протекающих в газовой фазе. Члены $\dot{\omega}_k$ в уравнениях, отвечающие за химические превращения, обычно крайне чувствительны к колебаниям температуры в турбулентном потоке, поскольку содержат экспоненциальные зависимости типа Аррениуса для определения скоростей элементарных реакций. Поэтому влияние флуктуаций температуры в турбулентном потоке при наличии химических реакций необходимо учитывать. Влиянием флуктуаций концентраций реагентов будем пренебрегать, поскольку зависимость скоростей реакций от концентраций не столь сильная (полиномиальная). Будем в дальнейшем рассматривать температуру как стохастическую функцию T со средним значением $\overline{T}$ и среднеквадратичным отклонением $\theta = \overline{T'T'}$. Для замыкания системы служат дополнительные уравнения ка-эпсилон модели для определения

энергии турбулентных пульсаций k, и диссипации ε, к которым добавляется третье уравнение для определения среднеквадратичного отклонения температуры $\theta = \overline{T'T'}$.

$$\partial_t(\rho k) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} k) = \nabla \cdot ((\mu + \rho(\nu^t/\sigma_k))\nabla k) + \tau^t : \nabla \vec{u} - \rho\varepsilon, \tag{7}$$

$$\partial_t(\rho \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \varepsilon) = \nabla \cdot ((\mu + \rho(\nu^t/\sigma_\varepsilon))\nabla \varepsilon) + (\varepsilon/k)(C_{1\varepsilon}\tau^t : \nabla \vec{u} - C_{2\varepsilon}\rho\varepsilon), \tag{8}$$

$$\partial_t(\rho \hat{c}_p \theta) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \hat{c}_p \theta) = \nabla \cdot ((\lambda + \sum_k Y_k c_{pk} \rho(\nu^t/\sigma_k))\nabla \theta) + P_\theta + W_\theta - D_\theta, \tag{9}$$

где $\hat{c}_p = \sum\limits_k c_{pk} Y_k$ члены, характеризующие производство P_θ, W_θ и диссипацию D_θ величины θ, определяются следующими формулами:

$$\begin{gathered} P_\theta = 2\rho \sum_k Y_k c_{pk} \left(\nu^t/\sigma_k\right) (\nabla T)^2, \\ W_\theta = -\sum_k \overline{\dot{\omega}_k' T'} h_{0k} \\ D_\theta = C_g \rho \sum_k Y_k c_{pk} \frac{\varepsilon}{k} \frac{\theta}{\theta_m - \theta}. \end{gathered} \tag{10}$$

При определении членов производства при химических реакциях W_θ использовался закон Аррениуса. Для расчета конкретных членов $\overline{\dot{\omega}_k' T'}$ применялась техника квадратур Гаусса:

$$\overline{T' A(T)} = \theta \frac{A(\overline{T} + \sqrt{3\theta}) - A(\overline{T} - \sqrt{3\theta})}{2\sqrt{3\theta}}. \tag{11}$$

Вид функции D_θ, характеризующей диссипацию, определялся исходя из предположения, что флуктуации температуры ограничены таким образом, чтобы величина $T = \bar{T} + T'$ не могла принимать отрицательные значения. Поэтому в формулу введен множитель $1/(\theta_m - \theta)$. Чтобы оценить величину θ_m примем во внимание следующие соображения. Во-первых, для нормальной функции распределения вероятность того, что среднеквадратичное отклонение вдвое превысит среднее значение, оказывается менее 1%. Во-вторых, среднее отклонение температуры в экспериментах (Филип, 1991) не превосходило половины максимума осредненного значения. Поэтому, для θ_m была использована следующая оценка:

$$\theta_m = \overline{T}^2 \Big/ 4.$$

Константы ка-эпсилон модели определялись стандартным образом

$$C_\mu = 0.09,\ C_{1\varepsilon} = 1.45,\ C_{2\varepsilon} = 1.92,$$
$$\sigma_d = 1,\ \sigma_t = 0.9,\ \sigma_k = 1,\ \sigma_\varepsilon = 1.3.$$

Константа C_g в уравнении (10) для вычисления диссипации определялась с использованием экспериментальных данных (Филип, 1991) следующим образом:

$$C_g = 2.8.$$

Предполагалось, что газовая смесь содержит следующие компоненты: O_2, C_nH_m, CO, CO_2, H_2, H_2O, N_2. Химический потенциал топлива и его состав (n и m) могут рассматриваться, как параметры модели. Учитывались следующие модельные брутто-реакции:

$$C_nH_m + \left(\frac{n}{2} + \sigma\frac{m}{4}\right) O_2 \to nCO + \sigma\frac{m}{2}H_2O + (1-\sigma)\frac{m}{2}H_2,$$

$$CO + \frac{1}{2}O_2 \to CO_2, \quad CO_2 + M \to CO + \frac{1}{2}O_2 + M,$$

$$H_2 + \frac{1}{2}O_2 \to H_2O, \quad H_2O + M \to H_2 + \frac{1}{2}O_2 + M.$$

Здесь σ – доля воды при разложении углеводорода (зависит от типа топлива). Число реакций будем обозначать K. Скорость образования k-го компонента при одновременном протекании всех реакций определяется:

$$\dot{\omega}_k = \sum_{j=1}^{B} \dot{\omega}_{kj}, \tag{12}$$

где $\dot{\omega}_{kj}$ – скорость образования k-го компонента при j-ой реакции, B – число химических реакций.

Тогда источниковый член в уравнении (9) для среднеквадратичной пульсации температуры, определяемый химическими реакциями (10), примет вид:

$$W_\theta = -\overline{T' \sum_{j=1}^{B} \sum_{k=1}^{K} h_{0k}\dot{\omega}_{kj}}. \tag{13}$$

Каждый член $\dot{\omega}_{kj}$ содержит функцию Аррениуса для определения скорости j-ой реакции. Предполагается, что эта функция имеет следующий вид:

$$A_j(T) = \begin{cases} K_j \exp\left(-\frac{T_{aj}}{T}\right) \text{ при } T \geq T_{mj}, \\ 0 \text{ при } T < T_{mj}, \end{cases} \tag{14}$$

где K_j – предэкспоненциальный множитель, T_{aj} – температура активации, T_{mj} – минимальная температура, при которой скорость реакции еще является существенной

для рассматриваемой задачи. Чтобы определить член W_θ по формуле (13), необходимо рассчитать средние $\overline{T'A_j(T)}$ по формуле (11) и просуммировать, используя (13). Более детально методы осреднения нелинейных функций применительно к данной задаче обсуждаются в работе (Смирнов и др., 2001).

Граничными условиями для расчетной области служат условия на стенках и на оси симметрии. Граничные условия ставятся в следующих предположениях: стенки теплоизолированы и некаталитичны, скорость газа равна нулю на стенках, радиальная скорость, градиенты осевой скорости, температуры и концентраций равны нулю на оси симметрии.

В начальный момент зажигание моделируется выделением энергии в сферическом объеме, расположенном по оси трубы в центре первой форкамеры.

Численное моделирование позволяет объяснить детали формирования детонации на контактной поверхности. Область между ударной волной и контактной поверхностью имеет повышенную температуру. Таким образом, период индукции в ней короче, чем в области между пламенем и контактной поверхностью. Первый тепловой взрыв происходит в слое газа, имевшим повышенную температуру в течении наибольшего периода времени, т.е. в слое, примыкающем к контактной поверхности. Этот взрыв приводит к формированию волны детонации либо дефлаграции, распространяющейся во все стороны от экзотермического центра. В зоне теплового взрыва по градиентному механизму может сформироваться детонационная волна, расходящаяся от точки самовоспламенения. Интенсивность ретонации (обратной детонации) резко падает при встрече с зоной, заполненной продуктами реакции. Детонационная волна, обгоняющая головную ударную волну, формирует пересжатую детонацию в покоящейся среде, скорость которой постепенно уменьшается до скорости волны Чепмена – Жуге.

4. Влияние камер в секции зажигания

Для изучения влияния турбулизационных камер с расширенным поперечным сечением на развитие детонации было проведено численное моделирование процесса в устройстве, показанном на рис.1. Это устройство состоит из детонационной трубы и двух камер большего диаметра; оно заполнено горючей газовой смесью при нормальном давлении. Зажигание смеси моделируется сосредоточенным выделением энергии в центре первой камеры. Считалось, что в газовой смеси происходит пять брутто-реакций: разложение углеводорода, окисление угарного газа, окисление водорода, разложение углекислого газа и разложение водяного пара. Труба имела диаметр 20 мм, обе камеры по 100 мм в диаметре и 100 мм в длину. Участок трубы, соединяющий камеры, имел 50 мм в длину и 20 мм в диаметре. Результаты расчетов (рис. 5, 6), проведенных для молярной концентрации углеводорода 0.015 (при стехиометрическом значении концентрации 0.014), показывают, что процесс распространения пламени в первой камере является сравнительно медленным, и во многом скорость его зависит от степени начальной турбулизации смеси. При подходе к стенкам камеры пламя меняет свою первоначальную сферическую форму на цилиндрическую.

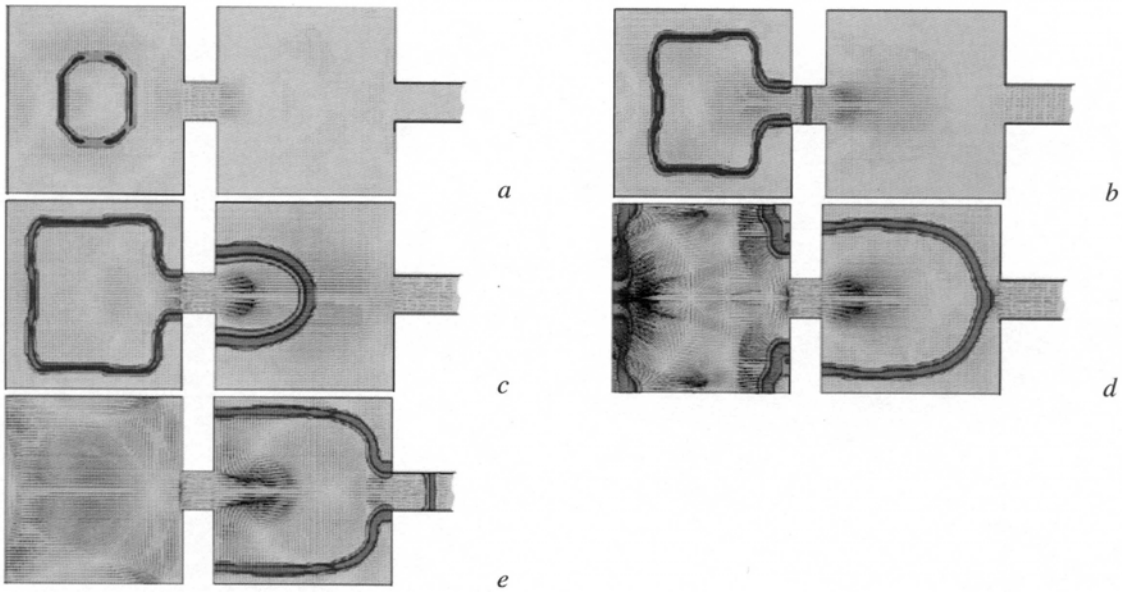


Рис. 5: Эволюция зоны реакции для последовательных моментов времени после зажигания: a – 1 ms, b – 3.1 ms, c – 3.7 ms, d – 4.2 ms, e – 4.4 ms

Пламя входит в узкий участок трубы между камерами и ускоряется вследствие расширения продуктов реакций в первой камере. В результате образуется струя газа с высокой скоростью, которая внедряется во вторую камеру и приводит к развитию быстро распространяющегося пламени благодаря как дополнительной турбулизации потока, так и поршневому эффекту расширяющихся продуктов реакции, поддерживаемому продолжающимся в первой камере горением. Отрезки, изображенные на рис. 6, соответствуют скорости газа по величине и направлению.

Достаточно быстрое сгорание исходной смеси во второй камере приводит к резкому подъему давления. При этом пламя, выходящее из второй камеры в детонационную трубу, ускоряется вследствие ускорения исходной смеси реагентов под действием возникающего перепада давления (рис. 6). Перед зоной пламени в трубе формируется ударная волна. Волны сжатия, генерируемые продолжающимся горением в камерах, обгоняют фронт пламени в трубе и подпитывают головную ударную волну. Это приводит к формированию неравномерностей зоны горения и поперечных волн сжатия. В какой-то момент из горячей точки внутри зоны пламени возникает детонация. Для рассчитанного сценария перехода к детонации, последний происходит на расстоянии около 1 м от места зажигания. До перехода к детонации горячие точки приводят к формированию волн сжатия, распространяющихся во всех направлениях, как к головной ударной волне, так и в направлении против потока. При переходе к детонации из горячей точки возникает детонационная и ретонационная волны.

Уменьшение числа камер до одной, а также изъятие всех камер из системы приводит к увеличению преддетонационного расстояния. При отсутствии камер в начальной секции переход горения в детонацию также возможен, но он носит крайне

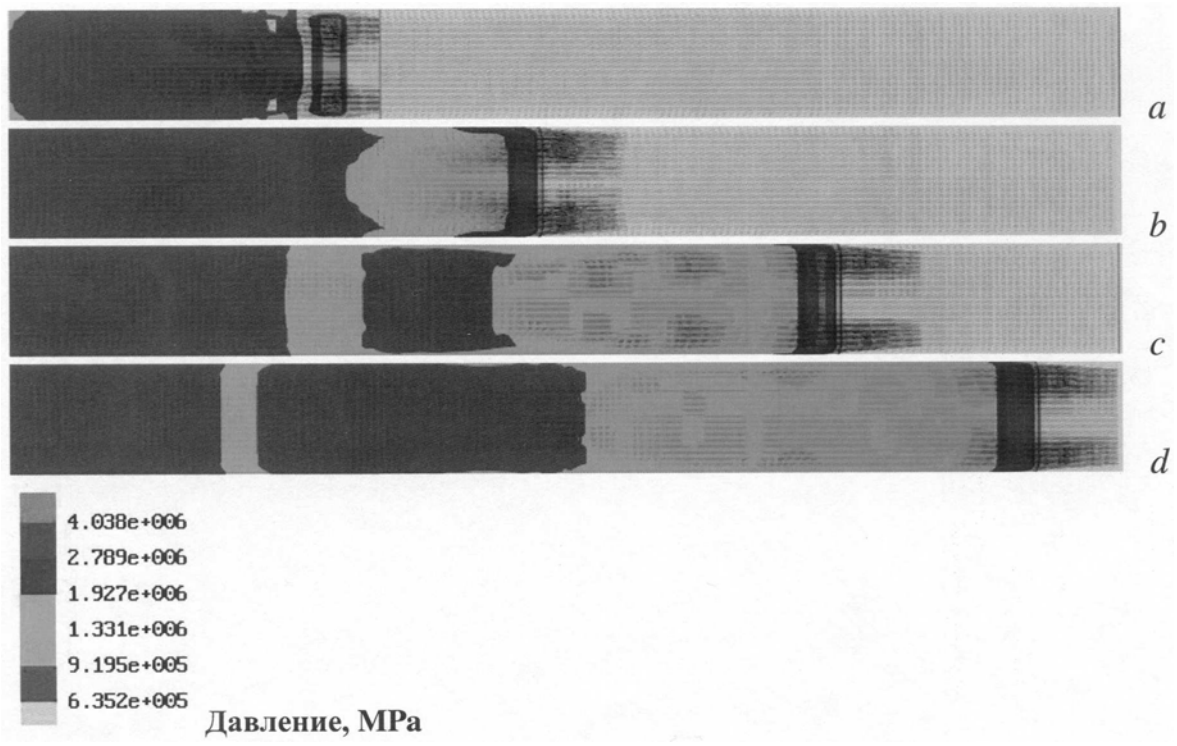


Рис. 6: Эволюция давления в детонационной трубе в зоне перехода горения в детонацию для последовательных моментов времен: a – 4.593 ms, b – 4.643 ms, c – 4.683 ms, d – 4.709 ms

неустойчивый характер. Незначительное изменение определяющих параметров может сильно повлиять на сценарий переходного процесса. Возникновение детонации в различных экспериментах носит спорадический характер.

На рис. 7 представлены осредненные по сечению траектории и скорости фронта реакции в трубе при отсутствии (а) и наличии (б) двух форкамер большого диаметра в начальной секции трубы. Результаты показывают, что наличие камер не только сокращает преддетонационное расстояние, но и стабилизирует место возникновения детонации и сценарий переходного процесса.

5. Влияние камер в конце трубы

Результаты исследований, изложенные в предыдущих разделах, показывают, что присутствие форкамер большего диаметра на участке зажигания способствует ПГД. Для сравнения, рассмотрим случай, когда камеры присутствуют на конечном участке трубы, по которому распространяется уже сформировавшаяся детонационная волна. В качестве модельного устройства используем то же, что и на рис. 1, но развернутое на 180° (что эквивалентно зажиганию у правого торца и распространению волны справа налево). Чтобы гарантировано сформировать детонационную волну, энергия зажигания полагалась большей, чем в предыдущих случаях. Источник зажигания также располагался на оси трубы на соответствующем расстоянии от левого закрытого торца.

Численное моделирование показало, что после зажигания в узкой трубе пламя распространялось в галопирующем режиме и после нескольких осцилляций формировалась устойчивая детонационная волна, которая распространялась со скоростью 1850 м/с. После выхода детонационной волны в первую камеру происходило ее расщепление на ударную волну и отстающую от нее зону горения. При этом скорость распространения зоны горения в осевом направлении падала до величины 200 м/с. Затем в узком перешейке, соединяющем первую и вторую камеру, осевая скорость зоны реакции возрастала до 400 м/с. При входе во вторую камеру пламя замедлялось до скорости 100 м/с.

На рис. 9 представлены полученные для рассматриваемого случая траектория и скорость зоны реакции как функции времени. Концентрация горючего в смеси полагалась равной 0.012, что соответствует случаям, изображенным на рисунках 7 и 8b.

Результаты расчетов показывают, что детонационная волна, распространяющаяся в гладком канале со скоростью, близкой к скорости Чепмена-Жуге, при входе в секцию, содержащую камеры большего диаметра, распадается и переходит в режим галопирующего горения, который характеризуется малой дозвуковой скоростью распространения.

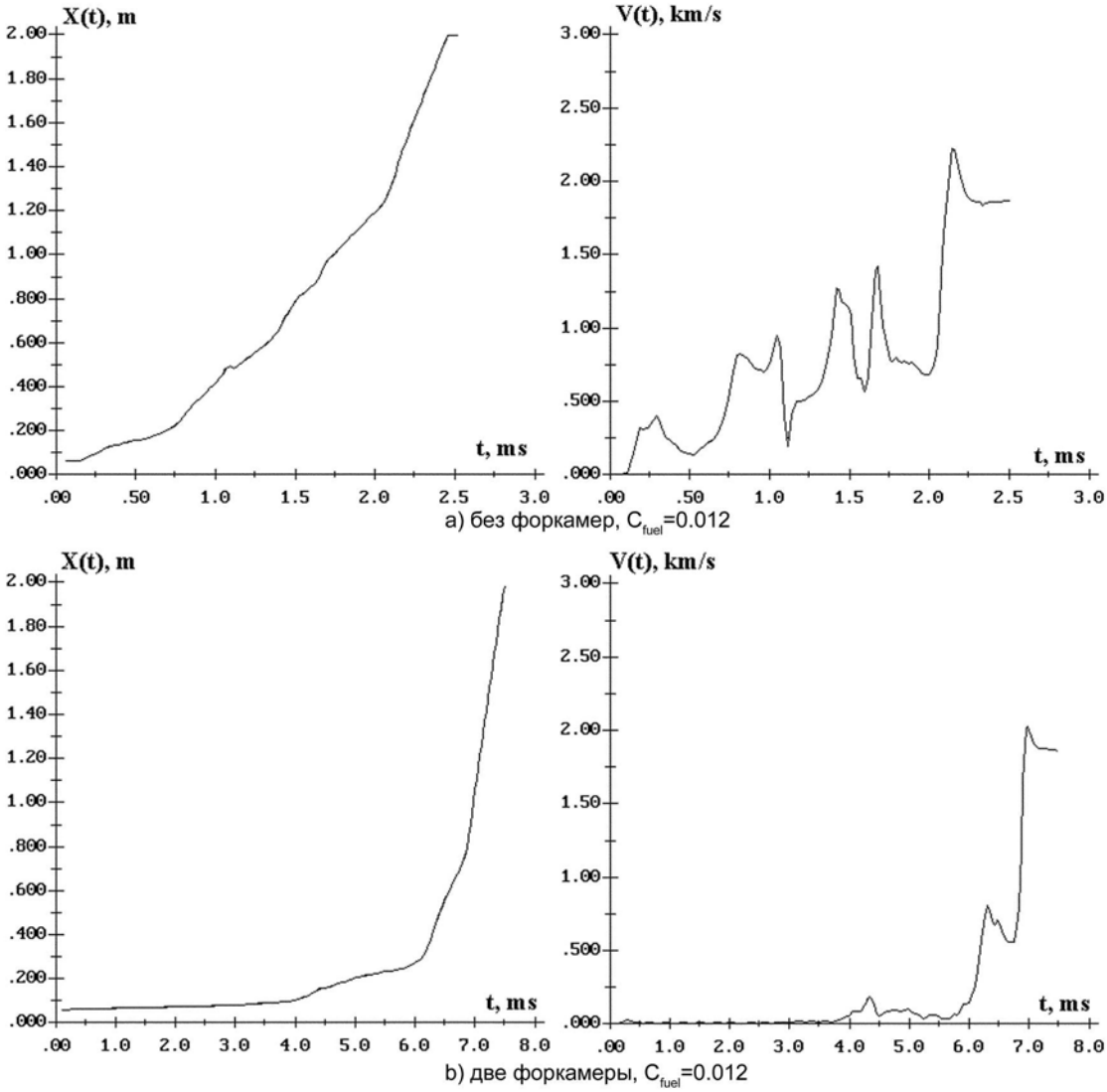


Рис. 7: Траектории и средние по сечению скорости фронта реакции при ПГД в газовой смеси при концентрации горючего $C_{fuel} = 0.012$ в трубе: (a) - без форкамер в секции зажигания; (b) - с двумя форкамерами в секции зажигания

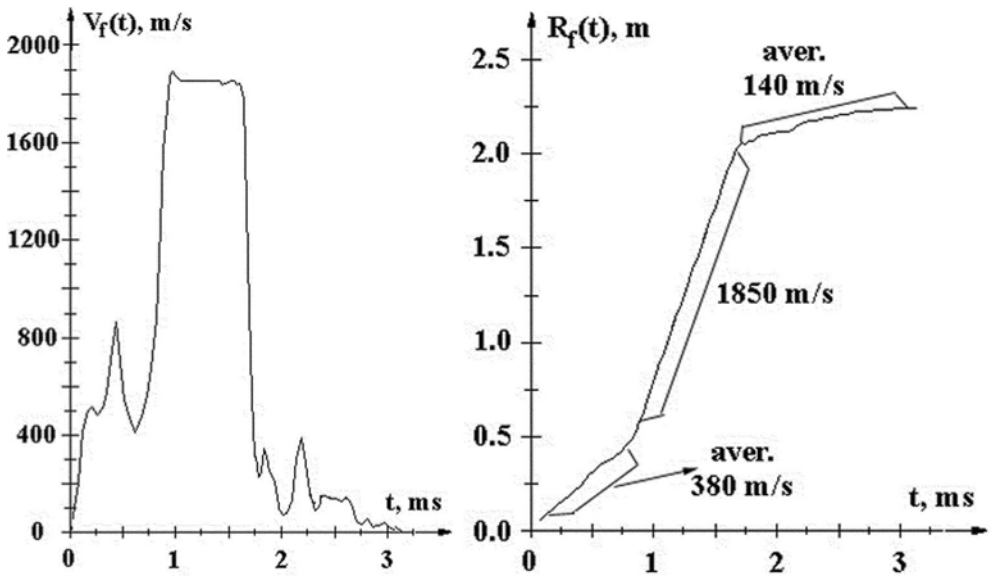


Рис. 8: Траектории и средние по сечению скорости фронта реакции при ПГД в газовой смеси при концентрации горючего $C_{fuel} = 0.012$ в трубе с двумя камерами большего диаметра в конечной секции

6. Влияние концентрации горючего на переход горения в детонацию

На рис. 9a-d изображены соответствующие друг другу траектория зоны реакции и средняя скорость фронта пламени в зависимости от времени для различных значений концентрации горючего при одной и той же геометрии устройства. Значения средней скорости пламени на различных участках обозначены также на графиках траектории зоны реакции. Из рисунков видно, что пламя ускоряется на входе во вторую камеру, но затем замедляется. Затем высокоскоростная волна горения входит в детонационную трубу, где и происходит ПГД.

Анализ результатов, представленных на рис. 9, показывает, что при снижении концентрации горючего в исходной смеси снижается ее чувствительность к инициированию детонации посредством ПГД. Преддетонационное время при этом увеличивается (рис. 9a, b), но если выход на режим детонации все же происходит, то детонационная волна распространяется практически с одинаковой скоростью. Диаграммы скорости фронта реакции показывают, что выход на детонацию в обоих случаях происходит через пересжатый режим, т.е. в момент возникновения регистрируется волна сильной детонации, которая с течением времени замедляется до скорости самоподдерживающегося режима.

Уменьшение молярной концентрации горючего ниже 0.011 приводит к возникновению режимов галопирующего горения. Резкие скачки скорости волны горения в этих режимах не вызваны численной неустойчивостью при моделировании процесса,

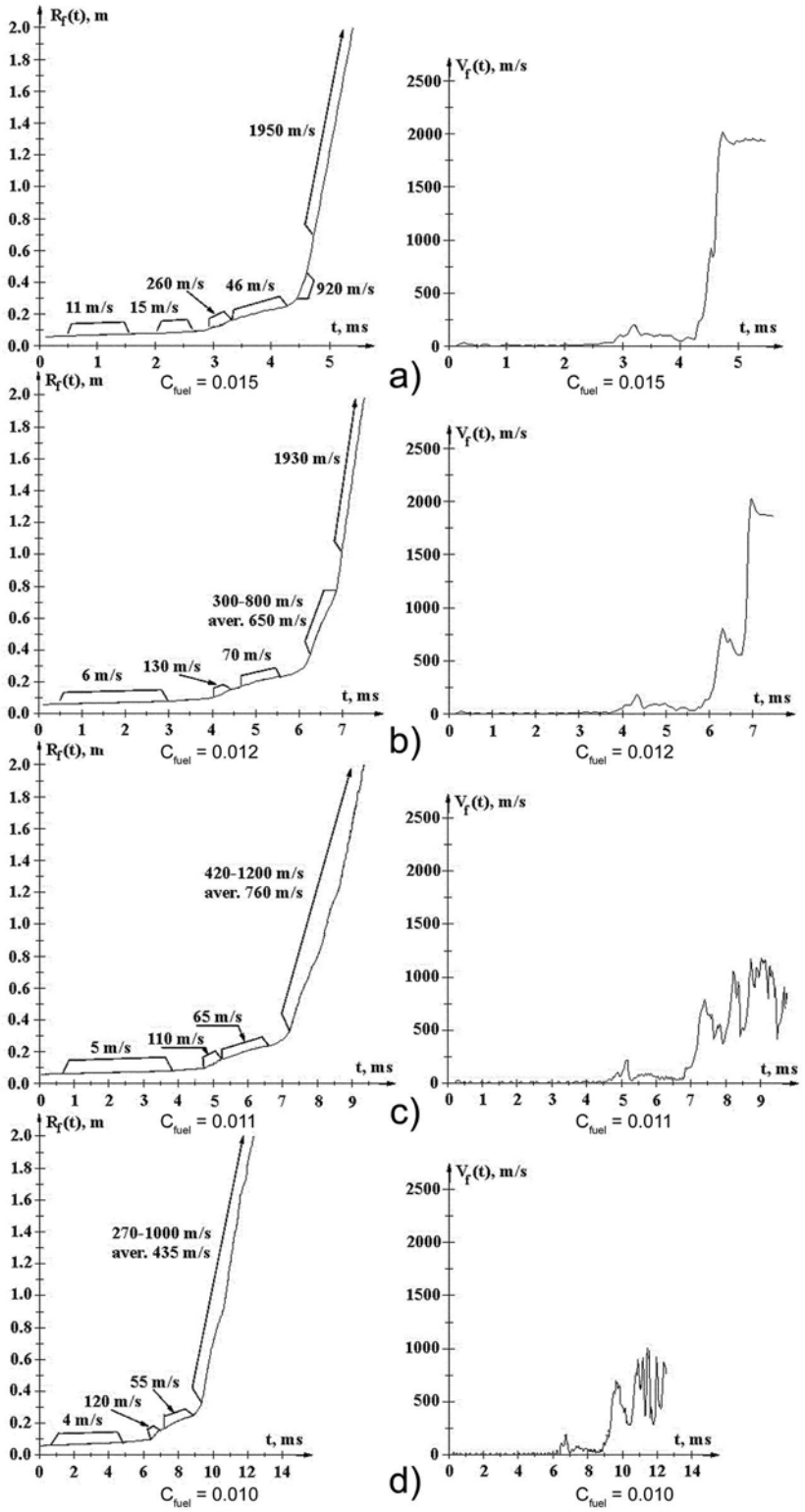


Рис. 9: Траектории и средние по сечению скорости фронта реакции при ПГД в трубе с двумя форкамерами при концентрации горючего C_{fuel}: (a) – 0.015, (b) – 0.012, (c) – 0.011, (d) – 0.010

поскольку каждый из таких скачков развивается за время порядка 150 – 200 шагов по времени численного счета. Горячие точки (с повышенными значениями давления) попеременно возникают на оси и боковых стенках трубы, и приводят к колебаниям скорости зоны реакции. Эти колебания отчетливо видны на рис. 9c, d. При концентрации горючего 0.011 пламя в режиме галопирующего горения распространяется со скоростью от 420 до 1200 м/с при среднем значении 760 м/с. Переход к детонации на расстоянии 2.25 м, равном длине устройства, не происходит. При концентрации горючего 0.010 режим галопирующего горения устанавливается позже; скорость распространения пламени при этом колеблется от 270 до 1000 м/с со средним значением 435 м/с.

7. Влияние на ПГД камер турбулизаторов при их расположении по всей длине трубы

Результаты предыдущих исследований показали, что введение одной или двух камер-турбулизаторов на начальном участке трубы, где происходит зажигание смеси, стабилизирует процесс ПГД и сокращает преддетонационное расстояние.

Для изучения влияния количества турбулизационных камер на развитие детонации были проведены численные эксперименты с устройством, состоящим из 20 одинаковых камер диаметром 100 мм и длиной 100 мм, насаженных на трубу диаметром 20 мм через равные промежутки, составлявшие 50 мм. Длина всего устройства, таким образом, составила 2.95 м.

Результаты показали, что при концентрации горючего, равной 0.012, ПГД не происходит вовсе. Устанавливается режим галопирующего горения со скоростью распространения пламени от 80 до 300 м/с со средней скоростью 156 м/с. На рис. 10 показано распределение плотности газа и скорости для тех последовательных моментов времени, когда зона пламени проходит камеры 6 и 7. Из рисунка видно, что при прохождении каждой из камер процесс состоит из следующих стадий: вход в камеру пламени из трубы, расширение его с одновременным торможением, вхождение переднего конца расширившейся зоны пламени в продолжение трубы, ускорение пламени в трубе под воздействием потока расширяющихся продуктов горения в камере. Таким образом, процесс имеет циклический характер.

Результат численных исследований показывает, что увеличение числа камер не облегчал ПГД для рассмотренной конфигурации устройства, но напротив, предотвращал переход и приводил к установлению режима галопирующего горения. Этот эффект возник благодаря резкому перепаду площадей поперечных сечений в устройстве и соответствующему периодическому торможению пламени при его расширении.

Чтобы описать перепады размеров поперечных сечений в подобных структурах, можно ввести параметр расширения и параметр отношения объемов:

$$\beta_{ER} = \frac{S_{chamb} - S_{tube}}{S_{chamb}}, \quad \alpha_{ER} = \frac{S_{chamb}L_{chamb} + S_{tube}L_{tube}}{S_{chamb}(L_{chamb} + L_{tube})},$$

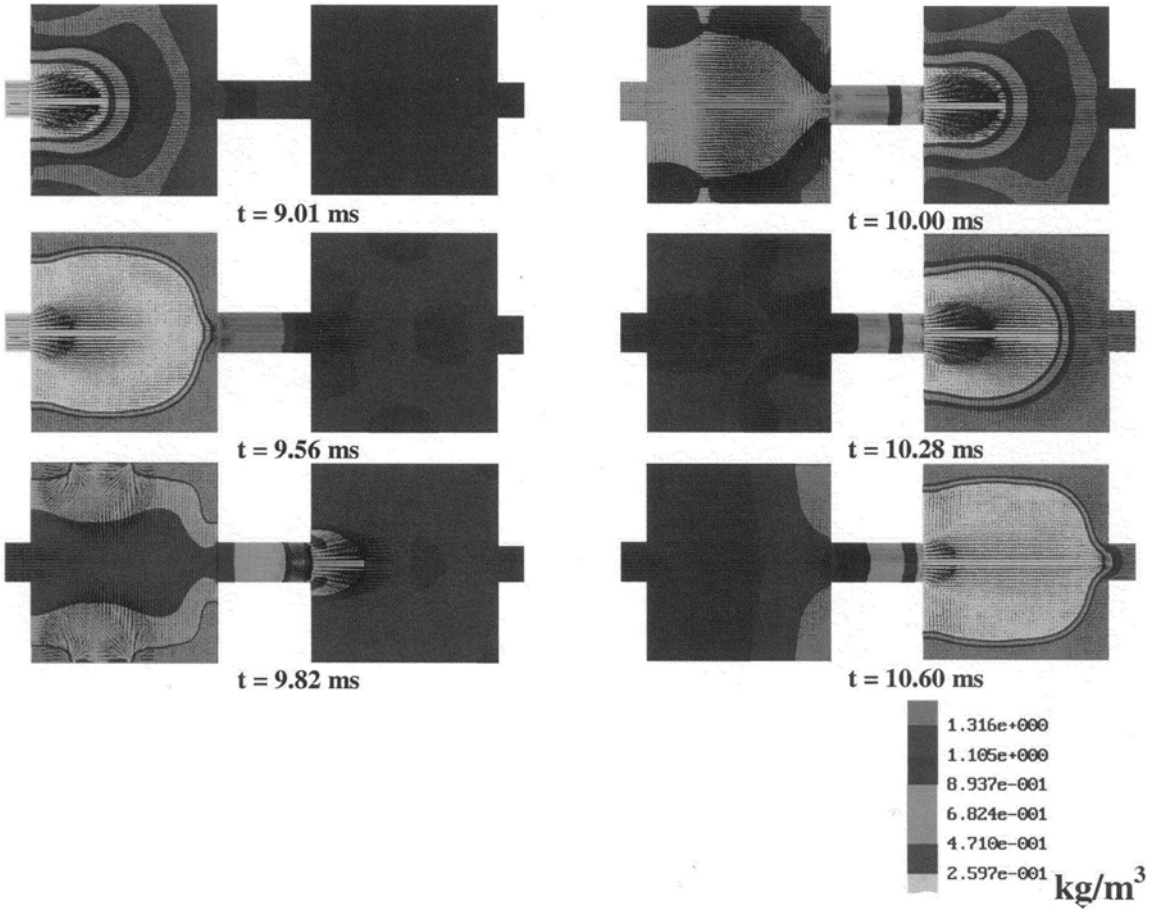


Рис. 10: Эволюция полей плотности и скорости 6-ой – 7-ой камерах многокамерного устройства при значении параметра расширения $\beta_{ER} = 0.96$, концентрации горючего 0.012

где S_{chamb} – площадь поперечного сечения камеры, S_{tube} – площадь поперечного сечения трубы, L_{tube} – длина участка трубы, соединяющего соседние камеры, L_{chamb} – длина камеры с широким поперечным сечением. В рассмотренном нами случае параметр расширения был очень велик (β_{ER} =0.96), что облегчало ускорение пламени в узкой трубе, но блокировало его в других частях устройства.

Для того, чтобы исследовать влияние величины параметра расширения на переход к детонации, нами был проведен ряд численных экспериментов по расчету ПГД для труб диаметром 64.3 мм и 76.7 мм, на которые были насажены камеры диаметром 100 мм и длиной 100 мм. Два этих варианта соответствовали значениям параметра расширения соответственно 0.60 и 0.40. В исследовавшемся устройстве было 10 камер, равномерно распределенных по трубе с промежутками 50 мм между камерами; длина всего устройства составляла 1.45 м.

На рис. 11 показано распределение плотности и скорости газа в камерах 6 и 7 при прохождении по ним фронта реакции для случая β_{ER} = 0.4. Концентрация горючего (C_{fuel} = 0.012) и условия зажигания те же, что и в предыдущем случае (рис. 10). Результаты расчетов показывают, что детонационный режим устанавливается в 7-ой камере и на выходе из нее. Максимальная скорость детонационной волны 1700 м/с, а средняя скорость – 1450 м/с. Таким образом, при данном значении параметра расширения (β_{ER} = 0.4) можно говорить об установлении режима низкоскоростной детонации.

На рис. 12 изображены траектории фронта пламени и его скорость для трубы с равномерно расположенными камерами при концентрации горючего 0.012. Горизонтальные линии на рис. 12b, с отмечают границы камер. Из рисунка видно, что в случае высоких значений параметра расширения устанавливался режим галопирующего горения с весьма регулярными осцилляциями скорости. Для более низких значений этого параметра осцилляции скорости были нерегулярными и имели меньшую амплитуду. Для еще более низких значений β_{ER} устанавливалась галопирующая детонация со средней скоростью распространения меньшей, чем скорость детонации Чепмена – Жуге для исследуемой смеси.

Таким образом, для рассматриваемого состава смеси значения параметра расширения β_{ER} = 0.4 ÷ 0.6 являются переходными между режимами низкоскоростной детонации и галопирующего горения. Исследуем, зависит ли переходная область параметра β_{ER} от состава смеси. На рис. 13 представлены результаты численных экспериментов по ускорению пламени в многокамерной трубе для различных значений начальных концентраций горючего (C_{fuel} = 0.012 и C_{fuel} = 0.015), но при одном и том же коэффициенте расширения β_{ER} = 0.6.

Из рис. 13 видно, что при концентрации горючего C_{fuel} = 0.012 в трубе устанавливается режим галопирующего горения со средней осевой скоростью 720 м/с. При повышении начальной концентрации горючего (C_{fuel} = 0.015) в окрестности 6-ой камеры происходит смена режима распространения волны: ускоряющееся галопирующее горение приводит к возникновению низкоскоростной детонации, которая распространяется со средней осевой скоростью 1600 м/с при максимальной скорости 2000 м/с на переходном участке. Таким образом, увеличение начальной концентра-

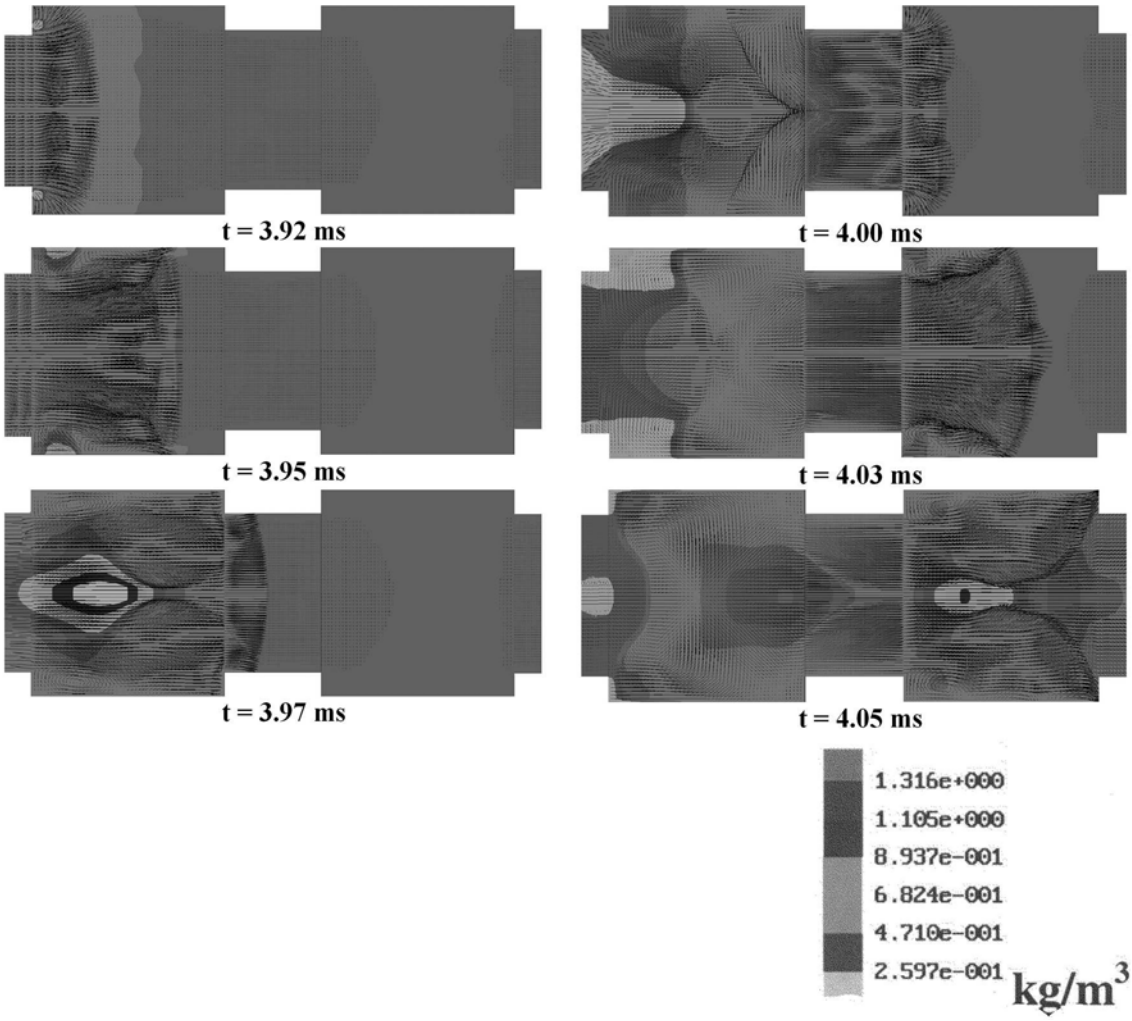


Рис. 11: Эволюция полей плотности и скорости 6-ой – 7-ой камерах многокамерного устройства при значении параметра расширения $\beta_{ER} = 0.40$, концентрации горючего 0.012

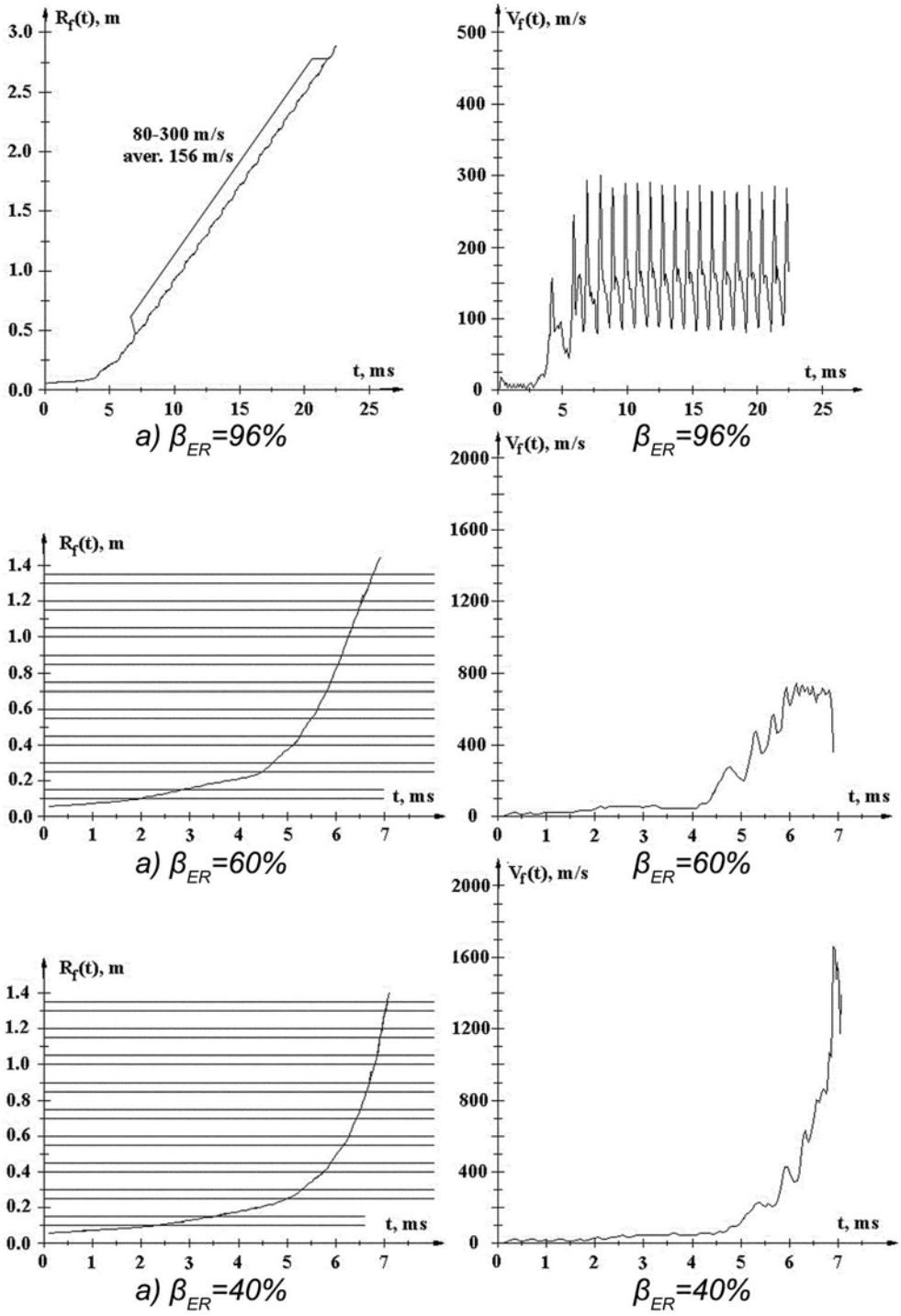


Рис. 12: Траектории и средние по сечению скорости фронта реакции при ускорении пламени в газовой смеси при концентрации горючего $C_{fuel} = 0.012$ в многокамерных устройствах для различных значений коэффициента расширения: (a) – $\beta_{ER} = 0.96$; (b) – $\beta_{ER} = 0.60$; (c) – $\beta_{ER} = 0.40$

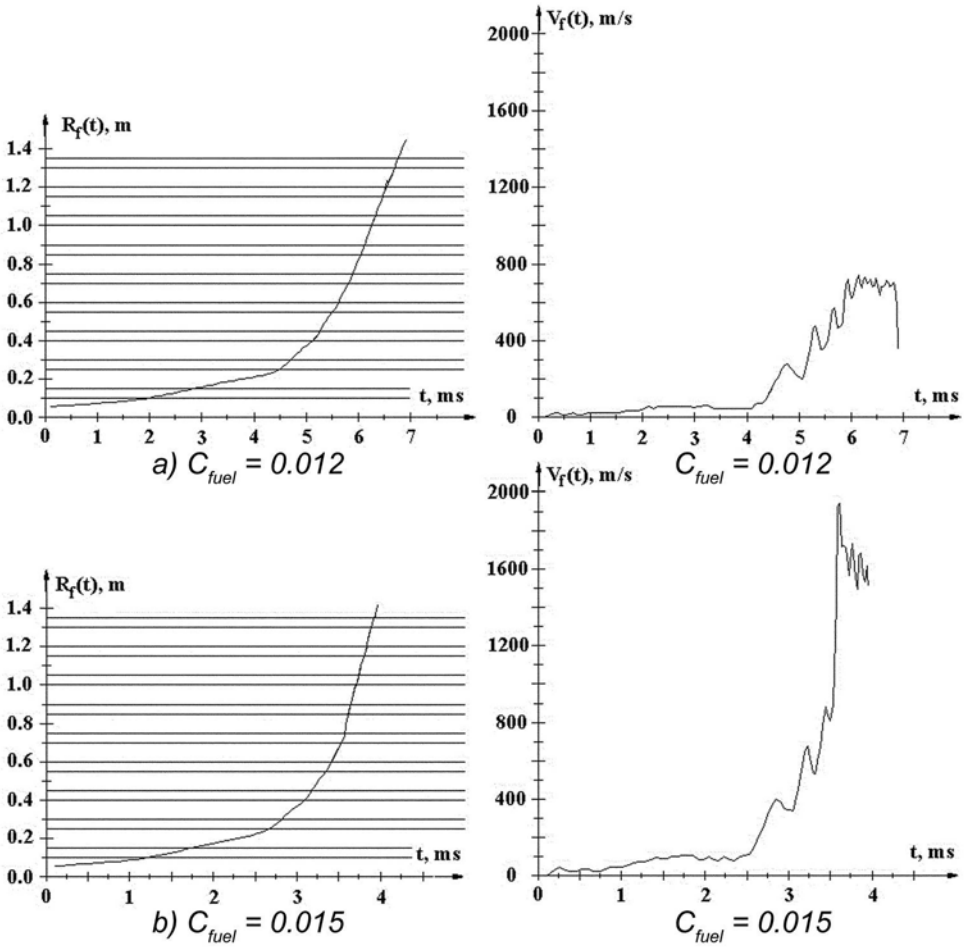


Рис. 13: Траектории и средние по сечению скорости фронта реакции при ускорении пламени в газовой смеси в многокамерных устройствах для коэффициента расширения $\beta_{ER} = 0.60$ при значениях концентрации горючего: (a) – $C_{fuel} = 0.012$; (b) – $C_{fuel} = 0.012$

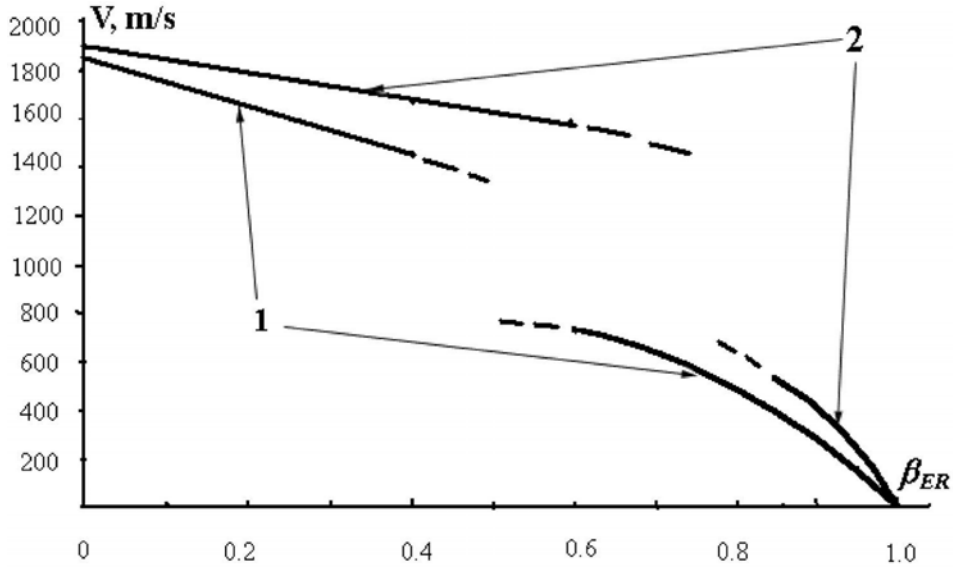


Рис. 14: Самоподдерживающиеся скорости фронта реакции в многокамерных устройствах как функции коэффициента расширения при концентрации горючего: 1 – $C_{fuel} = 0.012$; 2 – $C_{fuel} = 0.015$

ции горючего приводит к возрастанию переходных значений параметра расширения β_{ER}.

На рис. 14 представлены значения средней скорости самоподдерживающегося режима распространения фронта реакции в трубах с равномерно распределенными по оси камерами расширения как функции коэффициента расширения при различном составе смеси. Из графика видно, что средняя скорость фронта реакции уменьшается при увеличении коэффициента расширения β_{ER}.

Таким образом, суммируя роль камер турбулизаторов большого диаметра на ПГД в трубах, следует отметить, что наличие камер в начальной секции, где производится зажигание, способствует ускорению пламени и ПГД. С другой стороны, уже сформировавшаяся детонационная волна может разрушаться при выходе в камеру большого диаметра, что приводит к подавлению детонации. Сколько же камер необходимо интегрировать в начальную секцию трубы, чтобы добиться максимального эффекта ускорения ПГД? Проведенные расчеты для β_{ER} = 0.96 показывают, что таких камер достаточно две. Теоретическое объяснение опирается на выполнение необходимого условия ПГД, а именно: условия превышения скоростью пламени скорости звука в невозмущенном газе (критерий «сцепления», Зельдович и др., 1970, 1988). Анализ результатов расчетов (рис. 9) показывает, что поршневой эффект расширяющихся продуктов сгорания в форкамере приводит к резкому ускорению пламени при выходе в более узкую трубу. При выходе из первой камеры пламя приобретает среднюю скорость в диапазоне 110 ÷ 260 м/с в зависимости от состава смеси (рис. 9), что оказывается ниже скорости звука в исходной смеси. При выходе из второй камеры

пламя проталкивается в трубу со скоростью в диапазоне 435 ÷ 920 м/с, что уже значительно выше необходимого критерия. Поэтому дальнейшее увеличение числа камер нецелесообразно.

8. Влияние начальной температуры смеси на ПГД в газах

Влияние температуры на ПГД в газах является одной из наименее изученных сторон процесса. Имеющиеся экспериментальные данные весьма ограниченны и часто противоречивы. Так, увеличение температуры в стехиометрических смесях водорода с кислородом приводило к возрастанию преддетонационного расстояния (Laffitte, 1928). При уменьшении концентрации водорода существенного влияния температуры на преддетонационное расстояние обнаружено не было (Bollinger et al., 1961). Исследование ПГД в смесях углеводородов с воздухом (Смирнов, Бойченко, 1986) показало уменьшение преддетонационного расстояния при увеличении начальной температуры смеси.

Причина таких противоречивых результатов в том, что изменение температуры исходной смеси приводит к возникновению двух противоположных эффектов. С одной стороны, увеличение начальной температуры приводит к возрастанию скорости химических реакций, способствуя тем самым ускорению пламени. С другой стороны, переход горения в детонацию возможен после того, как скорость турбулентного пламени превысит скорость звука в газе, которая также возрастает с увеличением температуры, затрудняя тем самым переход горения в детонацию. Вероятно, совместное влияние этих двух противоборствующих механизмов и приводит к такой разнородности экспериментальных результатов.

Как уже отмечалось, в стехиометрических смесях водорода с кислородом в трубах постоянного поперечного сечения преддетонационное расстояние возрастает с увеличением температуры при постоянном давлении. Эти результаты показывают, что для таких систем преобладающее влияние оказывает фактор возрастания скорости звука по сравнению с возрастанием скорости пламени, что затягивает процесс ПГД.

В наших исследованиях ПГД в трубах, содержащих форкамеры большого объема в секции зажигания, ускорение пламени в узкой трубе происходит в большей степени вследствие его проталкивания вытекающими из камеры горячими продуктами реакции. Результаты расчетов (рис. 9) показывают, что уже на выходе из второй камеры скорость пламени значительно превосходит скорость звука в невозмущенной среде, что является результатом чисто газодинамических особенностей рассматриваемой схемы. Поэтому, возрастание или уменьшение скорости звука в исходной смеси в результате изменения температуры не может оказать существенного влияния на выполнение данного критерия, что нейтрализует негативное влияние на ПГД возрастания скорости звука в исходной смеси. Таким образом, фактор возрастания скоростей реакций (сокращения времен индукции) при возрастании температуры смеси должен стать доминирующим при определении сценария развития ПГД.

Численное моделирование распространения пламени в обедненных топливо-воздушных смесях (C_{fuel} = 0.011 ÷ 0.012) при повышенной температуре (T_0 = 353

К) показало, что возрастание начальной температуры способствует переходу горения в детонацию. На рис. 15 изображены траектории и скорости фронта горения как функции времени для нормальной (a: 300 К) и повышенной температуры (b: 353 К) при концентрации горючего C_{fuel} = 0.011. На рис. 16 такая же серия графиков иллюстрирует развитие процесса ПГД в таком же двухкамерном устройстве, но при более высокой начальной концентрации горючего (C_{fuel} = 0.012).

Из графиков (рис. 15, C_{fuel} = 0.011) видно, что при низкой температуре (T_0 = 300 К) рождения детонационной волны в устройстве не происходит. При столь низкой концентрации горючего возникает режим галопирующего горения. При повышенной температуре (T_0 = 353 К) процесс ПГД имеет место и формируется самоподдерживающаяся детонационная волна (рис. 15b), выход на которую осуществляется через режим пересжатой детонации. При более высокой концентрации горючего (рис. 16, C_{fuel} = 0.012) переход горения в детонацию в рассматриваемом устройстве имеет место как при нормальной (T_0 = 300 К, рис. 16a), так и при повышенной начальной температуре (T_0 = 353 К, рис. 16b). Тем не менее, формирование самоподдерживающейся детонационной волны при повышении начальной температуры происходит раньше, чем при низкой температуре. Преддетонационное расстояние с повышением температуры также сокращается.

Подводя предварительные итоги, следует отметить, что в трубах с форкамерами большого диаметра повышение начальной температуры смеси способствует ПГД и сокращает преддетонационное расстояние. В то же время в трубах без форкамер повышение начальной температуры газовой смеси может вызывать обратный эффект увеличения преддетонационного расстояния.

9. Заключение

Проведенные экспериментальные и теоретические исследования показывают, что в процессе перехода горения в детонацию зарождение детонации происходит в локальных экзотермических центрах («горячих точках») между ускоряющейся зоной турбулентного горения и головной ударной волной. Эти «горячие точки» возникают вследствие неоднородности потока, в большинстве случаях, на контактных поверхностях, образовавшихся в результате догонного взаимодействия ударных волн перед фронтом пламени.

В зависимости от структуры горячих точек, они могут служить источниками волн горения или волн детонации. При возникновении детонации, она распространяется во все стороны от источника, догоняет головную ударную волну, и после их взаимодействия по несгоревшей смеси распространяется квазиплоская волна сильной детонации, постепенно замедляющаяся до самоподдерживающегося значения скорости Чепмена-Жуге.

При возникновении в горячей точке волны горения она распространяется значительно медленнее, что дает время для воспламенения в других горячих точках и, в конечном итоге, может также привести к возникновению волны детонации.

Наличие одной или двух турбулизующих камер с широким поперечным сечением

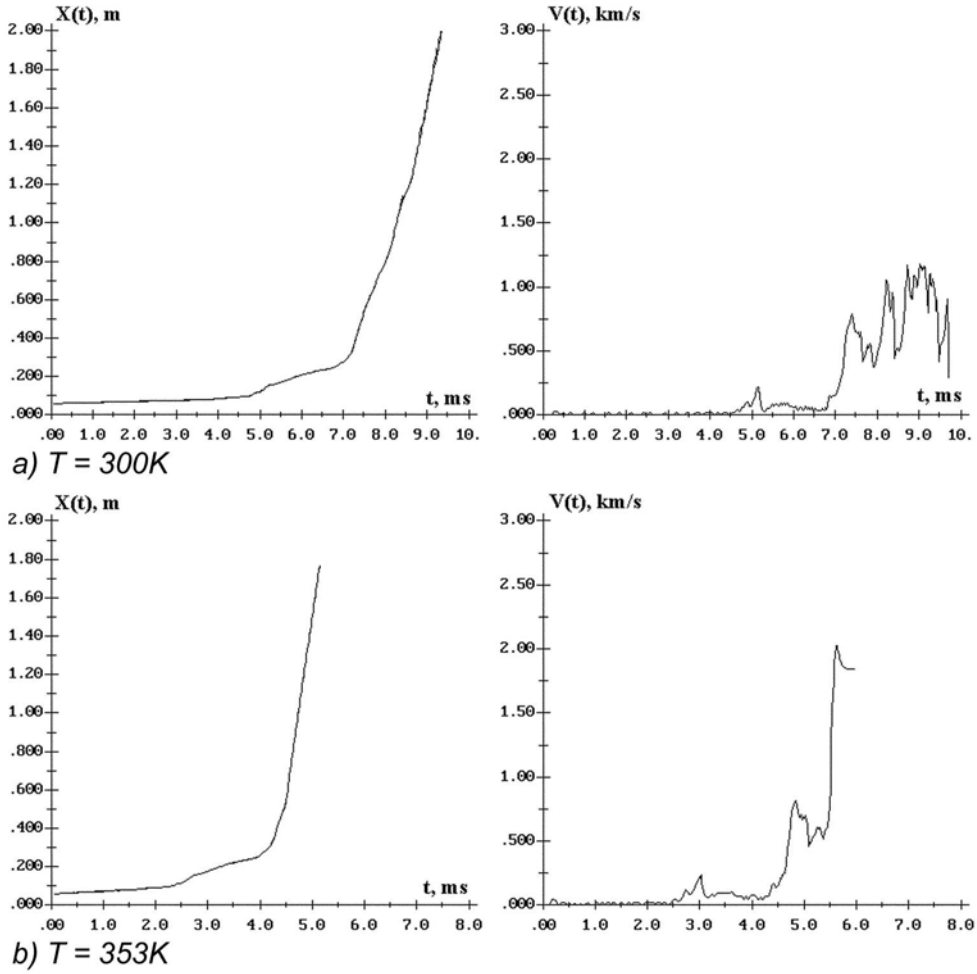


Рис. 15: Траектории (слева) и средние по сечению скорости фронта реакции (справа) при ускорении пламени в газовой смеси при концентрации горючего $C_{fuel} = 0.011$ в трубе с двумя форкамерами (коэффициент расширения: $\beta_{ER} = 0.96$) для различных значений температуры: (a) – $T_0 = 300$ K; (b) – $T_0 = 353$ K

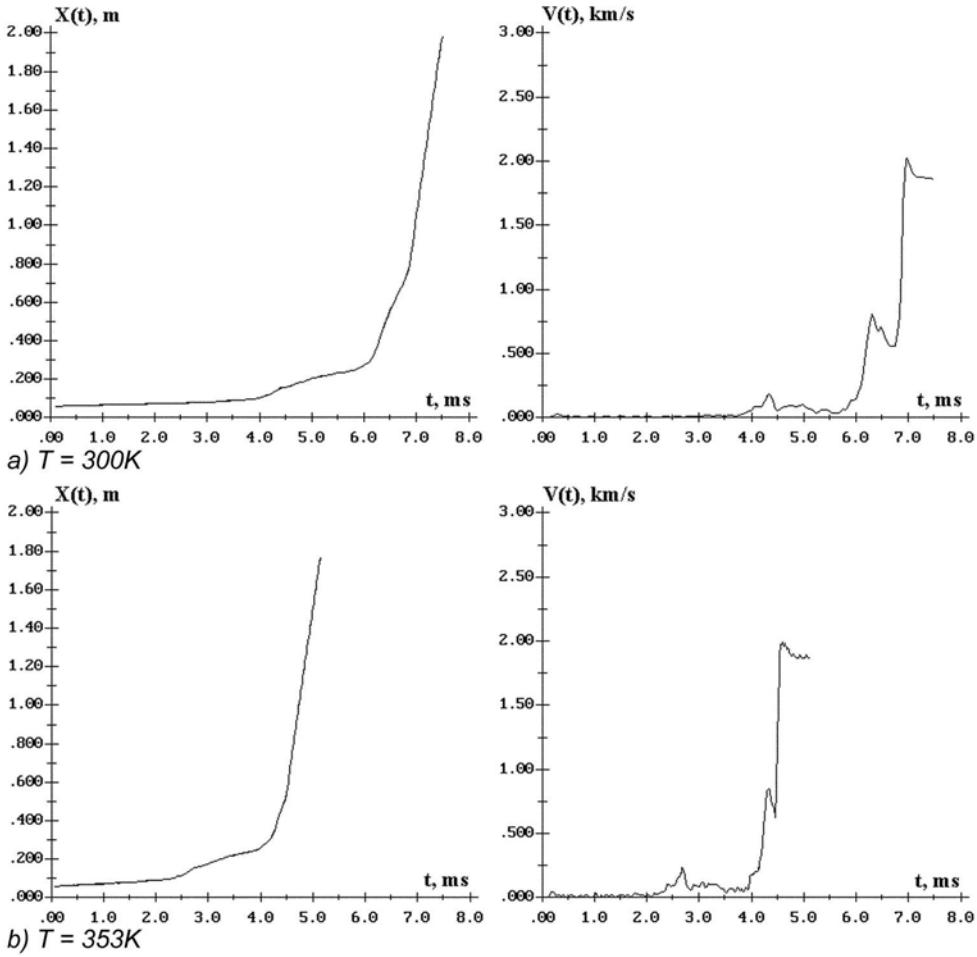


Рис. 16: Траектории (слева) и средние по сечению скорости фронта реакции (справа) при ускорении пламени в газовой смеси при концентрации горючего $C_{fuel} = 0.012$ в трубе с двумя форкамерами (коэффициент расширения: $\beta_{ER} = 0.96$) для различных значений температуры: (a) – $T_0 = 300$ K; (b) – $T_0 = 353$ K

в области зажигания сокращает преддетонационное расстояние для смесей углеводородов с воздухом и стабилизирует переход к детонации.

Увеличение числа одинаковых камер, равномерно расположенных вдоль трубы, блокирует переход к детонации; для высоких значений параметра расширения устанавливался режим галопирующего горения, для меньших – режим галопирующей низкоскоростной детонации. При этом средняя скорость фронта реакции вдоль оси трубы возрастает при увеличении концентрации углеводородного горючего в диапазоне $0.010 \div 0.015$. В диапазоне значений параметра расширения $0.4 \div 0.6$ увеличение концентрации горючего может приводить к смене режима галопирующего горения и установлению режима низкоскоростной детонации.

Увеличение числа камер турбулизаторов, расположенных в начальной секции трубы, способствует ПГД, пока скорость турбулентного пламени при выходе из последней не превышает скорость звука. Дальнейшее увеличение числа камер препятствует ПГД.

Повышение начальной температуры смеси в трубах с форкамерами большего диаметра способствует ПГД и сокращает преддетонационное расстояние, в то время как в трубах постоянного сечения эффект от повышения температуры может быть строго обратным.

Литература

[1] *Зельдович Я. Б., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М., Сивашинский Г. И.* О переходе к детонации в неравномерно нагретом газе. — Прикладная Математика и Техническая Физика, 2, 76, 1970.

[2] *Саламандра Г. Д.* О взаимодействии пламени с ударной волной. — В: Физическая Гидродинамика, изд-во АН СССР, 1959.

[3] *Смирнов Н. Н., Бойченко А. П.* Переход горения в детонацию в бензиново-воздушных смесях. — Физика Горения и Взрыва, 22, 2, 1986.

[4] *Смирнов Н. Н., Демьянов Ан. Ю., Панфилов И. И.* Переход горения в детонацию. Химическая Физика Горения и Взрыва: Детонация. — Изд-во АН СССР, 1989.

[5] *Солоухин Р. И.* Методы измерений и основные результаты в ударных трубах. — Изд-во Новосибирского Государственного университета, 1969.

[6] *Bollinger L. E., Fong M. C., Edse R.* Experimental measurements and theoretical analysis of detonation induction distance. — ARSJ, 31, 1961.

[7] *Borisov A. A.* Acta Astronautica. — 1, 1974.

[8] *Brown C. J., Thomas G. O.* Experimental studies of shock-induced ignition and transition to detonation in ethylene and propane mixtures. — Combustion and Flame, 117, 1999.

[9] *Kailasanath K. and Oran E. S.* Ignition of flamelets behind incident shock waves and the transition to detonation. — Combustion Science Technology, 34, 1983.

[10] *Khohlov A. M., Oran E. S.* Numerical simulation of detonation initiation in a flame brush: the role of hot spots. — Combustion and Flame, 119, 1999.

[11] *Laffitte P.* Influence of temperature on the formation of explosive waves. — Comp. Rendu, 186.

[12] *Merzhanov A. G.* — Combustion and Flame, 10, 1966.

[13] *Oppenheim A. K., Urtiew P. A.* Experimental observations of the transition to detonation in an explosive gas. — Proc. Roy. Soc., A295, 13, 1966.

[14] *Philip M.* Dissertation «Experimentelle und theoretische Untersuchungen zum Stabilitatsverhalten von Drallflammen mit zentraler Ruckstromzone». — Karlsruhe University, 1991.

[15] *Smirnov N. N., Tyurnikov M. V.* Experimental Investigation of Deflagration to Detonation transition Hydrocarbon-air gaseous mixtures. — Combustion and Flame, 100, 1995.

[16] *Smirnov N. N., Nikitin V. F., Boichenko A. P., Tyurnikov M. V., Baskakov V. V.* Deflagration to detonation transition in gases and its application to pulse detonation devices. — In: Gaseous and Heterogeneous Detonations: Science to Applications (Ed. Roy G. D. et. al.), Moscow, ENAS Publ, 1999.

[17] *Smirnov N. N., Nikitin V. F., Tyurnikov M. V., Boichenko A. P., Legros J. C., Shevtsova V. M.* Control of detonation onset in combustible gases. — In: High Speed Deflagration and Detonation (Ed. Roy G. D. et al.), Moscow, Elex-KM Publ, 2001.

[18] *Smirnov N. N., Panfilov I. I.* Deflagration to detonation transition in combustible gas mixtures. — Comb. And Flame, 101, 1995.

[19] *Zeldovich Ya.B., Gelfand B. E., Tsyganov S. A., Frolov S. M., Polenov A. N.* Concentration and temperature non-uniformities of combustible mixture as a reason of pressure waves generation. — In: Dynamics of Explosions (Eds. A Kuhl et al.) AIAA Inc., New York, 114, 1988.

Математическое моделирование процессов необратимого динамического деформирования, микро- и макроразрушения твердых тел

Киселев А. Б.

Термомеханические процессы, которые происходят в твердых телах под действием интенсивных динамических нагрузок, состоят из взаимосвязанных между собой механических, тепловых и структурных превращений. Последние включают формирование, движение и взаимодействие дефектов в кристаллах металлов, фазовые переходы, разрывы связей между молекулами в полимерах, накопление микроструктурных повреждений (пор, трещин) и т.п. Эти процессы проявляются как необратимые деформации, полосы адиабатического сдвига, микроразрушения. Динамическое разрушение является сложным многостадийным процессом, включающим появление, развитие и слияние микродефектов, формирование зародышевых микротрещин, которые растут, объединяются, образуя макротрещины. В конечном счете тело распадается на отдельные фрагменты.

Настоящая работа затрагивает довольно широкий круг вопросов, связанных как с построением математических моделей деформируемых твердых тел, их разрушения от стадии накопления рассеянных по телу микроповреждений до появления макротрещин, разработке методов расчета «нестандартных» констант моделей сред, связанных с параметрами поврежденности, моделям фрагментации тонкостенных конструкций и компактных элементов, так и методам численного моделирования процессов деформирования и разрушения, которые рассматривались в последние двадцать лет на кафедре газовой и волновой динамики МГУ им. М. В. Ломоносова.

1. Модели механики континуального разрушения

Принято выделять три основных типа динамического разрушения твердых тел: вязкое, хрупкое и с образованием полос адиабатического сдвига.

Вязкое разрушение, наблюдаемое в таких металлах как алюминий и медь, твердых топливах и взрывчатых веществах, характеризуется образованием и развитием в процессе пластического деформирования пор, близким к сферическим.

Для хрупкого разрушения характерно образование в теле большого числа произвольно ориентированных монетообразных микротрещин, способных расти в течение всего времени протекания процесса деформирования. Разрушения такого типа отмечены в бериллии, ряде сталей, армко-железе.

При высоких скоростях деформирования процесс пластического течения является адиабатическим. В ряде случаев выделенное тепло концентрируется в тонких областях толщиной до нескольких десятков микрон, расположенных вдоль поверхностей максимальных касательных напряжений, что приводит к значительному увеличению пластического течения вдоль этих поверхностей. Подобные разрушения путем

образования полос адиабатического сдвига наблюдаются, в частности, в стальных цилиндрах, нагруженных взрывом, при пробивании преград ударниками с плоским передним срезом (выбивание «пробки» из преграды).

Поскольку в процессе динамического деформирования образуется большое число несплошностей указанных выше типов, трудно рассматривать каждое такое микроповреждение отдельно. Поэтому в последние годы для описания процессов микроразрушения развиваются подходы, согласно которым в определяющие уравнения вводят некоторые внутренние переменные, характеризующие развитие микроповреждений. Это направление получило название механики континуального (или рассеянного) разрушения.

Развитие механики континуального разрушения началось с работ Качанова Л. М. [1] и Работнова Ю. Н. [2], посвященных теории ползучести материалов, в которых впервые был введен скалярный параметр поврежденности. Вскоре А. А. Ильюшиным было предложено рассматривать тензорные меры поврежденности [3] и попытки введения тензоров поврежденности предпринимаются до сих пор (см., например, [4]).

Введение параметров поврежденности в систему внутренних переменных и использование термодинамических принципов механики сплошной среды делает возможным построение термодинамически корректных связанных моделей повреждаемых твердых тел (см. [4] – [22] и приведенную там библиографию).

В частности, построена термоупруговязкопластическая модель с двумя параметрами поврежденности, которая позволяет описывать микроразрушение как накоплением микродефектов типа пор в областях интенсивного растяжения, их залечивания при сжатии, так и разрушение сдвигом [19, 20]. При этом был введен симметричный тензор поврежденности ω_{ij}. Поскольку модель была предназначена для описания микроразрушений двух типов: вязкого с образованием микропор сферической формы и с образованием полос адиабатического сдвига, то в качестве параметров поврежденности были выбраны два инварианта тензора ω_{ij}: скаляры $\omega = \omega_{kk}/3$ – объемную поврежденность и $\alpha = \sqrt{\omega'_{ij}\omega'_{ij}}$ - интенсивность девиатора тензора поврежденности $\omega'_{ij} = \omega_{ij} - \omega\delta_{ij}$. При этом считалось, что параметр ω описывает накопление повреждений типа микропор в областях интенсивного растяжения, которые могут залечиваться при сжатии, а параметр α описывает сдвиговое разрушение. Будем интерпретировать параметр ω, как и в классических теориях [1, 2], как относительное сокращение эффективной несущей нагрузку площади площадки вследствие появления распределенных внутри образца микропор. Параметр ω можно считать объемным содержанием микропор в материале. В неповрежденном материале $\omega = \alpha = 0$, с накоплением повреждений ω и α растут, оставаясь меньшими 1.

Система определяющих уравнений модели среды имеет следующий вид [19, 20]:

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\sigma}{K} + \alpha_v\ (T - T_0) + \Lambda \int\limits_0^{\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} d\omega, \qquad e^e_{ij} = \frac{S_{ij}}{2\mu} + A \int\limits_0^{\alpha} \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{ij}} d\alpha,$$

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \frac{S_{ij}}{2\eta}\ \frac{S_u - \sqrt{\frac{2}{3}}\ Y}{S_u} H(S_u - \sqrt{\frac{2}{3}}\ Y),$$

$$\dot{\omega} = \varphi(\omega, \sigma) = B(\frac{\sigma}{1-\omega} - \sigma_*)H(\frac{\sigma}{1-\omega} - \sigma_*) + \omega\frac{\sigma - \sigma^+}{4\eta_0}H(\sigma - \sigma^+) + \omega\frac{\sigma - \sigma^-}{4\eta_0}H(\sigma^- - \sigma),$$

$$\sigma^+ = -\frac{2}{3}\ Y_0\ ln\ \omega, \qquad \sigma^- = \frac{2}{3}\ Y_0\ ln\ \omega,$$

$$\dot{\alpha} = \psi(\omega, \alpha, S_u) = C(\frac{S_u}{(1-\omega)(1-\alpha)} - S^*_u)H(\frac{S_u}{(1-\omega)(1-\alpha)} - S^*_u),$$

$$K = K_0(1-\omega), \quad \mu = \mu_0(1-\omega)(1-\alpha), \quad \eta = \eta_0(1-\omega)(1-\alpha), \quad Y = Y_0(1-\omega)(1-\alpha),$$

$$\rho c_\sigma \dot{T} + \alpha_v \dot{\sigma} T \ = \ \tau_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij} + \Lambda\dot{\omega}^2 + A\dot{\alpha}^2 - div\vec{q}, \qquad \vec{q} = -\kappa\ gradT,$$

$$S_u = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}, \quad \tau_{ij} = S_{ij} + \Gamma\varepsilon^p_{ij}.$$

Здесь приняты следующие обозначения: σ_{ij}, ε^e_{ij} и ε^p_{ij} – напряжения, упругие и неупругие (вязкопластические) деформации соответственно ($\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij} + S_{ij},\ \sigma = \sigma_{kk}/3$); при этом полные деформации ε_{ij} складываются из упругих ε^e_{ij} и неупругих ε^p_{ij} и вязкопластическое течение несжимаемо: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^p_{ij}$, $\varepsilon^p_{kk} = 0$; T – абсолютная температура; $\vec{q}$ – тепловой поток; ρ – плотность; $\Gamma \geq 0$ – параметр деформационной анизотропии материала; $A, D, C, \Lambda, \sigma_*, S^*_u$ – константы материала, связанные с параметрами поврежденностями; K_0, μ_0, η_0, Y_0 - объемный модуль, модуль сдвига, динамическая вязкость и статический предел текучести при простом растяжении для неповрежденного материала соответственно; c_σ – тепломкость при постоянных напряжениях; α_v – коэффициент объемного расширения; κ – коэффициент теплопроводности; $H(x)$ – единичная функция Хевисайда; точка над символом означает материальную производную по времени.

Кинетическое уравнение для объемной поврежденности ω состоит из трех слагаемых. Первое имеет вид уравнения Тулера – Бучера и описывает стадию зарождения и начального роста объемной поврежденности ω. Затем, по мере накопления ω, включается второй член, который описывает вязкий рост пор в областях растяжения материала. Последний третий член описывает вязкопластическое затекание пор при сжатии материала [12]. Отметим, что кинетическое уравнение для ω без первого члена получается из решения задачи динамики одной сферической поры внутреннего радиуса a и внешнего радиуса b в вязкопластическом несжимаемом материале при $\omega = (a/b)^3$.

Предел текучести Y_0, модуль сдвига μ_0 и динамическая вязкость η_0 могут зависеть от температуры, давления, других параметров состояния, например, как в модели Штейнберга – Гуинана [9, 12].

Представленная выше модель является развитием модели упруговязкопластической среды типа Соколовского – Пэжины и учитывает появление и накопление повреждений в областях интенсивного растяжения и их залечивание при сжатии, а также накопление повреждений при сдвиге, тепловые эффекты. Механические, структурные и тепловые процессы являются взаимосвязанными.

Выпишем другой вариант модели повреждаемой среды – модели повреждаемой термоупругопластической среды, в основу которой положена модель течения типа Прандтля – Рейса с условием пластичности Мизеса. В этом случае третье уравнение из выше выписанной системы заменяется на следующие:

$$(\tau'_{ij})^{\nabla} + \lambda\tau'_{ij} = 2\mu_0\dot{e}_{ij}, \qquad \tau'_{ij}\tau'_{ij} \leq \frac{2}{3}Y_0^2,$$

а остальные уравнения такие же, как в первой модели. Значком ∇ обозначена Яумановская производная по времени.

2. Критерий начала макроразрушения

Развитие интенсивного пластического течения, накопление микроструктурных повреждений является предразрушением материала. В качестве начала макроразрушения (появления трещин в материале - новых свободных поверхностей) предлагается энтропийный критерий предельной удельной диссипации [9, 23]:

$$D = \int\limits_0^{t_*} \frac{1}{\rho}(d_M + d_F + d_T)dt = D_*;$$

$$d_M = \tau_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}, \qquad d_F = \Lambda\dot{\omega}^2 + A\dot{\alpha}^2, \qquad d_T = \kappa(gradT)^2/T,$$

где t_* – время начала разрушения, D_* – константа материала (предельная удельная диссипация); d_M – механическая диссипация, d_F – диссипация континуального разрушения, d_T – термическая диссипация (в случае использования классического уравнения теплопроводности Фурье).

В случае появления в теле зон больших растягивающих напряжений, как, например, в задаче плоского соударения пластин с откольным разрушением [9], основной вклад в диссипацию D дает член $\Lambda\dot{\omega}^2$ из d_F и d_M. В случае развитого сдвигового пластического течения по типу образования полос адиабатического сдвига, как в задаче выбивания «пробки» из преграды ударником с плоским передним срезом, основной вклад в диссипацию D дают члены $A\dot{\alpha}^2$ из d_F, d_M и d_T. Когда критерий разрушения выполняется в некоторой точке материала, там должна зародиться макротрещина, новая свободная поверхность, которая будет распространяться по телу, и задача расчета дальнейщего деформирования и разрушения становится самостоятельной проблемой вычислительной механики деформируемого твердого тела.

3. Методы расчета констант моделей повреждаемых сред

В модели таких сред [8] – [22] входят «нестандартные» константы, связанные с параметрами поврежденности и подлежащие экспериментальному определению. В моделях с одним параметром поврежденности [9, 12] таких констант три. Кроме того, четвертой неизвестной константой является предельная удельная диссипация

D_*. Для их определения использовался метод, основанный на численном и физическом моделировании процесса плоского соударения пластин с откольным разрушением [9, 12, 23]. Для модели пористой среды [12], предназначенной для описания динамики твердых топлив и ВВ, привлекалась также задача об ударном сжатии газонаполненной микропоры [24].

В модели с двумя параметрами поврежденности, представленной выше, таких констант уже семь: $B, \Lambda, \sigma_*, A, C, S_u^*, D_*$. Для их определения разработан метод, основанный на численном и физическом моделировании процессов квазидинамического кручения и растяжения тонкостенных трубчатых образцов с разрушением и последующей математической обработке результатов численных и физических экспериментов [25]. Однако, нам не известно опубликованных результатов таких экспериментов, которые позволили бы рассчитать константы для реальных материалов. Поэтому основным путем получения необходимых данных остаются уже отмеченные выше эксперименты по соударению пластин с отколом, проведенные в широком диапазоне скоростей соударения (многочисленные работы ученых ИВТАН, ВНИИЭФ и др.) [26]. В частности, эти эксперименты были использованы в работе [27] для определения всех семи констант модели [19, 20].

4. Численное моделирование макроразрушения

Разработанные методы численного расчета динамического деформирования тел в одномерном, двумерном и трехмерном случаях с разрушением вплоть до разделения тел на отдельные фрагменты основаны на процедуре перестройки расчетных лагранжевых сеток с явным выделением поверхностей разрушения [28] – [33]. Получены численные решения задач откольного разрушения при взрывном и ударном воздействиях [9, 16, 23, 43, 44], пробивания тонких преград, в том числе наклонного пробивания [30] – [35]. Численно исследован в двумерной плоской постановке процесс распространения криволинейных трещин в нефтеносном пласте, который моделировался повреждаемой (микропористой) термоупруговязкопластической средой, в процессе гидроразрыва пласта [36].

Особо отметим задачу нормального пробивания тонкой преграды деформируемым телом вращения сложной конструкции, решенную еще в 1980 г. под руководством академика Рахматулина Х. А. [34, 35]. Преграда представляет собой круглую пластину, а ударник является оболочкой вращения переменной толщины с заполнителем. Типичная оболочка ударника состоит из головной части оживальной формы, переходящей вблизи носика в сферическую оболочку, и донной части, также оживальной формы, но малой кривизны, заканчивающейся жестким дном. Задача динамики оболочки рассматривается как геометрически нелинейная в приближении Тимошенко С. П. Поведение материала оболочки описывается уравнениями теории малых упругопластических деформаций Ильюшина А. А. При этом учитывается разгрузка материала, возможность появления областей вторичных пластических деформаций. Заполнитель считается линейно упругим телом. Учитывается возможность скольжения заполнителя вдоль внутренней поверхности оболочки, в том числе с трени-

ем, отрыва его от оболочки и восстановления контакта [37, 38, 39]. Пластина, по которой производится удар, моделируется, как и корпус ударника, упругопластической оболочкой вращения. На контактной поверхности ударник — преграда ставятся граничные условия скольжения ударника вдоль преграды с трением. Учитывается возможность разрушения тонкой преграды всех экспериментально наблюдаемых типов: прокол, выбивание пробки, лепестковое разрушение, отрыв лепестков. Задача пробивания решается численно по явной конечно-разностной схеме типа Уилкинса. Из результатов решения задачи пробивания отметим один. Абсолютный максимум интенсивности деформаций в оболочке ударника $(\varepsilon_u)_{max}$ достигается вблизи носика и с уменьшением скорости удара V_0 приближается к нему. При этом зависимость $(\varepsilon_u)_{max}$ от V_0 не носит мотононно возрастающего характера. В частности, имеет место заметный всплеск функции $(\varepsilon_u)_{max} = (\varepsilon_u)_{max}(V_0)$ в области малых скоростей V_0 (порядка $200 - 250$м/с для рассмотренной конструкции). Объясняется это тем, что при этих скоростях происходит значительное увеличение площади области контакта ударника с преградой и продолжительности взаимодействия, хотя интегральная сила взаимодействия и уменьшается. Поскольку в качестве критерия разрушения оболочки ударника можно принять интенсивность деформаций, отсюда следует следующий вывод. При малых скоростях пробивания V_0 порядка $200 - 250$м/с должно произойти разрушение конструкции ударника, которое при дальнейшем увеличении V_0 до величины порядка $450 - 500$м/с не будет наблюдаться. При дальнейшем увеличении V_0 разрушение неизбежно. Такой теоретический результат нашел и экспериментальное подтверждение.

Идеи метода перестройки лагранжевых сеток были также успешно использованы при построении расчетных сеток в двумерных областях сложной геометрии с выделением внутренних контактных границ раздела различных сред [40, 41, 42].

Дано обоснование корректности известной процедуры «приведения напряжений на поверхность текучести», используемой в численном методе Уилкинса, для упрочняющейся упругопластической среды в самом общем случае, когда предел текучести является функцией давления, плотности, температуры, интенсивности пластических деформаций и, возможно, некоторых других параметров, как в модели Штейнберга – Гуинана [45]. Этим методом было получено решение большинства задач, затронутых в настоящем обзоре. Метод Уилкинса для двумерного и трехмерного случаев получил дальнейшее развитие и в направлении учета сложных граничных условий на контактных поверхностях взаимодействующих тел (отрыв тел друг от друга, восстановление контакта, скольжение с трением), были введены специальные искусственные вязкости (тензорная, угловая, контурная) [46, 47]. Кроме того, получены корректные граничные условия для задач с центральной и осевой симметрией при $r = 0$, где уравнения механики деформируемых сред имеют устранимую особенность типа $0/0$, и предложены численные схемы для их реализации [48, 49].

5. Моделирование фрагментации тонкостенных конструкций и компактных элементов

Предложены математические модели для расчета взрывного разрушения тонких упруговязкопластических оболочек, в том числе композитных, типа контейнеров, разгонных блоков космических ракет, топливных баков при взрыве в замкнутом объеме конструкций, а также модель фрагментации частиц при столкновении [50] – [58]. Фрагментация наступает при выполнении критерия разрушения предельной удельной диссипации, как и в представленных выше моделях повреждаемых сред, и принимается, что на разрушение оболочки (или частицы) затрачивается накопленная в ней упругая энергия, а распределение осколков по массе описывается распределением Вейбулла, в том числе двумодальным. Распределение Вейбулла является частным случаем общих вероятностных представлений и используется в механике деформируемого твердого тела также для описания усталостных испытаний материалов. Модели позволяют рассчитать число фрагментов, их распределение по массам и типам разрушения, скорости разлета. Результаты этих исследований нашли практическое применение при построении математических моделей образования и эволюции техногенного «космического мусора» на околоземных орбитах [59] – [68].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-01-00127), INTAS (грант № 00-0706) и гранта поддержки ведущих научных школ России НШ – 19.2003.1.

Литература

[1] *Качанов Л. М.* О времени разрушения в условиях ползучести. — Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1958. № 8.

[2] *Работнов Ю. Н.* Механизм длительного разрушения. — Вопросы прочности материалов и конструкций.М.: Изд-во АН СССР, 1959.

[3] *Ильюшин А. А.* Об одной теории длительной прочности. — Инж. журн. Механика твердого тела, 1967, № 3.

[4] *Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В.* Нелинейная механика разрушения. — Самара: Изд-во «Самарский университет», 2001.

[5] *Coleman B. D., Gurtin H. E.* Thermodynamics with internal state variables. — J. Chem. Phys, 1967, Vol. 47, № 2.

[6] *Кондауров В. И., Мухамедиев Ш. А., Никитин Л. В., Рыжак Е. И.* Механика разрушения горных пород. — М.: ИФЗ АН СССР, 1987.

[7] *Кондауров В. И., Никитин Л. В.* Теоретические основы реологии геоматериалов. — М.: Наука, 1990.

[8] *Киселев А. Б., Юмашев М. В.* Математическое моделирование деформирования и разрушения упруговязкопластической сплошной среды в нестационарных термомеханических условиях. Численное решение задач волновой динамики. — Математические исследования, вып. 117, Кишинев: Штиинца, 1990.

[9] *Киселев А. Б., Юмашев М. В.* Деформирование и разрушение при ударном нагружении. Модель повреждаемой термоупругопластической среды. — ПМТФ, 1990, № 5.

[10] *Киселев А. Б., Юмашев М. В.* Математическая модель деформирования и разрушения твердого ракетного топлива при ударном нагружении. — YII Всес. съезд по теор. и прикл. механике, Аннот. докл., М., 1991.

[11] *Киселев А. Б., Юмашев М. В.* Уравнения состояния металлов при интенсивном динамическом нагружении. Модель повреждаемой термоупругопластической среды. Экстремальные уравнения состояния. — Сб. научн. трудов под ред. Фортова В. Е. и Кузьменкова Е. А., М.: ИВТАН, 1991.

[12] *Киселев А. Б., Юмашев М. В.* Математическая модель деформирования и разрушения твердого топлива при ударном нагружении. — ПМТФ, 1992, № 6.

[13] *Киселев А. Б., Юмашев М. В.* О модели динамического деформирования и разрушения твердого топлива. Вопросы механики сплошных сред. — М.: Изд-во МГУ, 1993.

[14] *Kiselev A. B., Yumashev M. V.* Mathematical modelling of dynamic processes of deformation and microfracture of metals and solid fuels. — Proc. of the IMACS Symp. on Mathematical Modelling (Febr. 2-4, 1994, Tech. Univ. Vienna, Austria), Vol. 5, Vienna: TUV, 1994.

[15] *Kiselev A. B.* Thermomechanical model of dynamic deformation and combined fracture of solids. — Proc. of Int. Conf. on Structure and Properties of the Brittle and Quaziplastic Materials (June 14-16, 1994, Riga, Latvia), Riga: Inst. of Inorganic Chemistry of the Latvia Academy of Sciences.

[16] *Киселев А. Б., Юмашев М. В.* Численное исследование динамических процессов деформирования и микроразрушения повреждаемой термоупругопластической среды. — Вестн. МГУ, Матем. Механ., 1994, № 1.

[17] *Kiselev A. B.* The model of thermoelastoplastic deformation and fracture of materials under multiaxial loading. — Fourth Int. Conf. on Biaxial/Multiaxial Fatigue (St. Germain en Laye, France, May 31 - June 3, 1994), Vol. 2.

[18] *Kiselev A. B., Yumashev M. V., Zelensky A. S.* Mathematical modelling of dynamic processes of deformation and microfracture of thermoelastoplastic media. — Advances in Fracture Resistance in Materials (Proc. of Eighth Int. Congress of Fracture), Vol. 2, New Delhi: McGraw Hill, 1996.

[19] *Kiselev A. B.* Mathematical modelling of dynamical deforming and combined microfracture of damageable thermoelastoviscoplastic medium. — Studies in Applied Mechanics 45: Advanced Methods in Materials Processing Defects, Amsterdam: Elsevier, 1997.

[20] *Киселев А. Б.* Математическое моделирование динамического деформирования и комбинированного микроразрушения термоупруговязкопластической среды. — Вестн. МГУ, Матем. Механ., 1998, № 6.

[21] *Киселев А. Б.* Математическое моделирование динамических процессов необратимого деформирования и разрушения твердых тел. — Математическое моделирование, 2000, № 6.

[22] *Киселев А. Б.* Модели необратимого динамического деформирования и микроразрушения повреждаемых сред. — Материалы Межд. научного симп. по проблемам механики деформируемых сред, посв. 90-летию Ильюшина А. А. (Москва, 22-23 янв. 2001), М.: Изд-во МГУ, 2001.

[23] *Киселев А. Б., Юмашев М. В.* О критериях динамического разрушения термоупругопластической среды. — Вестн. МГУ, Матем. Механ, 1990, № 4.

[24] *Киселев А. Б., Юмашев М. В.* Численное исследование ударного сжатия микропоры в термоупруговязкопластическом материале. — Вестн. МГУ, Матем. Механ., 1992, № 1.

[25] *Kiselev A. B., Yumashev M. V., Volod'ko O.V.* Deforming and fracture of metals. The model of damageable thermoelastoviscoplastic medium. — Materials Processing Technology, 1998, Vol. 80-81.

[26] *Канель Г. И., Разоренов С. В., Уткин А. В., Фортов В. Е.* Ударно-волновые явления в конденсированных средах. — М.: «Янус-К», 1996.

[27] *Kiselev A. B., Lukyanov A. A.* Mathematical modelling of dynamic processes of irreversible deforming, micro- and macrofracture of solids and structures. — Int. J. of Forming Processes, 2002, Vol. 5, № 2-3-4.

[28] *Гулидов А. И., Шабалин И. И.* Численное моделирование криволинейной трещины откола при соударении пластин. — Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы IX Всес. конф., Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1986.

[29] *Фомин В. М., Гулидов А. И., Киселев А. Б. и др.* Высокоскоростное взаимодействие тел. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.

[30] *Киселев А. Б.* Численное моделирование в трехмерной постановке наклонного пробивания тонких преград. Численное решение задач волновой динамики. — Математические исследования, вып. 108, Кишинев: Штиинца, 1989.

[31] *Киселев А. Б.* Численное моделирование рикошета жесткого ударника от упругопластической преграды в трехмерном случае. Механика деформирумых сред. — М.: Изд-во МГУ, 1985.

[32] *Киселев А. Б., Максимов В. Ф.* Численное решение трехмерной задачи пробивания тонкой упругопластической преграды. — YI Всес. съезд по теор. и прикл. механике. Аннотации докладов, Ташкент: Фан, 1986.

[33] *Киселев А. Б., Максимов В. Ф.* Численное решение трехмерной задачи пробивания тонкой упругопластической преграды. Волновые задачи механики деформируемых сред, Ч. 1. — М.: Изд-во МГУ, 1990.

[34] *Киселев А. Б., Максимов В. Ф.* Численное моделирование нормального пробивания тонкой преграды деформируемым телом вращения. — Изв. РАН, МТТ, 1995, № 5.

[35] *Kiselev A. B., Maksimov V. F.* Numerical investigation of penetration into thin target by axially symmetric body. Plasticity and Impact Mechanics. Editor N. K. Gupta. — New Delhi: New Age International (P) Limited, Publishers, 1996.

[36] *Киселев А. Б., Лукьянов А. А., Тьерсилен М.* Численное моделирование распространения криволинейных трещин гидроразрыва. — Вестн. МГУ, Матем. Механ., 2004, № 1.

[37] *Киселев А. Б.* Поведение упругопластической оболочки вращения при осесимметричном динамическом нагружении. — Вестн. МГУ, Матем. Механ., 1981, № 2.

[38] *Максимов В. Ф., Киселев А. Б.* Численное моделирование сложного взаимодествия упругопластической оболочки вращения с упругим заполнителем. — Вестн. МГУ, Матем. Механ., 1982, № 1.

[39] *Максимов В. Ф., Киселев А. Б.* К численному моделированию сложного взаимодествия оболочки вращения с заполнителем с учетом трения. — Вестн. МГУ, Матем. Механ., 1984, № 2.

[40] *Киселев А. Б., Кабак Н. Е.* Метод построения расчетных сеток с выделением внутренних контактных границ. — Моделирование в механике, 1990, Т. 4 (21), № 5.

[41] *Киселев А. Б., Кабак Н. Е.* Алгоритм построения единой расчетной лагранжевой сетки с выделением контактных поверхностей для решения задач динамики взаимодействия деформируемых сред. Динамические задачи механики деформируемых сред. — М.: Изд-во МГУ, 1990.

[42] *Кабак Н. Е., Киселев А. Б., Максимов В. Ф.* Метод построения расчетных сеток в двумерных областях с выделением внутренних контактных границ. — Вестн. Моск. ун-та, Матем. Механ., 1992, № 3.

[43] *Киселев А. Б., Рыбакин Б. П.* Численное исследование откольного разрушения при взрывном и ударном нагружении. — Кишинев: Ин-т математики с ВЦ АН МССР, 1989.

[44] *Гендугов В. М., Киселев А. Б.* Численное исследование откола в пластине при взрыве накладного заряда ВВ. — Вестн. МГУ, Матем. Механ., 1990, № 5.

[45] *Киселев А. Б.* О численном интегрировании уравнений течения упрочняющейся упругопластической среды. — Вестн. МГУ, Матем. Механ., 1995, № 4.

[46] *Киселев А. Б.* Развитие метода Уилкинса для решения трехмерных задач соударения деформируемых твердых тел. Взаимодействие волн в деформируемых средах. — М.: Изд-во МГУ, 1984.

[47] *Зеленский А. С., Кукуджанов В. Н.* Численное решение пространственных задач для осесимметричных упругопластических сред. — М.: ИПМ АН СССР, 1989, Препринт № 384.

[48] *Киселев А. Б.* О граничных условиях для задач МДТТ с центральной и осевой симметриями. — Вестн. МГУ, Матем. Механ., 1995, № 6.

[49] *Kiselev A. B.* Computational simulation of boundary conditions in problems of elastoplastic bodies interaction. — Systems Analysis Modelling Simulation, 1995, Vol. 18–19.

[50] *Киселев А. Б.* Простейшая математическая модель разрушения космического аппарата при взрыве. — Вестн. МГУ, Матем. Механ., 1993, № 4.

[51] *Kiselev A. B.* Mathematical modelling of fragmentation of thin shells in explosion. Proc. of the IMACS Symp. on Mathematical Modelling (Febr. 2-4, 1994, Tech. Univ. Vienna, Austria), Vol. 5. — Vienna: TUV, 1994.

[52] *Киселев А. Б.* Простейшие математические модели разрушения космического аппарата при взрыве. — ПМТФ, 1995, № 2.

[53] *Киселев А. Б.* Математическое моделирование фрагментации тонкостенных сферических оболочек под действием динамического внутреннего давления. — Вестн. МГУ, Матем. Механ., 1996, № 3.

[54] *Киселев А. Б.* Численное моделирование процессов деформирования и разрушения при взрывном нагружении. — М.: Механико-матем. ф-т МГУ им. М. В. Ломоносова, 1996, Препринт № 6.

[55] *Киселев А. Б.* Численное моделирование деформирования и разрушения тонкостенной сферической оболочки из слоистого вязкоупругого композита, заполненной жидкостью, под действием взрыва заряда, расположенного в центре конструкции. — Вестн. МГУ, Матем. Механ., 1997, № 5.

[56] *Kiselev A. B.* Computer simulation of thin walled fuel tanks fragmentation under the action of explosion. Proc. of the Second European Conf. on Space Debris (ESOC, Darmstadt, Germany, 17-19 March 1997). — ESA SP-393, May 1997.

[57] *Киселев А. Б.* Математическое моделирование взрывного разрушения сферических оболочек с образованием двух фракций осколков. — Вестн. МГУ, Матем. Механ., 1999, № 2.

[58] *Киселев А. Б.* Модель фрагментации при высокоскоростном соударении частиц космического мусора. — Вестн. МГУ, Матем. Механ., 2001, № 3.

[59] *Smirnov N. N., Lebedev V. V., Kiselev A. B.* Mathematical modelling of space debris evolution in low Earth orbits — 19th Int. Symposium on Space Technology and Science (Yokohama, Japan, May 15-24, 1994), Pre-print.

[60] *Smirnov N. N., Nikitin V. F., Kiselev A. B.* Gas explosion in confined volumes. — Pre-prints of the Second Int. Specialist on Fuel-Air Explosions (Bergen, Norway, 26-28 June, 1996).

[61] *Smirnov N. N., Nikitin V. F., Kiselev A. B.* Peculiarities of space debris production in different types of orbital breakups. — Proc. of the Second European Conf. on Space Debris (ESOC, Darmstadt, Germany, 17-19 March, 1997), ESA SP-393, May 1997.

[62] *Киселев А. Б., Назаренко А. И. и др.* Экологические проблемы и риски воздействий ракетно-космической техники на окружающую природную среду. Справочное пособие. Под общей ред. Адушкина В. В., Козлова С. И. и Петрова А. В. — М.: Изд-во «Анкил», 2000.

[63] *Smirnov N. N., Nazarenko A. I., Kiselev A. B.* LEO technogeneous ontaminants evolution modeling with account of satellites collisions. Space Debris 2000 (Ed. J. Bendisch). — Science and Technol. Series American Austronaut. Society, 2001, Vol. 103.

[64] *Smirnov N. N., Kiselev A. B., Nikitin V. F.* Fragmentations caused by hypervelocity collisions of debris particles with pressurized vessels. — Proc. of the Third European Conf. on Space Debris (ESOC, Darmstadt, Germany, 19-21 March 2001), Vol. 2, ESA, SP-473, October 2001.

[65] *Smirnov N. N., Nazarenko A. I., Kiselev A. B.* Modelling of the space debris evolution based on continua mechanics. — Proc. of the Third European Conf. on Space Debris (ESOC, Darmstadt, Germany, 19-21 March 2001), Vol. 1, ESA, SP-473, October 2001.

[66] *Смирнов Н. Н., Киселев А. Б., Назаренко А. И.* Математическое моделирование эволюции космического мусора на околоземных орбитах. — Вестн. МГУ, Матем. Механ., 2002, № 4.

[67] *Смирнов Н. Н., Киселев А. Б., Никитин В. Ф.* К исследованию высокоскоростного взаимодействия элементов космического мусора с газонаполненными оболочками. — Вестн. МГУ, Матем. Механ., 2003, № 1.

[68] *Anz P. D.-Meador, Chobotov V. A., W. Flury, Kiselev A. B., Nazarenko A. I., Nikitin V. F., Potter A. E., Smirnov N. N., T. Yasaka* Space Debris. Hazard Evaluation and Mitigation. Ed. by Smirnov N. N. — L. and N.Y.: Taylor and Francis, 2002.

Об образовании оксида азота в каталитических реакциях на поверхности многоразовых космических аппаратов

Ковалев В. Л., Крупнов А. А.

За счет использования низкокаталитических покрытий тепловые потоки к спускаемым аппаратам могут быть снижены в несколько раз на значительной части траектории спуска, включая область максимальных тепловых нагрузок как при входе в атмосферу Земли, так и при входе в атмосферу Марса [1]. Несмотря на то, что о значительном влиянии гетерогенной рекомбинации на теплообмен при гиперзвуковых скоростях полета стало известно еще в 50-е годы [2], проблема описания гетерогенных каталитических процессов в гиперзвуковых потоках остается актуальной и в настоящее время. До сих пор механизм и скорости процессов, определяющие взаимодействие газа с поверхностью недостаточно изучены и выражены количественно. В частности, практически отсутствует информация по образованию молекул NO в гетерогенных каталитических реакциях на поверхности многоразовых теплозащитных покрытий. Несмотря на то, что предсказываемые тепловые потоки к поверхности при входе тел в плотные слои атмосферы Земли очень чувствительны к гетерогенной рекомбинации атомов кислорода и азота не только в молекулы O_2, N_2, но и в молекулы NO [3, 4], обычно считается, что молекулы NO на поверхности не образуются. Однако, образование NO на кварцевых поверхностях подтверждается лабораторными экспериментальными данными [5].

В данной работе на основе летных экспериментальных данных анализируются теоретические модели [6, 7], учитывающие образование молекул NO на поверхности силиконизованных материалов. Показано, что эти модели еще не позволяют достаточно точно предсказать теплообмен в широком диапазоне изменения условий в набегающем потоке. Различие в величинах параметров, используемых в этих моделях, объясняется тем, что их значения получены подгонкой рассчитанных коэффициентов рекомбинации к лабораторным экспериментальным данным. При многопараметрической зависимости такой подход может быть неоднозначен. Установлено, что при соответствующем выборе параметров аналогичные результаты дает и более простая модель [8, 9, 10], в которой не учитывается образование молекул NO на поверхности. В связи с этим необходимы экспериментальные данные в более широком диапазоне изменения условий у поверхности, чем имеются в данное время в литературе.

1. На неразрушаемой каталитической поверхности учитывались оба механизма рекомбинации — ударный и ассоциативный:

адсорбция – десорбция атомов

$$1.\ \mathrm{O} + (\mathrm{S}) \leftrightarrow (\mathrm{O} - \mathrm{S}),\ 2.\ \mathrm{N} + (\mathrm{S}) \leftrightarrow (\mathrm{N} - \mathrm{S});$$

реакции рекомбинации Или–Райдила и им обратные

$$3.\ \mathrm{O} + (\mathrm{O} - \mathrm{S}) \leftrightarrow \mathrm{O}_2 + (\mathrm{S}),\ 4.\ \mathrm{N} + (\mathrm{N} - \mathrm{S}) \leftrightarrow \mathrm{N}_2 + (\mathrm{S});$$

реакции рекомбинации Ленгмюра–Хиншельвуда и им обратные

$$5.\ 2(\mathrm{O}-\mathrm{S}) \leftrightarrow \mathrm{O}_2 + (\mathrm{S}),\ 6.\ 2(\mathrm{N}-\mathrm{S}) \leftrightarrow \mathrm{N}_2 + (\mathrm{S});$$

адсорбция – десорбция молекул

$$7.\ \mathrm{O}_2 + (\mathrm{S}) \leftrightarrow (\mathrm{O}_2 - \mathrm{S}),\ 8.\ \mathrm{N}_2 + (\mathrm{S}) \leftrightarrow (\mathrm{N}_2 - \mathrm{S});$$

реакции образования NO и им обратные

$$9.\ \mathrm{O} + (\mathrm{N}-\mathrm{S}) \leftrightarrow \mathrm{NO} + (\mathrm{S}),\ 10.\ \mathrm{N} + (\mathrm{O}-\mathrm{S}) \leftrightarrow \mathrm{NO} + (\mathrm{S});$$

$$11.\ (\mathrm{O}-\mathrm{S}) + (\mathrm{N}-\mathrm{S}) \leftrightarrow \mathrm{NO} + 2(\mathrm{S}).$$

Массовые скорости образования компонентов в этих реакциях могут быть записаны в виде [1]:

$$R_{\mathrm{O}} = -\rho(k_{w\mathrm{OO}} + k_{w\mathrm{ON}})c_{\mathrm{O}} = -\rho k_{w\mathrm{O}} c_{\mathrm{O}},\ R_{\mathrm{N}} = -\rho(k_{w\mathrm{NN}} + k_{w\mathrm{NO}})c_{\mathrm{N}} = -\rho k_{w\mathrm{N}} c_{\mathrm{N}},$$

$$R_{\mathrm{O}_2} = \rho k_{w\mathrm{OO}} c_{\mathrm{O}},\ R_{\mathrm{N}_2} = \rho k_{w\mathrm{NN}} c_{\mathrm{N}},\ R_{\mathrm{NO}} = \rho \frac{m_{\mathrm{O}}}{m_{\mathrm{NO}}} k_{w\mathrm{ON}} c_{\mathrm{O}} = \rho \frac{m_{\mathrm{N}}}{m_{\mathrm{NO}}} k_{w\mathrm{NO}} c_{\mathrm{N}}.$$

Такое представление учитывает рекомбинацию атомов кислорода O и азота N как в свои молекулы O_2 и N_2, так и в молекулы NO и согласуется с законом сохранения химических элементов в реакциях:

$$R_{\mathrm{O}} = -R_{\mathrm{O}_2} - \frac{m_{\mathrm{O}}}{m_{\mathrm{NO}}} R_{\mathrm{NO}},\ R_{\mathrm{N}} = -R_{\mathrm{N}_2} - \frac{m_{\mathrm{N}}}{m_{\mathrm{NO}}} R_{\mathrm{NO}}.$$

Поэтому помимо суммарных коэффициентов каталитической активности $k_{w\mathrm{O}}$ и $k_{w\mathrm{N}}$ можно ввести коэффициенты каталитической активности $k_{w\mathrm{OO}}$, $k_{w\mathrm{ON}}$, $k_{w\mathrm{NN}}$ и $k_{w\mathrm{OO}}$. Выражения для них следуют из структурных формул для скоростей образования компонентов на поверхности [1]. Соответствующие им вероятности рекомбинации будут:

$$k_{wij} = \gamma_{ij} \sqrt{\frac{RT}{2\pi m_i}}.$$

Таким образом, коэффициенты каталитической активности и вероятности рекомбинации атомов на каталитической поверхности в диссоциированном воздухе представляют собой сумму двух слагаемых. Одно из них представляет собой вероятность рекомбинации атома в соответствующую ему молекулу, а другое — вероятность его рекомбинации в молекулу NO. Каждый процесс характеризуется коэффициентом каталитической активности или вероятностью рекомбинации. Например, γ_{OO} представляет отношение числа атомов O рекомбинирующих в O_2 к общему числу атомов O падающих на поверхность, а γ_{ON} — отношение числа атомов O рекомбинирующих в NO к общему числу атомов O падающих на поверхность. Аналогично для атомов азота. Этот подход может быть легко распространен на более сложные случаи с помощью добавления новых членов в выражения для массовых скоростей образования компонентов.

Важнейшими величинами, определяющими температурные зависимости k_{ij} или γ_{ij} на каталитической поверхности, являются коэффициенты скоростей элементарных стадий k_i и их константы равновесия K_i. Выражения для них следуют из теории абсолютных скоростей реакций. Проведенный в [1] анализ показал, что для коэффициентов скоростей приведенных выше гетерогенных каталитических реакций могут быть получены выражения:

$$k_1 = \frac{\widehat{n}_{\mathrm{O}} S_{0\mathrm{O}}}{p x_{\mathrm{O}}},\ k_2 = \frac{\widehat{n}_{\mathrm{N}} S_{0\mathrm{N}}}{p x_{\mathrm{N}}},\ k_3 = \frac{\widehat{n}_{\mathrm{O}}}{p x_{\mathrm{O}}} P_{er\mathrm{O}} \exp\left(-\frac{E_{er\mathrm{O}}}{RT}\right),\ k_4 = \frac{\widehat{n}_{\mathrm{N}}}{p x_{\mathrm{N}}} P_{er\mathrm{N}} \exp\left(-\frac{E_{er\mathrm{N}}}{RT}\right),$$

$$k_5 = P_{lh\mathrm{O}} \nu_{\mathrm{O}} C_a \exp\left(-\frac{E_{lh\mathrm{O}}}{RT}\right),\ k_6 = P_{lh\mathrm{N}} \nu_{\mathrm{N}} C_a \exp\left(-\frac{E_{lh\mathrm{N}}}{RT}\right),$$

$$k_9 = \frac{\widehat{n}_{\mathrm{O}}}{p x_{\mathrm{O}}} P_{er\mathrm{N}} \exp\left(-\frac{E_{er\mathrm{N}}}{RT}\right),\ k_{10} = \frac{\widehat{n}_{\mathrm{N}}}{p x_{\mathrm{N}}} P_{er\mathrm{O}} \exp\left(-\frac{E_{er\mathrm{O}}}{RT}\right),$$

$$k_{11} = C_a \left[\nu_{\mathrm{O}} P_{lh\mathrm{ON}} \exp\left(-\frac{E_{lh\mathrm{O}}}{RT}\right) + \nu_{\mathrm{N}} P_{lh\mathrm{NO}} \exp\left(-\frac{E_{lh\mathrm{N}}}{RT}\right)\right],$$

Где

$$\widehat{n}_i = \sqrt{\frac{RT}{2\pi m_i}} N_i,\ S_{0i} = P_{ai} \frac{kT}{h} \exp\left(-\frac{E_{a_i}}{RT}\right),\ \nu_i = \frac{1}{\Delta}\sqrt{\frac{\pi RT}{2m_i}},$$

$$P_{lh\mathrm{ON}} = \alpha P_{lh\mathrm{N}},\ P_{lh\mathrm{NO}} = \delta P_{lh\mathrm{O}}.$$

Здесь N_i молярная концентрация, C_a — число активных мест для адсорбции на единице площади, величина Δ — расстояние между активными местами на поверхности, $E_{a_i}, E_{di}, E_{er\mathrm{i}}$, $E_{lh\mathrm{i}}$ — энергии активации соответствующих реакций. При этом E_{lhi} выбирается как наибольшее между энергией миграции E_{mi} и энергией активации $\widetilde{E}_{lhi}$ реакции Ленгмюра – Хиншельвуда. Предэкспоненциальные множители P_j, учитывают ряд неопределенностей, связанных, в том числе, и с пространственной ориентацией частиц, а множители α и δ характеризуют величину скорости образования молекул NO в реакции 11 относительно скоростей образования молекул O_2 и N_2 в реакциях под номерами 5 и 6 соответственно.

Если, предположить, что адсорбция является не активированным процессом ($E_{ai} = 0$), то константы равновесия процессов адсорбции–десорбции будут

$$K_1 = k_1 \frac{1}{P_{dO}} \frac{h}{C_a k T} \exp\frac{E_{d\mathrm{O}}}{RT},\ K_2 = k_2 \frac{1}{P_{dN}} \frac{h}{C_a k T} \exp\frac{E_{d\mathrm{N}}}{RT},$$

где E_{di} – энергии десорбции соответствующих атомов.

Коэффициенты каталитической активности поверхности могут быть вычислены, если известны введенные выше параметры C_a, Δ, E_{di}, E_{eri}, E_{lhi}, S_{0i}, P_{eri}, P_{lhi}, P_{lhij}, α, δ. В моделях, описывающих каталитические свойства теплозащитных покрытий в диссоциированном воздухе часть параметров определяется теоретически при наличии разумной модели о структуре поверхности и силах, действующих между газовыми и поверхностными атомами, а другие — на основе сравнения с имеющимися

экспериментальными данными при различных предположениях о механизме гетерогенных каталитических реакций.

Образование NO на поверхности учитывалось в работах [6, 7]. Рекомендуемые параметры моделей катализа работ [6, 7] приведены в таблице.

Табл. Параметры моделей катализа

Параметры	Модель 1		Модель 2	
	O	N	O	N
C_a, м$^{-2}$	$4,5 \cdot 10^{18}$	$4,5 \cdot 10^{18}$	$5 \cdot 10^{18}$	$5 \cdot 10^{18}$
Δ,Å	5	5	5	5
E_{eri}, кДж/моль	20	20	5,9	3,5
E_{di}, кДж/моль	499,8 (250)	530,8 (250)	300	300
E_{lhi}, кДж/моль	501,6	120,3	42,06	52
S_{0i}	0,05	0,015	0,1	0,08
P_{eri}	0,1	0,1	$1 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$
P_{lhi}	3,5	3,5	$2,5 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$
α	1	1	100	100
δ	1	1	100	100

В [6] предложена модель для определения скоростей каталитической рекомбинации атомов O и N на кварце в диссоциированном воздухе с учетом образования NO в реакциях Или–Райдила и реакциях Ленгмюра–Хиншельвуда (модель *1*). На поверхности учитывалась также адсорбция воды, молекулы которой легко проникают в поры стекла и хемосорбируются на атомах Si, формируя Si–OH связи и, тем самым, уменьшают число активных поверхностных центров для адсорбции атомов O и N. Для степени заполнения поверхности радикалами OH было принято выражение

$$\theta_{\mathrm{OH}} = A\left[1 - \exp\left(-\frac{E_{\mathrm{OH}}}{RT}\right)\right],$$

где $E_{\mathrm{OH}} = 2,5$ кДж/моль, $A = 1$. Так как адсорбцией других молекул пренебрегалось, то доля свободных мест на поверхности определяется соотношением $\theta = 1 - \theta_{\mathrm{O}} - \theta_{\mathrm{N}} - \theta_{\mathrm{OH}}$.

Заметим, что при выбранных авторами значениях параметров модель *1* не предсказывает уменьшения коэффициентов рекомбинации при температурах выше 1600 K, как это было обнаружено в экспериментах [11] и предсказано теоретически [8, 9, 10]. Чтобы устранить это противоречие авторы модели рекомендуют уменьшить энергию десорбции атомов кислорода O до половины энергии связи Si–O. Действительно, использование в данной модели $E_{d\mathrm{O}} = 250$ кДж/моль, приводит к эффективной десорбции при $T > 1500$ K, в зависимости коэффициента рекомбинации γ_{O} от температуры в окрестности $T \approx 1600$ K образуется максимум, и его поведение качественно и количественно лучше согласуется с экспериментальными данными. Поэтому в данной работе использовалось $E_{d\mathrm{O}} = 250$ кДж/моль.

В [7] представлена модель описания каталитических свойств поверхности силиконизированных теплозащитных покрытий, в которой особое внимание уделяется формированию молекул NO (модель *2*). Величины C_a и Δ, характеризующие структуру поверхности для теплозащитных покрытий, основанных на SiO_2, были выбраны примерно такими же, как и в предыдущей модели. Использовались постоянные значения для начальных коэффициентов прилипания. Они являются величинами того же порядка, что и в модели *1* [6]. Ряд основных характеристик поверхности, необходимых для определения ее каталитической эффективности, был получен с помощью сравнения рассчитанных результатов с имеющимися экспериментальными данными для бинарных смесей газов O_2–O и N_2–N. Также как в [8, 9, 10] параметры модели катализа, характеризующие свойства поверхности относительно рекомбинации Или–Райдила, определялись на основе сравнения с лабораторными экспериментальными данными при невысоких температурах поверхности. Параметры модели, характеризующие рекомбинацию Ленгмюра–Хиншельвуда, получены на основе сравнения рассчитанных значений коэффициентов рекомбинации с экспериментальными данными при высоких температурах поверхности, где предполагалось преобладание этого механизма рекомбинации. Параметр α, характеризующий долю атомов, идущих на образование NO, был выбран на основе согласования рассчитанных в этой работе и измеренных тепловых потоков во время входа в атмосферу Земли капсулы «OREX» (покрытие SiC) и «Спейс Шаттл» (покрытие RCC, пятый полет). При этом считалось, что $\delta = \alpha$. Было проведено интенсивное параметрическое исследование.

В настоящей работе рассматривалась также более простая модель гетерогенного катализа (модель *3*) [8, 9, 10], в которой образованием NO пренебрегалось и считалось, что в интересном для практики диапазонах изменения температуры и давления у поверхности, покрытой реактивно обработанным стекломатериалом ($300 \le T \le 2000$ K, $10^{-3} \le p \le 1$ атм), процесс рекомбинации идет в соответствии с механизмом Или–Райдила ($k_5 \ll k_3 p$, $k_6 \ll k_2 p$). При этом обратными процессами в реакциях Или–Райдила пренебрегалось ($K_3 \gg 1, K_4 \gg 1$), а реакции адсорбции–десорбции молекул считались медленными ($pK_i \ll 1$, $i = 7, 8$). В этом случае имеем

$$R_{\mathrm{O}} = m_{\mathrm{O}} p \frac{2k_3\theta}{l_{\mathrm{O}} x_{\mathrm{O}} + (pK_1)^{-1}} v_1,\ R_{\mathrm{N}} = m_{\mathrm{N}} p \frac{2k_4\theta}{l_{\mathrm{N}} x_{\mathrm{N}} + (pK_2)^{-1}} v_2,$$

$$\theta = \left(1 + \frac{pK_1 x_{\mathrm{O}}}{1 + pK_1 l_{\mathrm{O}} x_{\mathrm{O}}} + \frac{pK_2 x_{\mathrm{N}}}{1 + pK_2 l_{\mathrm{N}} x_{\mathrm{N}}}\right)^{-1}.$$

Если реакции адсорбции–десорбции протекают значительно быстрее реакций Или–Райдила получим

$$2k_3 RT = \sqrt{\frac{RT}{2\pi m_{\mathrm{O}}}}\gamma_{\mathrm{O}}^*,\ 2k_4 RT = \sqrt{\frac{RT}{2\pi m_{\mathrm{N}}}}\gamma_{\mathrm{N}}^*.$$

Вероятности рекомбинации с учетом определенных таким образом констант скоростей реакций Или–Райдила будут

$$\gamma_{\mathrm{N}} = \gamma_{\mathrm{N}}^* \left(1 - \frac{1}{1 + \mathrm{K_2 p\, x_N}}\right),\ \gamma_{\mathrm{O}} = \gamma_{\mathrm{O}}^* \left(1 - \frac{1}{1 + \mathrm{K_1 p\, x_O} + \mathrm{K_2 p\, x_N}}\right).$$

При определении коэффициентов скоростей элементарных стадий для поверхности, покрытой реактивно обработанным стекломатериалом с высоким содержанием кремнезема, использовались результаты лабораторных экспериментов [12] по определению эффективных коэффициентов рекомбинации атомов азота и кислорода:

$$\gamma_i^* = a_i \exp\left(-E_i/RT\right),\ i = \mathrm{O}, \mathrm{N};\ a_{\mathrm{O}} = 16,\ a_{\mathrm{N}} = 0,0734,$$
$$E_{\mathrm{O}} = 89.14,\ E_{\mathrm{N}} = 18.45\ (\text{Кдж/моль}).$$

Считалось, что $K_1 = K_2 = K$, а зависимость K от температуры взята из [13]:

$$K = A\sqrt{T}\exp\left(\frac{E_d}{RT}\right),\ A = 1.3692 \cdot 10^{-7},\ E_d = 188.172\ (\text{Кдж/моль})$$

В данной работе указанные температурные зависимости модели *3* были изменены для описания каталитических свойств теплозащитных покрытий использующихся в окрестности критической точки аппаратов «OREX» (SiC) и «Спейс Шаттл» (RCC). Использовались $E_{\mathrm{O}} = 65,\ \ E_{\mathrm{N}} = 15,\ E_d = 240$ (Кдж/ моль) (модель 3')

2. Расчеты тепловых потоков к поверхности аппаратов «OREX» и «Спейс Шаттл» проведены в рамках системы уравнений и граничных условий химически реагирующего многокомпонентного полного вязкого ударного слоя. Постановка задачи и метод решения приведены в [14, 15]. Пространственное течение моделировалось течением около эквивалентного осесимметричного тела с эффективным радиусом затупления в критической точке, соответствующем углу атаки [16].

На рис. 1 приведены рассчитанные тепловые потоки в окрестности точки торможения аппарата «OREX» и измеренные во время полета (квадратики). «OREX» — это корабль типа капсулы, состоящий из 50–градусного затупленного по сфере конуса с носовым радиусом 1,35 м и максимальным диаметром 3,4 м. В области торможения этого аппарата использовалось покрытие SiC со стеклянным уплотнителем сверху основного материала углерод–углерод. Детальные данные, полученные во время полета, приведены в [17].

Расчеты показали, что модель *1* (кривая *2*), построенная для покрытия SiO_2, хорошо предсказывает уровень тепловых потоков в окрестности критической точки аппарата «OREX» (покрытие SiC). При этом скорость образования NO на поверхности никак не сказывается на величине тепловых потоков к ней. Рассчитанные для этой модели величины тепловых потоков при $\alpha = \delta = 0$ и $\alpha \to \infty, \delta \to \infty$ практически совпадают .

Так как при выборе параметров модели *2* использовались экспериментальные данные, полученные в полете «OREX», то она хорошо предсказывают уровень тепловых на траектории входа этого аппарата (кривая *4*). Степень влияния скорости образования на поверхности NO для этой модели показывают кривые *3* ($\alpha \to \infty, \delta \to \infty$) и *5* ($\alpha = \delta = 0$). Заметим, что если образование NO на поверхности не учитывать, то тепловые потоки существенно ниже (кривая *5*).

Интересным является тот факт, что модель *3'* также позволяет хорошо предсказать уровень тепловых потоков для этого покрытия (кривая *1*), хотя в этой модели

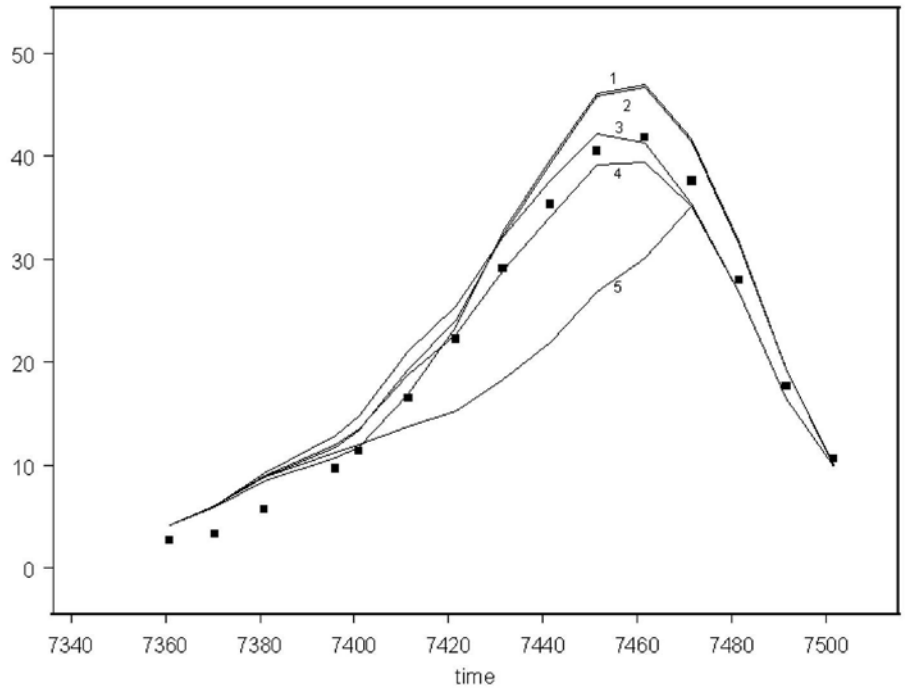


Рис. 1: Рассчитанные и измеренные тепловые потоки на траектории «OREX»

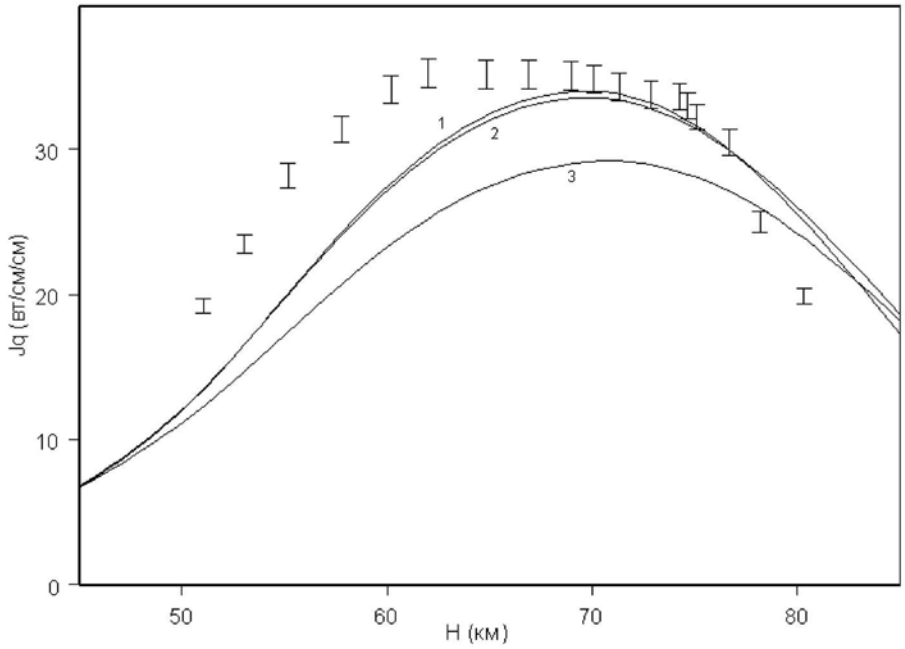


Рис. 2: Рассчитанные и измеренные тепловые потоки в точке торможения аппарата «Space Shuttle»

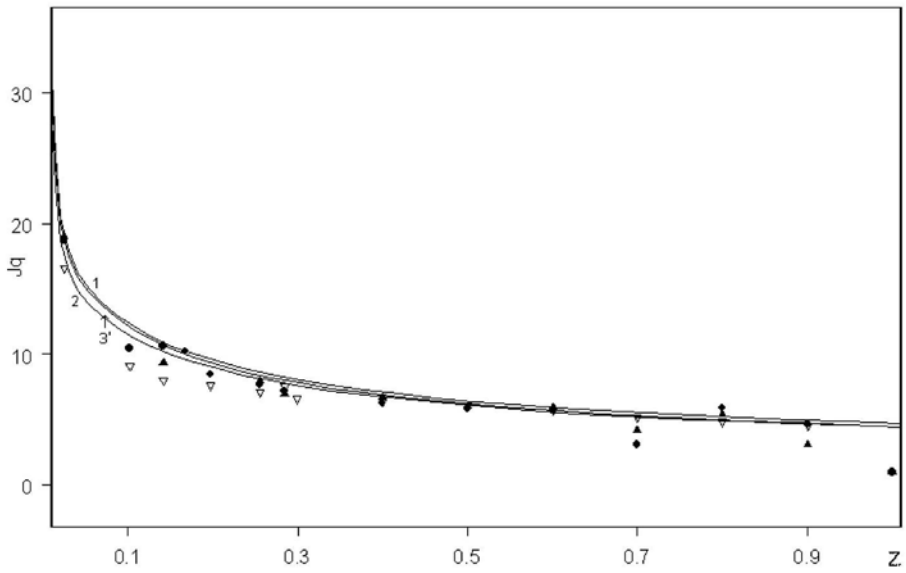


Рис. 3: Рассчитанные и измеренные тепловые потоки на боковой поверхности «Space Shuttle»

образование NO на поверхности не учитывается. Использование в этой модели других величин параметров вполне логично, так как рассматривается покрытие SiC, а не RCG, для которого была первоначально построена эта модель.

На рис. 2 приведено сравнение данных по тепловым потокам, полученных во время пятого полета корабля «Спейс Шаттл» в критической точке покрытой материалом RCC носовой капсулы (вертикальные отрезки)[18] . Видно, что модели *1* (кривая *2*) и *3'* (кривая *1*) достаточно хорошо предсказывают уровень тепловых потоков в окрестности критической точки этого аппарата при больших и средних высотах (включая теплонапряженную точку траектории). Более низкие уровни тепловых потоков предсказывает модель *2* (кривая *3*). Отличие рассчитанных тепловых потоков от экспериментальных, при высотах ниже 60 км наблюдается для всех моделей. Возможно оно связано с выбором газодинамической модели течения при численном моделировании или с трудностями измерения тепловых потоков в летных условиях.

На рис. 3 приведено сравнение рассчитанных тепловых потоков к боковой поверхности «Спейс Шаттл» в теплонапряженной точке траектории (высота полета $H \simeq 70.2$ км) с экспериментально измеренными во время второго (светлые треугольники), третьего (точки) и пятого полетов (темные треугольники) [19]. Видно, что модели катализа *1*, *2* и *3'*, разработанные для покрытий SiC и RCC, дают несколько завышенные величины тепловых потоков к боковой поверхности, так как на ней используется покрытие RCG, свойства которого ближе к некаталитической поверхности. При удалении от критической точки влияние образования NO на поверхности не сказывается.

Заключение.

1. Исследована возможность предсказания с помощью имеющихся в литературе моделей гетерогенного катализа, учитывающим образование NO на поверхности, уровня тепловых потоков на силиконизированных теплозащитных покрытиях при входе в атмосферу Земли космических аппаратов «Спейс Шаттл» и «OREX». Показано, что эти модели еще не позволяют достаточно точно предсказать теплообмен в широком диапазоне изменения условий в набегающем потоке.

2. Установлено, что определение параметров модели катализа с помощью подгонки под экспериментальные данные неоднозначно и существенно зависит от выбранного механизма реакций на поверхности. В частности, одинаковые величины тепловых потоков могут быть получены для различных наборов параметров моделей, в том числе и для различных механизмов протекания гетерогенных каталитических процессов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02–01–00759).

Литература

[1] *Ковалев В. Л.* Гетерогенные каталитические процессы в аэротермодинамике. — М.: Физматлит, 2002.

[2] *Goulard R.* On catalytic recombination rates in hypersonic stagnation heat transfer. — Jet Propuls, 1958, V. 28, № 11.

[3] *Ковалев В. Л., Крупнов А. А.* Особенности моделирования теплообмена с каталитическими поверхностями при входе тел в атмосферу Земли. — Вест. Моск. ун–та, Сер. 1, Мат. Мех., 1998, № 5.

[4] *Bruno C., Guarino L.* Re-entry problems. — In: Capitelli M, Beardsley J. M., ed. Nonequilibrium processes in ionized gases, NATO–ASI Series B, ESTEC, ESA–SP–367, 1994.

[5] *Copelend R. A. Pallix J. B., Stewart D. A.* Surface-catalysed NO from recombination of N and O atoms. — J. Thermoph. and Heat Transfer, 1998, V. 12, № 4.

[6] *Nasuti F., Barbato M., Bruno C.* Material-dependent catalytic recombination modeling for hypersonic flows. — J. Thermophysics and Heat Transfer, 1996, V. 10, № 1.

[7] *Kurotaki T.* Construction of Catalytic Model on SiO_2-Based Surface and Application to Real Trajectory. — AIAA Paper 2000 – 2366.

[8] *Ковалев В. Л., Суслов О. Н.* Модель взаимодействия частично ионизованного воздуха с каталитической поверхностью. В кн.: Исследования по гиперзвуковой аэродинамике и теплообмену с учетом неравновесных химических реакций. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.

[9] *Ковалев В. Л., Суслов О. Н.* Моделирование взаимодействия частично ионизованного воздуха с каталитической поверхностью высокотемпературной теплоизоляции. — Изв. РАН: МЖГ, 1996, № 5.

[10] *Kovalev V. L., Suslov O. N., Tirskiy G. A.* Phemenologic theory for heterogeneous recombination of partially dissosiated air on high temperature surfaces. Proc. NATO Advanced Study Institute on Molecular Physics and Hypersonic Flows, NATO–ASI Series C: Mathematical and Physical Sciencies, V. 482. — Dordrecht, NL: Kluwer Acad Publ, 1996.

[11] *Kolodziej P., Stewart D. A.* Nitrogen recombination on high–temperature reusable surface insulation and the analysis of its effects on surface catalysis. — AIAA Paper 87–1637.

[12] *Scott C. D.* Catalytic recombination of nitrogen and oxygen on high temperature. — AIAA Paper 80–1477.

[13] *Агафонов В. П., Кузнецов М. М.* Моделирование неравновесных тепловых потоков к каталитической поверхности. — Ученые записки Ц А Г И, 1979, Т. 10, № 4.

[14] *Ковалев В. Л., Крупнов А. А.* Численный метод решения уравнений многокомпонентного турбулентного вязкого ударного слоя у каталитической поверхности. — Вестник Московского ун-та. Сер. Математика. Механика., N 3, 1994, с. 66-74, Transfer, 1998, V. 12, № 4.

[15] *Ковалев В. Л., Крупнов А. А., Тирский Г. А.* Решение уравнений вязкого ударного слоя методом простых глобальных итераций по градиенту давления и форме ударной волны. — Докл. РАН, 1994, Т. 338, № 3.

[16] *Gubta R. N., Moss J. N., Simmonds J. L. at al.* Space Shuttle Heating Analysis with Variation in Angle of Attack and Surface Condition. — AIAA Paper 83–0486.

[17] High Enthalpy Flow Organized Session and Workshop. Proc. of 13th NAL Symp. on Aircraft Computational Aerodynamics. — Japan, NAL SP–29, 1995.

[18] *Curry D. M., Rochelle W. C., Chao D. C., Ting P. C.* Space Shuttle Orbiter Nose Cap Thermal Analysis. — AIAA Paper 86–0388.

[19] *Scott C. D.* Effect of nonequilibrium and wall catalysis on shuttle heat transfer. — J. Spacecraft and Rockets, 1985, V. 22, № 5.

Вынужденные продольные колебания музыкальных струн, обусловленные их поперечными колебаниями

Демьянов Ю. А., Малашин А. А.

Решения задач распространения поперечно-продольных волн в гибких деформируемых нитях базируются на пионерской работе Х.Рахматулина [1] и его школы [2, 3] и обстоятельно изложены в [4]. В частности, в работах [1, 4] выводится система уравнений, описывающих процесс распространения поперечно-продольных волн при поперечном ударе, а также условия в окрестности точки излома частей нити (условия на поперечной волне). В работе [1] указано, что «при ударе по струне вдоль нее побежит волна продольного растяжения, которая в обычной теории колебания струны во внимание не принимается».

В работе [5] на основе нелинейных уравнений распространения поперечно-продольных волн, приведенных в [1, 4], получены линеаризированные уравнения поперечно-продольных колебаний гибкой натянутой струны. Установлено, что хотя поперечные смещения на порядок больше продольных, вклад поперечных и продольных деформаций в динамическое нагружение оказывается одного порядка. В рамках линеаризированного подхода выведены соотношения для разрывов скоростей и деформаций продольных волн на поперечной волне.

В данной работе исследуются причины возникновения вынужденных продольных колебаний, обусловленных поперечными колебаниями, возникающими в период воздействия на струну. Для пояснения сущности процесса анализ проводится для наиболее простого случая «точечного удара» с постоянной скоростью на струну, жестко закрепленную в точках заделки. При этом, как для нелинейного, так и для линейного случаев будут существовать лишь области постоянных значений продольных и поперечных составляющих скоростей $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$ и деформаций $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$. Как будет видно из дальнейшего, уравнения продольных колебаний при этом оказываются однородными, и с первого взгляда не понятна причина появления вынужденных продольных колебаний, которые, тем не менее, легко можно получить, если решать эту задачу методом разделения переменных. В данной статье анализируется причина возникновения вынужденных продольных колебаний с использованием решений волновых уравнений. Дело в том, что в этом случае на поперечных волнах всегда возникают разрывы продольных составляющих скоростей и деформаций. В силу этого, как показано ниже, имеет место суперпозиция двух процессов: а) распространения продольных волн между точками крепления без какого-либо разрыва величин на поперечных волнах, б) распространения поперечных волн, несущих неизменный разрыв продольных составляющих скоростей и деформаций вплоть до прихода этих волн в места закрепления, что является определяющим для понимания проблемы, так как фронт поперечных волн является источником возбуждения продольных колебаний. Ниже представлены теоретические результаты, подтверждающие этот вывод. Указаны более общие случаи воздействий, на которые также распространяется сделанный вывод.

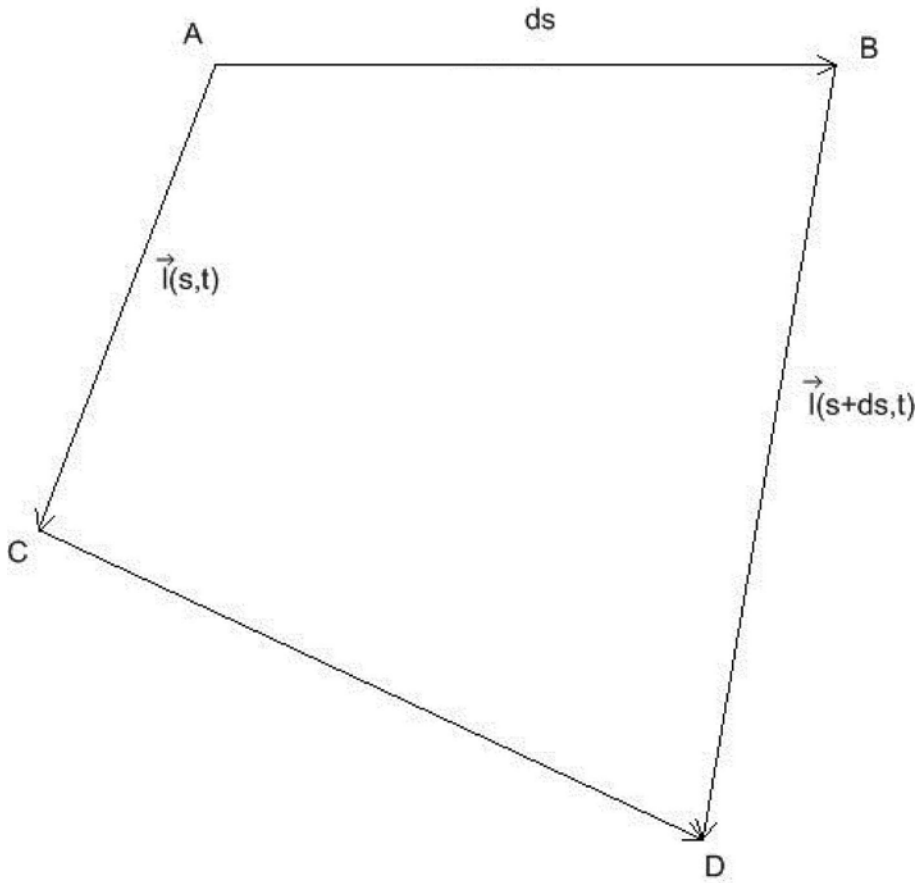


Рис. 1.

1.Вывод линеаризированных уравнений поперечно-продольных колебаний гибкой натянутой струны начнем, следуя [5], с вывода уравнений сохранения массы и изменения количества движения элемента Δs струны, где s — лагранжева координата частиц струны, совпадающая с декартовой координатой x ненатянутой струны. Деформация элемента Δs равна $e = \frac{CD-\Delta s}{\Delta s}$. Закон сохранения массы имеет вид:

$$\rho_0 \Delta s = \rho(1+e)\Delta s, \rho_0 = \rho(1+e)$$

где ρ_0, ρ -начальная и текущая плотности струны. Из рис. 1 видно, что

$$\overline{AD} = \Delta s \cdot \bar{i} + \bar{l}(s+\Delta s, t), \;\; \overline{CD} = \overline{AD} - \bar{l}(s,t) = \Delta s \cdot \bar{i} + [\bar{l}(s+\Delta s, t) - \bar{l}(s,t)]$$

при $\Delta s \to 0$, $\overline{CD} = \Delta s(\bar{i} + \frac{\partial \bar{l}}{\partial s})$, где $\bar{l}(s,t)$ -вектор смещения точки s. Отсюда следует, что

$$e = \sqrt{\left(1+\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(1+\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(1+\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2} - 1 \qquad (1)$$

где $x(s,t)$, $y(s,t)$, $z(s,t)$ - проекции вектора $\bar{l}(s,t)$ на оси координат.

Если предположить, что в струне на элемент Δs действуют лишь касательные напряжения $\bar{T}(s+\Delta s,t)$, $\bar{T}(s,t)$, то из закона Ньютона следует, что

$$\rho_0 ds \frac{\partial^2 \bar{l}}{\partial t^2} = \bar{T}(s+\Delta s,t) - \bar{T}(s,t) = \frac{\partial \bar{T}}{\partial s} ds, \ \rho_0 \frac{\partial^2 \bar{l}}{\partial t^2} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial s} \tag{2}$$

Проекции данного уравнения на оси координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s}[T\cos(\bar{i}\bar{T})], \ \cos(\bar{i}\bar{T}) = \left(1+\frac{\partial x}{\partial s}\right)(1+e)^{-1} \\ \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s}[T\cos(\bar{j}\bar{T})], \ \cos(\bar{j}\bar{T}) = \left(1+\frac{\partial y}{\partial s}\right)(1+e)^{-1} \\ \rho_0 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s}[T\cos(\bar{k}\bar{T})], \ \cos(\bar{k}\bar{T}) = \left(1+\frac{\partial z}{\partial s}\right)(1+e)^{-1} \end{aligned} \tag{3}$$

Для дальнейшего рассмотрения существенным оказывается то, что струна имеет начальное натяжение $T_0 = Ee_0$ (E- модуль Юнга), и в данном случае продольное смещение целесообразно представить в виде $x = e_0 s + \bar{x}$. Тогда возмущение деформации $\hat{e} = e - e_0$ будет:

$$\hat{e} = \sqrt{\left(1+e_0+\frac{\partial \bar{x}}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2} - 1 - e_0 \tag{4}$$

Если учитывать, что $\hat{e} << 1$, а следовательно $\frac{\partial \bar{x}}{\partial s}$, $\frac{\partial \bar{y}}{\partial s}$, $\frac{\partial \bar{z}}{\partial s}$ малы, можно получить линеаризированное выражение:

$$\hat{e} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial s} + \frac{1}{2(1+e_0)}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2\right] \tag{4'}$$

Отсюда следует, что вклад как поперечных, так и продольных составляющих деформации в динамическое нагружение оказывается одного порядка. несмотря на то, что поперечные смещения на порядок больше продольных (они входят в (4') квадратами производных).

Уравнения поперечных и продольных колебаний (2) в первом приближении с учетом того, что в этом случае

$$T\cos(\bar{j}\bar{T}) \approx \frac{Ee_0}{1+e_0}\frac{\partial y}{\partial s}, \ \ T\cos(\bar{k}\bar{T}) \approx \frac{Ee_0}{1+e_0}\frac{\partial z}{\partial s},$$

$$T\cos(\bar{i}\bar{T}) = Ee_0 + E\left\{\frac{\partial \bar{x}}{\partial s} + \frac{1}{2(1+e_0)^2}\left[\frac{\partial y}{\partial s}^2 + \frac{\partial z}{\partial s}^2\right]\right\},$$

принимают следующий вид:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = b_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}, \ \ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = b_0^2 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\partial \bar{x}}{\partial s} + \frac{1}{2(1+e_0)^2} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 \right] \right\}, \tag{6}$$

$$\text{где } b_0^2 = \frac{E e_0}{\rho_0 (1+e_0)}, a_0^2 = \frac{E}{\rho_0}$$

Данные результаты можно получить [5], если воспользоваться методами теории возмущений, приняв за малый параметр возмущение деформации $\hat{e} = e - e_0$. Из-за наличия неоднородности $a_0^2 \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{1}{2(1+e_0)^2} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 \right] \right\}$ в уравнении (6) процесс распространения продольных колебаний представляет собой суперпозицию собственных колебаний и вынужденных продольных колебаний на частотах поперечных.

Необходимо отметить, что постановка задач продольных колебаний принципиально отличается от постановки задач поперечных колебаний тем, что скорости и деформации продольных колебаний терпят разрывы на поперечных волнах. В самом деле, исходя из соотношений на поперечной волне, полученных в работе [1]:

$$\rho_0 (b + u_1)(V_1' \cos\beta - u_1) = T(\cos\gamma - 1)(1 + e_1) \tag{7}$$

$$\rho_0 (b + u_1) V_1' \sin\beta = T \sin\gamma (1 + e_1) \tag{8}$$

можно получить следующие соотношения [6] для $\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \bar{x}}{\partial s}$:

$$\left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial s} + \frac{b_0^2}{2(1+e_0)} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \right] = 0, \qquad \left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} \right] = \left[\frac{b_0^2}{2(1+e_0)} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \right] \tag{9}$$

которые выражают, соответственно, в первом приближении непрерывность полной деформации и применение закона количества движения в направлении оси Ox. Здесь квадратные скобки выражают разрывы соответствующих параметров справа и слева от поперечных волн.

2.Пусть на струну, жестко закрепленную в точках $x = 0$, $x = L$, воздействует в точке $x = c$ бесконечно тонкая палочка, имеющая проекции скорости V_0 и V_τ в направлениях соответственно нормальных к ее длине и вдоль длины (V_τ-скорость скольжения палочки по струне).

Для упрощения анализа примем, что $V_0 = const$, $V_\tau = const$. Направляя ось Ox по длине палочки, Oy по направлению проекции скорости V_0, будем иметь движение частиц струны в плоскости $z = 0$, описывающееся для рассматриваемой задачи уравнением поперечных колебаний:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = b_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{10}$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$y(x,0) = \frac{\partial y}{\partial x}(x,0) = 0, \quad y(0,t) = y(L,t) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x = c, t) = V_0 \tag{11}$$

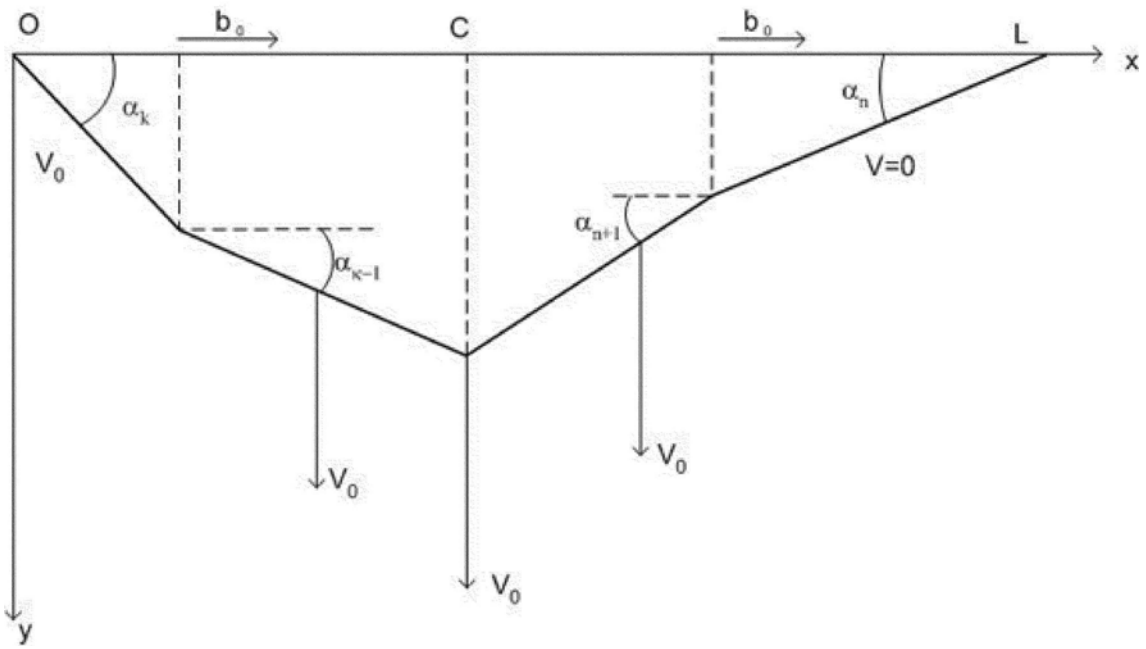


Рис. 2.

(b_0- скорость распространения поперечных волн).

Решение этой задачи можно получить, если воспользоваться методом разделения переменных:

$$y_0(s,t) = \begin{cases} \left(\frac{L-c-s}{L-c}\right) Vt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V(L-C)}{L-c} \sin\left(\frac{b\pi n}{L-c}t\right) \sin\frac{\pi n}{L-c}(s-L+c); c \le s \le L \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Vc}{b\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{b\pi n}{c}t\right) \sin\frac{\pi n}{c}(s-c) + \left(\frac{c-s}{c}\right) Vt; c \le s \le c. \end{cases} \quad (12)$$

Вместе с этим, данное решение может быть получено как методом распространяющихся волн, так и методом характеристик и представляет собой волновой процесс, схематично изображенный на рис. 2. Начальный угол α_0 наклона струны к оси X определяется из условия:

$$tg\alpha_0 = \bar{V}_0 \quad \text{или} \quad \alpha_0 \approx \bar{V}_0, \quad \text{где} \quad \bar{V}_0 = \frac{V_0}{b_0} << 1.$$

После отражений поперечных волн от креплений $x = 0$, $x = L$ углы наклона струны в этих точках равны $2\alpha_0$. После достижения отраженной от крепления волной точки $x = c$ и отражения от нее, углы наклона струны в этих точках становятся равными $3\alpha_0$ и т. д. Поэтому при времени $2k\frac{c}{b_0} < t < (2k+1)\frac{c}{b_0}$ углы наклона струны соответственно в точках $x = 0$,$x = c$ суть $\theta_0 = 2k\alpha_0$, $\theta_1 = (2k+1)\alpha_0$, при времени $(2k-1)\frac{c}{b_0} < t < 2k\frac{c}{b_0}$ соответствующие углы наклона суть $\theta_0 = 2k\alpha_0$, $\theta_1 = (2k-1)\alpha_0$. Как показано выше, продольные смещения частиц струны $x(s,t)$ в первом приближении удовлетворяют уравнению (6), которое в нашем случае, когда

движение происходит в плоскости $z = 0$, принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial t^2} = \bar{a}_0^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial s^2} + \frac{1}{2(1+e_0)} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \right) \tag{13}$$

$\bar{a}_0 = a_0(1-e_0)^{-1}$, a_0 - скорость продольных волн, выражение для $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2$ может быть найдено из (12). Решение данного уравнения может быть найдено методом разделения переменных с учетом следующих граничных и начальных условий:

$$x(s,0) = x_t(s,0) = 0 \quad x(0,t) = x(c,t) = x(L,t) = 0$$

и имеет следующий вид:

$$X(s,t) = \sum T_n \sin \frac{\pi n (s - L_i)}{L_i} \tag{14}$$

где

$$T_n(t) = -\frac{4V_0^2 t \sin \frac{\pi n b_0 t}{L_i}}{\pi^2 n^2 b_0 (a_0^2 - b_0^2)} - 8 \frac{V_0^2 b_0 c \left(\cos \frac{\pi n a_0 t}{Li} - \cos \frac{\pi n b_0 t}{L_i} \right)}{\pi^2 n^2 b_0 (a_0^2 - b_0^2)^2}$$

$$-\frac{L_i n}{4\pi} \sum_{\substack{k+m=n \\ |k-m|=n}} \frac{4V_0}{\pi^2 b_0^2 k m} \left(\frac{\cos \frac{\pi (k+m) b_0 t}{L_i} - \cos \frac{\pi n a_0 t}{L_i}}{n^2 a_0^2 - (k+m)^2 b^2} - \frac{\cos \frac{\pi (k-m) b_0 t}{L_i} - \cos \frac{\pi n a_0 t}{L_i}}{n^2 a_0^2 - (k-m)^2 b_0^2} \right)$$

где $L_i = \begin{cases} c, \ 0 < s < c \\ L - c, \ c < s < L \end{cases}$

Анализируя полученное решение можно заметить, что в спектре продольных колебаний наряду с собственными частотами присутствует спектр вынужденных продольных колебаний на частотах поперечных.

Наряду с этим волновое решение дает наиболее простое объяснение возникновению продольных колебаний на частотах поперечных.

В рассматриваемом случае $\frac{\partial y}{\partial s} = const$ в каждой из приведенных на рис. 2 областей. Поэтому уравнение (13) в этих областях становится однородным и принимает традиционный вид уравнения продольных колебаний:

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial s^2} \tag{15}$$

При формулировке задачи для уравнения (15), как показано в [6], кроме начальных условий $\bar{x} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} = 0$ и граничных условий в точках $s = 0$ и $s = L$ необходимо ставить условия (9) на поперечных волнах и в точке воздействия палочки. Для рассматриваемой задачи величины разрывов оказываются постоянными, не зависящими от времени. Поэтому, решениями уравнения (15) являются области постоянных значений составляющих скоростей $\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}$ и деформаций $\frac{\partial \bar{x}}{\partial s}$, испытывающих разрывы на поперечных волнах в соответствии с соотношениями (9). Источником данных волн

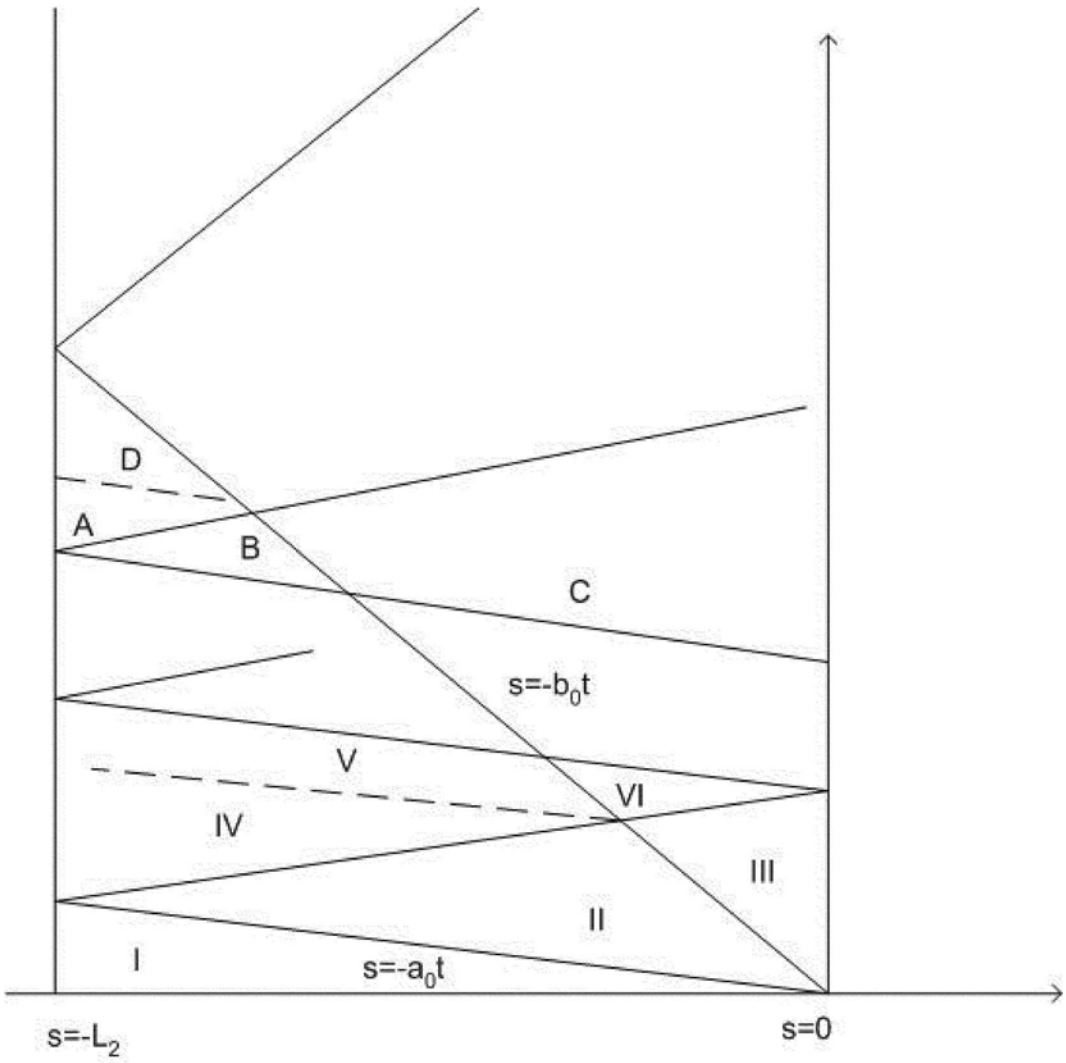


Рис. 3.

являются поперечные волны, представляющие собой точечный источник, движущийся со скоростью b_0 (типа дельта-функции Дирака $\delta(s, bt - nL)$).

Для лучшего понимания в качестве иллюстрации рассмотрим решение данного уравнения методом характеристик. Рассмотрим область слева от точки удара. В момент начала воздействия в струне возникает продольная волна, распространяющаяся со скоростью a_0. За ней распространяется поперечная волна со скоростью $b_0 (b_0 < a_0)$. До момента времени, пока продольная волна не достигла заделки в струне возникают области I- область покоя, II- область за продольной волной, где существуют только продольные движения, III- область продольно-поперечных движений за поперечной волной (рис. 3). Выражения для продольных деформаций и скоростей в данных областях следующие:

$$\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial s}\right)_I = 0;\ \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial t}\right)_I = 0;\qquad \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial s}\right)_{II} = C_0 b_0;\ \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial t}\right)_{II} = \frac{C_0 b_0}{a_0}$$

$$\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial s}\right)_{III} = \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial s}\right)_{II} - C_0 = C_0\left(\frac{b_0}{a_0} - 1\right);\ \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial t}\right)_{III} = 0;$$

где $C_0 = \frac{\alpha_0^2}{2(1+e_0)} = \frac{1}{2(1+e_0)}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2_{III}$ - величина разрыва.

После отражения от заделки за продольной волной возникает область IV, которая существует пока продольная волна не встретится с поперечной. В зависимости от характера заделки натяжение либо возрастает по сравнению с областью II, либо падает. В нашем случае жесткого закрепления решения в данной области таковы:

$$\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial s}\right)_{IV} = 2\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial s}\right)_{II} = 2\frac{C_0 b_0}{a_0},\ \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial t}\right)_{IV} = 0.$$

Рассмотрим дальнейший процесс взаимодействия продольной и поперечной волны. Можно предположить, что возникнут две области: V-область за продольной волной, отраженной от поперечной, и VI- область за продольной волной, прошедшей через поперечную. Решения для данных областей следующие:

$$\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial s}\right)_V = 2\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial s}\right)_{II} = 2\frac{C_0 b_0}{a_0},\ \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial t}\right)_V = 0. \tag{16}$$

$$\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial s}\right)_{VI} = 2\frac{C_0 b_0}{a_0} - C_0;\ \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial t}\right)_{VI} = -C_0 b_0 \tag{17}$$

Очевидно, что $\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial s}\right)_{IV} = \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial s}\right)_V$; $\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial t}\right)_{IV} = \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial t}\right)_V$, и отраженной волны не возникает, т.е. не возникает области V.

Необходимо отметить, что

$$\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial s}\right)_{IV} - \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial s}\right)_{VI} = C_0 = \frac{\alpha_0^2}{2(1+e_0)} = \frac{1}{2(1+e_0)}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2_{VII}$$

а также

$$\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial s}\right)_{IV} - \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial s}\right)_{VI} = C_0 b_0 = \frac{b_0\alpha_0^2}{2(1+e_0)} = \frac{b_0}{2(1+e_0)}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2_{VI}$$

Это значит, что продольная волна проходит без отражения через поперечную волну, оставляя величину разрыва неизменной. Нетрудно убедится и в общем случае, что в линейном приближении при взаимодействии продольной и поперечной волны отраженной продольной волны не возникает. В самом деле, предположим, что в некоторый произвольный момент времени возникает волновая картина, представленная на рис. 3. Значения скоростей и деформаций в областях A,B,C могут быть найдены из следующих соотношений:

$$\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial t}\right)_B = b_0 C_k;\ \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial s}\right)_A = \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial s}\right)_B + \frac{C_k b_0}{a_0};$$

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}\right)_A = 0; \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial s}\right)_C = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial s}\right)_B - C_k; \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}\right)_C = 0$$

Предположим, что при взаимодействии с поперечной волной продольная волна частично отражается. Выражения для $\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \bar{x}}{\partial s}$ в области D следующие:

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}\right)_D = 0 = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}\right)_A; \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial s}\right)_D = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial s}\right)_A + \frac{C_k b_0}{a_0} = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial s}\right)_A$$

откуда следует отсутствие отраженной волны.

Это означает, что:

1)продольные волны распространяются от заделки до точки удара и обратно, не отражаясь от поперечной волны,

2)поперечные волны являются источником распространения вынужденных продольных волн; фронт поперечной волны является точкой разрыва параметров продольных волн.

Для получения спектров продольных колебаний полученные решения могут быть разложены в ряд Фурье по собственным функциям задачи. В данном случае можно избежать сложной процедуры разложения в ряд выражения для $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2$, как это делается в методе разделения переменных, так как в рассматриваемом случае точные аналитические выражения для $\frac{\partial y}{\partial s}$ простые - области постоянных значений. Выражение для $\bar{x}(s,t)$ имеет вид:

$$\bar{x}(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n1} \frac{2C_k c}{\pi n} \sin \frac{\pi n(s-c)}{c}, \quad 0 \le s \le c;$$

$$\bar{x}(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n2} \frac{2C_k (L-c)}{\pi n} \sin \frac{\pi n(L-s)}{L-c}, \quad c \le s \le L;$$

где

$$A_{n1} = \left[\frac{1}{\pi n}\left(\frac{b_0}{a_0}\sin\frac{\pi n a_0 t}{c} - \sin\frac{\pi n b_0 t}{c}\right) + 2\left(\frac{b_0 p}{a_0}\cos\frac{\pi n a_0 t}{c} - k\cos\frac{\pi n b_0 t}{c}\right) - (-1)^k\right]$$

$$A_{n2} = \left[\frac{1}{\pi n}\left(\frac{b_0}{a_0}\sin\frac{\pi n a_0 t}{L-c} - \sin\frac{\pi n b_0 t}{L-c}\right) + 2\left(\frac{b_0 p}{a_0}\cos\frac{\pi n a_0 t}{L-c} - k\cos\frac{\pi n b_0 t}{L-c}\right) - (-1)^n\right]$$

$C_k = \dfrac{\alpha_k^2 \alpha_{k-1}^2}{2(1+e_0)}$ — величины разрывов.

Результаты легко обобщить на более общие случаи граничных условий первого рода, а также произвольной скорости удара при воздействии на струну.

Таким образом, процесс распространения продольных возмущений в струнах музыкальных инструментов может быть представлен как суперпозиция собственных продольных колебаний и вынужденных продольных колебаний, источником которых являются точки фронта поперечных волн, на которых терпят разрыв составляющие продольных скоростей и деформаций.

Литература

[1] *Рахматулин Х. А.* О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения. — ПММ, т.9, № 6, 1945.

[2] *Зверев И. Н.* Некоторые задачи о распространении волн при ударе. Дис. канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, НИИ механики, 1949.

[3] *Рахматулин Х. А.* — ПММ, 1952, Т. 16, № 1.

[4] *Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А.* Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. — М.: Физматгиз, 1961.

[5] *Демьянов Ю. А.* К уточнению теории колебаний струн. — ДАН, 1999, Т. 369. № 4.

[6] *Демьянов Ю. А.* Постановка задач взаимодействия струны с возбудителем ее колебаний. — ДАН, 2000, Т. 372, № 6.

Электрогидродинамика и шаровая молния

Дубровский В. А.

Существование шаровой молнии как физического объекта известно с давних времен. Наблюдение шаровых молний, тем не менее, оказывается по существу случайным актом. Поэтому не представляется возможным проводить детерминированные натурные наблюдения, которые могли бы прояснить природу и механизм этого загадочного явления. Можно сказать, что шаровая молния постоянно бросает дерзкий вызов современной физической науке с ее мощным физико-математическим аппаратом и развитой экспериментальной базой. Естественно, что этот вызов не остается без ответа и порождает различные физико-математические модели шаровой молнии, механизмы ее генерации. Наиболее полный и обстоятельный обзор моделей наряду с квалифицированной систематикой свойств и характерных черт наблюдаемых явлений шаровых молний приведен в [1]. Тем не менее ни одна из моделей не привела до сих пор к возможности лабораторного моделирования, что является необходимым этапом в познании природы шаровой молнии.

В настоящей работе попробуем представить еще одну, пока тоже умозрительную модель шаровой молнии и указать возможное лабораторное моделирование. Предлагаемый подход основан на уравнениях электрогидродинамики, впервые предложенных в [2]. Эти уравнения описывают совместное поведение диэлектрической среды и электрического поля и получены исключением магнитного поля из одной тройки уравнений Максвелла. Они оказались математическим аналогом уравнений магнитной гидродинамики, но для другого крайнего случая сплошной среды — непроводящего (или слабо проводящего) диэлектрика. Действие электрического поля на такой диэлектрик связано с наличием электрических диполей. Это могут быть как собственно диполи молекул вещества, диполи связанные с различного рода примесями и дефектами (вплоть до микротрещин кристалла), так и диполи, наведенные электрическим полем. Существенно, что все эти элементарные диполи стремятся установиться параллельно внешнему электрическому полю, приводя к объемной поляризации и возникновению пондеромоторной силы $(\varepsilon-1)(\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E}/4\pi$ [3], действующей на диэлектрическую среду. В итоге синтеза уравнений Максвелла (с исключенным магнитным полем) и уравнений Навье-Стокса (с введенной пондеромоторной силой) получаем следующую систему уравнений электрогидродинамики [2]:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}-\frac{\varepsilon-1}{4\pi\varrho}\,b\,(\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E}+\nabla\left\{\frac{p}{\varrho}+\frac{\varepsilon-1}{4\pi\varrho}\,a\,E^2\right\}=-\,\nu\,\mathrm{rotrot}\,\mathbf{v} \tag{1}$$

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{E}-d(\mathbf{E}\nabla)\mathbf{v}=-4\pi\sigma\mathbf{E}\qquad\qquad \mathrm{div}\,\mathbf{v}=0 \tag{2}$$

$\mathbf{v}$ — скорость течения среды с плотностью ϱ, вязкостью ν, проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью ε; $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля; p — давление; a, b и d — некоторые безразмерные константы зависящие от конкретной

электрической дипольной структуры сплошной среды. Оказывается, что система (1 – 2) описывает маятникообразную перекачку энергии электрического поля в энергию движения сплошной среды и наоборот [4]. Этап перекачки кинетической энергии течения среды в электрическую энергию можно рассматривать как процесс генерации электрического поля. Такая точка зрения позволила описать механизм генерации атмосферного электричества, подтвердив его натурными наблюдениями [4], и наметить способ локации мощных атмосферных фронтов и вихрей по излучению ими электромагнитных волн и свойствам этих волн [5]. Таким образом появляется достаточная теоретическая база, позволяющая аналитическими, физико-математическими методами ставить и решать задачу о генерации высоковольтных электрических полей [4, 5]. Имеет смысл также воспользоваться такой возможностью при решении центрального вопроса в проблеме шаровой молнии — вопроса ее появления, генерации и относительной стабильности.

Впервые проблема о природе шаровой молнии с точки зрения электрогидродинамических уравнений (1 – 2) была поставлена в [6] и доложена автором этой работы на Ломоносовских чтениях МГУ 26.04.1999. Решение этой проблемы должно в обязательном порядке и в первую очередь учитывать следующие основные наблюдательные данные [1]:

1. Возникновение шаровой молнии происходит в основном в местах с интенсивным, многовольтовым электрическим полем.
2. Шаровая молния светится в видимом диапазоне частот от красного до фиолетового, причем эти оттенки имеют место и в разных частях отдельных экземпляров.
3. Шаровая молния испускает довольно интенсивные радиоволны, регистрируемые бытовыми радиоустройствами.
4. Плотность шаровой молнии практически не отличается от плотности окружающего воздуха, т.е. она находится в воздухе по существу в безразличном равновесии.
5. Несмотря на интенсивное свечение температура шаровой молнии ненамного превышает температуру воздуха (или даже практически совпадает).
6. Вещество объема шаровой молнии имеет тенденцию к принятию шаровой формы, что может свидетельствовать о существенном запасе внутренней энергии, приводящей к дополнительной упругости и эффективно к поверхностному натяжению.
7. Исчезновение шаровой молнии связано с развитием неустойчивости. Кроме того, на ее поверхности наблюдаются следы более мелкомасштабной неустойчивости в виде выброса струй и капель вещества.
8. Имеет место корреляция времени жизни и размеров шаровой молнии: долгоживущие молнии имеют в основном большие размеры.
9. При контакте шаровой молнии с проводниками появляются кратковременные импульсы электрического тока, значительные по амплитуде.
10. Запас энергии в шаровой молнии оказывается не очень значительным: плотность энергии порядка 1 – 10 дж/см^3.

Покажем, что электрогидродинамическая модель шаровой молнии способна дать объяснение всем выше перечисленным свойствам, сформулированным в [1] как итог обработки многочисленных наблюдений. В первую очередь необходимо показать, что

возможна генерация электрического поля, приводящего к шаровой молнии. Такая принципиальная возможность была выявлена для случая атмосферного электричества в [4] как отдельный этап нелинейного маятникообразного процесса перекачки энергии движения среды и энергии электрического поля. Физический смысл генерации, т.е. рождения и усиления электрического поля в электрически нейтральной среде прояснен в [6]. Суть механизма генерации заключается в поляризации диэлектрика, т.е. в параллельном выстраивании диэлектрических диполей, присущих молекулам или некоторым элементарным объемам диэлектрической среды независимо от природы диполей. Такого рода самополяризация при сложном трехмерном движении среды оказывается возможной, как это показано в [4, 5, 6]. Действительно, умножив уравнение (1) скалярно на $\mathbf{v}$, а уравнение (2) — на $\mathbf{E}$ получим два уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varrho v^2}{2} = -\frac{\varepsilon-1}{8\pi}\, b\, E_i D_{ik} E_k - \varrho\nu\,(\mathrm{rot}\mathbf{v})^2 + \\ + \mathrm{div}\left(p\mathbf{v} + \frac{\varrho v^2}{2}\mathbf{v} + \frac{\varepsilon-1}{8\pi}\, a\, E^2\mathbf{v} - \frac{\varepsilon-1}{8\pi}\, b\,(\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E} - \varrho\nu[\mathbf{v}\mathrm{rot}\mathbf{v}]\right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon-1}{8\pi}\frac{b}{d}E^2\right) = \frac{\varepsilon-1}{8\pi}\, b\, E_i D_{ik} E_k - \frac{(\varepsilon-1)b}{d}\,\sigma E^2 + \mathrm{div}\left(\frac{\varepsilon-1}{8\pi}\,\frac{b}{d}\,E^2\mathbf{v}\right) \quad (4)$$

где $D_{ik} = (\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i)$ — тензор скоростей деформаций. Локальная генерация (уничтожение) плотности электрического поля и плотности кинетической энергии движения среды определяется тремя процессами: первый — принос (вынос) энергии в данную точку из соседних, описываемым третьими (дивергентными) членами в (3 – 4); второй — необратимая диссипация энергии, описываемая вторыми, строго отрицательными членами в (3 – 4) и, наконец третий — собственно истинная генерация (уничтожение) энергии поля или кинетической энергии среды в зависимости от знака $E_i D_{ik} E_k$ в первых членах в (3 – 4). Именно, величина и знак $E_i D_{ik} E_k$ определяет интенсивность локальной генерации или уничтожения энергии. При этом из (4) непосредственно следует, что генерация электрического поля происходит за счет кинетической энергии движения среды как один из этапов «перекачки» энергии между течением диэлектрической среды и электрическим полем. Другими словами, имеет место своеобразный маятник с взаимным преобразованием кинетической энергии движения среды и потенциальной энергией поля. Но колебания этого маятника, который управляется каналом, описываемым членами с $E_i D_{ik} E_k$, сложны и прихотливы и составляют суть неустойчивого во всем объеме поведения электрогидродинамической системы. Все зависит от структуры тензора D_{ik}, рассматриваемого в качестве трехмерной матрицы с элементами $(\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i)$. Элементы этой матрицы отличны от нуля (т.е. возможна принципиальная неустойчивость) только при дифференцированном движении среды (с наличием градиентов скоростей). Далее, для ненулевой матрицы D_{ik} всегда существует положительное собственное значение, что вытекает из условия несжимаемости $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$. Тогда любое поле $\mathbf{E}$, направленное вдоль собственного вектора матрицы D_{ik}, соответствующего положительному собственному значению, случайно возникнув, начнет расти (экспоненци-

ально или за конечное время). Именно этот вариант отвечающий положительному значению $E_i D_{ik} E_k$ в уравнении (4), описывает поляризацию диэлектрической среды с параллельным выстраиванием элементарных диполей и как итог появление и рост электрического поля.

Параллельное выстраивание диполей какого-либо объема диэлектрической среды вдоль некоторого направления (например, оси z) будет означать появление дипольного электрического поля с эффективным дипольным моментом D вдоль оси z. Поэтому можно для начала исследовать возможность рождения и поведения дипольного электрического поля. Этот процесс электрического динамо описывается уравнением (2). Рассмотрим, какими могут быть варианты эволюции случайно возникшего дипольного поля $\mathbf{E} = \mathrm{rotrot}(\mathbf{D}/r)$ и какова должна быть при этом конфигурация течений сплошной диэлектрической среды. Будем исходить из уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathrm{rot}[\mathbf{v}\mathbf{E}] = 0 \tag{5}$$

которое полностью соответствует уравнению (2) системы при $d = 1$ и $\sigma = 0$. Уравнение (5) описывает, вообще говоря, поведение электрического поля $\mathbf{E}$ в зависимости от распределения в пространстве и во времени скорости $\mathbf{v}$ течения диэлектрической среды. Мы здесь ставим обратную, до некоторой степени, задачу определения скорости, соответствующей заданной дипольной конфигурации поля. Дело в том, что для дипольного электрического поля влияние его на течение среды слабо, как это должно следовать из уравнения (1). Это следует из того, что член $(\varepsilon - 1)b(\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E}/4\pi\varrho$, переписанный как $(\varepsilon - 1)b\{-\mathrm{rot}[\mathbf{E}\mathrm{rot}\mathbf{E}] + \nabla(E^2/2)\}/4\pi\varrho$, превращается для дипольного поля по существу в градиентный в силу тождества $\mathrm{rot}\nabla a \equiv 0$. А градиентные члены не влияют на вихревые течения, которые мы здесь рассматриваем и которые в действительности ответственны за маятникоподобное поведение электрогидродинамической среды. Следовательно, генерация и поведение дипольного электрического поля, описываемое уравнениями (5), не влияет на характер завихренности $\omega = \mathrm{rot}\mathrm{v}$ течения диэлектрической среды, но не на величину и распределение давления p.

При выбранной нами конфигурации электрического поля в виде $\mathbf{E} = \mathrm{rotrot}(\mathbf{D}/r)$, где $\mathbf{D}$ параллельно оси z, а r — радиальная переменная сферических координат, означает, что $\mathbf{E}$ имеет дипольный вид всюду кроме начала координат: $\mathbf{E} = \nabla\mathrm{div}(\mathbf{D}/r) + \mathbf{D}\delta(r)$ ($\delta(r)$ — дельта функция). Будем для простоты рассматривать далее начало координат исключенным с помощью бесконечно малой области, окружающей точку $r = 0$. Выясним теперь условия, при которых возможно усиление дипольного поля. Имея ввиду принятую конфигурацию $\mathbf{E}$ и уравнение несжимаемости, убеждаемся что уравнение (5) удовлетворяется, если имеет место:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + v_r E_\theta - v_\theta E_r = 0 \qquad A = D(t)\,\frac{\sin\theta}{r^2} \tag{6}$$

$$E_r\, r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\varphi}{r}\right) + E_\theta\,\frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\varphi}{\sin\theta}\right) = 0 \tag{7}$$

где выбраны сферические координаты (r, θ, φ). Разделение временной и простран-

ственных переменных приводит к следующим уравнениям:

$$\left(\frac{1}{D}\right)\frac{\partial D}{\partial t} = T \tag{8}$$

$$v_r\overline{E}_\theta - v_\theta\overline{E}_r = T\,\frac{\sin\theta}{r^2} \tag{9}$$

где $\{\overline{E}_r, 0, \overline{E}_\theta\} = \{E_r, 0, E_\theta\}/D$ — пространственная часть вектора $\mathbf{E}$ напряженности электрического поля, а T произвольная функция времени.

Решение уравнения несжимаемости $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ совместно с (6) – (9) дает:

$$v_r = -Tr + \frac{6Tr\,\mathrm{ctg}\theta}{\sin^7\theta}\int \sin^7\theta\,d\theta + \frac{\mathrm{ctg}\theta}{r^2\sin\theta}\,\Psi\left(\frac{r}{\sin^2\theta}\right) \tag{10}$$

$$v_\theta = \frac{3Tr}{\sin^7\theta}\int \sin^7\theta\,d\theta + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\Psi\left(\frac{r}{\sin^2\theta}\right) \tag{11}$$

$$v_\varphi = \overline{v}_\varphi(t) r\,\sin\theta\,\Phi\left(\frac{r}{\sin^2\theta}\right), D = D_0\exp\left\{\int T dt\right\} \tag{12}$$

где $\Psi(r/\sin^2\theta)$ и $\Phi(r/\sin^2\theta)$ — произвольные функции от комбинации $r/\sin^2\theta$ радиальной r и полярной θ координат.

Таким образом полученное решение уравнений (5), описывающее генерацию электрического поля, имеет дипольную конфигурацию электрического поля $\mathbf{E} = \mathrm{rotrot}(\mathbf{D}/r)$ и распределение скоростей (10 – 12). Это решение зависит от произвольной функции времени T и двух произвольных функций Ψ и Φ и тем самым представляет достаточно общее решение способное удовлетворить различным начальным и граничным условиям выбором вида произвольных функций. При выборе $T \equiv 0$ решение оказывается стационарным. При выборе $T = T_0 = \mathrm{const}$ электрическое поле может экспоненциально расти или затухать в зависимости от знака константы T_0. Более общая зависимость $T(t)$ от времени может определять временную зависимость электрического поля и поля скоростей различного характера, включая существенное изменение процесса генерации или уничтожения полей за конечное время. Для нас пока важно, что уравнения электрогидродинамики могут описывать процесс генерации электрического поля в ограниченном объеме пространства при определенной конфигурации течений диэлектрической среды, как это продемонстрировано выше на примере дипольного электрического поля. Конечно, дипольная конфигурация не является обязательной и можно исследовать поведение и других конфигураций электрического поля. Однако это представляет более сложную задачу и будет исследовано в будущем.

Как было отмечено ранее, генерация или уничтожение поля связано с поляризацией или хаотическим распределением (деполяризацией) электрических диполей элементов диэлектрической среды. Тем самым решается главный вопрос обсуждаемой

модели шаровой молнии, как явление поляризации некоторых объемов диэлектрической среды. Это вопрос о физике и механизме появления и уничтожения шаровой молнии.

Покажем теперь, что представленная модель способна объяснить и описывать другие, основанные на наблюдениях характерные черты и свойства шаровой молнии, которые мы перечислили выше.

1. Возникновение шаровой молнии в областях существования интенсивного поля с большим градиентом (в частности около проводников) объясняется тем, что природой задаются начальные данные большой величины и подходящей конфигурации. А это облегчает и ускоряет процесс генерации. Необходимо отметить, что для возникновения шаровой молнии необходимы, повидимому, чистые пары воды в воздушных объемах. Действительно, молекулы воды обладают существенным электрическим моментом, что делает дистиллированную воду уникальным природным диэлектриком. Именно присутствие паров воды превращает воздушные массы в довольно сильный диэлектрик.

2. Свечение шаровой молнии связано с возможностью генерации электрического поля большой напряженности (30 киловольт/см и выше) [4]. В таком случае должно иметь место свечение типа холодного разряда, причем в местах разной напряженности цвета свечения должны быть различными.

3. Излучение радиоволн связано с их генерацией за счет неустойчивых процессов разного масштаба в шаровой молнии, что определяет граничные и начальные условия для уравнений Максвелла, описывающих распространение электромагнитных колебаний в диэлектрической среде [4, 5].

4. Плотность вещества шаровой молнии должна совпадать с плотностью окружающего воздуха потому, что в обоих случаях мы имеем дело с одним и тем же составом при практически одинаковых физических условиях.

5. Свечение шаровой молнии не повышает ее температуру поскольку это свечение оказывается свечением типа холодного разряда (подобно лампам дневного света).

6. Свойство шаровой молнии сохранять примерно шарообразную форму можно объяснить двумя причинами: во-первых, упругостью электрических силовых линий, поскольку по физическому смыслу и на основании уравнения (5) силовые линии вморожены в вещество, во-вторых может иметь место диполь-дипольное взаимодействие $\alpha(\mathbf{SS})$ такого же типа как в ферромагнетиках или сегнетоэлектриках, что также может привести к повышению внутренней энергии.

7. Исчезновение шаровой молнии в результате взрывного или спокойного процесса связано с различным типом развития неустойчивости. О существенной роли процессов неустойчивости в жизни шаровой молнии свидетельствует как раз наблюдаемая мелкомасштабная неустойчивость в виде выброса струй и капель с поверхности.

8. Корреляция времени жизни и размера шаровой молнии объясняется тем обстоятельством, что неустойчивые системы разрушаются тем дольше, чем больше их размеры.

9. Контакт шаровой молнии с проводниками сопровождается движением свободных электрических зарядов проводника к или от шаровой молнии в зависимости от на-

правленности ее электрического поля. Такого рода тенденция к нейтрализации электрического поля молнии индуцирует интенсивные импульсы электрического поля и с большой вероятностью может привести к разрушению шаровой молнии. Можно вспомнить достаточно интенсивные искры от поляризованных диэлектриков при приближении к последним проводящих тел.

10. Запас энергии шаровой молнии связан с ее электрическим полем, возникающим при параллельном выстраивании электрических диполей вещества. Поэтому должно быть электрическое поле значительного вольтажа, но незначительной результирующей мощности.

В итоге можно утверждать, что электрогидродинамическая модель шаровой молнии достаточно успешно решает многие вопросы, связанные с ее свойствами и процессами появления. Тем не менее многое пока решается на физически интуитивном уровне и поэтому требует в дальнейшем более тщательной физико-математической обработки, а также постановки лабораторных экспериментов по генерации и исследованию свойств шаровой молнии.

Что касается экспериментальных исследований, то методику их постановки можно нащупать на основании электрогидродинамической модели, трактующей шаровую молнию как физический объект с поляризацией электрических диполей воздушных объемов. Для этого нужно обеспечить соответствующее трехмерное (возможно завихренное) движение воздушных, слабо проводящих объемов, насыщенных парами дистилированной воды, в достаточно сильном электрическом поле. Чистые пары воды необходимы для превращения воздушных масс в сильный диэлектрик, со значительными электрическими дипольными моментами на единицу объема.

Литература

[1] *Стаханов И. П.* О физической природе шаровой молнии. — Москва, Научный мир, 1996.

[2] *Дубровский В. А.* Уравнения электрогидродинамики и электроупругости. — ДАН СССР, 1984, т. 279, № 4.

[3] *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. — Москва, Наука, 1976.

[4] *Дубровский В. А., Русаков Н. Н.* Механизм генерации электрического поля. — ДАН СССР, 1989, т. 306, № 1.

[5] *Дубровский В. А., Русаков Н. Н.* Способ определения тропосферных возмущений. — Авторское свидетельство №1638689. Приоритет от 15.07.1988. Зарегистрировано 01.12.1990.

[6] *Дубровский В. А.* Новая наука — электрогидродинамика. Наука и технология в России. — Международная газета, 1994, № 1.

Критерий разрушения в синтетической теории прочности

Куксенко Б. В.

Критерий формулируется на основании модели физического кризиса, который наступает в состоянии нагружаемого твердого тела, когда его деформации малы. Предполагаемая ситуация такова, что необратимых (пластических) деформаций либо еще нет, либо они произошли, но разгрузка по пути, параллельному пути нагружения, еще возможна. Критическим мы назовем такое состояние, в котором любое увеличение нагрузки ведет уже к невозможности разгрузки по такому пути. Критическое состояние в соответствии с этим определением может либо совпадать с предельным состоянием, за которым начинается ниспадающая ветвь диаграммы нагружения, либо наступать раньше по причине таких структурных изменений, которые позволяют материалу выдерживать повышение нагрузки, но значительно изменяют его свойства. В обоих случаях после кризиса материал становится существенно иным. Появление пластической деформации до кризиса допускается лишь постольку, поскольку она может происходить без существенных структурных изменений. Например, если механизм течения дислокационный, то с приходом дислокации в материале рвутся электромагнитные связи, но после ее ухода они могут полностью залечиваться. И разгрузка будет соответствовать упругой нагрузке.

В переменных синтетической теории разрушения Шемякина Е. И. (σ, T, μ_σ) предлагаемый критерий распознавания критического состояния выглядит следующим образом:

$$(3 - \mu_\sigma)\, T = 3\, \tau_* \,,$$

где τ_* — предельное касательное напряжение материала при испытании на чистый сдвиг. Остальные обозначения вводятся ниже.

В предлагаемый критерий заложена гипотеза о том, что твердая фаза по своей природе представляет собой аналог композита. В каждой его точке напряженное состояние имеет вандерваальсовый характер. В нем присутствуют и находятся в противоборстве одновременно и созидающие силы натяжения, которые имеют электромагнитное происхождение, и сходные с давлением в газах силы противодействия сжатию, которые проистекают из неуничтожимости импульса среды.

Последний вид сил (обменного характера) для краткости назовем силами сжатия, они имеют предположительно дискретный характер, то-есть создаются дискретными носителями импульса в среде. И они непреодолимы, поскольку представляют собой ответ на внешнее воздействие, за счет которого и создаются, и подпитываются. Напомним, что при всестороннем равномерном сжатии не замороженный до абсолютного нуля температуры газ невозможно сжать до исчезновения свободного объема. Невозможно разрушить его сопротивление сжатию. Если сжатие настолько велико, что отдельные молекулы разваливаются на части, то происходит лишь увеличение

числа движущихся частиц, которое приводит к увеличению эффективной жесткости газа. По аналогичным соображениям твердое тело сильным всесторонним сжатием можно существенно преобразовать, но нельзя уничтожить.

В противовес силам сжатия (по своей природе — противодействующим), те силы, которые сжимают (стягивают) и тем самым создают твердую фазу, имеют электромагнитное происхождение и их роль несколько сходна с ролью предварительно напряженной арматуры в струнобетоне.

В ненагруженном извне твердом теле сосуществуют оба вида сил. Стягивающие силы физически являются дальнодействующими. Они — стягивают материал, противодействующие — их уравновешивают. Те напряжения, которые изучаются в механике сплошной среды, прилагаются извне и реально лишь сдвигают внутреннее равновесие. Тело при этом изменяет деформацию, потому что величина обоих видов сил зависит от деформированного состояния, которое изменяется до тех пор, пока внешнее воздействие не будет компенсировано.

Если материал приобретает деформацию растяжения, это вызывает и удаление притягивающихся друг к другу разноименных электрических зарядов, и разреживание магнитных силовых линий. Поэтому деформация растяжения снижает способность самосохранения твердой среды. Выяснение зависимости сил сжатия от деформирования материала из-за их сходства с давлением относительно просто, но как отмечалось выше, разрушение связывается не с этими силами. Среда разрушается при ослаблении созидающих стягивающих сил. А вот как раз для этих сил построение близких к адекватности моделей крайне затруднительно. Поэтому мы *строим критерий разрушения через наблюдение только напряженного состояния* (благо, что на ранних стадиях предразрушения нет серьезных отклонений от пропорциональности тензоров напряжений и деформаций, а у хрупких тел возможно даже сохранение закона Гука; да и причиной появления разрушающей деформации всегда бывает именно напряжение).

Вклад приложенного извне тензора напряжений в силы сжатия равен одной трети его первого инварианта, обозначим его $-\mathcal{P}$ и назовем $\mathcal{P}$ средним давлением

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{3}\, I_1 = -\frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right),$$

Среднее давление $\mathcal{P}$ характеризует усилия, приложенные извне, но его величина является чистым вкладом во внутренние силы сжатия. Если, например, все главные напряжения положительны (материал всесторонне растянут), то $\mathcal{P}$ — отрицательно и внутреннее давление при этом уменьшится, потому что внешняя растягивающая нагрузка противодействует стягивающим силам, а уравновешивающие их силы сжатия лишаясь части нажима, сами уменьшатся как раз на величину $\mathcal{P}$. Если же материал внешней нагрузкой придавливается, то стягивающие силы получают подкрепление и противодействующие им силы сжатия возрастут.

Разность главного напряжения и одной трети первого инварианта, она же — *сумма главного напряжения σ_k $(\forall k)$ и среднего давления $\mathcal{P}$, если положительна, то сдерживается только за счет сил стягивания.*

В синтетической теории разрушения принято самое большое главное напряжение отмечать индексом 1. Поэтому именно сумма $\sigma_1 + \mathcal{P}$ первой изо всех может преодолеть стягивание. Не вдаваясь в подробности, предположим, что стягивающая сила ведет себя примерно так же, как и излишне натянутая струна в композите, то-есть попросту обрывается. Дадим критическому напряжению обозначение σ_* и объявим критической ситуацию, когда самое большое растягивающее напряжение достигнет критического значения

$$\sigma_1 + \mathcal{P} = \sigma_* \,. \tag{1}$$

Переведем критерий (1) в обозначения синтетической теории прочности.

Поскольку $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ и

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \qquad T = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \qquad \mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}\,,$$

$$\text{то} \qquad \sigma_1 = \sigma + T\,, \qquad \sigma_2 = \sigma + \mu_\sigma T\,, \qquad \sigma_3 = \sigma - T\,.$$

Тогда

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{3}\, I_1 = -\frac{1}{3}\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = -\,\sigma - \frac{1}{3}\,\mu_\sigma\, T\,.$$

Значит, критическое напряжение будет равно

$$\sigma_* = \sigma_1 + \mathcal{P} = \frac{1}{3}\,(3 - \mu_\sigma)\, T\ . \tag{2}$$

Для того, чтобы определить величину σ_* экспериментально, проведем стандартное испытание на сдвиг в ящике. Пока деформации малы, при создании чисто сдвигового поля напряжений характер деформирования таков, что у каждого квадрата, стороны которого параллельны стенкам ящика, главное растяжение (получит индекс 1) направлено по одной диагонали, а главное сжатие (получит индекс 3) — по другой, причем по модулю соответствующие им деформации отличаются пренебрежимо мало. Третье главное направление (получит индекс 2) направлено по нормали к плоскости самóго квадрата и напряжения на этом направлении как и деформации — нулевые. В момент кризиса

$$\sigma_1 = \Sigma_*, \qquad \sigma_2 = 0, \qquad \sigma_3 = -p_*\,.$$

При этом $\Sigma_* = p_*$. Значит, в критическом напряженном состоянии мы имеем $\sigma = \mu_\sigma = 0$, а

$$T = \tau_* = \Sigma_* = p_*\,.$$

Но в соответствии с (2), константа σ_* синтетической теории первичного разрушения, подлежащая экспериментальному определению,

$$\sigma_* = \frac{1}{3}\,(3 - \mu_\sigma)\,T \;= \tau_*\,,$$

оказывается равной предельному сдвиговому напряжению τ_*. Построение критерия завершено.

Проверку дееспособности критерия можно осуществить в двух видах опыта на простое нагружение.

- При простом растяжении стержня из того же материала в момент обрыва имеем

$$\sigma_1 = \Sigma_*, \qquad \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \text{тогда} \quad \sigma = T = \frac{\Sigma_*}{2}, \qquad \mu_\sigma = -1.$$

  Отсюда следует, что $(3+1)\Sigma_*/2 = 3\,\tau_*$, значит

$$\Sigma_* = \frac{3}{2}\,\tau_*\,.$$

- При раздавливании лепешки из испытуемого материала при отсутствии трения на сдавливающих поверхностях

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0\,, \qquad \sigma_3 = -p_* \quad \text{тогда} \quad \sigma = -\,\frac{p_*}{2}, \qquad T = \frac{p_*}{2}, \qquad \mu_\sigma = 1.$$

  Отсюда следует, что $(3-1)p_*/2 = 3\,\tau_*$, значит

$$p_* = 3\,\tau_*\,.$$

  Критическое давление численно оказалось ровно в два раза больше, чем критическое напряжение при растяжении. Причина разницы находится в изменении параметра Лоде μ_σ.

Применим критерий в задаче более сложной, но допускающей упрощение до возможности аналитического решения. Пусть материал покоится в поле силы тяжести, заполняя нижнее полупространство под горизонтальной плоской свободной поверхностью. Зависимости параметров от горизонтально направленных координат нет. Тензор напряжений повсеместно шаровой, давление зависит только от глубины. Удалим из полупространства прямой круговой полубесконечный цилиндр, ось которого вертикальна, создав таким способом модель скважины. Уточнение граничных условий на ее поверхности произведем позже, а сначала предположим лишь в общих чертах, что в полупространстве произойдет цилиндрически симметричная разгрузка, которая вне некоторой окрестности скважины произойдет линейно упруго при независимых от глубины константах λ и μ. В цилиндрических координатах (r, z, φ) зависимости от φ нет. Радиальное перемещение обозначим буквой u, изменения радиальной и кольцевой деформаций равны соответственно $\partial u/\partial r$ и u/r. Изменение деформации

в вертикальном направлении обозначим $\Delta\varepsilon_z$. Примем упрощающее предположение, что слои, в которых напряжение σ_z постоянно, остаются плоскими горизонтальными. Придерживаясь одного такого слоя ($\Delta\sigma_z = 0$), из одного из соотношений закона Гука

$$\Delta\sigma_z = (\lambda + 2\mu)\Delta\varepsilon_z + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right),$$

имеем

$$\Delta\varepsilon_z = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right). \tag{3}$$

Отсюда следует

$$\Delta\sigma_r = \alpha\frac{\partial u}{\partial r} + \beta\frac{u}{r}, \qquad \Delta\sigma_\varphi = \beta\frac{\partial u}{\partial r} + \alpha\frac{u}{r}, \qquad \alpha = \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda + 2\mu}, \qquad \beta = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}. \tag{4}$$

Дифференциальное уравнение равновесия в радиальном направлении

$$\frac{d\Delta\sigma_r}{dr} + \frac{\Delta\sigma_r - \Delta\sigma_\varphi}{r} = 0$$

ведет к уравнению для перемещения u

$$r\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} - \frac{u}{r} = 0,$$

которое имеет одно фундаментальное решение, исчезающее на бесконечности:

$$u = -\frac{C}{r}, \qquad \frac{du}{dr} = \frac{C}{r^2}.$$

Знак минус введен для того, чтобы константа C принимала только положительные значения. Подстановка полученного решения в (3) приводит к $\Delta\varepsilon_z = 0$, что означает подтверждение предположения об отсутствии вспучивания слоев среды в линейно упругой области (пока нет разрушения).

Возвращаясь к (4), получаем в слое $\sigma_z = const$ главные напряжения

$$\sigma_r = \sigma_z + 2\mu\frac{C}{r^2}, \qquad \sigma_z, \qquad \sigma_\varphi = \sigma_z - 2\mu\frac{C}{r^2}$$

расположенными в порядке убывания. Присвоив им индексы 1,2 и 3, можно обратиться к вышеуказанному критерию (1) и следствиям из него. Интереснейшим из следствий оказывается, что для всех значений σ_z, и, значит, на всех глубинах критерий разрушения может иметь совершенно одинаковый вид

$$\frac{2\mu C}{r^2} = \tau_*. \tag{5}$$

Если предельное касательное напряжение τ_* не зависит от глубины, то поле радиальных перемещений, задаваемое с помощью константы C, тоже может от глубины не зависеть. В этом случае и критический радиус, ограничивающий изнутри область упругой разгрузки, в соответствии с (5) постоянен вдоль всей скважины.

Граничное условие, которое следует выполнить на критической поверхности

$$\sigma_{r*}(z) = -p(z) = \sigma_z(z) + \tau_*(z)\,,$$

означает, что для реализации полученного приближенного решения следует внутри скважины поддерживать давление, которое ниже давления в слое на величину τ_*.

Есть и еще одна область применения предложенного критерия. Он позволяет судить о возможности нарушения равновесия в покоящейся сыпучей среде. Сыпучая среда в отличие от твердой не имеет фиксированного предельного касательного напряжения, а удерживается в равновесии силами сухого трения[1]. Напряжение трения пропорционально давлению в среде. В нашем случае эту роль играет среднее давление $\mathcal{P}$. Обозначив коэффициент трения символом f, имеем

$$\tau_* = -f\mathcal{P}\,. \tag{6}$$

Поскольку в (1) $\sigma_* = \tau_*$, для сыпучей среды получаем

$$\sigma_1 + \mathcal{P} = -\,f\mathcal{P}\,,$$

откуда следует

$$\sigma_1 = \frac{1+f}{2-f}\,(\sigma_2 + \sigma_3)\,. \tag{7}$$

Критерий (7) позволяет различить шаровой тензор напряжений. Если $f = 0$, то наибольшее главное напряжение равно среднему арифметическому из двух меньших, а такое возможно лишь при равенстве всех трех.

Наконец, если твердое тело таково, что обладает предельным напряжением σ_*, при его достижении разрушается хрупко, превращаясь в сыпучую среду (среду, состоящую из мелких блоков) с коэффициентом внутреннего сухого трения f, то указателем на опасность разрушения такого тела может служить критерий

$$\sigma_1 = \frac{3\,\sigma_* + (1+f)(\sigma_2 + \sigma_3)}{2-f}\,.$$

Работа выполнена как отклик на доклады академика РАН профессора Шемякина Е. И. на заседаниях научно-исследовательского семинара кафедры газовой и волновой динамики.

P.S. Интересно рассмотреть попеременное запредельное за σ_* нагружение и имитацию эффекта Баушингера. Мой личный интерес заключается в изучении поведения такого материала (допустимо в пространственно однородной ситуации и в плоском напряженном состоянии), когда он постоянно находится в предельном по напряжениям состоянии, а направление главного напряжения σ_1 поворачивается.

[1]Если она имеет сцепление, то оно мало по сравнению с трением.

Ломоносов и успехи в изучении атмосферного электричества

Натяганов В. Л.

«. . . не без сожаления привожу на память, что многие главы натуральной науки и в малейших частях весьма ясно истолкованы, но знание воздушного круга еще великою тьмою покрыто. . . »
М. В. Ломоносов

1. М. В. Ломоносов и мировая наука (краткая историческая справка)

Ломоносов в своем знаменитом «Слове о явлениях воздушных, от электрической силы происходящих» [1] дал не только подробный анализ всех известных в то время типов электрических разрядов в газах почти в полном соответствии с их современной классификацией, но и *«. . . с присущей ему силой гения сумел в своей теории по существу правильно вскрыть самые общие моменты в процессе образования атмосферного электричества и, в частности, роль восходящих и нисходящих потоков воздуха, предвосхитив многие современные представления по этому вопросу»* [2]. Фактически Ломоносов предложил следующую цепочку: трение материальных частиц в воздушных потоках приводит к их электризации, затем к передаче зарядов от этих частиц мелким каплям воды, которые собираются в облака, что приводит к появлению сильных электрических полей, являющихся причиной молний.

Следует подчеркнуть, что в отличие от западных ученых, занимавшихся в то время лишь качественным описанием электрических явлений, М. В. Ломоносов и Г.-В. Рихман ставили перед собой задачу количественного изучения «электрической силы». Для этой цели Рихман в начале 1745 г. изобрел «электрический указатель», явившийся первым в мире электроизмерительным прибором. Он же впервые пытался измерить электрическую силу с помощью весов, однако это удалось сделать с достаточной точностью лишь на крутильных весах Кулону в 1785 г.

Заметим, что Ломоносов в своем «Слове. . . », а потом в «Рассуждении об обязанностях журналистов. . . » и неоконченном труде «Теория электричества, изложенная математически» выступает с принципиальной критикой отсталых метафизических теорий не только электричества, но также теплоты и света, которые в то время господствовали на Западе (более того, шла дискуссия — являются ли электричество, магнетизм, свет и теплота особыми невесомыми жидкостями и следует ли их считать химическими элементами?! [3]). И это в то время, когда Ломоносов прямо утверждал, что «электрическая сила есть действие», а все электрические и световые явления должны быть объяснены движением эфира и его частиц в том числе (и в первую очередь) вокруг их собственных осей! Ломоносов последовательно отстаивал достижения молодой русской науки, роль и значение теоретических исследований,

основанных на экспериментах и опытных данных, а не на умозрительных построениях. И в этом его решительно поддержал великий Эйлер, приславший отзыв на «Слово. . . »: «*Если мы предварительно не сделаем известных гипотез и не будем их последовательно исправлять сравнением с явлениями, то никогда не дойдем до истинной причины, хотя бы число опытов было увеличено до бесконечности. То, что остроумнейший Ломоносов предложил относительно течения этой тонкой материи* (т.е. электричества) *в облаках, должно принести величайшую помощь тем, кто хочет приложить свои силы для выяснения этого вопроса*».

Следует подчеркнуть, что обстоятельный анализ многолетних наблюдений и опытных данных, полученных с помощью электрометра Рихмана, позволил Ломоносову на качественном уровне предвосхитить многие результаты Симпсона по исследованию вариаций электрического поля на поверхности земли под грозовыми облаками [2], полученных в 30 – 40-х годах XX столетия на базе полной теории электромагнетизма и контрольно-измерительной техники совсем другого поколения. При этом Ломоносов открыл существование естественного электрического поля в атмосфере не только во время грозы, но и при ясной безоблачной погоде!

Более того, Ломоносов в «Слове. . . », «Изъяснениях к «Слову. . . » и «Материалах обсуждения «Слова. . . », которые необходимо рассматривать как три части одной работы, одним из первых высказал гипотезу об электрической природе шаровой молнии (без упоминания ее современного названия), «тифона» или атмосферного вихря (смерча или торнадо) и северного сияния, причислив их к особым и наиболее загадочным явлениям атмосферного электричества.

Даже перечисленного выше вполне достаточно, чтобы имя М. В. Ломоносова золотыми буквами было вписано в историю мировой науки. Однако, к сожалению, дело обстоит не совсем так [3]. Более того, в зарубежных источниках по истории науки (особенно англоязычных) трудно найти упоминания о том, что именно Ломоносов

- первым открыл закон сохранения массы (на целых 17 лет раньше Лавуазье),
- первым (и единственным из сотни ведущих астрономов мира, наблюдавших прохождение Венеры по диску Солнца 26 мая 1761 г. более чем в 40 различных точках земного шара) обнаружил атмосферу на Венере,
- первым сформулировал закон сохранения энергии при переходе кинетической энергии в тепловую,
- первым заложил физические основы атомарно-кинетической природы тепла и вплотную подошел к понятию абсолютного нуля и т. д.

Что стоит за этим умалчиванием: элементарное незнание научно-исторических фактов, пресловутый «индекс цитирования» или «борьба» за национальный приоритет? В любом случае автор счел своим долгом этот вопрос поставить. . .

Невероятно, но факт, что столь фундаментальные открытия в различных областях физики и химии сделал всего один человек, а не целая Академия или крупная научная школа, как сказали бы сегодня. . . Это отмечал еще великий Эйлер в отзыве от 21 ноября 1747 г. на «Размышления о причине теплоты и холода» и «О действии

химических растворителей вообще»: «... *Сии сочинения не только хороши, но и превосходны, ибо он* (М. В. Ломоносов) *изъясняет физические и химические материи, самые нужные и трудные, кои совсем неизвестны и невозможны были к истолкованию самым остроумным ученым людям... Желать надобно, чтобы все прочие Академии были в состоянии показать изобретения, которые показал г. Ломоносов*».

А что касается конкретного «Слова...», то о нем знали во всех ведущих научных центрах того времени. Более того, по «Слову...» делались доклады (в частности Ватсоном в Лондоне, Phil. Trans. Roy. Soc., v.48, p.2, 1754) и писались диссертации (Винклером в Лейпциге «Об искусстве отвращения молнии...» 1753 г.), в которых рассматривались и обстоятельства трагической гибели Рихмана во время опытов с атмосферным электричеством (от удара шаровой молнии, что сейчас признается практически всеми исследователями).

Символично, что последнюю главу своего неоконченного труда «Теория электричества, изложенная математически» Ломоносов назвал «О будущих успехах учения об электричестве». Интересно, как бы он сегодня оценил эти успехи? Ведь несмотря на огромный прогресс за прошедшие четверть тысячелетия после выхода «Слова...» в развитии теоретических представлений, экспериментальной базы и методов физико-математического моделирования, относительные успехи в изучении даже обычных (по Ломоносову) явлений атмосферного электричества достаточно скромны [2 – 5]. Так, механизм зарядки облаков до сих пор не понят до конца; а стримерно-волновая модель линейной молнии, предложенная еще в 30-х годах, получила развитие лишь в последние годы, что позволило существенно продвинуться в теории вопроса об «отвращении» (говоря словами Ломоносова) молний от различных объектов или их молниезащиты [5]. Правда, электромагнитная природа северных сияний была создана еще в начале прошлого века Штермером и вошла даже в учебники [6], роль электровихревых течений в гидродинамике и энергетике торнадо получила подтверждение в МГД-модели смерча в развитой стадии лишь в 70-х годах [7], а вот общепринятой физико-математической модели шаровой молнии, объясняющей многочисленные парадоксы и странности ее поведения, нет до сих пор.

Так что не вся тьма еще рассеяна (см. эпиграф). Правда, автор большую надежду возлагает на электрокапиллярновихревую модель шаровой молнии, обладающую большим прогностическим потенциалом, но это — тема отдельного исследования (см. статью в этом сборнике).

В последние десятилетия внимание многих ученых в разных странах мира обращено к новой загадке природного электричества — сейсмоэлектромагнитным явлениям (СЭМЯ), разгадка механизма и построение физико-математических моделей которых сулят человечеству надежный признак для краткосрочного и оперативного прогноза землетрясений.

2. Землетрясения и их прогноз

Землетрясение есть следствие динамически распространяющегося со скоростью несколько км/сек разрыва в толще земных недр (литосфере). Под очагом землетрясения понимается разрыв (трещина в литосфере) или система разрывов, генерирующая упругие волны. Когда подобные волны достигают земной поверхности и происходит землетрясение. По современным воззрениям землетрясения возникают в результате внезапной разрядки имеющихся в литосфере механических напряжений [8].

Существующие пояса наиболее сильной сейсмичности сегодня обычно объясняются тектоникой литосферных плит. Возникнув первоначально как кинематическая модель, тектоника плит способствовала быстрому развитию геодинамики — научной дисциплины, занимающейся изучением внутренних движений и деформаций земной коры, анализом их причин и взаимосвязями с другими процессами. Хотя полной ясности еще нет, однако по последним представлениям причинами движения литосферных плит являются тепловая конвекция внутри Земли [9] и динамические эффекты сложного нагружения по А. А. Ильюшину из-за собственного вращения планеты и сил гравитационного взаимодействия с другими телами Солнечной системы [10, 11].

Ключевую роль в эволюции литосферы Земли по современным представлениям играют процессы субдукции (поддвига), когда одна плита при встрече заталкивается под другую; спрединга (растяжения) и скольжения литосферных плит вдоль трансформных разломов, с которыми и связано большинство сильных землетрясений [12]. При этом на границах плит возникают высокие упругие напряжения, вызывающие разрывы в литосфере, образование трещин и их схлопывание, и как следствие — землетрясения.

Теоретическую основу моделей подготовки землетрясений составляют методы механики сплошных сред и физики разрушения горных пород. Наиболее известны три группы моделей, относящиеся к упруго-пластическому деформированию, лавинно-неустойчивому трещинообразованию и дилатантно-диффузионным процессам. К сожалению, адекватно описывая процесс подготовки землетрясений, эти модели не дают достоверных прогностических признаков о времени их начала [8, 13 – 15].

Следует подчеркнуть, что методика долгосрочного (годы – десятилетия) сейсмического прогноза разработана в трудах академика Федотова С. А., а вот с краткосрочным (недели – месяцы) и особенно оперативным (часы – сутки) прогнозом землетрясений дело обстоит неудовлетворительно, несмотря на то, что сегодня известно около трехсот различных предвестников сильных землетрясений. И если долгосрочный прогноз позволяет избегать строительства опасных объектов типа химических производств (или АЭС на Камчатке, которое было прекращено благодаря усилиям Федотова С. А.), то надежный оперативный прогноз позволит спасать человеческие жизни.

До недавнего времени было принято считать, что трагическим воздействиям природных катастроф геолого-геоморфологического типа (землетрясений, цунами, извержений вулканов, схода оползней, селей или лавин. . .) в максимальной степени

подвержены наиболее бедные и слаборазвитые страны, тогда как в развитых обществах ущерб в основном выражается в больших деньгах, а не в человеческих жертвах. Однако последнее землетрясение в Кобе (Япония, 1996 г.) поставило под сомнение это представление: жертв тоже было много, несмотря на хорошо организованный сейсмический мониторинг. Увеличение плотности техносферы на Земле и отмечаемый в последнее время рост количества природных катастроф повышает риск их сопровождения спровоцированными техногенными катастрофами [8], что может на порядки увеличить возможный ущерб. Так что в наши дни роль надежного оперативного прогноза землетрясений многократно возрастает.

Сегодня многочисленные опытные данные позволяют идентифицировать различные типы предвестников землетрясений: акустические, световые, гидрогеодинамические, сейсмические, геохимические и электромагнитные [13 – 19].

Если об акустических, гидрогеодинамических и световых предвестниках перед началом сильных землетрясений писали исследователи еще в прошлых веках, в числе которых был и Ломоносов[1], то геохимические и электромагнитные стали усиленно изучаться в последние десятилетия XX века. Поводом к этому послужили инструментальные открытия аномального увеличения: 1) содержания радона в термоминеральной воде глубинного происхождения перед Ташкентским землетрясением 1966 г. и 2) атмосферного электрического поля (АЭП) в районе Джалалабада перед Куршабскими землетрясениями в 1924 г., Чаткальским (1946 г.) и Хаитским (1949 г.) землетрясениями [16]. А за 5 часов до Ташкентского (1966 г.) землетрясения было зарегистрировано аномальное возмущение, характеризующееся изменением направления АЭП на противоположное нормальному ходу.

Следует подчеркнуть, что первая теоретическая модель сейсмоэлектрического эффекта была дана в оригинальной статье [14], однако в среде геофизиков она понимания и широкого отклика тогда не нашла...

3. «Самолетная» модель сейсмоэлектрического эффекта

Систематическое изучение СЭМЯ было начато в 70-х годах Воробьевым А. А. и сформировалось сегодня в отдельное направление геофизики с обширным фактическим материалом [15 – 19]. Накопленные данные позволяют утверждать, что завершающая стадия подготовки сильного землетрясения в литосфере оказывает заметное влияние на электромагнитные и другие явления, развивающиеся в верхних геосферных оболочках. Это сопровождается всплесками акустической эмиссии, аномального электромагнитного излучения (ЭМИ), вариаций квазистатического АЭП и

[1]М. В. Ломоносов в трактате «О слоях земных» писал: *«Выключая чудесные и маловероятные предсказания, действие так происходило. Вдруг слышен стал во всем городе треск, как от великого пожара... Воздух шумел беспрестанно и показывал в себе разные пламенные виды и умножал страх некоторым визгом»*, а в «Слове о рождении металлов от трясения Земли», описывая четыре основных типа землетрясений по видам движения земной поверхности, уточнял: *«Между тем предваряют и в то же время бывают подземные стенания, урчания, иногда человеческому крику и оружейному треску подобные звучания. Протекают из недра земли источники и новые воды, рекам подобные; дым, пепел, пламень, совокупно следуя, умножают ужас смертных»* [1].

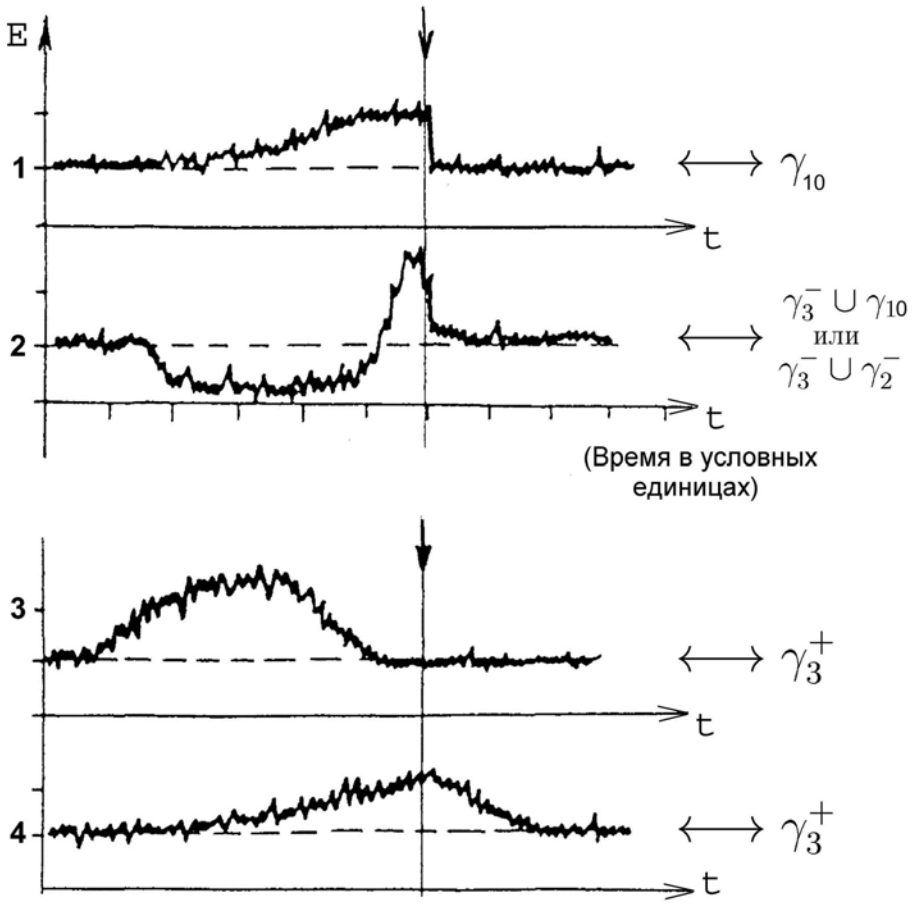


Рис. 1.

теллурических токов. Несмотря на тридцатилетний срок исследований СЭМЯ эти прогностические параметры все еще относят к нетрадиционным, ибо до настоящего времени не существует общепринятого физического объяснения различных типов СЭМЯ.

В [18] выделены две основные гипотезы сейсмоэлектрического эффекта: модель активных поверхностных излучателей и концепция ионосферно-волноводного распространения атмосфериков, тогда как гипотеза о «подземных грозах» отнесена к разряду экзотических. В настоящей работе фактически показано, что гипотеза Воробьева А. А. о «подземных грозах» таковой не является.

Следует подчеркнуть, что регистрируемые типы аномалий ЭМИ и АЭП (далее для краткости будем говорить лишь об АЭП, подразумевая при этом аномалии электромагнитного поля) не укладываются в простую схему, но можно выделить четыре основных вида [18] их проявления во времени (рис. 1):

1. возмущение обладает характерным образом сигнала-предвестника, проходя последовательно стадии роста, квазинасыщения и сброса до невозмущенного уровня в момент землетрясения;

2. возмущение с «фазой замирания» вплоть до изменения АЭП на обратное, которое выходит на фоновый уровень непосредственно перед землетрясением или после резкого всплеска;
3. возмущение колоколообразной формы типа кривой Гаусса со спадом к фоновому значению (иногда возможен «нырок») перед землетрясением;
4. аналогичное возмущение колоколообразной формы без «нырка», но момент начала землетрясения на записи сигнала не идентифицируется.

Развитие подобных возмущений АЭП во времени может предварять начало сильного землетрясения от десятка минут до нескольких часов и даже суток. Другие типы возмущений АЭП при единичных землетрясениях получаются простой суперпозицией этих основных видов. При интенсивной форшоковой или афтершоковой активности виды возмущений могут быть сложнее [15 – 18].

В настоящей работе предложена «самолетная» модель сейсмоэлектрического эффекта на основе магнитогидродинамической аналогии (МАГДА) между полями скорости $\vec{v}$ и завихренности $\vec{\omega}$ несжимаемой идеальной жидкости, обтекающей крыло самолета, и геомагнитным полем $\vec{H}$ с соответствующим ему электрическим током $\vec{j}$. Роль крыла изменяемой геометрии (за счет предкрылков и закрылков) в этой аналогии играет процесс развития магистральной трещины и ее разрушение в результате землетрясения. Гидродинамический аналог сейсмоэлектрического эффекта опирается на теорию крыла самолета, развитую в широко известных трудах аэромехаников советской школы (Чаплыгин-Голубев-Кочин-Седов) [20 – 23] и восходит к идеям Жуковского о присоединенном вихре крыла.

МАГДА следует из простого сравнения кинематических краевых задач:

обтекание крыла самолета:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{v} = 0 \\ \left[\begin{array}{ll} \operatorname{rot}\vec{v} = 0 & \text{вне контура } C \\ \operatorname{rot}\vec{v} = 2\vec{\omega} & \text{внутри контура } C \end{array}\right. \end{cases} \tag{1}$$

$$\{v_n\}\,|_C = 0, \quad r \to \infty: \ \vec{v} \to \vec{v}_0$$

сейсмоэлектрический эффект:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{H} = 0 \\ \left[\begin{array}{ll} \operatorname{rot}\vec{H} = 0 & \text{вне контура } C \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} & \text{внутри контура } C \end{array}\right. \end{cases} \tag{2}$$

$$\left\{\vec{H}\right\}|_C = 0, \quad r \to \infty: \ \vec{H} \to \vec{H}_0$$

где фигурные скобки означают скачок соответствующей величины, индекс n — нормальную компоненту к контуру C профиля крыла самолета или соответствующей ему трещины в «самолетной» модели сейсмоэлектрического эффекта.

Заметим, что этот кинематический вид МАГДА достаточно хорошо известен еще со времен Гельмгольца, который в 1858 г. установил аналогию между вихревыми и

токовыми нитями, а чуть позднее Кирхгоф, Максвелл и Томсон с ее помощью получили и динамическое подобие во взаимодействии между вихревыми и токовыми кольцами [3]. В теории электромагнетизма решение системы (2) обычно заменяется нахождением магнитного поля по заданному распределению тока в соответствии с законом Био-Савара. Именно в такой форме этот вид МАГДА изложен в известном учебнике [24] при решении задачи нахождения поля скоростей, индуцированного заданной системой вихрей. Не останавливаясь подробно на предположениях, принятых в теории крыла самолета [20 – 23], отметим несколько принципиальных моментов.

1. Вне крыла течение имеет потенциальный характер, однако, если крыло заменить присоединенными вихрями Жуковского и непрерывно продолжить течение на всю плоскость, то внутри контура крыла получим вихревое течение.
2. Переход от граничного условия $v_n = 0$ к $\{v_n\} = 0$ и обратно на контуре крыла соответствует выдвижению пред- и закрылков, что сопровождается изменением характера обтекания (в том числе интегральной циркуляции Г вокруг крыла и интенсивности завихренности $\vec{\gamma}$ на его профиле). В сейсмоэлектрическом эффекте этому процессу соответствует явление выталкивания силовых линий магнитного поля $\vec{H}$дифференциальным вращением среды [25] внутри растущей магистральной трещины и образование токовых слоев вдоль ее границ.

   Вся разница в характерных временах: если при изменении характера обтекания крыла перестройка течения происходит в течении секунд, то для сейсмоэлектрического эффекта — часов или даже суток.
3. Для осуществления этого необходимым условием является существенное превышение электропроводности этой среды по сравнению с проводимостью неразрушенной горной породы, в которой и растет магистральная трещина; подобное требование является достаточно правдоподобным и имеет несколько различных обоснований [16, 19].
4. При заданной форме контура С краевая задача (1) относится к стандартному типу, хотя и требует, как правило, численного счета [23]. Однако для сильно деформируемого или неизвестного контура (а в случае магистральной трещины это всегда так) эта задача сводится к сложной проблеме склейки потенциального и вихревого течения на заранее неизвестной границе. Для подобных задач до сих пор нет доказательства существования, единственности и устойчивости возможных решений [26]. Более того, имеются примеры подобных задач (течение над траншеей), для которых при численном счете обнаружено несколько различных решений!
5. Важно подчеркнуть, что уравнения систем (1) и (2) инвариантны относительно преобразований Галилея вида $s' = s - v \cdot t$. Для крыла это позволяет рассматривать не только задачу обтекания крыла, но и его движения относительно неподвижной среды, когда сходящие с крыла вихри остаются на месте своего возникновения. В силу МАГДА для сейсмоэлектрического эффекта это позволяет перейти от пространственной координаты к развертке по времени изменений АЭП, что и фиксируется приборами перед землетрясениями.

Следует заметить, что дополнительные динамические соотношения к системам (1) и (2) должны быть разными. Если для системы (1) — это уравнения движения Эйлера или интеграл Бернулли для определения давления внутри и вне крыла при его замене на присоединенные вихри Жуковского, то для системы (2) — это пока открытый вопрос, как и весь механизм генерации геомагнитного поля [6, 10]. Однако полезно помнить принцип [25]: часто общие результаты, полученные на основе математических аналогий между физическими процессами разной природы имеют большую общность, если они следуют из минимальных ограничений (типа кинематически возможных течений), нежели последовательно выведенные из принятой по гипотетическим соображениям динамической модели.

Задача стационарного обтекания профиля крыла с контуром C (для простоты будем считать C отрезком действительной оси координат xOy: $0 \le x \le b$, $y = 0$) сводится к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши

$$v_y(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^b \frac{\gamma(s)ds}{x-s}, \quad x \in [0, b]. \tag{3}$$

В общем случае, когда $v_y(x) = f(x)$ является некоторой заданной функцией x, уравнение (3) допускает три различных вида решения [27, 28]:
ограниченное на одном $(x = b)$и неограниченное на другом $(x = 0)$конце отрезка $0 \le x \le b$

$$\gamma_1(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{b-x}{x}} \int\limits_0^b \sqrt{\frac{s}{b-s}} \cdot \frac{f(s)}{s-x} ds, \tag{4}$$

неограниченное на обоих концах отрезка

$$\gamma_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x(b-x)}} \left[\frac{2}{\pi} \int\limits_0^b \frac{f(s)\sqrt{s(b-s)}}{s-x} ds + const \right] \tag{5}$$

и ограниченное на обоих концах отрезка

$$\gamma_3(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{x(b-x)} \int\limits_0^b \frac{f(s)ds}{\sqrt{s(b-s)}(s-x)} \quad \text{при} \quad \int\limits_0^b \frac{f(s)ds}{\sqrt{s(b-s)}} = 0 \tag{6}$$

Сингулярные интегралы для $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$ и $\gamma_3(x)$ понимаются в смысле главного значения, для их вычисления удобно сделать замену: $s = \frac{b}{2}(1+\cos\theta)$, $x = \frac{b}{2}(1+\cos\mu)$, где $\theta, \mu \in [0, \pi]$. Если теперь f(x) задать в виде разложения по $\cos n\theta$ или полиномам Чебышева, то все вычисления сводятся к комбинации известных интегралов вида [21]

$$J_n = \int\limits_0^\pi \frac{\cos n\theta d\theta}{\cos\theta - \cos\mu} = \pi \cdot \frac{\sin n\mu}{\sin\mu}.$$

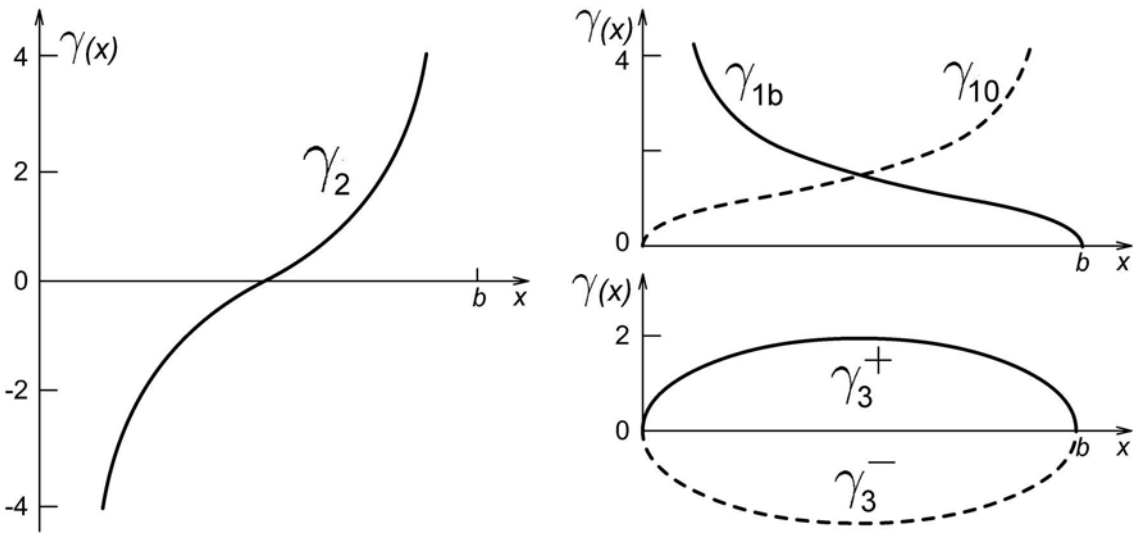


Рис. 2.

В частности, в простейшем случае при $f(x) = 1$ (что можно сделать соответствующим выбором безразмерных переменных) выражения для интенсивности завихренности $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ можно получить в простом явном виде:

$$\gamma_{1b}(x) = 2\sqrt{\frac{b-x}{x}}, \quad \gamma_{10}(x) = 2\sqrt{\frac{x}{b-x}}, \quad \gamma_2(x) = \frac{2(2x-b)}{\sqrt{x(b-x)}}, \tag{7}$$

где γ_{1b} ограничено при $x \to b$, γ_{10} ограничено при $x \to 0$ и удовлетворяют условию Чаплыгина-Жуковского на этих концах отрезка, тогда как γ_2 этому условию не удовлетворяет. Зависимость $f(x) = \pm\,(1 - 2x/b)$ позволяет получить

$$\begin{aligned} \gamma_3^-(x) &= -4\sqrt{\frac{x}{b}\left(1-\frac{x}{b}\right)} \quad \text{при} \quad f(x) = 1 - 2\frac{x}{b} \\ \gamma_3^+(x) &= 4\sqrt{\frac{x}{b}\left(1-\frac{x}{b}\right)} \quad \text{при} \quad f(x) = 2\frac{x}{b} - 1 \end{aligned} \tag{8}$$

Графики $\gamma_{1b}(x)$, $\gamma_{10}(x)$, $\gamma_2(x)$, $\gamma_3^-(x)$ и $\gamma_3^+(x)$ приведены на рис. 2. Если теперь у графиков $\gamma_{1b}(x)$, $\gamma_{10}(x)$ и $\gamma_2(x)$ мысленно «обрезать хвосты», уходящие в бесконечность при $x \to 0$ и $x \to b$ как некоторую идеализацию, то сравнительный анализ форм сигналов-предвестников АЭП (рис. 1) показывает явное сходство с суперпозицией графиков $\gamma(x)$, задаваемых формулами (7) – (8) (рис. 2), что и должно следовать из установленной МАГДА и отмеченной выше галилеевой инвариантности систем (1) и (2).

Так, возмущение АЭП типа 1 с последовательными стадиями роста, квазинасыщения и до момента сброса описывается линейной суперпозицией нескольких графиков вида $\gamma_{10}(x)$, с возможным изменением угла наклона в моменты роста магистральной

трещины (для крыла самолета это соответствует выдвижению пред- и закрылков, при этом нестационарными процессами перестройки течения и переходе от граничного условия непротекания на контуре крыла к $\{v_n\} = 0$ и обратно пренебрегаем, считая, что все происходит мгновенно). Заметим, что впервые «самолетная» модель сейсмоэлектрического эффекта была предложена для объяснения именно этой формы сигнала-предвестника на основе решения $\gamma_1(x)$ с условием Чаплыгина-Жуковского на одном из концов отрезка. Однако в [29] и пленарных докладах «Ломоносов и загадки атмосферного электричества» на IX конференции «Математика. Компьютер. Образование» и V Международном конгрессе по математическому моделированию [30] (Дубна, 2002 г.) были использованы уже все возможные типы решений $\gamma_1(x)$ – $\gamma_3(x)$ уравнения (3) для единообразного объяснения и остальных видов проявления сейсмоэлектрического эффекта. Аналогичным образом возмущение АЭП типа 2 с «фазой замирания» описывается суперпозицией графиков вида $\gamma_3^-(x)$, тогда наличие возможного резкого всплеска перед самым началом землетрясения может быть объяснено перестройкой «обтекания» трещины магнитным полем в соответствии с графиками типа γ_2 или γ_{10}. Возмущения колоколообразной формы типа 3 и 4 объясняются суперпозицией графиков γ_3^+.

Таким образом установлен единый математический механизм различных видов проявления сейсмоэлектрического эффекта, что ранее в других источниках ставилось под сомнение. Например, в [18] утверждается: «Если к перечисленным типам возмущений и модельным подходам прибавить то, что АЭМИ (аномальные электромагнитные излучения) регистрируются не только на поверхности Земли, но и в шахтах на километровой глубине и на спутниках, то станет очевидным, что поиск единого механизма, объясняющего все многообразие наблюдаемых эффектов, обречен на неудачу».

Следует подчеркнуть, что приведенный анализ претендует лишь на качественное объяснение, а уравнение (3) в нестационарном случае обтекания разрезного крыла дает лишь нулевое приближение и для более точных оценок необходимо использовать некоторое обобщение уравнения типа Бирнбаума [21], что можно сделать лишь численно и при известном законе изменения контура C крыла [23]. Так как закон изменения формы соответствующей магистральной трещины в литосфере принципиально неизвестен, то подобные математические изыскания ничего существенно но-

вого для понимания природы сейсмоэлектрического эффекта скорее всего не дадут[2]. А вот энергетический и термодинамический [19] анализ процессов, происходящих в магистральной трещине, особенно с учетом фазовых переходов при разрушении горных пород [32] и цепных химических реакций типа детонации [33], представляется перспективным.

Предложенная выше «самолетная» модель кинематического типа, которая фактически подтверждает известную гипотезу Воробьева о «подземных грозах», позволяет надеяться, что существует и единый динамический механизм. Естественно, его подробная «расшифровка» связана с использованием полной системы уравнений Максвелла и построением моделей механики сплошной среды о поведении горных пород в сильных электрических полях, вызывающих токи пробоя и различные физико-химические превращения. Но это — задача для будущих исследований.

Однако первым шагом к такой «расшифровке» является поиск адекватного физического механизма разделения электрических зарядов в горных породах на большие (до 10^2 – 10^3 м) расстояния. Ибо почти все предлагаемые в литературе [15 – 19] механизмы разделения зарядов, основанные на различных видах механо-электрических преобразователей, имеют локальный характер (а электрокинетический механизм требует нереальных скоростей прокачки воды по микротрещинам горных пород) и не могут объяснить создание высоких электрических напряжений, достаточных для протяженного электрического пробоя горных пород. Последние, в свою очередь, могут быть не только следствием, но и в ряде случаев служить спусковым механизмом для разрядки больших механических напряжений в горных породах, т.е. причиной землетрясений.

В заключение автор выражает глубокую признательность академику Шемякину Е. И. и Дубровскому В. А. за постановку проблемы интерпретации сейсмоэлектрического эффекта, полезное обсуждение и внимание к данной работе.

Работа выполнена по гранту поддержки ведущих научных школ России (НШ – 19.2003.1.).

[2]Последняя фраза требует пояснения. На самом деле даже изменение для системы (2) последнего условия на более точное

$$r \to \infty : \quad \vec{H} \to \vec{H}_0 + \vec{H}_1 \cdot e^{i\nu t}, \text{ где } |\vec{H}_1| \ll |\vec{H}_0|,$$

приводит к нарушению МАГДА из-за необходимости использования для поправки $\vec{H}_1$ полной системы уравнений Максвелла. Что позволяет дать достаточно прозрачное качественное объяснение таких фактов, как «дребезг» в регистрируемых сигналах АЭП и АЭМИ (рис. 1), ухудшение или полное исчезновение радио- и телефонно-телеграфной связи в эпицентральных районах перед землетрясениями, пробои в подземных кабелях, самопроизвольное свечение люминесцентных ламп [16, 18], а так же ложные «сигналы» за счет влияния электрокапиллярных явлений на аномалии геомагнитного поля при закачке водо- или газохранилищ, что впервые было объяснено в работе Рахматулина Х. А. [31].

Литература

[1] *Ломоносов М. В.* Избранные произведения, Т.1, Естественные науки и философия. — М.: Наука, 1986.

[2] *Френкель Я. И.* Теория явлений атмосферного электричества. — Л.-М.: ГИТТЛ, 1949.

[3] *Уиттекер Э.* История теории эфира и электричества. — М.-Ижевск: РХД, 2001.

[4] *Чалмерс Д.* Атмосферное электричество. — Л.: Гидрометеоиздат, 1974.

[5] *Базелян Э. М., Райзер Ю. П.* Физика молнии и молниезащиты. — М.: Физматлит, 2001.

[6] *Яновский Б. М.* Земной магнетизм, Т.1. — Л.: Из-во ЛГУ, 1964.

[7] Электровихревые течения. Под ред. Щербинина Э. В. — Рига: Зинатне, 1985.

[8] Космическое землеведение: диалог природы и общества. Устойчивое развитие. Под ред. Садовничего В. А. — М.: Из-во МГУ, 2000.

[9] *Мясников В. П., Фадеев В. Е.* Модели эволюции Земли и планет земной группы. (Итоги науки и техники. Сер. Физика Земли). — М.: ВИНИТИ, 1980.

[10] *Шемякин Е. И.* О деформации вращающихся планет. — Вест. Моск. ун-та, Сер. 1, 1993, №3.

[11] *Ревуженко А. Ф.* Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ. — Новосибирск: Из-во НГУ, 2000.

[12] *Лобковский Л. И.* Геодинамика зон спрединга, субдукции и двухъярусная тектоника плит. — М.: Наука, 1988.

[13] *Рикитаке Т.* Предсказание землетрясений. — М.: Мир, 1979.

[14] *Френкель Я. И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве. — Изв. АН СССР, География и геофизика, 1944, т. 8, № 4.

[15] Электромагнитные предвестники землетрясений. Под ред. Садовского М. А. — М.: Наука, 1982.

[16] Электрические и магнитные предвестники землетрясений. Под ред. Головкова В. П. — Ташкент: ФАН, 1983.

[17] *Гохберг М. Б., Моргунов В. А., Похотелов О. А.* Сеймоэлектромагнитные явления. — М.: Наука, 1988.

[18] Методы анализа сейсмоэлектромагнитных процессов. Под ред. Барсукова О.М. — М.: Из-во ИФЗ, 1991.

[19] *Воробьев А. А.* Равновесие и преобразование видов энергии в недрах. — Томск: Из-во ТГУ, 1980.

[20] *Голубев В. В.* Лекции по теории крыла. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.

[21] *Некрасов А. И.* Теория крыла в нестационарном потоке. — М.-Л.: Из-во АН СССР, 1947.

[22] *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.

[23] *Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г.* Крыло в нестационарном потоке газа. — М.: Наука, 1971.

[24] *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, Т.2. — М.: Наука, 1973.

[25] *Moffatt H. K.* Magnetic field generation in electrically conducting fluids. — London – New York – Melbourne: Cambridge U. P., 1978.

[26] *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М.: Наука, 1973.

[27] *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.-Л.: Гостехиздат, 1946.

[28] *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.

[29] *Natyaganov V.L., Chaika A.A.* «Airplane» Model of Seismoelectrical Effect. — III Inter. Workshop on Magnetic Electric and Electromagnetic Methods in Seismology and Volcanology. Moscow, 2002.

[30] *Natyaganov V.L.* Lomonosov and the Mystery of an Electricity. — V Inter. Congress on Mathematical Modelling. Dubna, 2002.

[31] *Рахматулин Х. А., Султанбеков Р. И.* О роли электрокинетических явлений в возникновении магнитной аномалии над Полторацким газохранилищем. — Узб. геолог. журнал, 1976, №4.

[32] *Соболев Г.А.* Основы прогноза землетрясений. — М.: Наука, 1993.

[33] *Шаров В.И.* Тектоническое землетрясение как неравновесный термодинамический процесс разрушения горных пород (к проблеме смены парадигмы сейсмологии). — Физика Земли, 1992, № 5.

Ломоносов и парадоксальный феномен атмосферного электричества — шаровая молния

Натяганов В. Л.

250-летию «Слова о явлениях воздушных,
от электрической силы происходящих»
М. В. Ломоносова посвящается

Первая попытка создания научной теории атмосферного электричества, причем во всем многообразии его проявлений, принадлежит великому русскому ученому-энциклопедисту Михаилу Васильевичу Ломоносову.

В своем знаменитом «Слове. . . » [1] М. В. Ломоносов 250 лет назад высказал гипотезу об электрической природе шаровой молнии (ШМ), тифона или атмосферного вихря (смерча или торнадо) и северного сияния, причислив их к особым и наиболее загадочным явлениям атмосферного электричества.

О ШМ (без упоминания ее современного названия) в «Слове. . . » есть всего несколько строк, которые начинаются со слов: «*Древних историй сказания и недавних очевидных свидетелей известия в том уверяют, что из громовых туч огонь на землю падает. Сей огонь по не весьма стремительному движению за особливый и от молний разный почитать должно. . .* »

Доказательством того, что здесь речь идет именно о ШМ, являются дополнительные сведения о гибели Г.-В.Рихмана, приведенные в [2] и в «Изъяснениях к «Слову. . . » [1], а также известная гравюра (рис. 1 в [3]) И. Соловьева — непосредственного очевидца этой трагедии. Гибель Рихмана от удара ШМ надолго задержала дальнейшие исследования атмосферного электричества не только в России. Знаменитый Л. Эйлер писал из Берлина: «*Этот случай отнял мужество у местных естествоиспытателей, занимавшихся исследованием грозовых явлений, и они прервали свои занятия.*» И лишь Ф. Араго спустя почти сто лет (в 1838 г.) вновь поднял вопрос о природе ШМ.

И сегодня, несмотря на тысячи описаний очевидцев ШМ, собранных в известных обзорах и монографиях от Араго до Стаханова, более двух десятков только различных типов моделей, основанных на сотне различных гипотез [2 – 8], неоднократные попытки получить ШМ в лабораторных условиях, этот парадоксальный феномен природы все еще остается загадкой. Основной причиной этого является то обстоятельство, что проблема ШМ относится к так называемым обратным задачам математической физики, когда по разрозненным и часто противоречивым косвенным признакам нужно фактически угадать истинную природу сложного явления, создать на этой основе физико-математическую модель и проверить ее справедливость экспериментальным путем. В [5] приведены систематизация данных по наблюдениям ШМ, их статистический анализ и критический обзор различных моделей, дополняющий [2 – 8].

Если очень кратко, то ШМ — автономное физическое тело газообразной природы приблизительно сферической формы с наиболее вероятным диаметром $2R = 10$ – 15 см (среднее значение $2R = 28 \pm 4$ см), которое излучает видимый свет и может сложным образом двигаться в окружающем воздушном пространстве. В зрелой стадии ШМ обладает следующими основными характерными признаками и противоречивыми свойствами:

1) обычно ШМ «светит, но не греет», т.е. имеет практически комнатную температуру (1-й парадокс по Стаханову);

2) вещество ШМ, скорее всего, имеет почти плотность воздуха, но обладает поверхностным натяжением, характерным для жидкостей (2-й парадокс по Стаханову);

3) непредсказуемость характера движения ШМ (вниз и вверх, по и против ветра, плавно или скачкообразно) можно назвать третьим парадоксом;

4) ШМ имеет электрический заряд, но какова его величина и структура (т.е. является ли он объемным или поверхностным типа простого или двойного слоя) до сих пор не ясно; при контакте ШМ с другими предметами часто наблюдаются сильные импульсы тока, приводящие к «гибели» ШМ в результате «взрыва»;

5) ШМ обладает запасом собственной энергии, однако ее величина и природа (химическая, тепловая, электромагнитная. . .); механизмы запаса, хранения и преобразования в другие формы; наличие возможных каналов связи с окружающей средой до сих пор остаются загадкой.

Большинство предыдущих моделей, проанализированных в [2 – 8], были построены на абсолютизации отдельных свойств ШМ из перечисленных выше пунктов или более широкого их списка и часто противоречили остальным. Любая модель ШМ, претендующая на адекватное описание этого загадочного феномена природы, должна объяснять большинство из перечисленных выше свойств, не противоречить оставшимся и не переходить при этом «грань законов науки и природы».

Предложенная в [9 – 12] электрокапиллярновихревая (ЭКВ) модель ШМ удовлетворяет этим критериям, аккумулирует в себе отдельные характерные черты более ранних типов моделей (газоразрядной, конденсаторной, пузырьковой и вихревой) и позволяет с единых позиций на основе только одной гипотезы объяснить все перечисленные выше характерные признаки и мнимые парадоксы ШМ. Это единственное предположение заключается в том, что электрическая структура ШМ аналогична структуре хорошо проводящей капли с тонким двойным электрическим слоем на границе раздела фаз. Тогда во многих случаях движение ШМ является аналогом электрокапиллярного движения или дрейфа (ЭКД) подобной капли в растворе электролита при наличии внешнего электрического поля [9 – 13].

1. Электромагнитное обобщение задачи электрокапиллярного дрейфа проводящей капли

В классической постановке Левича задача об ЭКД сферической капли [13] с поверхностным зарядом двойного электрического слоя (ДЭС) в безразмерных переменных

описывается системой [14]

$$
\begin{aligned}
r>1: &\quad \nabla\varphi=0, \triangle\vec{u}=\nabla p,\ \operatorname{div}\vec{u}=0;\\
r<1: &\quad \nabla\varphi'=0, \triangle\vec{u}'=\nabla p',\ \operatorname{div}\vec{u}'=0;\\
r\to 0: &\quad |\nabla\varphi'|, |\nabla p'|, |\vec{u}'|<\infty;\\
r\to\infty: &\quad \vec{u}\to u_e\vec{k}, \nabla\varphi\to-\vec{k};\\
r=1: &\quad u_n=u_n'=0, u_\theta=u_\theta'=-v_0\sin\theta,\\
&\quad -\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\operatorname{div}_\Sigma\vec{j}_\Sigma=0, \sigma_*\frac{\partial\varphi'}{\partial r}+\operatorname{div}_\Sigma\vec{j}_\Sigma'=0,\\
&\quad \eta_* p_{r\theta}'=p_{r\theta}-q\nabla_\Sigma(\varphi-\varphi')
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\sigma_*=\sigma'/\sigma$, $\eta_*=\eta'/\eta$ — отношения коэффициентов электропроводности и динамической вязкости, q — безразмерная плотность заряда ДЭС, $\vec{j}_\Sigma=\pm q\vec{u}_\theta$ — конвективный поверхностный ток внешней и внутренней обкладок тонкого ($d/a\ll 1$, d — толщина ДЭС, a — радиус капли) ДЭС, u_e — неизвестная величина скорости ЭКД капли, отнесенная к $E_0 a\sqrt{\sigma/\eta}$, E_0 — напряженность внешнего электрического поля. Выбор других характерных величин соответствует принятым в [14].

Следует подчеркнуть, что решение этой задачи дает потенциальный поток вне капли, внутри — сферический вихрь Хилла [13, 14], которые можно записать через функцию тока Стокса [15 – 18], однородное электрическое поле внутри и дипольное возмущение электрического потенциала снаружи:

$$
\begin{gathered}
\psi=\frac{1}{2}u_e(r^2-\frac{1}{r})\sin^2\theta, \psi'=\frac{3}{4}u_e r^2(r^2-1)\sin^2\theta,\\
\varphi=\left(-r+\frac{\beta}{r^2}\right)\cos\theta+c, \varphi'=-\frac{2qv_0}{\sigma_*}r\cos\theta+c',\\
u_e=\frac{2}{3}v_0=\frac{q}{2+3\eta_*+q^2\left(1+\dfrac{2}{\sigma_*}\right)}\Leftrightarrow U_e=\frac{aqE_0}{2\eta+3\eta'+\dfrac{q^2}{\sigma}\left(1+\dfrac{2}{\sigma_*}\right)}
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где c и c' — произвольные константы, $\beta=qv_0-1/2$, а последняя формула дает скорость ЭКД в безразмерных и размерных величинах соответственно [13, 14]. Однако, если по найденному электрическому потенциалу найти плотность электрического тока вне и внутри капли, а затем по этим токам определить индуцированное ими собственное магнитное поле [9, 10]

$$
\left\{\begin{array}{l}\operatorname{rot}\vec{B}=\vec{j}\\ \operatorname{div}\vec{B}=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} r>1: & \vec{B}=\dfrac{1}{2}r\left(1+\dfrac{2\beta}{r^3}\right)\sin\theta\vec{e}_\varphi\\ r<1: & \vec{B}'=qv_0 r\sin\theta\vec{e}_\varphi\end{array}\right.
\tag{3}
$$

и учесть в уравнениях движения магнитную часть силы Лоренца на основе теории электровихревых течений [19], то можно обнаружить несколько новых интересных эффектов.

1). Заметим, что при отсутствии ЭКД или другого движения, капля с неподвижным ДЭС на ее поверхности является аналогом электростатического сферического

конденсатора с достаточно сильным внутренним электрическим полем между обкладками ДЭС. Однако при наличии относительного движения фаз под действием любой причины этот электростатический конденсатор превращается в электрогидродинамический (ЭГД) с нарушением сферической симметрии внутри него и появлением скачка $\{\varphi\} \neq const$ при $r = 1$, что следует из формул (2) и эквивалентно скачку тангенциальной составляющей электрического поля на границе раздела фаз вне ДЭС, который и обеспечивает проявление электрокапиллярного эффекта [13, 14, 20]. Кроме того из формул (3) при $r = 1$ следует, что скачок $\{\vec{B}\} = 0$ при переходе через токовые слои подвижного ДЭС. Однако из курсов электродинамики [20 – 22] и магнитной гидродинамики [22 – 24] известно, что при переходе через токовый слой касательная составляющая магнитного поля терпит разрыв. Выход из этого кажущегося противоречия заключается в том, что при движении ДЭС превращается в тройной электромагнитный слой (ТЭМС) [9 – 11] с меридиональным и антипараллельным растеканием поверхностного тока в двойном токовом слое (ДТС) и зажатым внутри него ортогональным простым магнитным слоем (ПМС). Кроме упомянутых выше возможна прямая проверка и других свойств ТЭМС как обобщающего объединения классических понятий потенциалов двойного и простого слоя [21, 25]:

$$\text{ТЭМС} = \text{ДТС} \cup \text{ПМС}$$

Следует подчеркнуть, что особые свойства ТЭМС позволяют рассматривать границу раздела фаз как обособленную поверхностную или Σ-фазу [26], учет специфических свойств которой может быть полезен для теоретического объяснения ряда экспериментально обнаруженных явлений типа эффекта гигантской диэлектрической проницаемости суспензий [9, 27] или разнообразных проявлений электровязкостного эффекта.

2). Электровихревое течение (ЭВТ), вызываемое магнитной силой Лоренца за счет взаимодействия электрических токов с собственным магнитным полем [19], получено в [10, 11] как поправка к ЭКД из уравнения

$$\triangle \vec{u}_1 + M[\vec{j} \times \vec{B}] = \nabla p_1, \tag{4}$$

где $\vec{B}$ определяется формулами (3), электрический ток $\vec{j}$ определяется из закона Ома через градиент потенциала из формул (2), а число Гартмана M, рассчитанное по индукции $B_0 = \mu\sigma a E_0$ собственного магнитного поля электрического тока $\vec{j}$ связано с числами Al (Альфвена), Re (Рейнольдса), Re_m (магнитного Рейнольдса) и S (параметром ЭВТ) следующими соотношениями

$$B_0 a\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} = M = Re_m = Al \cdot Re = \frac{S}{Re} = \mu\sigma E_0 a^2\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}.$$

Электрический потенциал и поле скоростей ЭВТ, определяемые уравнением (4),

получены в [10] через функцию тока Стокса и с точностью до констант имеют вид

$$\begin{aligned}
&\psi = M\frac{\beta}{8}\left(r^2 - \frac{2\beta}{r} + A_0 + \frac{C_2}{r^2}\right)\sin^2\theta\cos\theta,\\
&\psi' = M\beta A_3(r^5 - r^3)\sin^2\theta\cos\theta,\\
&\varphi_1 = \frac{\beta_2}{r^3}P_2(\cos\theta), \varphi_1' = \alpha_2 r^2 P_2(\cos\theta).
\end{aligned} \tag{5}$$

Поле скоростей ЭВТ, соответствующее функциям тока (5), дает вне капли аналог осесимметричного деформационного течения, а внутри — систему тороидальных вихрей Тейлора. Итоговое электрокапиллярновихревое движение внутри капли имеет вид сферического вихря Хилла-Тейлора. Заметим, что при $Re \ll 1$ полученное ЭВТ является поправкой к ЭКД по малому параметру M. Однако возможны и другие поправки к ЭКД, основанные на учете:

- зависимости плотности заряда ДЭС q от угла θ или наличия на границе раздела фаз кроме ДЭС еще и простого слоя зарядов, что приводит к течениям деформационного типа, аналогичных ЭВТ [28, 29];
- отклонения от электронейтральности в объеме и влияния электрической части силы Лоренца на ЭГД-движение или зависимости электропроводности и вязкости от температуры в результате джоулева нагрева, что в обоих случаях приводит к сложным нелинейным уравнениям [30] для этих поправок чисто электрической природы.

Тогда как выбор ЭВТ в качестве поправки к ЭКД учитывает основной (при отсутствии сильных внешних магнитных полей) вклад от магнитной части силы Лоренца, а само ЭКД в принятой модели является главным эффектом электрического характера. Кроме учета основных эффектов со стороны как электрического, так и магнитного полей подобный выбор позволил найти теоретическое объяснение парадоксального эффекта гигантской диэлектрической проницаемости суспензий [9] без сложных модельных представлений о внутренней структуре ДЭС [27].

3). В заключении этого раздела кратко перечислим несколько принципиальных и, на первый взгляд, парадоксальных моментов. Во-первых, из полученного решения (2) можно легко показать, что при стационарном ЭКД сферической капли гидродинамическая сила сопротивления отсутствует [13, 14], т.е. справедлив парадокс Даламбера, имеющий обычно место в идеальной [16, 31], но не вязкой жидкости [15 – 18]. Во-вторых, этот неожиданный результат становится очевидным, если увидеть, что хотя ЭКД капли было получено из уравнений (1) в приближении Стокса ($Re \to 0$) для вязких жидкостей, но решения (2) (потенциальный поток вне и сферический вихрь Хилла внутри капли) удовлетворяют и уравнениям Эйлера для идеальной жидкости ($Re \to \infty$) [15, 32]. В-третьих, справедливость полученных решений (2) в предельных случаях $Re \to 0$ и $Re \to \infty$ позволяет предположить, что это выполняется и для любых значений Re. Прямая проверка этого предположения показывает, что решение (2) на самом деле является точным решением краевой задачи (1) при замене

уравнений Стокса на полные уравнения Навье-Стокса

$$\triangle\vec{u} = \nabla p + Re(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} \tag{6}$$

при любых значениях чисел Рейнольдса Re, когда сохраняется ламинарный режим обтекания. На этот малоизвестный факт крайне редко обращают внимание даже в специальной литературе по вихревым течениям, причем в [32] это сделано очень кратко и в двусмысленной форме. В нашем случае этот нетривиальный факт обусловлен спецификой граничных условий с учетом электрокапиллярного эффекта, который через граничные условия при $r = 1$ обеспечивает самосогласованность гидро- и электродинамических полей, и тем обстоятельством, что потенциальный поток вне и сферический вихрь Хилла внутри капли относятся к важному классу динамически обратимых течений [33]. Ранее об этом свойстве ЭКД уже упоминалось в [11, 14], правда, без точного определения этого понятия и глубоких следствий из этого факта. Заметим, что парадокс обратимости в идеальной жидкости подробно проанализирован в [31], где подчеркнуто, что различные пути разрешения этого парадокса в трех случаях (дозвукового, околозвукового и сверхзвукового течения, описываемых на основе уравнений Эйлера) находятся в соответствии с общей математической теорией краевых задач эллиптического, смешанного и гиперболического типов [25].

Начатое в [31] применение современных методов «чистой» математики для объяснения некоторых парадоксов и обоснования области применимости известных точных решений задач гидродинамики идеальной жидкости недавно было продолжено в [34] на языке общего дифференциально-геометрического формализма «гамильтоновой» гидродинамики с указанием многочисленных аналогий в других разделах математической физики.

Для течений вязкой жидкости по аналогии с обратимыми термодинамическими процессами в [33] было введено важное понятие ДОТ (динамически обратимых течений).

Определение. ДОТ вязкой жидкости называется такое течение, для которого возможно обратное течение (под действием соответствующего давления), получаемое изменением скорости всюду на противоположное.

Подчеркнем, что в отличии от обращения течения в идеальной жидкости [31], здесь речь о сохранении исходного давления уже не идет.

2. Электрокапиллярновихревая модель и мнимые парадоксы шаровой молнии

Основное преимущество ДОТ заключается в том, что для вязких жидкостей конвективные члены типа $(\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u}$ часто имеют градиентную природу, поэтому могут быть интерпретированы как появление добавочного давления, что позволяет избавиться от нелинейности в уравнениях Навье-Стокса. При ЭКД капли для потенциального потока вне это добавочное давление определяется интегралом Бернулли, а для

сферического вихря Хилла внутри можно доказать соотношение

$$(\vec{u}' \cdot \nabla)\, \vec{u}' = \frac{9}{16} u_e^2 \nabla \left[r^2 + \left(3r^2 - 2r^4\right) \cos 2\theta \right]. \tag{7}$$

Более того, если в задаче (1) для капли молчаливо предполагалось, что ее сферическая форма обеспечивалась большим поверхностным натяжением и поэтому баланс нормальных составляющих p_{rr} тензора вязких напряжений при $r = 1$ необходим лишь для определения давления, то теперь с учетом (7) можно доказать, что при замене уравнений Стокса в системе (1) на уравнения Навье-Стокса решения (2) остаются справедливыми при равенстве плотностей $\rho = \rho'$ вне и внутри даже с учетом баланса p_{rr}!

Условимся далее структуру, подобную капле Левича с тонким ДЭС на границе раздела фаз, называть электрокапиллярновихревой (ЭКВ). Тогда в результате вышеизложенного имеем принципиально важное утверждение, которое можно сформулировать как **теорему** [11, 12]:

Если ШМ имеет ЭКВ структуру, то при равенстве плотностей вещества вне и внутри ШМ решение (2) является точным решением видоизмененной системы (1) при замене линейных уравнений Стокса на нелинейные уравнения Навье-Стокса (6) и учете равенства скачка нормальных напряжений избыточному давлению.

Следствие: *при подобной замене учет конвективного члена в уравнениях движения, не нарушая кинематики течения и сферической формы, приводит лишь к перераспределению давления вне и внутри ШМ.*

На основе этого утверждения можно объяснить большинство характерных признаков и мнимых парадоксов ШМ из вышеперечисленных пунктов.

1). Излучение видимого света является одним из наиболее известных свойств ШМ, которое обычно и позволяет ее обнаружить. Из решения (2) следует, что внутри ШМ при ее ЭКД существует постоянный электрический ток $\vec{j}' = -\sigma_* \nabla \varphi' = 2qv_0\vec{k}$, который и обеспечивает электролюминесценцию вещества ШМ типа тлеющего или тихого разряда [35]. Еще де Тесса (1859 г.) и потом Планте (конец XIX в.) [3] пытались построить газоразрядную модель ШМ, используя это явление вынужденного свечения газов под действием сильного постоянного электрического поля. Однако в экспериментальных исследованиях Планте, Гезехусу, Теплеру, а потом и многим другим не удалось получить устойчивых светящихся образований после отключения внешнего источника.

Наблюдаемое в ряде случаев изменение цвета ШМ может быть объяснено изменением силы тока (за счет изменения заряда ДЭС и скорости ЭКД ШМ) как в экспериментах Теплера, когда слабый ток давал голубоватое свечение, переходившее затем по мере его усиления до $10A$ в темно-красное, оранжевое и, наконец, в белое [3]. Хотя возможны и другие объяснения, в том числе на основе метастабильной электролюминесценции [5].

2). Наличие поверхностного натяжения и ДЭС на границе ШМ фактически входит как необходимое условие теоремы. Кроме слов М. В. Ломоносова, что «природа

любит повторы», в качестве косвенного подтверждения этой возможности служат исследования Ленгмюра (1929 г.) по общим условиям образования ДЭС и Сигова Ю. С. [36], который в начале 80-х годов при компьютерном моделировании процессов в плазме на основе уравнений Власова обнаружил сильные ДЭС, что потом было экспериментально подтверждено в Японии. Тот факт, что вещество ШМ может быть специальной фазой атмосферного воздуха, подвергшегося воздействию мощных электрических токов или полей, особых возражений вызывать не должно. Особенно если учесть опыты Планте, Гезехуса [3] и кластерную гипотезу Стаханова [5], а также недавние открытия фуллеренов, сложных гидротированных ионов [5, 37, 38], особых квазикристаллических свойств воды и так называемой пылевой плазмы или «плазменных кристаллов», экспериментальные исследования которых были начаты в условиях невесомости еще на станции «Мир», а сейчас в содружестве с Институтом внеземной физики М. Планка продолжаются на борту МКС и во многих лабораториях мира.

Равенство плотностей вещества ШМ и окружающего воздуха при наличии переменного поверхностного натяжения обеспечивает сохранение сферической формы даже при больших скоростях ЭКД ШМ и $Re \gg 1$. При $\rho' \neq \rho$ результаты, следующие из теоремы, можно считать первым приближением к решению задачи в общем случае, если характеризующее деформацию границы раздела число Вебера $We = \frac{u_e^2 a}{\gamma}|\rho - \rho'| < 2$ [39]. Подчеркнем, что ТЭМС, возникающий на границе раздела фаз при любом движении ШМ, лишь способствует сохранению сферической формы. Парадоксальной способности проникания ШМ сквозь малые отверстия и узкие щели здесь касаться не будем, ибо это — существенно нестационарный процесс, требующий отдельного анализа.

3). Удивляющая многих очевидцев непредсказуемость движения ШМ объясняется достаточно просто. Причиной ЭКД ШМ в большинстве случаев является естественное электрическое поле Земли, открытое еще Ломоносовым [1]. В ясную погоду это поле составляет 120 – 140 в/м, а под грозовыми облаками оно может не только возрасти на порядки [5], но при этом даже изменить направление на противоположное [7] (рис. 1). Попадая в подобное поле достаточно сложного строения, ШМ и двигаться будет сложным образом. Естественно, для описания подобного движения необходимо решать нестационарную задачу, однако (учитывая ограниченное время «жизни» ШМ) в квазистационарном случае ЭКД будет проходить вдоль местного направления АЭП (атмосферного электрического поля) в соответствии с последней формулой решения (2) и почти независимо от направления ветра в зонах с повышенной напряженностью АЭП.[1]

В окрестности условных разделительных линий А-А и В-В, где напряженность АЭП $\vec{E}_0 \to 0$ и скорость ЭКД ШМ $\vec{u}_e \to 0$, ветер будет играть существенную роль. В случае $\rho \neq \rho'$ наряду с ЭКД и ветром необходимо учитывать баланс сил тяже-

[1]Понятие повышенной напряженности АЭП нуждается в уточнении. Например, капля ртути, оседающая в электролите под действием силы тяжести легко «отражается» (т.е. может зависать в состоянии «квазиневесомости» или даже всплывать) в электрическом поле с дополнительной напряженностью всего 100 в/м, а ведь $\rho' \approx 13\rho$!

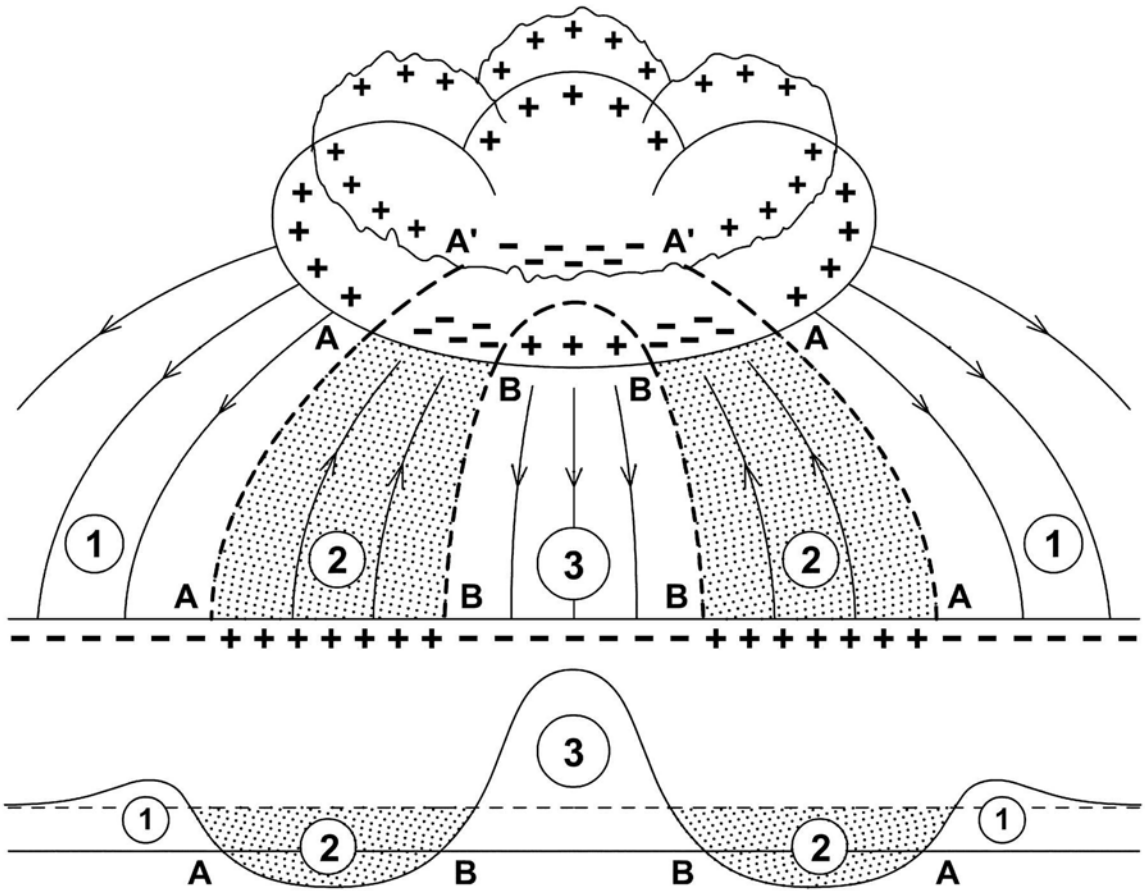


Рис. 1: Схематичное строение (по Симпсону) АЭП под грозовым облаком (вверху) и распределение АЭП на поверхности Земли (внизу): (1) — зона обычного направления (фона) АЭП, (2) — зона реверса направления АЭП, (3) — внутренняя зона возможного повторного реверса

сти, Архимеда и вязкого сопротивления, что последовательно можно учесть лишь в линейной постановке типа краевой задачи (1) при $Re \ll 1$ и соответствующем изменении граничных условий. Например, при $E_0 = 0$ и в отсутствии ветра ШМ будет оседать при $\rho' > \rho$ (или всплывать при $\rho' < \rho$) в окружающем воздухе со скоростью

$$U_0 = \frac{2}{3}\frac{\rho a^2}{\eta}\frac{\eta + \eta' + \frac{q^2}{3\sigma}}{2\eta + 3\eta' + \frac{q^2}{\sigma}}(\rho' - \rho) \tag{8}$$

что следует из обобщения классической задачи Адамара-Рыбчинского для сферической капли с поверхностным зарядом ДЭС [13, 14]. А если учесть наличие внешнего геомагнитного поля с индукцией $\vec{B}_*$, направленной под углом α к силе тяжести, то дополнительный анализ решения задачи о МГД-обтекании капли [40] с ДЭС на границе раздела фаз показывает, что скорость оседания, определяемая формулой (8), изменится на величину порядка числа Гартмана $M_* = B_* a\sqrt{\sigma/\eta} \ll 1$, а на ШМ будет действовать дополнительная боковая сила [40]

$$F = M_* a\eta U_0 \frac{\pi}{16}\left(\frac{2\eta + 3\eta' + q^2/\sigma}{\eta + \eta' + q^2/3\sigma}\right)^2 \sin 2\alpha.$$

Кроме этого ШМ будет еще совершать «индуцированное» ЭКД со скоростью, задаваемой последней формулой (2) в размерных переменных, где вместо местного значения E_0 надо подставить векторное произведение $\left[\vec{U}_0 \times \vec{B}_*\right]$. Так что даже при $E_0 = 0$ и в отсутствии ветра ШМ будет оседать в поле силы тяжести достаточно причудливым образом.

В случае $\rho \approx \rho'$ и напряженности АЭП $E_0 \to 0$ при отсутствии ветра возможна левитация (зависание в воздухе) ШМ, когда она находится в состоянии безразличного равновесия. При этом вне ШМ возможно течение деформационного типа, аналогичное ЭВТ [11, 19], а внутри — система двух тороидальных вихрей Тейлора, что обеспечивает существование неоднородного электрического тока внутри ШМ и, как следствие, ее разноцветное свечение. Любой порыв ветра или наличие горизонтальной составляющей электрического поля будет сносить ШМ вдоль эквипотенциальной поверхности этого состояния «квазиневесомости».

Почти аналогичная ситуация возникает при гидировании ШМ вдоль телефонных проводов и ЛЭП, когда она попадает в «электромагнитную яму» типа бобслейной трассы, и лишь сильный порыв ветра может ее оттуда вытолкнуть. Странная «любовь» ШМ к дымоходам, отмеченная еще Араго, может быть обусловлена как наличием воздушной тяги в них, так и ЭКД ШМ внутрь своеобразного электрического конденсатора, которым является любое помещение [35], особенно при наличии в нем водопроводных и отопительных труб, электро- и радиорозеток.

Особую роль при этом может играть сажа, покрывающая стенки дымоходов. Вспоминая удивительные электрические и другие свойства C_{60}, других фуллеренов и углеродных нанотрубок [37, 38], можно допустить, что дымоходы являются для ШМ своеобразными волноводами.

Следует подчеркнуть, что в редких случаях возможна «абсолютная» левитация ШМ, когда движения на ее границе нет и она временно превращается из ЭГД в электростатический конденсатор без электрического тока внутри и видимого свечения. Изумляющее редких очевидцев появление ШМ как бы «из ничего» объясняется ее выходом из этого крайне неустойчивого состояния покоя.

В заключение этого пункта отметим, что ЭКД капли с ДЭС (или ШМ в соответствии с ЭКВ моделью) математически почти полностью аналогичен термокапиллярному дрейфу (ТКД) капли или пузыря при малых числах Пекле и зависимости поверхностного натяжения от температуры. И если Биркгоф [31] относил еще это явление к парадоксам, то сейчас теория ТКД входит даже в справочные пособия [41] с обсуждением многочисленных нюансов проявления эффекта Марангони.

4). По ЭКВ модели ШМ имеет поверхностный заряд ДЭС и в отсутствии движения Σ-фазы представляла бы собой электростатический конденсатор. Однако, в силу подвижности границы раздела фаз, ДЭС не обеспечивает экранировку ШМ от внешних электрических полей. При наличии любого движения Σ-фазы (независимо от причины) ШМ превращается в своеобразный ЭГД-конденсатор, а электростатический ДЭС — в электродинамический ДТС, который тоже не дает магнитной экранировки, но зато порождает ТЭМС=ДТС$\cup$ПМС, препятствующий диффузии завихренности в окружающее пространство и способствующий сохранению импульса и кинетической энергии ШМ как вихревого сгустка [16, 32]. Скорее всего и ШМ, как ЭКВ сгусток, существует до тех пор, пока концентрация ионов в окружающем воздухе достаточна для поддержания квазиравновесного состояния на внешней обкладке ДТС. Быстрое разрушение внешней обкладки ДЭС в результате, например, импульсного тока при контакте с проводником, имеющим другой потенциал и заряд противоположного знака, приводит к разрушению ТЭМС и «взрыву» ШМ типа хлопка от лопнувшего воздушного шарика. Этот импульсный ток (до 10 и более ампер) может вызвать не только оплавление металлических проводников, повреждение деревьев, но срабатывание реле, перегорание предохранителей, электрических и радиоприборов, находящихся порой на значительных расстояниях в десятки метров от места контакта с ШМ. Во всяком случае подобный сценарий не противоречит высказанному в [5] предположению, что ШМ часто служит лишь триггером для освобождения электрической энергии, накопившейся на заряженных проводниках и других предметах, особенно в грозовую погоду.

Эти и другие качественные соображения после создания не только физико-математической ЭКВ модели ШМ, но и физико-химического дополнения к ней, могут быть подтверждены как аналитическими и численными расчетами, так и натурными экспериментами, что является предметом дальнейших исследований специалистов разных профилей. К сожалению, несмотря на многочисленные попытки [3 – 5, 42] воспроизвести ШМ в лабораторных условиях пока не удалось (во всяком случае с регулярной повторяемостью и со всеми признаками, ее характеризующую). Может быть, не то или не так искали? Ибо без адекватной теоретической модели попытки экспериментально получить наугад такой парадоксальный объект как ШМ пока больше напоминали известный приказ из русской сказки: «Поди туда — не знаю

куда, принеси то — не знаю что ...»

Нобелевский лауреат академик Капица П. Л. подобную ситуацию, но не в частном случае загадок ШМ (которые его тоже не оставили равнодушным), а в общем случае охарактеризовал следующим образом: «*Согласие между экспериментом и теорией представляет собой состояние мещанского благополучия в науке. Этим закрывается развитие науки. Наука — это то, чего не может быть. А то, что может быть, — это технический прогресс* ...»

5). В обзорной литературе, посвященной проблеме ШМ, часто используется классификация по способу подвода и хранения энергии: a) ШМ, существующие за счет первоначально занесенной энергии, b) ШМ, получающие энергию из окружающего пространства, c) ШМ, для которых наряду с первоначальным запасом энергии существенны каналы связи с внешней средой. По ЭКВ модели ШМ относится к последнему типу и, если не считать кинетической и внутренней энергии составляющих ее молекул, атомов и ионов, то первоначальная электростатическая энергия W_0 ШМ находится по формуле для сферического конденсатора [21]:

$$W_0 = \frac{1}{2}CU^2, C = 4\pi\varepsilon\frac{Rr}{R-r}$$

где C — емкость конденсатора с внешним радиусом R и внутренним радиусом r, U — напряжение между его обкладками, в первом приближении пропорциональное разности констант c и c' из формул (2) для электрического потенциала. Формально увеличить W_0 можно за счет увеличения C и U: чисто математически можно показать, что электростатический ДЭС при $q = const$ и толщине $R - r = d \to 0$ имеет $W_0 \to \infty$ [21]. Однако при этом неограниченно растет U, что реально вызовет электрический пробой ДЭС и его разрушение. Простые оценки показывают, что при $R = 10$ см, $R - r \sim 0,1$ – 1 см, $U = 15$ кв/см (половина величины пробойного напряжения для воздуха [7]) имеем всего $W_0 \sim 10^{-2} - 10^{-1}$ дж.

Однако из ЭКВ модели должно быть ясно, что ШМ является изолированной системой по обмену массой с окружающий средой (не считая моментов «рождения» и «гибели»), но открытой системой в энергетическом смысле. Причем внешнее электрическое поле $\vec{E}_0$ является в силу особых электрокинетических свойств подвижного ДЭС не только источником механического импульса ШМ, но и источником энергии, которая расходуется на джоулев нагрев, «холодное» свечение ШМ и ее кинетическую энергию как гидродинамического ЭКВ сгустка.

Это подтверждает и прямой подсчет дивергенции вектора Умова-Пойнтинга $\vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}]$, которая является плотностью энергии электромагнитного поля [20 – 22]. Внутри ШМ при $r < 1$

$$\operatorname{div}\vec{\Pi}' = -\frac{4(qv_0)^2}{\mu\sigma_*} = const < 0,$$

т.е. вещество ШМ получает электромагнитную энергию из окружающего пространства (при $\sigma_* \gg 1$ эта энергия мала и обеспечивает, скорее всего, лишь «холодное» свечение ШМ). Более сложный характер имеет плотность энергии электромагнитного поля вне ШМ при $r \geq 1_+$:

$$\operatorname{div}\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu}\left[-\left(1+\frac{2\beta}{r^3}\right)^2 + \frac{3\beta}{r^3}\left(2+\frac{\beta}{r^3}\right)\sin^2\theta\right] < 0 \tag{9}$$

Причем $\operatorname{div}\vec{\Pi} \to 0_-$ при $\beta \to 1$ и $\theta \to \pi/2$ или $\beta \to -1/2$ и $\theta \to 0, \pi$.

Интересно отметить, что при $r \to 1_+$ и $-1/2 < \beta < 0$ поглощение энергии поля в окрестности ШМ падает у полюсов ($\theta \to 0, \pi$) и возрастает у экватора ($\theta \to \pi/2$), тогда как при $0 < \beta < 1$ у полюсов поглощение энергии поля максимально, а у экватора — минимально. Таким образом ШМ при ее ЭКД является энергетически пассивной системой, т.е. получает энергию электромагнитного поля из окружающего пространства.

Из анализа распределения линий уровня $\operatorname{div}\vec{\Pi}$ следует, что при увеличении положительных β из экваториальной зоны ШМ (точнее ТЭМС на ее границе) как бы идет поток электромагнитной энергии во внешнее пространство, а поступает эта энергия в ТЭМС в основном у полюсов. Для подтверждения этого качественного вывода определенный интерес может представить построение при разных значениях параметра β векторного поля $\vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}]$ (т.е. фактически линий тока электромагнитной энергии, которые ввел еще Умов [43]) внутри ($r < 1_-$) и вне ($r > 1_+$) ШМ, а также внутри ($1_- \leq r \leq 1_+$) ТЭМС. Из вышеизложенного следует, что при этом возможно появление неожиданных эффектов (особенно внутри ТЭМС), типа обнаруженных при компьютерном анализе в задаче о деформировании упругого массива в окрестности выработки [43].

Таким образом все пять пунктов с характерными признаками и парадоксальными свойствами ШМ, относящимися к зрелой квазистационарной стадии ее «жизни», непротиворечивым образом следуют из ЭКВ модели. Более того, эта модель позволяет описать не только движение цепочки одинаковых ШМ вдоль их линии центров [44, 45] на основе функции тока частного вида

$$\Psi = \rho I_1(\rho)\cos z + \frac{1}{2}\left(\rho^4 - \rho^2\right)\cos z_0 - \rho^4 I_1(1) \tag{10}$$

из общего решения в цилиндрических координатах для цепочки осесимметричных вихрей, приведенного в [46], но и ЭКД двух ШМ под одним углом к линии их центров [45] на основе формулы Бьеркнеса для силы взаимодействия двух шаров при их движении в идеальной жидкости и линий тока, приведенных в [47].

Следует подчеркнуть, что течение, задаваемое формулой (10), является ДОТ, а формула Бьеркнеса при равенстве скоростей $V_1 = V_2 = U_e$ и радиусов $R_1 = R_2 = a$ превращается в

$$F = \pi\rho U_e^2 \frac{a^6}{l^4}\left(1 - 3\cos^2\alpha\right)$$

где l — расстояние между центрами, а α — угол между направлением движения ШМ и линией их центров. При $\alpha = arccos\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54°40'$ сила ЭГД-взаимодействия в первом приближении будет отсутствовать. Аналогичная формула для силы получается из выражения электростатической энергии взаимодействия двух электрических

диполей. На основе подобной ЭГДА Бьеркнес и вывел свою формулу, которая дает погрешность менее 5% при $l \geq 6(R_1+R_2)$, а линии тока при равенстве радиусов были получены Шулейкиным методом обратной МАГДА для задачи описания динамики стаи крупных птиц (знаменитый «журавлиный клин» составляет угол $2\alpha \approx 109°$) или рыб.

Описание совместного движения двух и более ШМ, соединенных светящейся «нитью мелких бусин», встречается в литературе. По ЭКВ модели эта «нить» должна быть S-образной формы как линии тока в центральной части между двумя сферами в [45], если только они не движутся в соответствии с функцией тока (10) вдоль линии центров.

В качестве заключения отметим, что явно нестационарные процессы (типа проникания ШМ сквозь малые отверстия и тонкие щели, ее отскоки или распад при ударе на несколько ШМ меньших размеров), а также сценарии «рождения» и «смерти» ШМ нуждаются в дополнительных исследованиях. Хотя один из возможных сценариев «рождения» ШМ может быть представлен формулой (10) при изменении параметра $n = 4z_0/\pi$ для $n = 1, 2, 3, 4$. Этот сценарий основан на следующей цепочке физических превращений [45]: разряд линейной молнии $\rightarrow$ пересжатие разрядного канала в межкомпонентной стадии непрерывного тока [48] электромагнитными силами $\rightarrow$ развитие «сосисочной» неустойчивости и образование четочной молнии $\rightarrow$ ее распад на несколько ШМ или отделение крайнего ЭКВ-сгустка. Заметим, что в [23] рассмотрена задача о пульсациях плазменного шнура, которая имеет прямое отношение к подобному сценарию. Кроме описанных в [2 – 8, 42, 49] других сценариев особого внимания заслуживает ЭГД модель Дубровского В. А., где рассматривается интересный механизм маятникообразной перекачки энергии электрического поля в кинетическую энергию движения диэлектрической сплошной среды [50]. Подобная перекачка энергий может не только приводить к пробойным напряжениям в воздухе и «рождению» ШМ, но и лежать в основе всего механизма электризации водяных капель облаков, образования смерчей, пыльных и снежных буранов.

Хотя многоликость и парадоксальность поведения ШМ по ЭКВ модели следуют не из чрезмерной сложности ее строения, а логично объясняются многообразием различных причин, влияющих на этот феномен природы, однако все приведенные выше доказательства (как на математическом, так и на физическом уровне строгости) об ЭКВ структуре ШМ являются лишь необходимыми условиями соответствия этой модели реальному строению ШМ. О достаточных условиях лучше, чем академик В. Л. Гинзбург [51] не скажешь: «*К макрофизике нужно отнести и проблему шаровой молнии, которую я не стал включать в «список»* (речь идет об известном физическом аналоге на XXI век знаменитого математического «списка» Гильберта на XX век). *В существовании шаровой молнии сомневаться не приходится. Вопрос о ее природе обсуждается с давних времен. Предложено много моделей и гипотез, но пресловутого консенсуса нет. Думаю, что природа шаровой молнии будет четко и однозначно выяснена лишь после создания этих объектов в лаборатории при ясном контроле всех условий и параметров. Кстати сказать, такие попытки неоднократно предпринимались и высказывались претензии на то, что шаро-*

вые молнии были рождены. Но, видимо, все такие утверждения не выдержали проверки.» Похоже, что и результаты последней по времени (2003 г.) конференции по ШМ [52] можно охарактеризовать следующими словами из сборника [42]: «*бесчисленные попытки путем экспериментальных импровизаций получить в лабораторных условиях шаровую молнию оказались малопродуктивны.*»

Автор надеется, что предложенная ЭКВ модель соответствует истинной природе ШМ и поможет экспериментаторам найти результативные пути ее получения в лабораторных условиях при полном контроле всех параметров.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-01-00010).

Литература

[1] *Ломоносов М. В.* Избранные произведения, Т.1, Естественные науки и философия. — М.: Наука, 1986.

[2] *Леонов Р. А.* Загадка шаровой молнии. — М.: Наука, 1965.

[3] *Сингер С.* Природа шаровой молнии. — М.: Мир, 1973.

[4] *Смирнов Б. М.* Проблема шаровой молнии. — М.: Наука, 1988.

[5] *Стаханов И. П.* О физической природе шаровой молнии. — М.: Научный мир, 1996.

[6] *Барри Дж.* Шаровая молния и четочная молния. — М.: Мир, 1983.

[7] *Френкель Я. И.* Теория явлений атмосферного электричества. — Л.-М.: ГИТТЛ, 1949.

[8] *Имянитов И. М., Тихий Д. Я.* За гранью законов науки. — М.: Атомиздат, 1980.

[9] *Натяганов В. Л.* Электровихревая модель электрокапиллярного движения сферической капли и шаровой молнии. Эффект гигантской электрической проницаемости однородной суспензии. Сб. трудов VIII Междунар. коференции «Математика. Компьютер. Образование», Вып. 8, ч. II. — М.: Прогресс-Традиция, 2001.

[10] *Натяганов В. Л.* Электрокапиллярновихревая модель сферического вихря Хилла-Тейлора. — ДАН, 2001, т. 381, № 1.

[11] *Натяганов В. Л.* Действительные и мнимые парадоксы шаровой молнии. Сб. тез. IX Междунар. конференции «Математика. Компьютер. Образование», Вып. 9. — М.: Прогресс-Традиция, 2001.

[12] *Натяганов В. Л.* Электрокапиллярновихревая модель шаровой молнии. — ДАН, 2003, т. 390, № 6.

[13] *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1959.

[14] *Натяганов В. Л., Орешина И. В.* Электрогидродинамика монодисперсных эмульсий, ч. 1, 2. — Коллоидный журнал, 2000, т. 62, № 1.

[15] *Ламб Г.* Гидродинамика. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1947.

[16] *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973.

[17] *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. — М.: ГИТТЛ, 1955.

[18] *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. — М.: Мир, 1976.

[19] Электровихревые течения. Ред. Щербинин Э. В. — Рига: Зинатне, 1985.

[20] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.

[21] *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. — М.: Наука, 1989.

[22] *Толмачев В. В., Головин А. М., Потапов В. С.* Термодинамика и электродинамика сплошной среды. — М.: Изд-во МГУ, 1988.

[23] *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1962.

[24] *Шерклиф Дж.* Курс магнитной гидродинамики. — М.: Мир, 1967.

[25] *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971.

[26] *Нигматулин Р. Э.* Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978.

[27] *Духин С. С., Шилов В. Н.* Диэлектрические явления и двойной слой в дисперсных системах и полиэлектролитах. — Киев: Наукова думка, 1972.

[28] *Мелчер Дж., Тейлор Дж.* Электрогидродинамика: обзор роли межфазных касательных напряжений. — Сб. перев. «Механика», 1971, № 5.

[29] *Натяганов В. Л.* Некоторые особенности электрокапиллярного движения капель. — Сб. Механика деформируемых сред, М.: Изд-во МГУ, 1985.

[30] *Остроумов Г. А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. Физические основы электрогидродинамики. — М.: Наука, 1979.

[31] *Биркгоф Г.* Гидродинамика. — М.: ИЛ, 1963.

[32] *Сэффмэн Ф.Дж.* Динамика вихрей. — М.: Научный мир, 2000.

[33] *Yajnik K.* Dynamic Reversibility in Fluid Flow. — J. basic Eng. Trans. of ASME. Ser. D, 1967, v. 89, № 1.

[34] *Козлов В. В.* Общая теория вихрей. — Ижевск, Изд. дом «Удмуртский ун-тет», 1998.

[35] *Поль Р. В.* Введение в учение об электричестве. — Л.-М.: ГТТИ, 1938.

[36] *Сигов Ю. С.* Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. Избр. труды. — М.: Физматлит, 2001.

[37] *Елецкий А. В., Смирнов Б. М.* Фуллерены и структуры углерода. — УФН, 1995, т. 165, № 9.

[38] *Лахно В. Д.* Кластеры в физике, химии, биологии. — М.-Ижевск, РХД, 2001.

[39] *Головин А. М.* Растворение эллиптического пузыря в жидкости малой вязкости. — ПМТФ, 1968, № 6.

[40] *Головин А. М., Натяганов В. Л.* Магнитогидродинамическое обтекание капли при малых числах Рейнольдса и Гартмана. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 6.

[41] *Кутепов А. М., Полянин А. Д. и др.* Химическая гидродинамика. — М.: Бюро-Квантум, 1996.

[42] Шаровая молния в лаборатории. — М.: Химия, 1994.

[43] *Ревуженко А. Ф.* Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ. — Новосибирск, Изд-во НГУ, 2000.

[44] *Натяганов В. Л.* Математическое моделирование и метод гидроэлектромагнитных аналогий. — Сб. Совр. проблемы механики и прикл. математики. Воронеж (в печати).

[45] *Натяганов В. Л.* Четочная молния как промежуточная стадия между линейной и шаровой. — Сб. докл. VII Междунар. конфер. «Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей.», С.-П., 2003.

[46] *Шмыглевский Ю. Д.* О цепочках осесимметричных вихрей. — Изв. РАН, МЖГ, 1997, № 2.

[47] *Шулейкин В. В.* Физика моря. — М.: Наука, 1968.

[48] *Базелян Э. М., Райзер Ю. П.* Физика молнии и мониезащиты. — М.: Физматлит, 2001.

[49] *Григорян С. С.* О механизме возникновения шаровой молнии. — ДАН, 2002, т. 385, № 6.

[50] *Дубровский В. А., Русаков Н. Н.* Механизм генерации электрического поля. — Докл. АН СССР, 1989, т. 306, № 1.

[51] *Гинзбург В. Л.* О науке, о себе и о других. — М.: Физматлит, 2001.

[52] Программа и тезисы. XII Росс. конфер. по холодной трансмутации ядер химических элементов и шаровой молнии. — М.: НИЦ ФТП «Эрзион», 2003.

Головная волна от точечного источника в слоистой наследственно-упругой среде

Локшин А. А., Сагомонян Е. А.

Строится прифронтовая асимптотика отраженной и головной SH волн, возбуждаемых точечным источником вблизи плоскости, разделяющей два жестко склеенных однородных изотропных полупространства, обладающих наследственно-упругими свойствами. Ядра наследственности предполагаются регулярными. Применяется обобщенный метод Каньяра—Хупа, представляющий собой развитие предложенной ранее идеи [1], причем не требуется, чтобы в слоистой среде ядра наследственности были одинаковы для всех слоев.

Результаты работы, в принципе, можно было бы вывести из результатов [2] построения высокочастотной асимптотики для потенциалов отраженной и преломленной волн в случае гармонического источника. Однако подход, опирающийся на идеи Каньяра—Хупа, намного проще. Случай линейного источника рассмотрен ранее [3].

1. Рассмотрим в пространстве xyz два однородных изотропных наследственно-упругих полупространства, склеенных между собой вдоль границы $z = 0$. Ось z направлена вертикально вниз. Будут рассматриваться только сдвиговые волны, поэтому напомним, что в изотропной наследственно-упругой среде операторный модуль сдвига μ^* определяет (в случае чистого сдвига) следующую связь между напряжениями σ_{ik} и деформациями ε_{ik}:

$$\sigma_{ik} = 2\mu^*\varepsilon_{ik} \equiv 2\mu^0(1 - Q(t)^*)\varepsilon_{ik}.$$

Здесь $\mu^0 = \mathrm{const} > 0$ — мгновенный модуль сдвига, $Q(t)$ — сдвиговое ядро релаксации, равное нулю при $t < 0$, * обозначает свертку по t.

Будем считать, что полупространство $z < 0$ обладает плотностью ρ_1, и сдвиговым модулем $\mu_1^* = \mu_1^0(1 - Q_1(t)^*)$, а полупространство $z > 0$ — плотностью ρ_2 и сдвиговым модулем $\mu_2^* = \mu_2^0(1 - Q_2(t)^*)$. Ядра релаксации $Q_j(t)$ считаем регулярными, т.е. обладающими конечными пределами при $t \to +0$. При этом предположении, что при $t > 0$ справедливы разложения

$$Q_j(t) = Q_j(0) + \sum_{k\geq 1} \varkappa_{jk} t^k$$

Здесь и далее для краткости пишем $Q_j(0)$ вместо $Q_j(+0)$.

Пусть r, ψ, z — цилиндрические координаты, соответствующие декартовым координатам x, y, z (так что $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$). Пусть, далее, в момент $t = 0$ в верхнем полупространстве $z < 0$ начинает действовать сосредоточенная объемная сила, представимая в декартовых координатах в виде

$$f = \nabla \times (0, 0, X) \tag{1}$$

$$X = AH(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0) \equiv AH(t)\frac{\delta(r)}{2\pi r}\delta(z - z_0), \quad A = \mathrm{const}, \quad z_0 < 0$$

Здесь $H(t)$ — единичная функция Хевисайда.

Тогда в декартовых координатах соответствующее поле смещений представимо в виде

$$u = \nabla \times (0, 0, \chi), \tag{2}$$

где χ — некоторый осесимметричный потенциал, т.е. $\chi = \chi(r, z, t)$ в цилиндрических координатах. Из (2) следует, что цилиндрические компоненты смещения имеют вид

$$u_r = 0, \quad u_\psi = -\frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad u_z = 0. \tag{3}$$

Наконец, следу при $t < 0$ считаем неподвижной и ненапряженной, так что

$$u = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \tag{4}$$

2. Подставляя соотношения (1), (2) в уравнения движения среды, приходим к следующим волновым уравнениям для потенциала:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \chi}{\partial t} - (\beta_1^0)^2 (1 - Q_1(t)^*) \Delta \chi = \frac{A}{\rho_1} H(t) \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0), \quad z < 0, \\ &\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - (\beta_2^0)^2 (1 - Q_2(t)^*) \Delta \chi = 0, \quad z > 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\beta_j^0 = (\mu_j^0/\rho_j)^{1/2}$ — мгновенно-упругие скорости сдвиговых волн, Δ — оператор Лапласа по x, y, z.

Начальным условием для χ, соответствующим (4), очевидно, будет

$$\chi = 0 \quad \text{при} \quad t < 0 \tag{6}$$

Кроме того, на границе $z = 0$ должны выполняться два граничных условия, вытекающих соответственно из непрерывности перемещений и напряжений

$$\chi\Big|_{z=-0} = \chi\Big|_{z=+0}, \quad \mu_1^* \frac{\partial \chi}{\partial z}\Big|_{z=-0} = \mu_2^* \frac{\partial \chi}{\partial z}\Big|_{z=+0}. \tag{7}$$

В дальнейшем считаем, что для мгновенно-упругих скоростей сдвиговых волн справедливо соотношение

$$\beta_2^0 > \beta_1^0. \tag{8}$$

Именно в этом случае в поставленной задаче возникают головные волны.

3. Применим к задаче (5) – (7) преобразование Фурье F по x, y и Лапласа по t:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik_x x) dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik_y y) dy \int\limits_{0}^{\infty} \exp(-st) dt.$$

В результате получим решение задачи (5) – (7) в виде

$$F\overline{\chi} = \frac{A}{2\mu_1(s) n_1 s} \times \begin{cases} (\exp[-n_1 (z - z_0) + K_1 \exp[n_1(z + z_0)]), & z < 0, \\ K_2 \exp[-(n_2 z + n_1 z_0)], & z > 0. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь

$$n_j = [k_x^2 + k_y^2 + s^2/\beta_j^2(s)]^{1/2}, \quad \operatorname{Re} n_j > 0, \tag{10}$$

$$\beta_j(s) = (\mu_j(s)/\rho_j)^{1/2}, \quad \mu_j(s)(1 - \overline{Q}_j(s)), \quad j = 1, 2, \tag{11}$$

$$K_1 = \frac{\mu_1 n_1 - \mu_2 n_2}{\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2}, \quad K_2 = \frac{2\mu_1 n_1}{\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2}, \tag{12}$$

черта над знаком функции означает преобразование Лапласа.

Из (11) ясно, что

$$\beta_j(s) = \beta_j^0 (1 - \overline{Q}_j(s))^{1/2}. \tag{13}$$

Кроме того, из предположения (8), очевидно, следует, что

$$\beta_2(s) > \beta_1(s), \quad s \to +\infty. \tag{14}$$

4. Ограничимся исследованием волны, отраженной от границы $z = 0$ в верхнее полупространство $z < 0$, т.е. изучением второго слагаемого в верхней строке формулы (9)

$$F\overline{\chi}^{ref} = \frac{AK_1}{2\mu_1(s) n_1 s} \exp[n_1(z + z_0)].$$

Действуя аналогично [3], [4] можно показать, что при

$$r/R_0 < \beta_1^0/\beta_2^0$$

вблизи фронта, т.е. при $t \to R_0/\beta_1^0 + 0$, $R_0 = [r^2 + (z + z_0)^2]^{1/2}$,

$$\chi^{ref}(x, y, z, t) \sim \frac{A}{4\pi\mu_1^0 R_0} \operatorname{Re}\left(\frac{\mu_1^0 N_1^0(0, R_0/\beta_1^0) - \mu_2 N_2(0, R_0/\beta_1^0)}{\mu_1^0 N_1^0(0, R_0/\beta_1^0) + \mu_2^0 N_2^0(0, R_0/\beta_1^0)}\right) \times \exp\left[-\frac{Q_1(0)}{2}\frac{R_0}{\beta_1^0}\right],$$

$$N_j^0(0, \tau) = \left((\beta_j^0)^{-2} - p_{\infty 0}^2(\tau)\right)^{1/2}, \tag{15}$$

$$p_{\infty 0}(\tau) = \frac{r\tau - |z + z_0| \left(R_0^2 \beta_1^{-2}(\infty) - \tau^2\right)^{1/2}}{R_0^2}, \quad 0 < \tau \le R_0/\beta_1(\infty),$$

$$p_{\infty 0}(\tau) = \frac{r\tau + i\,|z + z_0| \left(\tau^2 - R_0^2 \beta_1^{-2}(\infty)\right)^{1/2}}{R_0^2}, \quad \tau \ge R_0/\beta_1(\infty).$$

5. Перейдем теперь к случаю, когда

$$r/R_0 > \beta_1^0/\beta_2^0. \tag{16}$$

Введем обозначение

$$\tau_0(q) = r\left((\beta_2^0)^{-2} + q^2\right)^{1/2} + |z + z_0| \left((\beta_1^0)^{-2} - (\beta_2^0)^{-2}\right)^{1/2}. \tag{17}$$

Действуя аналогично предыдущему, можно показать, что при $t \to \tau_0(0) + 0$

$$\chi^{ref}(x,y,z,t) \sim \frac{A}{2\pi^2\mu_1^0} \operatorname{Im}\left\{\frac{\mu_1^0 N_1^0(0,\tau_0(0)) - \mu_2 N_2^0(0,\tau_0(0))}{\mu_1^0 N_1^0(0,\tau_0(0)) + \mu_2^0 N_2^0(0,\tau_0(0))}\right\} \times$$
$$\times \frac{\left\{\left[t - |z+z_0|\sqrt{(\beta_1^0)^{-2} - (\beta_2^0)^{-2}}\right]^2 - \frac{r^2}{(\beta_2^0)^2}\right\}^{1/2}}{r\sqrt{(R_0/\beta_1^0)^2 - \tau_0^2(0)}} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{Q_2(0)}{2\beta_2^0}\left(r - \frac{|z+z_0|}{\sqrt{(\beta_2^0-\beta_1^0)^2-1}}\right) - \frac{Q_1(0)}{2\beta_1^0}\frac{|z+z_0|}{\sqrt{1-(\beta_1^0/\beta_2^0)^2}}\right]. \quad (18)$$

Замечание 1. Можно показать, что

$$\tau_0(0) = r/\beta_2^0 + |z+z_0|\left((\beta_1^0)^{-2} - (\beta_2^0(0))\right)$$

есть время прихода головной волны в точку с координатами (x,y,z).

Замечание 2. Основным результатом этой работы являются асимптотические формулы (15) и (18). Обе эти формулы содержат экспоненциальные множители, зависящие от значений функций памяти Q_j. Эти множители определяют вязкое затухание вдоль луча, исходящего из источника и приходящего в точку наблюдения (x,y,z). Нетрудно видеть, что стоящие под знаком экспоненты коэффициенты при $-Q_j(0)/2\beta_j^0$ представляют собой расстояния, проходимые лучом в j-ой среде. Так, например, из (18) видно, что по второй среде упомянутый луч прошел расстояние $r - |z+z_0|\,[(\beta_2^0/\beta_1^0)^2 - 1]^{-1/2}$, а по первой среде — расстояние $|z+z_0|\,[1-(\beta_1^0/\beta_2^0)^2]^{-1/2}$. Отметим, наконец, что при $Q_j \equiv 0$ асимптотические формулы (15) и (18) переходят в соответствующие асимптотики для чисто упругого случая.

Литература

[1] *Локшин А. А., Лопатников С. Л., Рок В. Е.* Метод Каньяра-Хупа для поглощающих сред. — Изв. АН СССР, МТТ, 1990, № 5.

[2] *Баринова Т. Я.* Об асимптотическом методе решения динамических задач теории неидеальной упругости. — Изв. АН СССР, Физика Земли, 1975, № 1.

[3] *Локшин А. А.* Головная волна на границе двух наследственно-упругих полупространств. Случай линейного источника. — ПММ, 1994, Т. 58, Вып. 1.

[4] *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология, Т. 1 — М.: Мир, 1983.

О гиперзвуковом обтекании тел с сетчатыми экранами

Гувернюк С. В.

1. Введение

Проблемы торможения, спуска и посадки различных объектов в атмосферах планет, спасения капсул космических аппаратов (КА) с научной аппаратурой или результатами космических исследований и т.п. неразрывно связаны с исследованиями аэродинамики КА и их элементов при различных режимах обтекания. В ряде случаев в компоновке КА присутствуют элементы с проницаемыми поверхностями, например, сетчатые или перфорированные экраны в качестве отражателей радиоволн [1, 2], рис. 1, теплового протектора [3, 4, 5], раскрывающегося лепесткового тормозного экрана или парашютного устройства [6]. Теоретический расчет аэродинамических характеристик космических аппаратов с проницаемыми экранами представляет существенные трудности, поскольку связан с решением как проблем определения параметров непосредственного воздействия газовой среды на проницаемую поверхность, так и с определением эффектов вторичного влияния распределенной неоднородности, образующейся в просочившемся через проницаемую поверхность потоке газа, на обтекание КА или его элементов, расположенных в аэродинамическом следе за проницаемой поверхностью [7].

В зависимости от степени разреженности газа возможны различные режимы обтекания проницаемых поверхностей, которые определяются наличием нескольких характерных линейных масштабов и, соответственно, - чисел Кнудсена Kn,

$$Kn_L = \frac{\lambda}{L}, \qquad Kn_l = \frac{\lambda}{l}, \qquad Kn_h = \frac{\lambda}{h}.$$

Здесь λ - средняя длина свободного пробега молекул в различных слоях атмосферы (ориентировочное соответствие параметров атмосфер Земли и, например, Марса оценивается из соотношения: давление, плотность и температура на высоте 40 км в воздушной атмосфере Земли примерно соответствуют условиям на высоте 5 км в атмосфере CO_2 над поверхностью Марса [6]); $L \sim 10^{-1} \div 10^{1}$ - внешний масштаб проницаемого экрана, l - характерный диаметр сквозных отверстий в экране, h - размер сплошных элементов внутренней структуры проницаемости. Для сетчатых и перфорированных экранов, как правило, справедливы оценки $L \gg l \sim h$, поэтому характерные числа Кнудсена соотносятся как $Kn_L \gg Kn_l \sim Kn_h$.

При $Kn_L \gg 1$ происходит свободномолекулярное обтекание каждого элемента структуры проницаемости и всего экрана в целом. Гиперзвуковое свободномолекулярное обтекание сетчатых поверхностей и расположенных за ними тел исследовано теоретически [1] и экспериментально [8]. Проницаемая поверхность влияет на аэродинамические характеристики аппарата за счет формирования локальных неоднородностей в виде чередующихся участков «тени» за сплошными элементами и «струй»

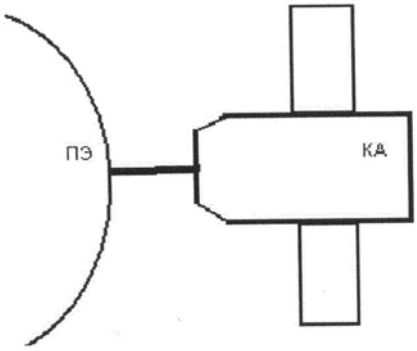


Рис. 1: Схема КА с проницаемым экраном

молекул, пролетевших сквозь отверстия ячеек. Расчеты [1] для ряда компоновок КА с сетчатыми поверхностями показывают, что даже в случае сильно разреженной среды, характерной для условий орбитального полета, и достаточно редких сетчатых экранов (величина заполнения экранирующей поверхности $\delta = 30\%$) пренебрегать влиянием экрана на обтекание аппаратов нельзя.

Если $Kn_{l,h} \gg 1$, но $Kn_L \ll 1$, то в L-масштабе газ уже можно считать сплошной средой, но граничные условия все еще определяются свободномолекулярным обтеканием микроструктуры проницаемости. Такой смешанный режим рассматривался в [2].

Если $Kn_{l,h} \ll 1$, то газ необходимо рассматривать как сплошную среду на уровне всех трех масштабов. Это наиболее трудно исследуемый режим «сплошности». Граничные условия на проницаемом экране в этом случае представляют собой нелинейную систему соотношений на поверхности разрыва с поверхностными источниками импульса. Соответствующая геометрическая структура обобщенной ударной адиабаты включает ветви различной размерности (кривые, точки и конечные области [9]), что приводит к возникновению различных схем обтекания проницаемых экранов, в частности, возможен режим двойного запирания, сопровождающийся образованием крупномасштабной неоднородной сверхзвуковой донной струи при обтекании проницаемых экранов с отошедшим скачком уплотнения [10].

В работе представлены некоторые экспериментальные и расчетные данные о структурах течений газа около компоновок тел с проницаемыми экранами при обтекании на режимах «сплошности».

1. Эксперименты выполнены в сверхзвуковой аэродинамической трубе А-8 НИИ механики МГУ [11] при числах Маха $M_\infty = 2,5$ и $3,0$. В качестве проницаемых экранов брались перфорированные диски и сферические сегменты. Моделью капсулы КА, расположенной в следе за проницаемым экраном, служили цилиндры диаметром $D = 75$ мм и удлинением $1,4$. Визуализация картины течения осуществлялась с помощью оптического прибора ИАБ-451, оснащенного приставкой для получения цветных изображений неоднородностей плотности потока, регистрируемых с помощью видеокамеры.

На рис. 2 показаны теневые картины обтекания при $M_\infty = 3,01$ вогнутого сферического сегмента (рис. 2, а) и плоской круглой пластины (рис. 2, б) с проницаемостью 37% (коэффициента заполнения $\delta = 63\%$). Перед экранами имеется отошедший скачок уплотнения, позади формируется сверхзвуковая донная струя, хорошо видна ячеистая микроструктура, образованная системой слабых возмущений (линий Маха). На рис. 3 представлены фотографии теневых картин сверхзвукового обтекания при $M_\infty = 2,5$ компоновок диск-цилиндр (соотношение диаметров экрана и тела $L/D = 1,4$ при величине зазора $H = 0,73D$ на рис. 3, а, и H=D на рис. 3, б). Диск на рис. 3, а малопроницаемый ($\delta = 88\%$), протекающий через него газ испытывает значительные потери полного давления, течение в зазоре между диском и цилиндром дозвуковое. При удалении экрана и увеличении его проницаемости непосредственно за диском образуется сверхзвуковая зона течения, поэтому перед торцом цилиндра возникает вторичный скачок уплотнения (см. рис. 3, б, $\delta = 35\%$). Размытая линия фронта вторичного скачка свидетельствует о его неустойчивости и высокочастотных колебаниях (экспозиция съемки была 10^{-3}с), что связано с отрывом пограничного слоя на поверхности соединительного стержня. Замена центрального соединительного стержня периферийными стойками (рис. 2) приводит к стабилизации положения вторичного скачка. Такой режим течения без образования передних отрывных структур около цилиндра хорошо поддается моделированию в рамках системы уравнений невязкой среды.

2. При теоретическом моделировании проницаемый экран вместе со слоем локального струйного течения интерпретируется как поверхность сильного разрыва с условиями совместности на скачке, учитывающими законы сохранения массы, энергии и изменения импульса. Для замыкания соответствующей системы уравнений привлекаются дополнительные соотношения, зависящие от типа взаимодействия проницаемого участка с газовой средой [9, 10].

Основными для рассматриваемого класса задач являются типы простого и двойного запирания, когда течение на наветренной стороне экрана имеет дозвуковую составляющую скорости в направлении нормали к экрану, но не зависит от течения позади него. При этом тип двойного запирания дополнительно характеризуется тем, что нормальная составляющая скорости прошедшего через экран потока становится сверхзвуковой и, поэтому, все аэродинамические характеристики экрана перестают зависеть от условий вниз по потоку. Описанные граничные условия были использованы для решения соответствующей задачи о распаде произвольного разрыва при построении алгоритма расчета обтекания тел с проницаемыми экранами. На рис. 4 даны примеры расчетных картин поля чисел Маха около компоновок цилиндра с дисковыми проницаемыми экранами при нулевом угле атаки (число Маха набегающего потока $M_\infty = 3,0$, показатель адиабаты $\gamma = 1,4$). Воспроизведены режимы простого (рис. 4, а) и двойного (рис. 4, б) запирания. В обоих случаях перед экраном имеется отошедший скачок уплотнения. В первом случае между диском и цилиндром течение дозвуковое, вторичного скачка нет; во вторм - дозвуковая зона локализуется около торца цилиндра и не влияет на течение в окрестности проницаемого диска, аэродинамические нагрузки на который оказываются такими же, как и при отсут-

ствии заднего тела. Данные расчеты были выполнены с использованием простейшей осесимметричной модификации метода Годунова С. К. с первым порядком аппроксимации по пространству и времени на равномерной расчетной сетке с числом узлов $4 \cdot 10^5$.

Расчетные структуры течений на рис. 4 хорошо согласуются с данными физических экспериментов в аэродинамической трубе при умеренных числах Маха (см. рис. 2, рис. 3), однако в условия полета с большими числами M_∞ обтекание достаточно редких экранов может происходить без образования единой отошедшей ударной волны. При таком взаимодействии нормальная составляющая скорости остается сверхзвуковой по обе стороны от поверхности разрыва, моделирующей проницаемый экран [9]. В реальном течении этому соответствует локальное сверхзвуковое обтекание сплошных фрагментов проницаемого экрана (например, сетчатого). Для замыкания системы граничных условий на поверхности разрыва, моделирующей проницаемый экран при данном типе взаимодействия, необходимо задавать коэффициент сопротивления характерного сплошного фрагмента структуры проницаемости с учетом интерференции от соседних таких же фрагментов, что в большинстве случаев весьма затруднительно. В некоторых простейших случаях альтернативой может быть сквозной расчет течения около редкого проницаемого экрана, включая обтекание его структурных элементов. Такие расчеты были выполнены с использованием стандартных вычислительных кодов пакета GDT-4.1 [12].

На рис. 5 представлены результаты численного моделирования двумерного течения около компоновки модели КА с параболическим сильно проницаемым ($\delta = 20\%$) экраном, представляющим собой сетку из параллельных лент, для условий полета на высоте 40 км в атмосфере Земли при $M_\infty = 5$ (показаны картины поля давления (а) и распределения числа Маха (б)). В данном случае гиперзвуковое обтекание экрана происходит без образования единой отошедшей ударной волны. Проходя через экран, набегающий поток лишь слегка ослабляется, оставаясь сверхзвуковым. Однако из-за наведенной в нем поперечной неоднородности перед телом в ударном слое возникает обширная отрывная область, существенно влияющая на картину обтекания тела и его аэродинамические характеристики.

2. Заключение

Рассмотрено сверхзвуковое обтекание проницаемых экранов для различных схем течения. Структура обтекания компоновки тела с экраном существенно зависит от степени проницаемости, размеров и формы поверхности экрана. В зазоре между экраном и телом могут возникать нестационарные ударно-волновые структуры и области отрыва. Показано, что даже в случае экранов в виде слабо затеняющих поток редких сеток возможны аномальные структуры гиперзвукового обтекания тела, что связано с влиянием наведенной поперечной неоднородности в потоке, прошедшем через проницаемую поверхность. Эти данные будут полезны при разработке методов расчета аэродинамических характеристик космических аппаратов с проницаемыми элементами при входе в атмосферы планет.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке по программе ФКИ.

Литература

[1] *Шведов А. В.* О расчете аэродинамических характеристик тел с сетчатыми поверхностями в гиперзвуковом потоке разреженного газа. — Труды ЦАГИ, 1990, Вып. 2436.

[2] *Христинич В. Б.* Модель течения газа низкой плотности в перфорированных границах для расчета аэродинамики космических антенн. — Всб.: Модели механики сплошных сред. СпбГУ, 1996.

[3] *Белов И. А., Исаев С. А., Митин А. Ю. и др.* Моделирование отрывных течений в ударном слое преград, обтекаемых неравномерным потоком. Сверхзвуковые газовые струи. — Н.: Наука, 1983.

[4] *Гувернюк С. В., Савинов К. Г.* О сверхзвуковом обтекании затупленных тел, экранированных проницаемой поверхностью. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1986, № 2.

[5] *Гувернюк С. В., Савинов К. Г., Ульянов Г. С.* Сверхзвуковое обтекание торца, экранированного проницаемым диском. Волновые задачи механики деформируемых сред II. — М.: Изд-во МГУ, 1990.

[6] Некоторые проблемы создания и отработки космических аппаратов, предназначенных для входа в атмосферы планет. — М. ВИНИТИ, серия «Исследование космического пространства», 1975, Том 6.

[7] *Белов И. А., Гувернюк С. В., Мосин А. Ф., и др.* Взаимодействие неравномерных потоков с проницаемыми экранами и сплошными преградами. — Восьмой Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Анн. докл., Екатеринбург: УрО РАН, 2001.

[8] *Омелик А. И., Помаржанский В. В., Шведов А. В.* Экспериментальное определение аэродинамических характеристик образцов сеток в гиперзвуковом свободномолекулярном потоке. — Ученые записки ЦАГИ, 1986, Т. 18, № 4.

[9] *Гувернюк С. В.* Адиабата проницаемой поверхности. — Аэромеханика и газовая динамика, 2003, № 3.

[10] *Гувернюк С. В., Савинов К. Г., Ульянов Г. С.* Сверхзвуковое обтекание затупленных перфорированных экранов. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1985, № 1.

[11] Аэродинамические установки Института механики Московского университета. Под ред. Черного Г. Г., Зубкова А. И., Панова Ю. А. — Изд-во МГУ, 1985.

[12] *Зибаров А. В.* Пакет прикладных программ GDT и его применение в задачах численного моделирования газодинамических процессов. — Автореферат докторской дисс., М.: МФТИ, 2000.

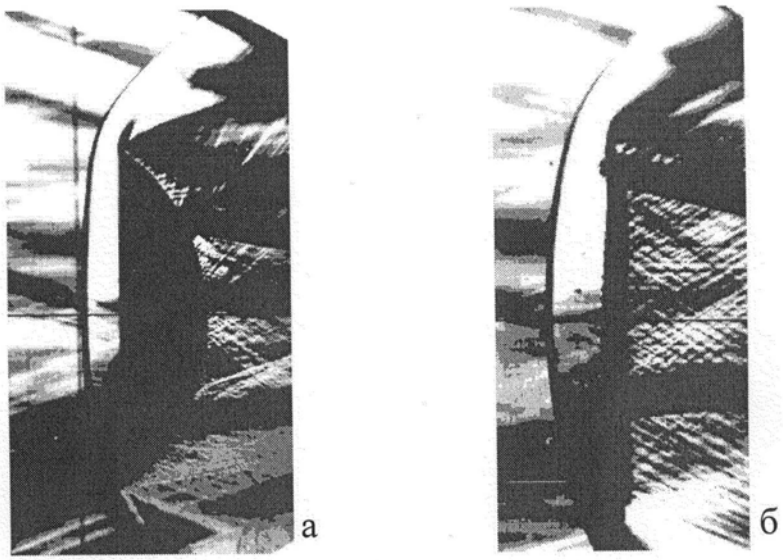


Рис. 2: Сверхзвуковое обтекание вогнутого (а) и плоского (б) проницаемых экранов при $M_\infty = 3.0$

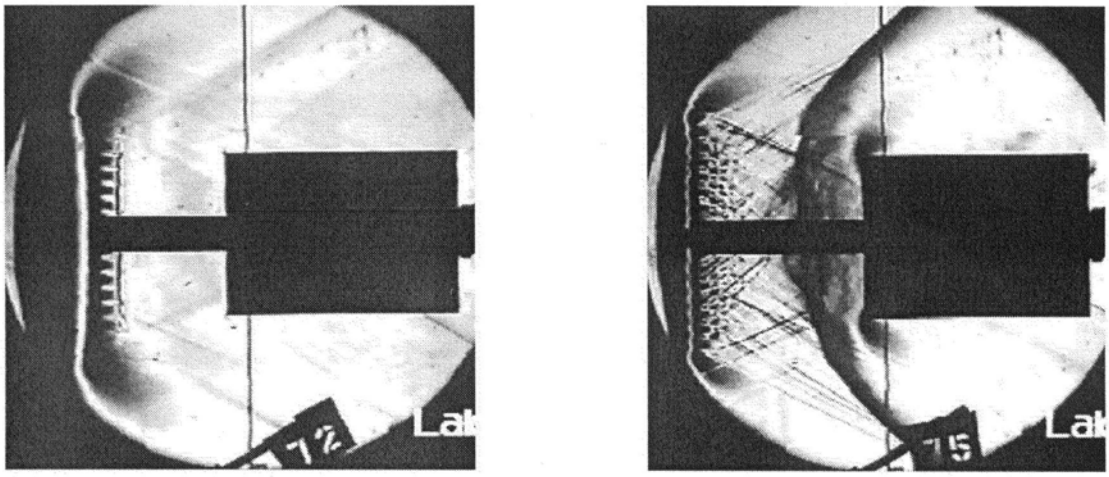


Рис. 3: Сверхзвуковое обтекание ($M_\infty = 2,5$) компоновок цилиндра с проницаемыми дисковыми экранами при $\delta = 88\%$, $L/D = 0,73$ (а) и $\delta = 35\%$, $L/D = 1,0$ (б)

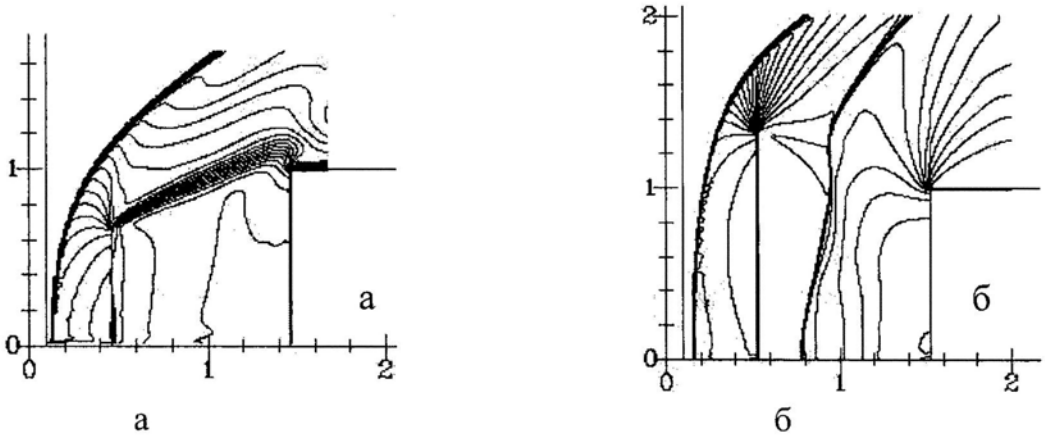


Рис. 4: Изолинии числа Маха при сверхзвуковом обтекании компоновки диск-цилиндр на режиме простого (а) и двойного (б) запирания при $M_\infty = 3.0$

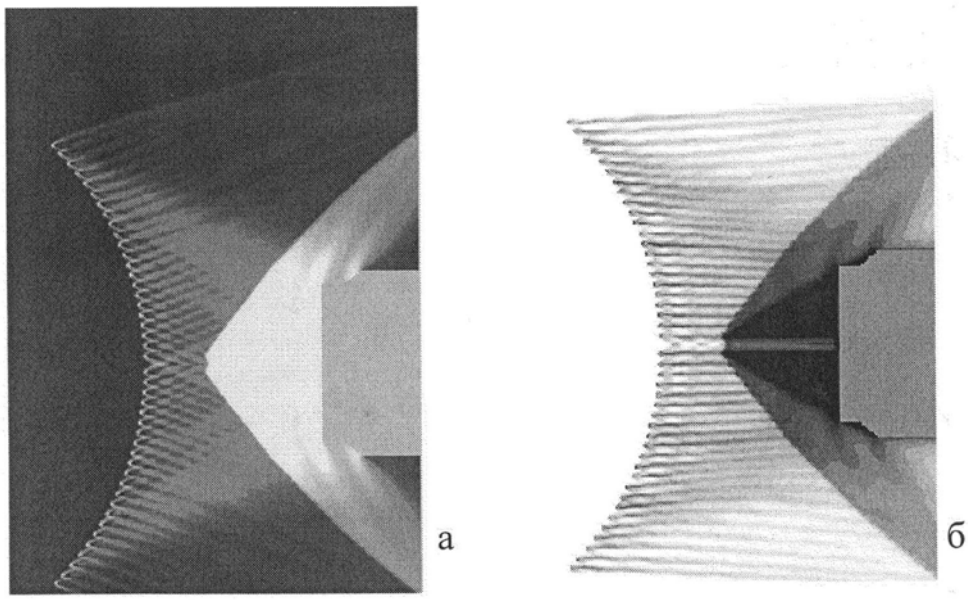


Рис. 5: Расчет гиперзвукового обтекания модели КА с вогнутым сетчатым экраном при $M_\infty = 5$; картины распределения давления (а) и числа Маха (б)

Глобальная модель ветровой эрозии почвы и ее проверка с использованием космической съемки

Гендугов В. М., Глазунов Г. П.

1. Введение

Пыльные бури и сопутствующие им экологические проблемы имеют глобальное значение [8]. Масса почвенной пыли, поступающей в атмосферу, столь велика, порядка $1{,}5 \cdot 10^9$ т в год [14], что она не только периодически затрудняет жизнедеятельность в крупных, густо населенных регионах, но и начинает оказывать влияние на тепловой баланс планеты. Проблема еще более обостряется, если ветровой эрозии подвергаются почвы, загрязненные радионуклидами или опасными веществами. Космические снимки позволяют с высокой точностью отслеживать путь пылевого облака, но они не несут сведений о динамике его разгрузки. В этом космический мониторинг должен быть дополнен краткосрочным прогнозированием на основе математического моделирования явления подъема переноса и отложения пыли. Нами предложена новая концепция ветровой эрозии почв, основанная на анализе вызывающих ее сил [3].

Согласно этой концепции подъемная сила имеет вихревую природу. Способностью отрыва почвенных частиц от поверхности обладают только те вихри, которые имеют вертикально ориентированную ось и опираются торцом на поверхность, наподобие смерча, но малых размеров. Масштабы этих вихрей соизмеримы с масштабами выступов на поверхности почвы. Дальнейший перенос осуществляется вихрями любого масштаба, так как вдали от твердой поверхности частицы могут быть захвачены вихрем и через боковую поверхность, как это было доказано Жуковским Н. Е. [7]. Такая трактовка природы подъемной силы позволяет объяснить многие явления, в частности, скачкообразное движение почвенных частиц (сальтацию), большую высоту подскока частиц, переносимых ветром над лишенной упругости почвенной поверхностью, выдувание почвенных частиц из-под проницаемого экрана и другие. Количественно она выражается уравнением подъемной силы Жуковского [3].

Указанные представления о подъемной силе и предположение о постоянстве плотности воздуха легли в основу физически содержательной теории ветровой эрозии почв, которая позволяет решать различные практические и теоретические задачи [4, 5]. Для того чтобы исследовать закономерности глобального переноса почвенных частиц ветром необходимо учесть изменчивость плотности воздуха по высоте, что существенно усложняет задачу.

Цель данной работы состояла: а) в теоретическом исследовании закономерностей отрыва, подъема, глобального переноса и отложения почвенных частиц ветром в условиях стратифицированной атмосферы, б) в экспериментальной проверке уравнения выдувания по литературным данным и в) в оценке теории на основе сопоставления результатов моделирования с изображением на космическом снимке пыльной бури над Красным морем.

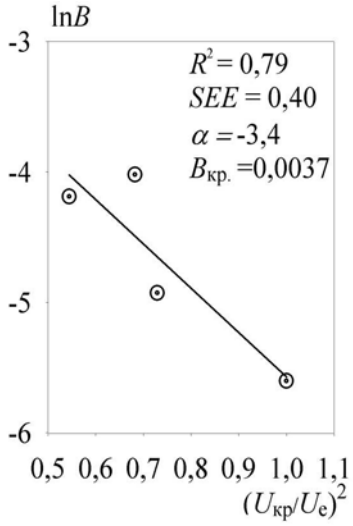


Рис. 1: Проверка уравнения выдувания

2. Модель атмосферы

В работе используется представление об атмосфере, как идеальном газе в поле силы тяжести, который характеризуется закономерно изменяющимися с высотой плотностью $\rho_{\text{в}}$, давлением p и температурой T при постоянстве скорости ветра U_e, касательного напряжения τ и универсальной газовой постоянной R, что обеспечивает изменение подъемной силы и соответствующее структурирование почво-воздушного потока. Применительно к тому ограниченному диапазону высот (до 10 – 15 км, в зависимости от широты местности) в котором в основном и переносится почвенная пыль, на основании опыта [12] принимают, что в среднем температура воздуха убывает с высотой по линейному закону. Величину Δ, на которую уменьшается температура при подъеме на каждые 100 м, в практических расчетах принимают равной 0,65°. Уравнение для плотности воздуха в стратифицированной атмосфере [11] имеет вид

$$\frac{\rho_{\text{в}1}}{\rho_{\text{в}0}} = \left(1 - \frac{\Delta}{100\,T_0} y_1\right)^{\frac{100g}{R\Delta}-1}. \tag{1}$$

3. Уравнение выдувания почвы

Свойства эродируемой ветром почвы интегрально представлены: постоянной выдувания α, критическим значением параметра массообмена $B_{\text{к}}$, критической скоростью ветра $U_{\text{кр.}}$, при которой начинается массовое движение частиц почвы, критической скоростью $U_{\text{кр.}2}$, при которой прекращается скачкообразное движение почвенной частицы и начинается ее горизонтальный полет, коэффициентом подъемной силы для почвенных частиц в формуле Жуковского K_{**}, коэффициентом лобового сопротивления почвенных частиц K_* и параметром шероховатости почвенной поверхности z_0.

Первоначально уравнение выдувания

$$B = B_{\text{к}} e^{-\alpha\left(\frac{U^2_{\text{кр.}}}{U^2_e}-1\right)} \tag{2}$$

было получено на основе экспериментально установленного закона выдувания и смыва почвы с использованием методов теории подобия и анализа размерностей [1, 2], а затем было выведено аналитически [3]. В этом уравнении $B = qU_e/\tau$, а q – интенсивность выдувания почвы [кг/м^{2}с]. Справедливость уравнения (2) была проверена по результатам измерения выдувания почвы в лабораторных условиях с примененим аэродинамической установки [5], а теперь и по натурным данным [17] (рис. 1). Песчаная почва опытного участка, где проводились измерения переноса почвы ветром, характеризуется высокой степенью распыленности (Табл.1) и отсутствием связности, что является причиной сравнительно низкой критической скорости, присущей ей ($U_{\text{кр.}}$=7,6 м/с) [17]. По результатам структурных измерений на этих же опытных полях для уравнения касательного напряжения ($\tau = \kappa\rho_{\text{в}}U_e^2$) получено значение κ= 0,0042.

Таблица 1. Характеристики выдувания почвы [30]

Дата	t	Q	U_e	q	τ	$B_{\text{кр.}}$
	с	т/га	м/с	кг/м^2/с	Н/м^2	кг/кг
13.06.93	1481	12,5	10,3	0,0008	0,6	0,0152
27.06.93	1320	2,0	7,6	0,0002	0,3	0,0037
30.06.93	1321	4,6	8,9	0,0003	0,4	0,0072
01.07.93	3004	26,8	9,2	0,0009	0,5	0,0179

Таблица 2 Агрегатный состав выдуваемой почвы [31]

Класс, мкм	<63	63-125	125-250	250-500	500-1000	>1000
Масса, %	3,1	18,2	35,7	32,8	10	0,2

Постоянная выдувания почвы (α= –3,4) в полевых условиях практически совпадает с величинами, полученными нами по результатам опытов в лабораторной аэродинаемической трубе с насыпными образцами черноземов, близкими по агрегатному составу (от -4 до -5). В то же время критическая величина параметра массообмена ($B_{\text{кр.}}$= 0,0037) превышает величины, полученные в лаборатории, на два порядка. Для того, чтобы объяснить такое различие, необходимо обратиться к физическому смыслу параметра массообмена, который, как установлено ранее [4], представляет собой концентрацию частиц на поверхности почвы, полностью подготовленных потоком к вылету в результате утраты сцепления с ней под влиянием лобового усилия и под ударами скачущих частиц. Ясно, что чем протяженнее эродируемая поверхность, тем больше суммарное проявление влияния скачущих частиц, что и выявилось в результате сравнения полевых и лабораторных данных.

4. Движущие силы ветровой эрозии почв

Закономерности поведения почвенных частиц в стратифицированной атмосфере исследовали на основе анализа сил действующих на нее со стороны потока. При этом ограничились простейшим случаем постоянной по высоте (за пределами слоя шероховатости) скорости ветра, U_e. Начало системы координат ($x = 0$, $y = 0$) совместили с местом вылета произвольной почвенной частицы, ось x направили вдоль ветра, а ось y — вдоль нормали к почвенной поверхности, направленной в зенит. Будем полагать, что частица поступает в поток с поверхности, имея вертикальную скорость v_{i0}, для которой получено соответствующее уравнение [4]. В таком случае в направлении оси x на частицу приведенного радиуса r_i, действует только сила лобового сопротивления, которая придает частице ускорение в направлении этой оси. Поэтому согласно второму закону Ньютона можно записать уравнение

$$m\frac{du_i}{dt} = K_* \pi r_i^2 \rho_{\text{в}1} \left(U_e - u_i\right)^2, \tag{3}$$

в котором т– масса почвенной частицы плотностью $\rho_{\text{п}}$, определяемая выражением $(4/3)\,\pi\, r_i^3 \rho_{\text{п}}$;$K_*$– коэффициент лобового сопротивления;u_i – составляющая скорости частицы в направлении оси x.

Вдоль вертикальной оси y на почвенную частицу действуют: подъемная сила Жуковского, сила Архимеда, результирующая которой направлена вниз, и сила сопротивления Стокса. Уравнение движения почвенной частицы в проекции на ось y, имеет вид

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = K_{**}\pi\, r_i^2 U_e^2 \rho_{\text{в}0} \left(1 - \lambda\, y\right)^{\beta} - (4/3)\,\pi\, r_i^3 g \rho_{\text{п}} - \varphi\eta\pi\, r_i \frac{dy}{dt}. \tag{4}$$

Здесь K_{**}– коэффициент подъемной силы; $\lambda = \Delta/100\,T_0$, $\beta = (100g/R\,\Delta) - 1$; φ – коэффициент формы частицы в законе Стокса; η – вязкость воздуха; v_i – вертикальная составляющая скорости движения частицы, которая определяется выражением $v_i = dy/dt$.

5. Траектории движения почвенных частиц в стратифицированной атмосфере

Из общего вида уравнения (4) ясно, что частица не может подниматься бесконечно, поскольку подъемная сила убывает с уменьшением плотности воздуха. В тот момент, когда подъемная сила сравняется с равнодействующей сил тяжести и вязкости, препятствующих подъему, он прекратится и частица продолжит свое движение в горизонтальном направлении, в соответствии с лобовым сопротивлением (3). Это означает, что решение, полученное ранее [4], имеет ограниченный характер. Для того, чтобы получить решение для области, прилегающей к области горизонтального полета частицы, воспользуемся тем обстоятельством, что ускорение частицы в вертикальном направлении убывает вместе с убыванием подъемной силы, которое вызвано

снижением плотности воздуха с высотой. По мере приближения к предельной высоте подъема частицы ее ускорение становится пренебрежимо малым, что позволяет приравнять правую часть уравнения (4) нулю и получить в результате относительно простую формулу

$$\frac{dy}{dt} = v_i = \frac{K_{**} r_i U_e^2 \rho_{\text{в}0} \left(1 - \lambda y\right)^{\beta} - (4/3)\, r_i^2 g \rho_{\text{п}}}{\varphi \eta} \tag{5}$$

для вертикальной составляющей скорости подъема почвенной частицы в тропосфере. Уравнение (5) справедливо в узком диапазоне высот, прилегающем к высоте горизонтального полета частицы, $y_{\text{т}}$. Ясно, что с приближением к $y_{\text{т}}$ скорость подъема v_i стремится к нулю. Воспользуемся этим для нахождения $y_{\text{т}}$. Приравнивая правую часть (5) нулю и решая уравнение относительно $y = y_{\text{т}}$, получаем уравнение

$$y_m = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \left(\frac{4 r_i g \rho_{\text{п}}}{3 \rho_{\text{в}0} K_{**} U_e^2}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right) \tag{6}$$

которое представляет собой обобщение формулы для толщины слоя сальтации, полученной в [4]. Из уравнения (6) следует, что в условиях неизменности метеорологических величин ($U_e = const$, $\rho_{\text{в}0} = const$) почвенные частицы в тропосфере по истечении достаточного времени закономерно распределятся по высоте в соответствии с размерами, r_i, и плотностью, $\rho_{\text{п}}$. Это означает что, почво-воздушный поток обрел структуру.

Для того чтобы установить структуру потока приравняем правую часть (6) нулю и решим полученное алгебраическое уравнение второй степени относительно r_i. Первый корень, $r_1 = 0$, а для второго получено уравнение

$$r_2 = \frac{3 K_{**} U_e^2 \rho_{\text{в}0} \left(1 - \lambda\, y\right)^{\beta}}{4 g \rho_{\text{п}}} \tag{7}$$

Оно определяет размер частиц известной плотности $\rho_{\text{п}}$, транспортируемых потоком известной скорости U_e на высоте y, которая в данном случае является наибольшей возможной высотой подъема при данной скорости, y_m. Из уравнения (7) следует важнейший вывод о том, что при любых метеорологических условиях структура почво-воздушного потока определяется свойствами выдуваемой почвы.

Исследуем зависимость пространственных координат переносимых ветром почвенных частиц от времени. Используем для этой цели уравнение (4), имея в виду, что с приближением частицы к предельной высоте переноса, вертикальная составляющая ее скорости, то есть скорость подъема, стремится к нулю. Полагая, что на этой стадии подъемная сила уравновешивается силой Архимеда, а частица, преодолевая сопротивление вязкости воздуха, продолжает подъем по инерции, из уравнения (4) путем ряда преобразований получаем уравнение

$$y = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \left(\frac{4 r_i g \rho_{\text{п}}}{3 \rho_{\text{в}0} K_{**} U_e^2}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right) - A_1 a_i e^{-\frac{t}{a_i}} \tag{8}$$

зависимости высоты подъема почвенной частицы ветром от времени. Здесь $a_i = (4r_i^2\rho_{\text{п}}/3\phi\eta)$. Найденное решение определяет асимптотическое поведение частицы с точностью до постоянной A_1. Ее физический смысл также установлен. Она представляет собой скорость подъема частицы на участке асимптотического приближения к предельной высоте подъема, то есть на участке, где подъемная сила практически уравновешивается силой веса частицы.

Подстановка в (8) времени, t, найденного из рассмотрения уравнения (4) движения почвенной частицы в проекции на горизонтальную ось, дает уравнение

$$y_{\text{с}} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \left(\frac{4r_i g\rho_{\text{п}}}{3\rho_{\text{в}0}K_{**}U_e^2}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right) - A_1 a_i e^{\frac{-x}{a_i U_e}}, \tag{9}$$

которое представляет собой уравнение траектории почвенной частицы в стратифицированной по плотности атмосфере и является обобщением уравнения траектории

$$y_{\text{н}} = b_i x/U_e - a_i(b_i - v_{i0})\left(1 - e^{-x/a_i U_e}\right) \tag{10}$$

полученного ранее [4] для нестратифицированной атмосферы. В этом уравнении

$$b_i = r_i\{K_{**}\rho_{\text{в}}U_e^2 - [4r_i g(\rho_{\text{п}} - \rho_{\text{в}})/3\}/\phi\eta.$$

Уравнение (10) описывает траекторию частицы в потоке на участке начала подъема с поверхности, а уравнение (9) – на участке приближения к предельной высоте подъема при данной скорости ветра. Если $U_{\text{кр.}}<U_e<U_{\text{кр.2}}$, то частица сорта r_i, перемещается скачками. В соответствии с (10) траектории скачков представляют собой выпуклые кривые, замкнутые на поверхность. Если $U_e>U_{\text{кр.2}}$, то частица летит. Траектория ее в этом случае представляет собой вогнутую кривую, стремящуюся к наклонной прямой, уходящей бесконечно вверх. Кратчайшим путем от участка, описываемого уравнением (10), к участку, описываемому уравнением (9), является касательная к обеим траекториям, которую и приняли за траекторию частицы на этом участке. Обозначив x_m абсциссу точки пересечения асимптоты кривой, описываемой уравнением (10), с линией уровня y_m, и подставив ее в (9), получили уравнение траектории (11) в удобном для практических расчетов виде.

$$y_{\text{с}} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \left(\frac{4r_i g\rho_{\text{п}}}{3\rho_{\text{в}0}K_{**}U_e^2}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right) - A_1 a_i e^{\frac{-(x-x_m)}{U_e a_i}} \tag{11}$$

Аналогично обозначив t_m время достижения частицей точки с координатами $x_m y_m$, и подставив его в (8), получили уравнение

$$y = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \left(\frac{4r_i g\rho_{\text{п}}}{3\rho_{\text{в}0}K_{**}U_e^2}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right) - A_1 a_i e^{-\frac{t-t_m}{a_i}} \tag{12}$$

зависимости подъема частицы от времени в удобном для практических расчетов виде.

6. Уравнение сохранения массы для почвенного континуума в почво-воздушном потоке

Решение задачи ветровой эрозии почв в глобальной постановке возможно лишь в рамках законов механики сплошной среды с привлечением представления о взаимопроникающем движении многоскоростных континуумов [10]. Почвенную фазу почво-воздушного потока, можно представить в виде множества, m, континуумов, состоящих из одинаковых частиц i-того сорта (i = 1, ..., m), перемещающихся одновременно в одном и том же пространстве, без оказания влияния друг на друга. Каждая из частиц i-того сорта имеет характерный радиус,r_i, плотность, $\rho_{\text{п}}$, и скорость, $\bar{v}_i$. Скорость частицы разлагается на три составляющие, продольную горизонтальную, u_i, продольную вертикальную, v_i, и поперечную горизонтальную, w_i, а масса континуума, M_i, равномерно распределена во всем объеме, занимаемом потоком частиц i-того сорта. Поэтому для концентрации частиц i-того континуума можно записать условие

$$c_i = M_i/M,$$

в котором M– масса воздуха, вмещающего этот континуум. Воздушный континуум имеет переменную по высоте плотность $\rho_{\text{в}}$ и постоянную скорость, равную средней скорости воздушного потока, U_e. Поскольку масса почвенной фазы в почво-воздушном потоке, как правило [6], весьма мала по сравнению с массой вмещающего воздуха, $M_i << M$, справедливо условие

$$\rho_i = \rho_{\text{в}}\, c_i.$$

К стратифицированной атмосфере можно применить решение найденное в [4] для нестратифицированной, поскольку известно уравнение (1) зависимости плотности воздуха от высоты. В работе [4] уравнение сохранения массы для потока почвенных частиц i-того сорта решаются в рамках гипотезы о том, что i-й континуум движется, в плоском случае, по траектории частицы i-го сорта. Решение имеет вид уравнения

$$dc_{i(x,y)} = 0.$$

Его смысл состоит в том что вдоль любой траектории концентрация c_i частиц i-того сорта остается постоянной. Поэтому, имея данные о составе и свойствах частиц почвы, вовлеченных в поток, можно анализировать его структуру.

7. Структура почво-воздушного потока при дальнем переносе

Рассмотрим задачу о структуре почво-воздушного потока в плоской постановке для простейшего случая, когда эродируемая почва состоит из одинаковых частиц сорта r_i, а скорость ветра превышает скорость начала полета этих частиц, то есть U_e>$U_{\text{кр.2}}$. В таком случае выдуваемые частицы будут сначала подниматься по вогнутому участку траектории, описываемому уравнением (10), затем вдоль касательной, соединяющей участки кривых, описываемых уравнениями (9) и (10), и, наконец, вдоль выпуклой

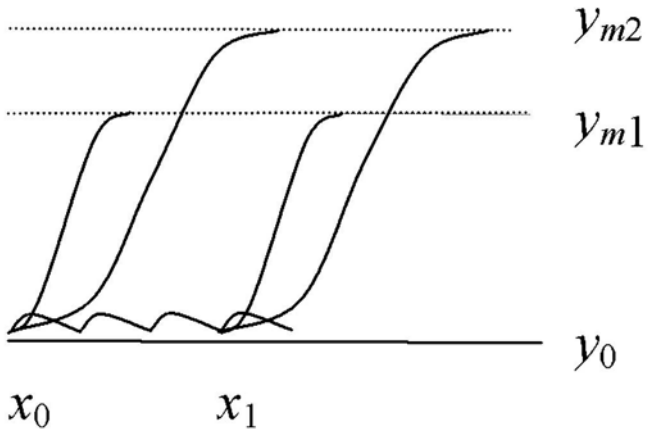


Рис. 2: Траектории частиц

кривой, описываемой уравнением (9), бесконечно приближаясь к горизонтальной линии предельной высоты подъемаy_m, определяемой уравнением (6). Из уравнений траектории следует, что линии восходящих траекторий частиц одного сорта не пересекаются. Поэтому в каждой точке плоской фигуры, ограниченной линией почвенной поверхности и крайними траекториями, имеющими начало, соответственно, на наветренном, x_0, и подветренном, x_1, краях эродируемого участка (рис. 2), концентрация частиц, c_i, остается величиной постоянной, равной концентрации этих частиц в поверхностном слое почвы. Эта фигура ограничивает континуум частиц i-того сорта. В том случае, когда почва состоит из двух сортов частиц, для каждого из которых выполняется условие U_e>$U_{\text{кр.2}}$, крайние траектории и линия почвенной поверхности ограничат в рассматриваемой плоскости две фигуры (два континуума) в пределах каждой из которых концентрация будет постоянной, равной, соответственно, c_1и c_2. Но в тех областях, где эти фигуры накладываются (континуумы являются взаимопроникающими), концентрация частиц в потоке будет равна сумме концентраций частиц каждого из сортов, $c_1 + c_2$. Если в почве присутствуют такие частицы, что для них выполняется условие $U_{\text{кр.}}$<U_e <$U_{\text{кр.2}}$, то они будут перемещаться скачками, формируя слой сальтации (рис. 2). Структура слоя сальтации установлена ранее [4], а континуумы почвенных частиц этого слоя в равной мере с другими участвуют в формировании поля концентраций частиц в почво-воздушном потоке. Интересной особенностью слоя сальтации является то, что в силу выпуклости траекторий скачущих частиц для любой точки на восходящем участке любой траектории существует соответствующая траектория, пересекающая ее своим нисходящим участком, поэтому концентрация скачущих частиц в потоке равна удвоенной концентрации этих частиц на поверхности, $2c_3$, а общая концентрация частиц в слое сальтации равна $2c_3 + c_1 + c_2$.

Утверждение, справедливое для потока, содержащего два сорта частиц, уносимых по восходящим траекториям безвозвратно относительно источника, справедливо и

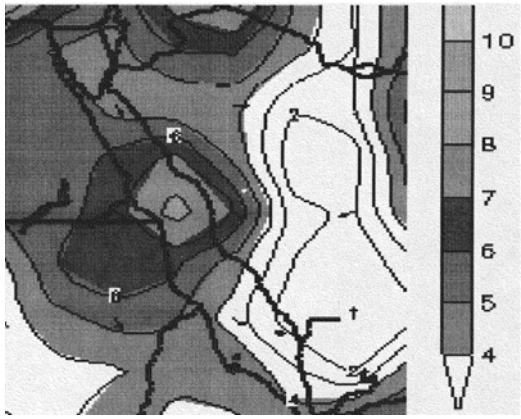


Рис. 3: Пыльная буря над Суданом и Красным морем (21°с.ш., 38°в.д.) 11 августа 1991 г. Источник: NASA, фото STS043-151-086

для потока, содержащего произвольное число сортов частиц, уносимых безвозвратно. Кроме того, если поток в поперечном направлении самоподобен, то решения, полученные применительно к плоскости, применимы ко всему объемному потоку. Концентрация частиц почвы в каждой точке этого потока будет равна сумме концентраций, свойственных каждому из присутствующих в даной точке почвенных континуумов, а наличие или отсутствие континуума определяется уравнением траектории. Следовательно, задача о структуре почво-воздушного потока в стратифицированной атмосфере решена.

8. Численное моделирование явления ветровой эрозии почв

Таблица 3. Значения аргументов в модели ветровой эрозии почв

$\rho_{п}$, кг/м^3	$\rho_{в0}$, кг/м^3	φ	η, Кг/м^{2}с	$B_{кр.}$, кг/кг	α	T_0, ℃	R, $\frac{Дж}{кг \cdot К}$	Δ, ℃/100м	κ	U_e, м/с	$U_{кр.}$, м/с
2650	1,164	6	0,000018	0,0037	–3,4	30	287	0,65	0,0042	10	7,6

В качестве примера рассмотрим структуру почво-воздушного потока, который сформируется над участком суши протяженностью 40 км, почва которого аналогична почве Сахельского центра (Табл.2), и примыкаюшим к нему участком Красного моря, в направлении ветра, дующего по линии Порт-Судан Джидда, при обычных для этих мест условиях (Табл. 3) и сопоставим ее с картиной явления ветровой эрозии над территорией северо-восточной Африки в окрестностях г. Порт-Судан (рис. 3). При расчетах ограничимся диапазоном размеров частиц (от r_i= 40 до r_i= 60 мкм), преимущественно выносимых ветрами из зоны Сахары [15, 16].

Поскольку выпадение почвенных частиц из потока согласно уравнению траектории обусловлено снижением скорости, необходимо установить ее зависимость от

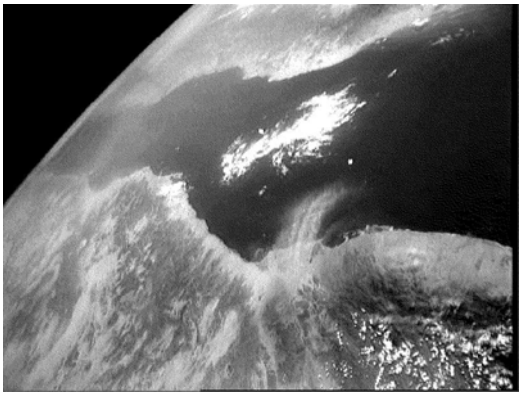


Рис. 4: Среднесуточные скорости ветра на уровне моря в районе пыльной бури 11 августа 1991 г. Источник: NOAACDC (http://www.cdc.noaa.gov.HistData)

расстояния вдоль потока. С этой целью воспользуемся среднесуточными полями скоростей ветра для рассматриваемого региона на уровне моря за 11 августа 1991 г. (рис. 4). Согласно этой картограмме, участку выпадения почвенной пыли в море соответствуют скорости ветра порядка 4 м/с. Поскольку на картограмме изолиний для уровенной поверхности 850 гПа в районе выдувания почвы указана скорость в 10 м/с, ее приняли в качестве входной величины при моделировании. Исходя из этого приняли, что приземная скорость ветра убывает от 10 м/с в зоне выдувания до 3,4 м/с в зоне выпадения. Полагая для простоты, что убывание скорости вдоль направления движения почво-воздушного потока, имевшее место над морским участком ($x_б < x < x_{\max}$), подчинялось линейному закону, его выразили уравнением

$$U_e = U_{e_б} - 0,00015\ (x - x_б) \tag{13}$$

в котором $x_б$– горизонтальная координата пересечения потоком морского берега.

Вся территория, охваченная моделированием, характеризовалась постоянством поля среднесуточных температур (Табл. 4). Лишь у поверхности моря температура воздуха была на 2 градуса ниже, чем над почвой (соответственно, 36 – 37 и 38 – 39 градусов). С высотой температура убывала по линейному закону, что указывает на отсутствие инверсии.

Таблица 4. Профили температуры и атмосферного давления в окрестностях Порт-Судана за 11 августа 1991 г. (по данным *NOAA CDC*, *http://www.cdc.noaa.gov.HistData*)

$y(x_{\max})$, км	0,0	0,9	2,9	6,4	7,8	9,7	11,3	13,1	15,2	16,4	19,2	18,6
$t(x_{\max})$, $°C$	37,5	28,5	15,5	-7	-16	-29	-39	-51	-64	-72	-90	-86
P, гПа	1000	850	700	500	400	300	250	200	150	100	70	50

Полученные при таких условиях расчетные траектории (рис. 5), качественно совпадают с моделируемыми, изображенными на космическом снимке. Наложение восходящих участков траекторий частиц двух разных размеров кажущееся, обусловленное масштабом графика.

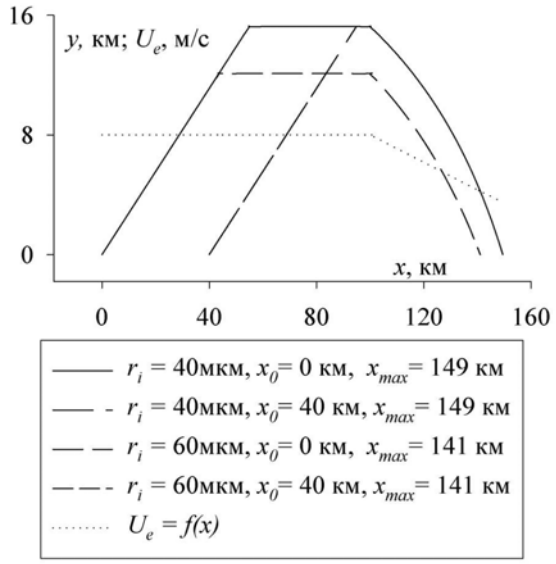


Рис. 5: Структура почво-воздушного потока над Суданом

9. Обсуждение результатов

Проверка уравнения выдувания на материалах измерения реальных почво-воздушных потоков в полевых условиях подтвердила его адекватность (рис. 1). Значения аргументов уравнения выдувания, полученные из опытов, могут быть использованы в модели, если опытный участок или почвенный образец, для которого они получены, во-первых, представителен по отношению к моделируемой поверхности, во-вторых, пренебрежимо мал по сравнению с ней [4]. В нашем случае площадь опытного поля (порядка сотен метров) пренебрежимо мала в сравнении с масштабами моделируемого явления (порядка сотен километров), поэтому параметры уравнения выдувания, полученные для почвы опытного поля, могут быть использованы при моделировании. Близость численных значений постоянной выдувания, полученных в поле и в лаборатории, указывает на возможность использования лабораторных данных в качестве первого приближения при моделировании ветровой эрозии почв. Существенное различие в величинах критического значения параметра массообмена, полученных в поле и в лаборатории, вполне объяснимое в рамках разрабатываемой теории явлениями абразии, для развития которых необходима достаточная длина эродируемого участка, указывает на необходимость дальнейших опытов с целью нахождения величин $B_к$, присущих почвам разного генезиса, необходимых при глобальном моделировании. В то же время при локальном моделировании, на небольших, соизмеримых с отдельными полями севооборота, участках, в качестве первого приближения, не учитывающего динамику аргументов уравнений, можно использовать величины критического значения параметра массообмена, полученные в лаборатории [5].

Уравнение выдувания дает потоку почвенных частиц, направленному со стороны почвы в атмосферу, количественную характеристику, а уравнения траектории позволяют разделить его на составляющие, в соответствии с механизмом движения почвенных частиц; проследить пути их движения и места выпадения из потока с образованием наносных почв и охарактеризовать нанос количественно. Полученные решения, описывающие все стадии явления ветровой эрозии почв и вскрывающие структуру почво-воздушного потока, отражены на схеме (рис. 5).

Установлено, что поток обладает сложной структурой, а распределение в нем частиц почвы подчиняется определенным закономерностям, которые в значительной степени определяются свойствами самой почвы. По истечении достаточного времени частицы, поднятые ветром с эродируемой поверхности, неограниченно приближаются к предельным для себя высотам, формируя закономерно чередующиеся слои скопления частиц одного размера. В математическом плане это означает, что в этих слоях концентрация частиц почвы должна вырасти бесконечно, что приведет к нарушению в них основного условия применимости теории, малости концентрации почвенной фазы в почво-воздушном потоке, хотя в остальном потоке, на участках подъема почвенных частиц, оно продолжает выполняться. Условие применимости теории сохраняется, если рассматривать каждый такой слой лишь в качестве предела, к которому частицы асимптотически приближаются, но никогда его не достигают. В действительности масштабы реальных потоков столь велики, что в них условие малости концентрации твердой фазы в потоке не нарушается по чисто физическим причинам.

Совпадение результатов моделирования конкретного крупномасштабного явления ветровой эрозии почв (рис. 5) с качественной картиной явления, зафиксированной на фотографии из космоса (рис. 3), подтверждает правильность разработанной теории, которая адекватно описывает отрыв, подъем, перенос и отложение почвенных частиц воздушным потоком. Необходимость получения прозрачного, понятного решения, привела к тому, что для участка транспорта частиц и выпадения их в осадок получено одно уравнение (10), а для участка подъема – другое (9). Для переходного участка решение получено методом асимптотического сращивания, что обеспечило неразрывность траекторий и возможность применения к ним уравнения сохранения массы. Решение, полученное в форме уравнения (11), обеспечивает возможность количественного анализа и структуры почво-воздушного потока и баланса ветровой эрозии почвы, основанного на количественной оценке, во-первых, потерь почвы с эродируемого участка земной поверхности и, во-вторых, аккумуляции почвы на участке, на который замыкаются нисходящие ветви траекторий почвенных частиц, выпадающих из потока. Основная причина выпадения частиц из потока – снижение скорости потока до величины, уступающей второй критической для частиц данного размера.

При численном моделировании допускали некоторое упрощение, состоявшее в том, что практически вместо асимптотического сращивания траекторий использовали простое пересечение восходящей траектории согласно уравнению (10) с уровнем предельного подъема в стратифицированной атмосфере согласно (6). Данное упрощение, которое является причиной сравнительно резкого изгиба траектории (рис. 5) в

точке x_m, не отражается на главном, на балансе ветровой эрозии. Искажение под его влиянием зависимости движения частиц почвы от времени, является пренебрежимо малым, учитывая глобальный масштаб моделируемого явления. Погрешность, вносимая им в описание структуры почво-воздушного потока, искажает картину лишь в ограниченном пространстве, на участке асимптотического приближения к предельной высоте переноса, что практически не сказывается на результатах моделирования.

Способность воздушного потока сепарировать почвенные частицы известна давно [9, 13]. В данном случае она получила математическое обоснование. Выявлена удивительная способность ветра к накоплению в ограниченной области пространства однородных частиц почвы, собранных с огромной территории. Действительно, согласно полученным решениям, частицы $i-$того сорта, собранные потоком на участке x_0x_1, поднимаются вверх, устремляясь к предельной высоте полета, y_{mi}, переносятся вблизи этой высоты, а затем, по мере снижения скорости потока, выпадают в одной точке, $x_{\text{макс.}}y_0$, расположенной на пересечении $i-$той линии траектории с земной поверхностью (рис. 5). Участок их накопления на поверхности в математическом плане представляет собой точку в сравнении с областью поступления в поток (пылесборной площадью).

Полученные результаты являются ключем к понимаю причин и механизмов: пыльных бурь на Земле и других планетах солнечной системы, появления пятен вторичного загрязнения радионуклидами, происхождения и строения наносных почв, формирования древних осадочных отложений и механизмов перераспределения и накопления частиц полезных минералов в эоловых условиях.

10. Заключение

Задача математического описания глобального явления ветровой эрозии почв решена комплексно. Дано математическое обоснование существующим качественным представлениям о механизмах отрыва, подъема, переноса и отложения почвенных частиц воздушным потоком. Созданная математическая модель ветровой эрозии почв позволяет прогнозировать количество и размер частиц, отрываемых потоком, высоту, скорость и время их подъема и переноса ветром, количество и место выпадения частиц из потока (при наличии поля скоростей). Это позволяет использовать ее для целей: изучения происхождения почв и горных пород; оценки путей переноса ветром и мест накопления загрязняющих, болезнетворных и радиоактивных веществ; контроля (в сочетании с оперативной съемкой с орбиты) за переносом и отложением пыли; исследования закономерностей проявления пыльных бурь на планетах солнечной системы.

Литература

[1] *Гендугов В. М., Кузнецов М. С.* Новый подход к оценке эродирующего действия потока на почву. — Вестник Моск. Ун-та, 1997, Сер. 17, Почвоведение,

№ 3.

[2] *Глазунов Г. П., Гендугов В. М.* О выдувании почв. — Вестник Моск. Ун-та, 1997, Сер. 17, Почвоведение, № 3.

[3] *Глазунов Г. П., Гендугов В. М.* О подъемной силе ветра, переносящего почвенные частицы. — Вестн. Моск. ун-та, Сер. 17, Почвоведение, 2000, № 3.

[4] *Глазунов Г. П., Гендугов В. М.* Механизмы ветровой эрозии почв. — Почвоведение, 2001, № 6.

[5] *Глазунов Г. П.* К теории потерь почвы от ветровой эрозии. — Почвоведение, 2001, № 12.

[6] *Дубов А. С., Быкова Л. П., Марунич С. В.* Турбулентность в растительном покрове. — М.: Гидрометеоиздат, 1978.

[7] *Жуковский Н. Е.* О снежных заносах и заилении рек. — Москва: Н.Опытно К. З.-мелиоративная часть, Вып. 30, 1923.

[8] Космическое землеведение: диалог природы и общества. Устойчивое развитие. Под ред. акад. РАН Садовничего В. А. — М.: Изд-во Моск. Ун-та, 2000.

[9] *Наливкин Д. В.* Ураганы, бури и смерчи. — Л.: «Наука», 1970.

[10] *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. — М., 1978.

[11] *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. — М.-Л.: «Наука», 1972.

[12] *Хргиан А. Х.* Физика атмосферы. — Л.: Гидрометеоиздат, 1969.

[13] *Якубов Т. Ф.* Некоторые закономерности развития процессов ветровой эрозии почв. — Известия АН СССР, Сер. географическая, 1962, № 2.

[14] *Andreae M. O.* Climate effects of changing atmospheric aerosol levels. — World Survey of Climatology, Future Climates of the World, V. 16, Amsterdam Elsevier, 1995.

[15] *Marticorena G., Bergametti G., Aumont B., Callot Y., Daume C. N., Legrand M.* Modeling the Atmospheric Dust Cycle: 2. Simulation of Saharian dust sources. — J. Geoph. Res, 1997, V.102, No D4, 4387-4404.

[16] *Marticorena G., Bergametti G.* Modeling the Atmospheric Dust Cycle: 1. Design of a Soil Derived Dust Emission Scheme. — J. Geoph. Res, 1995, V.100, No D8, 16415-16430.

[17] *Sterk G., Stein A.* Mapping Wind-Blown Mass Transport by Modeling Variability in Space and Time. — Soil Sci. Soc. Am. J., 1997.

[18] *Sterk G., Jacobs A. F.G., Boxel Van J. H.* The Effect of Turbulent Flow Structures on Saltation Sand Transport in the Atmospheric Boundary Layer. — Earth Surf. Process.Landforms. 1998.

Экспериментальное изучение процесса отражения гибкой растяжимой нити от поверхностей различной формы

Колпаков В. П., Козлов В. П.

1. Введение

Изучение процесса движения тонкой, гибкой, растяжимой нити представляет определенный интерес как в теоретических исследованиях, так и в прикладных задачах, требующих проведения экспериментов. Особо следует отметить работы, рассматривающие взаимодействие тонкой растяжимой нити с различного рода препятствиями [1, 2]. В этих случаях, кроме перемещения элементов нити как «целого», возникает движение, обусловленное наличием продольных и поперечных волн. Работы [1, 2] посвящены изучению поведения растяжимой нити при ударе по ней заостренными и затупленными телами. В этих работах разработаны модели, описывающие деформационные процессы в нити для областей прилегания к телам типа «конус», «цилиндр». В работе [3] приводится теоретическая модель движения нити при столкновении о жестко-фиксированное препятствие.

Данная работа посвящена экспериментальному исследованию процессов движения тонкой растяжимой нити в двухмерном случае до и после ее взаимодействия с препятствиями различной формы. Вид препятствий изображен на рис. 1.

2. Экспериментальная часть

В экспериментах, в качестве тонкой растяжимой нити, используется резиновый шнур толщиной 5 мм. Исследуемая рабочая длина шнура составляла 1 метр. Начальное состояние нити для препятствия в случае г) схематично изображено на рис. 2 в масштабе М=5.

В ненагруженном состоянии длина нити равняется расстоянию между точками закрепления A и B. Участки нити, каждый по 5 см, фиксируются черным и белым цветом. Начальные деформации в момент времени $t = 0$ обеспечиваются посредством растягивания и закрепления нити в т. C, при этом длины $|AC| = |CB|$, рис. 2. После освобождения нити в т. C наблюдается ее движение в плоскости XoY. Взаимодействие с препятствием происходит, когда фронт поперечной волны доходит до точек закрепления A и B. Перемещения элементов нити, обусловленные наличием продольных и поперечных волн не рассматриваются. Во время движения нити с момента $t = 0$ и до некоторого момента T, соответствующего двухкратному ее отражению от препятствия, производится киносъемка. В опытах использовалась скоростная кинокамера со скоростью экспозиции равной 12-ть кадров за 0.065 сек. Такая скорость съемки позволила достаточно точно отразить картину движения, взаимодействия (вплоть до полного прилегания) и отражения нити от препятствия.

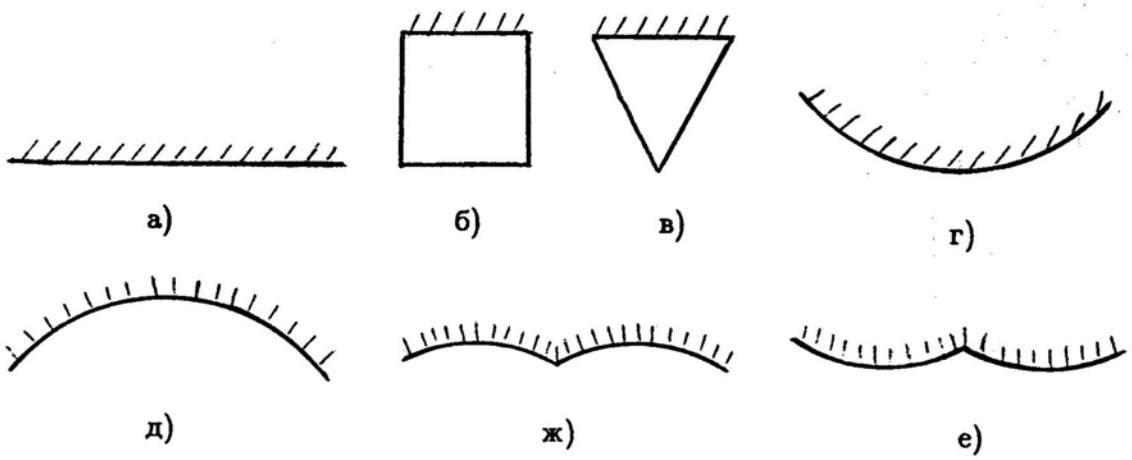


Рис. 1: Вид препятствий, исследуемых в экспериментах

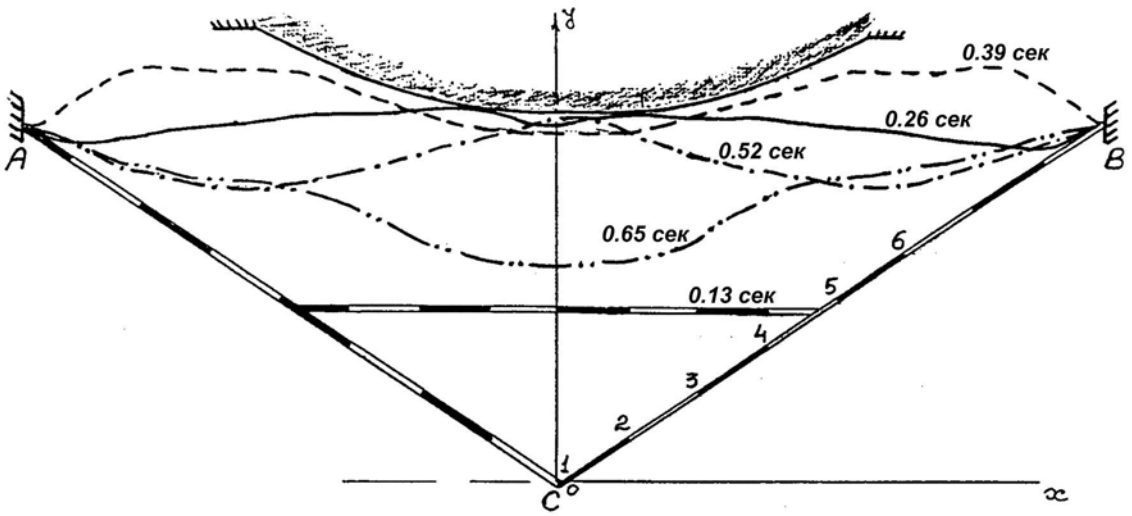


Рис. 2: Положение нити в плоскости x_0y для различных моментов времени

3. Обработка результатов экспериментов

После проявления кинопленок производилась по-кадровая их обработка. Изменения координат фиксированных элементов нити по времени наносились на миллиметровую бумагу. Было установлено, что при движении и отражении нити от препятствия наблюдается отклонение от ее симметричного положения относительно оси OY, обусловленного геометрическими и механическими неточностями при организации эксперимента. Особенно асимметрия движения хорошо видна после взаимодействия нити с препятствиями более сложной геометрической формы, например вид е) и ж), рис. 1. Однако, ошибка, вычисленная при обработке данных эксперимента, оказалась допустимой и составляла не более 5%. Далее предполагалось, что движение нити симметрично относительно оси OY, и рассмотрению подлежала область изменения координат x и y, соответствующая первому октанту плоскости XoY. На рис. 2 показаны также фрагменты движения нити до и после ее отражения от препятствия, изображенные в масштабе М, 1:5 для случая г), рис. 1. Изучалось движение шести точек - границ черно-белых делений, начиная от точки C и отмеченных на рис. 2. Выбранное количество и последовательность точек позволило довольно точно исследовать картину взаимодействия и отражения нити.

4. Анализ экспериментальных данных

В результате расшифровки данных с кинопленок удалось определить траектории движения $x(t)$ и $y(t)$ и соответствующих им составляющие скоростей $v_x(t)$ и $v_y(t)$, рассматриваемых точек нити. Максимальное время процесса для случая ж), рис. 1, составляло 0.5 сек. и соответствовало тому моменту, когда в результате первого отражения нить приобретала форму, похожую ни вид препятствия. Характерные графики зависимостей $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$ и $v_y(t)$ для случая ж), рис. 1, представлены на рис. 3 и рис. 4. Все указанные величины даны в размерном виде.

На рис. 3 видно, что зависимости $x(t)$ для всех точек носит нелинейный характер с ярко выраженными минимальными и максимальными значениями. Исключение составляет точка 1, которая в момент взаимодействия с преградой находится на оси симметрии $x = 0$. Несимметрию движения нити по причинам, указанным выше, можно наблюдать по траектории движения точки 1, когда после отражения при $t \approx 0.35$ сек. ее положение отклоняется от значения $x \simeq 0$. Область максимальных значений y_{max} также имеет место и в зависимостях $y(t)$ для $t \approx 0.3$ сек., когда точки взаимодействуют с препятствием. Характерно, что эти y_{max} достигаются в точках минимума для $x(t)$.

Зависимости составляющих $v_x(t)$ и $v_y(t)$ от времени показаны на рис. 4.
По характеру изменение составляющих скоростей похоже на соответствующие траектории движения точек. Для $v_x(t)$ минимальные и максимальные значения наблюдаются в моменты времени, когда достигаются x_{min} и x_{max}. Значения y_{max} и $v_{y\,max}$ для точки 3 несколько больше этих значений для других точек делений нити, что обусловлено наличием вогнутости препятствия. Исключение составляет точка 6 из-за

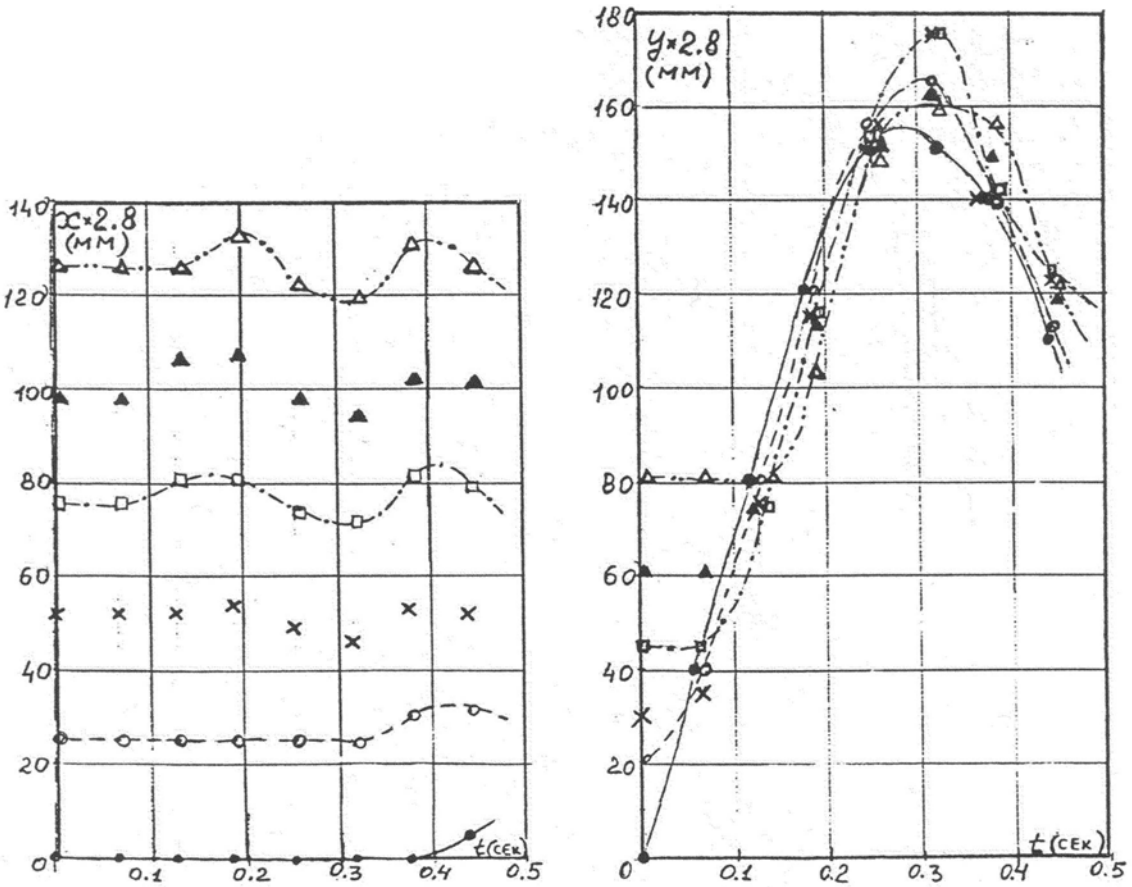

x×2.8
(мм)
140
120
100
80
60
40
20
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
t(сек)
y×2.8
(мм)
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
t(сек)

Рис. 3.

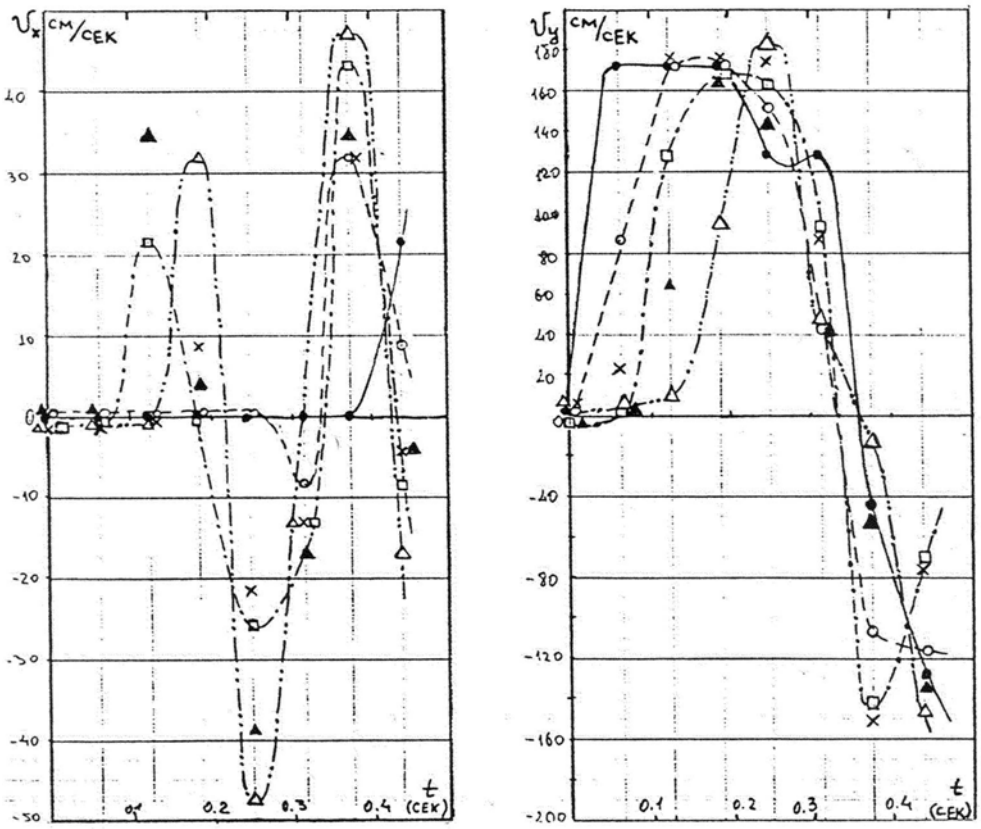

v_x см/сек
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
0.2
0.3
0.4
t (сек)
v_y см/сек
180
160
140
120
100
80
60
40
20
-40
-80
-120
-160
-200
0.1
0.2
0.3
0.4
t (сек)

Рис. 4.

того, что она находится вне зоны взаимодействия нити с преградой.

Отметим, что проведение выше рассмотренных экспериментов и обработка полученных многочисленных результатов является весьма трудоемкой задачей. Однако, полученный экспериментальный материал может быть полезен при разработке моделей движения тонкой растяжимой нити до и после ее взаимодействия с препятствиями.

Литература

[1] *Рахматулин Х. А.* Поперечный удар по гибкой нити заданной формы. — ПММ, 1952, т. 16, вып. 2.

[2] *Ленский Э. В.* Удар клином по гибкой нити. — Механика твердого тела, 1968, № 2.

[3] *Cabannes H.* Motion of a string vibrating against a rigid fixed obstacle. — Mathematical modelling, 1987, v. 8.

Стационарные и нестационарные аэродинамические характеристики оперенных тел

Мосин А. Ф., Павлова Е. С., Фалунин М. П.

При решении практических задач проектирования образцов авиационной и космической техники необходимо знание аэродинамических нагрузок, действующих на тела при различных режимах обтекания. Получение экспериментальных данных о характере обтекания и результирующих аэродинамических силах и моментах, в особенности при больших углах атаки, представляет большой научный и практических интерес [1, 2]. При этом важно получить аэродинамические характеристики, обеспечивающие статическую и динамическую устойчивость летательных аппаратов. Для этого в ряде экспериментальных и численных исследованиях рассматриваются вопросы об эффективности использования оперения и различных донных стабилизаторов [3, 4, 5].

В работе представлены результаты экспериментального исследования аэродинамических характеристик (АДХ) модели цилиндрического тела с конической головной частью при наличии несущих поверхностей в виде решетчатых стабилизаторов при до- и сверхзвуковых скоростях обтекания в широком диапазоне изменения углов атаки (от 0° до 145°). Оценено влияние статических АДХ на величину коэффициента аэродинамического демпфирования колебания тела по углу атаки на траектории полета.

Исследование выполнено в аэродинамической трубе А-8 НИИ механики МГУ [6], имеющей сечение рабочей части $0,6 \times 0,6$ м^2, длину 1,9 м, обеспечивающей получение сверхзвукового потока воздуха в диапазоне чисел Маха 1,5 – 3,0 и дозвукового потока в диапазоне чисел Маха 0,2 – 0,8. При этом скоростной напор потока изменялся в пределах 2400 – 8600 кг/м^2, а числа Рейнольдса в пределах $5 \cdot 10^6 - 5 \cdot 10^7$ 1/м.

1. Испытывалась модель, форма и общий вид которой представлен на фотографиях, рис. 1.

Корпус модели состоял из цилиндра диаметром 40 мм и удлинением 3 с головной частью в виде усеченного конуса с углом наклона к оси модели 20° и радиусом затупления 7 мм. К донной части корпуса на расстоянии одного диаметра крепился стабилизатор с четырьмя крестообразно расположенными решетчатыми крыльями с размахом 70 мм и углом наклона 22° к сечению корпуса. Стабилизатор соосно соединялся с корпусом цилиндром диаметра 15 мм. Общая длина модели равнялась 200 мм, а ее центровка, то есть отношение расстояния центра тяжести $x_{\text{цт}}$ от передней точки головной части к длине модели равна 0,56.

Модель крепилась в аэродинамической трубе с помощью донной державки в альфа-механизме четырехкомпонентных аэромеханических рейтерных весов и устанавливалась на заданный угол атаки α. В процессе эксперимента теневым методом фотографировалась картина обтекания модели и одновременно с помощью весов

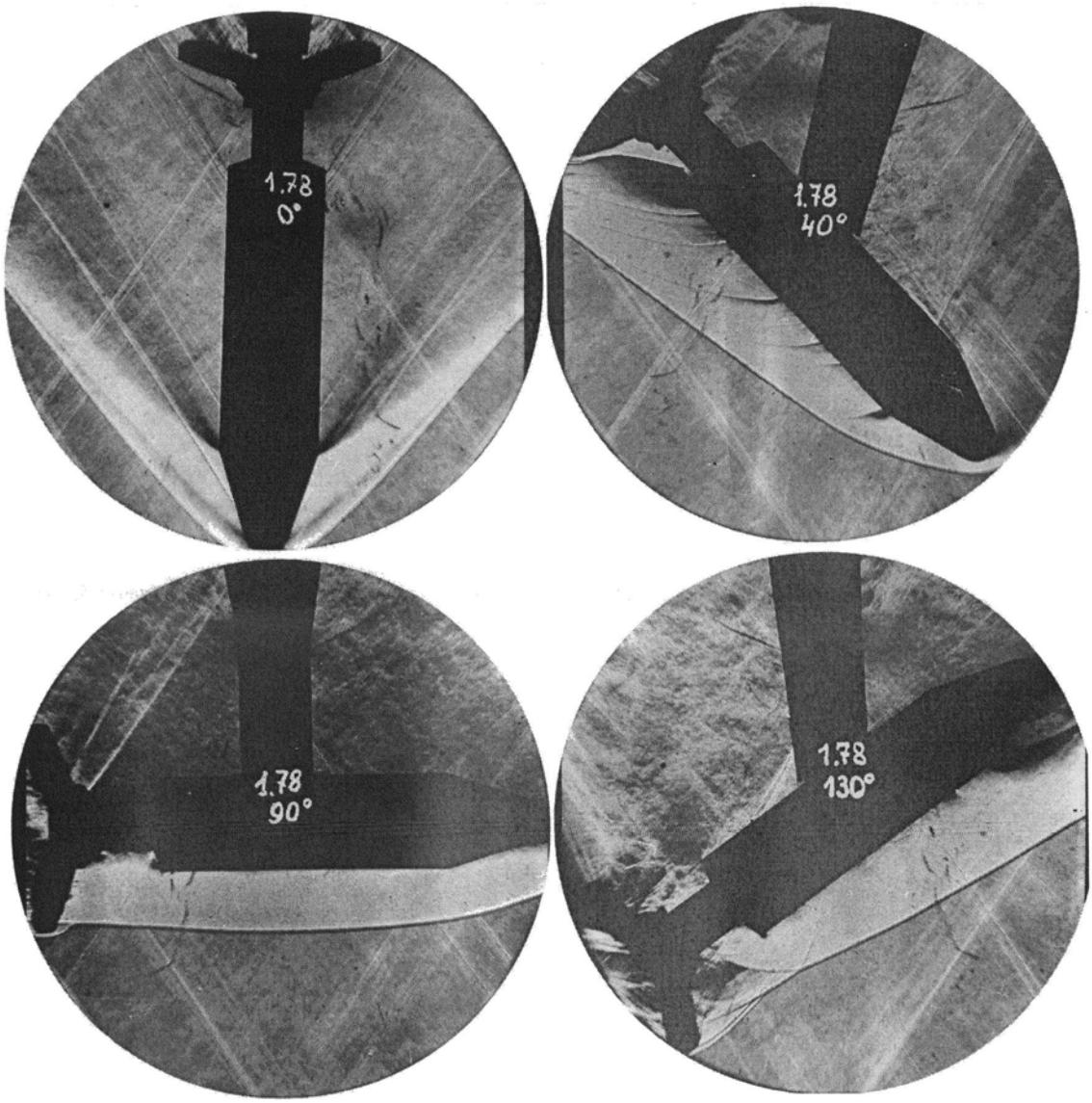


Рис. 1.

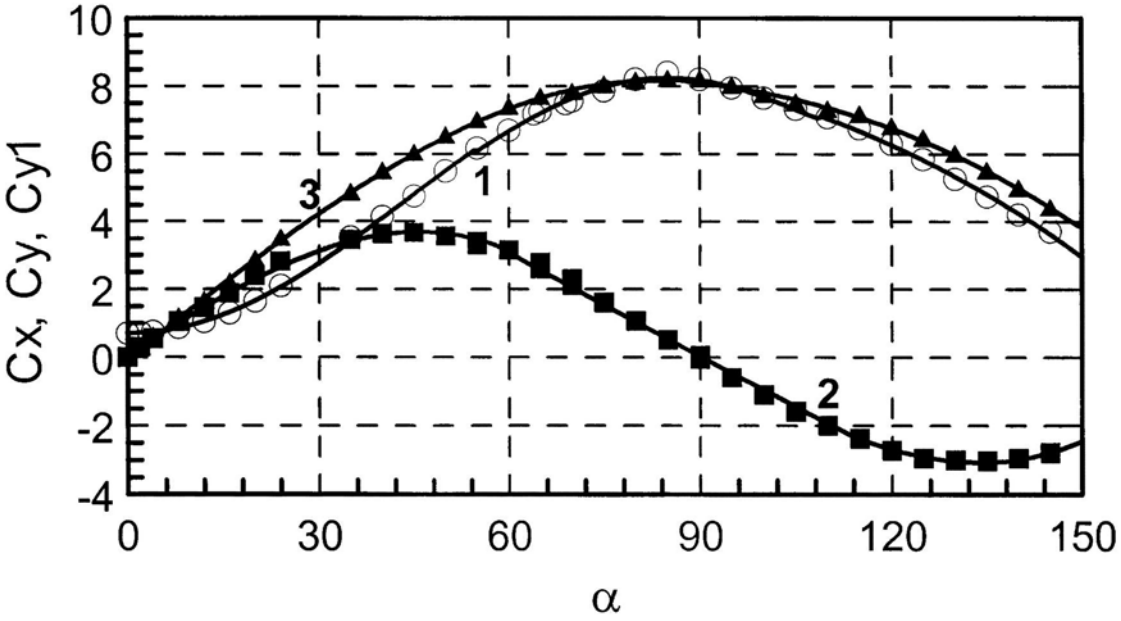


Рис. 2: Сверхзвуковое обтекание ($M = 1,78$), линия 1 – C_x , 2 – C_y , 3 – C_{y1}

регистрировались интегральные силовые и моментные аэродинамические нагрузки. Угол атаки α изменялся от 0° до 145° с шагом 2, 4 или 5 градусов.

Примеры некоторых фотоснимков представлены на рис. 1. При $\alpha \approx 0° - 40°$ в ударном слое всюду, кроме малой окрестности у носа модели, течение сверхзвуковое. При увеличении угла атаки до 50° сверхзвуковая область смещается к донному торцу, где наблюдается течение типа Прандля-Майера. Начиная, примерно, с $\alpha = 70°$ и до $\alpha = 130°$ поток в ударном слое на наветренной стороне дозвуковой, отрывные зоны на подветренной стороне постепенно увеличиваются. Получены функциональные зависимости от угла атаки α стационарных аэродинамических характеристик C_x, C_y, C_{y1}, m_z, X_d, где C_x, C_y, C_{y1} – коэффициенты сил сопротивления, подъемной и нормальной соответственно, m_z – коэффициент момента тангажа (в плоскости угла атаки) относительно центра тяжести модели, X_d – координата центра давления (аэродинамические силы отнесены к произведению скоростного напора на площадь сечения корпуса модели, момент тангажа отнесен еще к длине модели, к которой отнесена также координата X_d). Аэродинамические характеристики $C_x(\alpha)$, $C_y(\alpha)$, $C_{y1}(\alpha)$, $m_z(\alpha)$ и $X_d(\alpha)$ при дозвуковом ($M = 0,63$) и сверхзвуковом ($M = 1,78$) обтекании изображены на рис. 2, рис. 3, рис. 4.

Рассмотрим некоторые особенности перечисленных характеристик рис. 2, при числе Маха $M = 1,78$. Функция $C_x(\alpha)$ (линия 1) монотонно возрастает от величины $C_x(0) \approx 0,07$ при $\alpha = 0°$ до $C_{x\ max} = 8,2$ при $\alpha = 85°$, при этом в интервале угла атаки $\alpha \approx 20° - 70°$ значение производной C_x^a практически остается постоянным. При $\alpha > 90°$ $C_x(\alpha)$ монотонно убывает до 3,7 при $\alpha = 145°$. Функция $C_x(\alpha)$ является

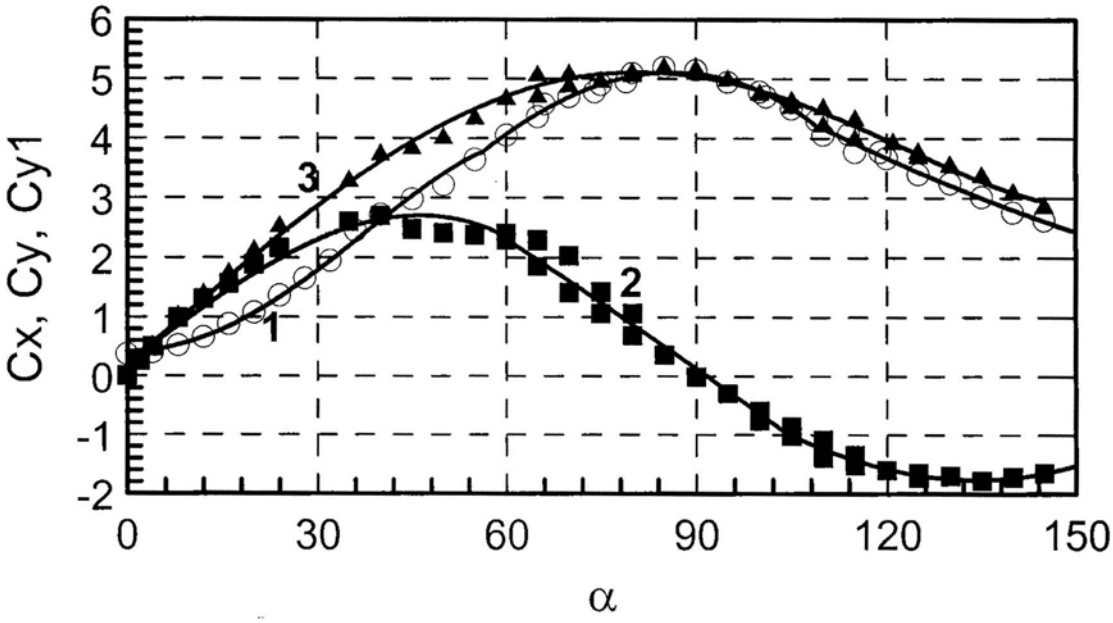


Рис. 3: Дозвуковое обтекание ($M = 0,63$), линия 1 – C_x , 2 – C_y , 3 – C_{y1}

почти симметричной фигурой, относительно вертикальной прямой, $\alpha \approx 85° - 90°$. Тенденцию смещения $C_x(\alpha)_{max}$ к $\alpha = 85°$ можно объяснить несимметричностью носовой и донной частей модели. Точность определения величины C_x , при $M > 1$ составляет 3-5%, при $M < 1$ — 4-12%.

Функция $C_y(\alpha)$ (линия 2) при $\alpha = 0° - 145°$ знакопеременная в силу осесимметричности модели, $C_y(\alpha) = 0$ при $\alpha = 0°$, 90°, 180°. Значение $C_{y\ max} = 3,52$ соответствует углу атаки $\alpha = 45°$, а $C_{y\ min} \approx -3,01$ — углу $\alpha = 135°$.

Коэффициент нормальной силы $C_{y1} = C_x sin\ \alpha + C_y cos\ \alpha$ (линия 3), с увеличением а монотонно увеличивается и при $\alpha = 90°$ достигает максимального значения $C_{y1\ max} = 8,2$, то есть $C_{y1\ max} = C_{x\ max}$.

Зависимость $X_d(\alpha)$ изображена (линия 3) на рис. 4 должна сравниваться с величиной $X_{\text{цт}} = 0,56$, что характеризует степень статической устойчивости. В нашем случае при $\alpha = 0° - 35°$ $\Delta X_d = X_d - X_{\text{цт}} \geq 0,08$, а при $\alpha < 10°$ эта величина может превысить 0,15. При больших углах атаки $\alpha > 120°$ $X_d \geq 0,08$, а при $\alpha = 145°$ достигает 0,18. Это интервалы углов атаки, при которых испытуемая модель имеет хороший запас статической устойчивости. В диапазоне углов $35° < \alpha < 120°$ картина существенно меняется: по краям этого диапазона $\Delta X_d = 0,04 - 0,06$, а в средней части ($70° < \alpha < 110°$) $\Delta X_d = 0,01 - 0,02$, то есть запас статической устойчивости мал.

Важная функция $m_{z\ \text{цт}}(\alpha)$ (рис. 4, линия 1), отражающая устойчивость модели, имеет немонотонный характер. С увеличением угла атаки до $\approx 35°$ величина $|m_{z\ \text{цт}}|$ возрастает и достигает значения 0,46, затем производная $m^{\alpha}_{z\ \text{цт}}$ меняет знак, восстанавливающий момент модели уменьшается. В интервале $\alpha = 80° - 100°$ —

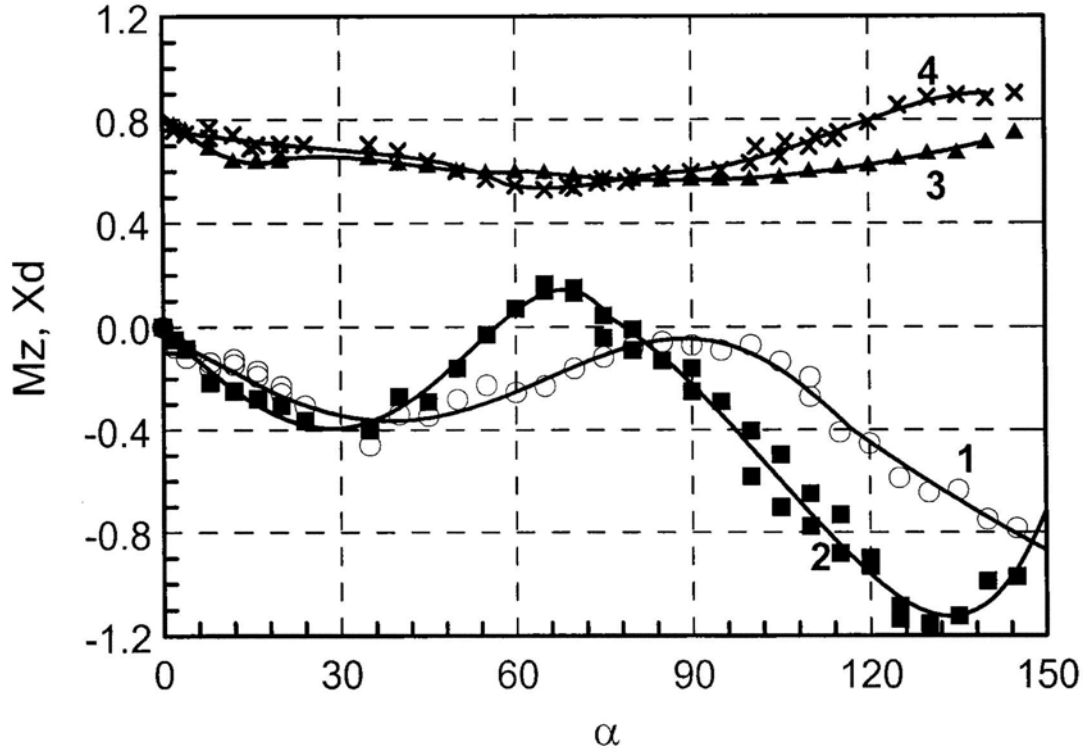


Рис. 4: Характеристики статической устойчивости при сверхзвуковом и дозвуковом обтекании, линия 1 – m_z $M = 1,78$, 2 – m_z $M = 0,63$, 3 – X_d $M = 1,78$, 4 – X_d $M = 0,63$

$|m_{z\ \text{цт}}| \approx 0,06$, эффективность стабилизатора минимальна. При $\alpha = 110° - 145°$ — $|m_{z\ \text{цт}}|$ вновь возрастает, что обеспечивает устойчивость модели.

Сравнивая данные на рис. 2, рис. 3 и рис. 4, видим, что аэродинамическое характеристики дозвукового и сверхзвукового обтекания модели во многом аналогичны: симметричное расположение графика $C_x(\alpha)$ вблизи $C_{x\ max}$ при $\alpha \approx 90°$, такое же свойство функции $C_y(\alpha)$ вблизи $C_{y\ max}$ при $\alpha = 45°$ и вблизи $C_{y\ min}$ при $\alpha = 135°$, большой запас статической устойчивости при малых углах атаки $\alpha \leq 10°$ и при больших углах атаки $\alpha \geq 120°$; немонотонность функций $m_{z\ \text{цт}}$ с двумя минимальными значениями и одним максимальным. Количественные различия можно охарактеризовать тем, что отношения абсолютных значений силовых функций C_x, C_y, C_{y1} при $\alpha = 0°$, в точках максимума, минимума и для $\alpha = 145°$ при $M > 1$ превышают аналогичные величины при $M < 1$ по абсолютной величине в $1,5 - 1,75$ раза.

Вместе с тем различия свойств взаимодействия с телом сверхзвукового и дозвукового потоков приводят к ряду качественных отличий по моментной характеристике $m_{z\ \text{цт}}(\alpha)$: если при $M > 1$ модель имеет один балансировочный угол в точке $\alpha = 0°$, $m_{z\ \text{цт}} < 0$ во всем диапазоне $\alpha = 0° - 145°$, то при $M < 1$ – три балансировочных угла (при $\alpha = 0°$; $57°$ и $78°$), при переходе через которые функция $m_{z\ \text{цт}}(\alpha)$ меняет знак, поэтому в диапазоне углов атаки $57° < \alpha < 78°$ модель неустойчива, рис. 4, линия 2.

Подводя итоги анализа данных по первой части исследования, касающегося стационарных аэродинамических характеристик и их зависимости от двух параметров (M и α) в широком диапазоне изменения, можно сформулировать следующее заключение: чтобы модель с хвостовым стабилизатором типа исследованной была статически устойчива во всем диапазоне углов атаки от $\alpha = 0°$ до $\alpha = 180°$ и диапазонах чисел Маха $[0 < M \leq 0,8]$, $[1,5 \leq M \leq 3,0]$ необходимо или усилить тормозные свойства стабилизатора (увеличить размах и площадь решеток) или менять центровку модели, смещая центр тяжести вперед к носу.

2. Для получения данных о нестационарных аэродинамических характеристиках тел использовался экспериментальный метод свободных колебаний, при котором модель закрепляется в аэродинамической трубе на поперечной оси, проходящей через заданный центр масс, и, таким образом, имеет одну степень свободы в плоскости угла атаки α, рис. 5.

Так же как и m_z^α, производная m_z^ω может существенно зависеть от угла балансировки модели в потоке, поэтому в экспериментах изменяли угол балансировки $\alpha = \alpha_0$ модели, управляя размещением дополнительных противовесов и упругих элементов.

Схема проведения испытаний была следующей. Модель в маятниковом подвесе устанавливается неподвижно под заданным начальным углом атаки $\alpha = \alpha_1$ с помощью механического фиксатора. При достижении заданных параметров потока в рабочей части трубы срабатывает электромеханический расчековщик и модель получает одну степень свободы в плоскости угла атаки. Процесс угловых колебаний модели регистрируется в памяти ЭВМ в виде цифрового файла, на рис. 6 дан пример соответствующей осциллограммы.

При анализе осциллограмм затухающего процесса колебаний модели осуществ-

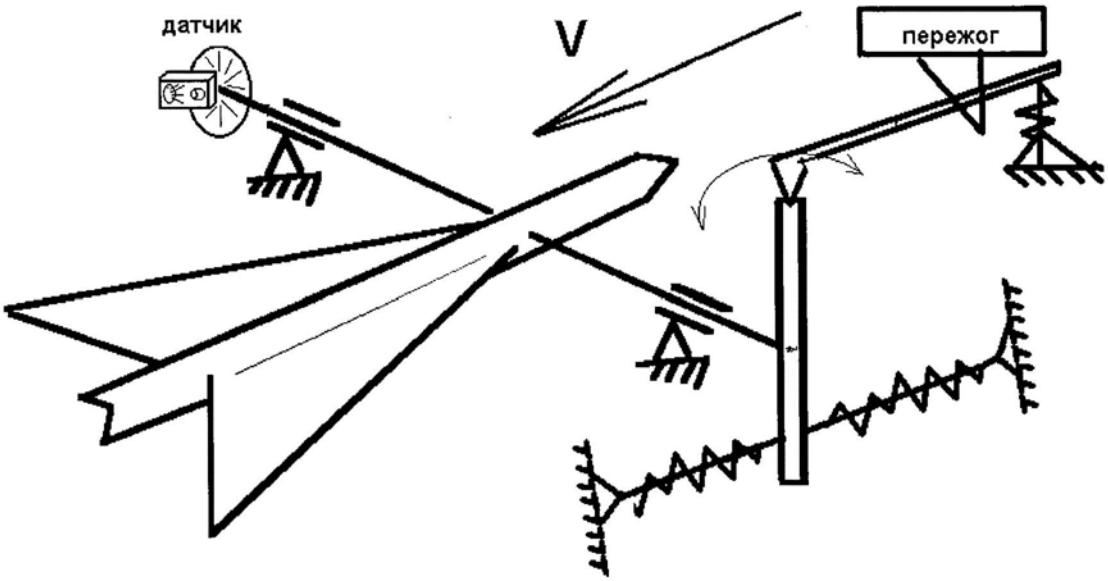


Рис. 5.

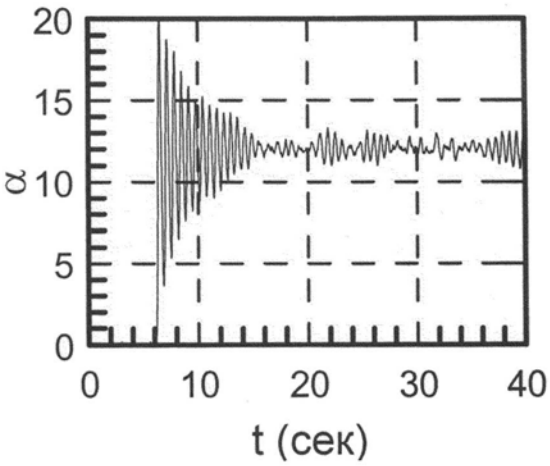


Рис. 6.

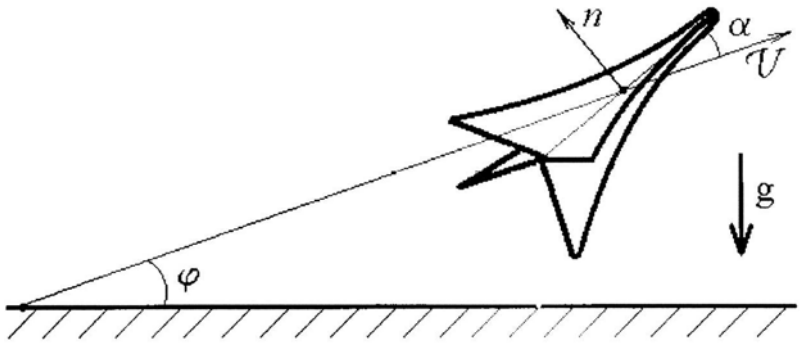


Рис. 7.

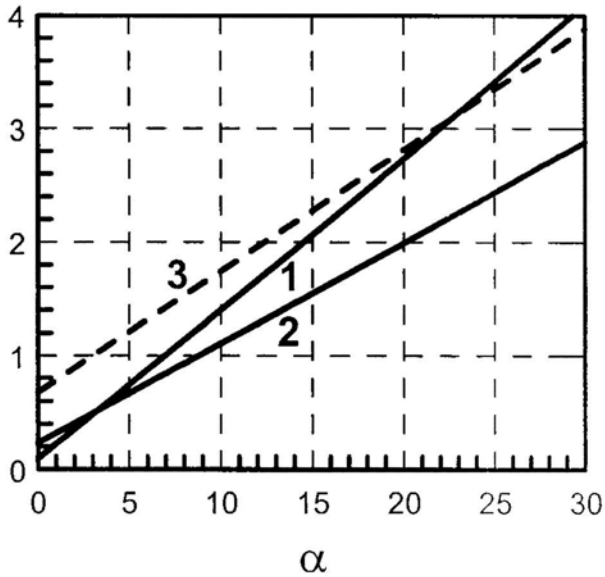


Рис. 8: Линия 1 – $C_n^\alpha \quad M = 1,78$, 2 – $C_n^\alpha \quad M = 0,63$, 3 – $m_z^\omega \quad M = 0,63$

лялось отфильтровывание паразитного вклада сухого трения в оси подвеса маятника [7]. В итоге были определены вращательные производные $m_z^\omega(\alpha_0)$ при различных углах балансировки $|\alpha_0| < 20°$.

Вместе с тем следует иметь в виду, что вращательные производные это не единственный механизм демпфирования колебаний тела по углу атаки на траектории полета. В случае оперенных тел, обладающих высокими несущими свойствами, вращательные производные могут оказаться вообще не главной причиной аэродинамического демпфирования поперечных колебаний тела в полете [8].

Подставляя в уравнения движения тела (в плоскости, параллельной вектору ускорения земного притяжения, см. рис. 7)

$$\dot{\upsilon} = -F_n \ sin \ \alpha/m - F_\tau \ cos \ \alpha/m - g \ sin \ \varphi,$$

$$\upsilon\dot{\varphi} = F_n \ cos \ \alpha/m - F_\tau \ sin \ \alpha/m - g \ cos \ \varphi,$$

$$\ddot{\alpha} + \ddot{\varphi} = m_z/J$$

модель сил

$$F_n = \frac{\rho S}{2}[C_n^\alpha + O(\alpha^3)] \cdot \upsilon^2,$$

$$F_\tau = \frac{\rho S}{2}[C_\tau(+a\alpha^2) + O(\alpha^4)] \cdot \upsilon^2,$$

$$M_z = \frac{\rho SL}{2}[m_z^\alpha \alpha + m_z^\omega \dot{\alpha}\frac{L}{\upsilon}] \cdot \upsilon^2, \qquad \omega = \frac{\dot{\alpha}L}{\upsilon}$$

для малых углов атаки, нетрудно обнаружить, что колебания тела около центра масс управляются квазилинейным уравнением вида:

$$\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}\frac{\rho S\upsilon}{2J/L^2}\left[-m_z^\omega + \frac{J}{mL^2}(C_n^\alpha - C_\tau)\right] = f(\alpha, \varphi, \upsilon).$$

Здесь F_n, F_τ – нормальная и продольная аэродинамические нагрузки на тело, m_z – поперечный момент, ω – безразмерная угловая скорость, L – характерный линейный размер.

Видно, что есть два механизма демпфирования. Первый, очевидный, — связан с вращательной производной m_z^ω, второй – возникает из-за наличия степени свободы у центра масс, его величина не зависит от m_z^ω, а главную роль в ней играет производная нормальной силы по углу атаки [8].

На рис. 8 изображены зависимости $C_n^\alpha - C_\tau$ при сверхзвуковом и дозвуковом обтекании (линии 1 и 2) и m_z^ω при дозвуковом обтекании (линия 3). Видно, что для тел данного класса существенными являются оба механизма демпфирования.

Литература

[1] *Петров К. П.* Аэродинамика ракет. — М.: Машиностроение, 1977.

[2] *Черный Г. Г.* Газовая динамика. — М.: Наука, 1988.

[3] *Любимов А. Н., Тюмнев Н. М., Хут Г. И.* Методы исследования течений газа и определения аэродинамических характеристик осесимметричных тел. — М.: Наука, 1995.

[4] *Миносцев В. Т., Розин А. В., Фалунин М. П.* Численное и экспериментальное исследование сверхзвукового обтекания осесимметричных оперенных тел. — Тез. Докл. 6-го Всесоюзного съезда по по теоретической и прикладной механике, Ташкент, 1986.

[5] *Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н., Данилов А. Н. и др.* Прикладная аэродинамика. — М.: Высшая школа, 1974.

[6] Аэродинамические установки Института механики Московского университета. Под ред. Черного Г. Г., Зубкова А. И., Панова. Ю.А. — М.: Изд-во МГУ, 1985.

[7] *Гувернюк С. В., Зубков А. Ф., Мосин А. Ф., Павлова Е. С.* Об идентификациии нестационарной составляющей момента аэродинамической нагрузки на тела с несущими поверхностями. Современные проблемы механики: Тезисы докладов Юбилейной научной конференции, посвященной 40-летию Института механики МГУ (22-26 ноября 1999 г.), под ред. Член-корр РАН Григоряна С. С. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.

[8] *Садовничий В. А., Окунев Ю.М* Модельные динамические системы одной задачи внешней баллистики и их аналитические решения. Проблемы современной механики. Под ред. Члена-корреспондента РАН Григоряна С. С. — М.: Изд-во Московского ун-та. 1998.

Проблемы моделирования горения твердых топлив в перспективных двигательных установках

Димитриенко И. Д., Димитриенко Ю. И.

1. Введение

Разработка каждого нового класса твердых топлив всегда инициирует своеобразный волновой процесс совершенствования техники в смежных областях: двигателестроении, ракетостроении, авиастроении и космической технике. В настоящее время одним из перспективных направлений разработки твердотопливных систем является синтез композиций, у которых энергетические характеристики приближаются к аналогичным характеристикам жидких топлив. Разработка такого класса топлив неизбежно приводит к необходимости пересмотра или как минимум изменения существующих моделей и методик расчета процессов горения топлив в составе перспективных двигательных установок. Причиной тому является выход за традиционные температурные пределы горения в 3300 - 3500 K и соответствующие показатели по давлению продуктов сгорания и скорости их истечения. Выход за эти пределы приводит к возникновению совершенно иных физико-химических и термомеханических эффектов, ответственных за протекание процессов горения. Назовем лишь некоторые эффекты. Это, прежде всего, перенос тепла излучением в продуктах сгорания, вклад которого становится значительно более существенным, а возможно даже решающим. Кроме того, это и частичная ионизация продуктов сгорания, и турбулентное течение в зоне протекания основных химических реакций. Кроме того, сам механизм воспламенения твердых топлив, который, несмотря на уже многолетнюю историю его исследования, остается до сих пор фактически «terra incognita», также требует разработки более совершенных моделей, учитывающих микроструктурные эффекты.

В настоящей работе предложена одна из возможных моделей процесса горения смесевых твердых топлив, учитывающая некоторые из вышеуказанных факторов.

2. Описание модели

Важнейшие элементы модели горения смесевых твердых топлив были предложены в работах [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Эта модель представляет собой развитие модели Зельдовича Я. Б. [7], согласно которой процесс горения твердых топлив состоит из двух этапов: этапа терморазложения горючего-связки и окислителя и этапа химической реакции продуктов терморазложения в газовой фазе.

Существенно новым элементом предлагаемой модели является учет механизма диспергирования смесевого топлива, которое вызывается двумя факторами: внутрипоровым давлением газообразных продуктов терморазложения горючего и окислителя внутри твердой фазы и внешним высокоскоростным потоком газа. Принци-

пиальная необходимость учета диспергирования топлив указывалась еще в ранних работах.

Таким образом, смесевое твердое топливо рассматривается как пористая 4-фазная система, состоящая из твердых частиц окислителя (фаза 1), твердого горючего-связки (фаза 2), металлизированного наполнителя, инертного в топливе (фаза 3) и пор, заполненных газообразными продуктами терморазложения горючего и окислителя (фаза 4).

Вследствие эффекта диспергирования, в приповерхностном слое топлива образуется так называемая темная или иначе пародымогазовая зона, в которой происходит смешение газообразного горючего и окислителя, а также происходит дальнейшее терморазложение твердых диспергированных частиц. Наконец, в светлой зоне происходит химическая реакция и диффузия продуктов горения из зоны воспламенения. Таким образом, темная и светлая зоны в данной модели рассматриваются как двухфазные многокомпонентные смеси с химическими реакциями и фазовыми превращениями.

Перенос излучения в процессе горения, согласно предлагаемой модели, учитывается в виде лучистого нагрева поверхности твердого топлива от светлой зоны продуктов сгорания. Интегральный коэффициент излучения газовой смеси зависит от температуры и давления в газовой фазе, а также от химического состава смеси.

Для простоты будем пока пренебрегать деформируемостью твердого топлива (эффекты взаимовлияния горения и деформируемости рассмотрены в работах [5, 6]).

3. Основные соотношения модели

Соотношения для твердого топлива. Процесс внутреннего тепломассопереноса в твердом топливе описывается следующей системой уравнений[1]:

$$\rho_i(\partial\varphi_i/\partial t) = -J_i, \quad i = 1, 2, 3; \tag{1}$$

$$(\partial\rho_4\varphi_4/\partial t) + \nabla\cdot\rho_4\varphi_4\mathbf{v} = J_4, \tag{2}$$

$$\rho c((\partial\theta/\partial t) + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta) = \nabla\cdot(\lambda\nabla\theta) - \sum_{i=1}^{3} J_i\Delta e_i^0, \tag{3}$$

где ρ_i - плотности фаз ($\rho_{1,2,3} = \mathrm{const}$, а ρ_4 - переменная), φ_i - их объемные доли, c_i - теплоемкости фаз, J_i - скорости массопереноса фаз, связанные соотношениями:

$$\rho_s = \sum_{i=1}^{4}\rho_i\varphi_i, \qquad \rho_s c_s = \sum_{i=1}^{4}\rho_i c_i\varphi_i, \quad J_4 = \sum_{i=1}^{2} J_i, \quad 1 = \sum_{i=1}^{4}\varphi_i, \tag{4}$$

где ρ_s, c_s и λ_s - плотность, теплоемкость и теплопроводность всего топлива, θ - температура, общая для всех фаз, и Δe_i^0 - теплоты терморазложения фаз.

Для J_i предполагаем справедливым закон Аррениуса:

$$J_i = J_i^0\varphi_i\exp\Big(-\frac{E_i M_i}{R\theta}\Big), \quad i = 1, 2, \quad J_3 = 0, \tag{5}$$

где E_i - энергия активации терморазложения, J_i^0 - предэкспоненциальный множитель, R - универсальная газовая постоянная, M_i - молярная масса фазы.

Для скорости движения газообразных продуктов терморазложения $\mathbf{v}$ в порах имеет место закон Дарси:

$$\mathbf{v} = -(K/\mu)\nabla p, \tag{6}$$

где K - коэффициент газопроницаемости топлива, зависящий от пористости $varphi_4$ [1], а μ - коэффициент вязкости газа, зависящий от температуры:

$$K = K_0 \exp(s\varphi_4^{1/3}), \qquad \mu = \mu_0 \exp(-E_\mu/R\theta). \tag{7}$$

Здесь K_0, s, μ_0, E_μ - константы, а p - поровое давление:

$$p = (R/M_4)\rho_4\theta. \tag{8}$$

Линейная скорость горения топлива. Согласно модели [1, 2, 3], линейная скорость горения D смесевого твердого топлива определяется процессом диспергирования, а также сублимацией и терморазложением горючего-связки, и может быть представлена как сумма следующих отдельных составляющих:

$$D = D_e + D_i + D_s, \tag{9}$$

где D_i – скорость диспергирования под действием внутрипорового давления, а D_e – под действием внешнего высокоскоростного потока продуктов сгорания. Вклад скорости сублимации и терморазложения горючего-связки D_s в реальных задачах, как правило, оказывается существенно меньше вклада D_e и D_i и может не учитываться. В работах [1, 2, 3, 4] было установлено, что скорость D_i зависит главным образом от температуры поверхности топлива θ_s, а D_e - от θ_s и скоростного напора p_w газового потока, обтекающего поверхность горения:

$$D_e(\theta_s, p_w) = \frac{1}{\rho_s}\left(\frac{J_2^0\lambda_s}{c_s}\right)^{1/2}\left(\frac{6p_w}{\sigma_T}\right)^{\omega_1}\left(\frac{R\theta_s}{M_2E_2}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{E_2M_2}{2R\theta_s}\right), \tag{10}$$

$$D_i(\theta_s) = \left(\frac{J_2^0\lambda_s}{c_s\rho_s}\right)^{\omega}\left(\frac{6\rho_s l_0\mu_s}{K_s\sigma_{Ts}}\right)^{2\omega-1}\left(\frac{R\theta_s}{M_2E_2}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{M_2E_2\omega}{R\theta_s}\right). \tag{11}$$

Здесь значения функций берутся для поверхности горения топлива с температурой θ_s и значениями долей фаз φ_{is}. Здесь также σ_{Ts} - механическая прочность топлива, а l_0 – характерный линейный размер пор, $\omega = 5/7$ и $\omega_1 = 3/2$ – числовые коэффициенты.

Давление p_w представляет собой скоростной напор газового потока, обтекающего поверхность горения: $p_w = \rho_w v_w^2$, $v_w = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{E} - \mathbf{n}\otimes\mathbf{n})$, где ρ_w – плотность газового потока, а v_w – касательная скорость потока на поверхности горения Σ с вектором нормали $\mathbf{n}$, $\mathbf{E}$ – метрический тензор.

Соотношения для продуктов горения. Система законов сохранения для двухфазной многокомпонентной газовой смеси одинакова для темной и светлой зон и состоит из следующих уравнений:

$$\rho_i\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \nabla\cdot\varphi_i\mathbf{v}_g\right) = J_i, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_g \mathbf{v}_g = \sum_{i=1}^{3} J_i, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \rho_g \mathbf{v}_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{v}_g \otimes \mathbf{v}_g + p_g \mathbf{E}) = \mu \nabla \mathbf{v}_g, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \rho_g Y_j}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g Y_j \mathbf{v}_g) = \nabla \cdot (\rho_g K_j \nabla Y_j) + \dot{m}_j, \quad j = 1, \dots N, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v}_g) = \nabla \cdot (\lambda \nabla \theta_g) + \nabla \cdot (\rho_g \sum_{j=1}^{N} h_j K_j \nabla Y_j) - \sum_{i=1}^{2} J_i \Delta e_i^0 + \dot{q} - \dot{q}_R + w^*, \tag{16}$$

где $\mathbf{v}_g$ - вектор скорости всей смеси, ρ_g - плотность газовой смеси, Y_j - массовые концентрации химических компонентов в газовой смеси, φ_i - объемные доли фаз во всей смеси, φ_g - объемная доля всех газообразных компонентов во всей смеси, ρ - плотность всей смеси, для которой имеют место соотношения:

$$\sum_{j=1}^{N} \dot{m}_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{N} Y_j = 1, \quad \rho = \varphi_g \rho_g + \sum_{i=1}^{3} \varphi_i \rho_i, \quad 1 = \varphi_g + \sum_{i=1}^{3} \varphi_i. \tag{17}$$

Здесь обозначены: $\dot{m}_j$ - массовая скорость образования j-го компонента, K_j - коэффициент диффузии j-го компонента в смеси, p_g - давление, h_j - энтальпия j-го компонента, E - полная энергия смеси, c_{pj} и c_{vj} - удельные теплоемкости j-го компонента:

$$E = c_v \theta_g + (1/2) \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{v}_g, \quad p_g = (R/M) \rho_g \theta_g, \quad h_j = c_{pj} \theta, \tag{18}$$

где

$$\frac{1}{M} = \sum_{j=1}^{N} \frac{Y_i}{M_j}, \qquad c_v = \frac{1}{\rho} (\rho_g \varphi_g \sum_{j=1}^{N} Y_j c_{vj} + \sum_{i=1}^{3} \rho_i \varphi_i c_i).$$

В уравнении энергии (16) также обозначены: $\dot{q}$ - суммарный тепловой эффект химических реакций, w^* - диссипативная функция, $\dot{q}_R$ - тепловой эффект за счет переноса излучения от газовой смеси к поверхности топлива.

Предполагаем, что в газовой смеси параллельно протекает L химическиз реакций, каждая с массовой скоростью U_k, $k = 1, \dots L$, тогда скорость $\dot{m}_j$ образования j-го компонента определяется следующим образом: $\dot{m}_j = M_j \sum_{k=1}^{L} \nu_{jk} U_k, \quad j = 1, \dots N$, где ν_{jk} - стехиометрические коэффициенты, удовлетворяющие соотношению: $\sum_{j=1}^{N} \nu_{kj} M_j = 0, \ k = 1, \dots L$.

Скорости U_k вычисляются по основным законам действующих масс:

$$U_k = U_k^0 \prod_{k=1}^{L} (Y_j)^{\nu_{kj}} \exp\left(-\frac{E_{ak} M_j}{R\theta}\right), \qquad k = 1, \dots L,$$

где $\prod_{k=1}^{L}$ означает произведение концентраций, а E_{ak} - энергия активации химической реакции.

Условия на поверхности горения. На подвижной поверхности горения задаются условия массообмена, прилипания и обмена импульсом:

$$\Sigma_c(t): \quad (\rho_s - \rho)D = \rho \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{b}_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2; \quad \rho_s D \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{n} + p_g = p, \quad Y_j = Y_{jw}.$$

Кроме того, предполагаем, что химических реакций на самой поверхности $\Sigma(t)$ нет, а для диффузионных потоков справедлива аналогия Рейнольдса. Здесь $D \leq 0$ - нормальная скорость горения, определяемая по формуле (9), $\mathbf{n}$ - вектор нормали к $\Sigma_c(t)$, внешний по отношению к твердому топливу, $\mathbf{b}_\alpha$ - векторы в касательной плоскости к поверхности Σ_c.

Условия теплообмена на поверхности горения в рамках рассматриваемой модели имеют вид:

$$q_\lambda = q_e + q_R - q_{RS} - q_{bl} - q_{sub},$$

где

• $q_\lambda = -\lambda \mathbf{n} \cdot \nabla\theta$ – тепловой поток, идущий на нагрев твердого топлива;

• $q_e = (\alpha^T/c_p)(c_p\theta_g - c_s\theta_s)$ – конвективный тепловой поток, отдаваемый газом поверхности топлива, α^T – коэффициент теплообмена;

• $q_R = \varepsilon_g \sigma_{\text{SB}} \theta_g^4$ – тепловой поток, подводимый газом к поверхности топлива за счет излучения светящихся продуктов сгорания, ε_g – интегральный коэффициент излучения газа, зависящий от температуры θ_g, давления в газе p_g и химического состава газа: $\varepsilon_g = \varepsilon_g(\theta_g, p_g, Y_j)$;

• $q_{RS} = \varepsilon_s \sigma_{\text{SB}} \theta_s^4$ – тепловой поток, отдаваемый газу от нагретой поверхности твердого топлива, σ_{SB} – постоянная Стефана-Больцмана;

• $q_{bl} = \gamma_{bl}\varphi_4\rho_4 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(c_p\theta_g - c_s\theta_s)$ – конвективный тепловой поток, отводимый от поверхности горения вследствие вдува продуктов терморазложения горючего и окислителя через поры, γ_{bl} – коэффициент вдува;

• $q_{sub} = \rho_s D_s \Delta Q_{sub}$ – тепловой поток, отводимый от поверхности горения вследствие эффектов сублимации топлив, ΔQ_{sub} – удельная теплота сублимации.

Уравнение для определения функции $F(x,t)$ формы поверхности горения $\Sigma_c(t)$ имеет вид:

$$(\partial f/\partial t) + D(\nabla f \cdot \nabla f) = 0.$$

4. Расчет процессов горения в модельной двигательной установке

Рассмотрим в качестве примера применения предлагаемой модели задачу о развитии процессов горения в модельной твердотопливной установке, имеющую осесимметричную форму и состоящую из воспламенительного устройства (ВУ), камеры сгорания (КС) и соплового блока (СБ). Воспламенительное устройство представляет собой «двигатель в двигателе» [8, 9, 10], располагается в задней глухой части двигателя и выполнено в виде простого сопла (без сверхзвукового участка) с твердым топливом, имеющим один продольный канал. Пуск ВУ осуществляется с помощью пиротехнического заряда, продукты воспламенения которого затекают в канал ВУ и

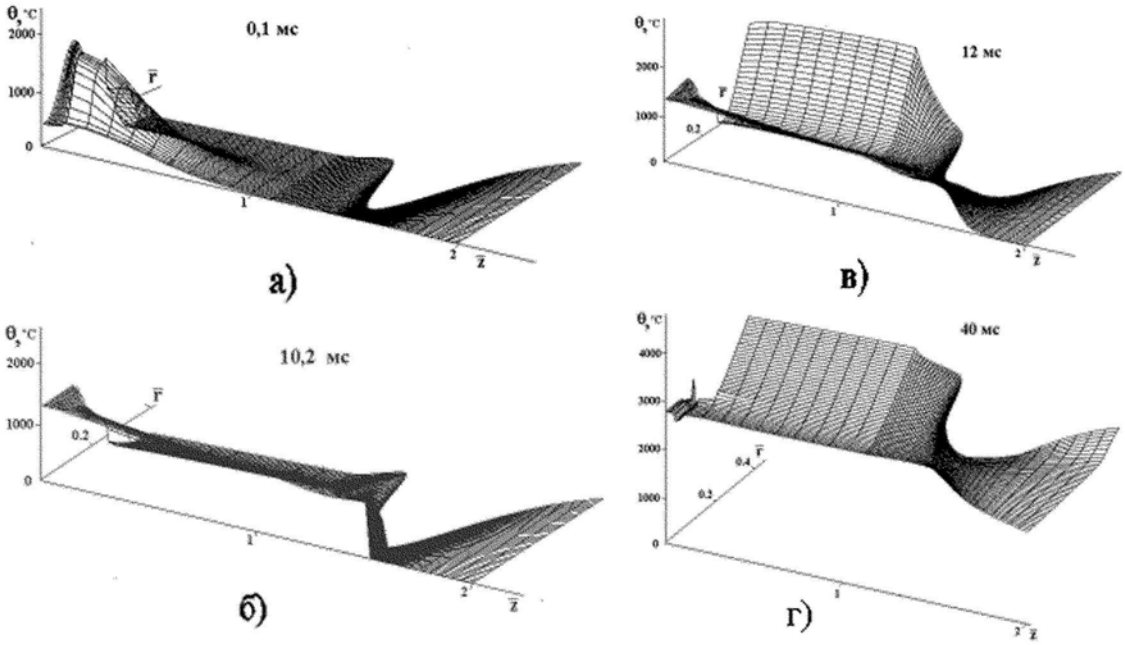


Рис. 1: Распределение температуры θ (°C) в различные моменты времени t

поджигают твердое топливо (ТТ). За момент расчета $t = 0$ в данной работе выбран момент воспламенения ТТ в ВУ.

В сопле ВУ и в сопле КС размещены разрывные диафрагмы, разрушаемые продуктами горения в моменты времени t_{g1} и t_{g2} соответственно. При $0 \leq t \leq t_{g1}$ течение газообразных продуктов ТТ происходит только в ВУ, при $t_{g1} \leq t \leq t_{g2}$ – в ВУ и КС, а при $t \geq t_{g2}$ в ВУ, КС и СБ.

Для численного решения задачи (12) - (25) в рамках осесимметричной двумерной постановки был разработан модифицированный метод типа МакКормака с переменными параметрами сглаживания, а для задачи (1) - (11) использовался пошаговый метод расщепления по координатам.

Численные расчеты проводились со следующими значениями констант: $\rho_s = 1.1 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\lambda_s = 0.3$ Вт/м $\cdot$ К, $c_s = 0.8$ кДж/кг $\cdot$ К, $\rho_0 = p_0/R\theta_0$, $p_0 = 0.1$ МПа, $\theta_0 = 293$ К, $c_p = 1.5$ кДж/кг $\cdot$ К, $\lambda = 0.04$ Вт/м $\cdot$ К, $J_s^0 = 3 \cdot 10^6$ кг/м$^3 \cdot$ с, $E_s/R = 8 \cdot 10^3$ К, $l_0 = 10^{-3}$ м, $\sigma_T = 0.5$ МПа, $\lambda = 0.04$ Вт/м $\cdot$ К, $c_v = 3.4 \cdot 10^3$ кДж/кг $\cdot$ К, $\Delta Q_c = 4$ МДж/кг (для ВУ), $\Delta Q_c = 9$ МДж/кг (для КС).

Суммарная скорость горения D топлива, рассчитанная по (1), при температуре θ'_s =539 К составляла $D = 0.6 \cdot 10^{-3}$ м/с. Разрушающее давление для диафрагм 1 и 2 принималось равным $p_{\text{кр } 1,\, 2} = 0.5$ и 1 МПа, соответственно.

Результаты расчетов представлены на рис. 1, рис. 2, рис. 3, рис. 4 в виде поверхностей $F = F(\bar{r}, \bar{z})$ в трехмерном изображении, где $F = \{v_r, v_z, \theta$ и $p\}$ для четырех характерных моментов времени $t =$ 0.6, 5.2, 9.4 и 30 мс работы двигателя. Здесь $\bar{r} = r + r_0$, $\bar{z} = z + z_0$ - смещенные к поверхности твердого топлива координаты.

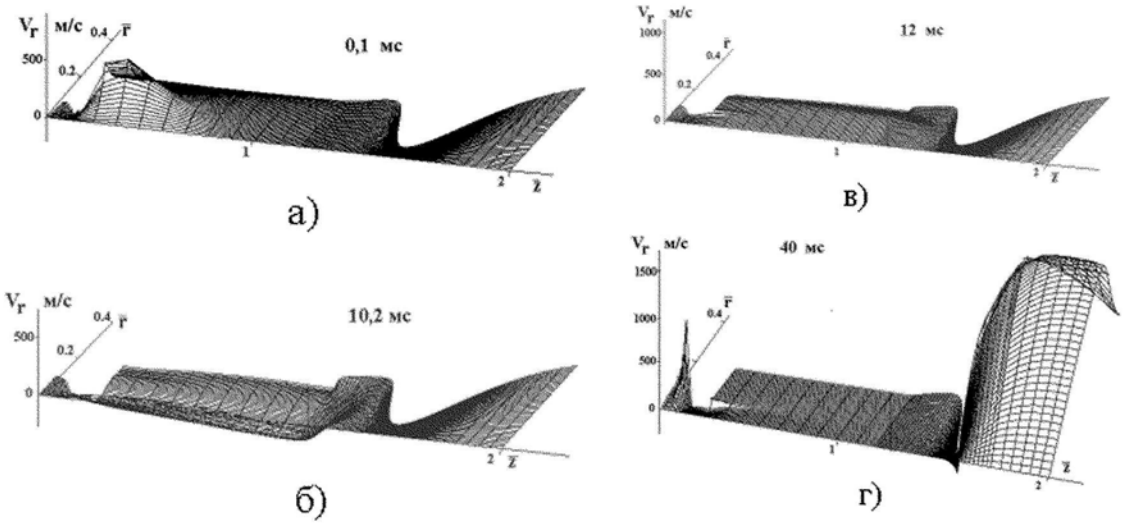


Рис. 2: Распределение скорости v_r (м/с) в различные моменты времени t

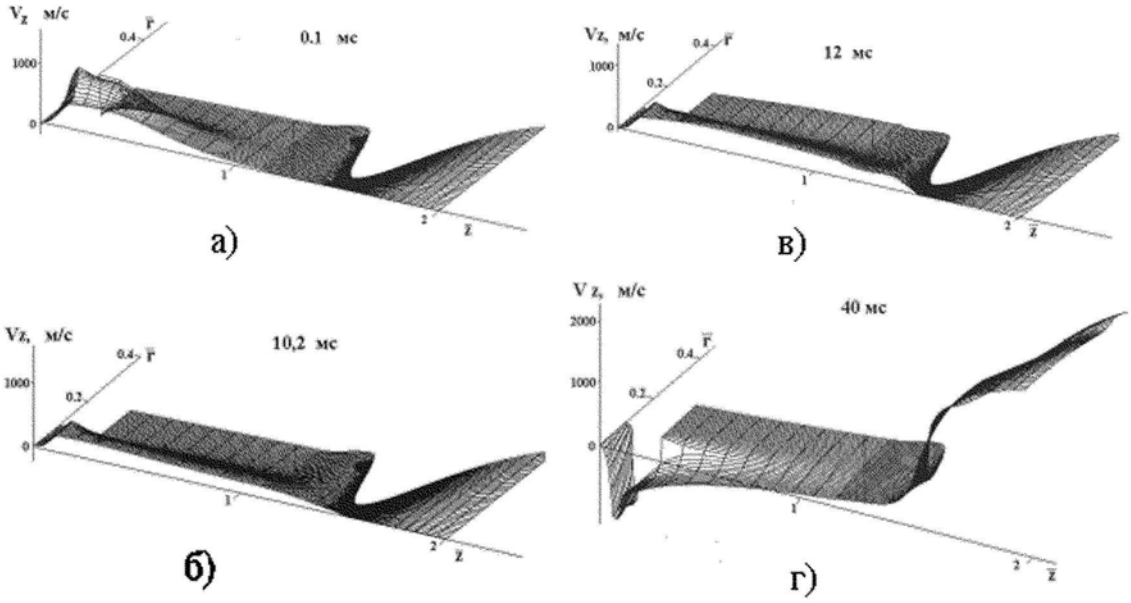


Рис. 3: Распределение скорости v_z (м/с) в различные моменты времени t

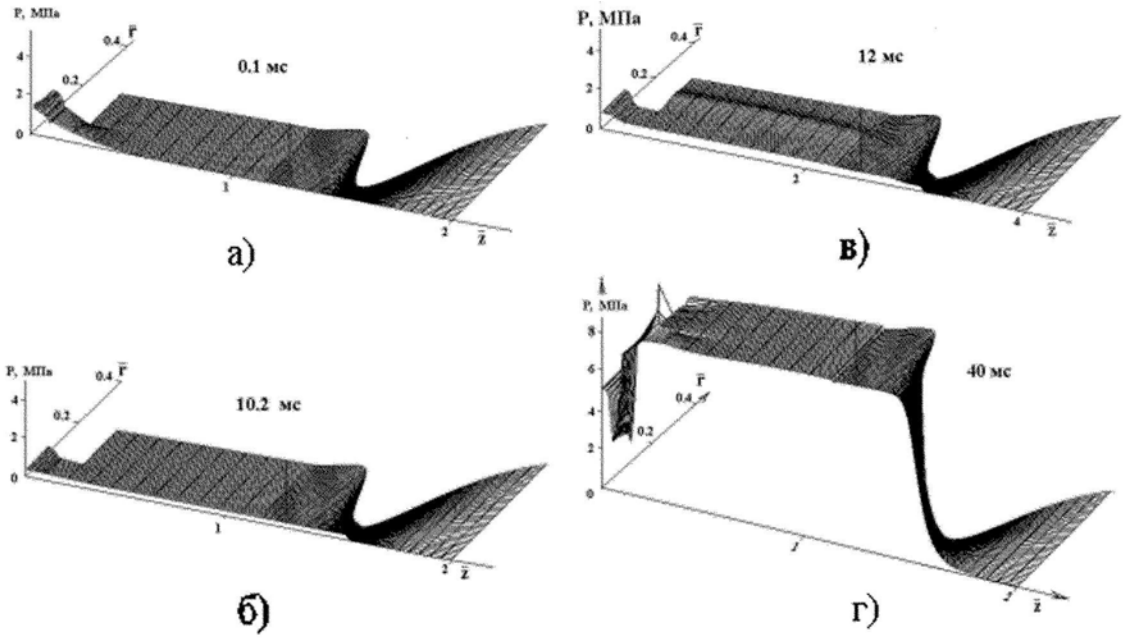


Рис. 4: Распределение давления p (МПа) в различные моменты времени t

Картина развития процесса горения была следующей. В начальный момент времени, согласно принятой в данной работе модели, начинается процесс воспламенения внутренней поверхности заряда ВУ $x = r_D$. Температура продуктов сгорания вблизи поверхности заряда ВУ достигает 1880 К (рис. 1, а), а радиальная скорость их движения внутри канала ВУ на поверхности горения составляет $v_r \approx -46$м $/textc$. В результате быстрого воспламенения ТТ и поступления продуктов сгорания в ВУ, возникает ударная волна (рис. 2, а), движущаяся от поверхности топлива к оси симметрии $x = 0$ с максимальной скоростью $v_r \approx -380$ м/с.

До момента вскрытия диафрагмы 1 осевая скорость v_z в ВУ относительно невелика: поток газа циркулирует в полости ВУ, часть продуктов сгорания движется к сопловой части ВУ с максимальной осевой скоростью $v_z \approx 250$ м/с, а в обратном направлении движется струя более холодного газа со скоростью $v_z \approx -42$ м/с. Движущаяся от поверхности горения к оси симметрии ВУ волна является волной сжатия: максимальный коэффициент повышения плотности ρ/ρ_0 на фронте волны составлял ~ 4.4 при $t = 0.03$ мс.

В момент времени $t \approx 0.03$ мс волна сжатия достигает оси симметрии и, отразившись от нее, начинает двигаться в обратном направлении - в результате возникает зона уплотнения на оси симметрии, при этом коэффициент повышения плотности начинает расти и при $t = 0.04$ мс достигает значения 7.2 в сопловой части ВУ. Давление в сопле при этом превышает критическое значение $p_{\text{кр1}}$ - в результате диафрагма 1 разрушается и продукты сгорания начинают поступать в КС. Момент вскрытия диафрагмы составляет $t_{g1} \approx 0.041$ мс.

В начале второго этапа работы двигателя ($t_{g1} \leq t \leq t_{g2}$) давление в ВУ и коэффициент уплотнения продолжают расти и достигают значений $p = 1.7$ МПа и $\rho/\rho_0 = 14.2$ при $t = 0.06$ мс в донной области ВУ. Далее по мере нарастания скорости v_z вытекания газов из ВУ, давление и плотность в ВУ уменьшаются (рис. 1, а, б и рис. 4, а, б), несмотря на продолжающийся процесс горения заряда в ВУ. Минимальное стационарное давление в ВУ достигается при $t = 6$ мс и составляет $p \approx 1.1$ МПа. В течение всего второго этапа в ВУ продолжаются процессы движения прямых и отраженных волн сжатия в радиальном направлении. Средняя частота вызванных ими пульсаций давления в камере ВУ составляет $\omega \approx 12$ кГц.

Этап 2 работы двигателя характеризуется интенсивным заполнением КС горячими газами, поступающими из ВУ. Максимальная скорость v_z на срезе сопла ВУ достигается при $t \approx 1.5$ мс и составляет $v_z \approx 814$ м/с (см. рис. 3, а). Далее по мере роста давления в КС эта скорость начинает несколько снижаться. Распространяющиеся из ВУ, начиная с момента $t = t_{g1}$ внутрь КС, продукты горения образуют волну сжатия, движущуюся по направлению от сопла ВУ к поверхности горения ТТ. При этом в КС непосредственно за соплом ВУ формируется застойная зона: основная струя горячего газа движется с максимальной скоростью в направлении сопла КС. При $t \approx 0.7$ мс волна горячих продуктов горения достигает поверхности ТТ и начинается его прогрев. Максимальная скорость роста температуры достигается в застойной зоне и в сопловой, наиболее узкой части КС. Весь период прогрева до момента t_i воспламенения характеризуется наличием бегущих прямых и отраженных волн как в продольном, так и в радиальном направлениях. Основная частота радиальных пульсаций давления составляет ≈ 0.5 кГц, а осевых пульсаций – 0.3 кГц, причем осевые пульсации имеют бóльшую амплитуду: так на диафрагме 2 эта амплитуда составляет 0.23 МПа, а на поверхности горения (радиальная) ≈ 0.03 МПа.

В момент времени $t \approx 8.3$ мс (рис. 1, в) происходит воспламенение поверхности ТТ, причем первоначально воспламеняется зона топлива наиболее близкая к соплу КС, так как в сопле в этот момент температура составляет $\theta \approx 1090$ К, в то время как в застойной зоне $\theta \approx \theta'_s$. Температура θ_D на поверхности горения после воспламенения составляет 3487 К. Воспламенение приводит к возникновению новой ударной волны (рис. 2, в), движущейся от поверхности горения к оси симметрии, максимальная радиальная скорость газа при этом составляет $v_r \approx -410$ м/с, а максимальная осевая скорость $v_z \approx 236$ м/с (рис. 3, в).

После того как эта волна сжатия достигает оси симметрии, она встречается с волной газов, вытекающих из ВУ. В результате возникает сложная суперпозиция волн в окрестности сопла ВУ. Более мощная волна от воспламенения ТТ приводит к обратному затеканию газов ВУ – возникает течение с отрицательной продольной скоростью v_z (рис. 3, в, г).

После входа в ВУ эта обратная волна, отражаясь от стенок, остается в канале ВУ практически все дальнейшее время работы двигателя, приводит к значительным пульсациям скорости v_z, давления p и температуры (рис. 1, г, рис. 2, г, рис. 3, г, рис. 4, г). Амплитуда этих пульсаций значительно усиливается на третьем этапе

работы двигателя, при выходе на стационарный режим и составляет примерно 32 % от максимального уровня давления в КС (рис. 4, г).

В конце второго этапа работы радиальная волна воспламенения, отражаясь от оси симметрии и поверхности горения, постепенно затухает. При этом происходит заполнение основного объема КС продуктами горения. Повышается основное рабочее давление в КС и в момент $t_{g2} \approx 9.4$ мс (рис. 1, в, рис. 2, в, рис. 3, в, рис. 4, в) происходит разрушение диафрагмы 2.

Это разрушение приводит к возникновению продольной ударной волны, движущейся по СБ, а в обратную сторону в КС распространяется волна разрежения (волна Римана). Эта волна способствует уменьшению амплитуды продольных волн в КС, образовавшихся на втором этапе. Одновременно с вытеканием струи газов из СБ, растет общее давление в КС, достигая к моменту времени $t_c \approx 25$ мс стационарного значения $p \approx 4.1$ МПа (рис. 1, г, рис. 2, г, рис. 3, г, рис. 4, г). Максимальная продольная скорость истечения газов из СБ составляет $v_z \approx 2288$ м/с, а температура θ на срезе СБ достигает значения $\theta = 2243$ К. Особенностью течения газов на третьем этапе является наличие значительных колебаний давления, температуры и скорости v_z в ВУ (рис. 1, г, рис. 2, г, рис. 3, г, рис. 4, г), вызванных взаимодействием волн воспламенения ТТ и заряда ВУ.

5. Выводы

1. Проведен анализ некоторых проблем моделирования процессов горения твердых топлив перспективных двигательных установок.
2. Разработанная модель горения смесевых твердых топлив, учитывающая многокомпонентность и многофазность продуктов сгорания, микроструктуру и диспергирование топлив, применена для расчета двумерного осесимметричного процесса горения в камере модельного двигателя с воспламенительным устройством.
3. Разработан численный метод расчета процесса горения и течения продуктов сгорания, являющийся модификацией метода МакКормака.
4. Проведены расчеты процессов горения смесевых твердых топлив двигателя, показавшие, что характер течения продуктов горения на всех этапах, включая стационарный режим, является существенно неодномерным. Режим работы двигателя характеризуется наличием значительных пульсаций давления, наличие ВУ в канале двигателя приводит к усилению этих пульсаций, причем их амплитуда может достигать 30 % даже на установившемся участке.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации (N 00-15-99439).

Литература

[1] *Dimitrienko Yu.I.* Modelling of Erosion Combustion of Energetic Materials in High Enthalpy Flows. — Combustion and Flame, 1997, v.111.

[2] *Димитриенко Ю. И.* Механика композиционных материалов при высоких температурах. — М.: Машиностроение, 1997.

[3] *Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I. D.* Effect of Thermomechanical Erosion of Heterogeneous Combustion of Composite Materials in High-Speed Flows. — Combustion and Flame, 2000, v.122.

[4] *Димитриенко Ю. И., Димитриенко И. Д.* Численное моделирование процессов горения смесевых твердых топлив. — Вестник МГТУ, сер. Естественные науки, 2001, № 2.

[5] *Dimitrienko I. D.* Effect of Finite Deformations of Combustible Porous Media on Dynamical Processes of Internal Heat-Mass Transfer. — Int. Journal of Engineering Science, 1998, v.36.

[6] *Смирнов Н. Н., Димитриенко И. Д.* Исследование конвективного горения в сжимаемом твердом топливе с продольными каналами. — Физика горения и взрыва, 1990, № 4.

[7] *Зельдович Я. Б., Лейпунский О. И., Либрович В. Б.* Теория нестационарного горения пороха. — М.: Наука, 1975.

[8] *Липанов А. М., Алиев А. В.* Проектирование ракетных двигателей твердого топлива. — М.: Машиностроение, 1995.

[9] *Калинин В. В., Ковалев Ю. Н., Липанов А. М.* Нестационарные процессы и методы проектирования узлов РДТТ. — М.: Машиностроение, 1986.

[10] *Ерохин Б. Т.* Теория внутрикамерных процессов и проектирования РДТТ. — М.: Машиностроение, 1991.

Структура фронта неустойчивого вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу

Ивашнев О. Е., Смирнов Н. Н.

1. Введение

Процессы фронтального вытеснения более вязкой жидкости менее вязкой или газом широко распространены в системе мероприятий по повышению нефтеотдачи нефтяных пластов. Возникающая при этом неустойчивость фронта вытеснения Рэлея-Тейлора, или Сафмана-Тейлора, может привести к прорыву отдельных «языков» вытесняющей жидкости или газа, их дальнейшему слиянию, и захвату островов вязкой жидкости при обтекании ее менее вязким газом, что существенно снижает качество вытеснения и, как следствие, уменьшает нефтеотдачу пласта.

Ячейка Хеле-Шоу служит физической моделью для изучения процессов вытеснения вязкой жидкости из пористой среды или из трещины гидроразрыва. Она представляет собой канал, образованный двумя близко расположенными параллельными пластинами (рис. 1).

По-видимому, впервые, форму «языка» в вязкой жидкости удалось рассчитать аналитически Журавлеву [1], а знаменитая работа Саффмана-Тейлора [2] появилась лишь два года спустя. В теории Журавлева-Саффмана-Тейлора (Ж-С-Т) не учитываются силы поверхностного натяжения, действующие в плоскости течения, т.е. система лишена фактора, стабилизирующего неустойчивость. Поэтому, в соответствии с теорией Ж-С-Т, ширина вязкого языка может быть сколь угодно малой, что противоречит эксперименту. Идея использовать малые составляющие сил поверхностного натяжения, действующие в плоскости течения, очевидно, принадлежит Хомси [3]. Им были проведены многочисленные расчеты «языков» в вязкой жидкости в ячейках Хеле-Шоу и в пористых средах, хорошо коррелирующие с экспериментом [3, 4, 6, 7].

В данной работе построено автомодельное решение о вытеснении вязкой жидкости газом с учетом влияния полной кривизны поверхности раздела фаз. Рассчитана ширина образующегося газового «языка». Получен критерий возникновения неустойчивости и теоретически определено критическое значение модифицированного капиллярного числа.

2. Постановка задачи

В экспериментах [1] вязкая глицериново-водяная смесь вытеснялась воздухом. Толщина щели была $\delta = 0.08$ см, ширина $h = 20$ см. Эксперименты показали, что вытесняющая жидкость (воздух) пробивает в вязкой жидкости канал, по которому затем она движется через ячейку. При малых скоростях в ячейке образуется один канал (рис. 2). При больших скоростях вытеснения в щели может образоваться несколько (рис. 3) или даже десятки каналов (рис. 4).

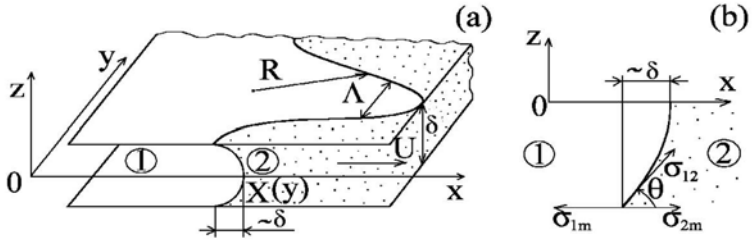


Рис. 1: (a) – схема течения в ячейке Хеле-Шоу, (b) – вид межфазной поверхности в разрезе ячейки плоскостью, нормальной к основаниям

Рис. 2: Устойчивый газовый канал в ячейке Хеле-Шоу, заполненной вязкой жидкостью при $Ca' = 94.3$

Для теоретического описания процесса вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу примем следующие предположения:

1.Зазор между пластинами δ считается малым по сравнению с шириной ячейки $\delta/h << 1$.

2. Вязкостью вытесняющего газа пренебрегаем в сравнении с вязкостью вытесняющей жидкости.

Ось Ozдекартовой системы координат направим перпендикулярно основаниям щели (рис. 1, a). Точку O (начало системы координат) возьмем между основаниями. Течение каждой из жидкостей описывается уравнениями Стокса:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

где μ - коэффициент динамической вязкости, P - давление, u, v, w – компоненты вектора скорости.

Условия на границе с пластинками записываются следующим образом:

$$z = \pm\delta/2: \quad u = v = w = 0. \tag{5}$$

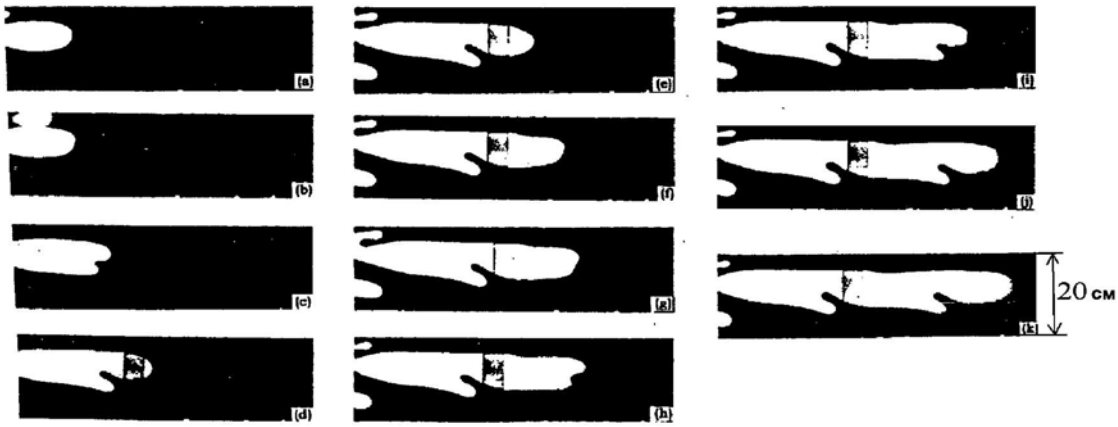


Рис. 3: Процесс вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу при $Ca' = 143$ ($U_0 \sim 3$мм/с): (a) 90с, (b) 94с, (c) 110с, (d) 130с, (e) 140с, (f) 157с, (g) 162с, (h) 171с, (i) 181с, (k) 210с

Рис. 4: Процесс вытеснения при $Ca' = 287$. Время: (a) 73с, (b) 82с

Предполагаем, что профиль скоростей между пластинами параболический:

$$u = \frac{3}{2} U(x,y) \left(1 - \frac{4z^2}{\delta^2}\right), \tag{6}$$

$$v = \frac{3}{2} V(x,y) \left(1 - \frac{4z^2}{\delta^2}\right), \tag{7}$$

$$w = 0, \tag{8}$$

где $U(x,y)$, $V(x,y)$ - средние по высоте сечения компоненты вектора скорости

$$U = \frac{1}{\delta} \int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2} u(x,y,z)\, dz.$$

Такой вид решения автоматически удовлетворяет условию на верхней и нижней границах потока (5). Подставив решение в виде (6)-(8) в систему уравнений (1)-(4), получим:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{12\mu}{\delta^2} U = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{4z^2}{\delta^2}\right)\left[\mu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\right], \tag{9}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{12\mu}{\delta^2} V = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{4z^2}{\delta^2}\right)\left[\mu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\right], \tag{10}$$

$$P = P(x,y), \tag{11}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \tag{12}$$

В левой части уравнений (9), (10) все параметры - функции только x и y, в квадратные скобки в правой части заключены тоже функции x и y, коэффициент же перед квадратными скобками зависит от z. Следовательно, уравнения (9), (10) выполняются только в том случае, когда их левые части и выражения, заключенные в квадратные скобки, равны нулю. Приравняв левые части к нулю, получим уравнение Дарси для плоской щели:

$$\bar{W} = -\frac{\delta^2}{12\mu} \nabla P, \tag{13}$$

где $\bar{W} = \bar{i}U + \bar{j}V$ - вектор средней скорости ($\bar{i}$, $\bar{j}$ - единичные орты осей Ox и Oy).

Для равенства нулю выражений в квадратных скобках уравнений (9), (10) достаточно чтобы наряду с уравнением неразрывности (12) выполнялось условие равенства нулю вектора вихря $rot\bar{W} = 0$, скалярная форма которого имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \tag{14}$$

Таким образом, получены осредненные по высоте щели уравнения для описания течения вязкой жидкости:

$$\bar{W} = -\frac{\delta^2}{12\mu} \nabla P, \tag{15}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \tag{17}$$

Уравнения (16), (17) эквивалентны уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0, \tag{18}$$

где φ - потенциал вектора $\bar{W}$:

$$\bar{W} = grad\,(\delta)\,. \tag{19}$$

Из (15) и (19) следует связь между функциями P и φ:

$$P = -\frac{12\mu}{\delta}\varphi + const. \tag{20}$$

Окончательно систему уравнений представим в следующей форме:

$$\Delta P = 0, \tag{21}$$

$$\bar{W} = -\frac{\delta^2}{12\mu}\nabla P. \tag{22}$$

Таким образом, следствием принятия допущения о параболическом законе распределения скорости между пластинами (6)-(8) является отсутствие касательных напряжений в плоскости xOy: $\tau_{xy} = 0$. Средние параметры течения описываются уравнениями для идеальной жидкости (21), (22).

Первым граничным условием на межфазной поверхности является условие ее непротекания - проекция скорости межфазной поверхности и проекция скорости вытесняемой жидкости на нормаль к поверхности равны:

$$\bar{n}\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{n}\bar{W}_2, \tag{23}$$

где $\bar{n} = \bar{i}n_x + \bar{j}n_y$ - вектор нормали к межфазной поверхности, его координаты:

$$n_x = 1\Big/\sqrt{1 + \left(\tfrac{dX}{dy}\right)^2}, \quad n_y = -\tfrac{dX}{dy}\Big/\sqrt{1 + \left(\tfrac{dX}{dy}\right)^2}.$$

Для решения задачи необходимо еще одно граничное условие, связывающее давления по обе стороны межфазной поверхности P_1 и P_2. Считаем давления по разные стороны межфазной поверхности однородными по высоте и равными среднему. В этом случае справедлива формула Лапласа:

$$P_1 - P_2 = \frac{2\sigma cos\theta}{\delta} + \frac{\sigma}{R}. \tag{24}$$

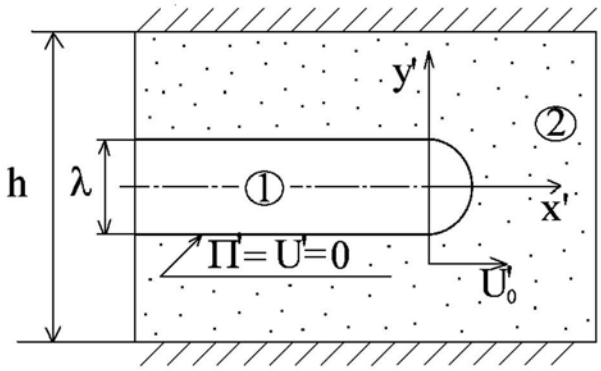


Рис. 5: Схема автомодельного решения

Косинус краевого угла (угла смачивания) вычисляется по формуле $cos\theta = (\sigma_{1m} - \sigma_{2m})/\sigma$, где $\sigma = \sigma_{12}$ - коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела жидкостей; σ_{1m}, σ_{2m} - коэффициенты поверхностного натяжения на границе раздела между 1-й и 2-й жидкостями и материалом пластин (рис. 1, b); R - радиус искривления межфазной поверхности в плоскости xOy (большой радиус кривизны — рис. 1, a).

Поскольку $h << R$, то второй член в правой части формулы Лапласа (24) значительно меньше первого. Если им пренебречь и считать, что

$$P_1 - P_2 = P_c, \tag{25}$$

где

$$P_c = \frac{2\sigma cos\theta}{\delta} = const, \tag{26}$$

то мы приходим к классической постановке задачи о вытеснении вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу. Аналитическое решение задачи впервые было дано в [2], а несколько позднее в [3]. Решение показывает, что вытесняющая жидкость пробивает в вязкой жидкости палец толщиной λ (рис. 5), и дает форму для кончика пальца:

$$X = 2\frac{h-\lambda}{\pi} ln\left[cos\left(\frac{\pi y}{2\lambda}\right)\right], \tag{27}$$

где h - ширина ячейки.

Однако, параметр λ (ширина канала) является произвольным — он не может быть вычислен по классической теории . Поэтому, опираясь на проведенные ими эксперименты, Саффман и Тейлор [3] предложили брать его равным половине ширины ячейки $\lambda = h/2$. Но многочисленные эксперименты, проведенные позднее, опровергли эту гипотезу. Если для режима вытеснения, представленного на рис. 2, она еще может быть приемлемой, то другие режимы показывают, что в ячейке может образоваться несколько подобных каналов (рис. 3, рис. 4)

Рассчитать толщину канала численно удалось авторам [4] после того, как были учтены малые поправки за счет искривления межфазной поверхности в плоскости

xOy. В работе [5] аномально большое значение малого параметра σ/R в уравнении (24) объяснено его влиянием на устойчивость течения. Попытаемся дать свое, более простое, объяснение этого эффекта.

Большой радиус кривизны R может быть рассчитан по уравнению межфазной поверхности $x = X(y)$ по формуле:

$$R = -\frac{\left[1 + \left(\frac{dX}{dy}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2X}{dy^2}}.$$

Подставив выражение для радиуса кривизны в (24), получим связь между разницей давлений на межфазной поверхности и ее кривизной:

$$\frac{d^2X}{dy^2} + \left[1 + \left(\frac{dX}{dy}\right)^2\right]^{3/2} \frac{P_1 - P_2 - P_c}{\sigma} = 0, \tag{28}$$

где $P_c = const$ дается формулой (26).

Из уравнения (28) видно, что пренебрежение большим радиусом кривизны эквивалентно отбрасыванию первого члена уравнения, содержащего старшую производную. Это и приводит к потере собственного размера — эквивалента толщины пограничного слоя системы.

Классическое решение (27) не отвергает возможность существования «языков», тонких по сравнению с размерами ячейки $\lambda << l$. Такие «языки» обнаружены также и в экспериментах (рис. 4). Определим размеры «языка» в частном случае, когда влиянием границ ячейки можно пренебречь. Предполагаем, что язык растет вдоль оси Ox со скоростью $U_0(t)$.

Чтобы исключить из уравнений постоянные параметры, введем функцию перепада давлений:

$$\Pi(x, y, t) = P_1(t) - P_c - P_2(x, y, t). \tag{29}$$

Тогда общий вид системы уравнений, описывающей движение «языка» в бесконечно широкой ячейке, будет следующим:

$$\Delta\Pi = 0, \tag{30}$$

$$\bar{W} = \frac{\delta^2}{12\mu}\nabla\Pi, \tag{31}$$

$$x = X(y): \quad \frac{d^2X}{dy^2} + \left[1 + \left(\frac{dX}{dy}\right)^2\right]^{3/2} \frac{\Pi}{\sigma} = 0, \tag{32}$$

$$n_x U_0 = \bar{n}\bar{W}_2. \tag{33}$$

3. Автомодельное решение для ячейки бесконечной ширины

Обезразмерим уравнения. Введем естественные для данного течения (характерные) единицы измерения величин. Скорость будем измерять в долях от скорости роста «языка» U_0; длину - в долях от характерной длины $\Lambda = \delta \Big/ \sqrt{12Ca}$, где $Ca = \mu U_0/\sigma$ - капиллярное число; перепад давлений будем измерять в долях от $\Pi^* = 12\mu U_0 \Lambda/\delta^2$.

Безразмерная форма уравнений (30)-(33) будет иметь вид:

$$\Delta \Pi' = 0, \tag{34}$$

$$\bar{W}' = \nabla \Pi', \tag{35}$$

$$x' = X'\left(y'\right): \quad \frac{d^2 X'}{d(y')^2} + \left[1 + \left(\frac{dX'}{dy'}\right)^2\right]^{3/2} \Pi' = 0, \tag{36}$$

$$n_x \cdot 1 = W'_{2n}, \tag{37}$$

где $X' = X/\Lambda$, $y' = y/\Lambda$, $\bar{W}' = \bar{W}/U_0$, $\Pi' = \Pi/\Pi^*$ — безразмерные параметры.

Видно, что уравнения (34)-(37) не содержат ни одного физического параметра. Следовательно, фронты вытеснения в бесконечных ячейках подобны.

В случае роста «языка» в бесконечной ячейке скорость жидкости на удалении от «языка» в положительном направлении оси Ox стремится к нулю:

$$x' \to \infty: \quad W'_2 \to 0. \tag{38}$$

Потенциал ищем в виде суммы частных решений уравнения Лапласа: потенциала источника, расположенного в точке $x' = y' = 0$ (рис. 5) и членов степенного ряда Лорана, содержащих комплексную переменную $z' = x' + iy'$ в отрицательной степени. Все эти частные решения удовлетворяют условию на удалении (38). На прямолинейных стенках должно выполняться:

$$x' \leq 0, \quad y' = \pm\lambda'/2: \quad \Pi' = U' = V' = 0. \tag{39}$$

Условие равенства нулю потенциала Π' следует из уравнения равновесия межфазной поверхности (36) при условии $dX'/dy' \to \infty$. Составляющая скорости U' равна нулю потому, что вдоль всей прямолинейной стенки величина Π' постоянна и, следовательно, $U' = \partial\Pi'/\partial x' = 0$. Условие равенства нулю составляющей скорости V' следует из предположения о существовании автомодельного решения (37).

При построении решения в первом приближении потребуем соблюдения кинематического условия (37) лишь в двух характерных точках — на кончике пальца:

$$x' = X'_0, \quad y' = 0: \quad U' = 1 \tag{40}$$

и в месте сопряжения передней обтекаемой части с плоскими стенками:

$$x' = 0, \quad y' = \pm\lambda'/2: \quad U' = V' = 0. \tag{41}$$

Этим условиям можно удовлетворить, добавив к потенциалу источника минимум два члена ряда:

$$\Phi' = C_0 \left[ln \left(\frac{2z'}{\lambda'} \right) - \frac{1}{2} - \frac{(\lambda')^2}{8(z')^2} \right], \tag{42}$$

где $\Phi' = \Pi' + i\Psi'$ - комплексный потенциал; Ψ' - функция тока. Комплексному потенциалу (42) соответствуют: следующий действительный потенциал, функция тока и составляющие вектора скорости:

$$\Pi' = C_0 \left\{ ln \left[\frac{2}{\lambda'} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \right] - \frac{1}{2} + \frac{(\lambda')^2 \left[(y')^2 - (x')^2 \right]}{8 \left[(x')^2 + (y')^2 \right]^2} \right\}, \tag{43}$$

$$\Psi' = C_0 \left\{ arctg \left(\frac{y'}{x'} \right) + \frac{(\lambda')^2 x' y'}{4 \left[(x')^2 + (y')^2 \right]^2} \right\}, \tag{44}$$

$$U' = C_0 \left\{ \frac{x'}{(x')^2 + (y')^2} + \frac{(\lambda')^2 x' \left[(x')^2 - 3(y')^2 \right]}{4 \left[(x')^2 + (y')^2 \right]^3} \right\}, \tag{45}$$

$$V' = C_0 \left\{ \frac{y'}{(x')^2 + (y')^2} - \frac{(\lambda')^2 y' \left[(y')^2 - 3(x')^2 \right]}{4 \left[(x')^2 + (y')^2 \right]^3} \right\}. \tag{46}$$

Постоянную C_0 определяем из условия (40):

$$C_0 = \frac{4 \left(X_0' \right)^3}{4 \left(X_0' \right)^2 + (\lambda')^2}.$$

Подставив выражение (43) для действительного потенциала Π' (функции перепада давления) в уравнение равновесия межфазной поверхности (36), получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее форму межфазной поверхности:

$$\begin{gathered} \frac{d^2 X'}{d(y')^2} + C_0 \left[1 + \left(\frac{dX'}{dy'} \right)^2 \right]^{3/2} \times \\ \times \left\{ ln \left[\frac{2}{\lambda'} \sqrt{(X')^2 + (y')^2} \right] - \frac{1}{2} + \frac{(\lambda')^2 \left[(y')^2 - (X')^2 \right]}{8 \left[(X')^2 + (y')^2 \right]^2} \right\} = 0. \end{gathered} \tag{47}$$

Уравнение второго порядка (47) содержит два свободных параметра λ' и X_0' (последний входит в выражение для C_0). Для определения этих параметров имеем два дополнительных граничных условия:

$$y' = 0: \quad X' = X_0'; \quad dX'/dy' = 0 \tag{48}$$

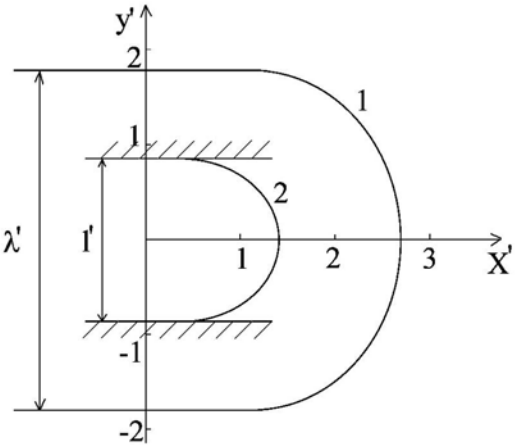


Рис. 6: Результаты расчетов формы газового языка в вязкой жидкости: 1 – «язык» в бесконечной ячейке Хеле-Шоу, 2 – «язык», прижатый к стенкам ячейки

$$y^{'} = \lambda^{'}/2: \quad X^{'} = 0; \quad dX^{'}/dy^{'} \to -\infty \tag{49}$$

Решая краевую задачу (47)-(49), находим форму «языка» (рис. 6, кривая 1) и определяем безразмерное значение его ширины: $\lambda^{'} \approx 3,58$ и высоту головной части $X_0^{'} \approx 2,68$.

На следующем этапе первое приближение может быть уточнено. К ряду (42) могут быть добавлены еще два члена, не нарушающие условия в двух выбранных для первого приближения точках (40), (41):

$$\Phi_{(2)}^{'} = C_0 \left[ln\left(\frac{2z^{'}}{\lambda^{'}}\right) - \frac{1}{2} - \frac{\left(\lambda^{'}\right)^2}{8\left(z^{'}\right)^2} \right] + C_1 \left[\frac{1}{z^{'}} - \frac{\left(\lambda^{'}\right)^2}{12\left(z^{'}\right)^3} \right]. \tag{50}$$

Свободная постоянная C_1 может быть определена из кинематического условия (37) еще в одной характерной точке.

Таким образом, автомодельное решение задачи о «росте газового языка» в бесконечной ячейке Хеле-Шоу, заполненной вязкой жидкостью показывает, что он имеет свой собственный размер. В размерных переменных его ширина:

$$\lambda = 3,58\delta\sqrt{\frac{\sigma}{12\mu U_0}}. \tag{51}$$

Зная аналитическое выражение для ширины «языка» (51), можно трактовать введенную Хомси универсальную характеристику процесса вытеснения вязкой жидкости газом — модифицированное капиллярное число:

$$Ca^{'} = \frac{12\mu U_0}{\sigma}\frac{h^2}{\delta^2}, \tag{52}$$

как отношение квадрата ширины ячейки h^2 к квадрату ширины «языка» λ^2. Действительно, из (51) получаем:

$$\frac{h^2}{\lambda^2} \approx \frac{12\mu U_0}{\sigma}\frac{h^2}{\delta^2}. \tag{53}$$

Таким образом, понятно, почему с ростом модифицированного капиллярного числа количество «языков» в ячейке возрастает (рис. 2, рис. 3, рис. 4). Дело в том, что с ростом Ca' их собственный размер уменьшается и большее число тонких «языков» может поместиться в яейке.

4. Автомодельное решение для «языка», прилегающего к границам ячейки конечной ширины

Предельная ширина ячейки h^*, при которой процесс вытеснения вязкой жидкости остается устойчивым, также может быть оценена теоретически. Рассчитаем течение, когда зазор между боковыми стенками «языка» и границами ячейки мал.

Определим форму «языка», зазор между параллельными стенками которого и соседними пальцами стремится к нулю. В этом случае вся вытесняемая жидкость будет двигаться с одинаковой скоростью равной скорости роста «языка»: $U_2' = 1$. Кинематическое условие (37) выполняется автоматически. Потенциал такого течения будет следующим:

$$\Pi' = x' + const. \tag{54}$$

Функция перепада давления на плоских боковых стенках $x' \leq 0$, $y' = \pm h'/2$ равна нулю. Поэтому константу в уравнении (54) следует взять равной нулю:

$$\Pi' = x'. \tag{55}$$

Подставив это выражение для Π' в уравнение равновесия межфазной поверхности (36), получим:

$$\frac{d^2X'}{d(y')^2} + \left[1 + \left(\frac{dX'}{dy'}\right)^2\right]^{3/2} X' = 0. \tag{56}$$

Первый интеграл этого уравнения:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (dX'/dy')^2}} - \frac{(X')^2}{2} = const. \tag{57}$$

Постоянную интегрирования определяем из условия, что в месте сопряжения искривленной передней части с плоскими стенками:

$$y' = \pm h'/2: \quad X' = 0, \quad dX'/dy' \to \mp\infty. \tag{58}$$

Получаем:

$$\frac{dX'}{dy'} = \pm\sqrt{\frac{4}{(X')^4} - 1}. \tag{59}$$

Знак «+» относится к нижней части «языка», а «-» - к верхней (рис. 5). Вершина «языка», как это следует из (59), находится в точке $X' = \sqrt{2}$, $y' = 0$. Интегрируя (59) от контакта с границей ячейки ($y' = -h'/2$, $X' = 0$) до вершины, найдем безразмерное значение ширины «языка», прилегающего к стенкам ячейки:

$$h' = 2\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{\left(X'\right)^2 dX'}{\sqrt{4-\left(X'\right)^4}} = 1,6946. \tag{60}$$

Форма «языка» показана на рис. 6 (кривая 2).

В размерных переменных ширина вязкого пальца, прижатого к стенкам, равна:

$$h^* \approx 1,7\delta\sqrt{\frac{\sigma}{12\mu U_0}}. \tag{61}$$

Критическое значение модифицированного капиллярного числа, соответственно, будет:

$$(Ca')^* = \frac{12\mu U_0}{\sigma}\frac{h^2}{\delta^2} = 3$$

В данном случае скорость роста «языка» может быть вычислена через объемный расход $Q = U_0 h^*$, а безразмерная предельная ширина ячейки устойчивого вытеснения может быть рассчитана по формуле:

$$\frac{h^*}{\delta} \approx \frac{\sigma\delta}{4\mu Q}.$$

5. Заключение

Таким образом, незначительные силы поверхностного натяжения, действующие в плоскости течения, определяют структуру фронта вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу.

Получено новое автомодельное решение, описывающее рост «языка» в бесконечной ячейке Хеле-Шоу при вытеснении вязкой жидкости невязким газом. В отличии от полученных ранее решений данное решение позволяет найти толщину «языка».

Аналитически определен критерий неустойчивого вытеснения и объяснен физический смысл модифицированного капиллярного числа.

Полученные решения позволяют сделать следующие практические рекомендации по процедуре вытеснения жидкости из щели. При заданных размерах (толщине и ширине щели) и параметрах вытесняемой жидкости существует максимальное значение скорости вытеснения, начиная с которого процесс теряет устойчивость. Наилучшее качество вытеснения достигается, когда скорость не превышает предельной величины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Schlumberger Oilfield Services — транс-национальной корпорации в сфере нефтяной и газовой промышленности.

Литература

[1] *Журавлев П. Б.* Записки Ленинградск. — Ком. Ин-та 1956, т. 133.

[2] *Saffman P. G., Taylor G. J.* The penetration of a fluid into a porous medium of Hele-Show cell containing a more viscous fluid. — Proc. R. Foc. Zond, 1958.

[3] *Park C. W., Homsy G. M.* The instability of long fingers in Hele-Show flows. — Phys. Fluids, 1985, v 28, № 6.

[4] *Meiburg E., Homsy G. M.* Nonlinear unstable viscous fingers in Hele-Show flows. II. Numerical simulation. — Phys. Fluids, 1988, v. 31, № 3.

[5] *Tanveer S.* Surprises in viscous fingering. — J.Fluid Mech 2000, v. 409.

[6] *Homsy G. M.* Viscous fingering in porous media. — Ann. Rev. Fluid Mech. 1987. v. 19.

[7] *Anne R. Kopf-Still, Homsy G. M.* Nonlinear unstable viscous fingers in Hele-Shaw flows. I. Experiments. — Phys. Fluids 31, 1988, v. 31, № 2.

Об использовании низкокаталитических материалов для теплозащиты космических аппаратов, входящих в атмосферу Марса

Афонина Н. Е., Громов В. Г., Ковалев В. Л.

Одним из основных факторов, определяющих интенсивность теплообмена при спуске космического аппарата в атмосфере Марса, является гетерогенная рекомбинация компонент диссоциированного углекислого газа, составляющего около 96 % марсианской атмосферы. Уже при скорости полета порядка 6 км/сек углекислый газ практически полностью диссоциирует при прохождении головной ударной волны. В то же время из-за большой разреженности атмосферы процесс рекомбинации в газовой фазе вблизи поверхности аппарата близок к замороженному. Теоретически величина теплового потока к лобовой поверхности аппарата может быть снижена за счет использования некаталитического покрытия до четырех раз на значительной части траектории спуска, включая область максимальных тепловых нагрузок.

Большой объем экспериментальных и теоретических исследований по высокотемпературному катализу в диссоциированном воздухе был выполнен в связи с разработкой системы теплозащиты воздушно-космических самолетов «Space Shuttle» и «Буран» [1, 2, 3, 4]. Первоначально в теоретических моделях гетерогенный катализ описывался реакциями первого порядка с константами скоростей, определяемыми из эксперимента. Позднее были предложены более точные модели [5] – [12], основанные на теории идеально адсорбированного слоя Ленгмюра [13]. Эти модели позволили при соответствующем подборе параметров удовлетворительно описать аэродинамический нагрев наветренной поверхности многоразовых космических аппаратов вдоль всей траектории спуска [6, 14].

Значительно меньше работ, посвященных изучению гетерогенного катализа при высоких температурах в диссоциированном углекислом газе. При изучении входа в атмосферу Марса в литературе рассматривались, в основном, предельные случаи идеально каталитической (максимальная скорость гетерогенной рекомбинации компонент диссоциированного углекислого газа) и некаталитической поверхностей [15, 16, 17]. Феноменологические модели каталитических свойств теплозащитных покрытий космических аппаратов, входящих в атмосферу Марса, основанные на детальном рассмотрении механизма протекания гетерогенных каталитических реакций, предложены в [18, 19].

Первые результаты измерений параметров потока, а также величин теплового потока к каталитической поверхности и ее равновесной температуры, в диссоциированном углекислом газе для трех видов покрытий теплозащитных материалов и кварца, опубликованы в работе [20]. Там же определены значения эффективных констант скоростей гетерогенной каталитической рекомбинации атомов кислорода и молекул окиси азота на поверхности рассмотренных покрытий.

В данной работе для моделирования каталитических свойств поверхности теплозащитных материалов в диссоциированной смеси CO_2 и N_2 используется методо-

логия, разработанная в [5, 18, 19]. С помощью интерпретации экспериментальных данных получены явные зависимости коэффициентов каталитической активности от условий вблизи поверхности (температуры, давления и концентраций) для исследованных в [20] покрытий. На траектории входа космического аппарата Mars miniprobe в атмосферу Марса рассчитаны тепловые потоки в критической точке для каждого из покрытий и установлена возможность их использования в системе теплозащиты этого аппарата.

1. Рассматривается обтекание каталитической поверхности диссоциированной смесью углекислого газа и азота ($\mathrm{O, N, C, O_2, N_2, NO, CO, CO_2}$), моделирующей газовую среду в ударном слое при входе космического аппарата в атмосферу Марса со скоростями до 8км/с. В механизм гетерогенных каталитических реакций включены перечисленные ниже реакции Или-Райдила

$$1.\ (\mathrm{O-S})+\mathrm{O} \rightleftharpoons (\mathrm{S})+\mathrm{O_2}, \quad 2.\ (\mathrm{N-S})+\mathrm{N} \rightleftharpoons (\mathrm{S})+\mathrm{N_2},$$

$$3.\ (\mathrm{O-S})+\mathrm{CO} \rightleftharpoons (\mathrm{S})+\mathrm{CO_2}, \quad 4.\ (\mathrm{CO-S})+\mathrm{O} \rightleftharpoons (\mathrm{S})+\mathrm{CO_2}$$

и реакции адсорбции-десорбции атомов $\mathrm{O, N}$ и молекулы CO на активных центрах

$$5.\ \mathrm{O}+(\mathrm{S}) \rightleftharpoons (\mathrm{O-S}), 6.\ \mathrm{N}+(\mathrm{S}) \rightleftharpoons (\mathrm{N-S}), 7.\ \mathrm{CO}+(\mathrm{S}) \rightleftharpoons (\mathrm{CO-S})$$

Не учтены реакции рекомбинации Ленгмюра–Хиншельвуда и адсорбция молекул $\mathrm{O_2}$, $\mathrm{N_2}$, NO, $\mathrm{CO_2}$. Считалось, что в рассматриваемых диапазонах изменения температуры и давления ($300^o \le T_w \le 2000^o$ K, $10^{-3} \le p \le 1$ атм) эти процессы менее вероятны. Гетерогенные реакции с участием атомарного углерода также не учитывались.

Согласно закону действующих поверхностей массовая скорость образования компонента AB в j–ой реакции Или-Райдила

$$(\mathrm{A-S})+\mathrm{B}=\mathrm{AB}+\mathrm{S}$$

определяется выражением

$$r_{AB}=k_j m_{\mathrm{AB}}\frac{\rho}{m}(\theta_{\mathrm{A}}x_{\mathrm{B}}-K_j x_{\mathrm{AB}}\theta), \quad k_j=\gamma_j\sqrt{\frac{RT}{2\pi m_{\mathrm{B}}}}.$$

Здесь p-давление, γ_j–вероятность образования частицы AB при столкновении частицы B с поверхностью, полностью покрытой адсорбированными частицами A; K_j–константа равновесия этой реакции, x_i–молярные концентрации компонентов, θ_i–степени заполнения поверхности адсорбированными веществами, θ–доля свободной поверхности, ρ–плотность, T–температура, R–абсолютная газовая постоянная, m_i, m–молекулярный вес i–го компонента и газовой смеси соответственно.

Массовая скорость адсорбции–десорбции компонента A в j–ой реакции адсорбции

$$\mathrm{A}+\mathrm{S}=(\mathrm{A-S})$$

равна

$$r_A = k_j m_A \frac{\rho}{m}(x_{\mathrm{A}}\theta - \frac{K_j}{p}\theta_{\mathrm{A}}), \quad k_j = \gamma_j \sqrt{\frac{RT}{2\pi m_{\mathrm{A}}}},$$

где γ_j–вероятность адсорбции при столкновении частицы A с полностью свободной поверхностью. Константы равновесия процессов адсорбции–десорбции K_j выражаются через статистические суммы реагентов Q_k и энергию адсорбции E_{A} следующим образом

$$K_j = \frac{Q_{\mathrm{A}} Q_S}{Q_{(\mathrm{A-S})}} exp\left(-\frac{E_{\mathrm{A}}}{RT}\right).$$

С учетом условия стационарного заполнения поверхности адсорбированными частицами массовые скорости образования компонентов в гетерогенных каталитических реакциях R_{i} могут быть выражены через отклонения от равновесия $v_k, \quad k = 1,..4$ независимых гомогенных реакций [5, 18, 19]

$$R_{\mathrm{O}} = -m_{\mathrm{O}}\frac{\rho}{m}\theta\left[2k_1 d_{\mathrm{O}} v_1 + (k_3 d_{\mathrm{O}} + k_4 d_{\mathrm{CO}})\, v_3\right], R_{\mathrm{CO}} = -m_{\mathrm{CO}}\frac{\rho}{m}\theta\left(k_3 d_{\mathrm{O}} + k_4 d_{\mathrm{CO}}\right) v_3,$$

$$R_{\mathrm{CO_2}} = m_{\mathrm{CO_2}}\frac{\rho}{m}\theta\left[(k_3 d_{\mathrm{O}} + k_4 d_{\mathrm{CO}})\, v_3 + l_{\mathrm{O}} k_3 K_3 d_{\mathrm{O}} v_4,\right], R_{\mathrm{N}} = -2m_{\mathrm{N}}\frac{\rho}{m}\theta k_2 d_{\mathrm{N}} v_2,$$

$$d_{\mathrm{O}} = \frac{1}{l_{\mathrm{O}} x_{\mathrm{O}} + l'_{\mathrm{O}} x_{\mathrm{CO}} + K_5/p},\ d_{\mathrm{CO}} = \frac{1}{l_{\mathrm{CO}} x_{\mathrm{O}} + K_7/p},\ d_{\mathrm{N}} = \frac{1}{l_{\mathrm{N}} x_{\mathrm{N}} + K_6/p},$$

$$v_1 = x_{\mathrm{O}}^2 - \frac{K_{p1}}{p} x_{\mathrm{O_2}}, v_2 = x_{\mathrm{N}}^2 - \frac{K_{p2}}{p} x_{\mathrm{N_2}}, v_3 = x_{\mathrm{O}} x_{\mathrm{CO}} - \frac{K_{p3}}{p} x_{\mathrm{CO_2}}, v_4 = x_{\mathrm{O}} x_{\mathrm{CO_2}} - K_{p4} x_{\mathrm{O_2}} x_{\mathrm{CO}}.$$

Здесь K_{pk} – константы равновесия соответствующих реакций в газовой фазе.

Величины l_i равны отношениям констант скоростей процессов Или-Райдила к константам скоростей реакций адсорбции

$$l_{\mathrm{O}} = \frac{k_1}{k_5}, \quad l'_{\mathrm{O}} = \frac{k_3}{k_5}, \quad l_{\mathrm{N}} = \frac{k_2}{k_6}, \quad l_{\mathrm{CO}} = \frac{k_4}{k_7}.$$

Доля незанятой поверхности θ определяется из выражения

$$\frac{1}{\theta} = 1 + (x_{\mathrm{O_2}} l_{\mathrm{O}} K_1 + x_{\mathrm{CO_2}} l'_{\mathrm{O}} K_3 + x_{\mathrm{O}}) d_{\mathrm{O}} + (x_{\mathrm{N_2}} l_{\mathrm{N}} K_2 + x_{\mathrm{N}}) d_{\mathrm{N}} + (x_{\mathrm{CO_2}} l_{\mathrm{CO}} + x_{\mathrm{CO}}) d_{\mathrm{CO}}.$$

Учитывая, что при $T_w \leq 3000\mathrm{K}$ величины $K_{pi} << 1$, массовые скорости рекомбинации атомов кислорода и молекул окиси углерода в гетерогенных каталитических реакциях можно приближенно записать в виде

$$R_{\mathrm{O}} = -\rho\left(k_{\mathrm{O}}^{(1)} c_{\mathrm{O}} + k_{\mathrm{O}}^{(3)} c_{\mathrm{CO}} + k_{\mathrm{O}}^{(4)} c_{\mathrm{O}}\right), \quad R_{\mathrm{CO}} = -\rho\left(k_{\mathrm{CO}}^{(3)} c_{\mathrm{CO}} + k_{\mathrm{CO}}^{(4)} c_{\mathrm{O}}\right).$$

Здесь

$$k_{\mathrm{O}}^{(1)} = 2\gamma_1^* \sqrt{\frac{RT}{2\pi m_{\mathrm{O}}}}, \quad k_{\mathrm{O}}^{(3)} = \frac{m_{\mathrm{O}}}{m_{\mathrm{CO}}}\gamma_3^* \sqrt{\frac{RT}{2\pi m_{\mathrm{CO}}}}, \quad k_{\mathrm{O}}^{(4)} = \gamma_4^* \sqrt{\frac{RT}{2\pi m_{\mathrm{O}}}},$$

$$k_{\mathrm{CO}}^{(3)} = \gamma_3^* \sqrt{\frac{RT}{2\pi m_{\mathrm{CO}}}}, \quad k_{\mathrm{CO}}^{(4)} = \frac{m_{\mathrm{CO}}}{m_{\mathrm{O}}} \gamma_4^* \sqrt{\frac{RT}{2\pi m_{\mathrm{O}}}},$$

$$\gamma_1^* = \gamma_1 \theta_{\mathrm{O}}^*, \quad \gamma_3^* = \gamma_3 \theta_{\mathrm{O}}^*, \quad \gamma_4^* = \gamma_4 \theta_{\mathrm{CO}}^*, \, \theta_{\mathrm{O}}^* = \theta x_{\mathrm{O}} d_{\mathrm{O}}, \quad \theta_{\mathrm{CO}}^* = \theta x_{\mathrm{CO}} d_{\mathrm{CO}},$$

где c_{i} – массовые концентрации компонентов. Коэффициенты $\gamma_1^*, \gamma_3^*, \gamma_4^*$, представляют вероятности рекомбинации атомов кислорода и молекул окиси углерода в соответствующих реакциях Или–Райдила с учетом заполненности активных центров адсорбированными частицами.

2. Для описания каталитических свойств поверхности в рамках предложенной модели катализа необходимо указать зависимость величин γ_j, $j = 1, .., 7$ и констант равновесия реакций адсорбции $K_j, j = 5, .., 7$ от температуры. В настоящей работе используется модельное представление этих функций, параметры которых находятся из эксперимента.

Рассмотрены три вида силицированных покрытий теплозащитных материалов (ТЗМ): стекловидное покрытие плиточной теплозащиты ВКС «Буран» на основе системы $\mathrm{SiO_2} - \mathrm{B_2O_3} - \mathrm{SiB_4}$ (покрытие I), окислительно стойкое покрытие углеродного ТЗМ на основе алюмоборосиликатного стекла с добавкой $\mathrm{MoSi_2}$ (покрытие II) и покрытие нового композитного ТЗМ [21] на основе системы $\mathrm{Hf} - \mathrm{Si} - \mathrm{C} - \mathrm{B}$ (покрытие III). Для этих материалов получены на высокочастотном плазматроне экспериментальные данные о тепловых потоках для трех режимов дозвукового обтекания модели [20]. Так как в экспериментах использовался углекислый газ, адсорбция и гетерогенная рекомбинация атомов азота при их обработке не учитывались.

Для уменьшения числа параметров модели на основе анализа литературных данных сделаны следующие упрощающие предположения:

1) статистические суммы $Q_{(\mathrm{A-S})}$ и Q_S совпадают;

2)вероятности адсорбции и рекомбинации могут быть представлены в виде аррениусовой зависимости от температуры $\gamma_j(T) = a_j \exp(-E_j^{ER}/RT)$, при этом процесс адсорбции идет с нулевой энергией активации ($\gamma_5 = \mathrm{const}, \gamma_7 = \mathrm{const}$).

3. Имеющиеся экспериментальные данные не позволяют однозначно определить все параметры модели катализа. Их величины варьировались в разумных пределах при выполнении условия, что среднеквадратичное отклонение рассчитанных тепловых потоков от экспериментально измеренных не превышает 5%. Тепловые потоки рассчитывались в настоящей работе, также как и в [20], в рамках задачи о пограничном слое конечной толщины с использованием модели газовой среды, подробно описанной в [22]. При таком подходе состав газа на внешней границе пограничного слоя считается равновесным. Температура газа на внешней границе пограничного слоя находилась из условия совпадения рассчитанных и измеренных тепловых потоков q_w^{fc} к холодной идеально каталитической поверхности ($T_w = 300\mathrm{K}, \quad \gamma_i^* = 1$). Последние были выбраны на основе анализа экспериментальных данных для медной и серебряной поверхностей [20, 23] и приведены в таблице 1.

Таблица 1.

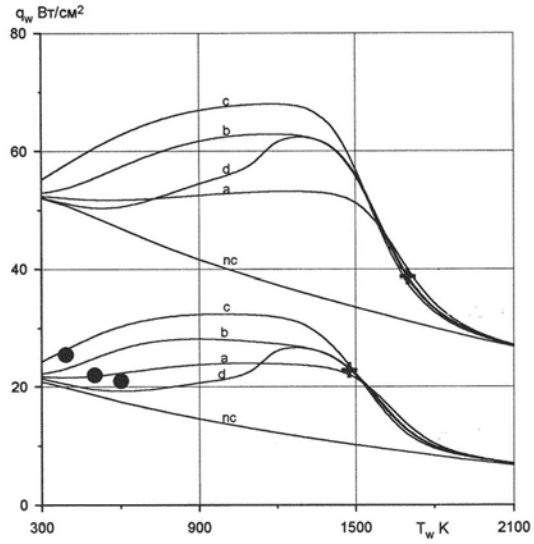


Рис. 1.

Параметры	Режимы		
	1	2	3
p_e, гПа	100	100	100
T_e, К	3320	4360	5800
V_s, м/с	47,3	76,1	105,6
q_w^{fc} Вт/см^2	46,4	74,4	103,7
N квт	29	37	44
Δp, Па	10,5	17,5	24,5

В этой таблице для трех режимов обтекания приведены также скорость дозвуковой струи в центре выходного сечения канала плазматрона V_s , давление p_e на внешней границе пограничного слоя, подводимая к индуктору мощность N и скоростной напор Δp.

На рис. 1 в зависимости от температуры поверхности представлены рассчитанные тепловые потоки к покрытию I в критической точке экспериментальной модели для первого (нижний набор кривых) и третьего (верхний набор кривых) режимов испытаний при различных наборах параметров модели катализа в условиях экспериментов [20]. Точками 1 отмечены экспериментальные результаты, по которым выбирались параметры модели, а кривые *n* соответствуют тепловым потокам в случае некаталитической поверхности. Кривые *a,b,c* получены без учета адсорбции молекул CO, а кривая *d* – с учетом адсорбции CO. Кривая *c* соответствует модели, в которой процесс адсорбции атомов O близок к равновесному.

Значения параметров, при которых получены кривые, приведены в таблице 2, где величины энергий активации и теплот адсорбции даны в Кдж/моль. Там же приведены значения параметров модели, выбранные для покрытий II и III.

Таблица 2.

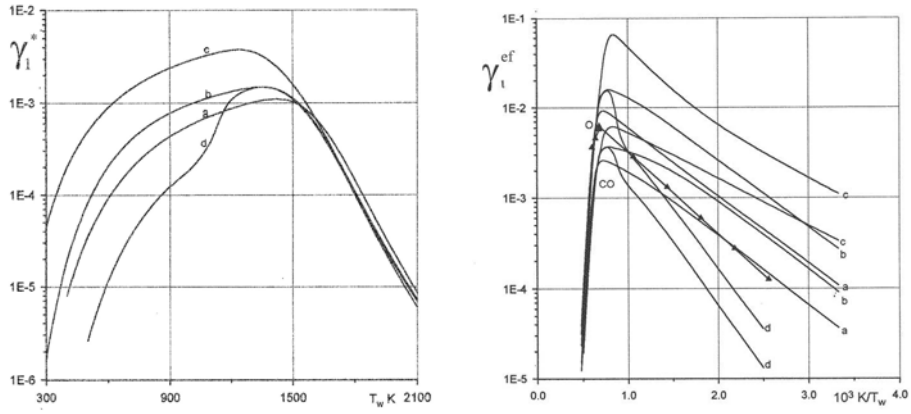


Рис. 2.

кривая	a_1^{ER}	a_2^{ER}	a_3^{ER}	γ_5	γ_7	E_{O}^{ad}	E_{CO}^{ad}	E_1^{ER}	E_2^{ER}	E_3^{ER}
a	0.015	0.015	0	0.025	0	300	0	25	15	0
b	0.038	0.038	0	0.025	0	280	0	25	15	0
c	0.018	0.018	0	1.0	0	280	0	15	10	0
d	0.038	0.038	0.038	0.025	0.013	280	280	25	15	25
покрытие II	0.016	0.016	0	0.016	0	380	0	20	25	0
покрытие III	0.042	0.042	0	0.025	0	400	0	15	25	0

Отметим, что предсказываемые тепловые потоки к поверхности с покрытием I при низких температурах удовлетворительно согласуются по величине с экспериментальными тепловыми потоками для кварца (точки 2) [23], в основном определяющего каталитические свойства этого покрытия. Вместе с тем, в промежуточной области изменения температуры $400 < T < 1400$K различие в величинах тепловых потоков, полученных при различных наборах параметров модели достигает 50%. При наличии дополнительных экспериментальных данных по тепловым потокам в этой температурной области параметры модели могут быть уточнены.

На рис. 2 в зависимости от обратной температуры представлены полученные в расчетах величины вероятности рекомбинации атомов кислорода при столкновении с поверхностью γ_1^* в реакции Или–Райдила для тех же наборов параметров модели описания каталитических свойств покрытия I. Вероятность рекомбинации является произведением двух функций $\gamma_1^* = \gamma_1\theta_{\mathrm{O}}^*$. Одна из них возрастает с ростом температуры, а другая, как показали расчеты, при больших температурах резко убывает. В связи с этим образуется четко выраженный максимум при $T_w \approx 1350$ K. Причина такого поведения этой величины обусловлена тем, что при достаточно низких температурах поверхность полностью покрыта адсорбированными компонентами, однако скорость рекомбинации за счет реакции Или-Райдила мала. При увеличении температуры скорость рекомбинации растет, а с ней растет и коэффициент каталитической активности. При достаточно высоких температурах (для каждого покрытия

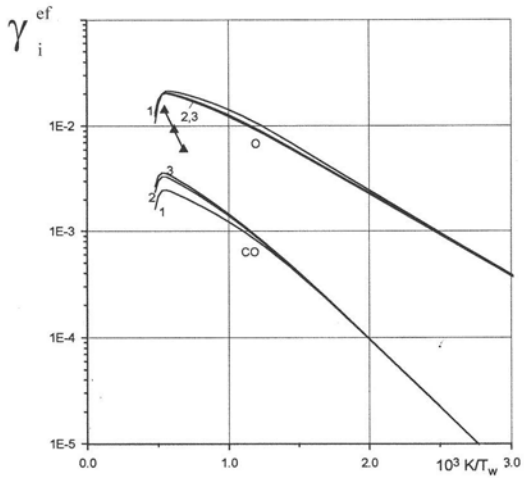


Рис. 3.

своей) преобладают процессы термической десорбции, степень заполнения поверхности уменьшается, и результирующая константа скорости гетерогенной рекомбинации атомов кислорода также уменьшаются. Ранее этот факт был обнаружен в диссоциированном воздухе [5, 6] и подтвержден экспериментально [24]. Из рис. 2 видно, что максимальное значение γ_1^* не превышает 10^{-2} и в зависимости от выбора параметров модели катализа может меняться в пределах порядка.

На рис. 2 для покрытия I в первом режиме испытаний для различных наборов параметров модели представлены в зависимости от обратной температуры эффективные коэффициенты гетерогенной рекомбинации γ_{O}^{ef} и $\gamma_{\mathrm{CO}}^{ef}$, определяемые выражениями

$$R_{\mathrm{O}} = -\rho\gamma_{\mathrm{O}}^{ef}\sqrt{\frac{RT}{2\pi m_{\mathrm{O}}}}c_{\mathrm{O}}, \quad R_{\mathrm{CO}} = -\rho\gamma_{\mathrm{CO}}^{ef}\sqrt{\frac{RT}{2\pi m_{\mathrm{CO}}}}c_{\mathrm{CO}}.$$

Там же дана аппроксимация этих величин (точки) [23], полученная на основе обработки экспериментальных данных с использованием более простой модели катализа, в которой, в частности, считалось, что $\gamma_{\mathrm{O}}^{ef} = \gamma_{\mathrm{CO}}^{ef}$.

Видно, что в области $T_w \leq 1500$K имеется значительный разброс рассчитанных значений γ_{O}^{ef} и $\gamma_{\mathrm{CO}}^{ef}$ в зависимости от набора параметров модели. Аппроксимация [23] хорошо согласуется с кривыми a, располагаясь между γ_{O}^{ef} и $\gamma_{\mathrm{CO}}^{ef}$.

Аналогичные результаты для покрытия III представлены на рис. 3 для трех режимов испытаний (кривые 1, 2, 3 соответственно).

Экспериментально – расчетные результаты также располагаются между рассчитанными γ_{O}^{ef} и $\gamma_{\mathrm{CO}}^{ef}$. Отметим некоторое расслоение кривых для разных режимов испытаний, что обусловлено зависимостью эффективных коэффициентов гетерогенной рекомбинации не только от температуры, но и других параметров течения у поверхности (концентраций и давления). Различный характер зависимости γ^{ef} для покрытий II, III с одной стороны и для покрытия I с другой стороны в высокотемпературной области, отмеченный в [20], можно объяснить разницей теплот адсорбции

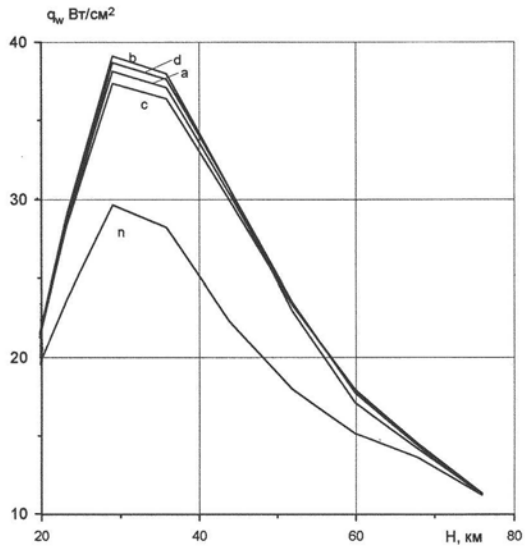


Рис. 4.

на этих покрытиях, определяющих положение точки максимума этих величин в зависимости от температуры. Из рис. 2 видно, что для покрытия I эксперименты проводились в области изменения температуры, расположенной слева от того значения, при котором достигается максимальное значение γ^{ef}, а для покрытия III – справа от этой точки. Такой же факт имеет место и для покрытия II.

4. С целью оценки влияния модели катализа на величины тепловых потоков к поверхности марсианских космических аппаратов проведены расчеты обтекания сферического затупления радиуса $R_0 = 0,38$ м для условий, соответствующих траектории спуска аппарата Mars miniprobe с таким же радиусом затупления тормозного щита [25]. Использованные в расчетах параметры набегающего потока для рассмотренных точек траектории спуска приведены в таблице 3. Расчет обтекания выполнен в рамках приближения вязкого ударного слоя. Модель газовой среды и метод решения уравнений подробно описаны в [22]. Предполагалось, что марсианская атмосфера состоит из $95,7\%$ углекислого газа, $2,7\%$ азота и $1,6\%$ аргона. В силу аддитивного характера структурных формул при описании гетерогенной рекомбинации атомов азота были использованы результаты [5, 6], полученные при исследовании теплообмена в диссоциированном воздухе с многоразовыми покрытиями на кремнеземной основе. Поверхность предполагалась равновесно излучающей. Коэффициенты черноты поверхности определялись в соответствии с рекомендациями [20].

На рис. 4 в зависимости от высоты полета H приведены величины тепловых потоков в точке торможения для покрытия I при указанных выше вариантах модели катализа. Отметим, что влияние вариации наборов параметров модели на величины максимальных тепловых потоков не превышает нескольких процентов. Это объясняется прежде всего тем, что условия экспериментов [20], на основе которых были выбраны эти параметры, близки к натурным условиям полета, при которых достига-

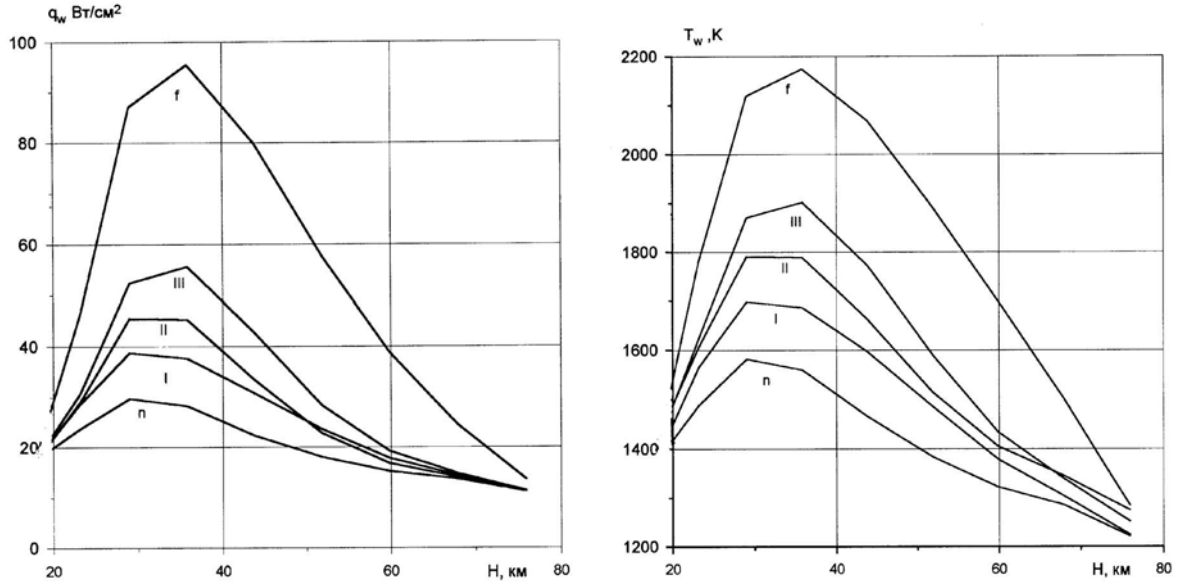


Рис. 5.

ются максимальные тепловые нагрузки.

На рис. 5 в зависимости от высоты полета для покрытий I (вариант *a*), II и III, а также для некаталитической (кривая *n*) и идеально каталитической поверхностей (кривая *f*) приведены соответственно величины тепловых потоков и равновесной радиационной температуры поверхности в точке торможения. Эти результаты показывают, что самую низкую каталитическую активность имеет покрытие I. За счет его использования максимальный тепловой поток может быть снижен в 2,5 раза по сравнению с тепловым потоком к идеально каталитической поверхности. Соответствующее снижение равновесной радиационной температуры поверхности составляет $\approx$ 500K. Для сравнения, за счет использования некаталитической поверхности, максимальный тепловой поток может быть снижен в 3,2 раза.

Более высокие значения тепловых потоков и температуры поверхности достигаются при использовании покрытий II и III. Тем не менее, для всех покрытий максимальные температуры поверхности на данной траектории не превышают предельно допустимые температуры для таких покрытий в случае длительного использования (соответственно 1800K для первого и второго покрытий и 1900K для третьего покрытия).

Заключение. На основе теории идеального адсорбированного слоя Ленгмюра предложена модель взаимодействия диссоциированной смеси углекислого газа и азота с каталитической поверхностью, учитывающая неравновесный характер протекания реакций адсорбции–десорбции и реакций Или–Райдила. Получены структурные формулы для коэффициентов каталитической активности от условий на поверхности (температуры, давления и концентраций компонентов). С помощью интерпретации экспериментальных данных, полученных на индукционном плазматроне [20], опре-

делены параметры модели для трех покрытий высокотемпературных теплозащитных материалов. Выполненные исследования показали, что для более точного моделирования каталитических свойств поверхности необходимы дополнительные экспериментальные данные в более широком диапазоне определяющих параметров.

Для условий входа космического аппарата Mars miniprobe в атмосферу Марса проведено сравнение эффективности указанных покрытий. Полученные результаты показали возможность их использования в системе теплозащиты аппарата. В частности, установлено, что использование стекловидного покрытия плиточной теплозащиты космического аппарата «Буран» приводит к снижению максимального вдоль траектории теплового потока к лобовой поверхности аппарата в 2,5 раза по сравнению с идеально каталитической поверхностью и уменьшению максимальной температуры поверхности с 2170 до 1695 К.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00759) и ФЦП «Интеграция» (код проекта 1009).

Литература

[1] *Баронец П. Н., Гордеев А. Н., Колесников А. Ф. и др.* Отработка теплозащитных материалов орбитального корабля «Буран» на индукционных плазмотронах. — Гагаринские научные чтения по авиации и космонавтике 1990, 1991, М.: Наука, 1991.

[2] *Лозино-Лозинский Г. Е.* Полет «Бурана». — Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации 1989, М.: Наука, 1990.

[3] *Scott C. D.* Effect of nonequilibrium and wall catalysis on shuttle heat transfer. — J. Spacecraft and Rockets, 1985, V. 22, № 5.

[4] *Полянский О. Ю., Кузнецов М. М., Меньшикова В. Л. и др.* Влияние свойств реального газа на аэродинамические и тепловые характеристики гиперзвуковых летательных аппаратов. — ЦАГИ, ОНТИ, Обзоры, 1987, № 676.

[5] *Ковалев В. Л., Суслов О. Н.* Модель взаимодействия частично ионизованного воздуха с каталитической поверхностью. — Исследования по гиперзвуковой аэродинамике и теплообмену с учетом неравновесных химических реакций, М.: МГУ, 1987.

[6] *Ковалев В. Л., Суслов О. Н.* Моделирование взаимодействия частично ионизованного воздуха с каталитической поверхностью высокотемпературной теплоизоляции. — Изв. РАН, МЖГ, № 5, 1996.

[7] *Залогин Г. Н., Лунев В. В.* О каталитических свойствах материалов в неравновесном потоке диссоциированого воздуха. — Изв. РАН, МЖГ, 1997, № 5.

[8] *Jumper E. J., Seward W. A.* Model for oxigen atom recombination on silicon–dioxide surfaces. — J. Thermophysics and Heat Transfer, 1991, V. 5, № 3.

[9] *Willey R. J.* Comparison of kinetic models for atom recombination on high - temperature reusable surface insulation. — J. Thermophysics and Heat Transfer, 1993, V. 7, № 1.

[10] *Deutschmann O., Riedel U., Warnatz J.* Modeling of nitrogen and oxygen recombination on partial catalytic surfaces. — Universitat Stuttgart, Institut fur Technische Verbrennung, Preprint № 23, Juni 1994, ASME J. of Heat Transfer.

[11] *Nasuti F., Barbato M., Bruno C.* Material – dependent catalytic recombination modeling for hypersonic flows. — J. Thermophysics and Heat Transfer, 1996, V. 10, № 1.

[12] *Daiss A., Frühauf H.H., Messerschmid E. W.* Modeling of catalytic reactions on silica surfaces with consideration of slip effects. — J. Thermophysics and Heat Transfer, 1997, V. 11, № 3.

[13] *Langmuir I.* Monolayers on Solids. — J. Chemical Society, 1940, V. 4.

[14] *Ковалев В. Л., Колесников А. Ф., Крупнов А. А., Якушин М. И.* Анализ феноменологических моделей, описывающих каталитические свойства поверхности высокотемпературной многоразовой теплоизоляции. — Изв. РАН, МЖГ, 1996, № 6.

[15] *Chen Y. K., Henline W. D., Stewart D. A., Candler G. V.* Navier-Stokes solution with surface catalysis for Martian atmospheric entry. — J. Spacecraft and Rockets, 1993, V. 30, № 1.

[16] *Mitcheltree R. A., Gnoffo P. A.* Wake flow about the Mars Pathfinder entry vehicle. — J. Spacecraft and Rockets, 1995, V. 32, № 5.

[17] *Gupta R. N., Lee K. P., Scott C. D.* Aerotermal study of Mars Pathfinder Aeroshell. — J. Spacecraft and Rockets, 1996, V. 33, № 1.

[18] *Ковалев В. Л.* Феноменологические модели каталитических свойств теплозащитных покрытий космических аппаратов, входящих в атмосферу Марса. — Труды XIV сессии Международной школы по моделям механики сплошной среды, М.: МФТИ, 1998.

[19] *Ковалев В. Л.* Моделирование каталитических свойств теплозащитных покрытий при входе в атмосферу Марса. — Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, Математика. Механика., 1999, № 1.

[20] *Быкова Н. Г., Васильевский С. А., Гордеев А. Н., Колесников А. Ф., Першин И. С., Якушин М. И.* Определение эффективных вероятностей каталитических реакций на поверхностях теплозащитных материалов в потоках диссоциированного углекислого газа. — Изв. РАН, МЖГ, 1997, № 6.

[21] *Кравецкий Г. А., Кузнецов А. В., Костиков В. И., Родионов В. В.* Жаростойкое противоокислительное защитное покрытие на углерод–углеродных, углерод – карбидокремниевых материалах и элементы конструкции из них для авиационной, ракетно–космической техники. — Тр. 1–й Междунар. авиационно–космической конф. «Человек–Земля–Космос», 1992, Т. 5, Материалы и технология производства авиационно – космической техники, М.: Инж. академия, 1995.

[22] *Афонина Н. Е., Громов В. Г.* Исследование на основе модели вязкого ударного слоя течения в области торможения при входе космического аппарата в марсианскую атмосферу. — Препринт № 31 – 97, М.: ИМ МГУ, 1997.

[23] *Kolesnikov A. F., Pershin I. S., Vasil'evskii S.A., and Jakushin M. I.* Study of quartz surface catalycity in dissociated carbon dioxide subsonic flows. — AIAA Paper 98 – 2847, 1998.

[24] *Kolodziej P., Stewart D. A.* Nitrogen recombination on high – temperature reusable surface insulation and the analysis of its effects on surface catalysis. — AIAA Paper 87 – 1637, 1987.

[25] *V. Rubio Garcia, L. Marraffa, G. Scoon, R. Roumeas, R. Seiler.* Mars Mini-probes. Elements of aerothermodynamics and entry trajectories. — Proceedings of the Third European Symposium on Aerothermo-dynamics for Space Vehicles, ESTEC, Noordwijk, The Netherlands 24 – 26 November 1998.

Макромеханика и микромир. Механическая модель фотона

Куксенко Б. В.

Настоящая работа исходит из представления о том, что наблюдаемые в макромире законы сохранения не нарушаются при сколь угодно малых размерах природных объектов. Однако, законы эти установлены применительно к макрообъектам, каждый из которых состоит из множества микрообъектов, отдельные специфические свойства которых стерты осреднением. Закон сохранения не может исчезнуть при переносе его применения с макрообъекта на микрообъект, но при описании микрообъекта следует учитывать его специфику и те свойства, которые прячутся при осреднении.

Главная отличительная особенность микрообъектов — дуализм «волна-частица» — наличие волны де Бройля у объекта, который имеет индивидуальность. Дуализм неразрывен в силу того, что определенную длину волны λ может иметь только объект, обладающий определенным импульсом p, т.е. частица. Формула связи этих величин содержит h — постоянную Планка

$$\lambda = \frac{h}{p}\,. \tag{1}$$

Макромеханика и микромеханика различаются не только и не столько характерными размерами и массами. Более существенным является различие в диапазонах характерных скоростей. Скорости микромира намного больше. По этой причине релятивистские поправки в механике сплошной среды наблюдаются только в составе потоковых членов уравнений импульса и энергии [1, 2] и почти нераспознаваемы. Скорости малых частиц измеряются уже в долях скорости света. Поэтому избежать использования представлений о сокращении с точки зрения наблюдателя длин движущихся отрезков невозможно [1].

Соотношение между энергией ε**,** скоростью света в вакууме c и массой m

$$\varepsilon = m\,c^2 \tag{2}$$

принадлежит к описанию не только микромира. Но в макромеханике с помощью соотношения (2) наличествующую энергию можно разделить на неизменяемую (массу) и изменяемую (просто энергию). При этом при малых скоростях обыденного мира для массы устанавливается дополнительный закон сохранения (верный с точностью до релятивистских поправок). В микромире (2) работает, образно выражаясь, всегда и везде.

[1] Подчеркнем, что сами отрезки никакого продольного сокращения не имеют хотя бы потому, что в разных системах отсчета их скорость различна и по направлению и по величине. Сокращаются образы этих отрезков, причем к психологии явление отношения не имеет: любой способ регистрации покажет, что образ движущегося отрезка объективно короче отрезка-прообраза.

В микромир следует вернуть понятие о траектории. Однако, дуализм частица-волна вынуждает несколько изменить смысл привычных терминов. Частица, поскольку она является волной, протяженна и не допускает представления в виде материальной точки с точными координатами. Но она имеет точное значение импульса (для которого существует закон сохранения), которое как и энергию следует приписать к центру массы волны-частицы. Неопределенность в координате отражает соотношение между вполне определенным положением центра массы и неопределенным понятием о координате частицы. Другой источник неопределенности заключается в незнании положения частицы на замкнутой ее траектории, которая может быть построена по законам макромеханики. Имея вполне определенное значение модуля импульса p на круговой орбите, частица при проектировании его на произвольное фиксированное направление в ее плоскости может иметь значение проекции произвольным между $+p$ и $-p$.

В данной статье методология исследования принадлежит механике классической. Работа выполнена в соответствии с методом построения модели атома водорода, которая принадлежит Нильсу Бору [3].

1. Модель построена на аналогии с распространением поперечных возмущений по однородной нити (линейная плотность ρ) с постоянным натяжением T. Скорость u распространения поперечных возмущений по ней постоянна и составляет

$$u = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\,. \tag{3}$$

Для малых по амплитуде возмущений это утверждение обосновать легко. Если в составе нити выделить малый отрезок ds, то его масса составит $m = \rho\, ds$. Причиной для возникновения поперечного ускорения для него может быть только рассогласование $d\vartheta$ углов наклона нити ϑ в начале и в конце отрезка. Поскольку сами наклоны малы, синусы углов заменяются на их аргументы, в результате находим величину поперечной составляющей главного вектора приложенных к отрезку сил в виде

$$df_{\perp} = T d\vartheta\,. \tag{4}$$

Чтобы сэкономить на выкладках, предположим, что волна поперечного возмущения распространяется вдоль нити с неизвестной скоростью u. И пусть в инерциальной системе отсчета, которая движется, сопровождая волну в том же направлении, форма волны неизменна. В такой системе все ускорения — конвективные. Поперечные ускорения являются центростремительными, направленными к центру кривизны (радиус кривизны обозначим R). Центростремительное ускорение $a_{\perp}$ выражается через окружную скорость и радиус кривизны

$$a_{\perp} = \frac{u^2}{R}\,, \qquad \text{где} \qquad \frac{1}{R} = \frac{d\vartheta}{ds}\,. \tag{5}$$

Употребив второй закон Ньютона для силы (4) массы $\rho\, ds$ и ускорения (5), имеем равенство

$$\frac{u^2}{R} = \frac{T\, d\vartheta}{\rho\, ds} = \frac{T}{\rho\, R} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\rho\, u^2 = T}\,, \tag{6}$$

из которого следует (3).

Но даже когда возмущения не малы, в системе отсчета, сопровождающей поперечное возмущение, полный поток импульса $\rho\, u^2 - T$, идущий в область возмущения с обеих сторон, равен нулю в силу (6). А безмоментная нить при нулевом продольном потоке импульса способна сохранять любую форму. Поэтому поперечное возмущение нити *может иметь* форму круговой петли произвольного радиуса. Такая петля будет как бы катиться по нити со скоростью поперечной волны u, сохраняя свою форму и размеры. В самом деле, если взять изготовленную из нити окружность с радиусом R, которая вращается с постоянной окружной скоростью u в плоскости вокруг своего центра, то малому центральному углу $d\vartheta$ на этой окружности соответствует малая дуга $R\, d\vartheta$, имеющая массу $\rho\, R\, d\vartheta$. Центростремительное ускорение u^2/R для массы создается натяжением нити за счет того, что усилия натяжения T на концах отрезка рассогласованы на угол $d\vartheta$ и их равнодействующая $T\, d\vartheta$ направлена к центру окружности. Умножим массу на ускорение и приравняем к силе:

$$\rho\, R\, d\vartheta\, \frac{u^2}{R} = T\, d\vartheta.$$

Результатом будет соотношение (6). Если эта нитяная окружность катится по прямолинейно натянутой усилием T такой же нити, то точка соприкосновения бежит по нити со скоростью поперечной волны. Вот такая петля и является прообразом фотона в нашей теоретической схеме.

2. По своим механическим свойствам находящаяся в вакууме электрическая силовая линия с напряженностью E является безмоментной нитью с усилием натяжения $T = E$ [Н=Дж/м], каждый метр которой содержит E джоулей энергии переносчиков потока импульса E вдоль этой линии и, значит, имеет массу $\rho = E/c^2$, которая постоянна вдоль этой линии. Следовательно, нить однородна. Скорость распространения поперечных возмущений вдоль нее в соответствии с (3) равняется скорости света:

$$u = \sqrt{\frac{E}{E/c^2}} = c\,.$$

Значит, возникший при внешнем воздействии на силовую линию ее перехлест способен приобрести круговую форму и как бы покатиться со скоростью света вдоль этой линии.

3. Аналогия почти полная, за единственным исключением: в петлю на нити входят и из нее выходят разные материальные точки нити, а петля силовой линии

способна замкнуться сама на себя и продолжать движение вдоль породившей ее силовой линии всего лишь как вдоль направляющей. В такой ситуации колечко уже самостоятельно, а силовая линия может быть использована в качестве разметки в пространстве в ответах на вопросы типа: «В чем движется? Относительно чего движется?». Отделившееся колечко способно продолжить движение и после того, как окончательно станет самостоятельным. По нашему мнению таков фотон, который движется потому, что является переносчиком порции импульса, которая отправила его в путешествие. При наблюдениях извне корпускулярные свойства очевидны: фотон-колечко может быть один и при этом может быть зарегистрирован. Эта частичка неделима: при попытке оторвать от нее кусочек, эта динамическая система саморазрушится. С другой стороны, наличие волновых свойств неоспоримо, поскольку это всего-навсего оторвавшаяся волна специфического поперечного возмущения, стабильность ее скорости обеспечивается природной стабильностью скорости поперечных возмущений на электрических силовых линиях.

4. Вычислим характеристики фотона по нашей модели. Это удобнее всего сделать в момент рождения, пока колечко не отделилось от силовой линии. Радиус окружности обозначим R, ее длина — $L = 2\pi R$, усилие натяжения (и энергия единицы длины) — E, полная энергия — $\varepsilon = LE = 2\pi RE$. Полная масса колечка $M = \varepsilon/c^2$, оно движется со скоростью c, поэтому его полный импульс равен $p = M\,c$. Кроме того, $M = \rho L, p = \rho Lc$. Масса, энергия и импульс подсчитаны наблюдателем, расположенным на силовой линии для объекта, движущегося со скоростью света (геометрические искажения формы фотона на массе, энергии и импульсе не сказываются).

Для такого объекта существуют только два класса инерциальных систем отсчета: в одних он движется со скоростью света, в других его центр массы покоится. Для вычисления момента количества движения следует расположиться в собственной системе отсчета, связав ее с центром окружности. В этой системе материал колечка (масса M) по предположению тоже движется со скоростью света, но по окружности с радиусом R. Поэтому его кинетический момент равен произведению импульса p на радиус

$$J = p\,R = \frac{pL}{2\pi}\,. \tag{7}$$

Для того, чтобы колечко могло замкнуться, его волна де Бройля (1) должна натуральное число раз n разместиться на его же длине $L = n\lambda = nh/p$. Умножив все части последнего равенства на p, получаем связь напряженности силовой линии с длиной волны де Бройля

$$p\,L = \rho\,L^2 c = \rho\,n^2\lambda^2 c = n\,h \qquad \Longrightarrow \qquad \rho = \frac{h}{n\lambda^2 c}\,, \quad E = \frac{hc}{n\lambda^2} \tag{8}$$

и выражение для полной энергии фотона через длину волны и частоту $\nu = c/\lambda$

$$\varepsilon = E\,L = \frac{hc\,n\lambda}{n\lambda^2} = \frac{hc}{\lambda} = h\,\nu\,.$$

Видно, что при любом квантовом числе наша модель воспроизводит формулу, хорошо известную для фотонов.

5. Для вычисления спина s пересчитаем кинетический момент (7), выразив его с помощью (8) через $\hbar = h/2\pi$

$$J = \frac{n\,h}{2\pi} = n\,\hbar \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{s = n}\,,$$

что при $n = 1$ дает известное значение спина фотона $s = 1$. Мы не будем обсуждать возможность существования природных фотонов в состояниях при $n > 1$. По фотоэффекту они неразличимы между собой, исследование более тонких эффектов — дело специалистов.

6. Наш фотон в собственной системе координат имеет определенную массу, форму и определенное распределение скоростей в проекции на собственную плоскость. Но именно в этой системе отсчета его проекция на перпендикулярное к плоскости направление вообще не определена, если силовая линия допускает продольное расщепление. Из физических соображений понятно, что стягивание в этом направлении может быть обеспечено магнитным полем, но в собственной системе отсчета оно равно нулю.

7. Для наблюдателя, не связанного с фотоном, в соответствии с теорией относительности, наблюдаемая длина всех его продольных отрезков будет нулевой. Окружность, летящая в направлении одного из своих диаметров, превратится в глазах наблюдателя в перпендикулярный к направлению скорости полета разрезанный вдоль отрезок с длиной $2R$, вдоль которого на разных берегах будет наблюдаться противоположное направление движения и вектора электрической напряженности. Если бы можно было в одной из точек колечка поставить метку, то мы увидели бы вместо его вращения синусоидальные колебания. Направление отрезка-фотона совместно с направлением движения фотона задают плоскость его поляризации.

Использование уравнений Максвелла для определения магнитного поля у модели движущегося фотона затруднено, поскольку его электрическое поле описывается только обобщенными функциями и вне отрезка равно нулю. Из качественных соображений следует, что магнитное поле, перпендикулярное электрическому, не будет выходить в окружающее пространство, а окажется как бы намотанным на два берега разреза. По толщине оно описывается обобщенными функциями, а вдоль отрезка — косинусом от длины, с началом отсчета в центре отрезка и с нулями на концах.

8. Такой фотон излучать не может. К тому же его волна де Бройля квазистационарна и монохроматична, групповая скорость себя не проявляет, волновой пакет не существует.

9. Усилие натяжения — напряженность силовой линии в поляризующейся среде уменьшается, а линейная плотность за счет массы присоединенных зарядов растет. В соответствии с (3) скорость поперечной волны должна уменьшаться по сравнению с ее же скоростью в вакууме.

Литература

[1] *Куксенко Б. В.* О понятиях сила и работа в классической механике. — Вестник МГУ, Сер.1, Математика, механика, 2001, № 5.

[2] *Куксенко Б. В.* О возможности существования второй относительности. — Вестник МГУ, Сер.1, Математика, механика, 2002, № 1.

[3] *Вихман Э.* Квантовая физика. — Берклеевский курс физики, т.4, М. Наука, 1974.

Модель газовой детонации

Гендугов В. М.

Данная работа является развитием газодинамики воспламенения [1] — теории движения реагирующей смеси, альтернативной традиционной газодинамике горения. В ее основе лежит представление о том, что в смеси с несколькими наблюдаемыми реакциями процесс превращений осуществляется по макромеханизму связанных реакций [1, 2]. В рамках газодинамики воспламенения построена модель стационарной самоподдерживающейся детонации, исследована структура волны и выведены уравнения, определяющие ее скорость.

1. Исследование начнем с вывода уравнений газодинамики воспламенения. Рассмотрим вначале уравнения газодинамики горения, записанные в пренебрежении явлениями переноса. Такая система включает уравнения неразрывности, количества движения, энергии, состояния и концентраций компонентов смеси. После исключения зависимых концентраций с помощью уравнений закона сохранения атомов

$$c_k = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ki} c_i + \varphi_k, \quad k = 1, \ldots, N \tag{1}$$

перечисленные уравнения принимают вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} V = 0, \tag{2}$$

$$\rho \frac{dV}{dt} + \operatorname{grad} p = 0, \tag{3}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt}, \tag{4}$$

$$\rho = \rho\left(h, p, c_i\right), \tag{5}$$

$$\frac{dc_i}{dt} = E_i, \tag{6}$$

ρ, p, h, V — плотность, давление, энтальпия и вектор скорости; c_k — массовая концентрация (доля) k-го компонента; E_i — скорость i-й наблюдаемой реакции; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \operatorname{grad}$; $N - N_a = n$; N, N_a — число компонентов и сортов атомов; φ_{ki}, $\varphi_k = \mathrm{const}$.

Обратим внимание на то, что прежде чем принять замкнутую систему (2) – (6) за основу построения теории необходимо предварительно сформулировать гипотезу о зависимости или независимости системы. Газодинамика горения строится в рамках гипотезы о независимости уравнений (2) – (6). Тем самым неявно сформулирована физическая гипотеза (основное положение газодинамики горения): наблюдаемые

реакции E_i функционально независимы. Выясним следствие этого положения. Запишем уравнение состояния (5) в дифференциальной форме и, привлекая (4), (6), приведем его к виду

$$\frac{dp}{dt} - a_f^2 \frac{d\rho}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial c_i} E_i, \tag{7}$$

где $a_f^{-2} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial h} + \dfrac{\partial \rho}{\partial p}$, a_f — замороженная скорость звука.

Из (7) следует, что термодинамические параметры смеси испытывают локальное влияние скоростей реакции через их комбинацию в правой части уравнения, которая в силу функциональной независимости реакции отлична от нуля при $E_i \neq 0$.

В стремлении описать реальное поведение горючей смеси [3, 4] мы должны отказаться от основного положения газодинамики горения и строить теорию, газодинамику воспламенения, в основе которой лежит гипотеза о зависимости уравнений (2) – (6). При этом одной из возможной альтернативы, допускаемой законами сохранения и уравнением состояния, является функциональная зависимость между скоростями реакций

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial c_i} E_i = 0 \tag{8}$$

которую будем называть соотношением связанности n реакций.

Следствием связанности реакций является расщепление (7), которое приводит к распаду исходной системы уравнений на две подсистемы

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} V = 0, \quad \rho \frac{dV}{dt} + \operatorname{grad} p = 0, \quad \rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt}, \quad a_f^2 \frac{d\rho}{dt} = \frac{dp}{dt} \tag{9}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial c_i} E_i = 0, \quad \frac{dc_j}{dt} = E_j, \quad j = 1, \ldots, (n-1)\,. \tag{10}$$

Эти уравнения будем называть уравнениями газодинамики воспламенения.

2. Одним из центральных в теории детонации является вопрос о состоянии исходной горючей смеси газов, способной детонировать. Напомним, что в рамках традиционной термодинамики доказано [5, 6], что она химически неравновесна. При этом для всех типов протекания реакций равновесное состояние оказывается единственным, а соответствующий ему состав смеси в основном состоит из продуктов реакции. Вместе с тем в опытах наблюдается совершенно иная картина [3]. При параметрах вне области воспламенения смесь ведет себя как нейтральная среда. Рассмотрим поведение покоящейся реагирующей среды в рамках газодинамики воспламенения. Из (9) следует, что процесс превращений развивается в условиях $p, \rho, h = const$ и $e = const$ ($e = h - \frac{p}{\rho} = const$, e — внутренняя энергияя). В указанных условиях уравнение состояния (5) приобретает качественно новый смысл — соотношение связанности концентраций. Из сказанного следует, что реакции в неподвижной смеси подчиняются уравнениям

$$p = const,\ \rho = const,\ h = const,\ \rho = \rho\,(h,\, p,\, c_i) \tag{11}$$

$$\frac{dc_j}{dt} = E_j \qquad (j = 1, \ldots, (n-1)) \tag{12}$$

Согласно основному положению термодинамики состояние химического равновесия изолированной системы характеризуется максимумом энтропии (S) в условиях протекания реакций. Вматематическом плане вывод уравнений химического равновесия при связанных реакциях сводится к обычной задаче условного максимума функции S :

$$\delta S = 0 \tag{13}$$

$$\delta^2 S \leqslant 0 \tag{14}$$

при голономных связях (11). Воспользуемся уравнением второго начала термодинамики в переменных h, p, c_i которое с учетом вида вариаций (11) запишется так

$$\delta S = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial S}{\partial c_j} + \frac{\partial S}{\partial c_n} \frac{\partial c_n}{\partial c_j} \right) \delta c_j. \tag{15}$$

Имея в виду (13), из (15) получим систему уравнений химического равновесия при связанных реакциях

$$\frac{\partial S}{\partial c_j} + \frac{\partial S}{\partial c_n} \frac{\partial c_n}{\partial c_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, (n-1). \tag{16}$$

При этом физически реализуемые решения (16) должны удовлетворять (14). Чтобы конкретизировать условие (14), вычислим по формуле (15) вторую вариацию энтропии:

$$\delta^2 S = \sum_{j,e=1}^{n-1} A_{je} \delta c_j \delta c_e,$$

где $A_{je} = \dfrac{\partial^2 S}{\partial c_j \partial c_e} + \dfrac{\partial^2 S}{\partial c_j \partial c_n} \dfrac{\partial c_n}{\partial c_e} + \dfrac{\partial^2 S}{\partial c_e \partial c_n} \dfrac{\partial c_n}{\partial c_j} + \dfrac{\partial^2 S}{\partial c_n^2} \dfrac{\partial c_n}{\partial c_j} \dfrac{\partial c_n}{\partial c_e} + \dfrac{\partial S}{\partial c_n} \dfrac{\partial^2 c_n}{\partial c_j \partial c_e}$ — элемент матрицы симметричной квадратичной формы (к.ф.).

В силу (14) к.ф. является отрицательно определенной, или отрицательной. Как известно [7], к.ф. определенно отрицательна, еслиглавные миноры ее матрицым $\triangle_g$ порядка g удовлетворяют неравенствам Сильвестра

$$(-1)^g \triangle_g > 0, \quad g = 1, ..., (n-1). \tag{17}$$

Назовем состояние смеси равновесным при связанных реакциях, если концентрации являются решениями (16) и удовлетворяют неравенствам (17).

Рассмотрим ситуацию, когда к.ф. отрицательна. Таккак при этом хотя бы одно из собственных значений равно нулю, то матрица к.ф. вырождена. Длятого чтобы к.ф. былаотрицательной, необходимо и достаточно, чтобы отличные от нуля главные миноры ее матрицы порядка g удовлетворяли неравенствам (17).

Назовем равновесное состояние смеси предельным, если концентрации являются решениями системы уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial c_j} + \frac{\partial S}{\partial c_n}\frac{\partial c_n}{\partial c_j} = 0, \quad \triangle_{n-1} = 0, \quad (j = 1, ..., (n-1))$$

и при этих значениях выполняются оговоренные выше условия.

Основные свойства сред будем выяснять на примере смеси, реагирующей по механизму двух связанных реакций ($n = 2$). В этом случае состояние равновесия при связанных реакциях определяется как решение уравнения (16). В то же время состояние предельного равновесия находится как решение системы уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} + \frac{\partial S}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dc_1} = 0, \quad \triangle_1 = 0, \tag{18}$$

где $\triangle_1 = \dfrac{\partial^2 S}{\partial c_1^2} + 2\dfrac{\partial^2 S}{\partial c_1 \partial c_2}\dfrac{dc_2}{dc_1} + \dfrac{\partial^2 S}{\partial c_2^2}\left(\dfrac{dc_2}{dc_1}\right)^2 + \dfrac{\partial S}{\partial c_2}\dfrac{d^2 c_2}{dc_1^2}$.

3. Объектом дальнейших исследований является смесь политропных газов с уравнением состояния

$$p = \rho R \frac{h + Q}{c_p m} \tag{19}$$

где R — абсолютная газовая постоянная; $\dfrac{1}{m} = \sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{c_k}{m_k}$; $c_p = \sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{c_k c_{pk}}{m_k}$; $Q = -\sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{h_e^\circ c_k}{m_k}$; m_k, h_k°, c_{pk} — молекулярная масса, энергия образования и теплоемкость при постоянном давлении k-го компонента.

Привлекая (1), Q, c_p и m приведем к виду

$$Q = q_0 + \sum_{i=1}^{n} q_i c_i, \quad c_p = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i c_i, \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{\mu_0} + \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{\mu_i}, \tag{20}$$

где $q_0 = \sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{\varphi_k h_k^0}{m_k}$, $q_i = \sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{\varphi_{ki} h_k^0}{m_k}$, $\alpha_0 = \sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{\varphi_k c_{pk}}{m_k}$, $\alpha_i = \sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{\varphi_{ki} c_{pk}}{m_k}$, $\dfrac{1}{\mu_0} = \sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{\varphi_k}{m_k}$, $\dfrac{1}{\mu_i} = \sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{\varphi_{k_i}}{m_k}$.

С учетом (20) запишем (19) в форме

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i e_i \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{M_i} + \sum_{i=1}^{n} l_i c_i + (1 - \psi) = 0, \tag{21}$$

где безразмерные коэффициенты $Q_i = \dfrac{q_i}{h + q_0}$, $M_i = \dfrac{\mu_i}{\mu_0}$, $L_i = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_0}$, $l_i = \dfrac{1}{M_i} + Q_i - L_i\psi$, $\psi = \dfrac{p_{\alpha_0\mu_0}}{R\rho\,(h + q_0)}$ представляют собой постоянные величины в условиях (11).

Выясним свойства (21) на примере смеси с двумя связанными реакциями ($n = 2$). Для этого случая решим (21) относительно c_2:

$$c_2 = -\frac{1}{2}\left(ac_1 + \frac{M_2 l_2}{Q_2} \pm \sqrt{F}\right), \tag{22}$$

где

$$F = b^2 c_1^2 + 2\frac{M_2}{Q_2}\left(al_2 - 2l_1\right)c_1 + \left(\frac{M_2 l_2}{Q_2}\right)^2 - 4\frac{M_2}{Q_2}\left(1-\psi\right),$$

$$a = \frac{Q_1}{Q_2} + \frac{M_2}{M_1},$$

$$b = \frac{Q_1}{Q_2} - \frac{M_2}{M_1}\left(Q \neq 0, \frac{1}{M_2} \neq 0\right).$$

При этом корни F имеют вид

$$c_{1_{1,2}} = -\frac{M_2}{b^2 Q_2}\left(al_2 - 2l_1 \pm 2\sqrt{D_0}\right), \tag{23}$$

где $D_0 = \left(\frac{M_2}{M_1}l_2 - l_1\right)\left(\frac{Q_1}{Q_2}l_2 - l_1\right) - \frac{Q_2 b^2}{M_2}\left(1-\psi\right)$.

В силу вещественности c_{1_1} и c_{1_2} ОДЗ c_1 удовлетворяет условию $F \geqslant 0$. Если в (23) $D_0 < 0$, то это условие удовлетворяется автоматически для всех c_1 (при естественном ограничении). Интереснее, однако, случай $D_0 > 0$. В этой ситуации интервал между корнями (23) очевидно, не входит в ОДЗ, иначе говоря, при $D_0 > 0$ не существует механизма связанных реакций. Отметим еще ряд особенностей соотношения связанности концентраций (22) при $D_0 > 0$. Во-первых, $\frac{dF}{dc_1} \neq 0$, во-вторых, производные

$$\frac{dc_2}{dc_1} = \left(\frac{-2F \pm \frac{dF}{dc_1}}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{F}} = \frac{\theta}{\sqrt{F}}, \quad \frac{d^2 c_2}{dc_1^2} = \pm\frac{D}{F\sqrt{F}}$$

на границе ОДЗ бесконечны, в-третьих, на границе ОДЗ уравнение (23) расщепляется:

$$c_2 = -\frac{1}{2}\left(ac_1 + \frac{M_2 l_2}{Q_2}\right), \tag{24}$$

$$F = 0. \tag{25}$$

Запишем теперь систему уравнений предельного равновесия (18) с учетом вида (23):

$$\sqrt{F}\frac{\partial S}{\partial c_1} = \theta\frac{\partial S}{\partial c_2}, \ \sqrt{F}\left(F\frac{\partial^2 S}{\partial c_1^2} + 2\theta\sqrt{F}\frac{\partial^2 S}{\partial c_1 \partial c_2} \pm \frac{D_0}{8}\frac{\partial S}{\partial c_2}\right) = 0.$$

Эта система имеет решение

$$F = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c_2} = 0,$$

свидетельствующее о том, что термодинамическая функция предельного равновесия в пространстве параметров p, ρ, h отделяет область G, где реализуются равновесные состояния при связанных реакций, отобласти $\overline{G}$, где таких состояний не существует (область воспламенения).

4. Рассмотрим покоящуюся смесь политропных газов способную детонировать и находящуюся в равновесии при двух связанных реакциях при параметрах $(p = p_0,\ h = h_0,\ \rho = \rho_0)$ из G. Тогда состав смеси $(c_k = c_{k0})$ является решением уравнения химического равновесия (16). Пусть по этой смеси с постоянной скоростью D распространяется ударная волна (УВ), которая разогревает смесь и возбуждает в ней реакции. Как и в работе [8] изменением состава смеси в скачке уплотнения пренебрегается. Тогда параметры горючей смеси перед и за УВ удовлетворяют обычным соотношениям

$$\begin{gathered}\rho_0 D = \rho_s u_s = K,\ p_s + \frac{K^2}{\rho} = p_0 + \frac{K^2}{\rho_0},\ h_s + \frac{K^2}{\rho^2} = h_0 + \frac{K^2}{2\rho_0^2},\\ \rho_s = \frac{p_s c_{p0} m_0}{R\left(h_s + q_0\right)},\ c_{k_s} = c_{k0} \quad (k = 1, \ldots, N)\,.\end{gathered} \tag{26}$$

Здесь u — скорость потока относительно УВ; $c_{p0} = \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{c_{k0} c_{pk}}{m_k}$, $\dfrac{1}{m_0} = \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{c_{k0}}{m_k}$, $q_0 = \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{c_{k0} h_k^\circ}{m_k}$; индексы 0, s относятся, соответственно к параметрам перед и за УВ. Тогда уравнения газодинамики воспламенения (9), (10) принимают вид

$$\rho u = K,\ \frac{dp}{dx} = \frac{K^2}{\rho^2}\frac{d\rho}{dx},\ \frac{dh}{dx} = \frac{K^2}{\rho^3}\frac{d\rho}{dx},\ \frac{dp}{dx} = \frac{1}{a_f^2}\frac{d\rho}{dx} \tag{27}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \rho}{\partial c_i} \varepsilon_i = 0;\ \frac{dc_1}{dx} = \frac{E_1}{U} = \varepsilon_1. \tag{28}$$

Комбинируя второе и четвертое уравнения (27), получим

$$\left(1 - M_f^2\right) \frac{d\rho}{dx} = 0 \qquad \left(M_f = \frac{U}{a_f}\right).$$

Из этого равенства следует, что в окрестности УВ параметры потока (p, ρ, h, u) постоянные величины, равные их значениям на УВ.

Обратим внимание на то, что в зависимости от скорости УВ процесс превращений за ней развивается по одному из двух сценариев. Первый из них соответствует ситуации, когда параметрыпотока за УВостаются в области G (вне области воспламенения) и реакции, оставаясь связанными, приходят в состояние химического равновесия. При этом параметры потока остаются постоянными, а волна распространяется по горючей смеси, как по нейтральному газу. Такая ситуация имеет место до

тех пор, пока равновесие за УВне станет предельным. В данной работе мы ограничимся этим качественным указанием о характере распространения УВ по первому сценарию, предопределяющим исследование важной задачи о пределе инициирования детонации ударной волной.

Рассмотрим второй сценарий, когда параметры потока за УВ принадлежат области воспламенения $(\overline{G})$. Тогда, в ударно сжатой горючей смеси с постояными параметрами нет состояния равновесия при связанных реакциях. Так как на УВ реакции связаны, то они остаются таковыми и вне окрестности (зоне индукции), в которой изменение состава определяется из второго уравнения (28) при фиксированных значениях p и h ($p = p_0$, $h = h_s$)

$$x = \int_{c_{10}}^{c_1} \frac{dc}{\varepsilon_1}.$$

Поскольку равновесия нет, то на расстоянии

$$x = \zeta = \int_{c_{10}}^{c_1} \frac{dc}{\varepsilon_1}, \tag{29}$$

от УВ концентрация c_1 выходит на границу ОДЗ соотношения (22). В результате на поверхности $x = \zeta$ (поверхность воспламенения) соотношение (22) расщепляется на (24) и (25) с кризисом механизма связанных реакций. Далее при $x > \zeta$ и в силу неравновесности процесса c_1 принимает значение вне ОДЗ (22). Поэтому соотношения (24) и (25) дополняет уравнение закона сохранения атомов (1) и движение реагирующей смеси подчиняется традиционным уравнениям газодинамики горения (2) – (6) с одной реакцией, но с уравнением состояния в форме (25). Имея в виду сказанное, запишем (2) – (6) в системе координат, связанной с УВ ($x > \zeta$)

$$\rho u = K,\ \frac{dp}{dx} = \frac{K^2}{\rho^2}\frac{d\rho}{dx};\ \frac{dh}{dx} = \frac{K^2}{\rho^3}\frac{d\rho}{dx};\ F = 0;\ \frac{dc_1}{dx} = \varepsilon_1. \tag{30}$$

Замечание 1. Так как (2) – (6) выводятся при условиях достаточной гладкости производных, входящих в уравнения, то, естественно, при переходе к новой системе координат условиянепрерывности градиентов параметров сохраняется.

Система уравнений (30) решается с начальными данными на поверхности воспламенения

$$x = \zeta,\ p = p_s,\ h = h_s,\ \rho = \rho_s,\ u = u_s,\ c_1 = c_{1_1}. \tag{31}$$

Запишем уравнение состояния (25) в дифференциальной форме

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{dp}{dx} + \frac{\partial F}{\partial h}\frac{dh}{dx} + \frac{\partial F}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dx} = 0.$$

Учитывая тождества

$$\frac{\partial F}{\partial p}\Big/\frac{\partial F}{\partial \rho} = -\frac{\partial \rho}{\partial p};\ \frac{\partial F}{\partial h}\Big/\frac{\partial F}{\partial \rho} = -\frac{\partial \rho}{\partial h};\ \frac{\partial F}{\partial c_1}\Big/\frac{\partial F}{\partial \rho} = -\frac{\partial \rho}{\partial c_1}$$

и, привлекая (30), получим уравнение для градиента плотности

$$\frac{d\rho}{dx} = \left(1 - M_f^2\right)^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial c_1} \varepsilon_1. \tag{32}$$

Если подставить (32) в (30), то эту систему дифференциальных уравнений движения приведем к нормальному виду. При этом система будет автономной.

Замечание 2. Нетрудно заметить, что соотношения на УВ, параметры потока в зоне индукции и на поверхности воспламенения, а также уравнения движения в зоне горения содержат неизвестный параметр — скорость волны. Поэтому количественный расчет структуры детонационной волны возможен лишь после решения главной задачи — вывода уравнений, определяющих эту скорость.

5. Вывод уравнений, определяющих скорость детонации, связан с особенностями структуры волны. Напомним, что в результате исследования стационарной детонации с примыкающей к нейволной разрежения установлено [9, 10], что передний фронт волны разрежения гладко сшивается со стационарной зоной горения на критической поверхности (КП), где местное число Маха, рассчитанное по замороженной скорости звука, равно единице. Поэтому, всоответствии с критериями Гриба-Кирквуда-Вуда, далееисследуется модель детонации, содержащая в зоне неравновесного горения ($\varepsilon_1 > 0$) КП. В соответствии с Замечанием 1 и из (32) следует, что на КП выполняются условия

$$M_f^2 = 1, \tag{33}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial c_1}\right)_{p,h} = 0. \tag{34}$$

Условие (34) будем называть условием экстремального состояния среды. Таккак на УВ поток дозвуковой по отношению к замороженной скорости звука, то вся область течения между УВ и КП является дозвуковой ($M_f < 1$). Заметим, что уравнения количества движения и энергии в (30) допускают первые интегралы, которые с учетом (31) и (26) можно представитьв форме, справедливой всюду за УВ. Объединяя эти интегральные соотношения, уравнения состояния (25) и условия (33), (34), получим замкнутую систему уравнений для параметров потока на КП и скорости детонации

$$\begin{gathered} p - p_0 = -K^2 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right); \; h - h_0 = \frac{1}{2}\left(p - p_0\right)\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0}\right); \\ F\left(h, p, \rho, c_1\right) = 0; \; \frac{\partial \rho}{\partial c_1} = 0; \; M_f^2 = 1. \end{gathered} \tag{35}$$

Заметим, чтоуравнения (35) не содержат информации о структуре волны и механизмах реакции за УВ. Это означает, что скорость детонации является константой исходной горючей смеси. Дадим геометрическую интерпретацию уравнениям (35), предварительно опустив в этой системе условие (33). Тогда в плоскости $\left(\frac{1}{\rho}, p\right)$ пер-

вое уравнение определяет прямую Михельсона, проходящую через начальное состояние $\left(\frac{1}{\rho_0}, p_0\right)$ а остальные — адиабату экстремальных состояний (а.э.с.). Запишем второе и третье уравнения (35) в дифференциалах с учетом (34)

$$dh = \frac{1}{2}\left(p - p_0\right) d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) dp; \; \frac{\partial \rho}{\partial h} dh + \frac{\partial \rho}{\partial p} dp = -\rho^2 d\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Исключая из этих равенств dh, а затем, используя условие касания прямой Михельсона к а.э.с.

$$\frac{dp}{d\left(\frac{1}{\rho}\right)} = \frac{(p - p_0)}{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}},$$

получим соотношение (33). Иначе говоря, детонация распространяется в режиме Чепмена-Жуге, но по отношению к этой адиабате.

Приведем теперь явный вид а.э.с. для смеси политропных газов. Из равенства $\frac{\partial c_1}{\partial \rho} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial c_1}\right)^{-1}$ следует, чтов экстремальном состоянии $\frac{\partial c_1}{\partial \rho} = \infty$. Решая уравнение (25) относительно c_1, получим (23). Из вида (23) следует, чтов экстремальном состоянии дискриминант уравнения равен нулю ($D_0 = 0$). После преобразований его можно записать так

$$\Psi = \left[\left(L_1 - \frac{Q_1}{Q_2} L_2\right)\left(L_2 - \frac{M_2}{M_1} L_2\right)\Psi + \right.$$

$$\left. + \frac{b}{M_2}\left(L_1 - \frac{M_2}{M_1} L_2\right) + Q_2 b\left(\frac{b}{M_2} - \left(L_1 - \frac{Q_1}{Q_2} L_2\right)\right)\right] = 0.$$

Возвращаясь к истинным переменным, из этого равенства получим

$$h + q_0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} - \frac{z_2}{z_1} q_2, \tag{36}$$

где $\frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{\gamma_0}{(\gamma_0 - 1) z_1}$; $\frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0} = \frac{R}{m_0 c_{p0}}$; $z_1 = \frac{b}{M_2\left(L_1 - \frac{Q_1}{Q_2} L_2\right)}$; $z_2 = \frac{b(z_1 - 1)}{L_1 - \frac{M_2}{M_1} L_2}$. Объединим (36) и второе уравнение в (35). Исключая из них b, получим уравнение а.э.с.

$$\frac{p}{p_0} = \frac{2\alpha + æ - \frac{\rho_0}{\rho}}{æ\frac{\rho_0}{\rho} - 1}, \tag{37}$$

где $æ = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$; $\alpha = \frac{\rho_0}{\rho}\left(\frac{z_2}{z_1} q_2 + h_0\right) - \frac{\gamma}{\gamma - 1}$.

Нетрудно заметить, что уравнение а.э.с. (37) с точностью до обозначений совпадает с уравнением детонационной адиабаты в классической теории Михельсона-Чепмена-Жуге. Поэтому в рамках излагаемой теории скорость потока и параметры потока на КП вычисляются по формулам классической теории. Этот удивительный

результат требует пояснений, тем более, что исходные положения теорий совершенно разные. Напомним, что модель МЧЖ исходит из приближений: а) ударная волна вместе с зоной реакции является скачком уплотнения и б) реакция в волне завершается. Следствия этих приближений: скорость детонации не зависит от структуры волны; связь между энтальпией и $\frac{p}{\rho}$, задаваемая уравнением состояния (19) имеет вид

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} - Q \qquad \left(\text{здесь } \frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{c_{pm}}{R}\right).$$

В рамках излагаемой теории система уравнений (35) не содержит явно информации о структуре волны, благодаря которой стало возможным ее выписать. Поэтому, еслиотбросить содержательную часть и учесть вид зависимости (36) в экстремальном состоянии среды, тонетрудно видеть, что следствия излагаемой теории формально те же, что и следствия приближений теории МЧЖ.

6. Исследуем теперь устойчивость решения системы (30), определяющей движение в зоне горения. Но прежде отметим, что зона горения с одной реакцией, реализующаяся в рамках данной модели, в обобщенном смысле та же, что и в модели Зельдовича-Неймана-Деринга. Вместе с тем, в рамках газодинамики воспламенения раскрывается природа трансформации процесса, определяемого изначально несколькими реакциями в процессе горения с одной реакцией. Эта трансформация связана с развитием связанных реакций в зоне индукции, с последующим кризисом данного механизма превращений на поверхности воспламенения. Такая трактовка рассматривается как кинетическое обоснование основного положения модели ЗНД.

Перейдем теперь к определению условий устойчивости методом функций Ляпунова [11]. Пусть в области допустимых значений p, h, c_1 существует непрерывная вместе с частными производными первого порядка положительно определеная функция $U(h, p, c_1)$ такая, что функция $W(h, p, c_1) = (\operatorname{grad} u, f(h, p, c_1))$ удовлетворяет неравенству $W(h,\, p,\, c_1) \leq 0$ при $x > \zeta$. Тогда решение системы уравнений с правой частью в форме вектор столбца f устойчиво и притом асимптотически. Следует напомнить, что недостаток метода функций Ляпунова заключается в том, что не существует достаточно общего конструктивного метода построения функции $U(h, p, c_1)$. Тем не менее в нашем случае такое построение возможно. Рассмотрим энтропию в зоне горения $S = S(h, p, c_1)$ и вычислим ее производную. Затем, привлекая (30) и тождества

$$\frac{\partial S}{\partial h} = \frac{1}{T},\ \frac{\partial S}{\partial p} = -\frac{1}{\rho T} \tag{38}$$

преобразуем производную к виду

$$\frac{dS}{dx} = \frac{\partial S}{\partial c_1}\varepsilon_1 \geqslant 0. \tag{39}$$

Знак в (39) установлен из требования, что производство энтропии $\left(K\frac{dS}{dx}\right)$ в необратимых процессах является положительно определенной функцией.

Введем функцию Ляпунова U следующим образом

$$U\left(h,\, p,\, c_1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial c_1}\right)^2 \geqslant 0, \tag{40}$$

а функцию $W\left(h, p, c_1\right)$ определим так

$$W = \frac{dU}{dx} = \frac{\partial S}{\partial h}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial c_1 h}\frac{dh}{dx} + \frac{\partial^2 S}{\partial c_1 \partial p}\frac{dp}{dx} + \frac{\partial^2 S}{\partial c_1^2}\frac{dc_1}{dx}\right).$$

Привлекая (30) и учитывая преобразования, выполненные с помощью (38),

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 S}{\partial c_1 \partial h} + \frac{\partial^2 S}{\partial c_1 \partial p} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial c_1}\left(\frac{1}{T}\right) - \frac{\partial}{\partial c_1}\left(\frac{1}{\rho T}\right) = \frac{1}{\rho^2 T}\left(\frac{\partial \rho}{\partial c_1}\right),$$

приведем W к виду

$$W = \frac{\partial S}{\partial c_1}\varepsilon_1\left(\frac{K^2}{\rho^4 T\left(1 - M_f^2\right)}\left(\frac{\partial \rho}{\partial c_1}\right)^2 + \frac{\partial^2 S}{\partial c_1^2}\right) = \frac{\partial S}{\partial c_1}\varepsilon_1\frac{\partial^2 S}{\partial c_1^2}\frac{1 - M_e^2}{1 - M_f^2}.$$

Так как для газовой смеси $\dfrac{\partial^2 S}{\partial c_1^2} < 0$ [6], а $\frac{\partial S}{\partial c_1}\varepsilon \geqslant 0$, то условие устойчивости решения системы уравнений (30) ($W \leqslant 0$) эквивалентно выполнению неравенства

$$\frac{1 - M_e^2}{1 - M_f} \geqslant 0. \tag{41}$$

Здесь $M_e = \dfrac{U}{a_e}$, a_e — псевдоравновесная скорость звука, определяемая по формуле

$$\frac{1}{a_e^2} = \frac{1}{a_f^2} - \left(\rho^2 T\frac{\partial^2 S}{\partial c_1^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \rho}{\partial c_1}\right)^2. \tag{42}$$

Замечание 3. Скорость звука a_e названа псевдоравновесной, поскольку она тождественна по форме классической равновесной скорости звука, вводимой при условии химического равновесия [12], но вычисляется при текущих значениях неравновесных параметров в зоне горения. Из (42) видно, что $a_e \leqslant a_f$. Причем $a_e = a_f$, если состояние неравновесной среды экстремальное. Условие (41) обобщает полученные ранее условия стабильности равновесного потока в детонационной волне [12, 13] и позволяет заключить, что поток в зоне горения является а) дозвуковым по отношению к скорости звука между поверхностью воспламенения и КП, б) звуковым по отношению к ним на КП и в) сверхзвуковым за критической поверхностью.

Заключение. Модель детонации, построенная в рамках газодинамики воспламенения, в своей основе отличается, естественно, от всех предшествующих, созданных в рамках традиционной газодинамики горения. В ее рамках воссоздана структура

реальной детонационной волны [14], особенности которой проявляются благодаря механизму связанных реакций. Структура включает: лидирующий ударный фронт; зону индукции — область развития связанных реакций; поверхность воспламенения — поверхность кризиса механизма связанных реакций; зону горения с одной независимой реакцией, в которой на КП осуществляется переход от дозвукового к сверхзвуковому течению по отношению к замороженной и псевдоравновесной скорости звука.

Литература

[1] *Гендугов В. М.* Газодинамика воспламенения. — Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, Математика, механика, 2001, № 4.

[2] *Гендугов В. М.* О механизме и критических условиях образования природных алмазов. — Вестн.Моск. ун-та, Сер. 1, Математика, механика, 2001, № 1.

[3] *Семенов Н. Н.* Цепные реакции. — 2-е изд., испр. и доп., М.: Наука, 1986.

[4] *Кондратьев В. Н., Никитин Е. Е.* Кинетика и механизм газофазных реакций. — М: Наука, 1975.

[5] *Зельдович Я. Б.* Доказательство единственности решения уравнений закона действующих масс. — Физ. химия, 1938, 11, вып. 5.

[6] *Миркес Е. М., Быков В. И., Горбань А. Н.* Выпуклость и запас выпуклости термодинамических функций для идеальных систем. — Математические методы в химической кинетике, Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1990.

[7] *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1965.

[8] *Зельдович Я. Б.* К теории распространения детонации в газообразных системах. — Ж. экспер. и теор. физики, 1940, т. 10, вып. 5.

[9] *Гриб А. А.* Влияние места инициирования на параметры воздушной волны при детонации взрывчатых газовых смесей. — Приклад. математика и механика, 1944, т.8.

[10] *Kirkwood J. G., Wood W. W.* — J. Chem. Phys., 1954, v 22.

[11] *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.

[12] *Гендугов В. М.* Теория детонации. Термодинамическое обоснование гипотезы Чепмена-Жуге. — Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1. Математика, Механика, 2000, № 2.

[13] *Гендугов В. М.* О детонации Зельдовича-Неймана-Деринга. — Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, Математика, Механика, 1999, № 3.

[14] *Войцеховский Б. В., Митрофанов В. В., Топчиян М. Е.* Структура фронта детонации в газах. — Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1963.

Сингулярный метод в ЭГД течениях Стокса для сферических капель с поверхностным зарядом

Натяганов В. Л., Чайка А. А.

В основе современного использования сингулярного метода в математической физике лежит аппарат обобщенных функций [1]. Сингулярный метод в задачах обтекания тел вязкой жидкостью обычно применяется для нахождения фундаментального решения различных приближений уравнения Навье-Стокса, которое соответствует действию сосредоточенной силы [2]. Некоторое обобщение этого метода для магнитной гидродинамики, предложенное в [3, 4], позволило решить ряд задач МГД-обтекания тел.

При малых числах Рейнольдса система уравнений для несжимаемой жидкости в приближении Стокса становится линейной и в безразмерных переменных имеет вид:

$$\triangle\vec{v} - \nabla p = -\vec{F}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0, \tag{1}$$

Фундаментальное решение системы (1), соответствующее силовой функции стокслета $\vec{F} = \vec{F}_S\delta(\vec{r}) = 8\pi\vec{f}\delta(\vec{r})$, где $\delta(\vec{r})$ - трехмерная дельта-функция Дирака, можно найти методом точечных сил Озеена [2 – 4], если искать решение в виде

$$\vec{v} = \vec{F}_S\triangle\phi - \nabla(\vec{F}_S\cdot\nabla)\phi + \vec{v}_\infty, \quad p = -(\vec{F}_S\cdot\nabla)\triangle\phi + p_\infty. \tag{2}$$

Здесь обобщенный потенциал $\phi = -r/8\pi$ является фундаментальным решением бигармонического уравнения.

Распределение скоростей и давлений, генерируемое стокслетом, хорошо известно и имеет вид [5]:

$$\vec{v}_S(\vec{r};\vec{f}) = \frac{\vec{f}}{r} + \frac{(\vec{f}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^3}, \quad p_S(\vec{r};\vec{f}) = -2\nabla\left(\frac{\vec{f}}{r}\right), \tag{3}$$

где вектор $\vec{f}$ характеризует величину и направление стокслета.

В силу линейности системы (1) производные любого (но одинакового) порядка от (3) также будут решением системы (1) для силовой функции $\vec{F}$, являющейся производной такого же порядка от силовой функции стокслета $\vec{F}_S\delta(\vec{r})$. Эти решения можно представить как формальное разложение в ряд Тейлора от стокслета, тогда отдельные члены этих разложений будут соответствовать течениям от силового или стоксовского диполя, квадруполя и т.д. [5].

$$\begin{gathered}\vec{v}_{SD}(\vec{r};\vec{f};\vec{l}) = -(\vec{l}\cdot\nabla)\vec{v}_S, \quad p_{SD}(\vec{r};\vec{f};\vec{l}) = -(\vec{l}\cdot\nabla)p_S;\\ \vec{v}_{S4}(\vec{r};\vec{f};\vec{l};\vec{k}) = (\vec{k}\cdot\nabla)(\vec{l}\cdot\nabla)\vec{v}_S, \quad p_{S4}(\vec{r};\vec{f};\vec{l};\vec{k}) = (\vec{k}\cdot\nabla)(\vec{l}\cdot\nabla)p_S,\end{gathered} \tag{4}$$

где постоянные вектора $\vec{f}$, $\vec{l}$, $\vec{k}$ играют роль мультипольных моментов.

Антисимметричная часть силового диполя соответствует точечному моменту с силовой функцией $\vec{F} = 4\pi\nabla \times (\vec{m}\delta(\vec{r}))$ и называется ротлетом. Для ротлета имеем

$$\vec{v}_R = \frac{1}{2}\left[\vec{v}_{SD}(\vec{r};\vec{l};\vec{f}) - \vec{v}_{SD}(\vec{r};\vec{f};\vec{l})\right] = \frac{\nabla \times \vec{v}_S(\vec{r},\vec{m})}{2} = \frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3},$$
$$p_R = \frac{1}{2}\left[p_{SD}(\vec{r};\vec{l};\vec{f}) - p_{SD}(\vec{r};\vec{f};\vec{l})\right], \quad \vec{m} = \vec{f}\times\vec{l}.$$

Симметричная часть силового диполя дает сингулярное решение, названное Бэтчелором стресслетом

$$\vec{v}_{ST} = \frac{2(\vec{f}\cdot\vec{r})(\vec{l}\cdot\vec{r}) - r^2(\vec{f}\cdot\vec{l})}{r^5}\vec{r}, \quad p_{ST} = 2\frac{(\vec{f}\cdot\vec{r})(\vec{l}\cdot\vec{r}) - r^2(\vec{f}\cdot\vec{l})}{r^5}. \tag{5}$$

Стресслет играет определяющую роль в деформационно-сдвиговых течениях и реологии суспензий [6]. Наряду со стокслетом при обтекании тел однородным потоком важную роль имеет известный из гидродинамики идеальной жидкости потенциальный диполь, распределение скоростей и давлений от которого легко получаются из формул (3) для стокслета:

$$\vec{v}_D(\vec{r};\vec{k}) = -\frac{1}{2}\triangle\vec{v}_S(\vec{r};\vec{k}) = \frac{3(\vec{k}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\cdot\vec{k}}{r^5}, \quad p_D(\vec{r};\vec{k}) = -\frac{1}{2}\triangle p_S(\vec{r};\vec{k}).$$

Заметим, что все приведенные выше формулы можно переписать в тензорном виде. Тогда произвольное стационарное поле скоростей $\vec{v}(\vec{r})$ в окрестности точки $r = 0$, принятой за начало декартовой системы координат x_1, x_2, x_3, может быть разложено в ряд Тейлора

$$v_i(\vec{r}) = v_i(0) + G_{ij}x_j + \ldots, \quad G_{ij} = (\partial v_i/\partial x_j)_{r=0}, \tag{6}$$

где v_i и G_{ij} - компоненты скорости жидкости и тензора сдвига, причем $\mathrm{tr}\overleftrightarrow{G} = G_{ii} = 0$ в силу несжимаемости жидкости. В задачах о вязком обтекании частицы, размеры которой много меньше характерного масштаба неоднородности течения, поле скоростей (6) может рассматриваться как распределение вдали от частицы.

В свою очередь, воздействие частицы конечного размера на поток будет описываться не только точечными силой и моментом, а силовой обобщенной функцией более сложного вида, включающей производные от $\delta(\vec{r})$ высших порядков:

$$F_i\delta(\vec{r}) + A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\delta(\vec{r}) + B_{ijk}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}\delta(\vec{r}) + \ldots,$$

где компоненты тензоров F_i, A_{ij}, B_{ijk}, ... определяются из граничных условий для конкретных задач.

Эффективность сингулярного метода для осесимметричных частиц несферической формы в различных поступательно-сдвиговых потоках продемонстрирована в [5], кроме того в работах по реологии суспензий этот метод в последнее время

тоже нашел широкое применение. Правда, в [6] и целом ряде других работ по суспензиям обобщенные функции применялись лишь для анализа силового воздействия частиц в уравнении Стокса, тогда как уравнение несжимаемости рассматривалось в классе обычных функций. Применение аппарата обобщенных функций ко всей системе (1) началось с работы [7]. Этот подход, изложенный в [7, 8], был реализован для ряда ЭГД-явлений в монодисперсных однородных эмульсиях сферических капель с поверхностным зарядом на границе раздела фаз в [9 – 14]. Далее, в классе обобщенных функций, будет рассмотрен ряд задач ЭГД-обтекания сферической капли с поверхностным зарядом простого слоя (ПС) или двойного электрического слоя (ДЭС).

1. Специфика граничных условий для ЭГД-течений

Для стационарного процесса в электрическом приближении и случае отсутствия объемного заряда из системы уравнений Максвелла следует: 1). электрическое поле потенциально, т. е. $\vec{E} = -\nabla\varphi$ и $\triangle\varphi = 0$; 2). объемная электромагнитная сила Лоренца в уравнении Стокса равна нулю, т.е. влиянием магнитного поля можно пренебречь.

Однако на поверхности раздела фаз двух вязких электропроводных жидкостей с постоянными коэффициентами вязкости и электропроводности действует поверхностная сила электрического происхождения [10, 15 – 18]

$$\vec{f}_\Sigma = \vec{n}\left\{\overleftrightarrow{T}_e\right\} - \vec{n}\gamma(\nabla\cdot\vec{n}) - q\nabla_\Sigma\{\varphi\}, \tag{7}$$

где γ - поверхностное натяжение, ∇_Σ - поверхностный градиент, $\overleftrightarrow{T}_e$ - электрическая часть тензора электромагнитных напряжений Максвелла: $T_{ij} = E_iD_j - (1/2)\varepsilon\varepsilon_0E^2\delta_{ij}$, q - плотность поверхностного заряда ДЭС, фигурные скобки означают скачок соответствующей величины на границе раздела фаз.

Первое слагаемое в (7) отражает роль ПС зарядов, а два последних - характеризуют вклад от ДЭС. Обычно при наличии ДЭС влиянием ПС можно пренебречь.

Скачок тангенциальных составляющих тензора вязких напряжений на границе раздела фаз с ДЭС должен компенсироваться последним членом: $\{p_{n\Sigma}\} = -q\nabla_\Sigma\{\varphi\}$. Вторую связь электрической и гидродинамической части задачи ЭГД-обтекания капли с ДЭС дает граничное условие, вытекающее из закона сохранения электрического заряда $\operatorname{div}\vec{j} = 0$, где $\vec{j} = \sigma\vec{E} = -\sigma\nabla\varphi$ - плотность электрического тока проводимости, определяемая в каждой из фаз по закону Ома. Для модели тонкого идеального поляризованного ДЭС, между обкладками которого ток не проходит, граничные условия для внешней и внутренней обкладок ДЭС будут иметь соответственно следующий вид [10, 16]:

$$-\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \operatorname{div}_\Sigma\vec{j}_\Sigma = 0, \quad \sigma'\frac{\partial\varphi'}{\partial r} + \operatorname{div}_\Sigma\vec{j}'_\Sigma = 0, \tag{8}$$

где $\operatorname{div}_\Sigma\vec{j}_\Sigma$ - поверхностная дивергенция от плотности поверхностного электрического

тока, штрих здесь и далее относится к области внутри капли. Будем считать, что

$$\begin{aligned} \vec{j}_\Sigma &= q\vec{v}_\Sigma - \sigma_\Sigma \nabla_\Sigma \varphi - D_\Sigma \nabla_\Sigma q, \\ \vec{j}'_\Sigma &= -q\vec{v}_\Sigma - \sigma'_\Sigma \nabla_\Sigma \varphi' + D'_\Sigma \nabla_\Sigma q, \end{aligned} \tag{9}$$

т. е. поверхностный ток в общем случае может быть обусловлен конвективным переносом заряда вдоль каждой из обкладок ДЭС, поверхностными проводимостью и диффузией.

Заметим, что в (8) различие в знаках объясняется разным направлением нормали к двум обкладкам ДЭС, а в (9) - разными знаками зарядов этих обкладок.

В случае наличия ПС зарядов на границе раздела фаз и отсутствия ДЭС вместо (8) получим два стандартных для электродинамики условия равенства тангенциальных составляющих электрического поля и нормальных составляющих электрического тока [9, 18]:

$$\{E_\Sigma\} = 0 \Leftrightarrow \{\varphi\} = 0, \quad \{j_n\} = 0 \Leftrightarrow \left\{\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right\} = 0. \tag{10}$$

Таким образом в задачах ЭГД-обтекания с ПС зарядов электрическая и гидродинамическая части задачи оказываются связаны посредством единственного граничного условия, требующего равенства нулю скачка касательных составляющих суммарного тензора вязких и электрических напряжений [18]

$$\{p_{n\Sigma} + T_{n\Sigma}\} = 0. \tag{11}$$

Условие на нормальные компоненты потребуется лишь в случае учета отклонения формы капель от сферической.

Далее для сферических капель с ДЭС или ПС зарядов на границе раздела фаз будут рассматриваться системы безразмерных ЭГД-уравнений в приближении Стокса типа:

$$\begin{aligned} r > 1: &\quad \triangle \vec{v} - \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \triangle \varphi = 0, \\ r < 1: &\quad \triangle \vec{v}' - \nabla p' = 0, \quad \operatorname{div} \vec{v}' = 0, \quad \triangle \varphi' = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

как вне ($r > 1$), так для штрихованных величин и внутри ($r < 1$) капли. Выбор безразмерных переменных для каждой из конкретных задач и формулировка граничных условий при $r = 1$ и $r \to \infty$ будут оговариваться в соответствующих местах. Внутри капли при $r \to 0$ все величины должны быть ограничены.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы для каждой конкретной задачи ЭГД-обтекания получить аналог системы (12) в классе обобщенных функций с перспективой дальнейшего использования полученных результатов для вывода уравнений электрогидродинамики монодисперсных суспензий с поверхностным зарядом ПС или ДЭС.

2. ЭГД-течения Стокса с постоянным зарядом ДЭС

Для ЭГД-систем типа «ртутная капля - раствор электролита» на границе раздела фаз характерно наличие ДЭС. Будем считать, что плотность заряда ДЭС $q = const$ и при обтекании капли сохраняется квазиравновесное состояние ДЭС.

Тогда ЭГД-обтекание подобной капли однородным потоком $\vec{V}_\infty = U_0\vec{k}$ в безразмерных переменных описывается системой (12) и граничными условиями

$$\begin{aligned} r = 1: \quad & v_n = v_n' = 0, \quad v_\theta = v_\theta' = -v_0 \sin\theta, \\ & \{p_{r\theta}\} = \widetilde{\mu} p_{r\theta} - p_{r\theta} = -q\nabla_\Sigma\{\varphi\} \\ & \widetilde{\sigma}\frac{\partial\varphi'}{\partial r} + 2v_0 q\cos\theta = 0, \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial r} + 2v_0 q\cos\theta = 0, \\ r \to \infty: \quad & \vec{v} \to \vec{u}_0 = \vec{k}, \quad \nabla\varphi \to 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где расстояния, скорости, электрический потенциал и плотность поверхностного заряда ДЭС приведены к безразмерному виду делением на радиус капли a, U_0, $U_0\sqrt{\mu/\sigma}$ и $\sqrt{\mu\sigma}$ соответственно; давление вне и внутри капли - на $\mu U_0/a$ и $\mu' U_0/a$, $\widetilde{\mu} = \mu'/\mu$, $\widetilde{\sigma} = \sigma'/\sigma$.

Решение этой осесимметричной задачи с точностью до констант можно искать через электрический потенциал и функцию тока в следующем виде:

$$\varphi = \left(\alpha r + \frac{\beta}{r^2}\right)\cos\theta, \quad \psi = \left(A_4 r^4 + A_2 r^2 + A_1 r + \frac{D_1}{r}\right)\sin^2\theta. \tag{14}$$

Из ограниченности физических величин внутри капли при $r \to 0$ получаем $\beta' = A_1' = D_1' = 0$, условие при $r \to \infty$ дает $\alpha = A_4 = 0$, $A_2 = \frac{1}{2}$. Остальные коэффициенты находятся из граничных условий при $r = 1$, в частности,

$$\begin{gathered} \beta = qv_0, \quad A_1 = \frac{2v_0 - 3}{4}, \quad D_1 = \frac{1 - 2v_0}{4}, \\ v_0 = \frac{1}{2\left(1 + \widetilde{\mu} + (q^2/3) + (2q^2/3\widetilde{\sigma})\right)}. \end{gathered} \tag{15}$$

Продлим внешнее решение внутрь капли до точки $r = 0$, что с точки зрения обобщенных функций [1] и учетом соотношения $\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\vec{v} = \nabla\,\mathrm{div}\,\vec{v} - \triangle\vec{v}$ приводит к системе [7 – 10]

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\vec{v} + \nabla p &= 8\pi A_1 \vec{u}_0 \delta(\vec{r}), \\ \mathrm{div}\,\vec{v} &= -4\pi D_1(\vec{u}_0 \cdot \nabla\delta(\vec{r})), \\ \triangle\varphi &= 4\pi\beta(\vec{k} \cdot \nabla\delta(\vec{r})). \end{aligned} \tag{16}$$

Таким образом, капля с ДЭС в однородном потоке при $r > 1$ может рассматриваться с точки зрения электродинамики как электрический диполь, а с точки зрения гидродинамики - как линейная комбинация точечной силы и потенциального диполя.

Подчеркнем, что системой типа (16) описывается и обобщенное решение задачи об электрокапиллярном движении капли с ДЭС во внешнем электрическом поле $\vec{E} = E_0\vec{k}$ с заменой $\vec{u}_0 = \vec{k}$ на безразмерную скорость электрокапиллярного движения $\vec{v}_e = v_e\vec{k}$. Если в качестве характерной скорости в последней задаче взять $U_0 = E_0 a\sqrt{\sigma/\mu}$, то единственным отличием в постановке и общем виде решения этих двух задач будет условие вдали от капли [10]:

$$r \to \infty: \quad \vec{v} \to \vec{v}_e = v_e\vec{k}, \quad \nabla\varphi \to -\vec{k}.$$

и соответствующий набор коэффициентов:

$$\alpha = -1, \quad \beta = qv_0 - \frac{1}{2}, \quad A_1 = 0, \quad D_1 = -\frac{1}{2},$$
$$v_e = \frac{2}{3}v_0 = \frac{q}{2 + 3\widetilde{\mu} + q^2 + (2q^2/\widetilde{\sigma})}.$$

На основе системы (16) в [10] для ЭГД-обтекания капли с ДЭС путем осреднения по ансамблю возможных конфигураций была решена задача о скорости осаждения однородной суспензии, а для случая электрокапиллярного движения - найден аналог формулы Максвелла для эффективной проводимости суспензии. Аналогичным образом можно получить и выражение для эффективной диэлектрической проницаемости суспензии, однако полученная формула не отражает экспериментально обнаруженного эффекта гигантской диэлектрической проницаемости для суспензий с тонким ДЭС.

Для объяснения этого интересного эффекта необходим, как показано в [12, 13, 14] учет взаимодействия приложенного электрического тока с собственным магнитным полем как в теории электровихревых течений.

В качестве заключения этого раздела рассмотрим новую задачу об ЭГД-обтекании сферической капли с ДЭС и $q = const$ осесимметричным деформационно-сдвиговым потоком с заданным полем скорости вдали:

$$r \to \infty: \quad v_x \to -\frac{1}{2}Gx, \quad v_y \to -\frac{1}{2}Gy, \quad v_z \to Gz,$$

что является частным случаем разложения (6).

Общее решение через функцию тока, соответствующее этим условиям, можно искать в виде

$$\psi = (A_5 r^5 + A_3 r^3 + A_0 + \frac{D_2}{r^2})\sin^2\theta\cos\theta \tag{17}$$

Если для обезразмеривания в качестве характерной величины скорости выбрать $U_0 = Ga$, то эта задача будет описываться системой (12) и граничными условиями:

$$\begin{aligned} r = 1: \quad & v_n = v_n' = 0, v_\theta = v_\theta' = -v_0\sin\theta\cos\theta, \\ & \widetilde{\mu}p_{r\theta}' - p_{r\theta} = -q\nabla_\theta\{\varphi\}, \\ & -\frac{\partial\varphi}{\partial r} + 2qv_0P_2(\cos\theta) = 0, \quad \widetilde{\sigma}\frac{\partial\varphi'}{\partial r} + 2qv_0P_2(\cos\theta) = 0, \\ r \to \infty: \quad & \vec{v} \to \vec{v}_\infty = \overleftrightarrow{e}\cdot\vec{r}, \quad \nabla\varphi \to 0, \end{aligned} \tag{18}$$

где $P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$ - второй полином Лежандра, а безразмерный тензор скоростей деформаций $\overleftrightarrow{e}$ является диагональным с главными значениями $e_{11} = e_{22} = -1/2$, $e_{33} = 1$.

Решение поставленной задачи с точностью до констант в выражении для электрического потенциала имеет вид

$$\begin{aligned} r > 1: \quad & \varphi = \varphi_0 + \frac{\beta_2}{r^3} P_2(\cos\theta), \quad \psi = (A_3 r^3 + A_0 + \frac{D_2}{r^2}) \sin^2\theta \cos\theta \\ r < 1: \quad & \varphi' = \varphi'_0 + b_2 r^2 P_2(\cos\theta), \quad \psi' = (A'_5 r^5 + A'_3 r^3) \sin^2\theta \cos\theta \end{aligned} \tag{19}$$

где $A'_5 = -A'_3 = (1/2)v_0$, $A_3 = -1/2$, $A_0 = (1/4)(2v_0 - 5)$, $D_2 = (1/4)(3 - 2v_0)$,

$$b_2 = -qv_0/\widetilde{\sigma}, \quad \beta_2 = 2qv_0/3, \quad v_0 = \frac{3}{2(1 + \widetilde{\mu} + (2q^2/5) + (3q^2/5\widetilde{\sigma}))}.$$

Откуда следует, что в деформационно-сдвиговом потоке капля с ДЭС при $r > 1$ действует как электрический квадруполь и линейная комбинация стресслета (член с A_0) и гидродинамического осесиметричного квадруполя (член с D_2).

Для электрического потенциала в обобщенных функциях легко получаем [1]

$$\triangle\varphi = 2\pi\beta_2 \left[\frac{1}{3}\triangle\delta(\vec{r}) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\delta(\vec{r})\right] \tag{20}$$

Выражение в обобщенных функциях для $\operatorname{div}\vec{v}$ от гидродинамического квадруполя имеет такую же структуру

$$\operatorname{div}\vec{v}_{S4} = -\frac{4\pi}{3} D_2 \left[\frac{1}{3}\triangle\delta(\vec{r}) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\delta(\vec{r})\right],$$

если увидеть полную аналогию между $\triangle\varphi$ и $\operatorname{div}\vec{v}_{S4}$, когда их расписать в сферических координатах. Относительно $\operatorname{div}\vec{v}$ от стресслета в литературе существует ошибочное мнение, что и в обобщенных функциях $\operatorname{div}\vec{v}_{ST} = 0$. Однако легко можно показать, что для поля скоростей стресслета в нашем случае

$$\vec{v}_{ST} = 2A_0 \frac{\overleftrightarrow{e} : \overleftrightarrow{rr}}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 2A_0 \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot P_2(\cos\theta)$$

имеет место следующая цепочка преобразований:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{v}_{ST} = 2A_0 \operatorname{div}\left[\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot P_2(\cos\theta)\right] = 2A_0 P_2(\cos\theta) \operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3} = \\ = -2A_0 P_2(\cos\theta)\triangle(1/r) = 8\pi A_0 P_2(\cos\theta)\delta(\vec{r}). \end{aligned}$$

Таким образом для суммарного поля скоростей получаем, что

$$\operatorname{div}\vec{v} = 8\pi A_0 P_2(\cos\theta) \cdot \delta(\vec{r}) + \frac{8\pi}{9} D_2 (\overleftrightarrow{e} \cdot \nabla)\nabla\delta(\vec{r}). \tag{21}$$

Уравнение Стокса с силовой функцией от стресслета и квадруполя совместно с (20) и (21) дают аналог системы (16) для деформационно-сдвигового потока. Путем осреднения этой системы по ансамблю возможных конфигураций [7 – 10] желательно проверить полученное в [11, 12] методом самосогласованного поля или стандартной процедурой подсчета мощности диссипации энергии [2, 19] обобщение формулы Эйнштейна-Тейлора для эффективной вязкости

$$\mu_* = \mu \left(1 + \frac{5}{2} c \frac{\tilde{\sigma}(5\tilde{\mu} + 2) + q^2(2\tilde{\sigma} + 3)}{5\tilde{\sigma}(\tilde{\mu} + 1) + q^2(2\tilde{\sigma} + 3)}\right). \tag{22}$$

с поверхностным зарядом ДЭС в деформационно-сдвиговом потоке.

Заметим, что около капли во внешнем электрическом поле, находящейся вблизи точки максимума электрокапиллярной кривой [20], будет генерироваться ЭГД-течение с электрическим потенциалом вида (14), по функцией тока вида (17), что приводит к еще одной модификации системы типа (16). Подчеркнем, что аналогичная система, но со своими коэффициентами, получается при ЭГД-обтекании капли с ПС зарядов [18], так что и формулы для μ_* в этих двух случаях должны иметь отличную от (22), но похожую структуру. Аналогичным образом выражение для μ_* при электрокапиллярном движении суспензии при $q = const$ должно быть другим, относительно чего в литературе существуют разночтения, однако получение формул в этих случаях - тема отдельного исследования.

Работа выполнена по гранту РФФИ (№ 01-01-00010)

Литература

[1] *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.

[2] *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. — М.: Мир, 1976.

[3] *Головин А. М., Натяганов В. Л.* Магнитогидродинамическое обтекание капли при малых числах Рейнольдса и Гартмана. — МЖГ, 1978, № 6.

[4] *Натяганов В. Л.* Магнитогидродинамическое обтекание вращающегося шара при малых числах Рейнольдса и Гартмана в приближении Озеена. — Вест. МГУ, сер. 1, 1980, № 3.

[5] *Chwang A. T., Wu T. Y.* Hydromechanics of low-Reynolds-number flow. — J. Fluid Mech., pt. 1: 1974, v. 63; pt. 2: 1975, v. 67.

[6] Новое в зарубежной науке. — Сер. Механика, № 22, 1980, М. Мир, 1980.

[7] *Головин А. М., Чижов В. Е.* К расчету скорости осаждения однородной суспензии. — ПММ, 1978, т. 42, № 1.

[8] *Головин А. М., Чижов В. Е.* Об эффективной теплопроводности суспензии. — Вест. МГУ, сер. 1, 1978, № 1.

[9] *Натяганов В. Л.* Электрические свойства однородных суспензий сферических частиц. — Сб. Современные проблемы механики и прикладной математики, ч. 2, Воронеж, ВГУ, 2000.

[10] *Натяганов В. Л., Орешина И. В.* Электрогидродинамика монодисперсных эмульсий, ч. 1, 2. — Колл. жур., 2000, т. 62, № 1.

[11] *Натяганов В. Л., Орешина И. В., Чайка А. А.* Эффективные гидродинамические и электрические характеристики однородных суспензий сферических частиц. — Сб. «Математика. Компьютер. Образование.», вып. 8, М: Прогресс-Традиция, 2001.

[12] *Натяганов В. Л.* Сингулярный метод в моделях электрогидродинамики суспензий. — Сб. Упругость и не упругость, М.: Изд-во МГУ, 2001.

[13] *Натяганов В. Л.* Электрокапиллярновихревая модель шаровой молнии. Эффект гигантской диэлектрической проницаемости суспензии. — Аннотации докладов VIII Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике, Пермь, 2001.

[14] *Натяганов В. Л.* Электровихревая модель электрокапиллярного движения сферической капли и шаровой молнии. Эффект гигантской электрической проницаемости однородной суспензии. — Сб. науч. трудов «Математика. Компьютер. Образование.», вып. 8, ч. II, М.: Прогресс-Традиция, 2001.

[15] *Натяганов В. Л.* Электрокапиллярновихревая модель сферического вихря Хилла-Тейлора. — ДАН, 2001, т. 381, № 1.

[16] *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1959.

[17] *Мелчер Дж. Р.* Электрогидродинамика. — МГ, 1974, № 2.

[18] *Мелчер Дж. Р., Тейлор Дж.* Электрогидродинамика: обзор роли межфазных касательных напряжений. — Механика, сб. переводов, 1971, № 5.

[19] *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973.

[20] *Натяганов В. Л.* Некоторые особенности электрокапиллярного движения капель. — Сб. Механика деформируемых сред, М.: Изд-во МГУ, 1985.

Перемешивание при вытеснении вязких жидкостей из ячейки Хеле-Шоу

Ивашнев О. Е., Шахмардан М. М.

1. Введение

Ячейка Хеле-Шоу служит физической моделью пористой среды. Она представляет собой канал, образованный двумя параллельными пластинами, расположенными на расстоянии δ значительно меньшем длины L и ширины канала H. Фронт вытеснения вязкой жидкости другой, менее вязкой, неустойчив. Менее вязкая, вытесняющая жидкость прорывается через слой вытесняемой: образуя в ней каналы: называемые вязкими пальцами. В результате образуется область (фронт вытеснения) лежащая между основаниями и вершинами пальцев, в которой находится как вытесняемая, так и вытесняющая жидкости. Изменение ширины этой области во времени в зависимости от параметров течения и требуется рассчитать.

Известно [1], [2], что форма вязких пальцев определяться силами поверхностного натяжения и диффузией жидкостей. Но при вытеснении нефти водой из пористой среды оба эти фактора не работают[3]. Нефть не смешивается с водой, и поэтому диффузии нет. Силы поверхностного натяжения из-за разобщенности капилляров грунта не зависят от формы фронта и, следовательно, не могут влиять на форму вязких пальцев. Однако существуют эксперименты, в которых, несмотря на отсутствие этих известных стабилизирующих факторов, вязкие пальцы имеют примерно одинаковую ширину и похожую форму. На рис. 1 представлены результаты экспериментов [4]. Даны фотографии фронта вытеснения в два момента времени $t_1 = 2\,c$ и $t_2 = 8\,c$. Вытесняется водоглицериновая смесь (справа) водой (слева) из ячейки Хеле-Шоу с зазором между пластинами $\delta = 1.2$ мм, длиной и шириной 200 и 100 мм. Среднеобъемная скорость вытеснения $U = 1$ см/с. Отношение вязкостей вытесняемой и вытесняющей жидкости $M = \mu_2/\mu_1 = 84$. Видно, что граница между жидкостями, несмотря на ее сложную форму, не размывается со временем. Следовательно, благодаря высокой скорости вытеснения эффекты диффузии не проявляются в этом эксперименте. С другой стороны, поскольку вода и глицерин смешивающиеся жидкости, на их межфазной поверхности не возникает сил поверхностного натяжения. Таким образом, и с этой точки зрения этот эксперимент моделирует процесс вытеснения нефти водой из пористой среды.

Мы предположили, что малые силы инерции, наряду с другими малыми параметрами (силами поверхностного натяжения, действующими в плоскости течения, диффузией) определяют размеры вязких пальцев и, следовательно, влияют на эффективный коэффициент диффузии. Для проверки высказанной гипотезы была составлена математическая модель течения в ячейке Хеле-Шоу учитывающая инерцию жидкости. Решения, полученные с ее помощью были сопоставлены с данным эксперимента.

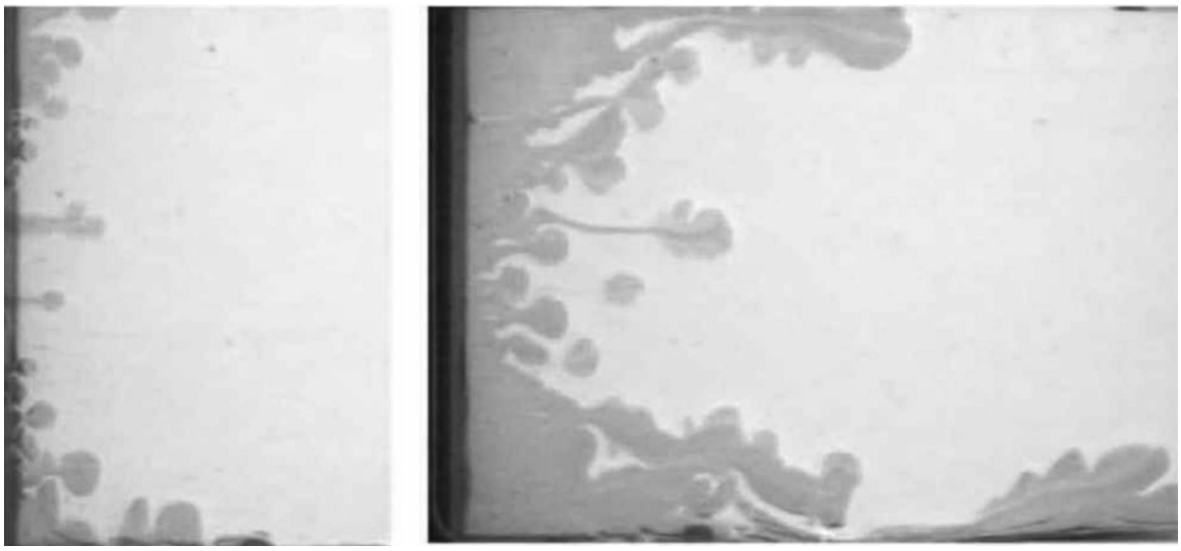


Рис. 1: Фотографии фронта вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу ($\delta = 1.2$ *мм*, $U = 1$*см/с*, $M = 84$).

2. Математическая модель

Движение обеих жидкостей описывается одними и теми же уравнениями:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad , \tag{1}$$

$$\rho_i \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_i u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho_i v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{12\,\mu_i}{\delta^2} u, \tag{2}$$

$$\rho_i \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_i u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho_i v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{12\,\mu_i}{\delta^2} v \tag{3}$$

где $i = 1$ для параметров, относящихся к вытесняющей жидкости; $i = 2$ — вытесняемой.

На межфазной поверхности ставится условие равенства давлений и нормальных к межфазной поверхности составляющих векторов скорости жидкостей:

$$x = \xi\,(t, y): \quad P_1 = P_2 = P \quad w_{1n} = w_{2n} \tag{4}$$

3. Результаты анализа роста малых возмущений плоской межфазной поверхности

Рассматривается эволюция малого синусоидального возмущения

$$\xi' = exp\,[i\,(\omega\,t - y/\lambda)] \tag{5}$$

межфазной поверхности, находящейся на линии $x = 0$. Первый постоянный параметр решения (5) — комплексная частота, является мнимым; второй, длина волны возмущения — действительным. Предполагаем, что амплитуда возмущений затухает при удалении от поверхности фронта:

$$x \to \pm\infty : \quad P' \to 0 \tag{6}$$

Для случая, когда плотности вытесняемой и вытесняющей жидкостей равны$\rho_1 = \rho_2 = \rho$, связь между постоянными параметрами решения (5) имеет вид:

$$\varpi_{1,2} = \left[\frac{3\,(1+M)}{M\,Re} \pm \sqrt{\frac{6\,(M-1)}{M\,Re}\,\frac{1}{\bar{\lambda}} + \frac{9\,(1+M)^2}{M^2\,Re^2}} \right] i, \tag{7}$$

где $i^2 = -1$

$$\varpi = \frac{\omega\,\delta}{U} \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\delta} > 1 \quad Re = \frac{\rho\,\delta\,U}{\mu_2}$$

безразмерные комплексная частота, длина волны и число Рейнольдса. Для рассматриваемого течения (рис. 1) $Re = 0.14$.

Из (5), (7) видно, что каждой длине волны λ соответствуют два значения ϖ. Первое имеет положительную мнимую часть. Оно дает затухание возмущения. Второе с отрицательной мнимой частью дает его рост. На рис. 2 показана зависимость отрицательной мнимой части ϖ_2 (декремента затухания) от длины. Часть кривой, лежащая левее линии $\bar{\lambda} = 1$ не имеет физического смысла. На этом участке не выполняется допущение модели о малости ширины ячейки в сравнении с линейными размерами течения.

Из рисунка видно, что наибольшая интенсивность роста наблюдается у возмущений наименьшей длины волны. Таким образом, если плоский фронт возмущен случайным образом, то с наибольшей интенсивностью будут расти самые короткие возмущения.

4. Задача об одиночном вязком пальце в ячейке Хеле-Шоу

В этой задаче рассматривается другой предельный случай, анализируется рост возмущений имеющих бесконечную длину. В ячейке Хеле-Шоу шириной h со скоростью U_0 распространяется вязкий палец (рис. 3). Скорость жидкости, при $x \to \infty$ — $U < U_0$. Требуется рассчитать ширину вязкого пальца λ.

Из уравнения неразрывности следует связь между скоростью пальца и жидкости на удалении от него:

$$U_0\lambda + U_1\,(h - \lambda) = U\,h. \tag{8}$$

где U_1 — скорость жидкости при $x \to -\infty$, т.е. жидкости движущейся вдоль плоских стенок пальца. Из предположения о существовании плоских стенок следует вывод об

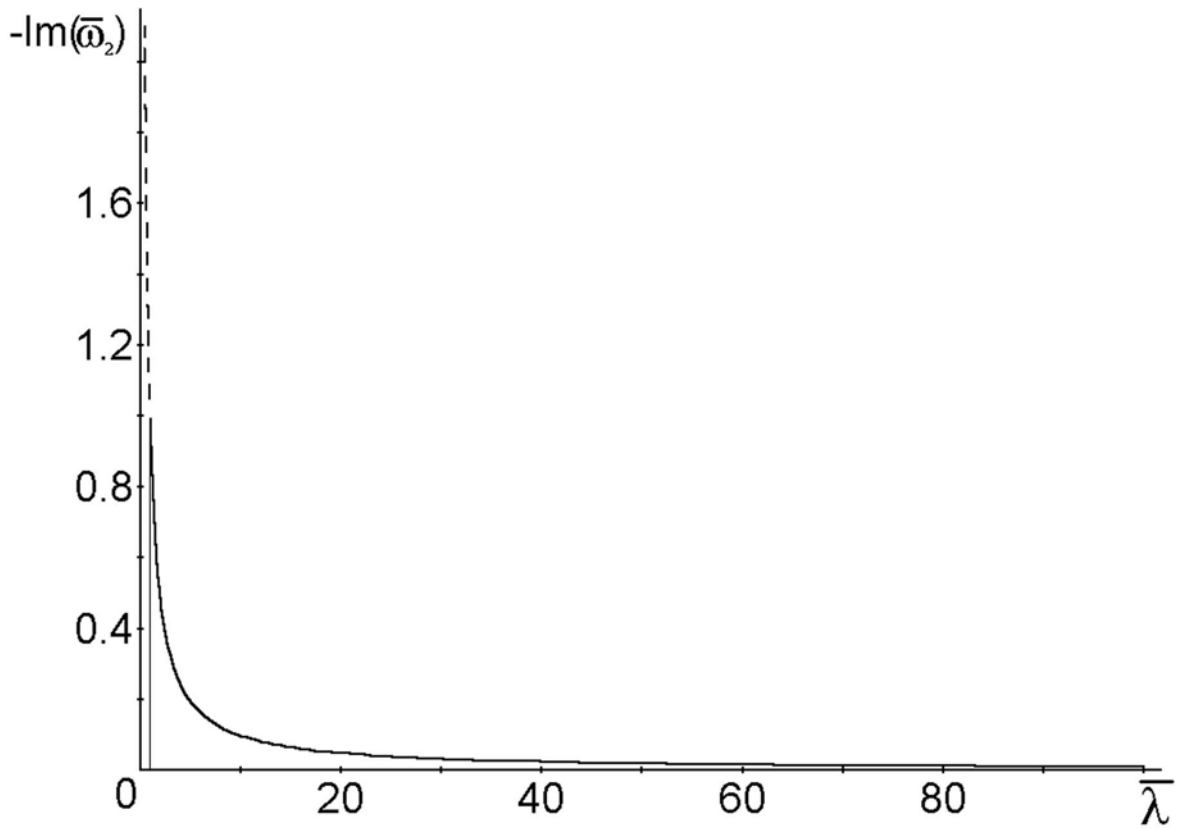


Рис. 2: Зависимость декремента затухания, взятого со знаком минус, от длины волны ($Re = 0.14,\ M = 84$).

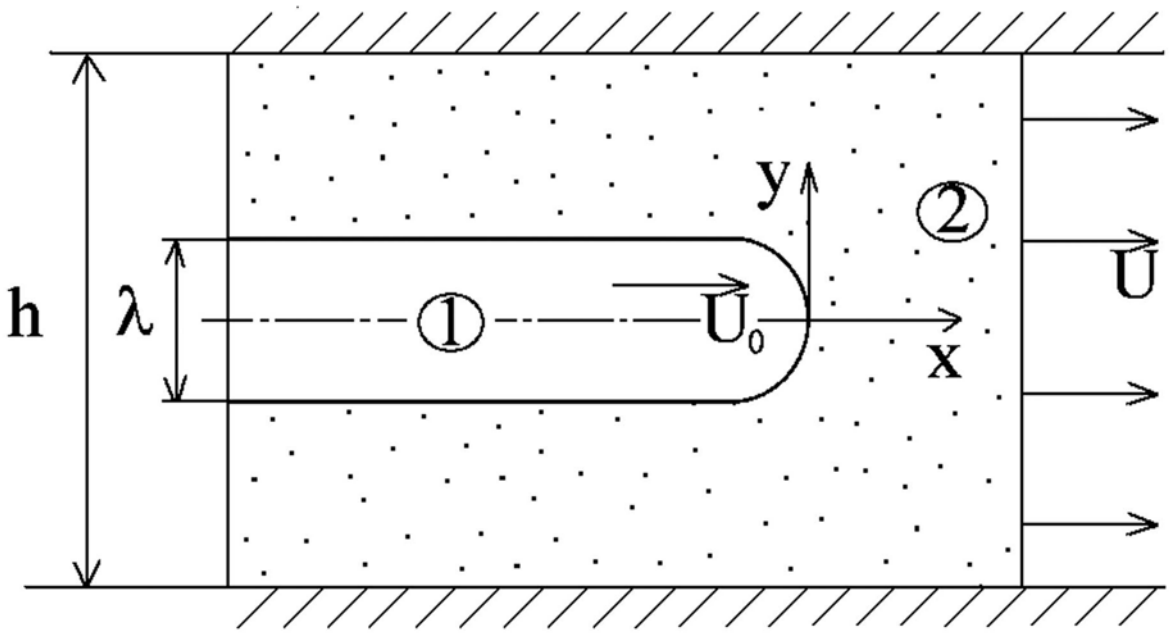


Рис. 3: Постановка задачи о бесконечно длинном вязком пальце в ячейке.

однородности давления в сечении $y = const$. Приравнивая давления в вытесняющей и вытесняемой жидкости, получаем:

$$\mu_1 U_0 = \mu_2 U_1 \tag{9}$$

Из уравнений (8), (9) получаем:

$$U_0 \left[\lambda + (h - \lambda) \frac{\mu_1}{\mu_2} \right] = U\, h. \tag{10}$$

Уравнение (10), полученное из общих интегральных соотношений, дает связь между неизвестными параметрами задачи U_0 и λ. Оказалось, что решение задачи о вязком пальце в классической постановке [5], которое строится без учета сил инерции, не дает второй связи между этими параметрами. В соответствии с этим решением она может быть любой [6]. Путем подбора источников и стоков, расположенных на оси симметрии течения (рис. 3) было получено приближенное решение задачи о вязком пальце с учетом сил инерции. Малые силы инерции доминируют в особой точке потока $x = y = 0$ (рис. 3). Из условия существования решения в этой точке следует соотношение между интенсивностью лобового источника и скоростью потока. Это соотношение, в неявной форме (в которую входят интенсивности многих источников и их координаты) дает недостающую связь между параметрами U_0 и λ.

Таким образом, из решения задач об эволюции малых возмущений плоской поверхности и о вязком пальце следует, что на межфазной поверхности вначале вырастают узкие пальцы, шириной $\sim \delta$. По мере роста ширина их возрастает. Это

объясняет необычную «грушевидную» форму вязких пальцев наблюдаемых в эксперименте, представленном на рис. 1.

5. Результаты численного моделирования

Чтобы проследить за эволюцией вязких пальцев и рассчитать интегральную характеристику процесса вытеснения — эффективный коэффициент диффузии, задача о вытеснении вязкой жидкости была решена численно. В основу алгоритма было положено предположение о существовании непрерывного поля скоростей и давлений около межфазной поверхности. Тогда, используя тот факт, что параметры, определяемые физическими свойствами жидкостей ρ_i и μ_i, входят в систему уравнений (1) – (3) лишь в виде коэффициентов, возможно рассчитать поле скоростей и давлений для каждого последующего момента времени во всей области течения. Затем, по известному полю скоростей, определялось новое положение межфазной поверхности.

Поскольку уравнения (2), (3) являются уравнениями типа Эйлера (они не содержат второй производной от скорости), на межфазной поверхности может быть выполнено лишь условие равенства нормальных к поверхности составляющих скорости. Касательные же составляющие могут терпеть разрыв. Поэтому предположение о непрерывности параметров у межфазной поверхности не следует из математической постановки задачи. Однако, известно [7], что численный аналог уравнений отличается от математического. Численная схема «добавляет» к математическим уравнениям старшие производные. Поэтому в численных расчетах по сути решаеся полная система уравнений типа Навье-Стокса, в которой схемная вязкость подобрана так, чтобы размазать скачок скорости на 1 – 2 ячейки (в зависимости от типа схемы).

Из-за трудности моделирования течения вокруг десятков вязких пальцев одновременно, в численном эксперименте было рассмотрено течение только в 1/10 части экспериментальной ячейки Хеле-Шоу. На рис. 4,а показана форма фронта вытеснения в несколько моментов времени, рассчитанная для «неинерциальной» жидкости ($Re = 0$). За единицу измерения времени принято время прохождения жидкой частицы, движущейся со среднемассовой скоростью U, расстояния равного ширине ячейки Хеле-Шоу используемой в численном эксперименте $T^* = U\,t/h$ ($h = 0.1\,H$). Видно, что в безинерционной жидкости ширина вязких пальцев не изменяется в процессе их эволюции. Она остается минимально возможной и равной нескольким ячейкам численной сетки.

В инерционной жидкости (рис. 4, б) вязкие пальцы постепенно утолщаются, а жидкий «мост» отделяющий их головную часть от основной массы вытесняющей жидкости, наоборот, утончается. Аналогичные конфигурации наблюдаются и в эксперименте (рис. 1). В целом, численный эксперимент подтвердил существенную роль инерции жидкости в процессе формирования структуры фронта вытеснения при выбранных параметрах течения.

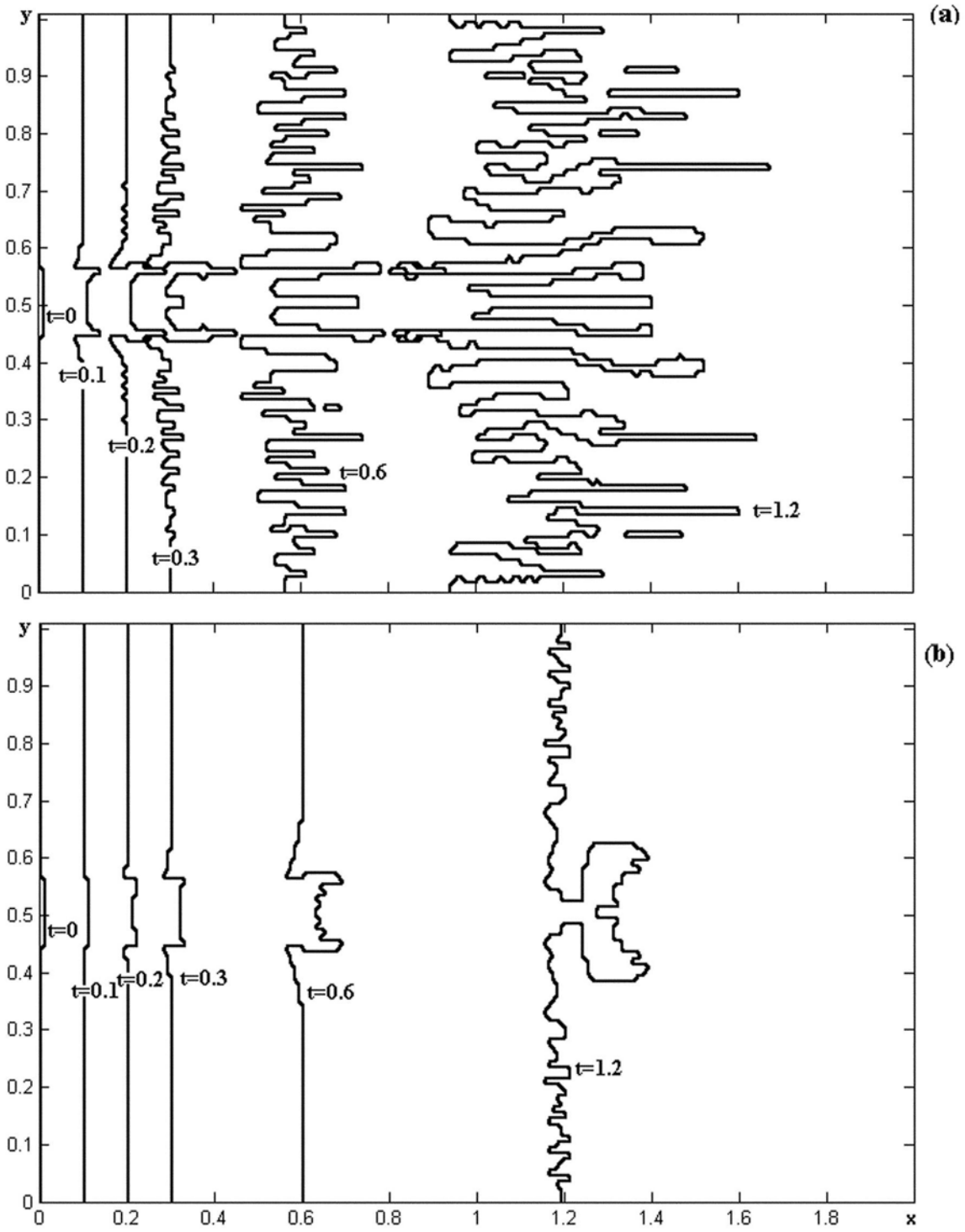


Рис. 4: Структура фронта вытеснения в численном эксперименте: а — в неинерционной жидкости; б — с учетом инерции.

6. Заключение

Анализ устойчивости на малые возмущения первоначально плоского фронта вытеснения вязкой жидкости другой, менее вязкой показал, что с наибольшей скоростью растут наиболее короткие возмущения, длиной порядка ширины ячейки Хеле-Шоу. Таким образом, возникающие пальцы имеют ширину $\sim \delta$.

Решение задачи о вязком пальце в ячейке Хеле-Шоу с учетом инерции жидкости позволяет рассчитать ширину вязкого пальца. Из решения двух аналитических задач следует, что ширина вязкого пальца по мере его роста увеличивается, стремясь к стационарному значению.

Численные расчеты процесса неустойчивого вытеснения подтвердили вывод линейного анализа о доминирующем росте коротких возмущений. Все образующие пальцы имеют минимально возможную ширину. В расчетах без учета инерции жидкости ширина вязкого пальца не меняется со временем. При учете инерции ширина вязких пальцев увеличивается по мере их роста. Это находится в соответствии с данными эксперимента и подтверждает роль инерции в процессе формирования структуры фронта неустойчивого вытеснения.

Литература

[1] *Park C.W., Homsy G.M.* The instability of long fingers in Hele-Show flows. — Phys. Fluids 1985, V.28, N. 6.

[2] *Homsy G.M.* Viscous fingering in porous media. — Ann. Rev. Fluid Mech., 1987, V.19.

[3] *Smirnov N.N., Nikitin V.F., Ivashnyov O.E., Legros J.C., Vedernikov A., Scheid B., Istasse E.* Instability in viscous fluids displacement from cracks and porous samples. — Proc. 53-d Internat. Astronautical Congress, Houston 2002, IAC-02-J.2.02.

[4] *Smirnov N.N., Nikitin V.F., Ivashnyov O.E., Maximenko A., Thiercelin M., Vedernikov A., Scheid B., Istasse E, Legros J.C.* Theoretical and experimental study of instability and the mixing flux in frontal displacement of fluids. — Proc. 54-d Internat. Astronautical Congress, Bremen 2003, IAC-03-J.2.03.

[5] *Saffman P.G., Taylor G.J.* The penetration of a fluid into a porous medium of Hele-Show cell containing a more viscous fluid. — Proc. R. Foc. Zond., A 245, 312, 1958.

[6] *Tanveer S.* Surprises in viscous fingering. — J. Fluid Mech., 2000, V. 409.

[7] *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980.

К вопросу о единственности построения решения задачи Прандтля

Кончакова Н. А.

Не единственность выбора полей скольжения и распределения скоростей в классических решениях задачи о штампе по схеме жесткопластического тела указывает на необходимость привлечения различных дополнительных соображений и использования экспериментальных наблюдений. Показанная [1] положительность диссипативной функции, позволяет рассмотреть теоремы единственности решения краевых задач для упругопластических тел. Представление диссипативной функции отражает основные механические предположения, положенные в основу математической модели. Гипотеза о совпадении главных направлений тензоров напряжений и деформаций (скоростей деформаций) в пластическом состоянии является достаточно сильным требованием при построении модели деформирования [1], поскольку в реальных экспериментах достаточно часто имеет место отклонение от подобия тензоров [2]. Будем рассматривать соосность тензоров напряжений и скоростей деформаций, а от их подобия следует отказаться. Тогда существенным является выбор инвариантов напряженного и деформированного состояний, основанный на физической интерпретации процессов диссипации энергии [3] и отражающий связь с площадками максимальных касательных напряжений T и главными сдвигами Γ [4].

Проблема построения единственного решения распределения скоростей требует обсуждения нескольких вопросов:

1. Какие типы краевых условий допускает теорема единственности в уравнениях для деформаций?

2. Как поступить в том случае, когда используются краевые условия в напряжениях? Каким образом строить решения, если имеются смешанные условия (например, под штампом)?

3. Какие дополнительные краевые условия следует поставить в областях с угловыми точками?

Обратимся к записи уравнения энергии [1]:

$$\int\limits_L \bar{\sigma}_n \cdot \bar{u} ds + \int\limits_V \rho \bar{F} \cdot \bar{u} d\tau = 2 \int\limits_V W d\tau + \int\limits_V D d\tau, \tag{1}$$

где W — положительно определенная квадратичная форма напряжений или деформаций для упругих состояний; скалярное произведение $\bar{\sigma}_n \cdot \bar{u}$ включает напряжения и перемещения (от полных деформаций); диссипативная функция D, выписанная при условиях полной пластичности, положительна при всех значениях характеристических параметров. Выбор нового набора инвариантов обуславливает отсутствие

подобия тензоров напряжений и деформаций и позволяет перейти и описанию кинематики деформирования с помощью перемещений (скоростей перемещений) [4]. Для этого вводятся дополнительные, независимые кинематические параметры — углы поворота элементов среды ω и углы наклона главных направлений тензора деформаций ψ [5, 6]. Соотношения, описывающие необратимую деформацию для предлагаемой синтетической модели, приведены в работах [5, 6] и имеют вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x} - \cos 2\psi \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} + \sin 2\psi \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y} + \sin 2\psi \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} + \cos 2\psi \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$, $tg2\psi == \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_y - \varepsilon_x}$, $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\Gamma_e}$.

Система принадлежит к гиперболическому типу и имеет два семейства вещественных характеристик

$$\frac{dy}{dx} = ctg\psi, \quad \frac{dy}{dx} = -tg\psi, \tag{3}$$

которые определяют сетку реальных линий скольжения, аналогичных линиям скольжения в теории напряжений. Соотношения на характеристиках имеют вид:

$$\tilde{\omega} + \psi = \alpha = const, \quad \tilde{\omega} - \psi = \beta = const. \tag{4}$$

Указанные линии скольжения есть реально наблюдаемые во многих экспериментах линии разрушения материала [7], а также линии образования регулярных блочных структур в первоначально однородном теле [4, 5, 7].

Для иллюстрации приведенных в [6] свойств реальных линий скольжения, рассмотрим задачу о вдавливании штампа на податливом (с учетом необратимых деформаций) основании. Штамп жесткий, трение на поверхности контакта отсутствует. В предельном состоянии штамп движется вниз со скоростью $\bar{V}$. Решение в напряжениях единственно и совпадает с решением Прандтля: в предельном состоянии распределение давления под штампом равномерное. Задача имеет ось симметрии $x = 0$, поэтому естественно рассмотреть одну часть пространства и отобразить решение относительно указанной оси. Поле скольжения (рис. 1) строится следующим образом [8]:

В ΔBED, в силу заданных краевых условий (прямолинейная граница, свободная от усилий), имеет место простое сжатие, параллельное границе

$$\sigma = -k \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\alpha = \frac{\sigma}{2k} - \theta = const,$$

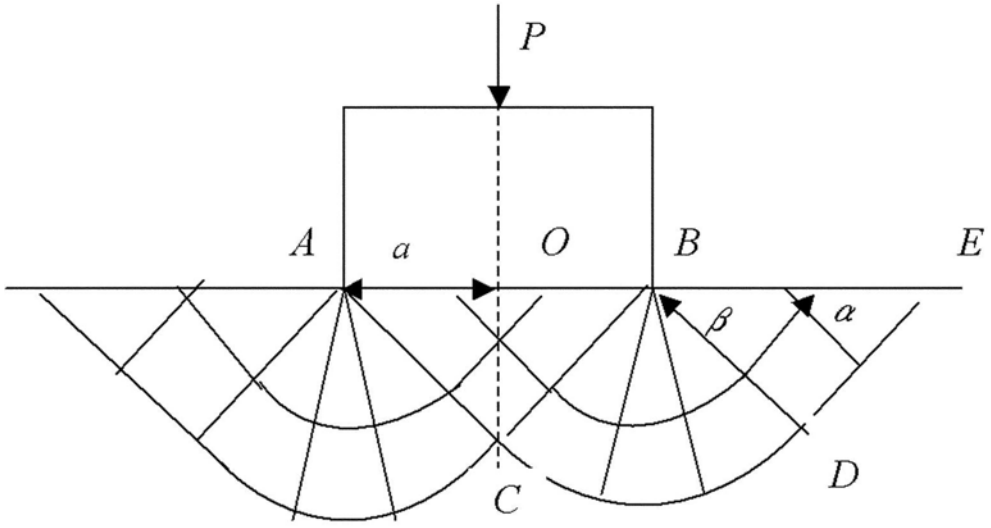


Рис. 1.

$$\beta = \frac{\sigma}{2k} + \theta = const.$$

В рассматриваемом случае

$$\alpha = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = const,$$

$$\beta = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = const.$$

В $\triangle ABC$ давление σ неизвестно, а $\theta = \frac{\pi}{4}$. Вдоль характеристик

$$\alpha = \frac{\sigma}{2k} + \frac{\pi}{4} = const,$$

$$\beta = \frac{\sigma}{2k} - \frac{\pi}{4} = const.$$

Треугольные области соединены центрированными полями. Вдоль α-линии параметр α должен быть постоянен, следовательно $\alpha_{ABC} = \alpha_{BED}$:

$$\frac{\sigma}{2k} + \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Откуда получаем $\sigma_{ABC} = -k\,(1+\pi)$. Известно, что

$$\sigma_x = \sigma - k\sin 2\theta,$$

$$\sigma_y = \sigma + k\sin 2\theta.$$

Поэтому в зоне под штампом

$$\sigma_x = -k\,(1+\pi) - k\sin 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -k\pi,$$

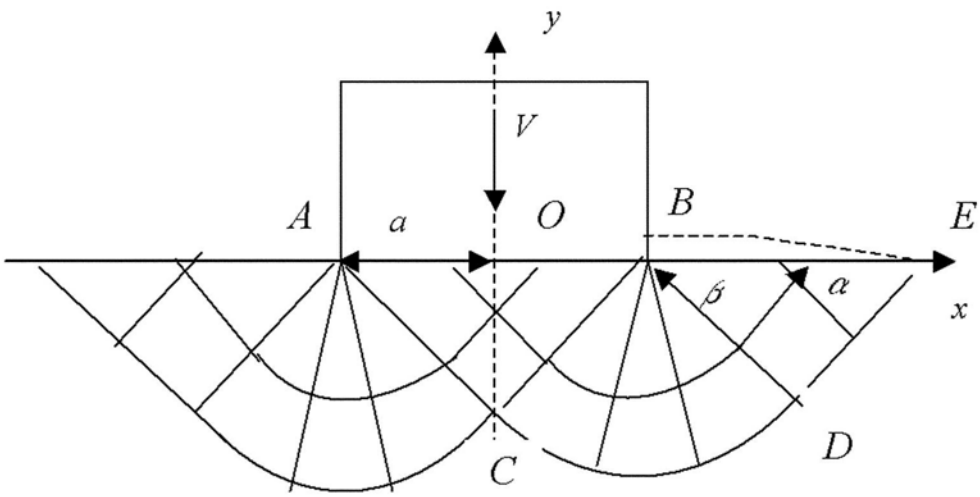


Рис. 2.

$$\sigma_y = -k\,(1+\pi) + k\sin 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -k\,(2+\pi)\,.$$

Предельная нагрузка $P_* = 2\int_2^0 \sigma_y dx = 2ka\,(2+\pi)$

При построении поля скоростей логично обсудить вопрос о краевых условиях. Напряжения всюду в пластической области известны. На границе $y = 0$ отсутствует трение на поверхности и напряжение σ_y. То есть,

$$\text{при } |a| < x \text{ напряжения } \sigma_y = \tau_{xy} = 0. \tag{5}$$

По условию задачи штамп движется вниз со скоростью $\bar{V}$. Следовательно, краевые условия при $|a| > x \quad V \neq 0$, $\tau_{xy} = 0$. Таким образом, в точках A и B (рис. 2) происходит смена типов краевых условий: до рассматриваемых точек задаются напряжения, а внутри штампа граничные условия описывают поведение перемещений.

Точки A и B являются особыми. Покажем, что в них требуется задать дополнительные краевые условия [9]. Классические решения задачи свидетельствуют о том, что условие непрерывности перемещений в угловых точках не обеспечивает единственности решения [8].

Рассмотрим область деформирования под штампом. На границе AB задано $V \neq 0$, т.е. $\omega = \omega_0 = 0$, $\psi = \psi_0 \neq 0$. Следовательно, решается задача Коши (в силу симметрии рассмотрим только область OBC). Разделим отрезок OB на малые части точками $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)\ldots(m,m)$. Значения $\tilde{\omega}$ и ψ в узлах, ближайших к дуге, найдем из условий постоянства параметров α и β на характеристиках (4)

$$\tilde{\omega}_{m,m} + \psi_{m,m} = \alpha = \tilde{\omega}_{m,m+1} + \psi_{m,m+1},$$

$$\tilde{\omega}_{m+1,m+1} - \psi_{m+1,m+1} = \beta = \tilde{\omega}_{m,m+1} - \psi_{m,m+1},$$

где $\tilde{\omega}_{m,m}$, $\psi_{m,m}$ есть соответствующие значения переменных в узлах сетки. Из последних уравнений получим выражения для определения неизвестных ω и ψ в про-

извольном узле (m, n), $(n > m)$:

$$\tilde{\omega}_{m,n} = \frac{1}{2}\left(\tilde{\omega}_{m,n-1} + \tilde{\omega}_{m+1,n} + \psi_{m,n-1} - \psi_{m+1,n}\right),$$

$$\psi_{m,n} = \frac{1}{2}\left(\psi_{m,n-1} + \psi_{m+1,n} + \tilde{\omega}_{m,n-1} - \tilde{\omega}_{m+1,n}\right).$$

Данные соотношения позволяют вычислить параметры $\tilde{\omega}$ и ψ в ΔOBC . При заданных граничных условиях имеем:

$$\tilde{\omega}_{0,1} = 0,\ \psi_{0,1} = \psi_0;\ \tilde{\omega}_{1,2} = 0,\ \psi_{1,2} = \psi_0;\ \ldots\ ;$$

$$\tilde{\omega}_{m,1} = 0,\ \psi_{m,1} = \psi_0;\ \ldots\ ; \tilde{\omega}_{m,n} = 0, \psi_{m,n} = \psi_0;\ \ldots$$

Значение переменной $\tilde{\omega}$ всюду в области OBC равно нулю, а переменная $\psi = \psi_0$ во всех точках этой области. Таким образом, в пластической зоне под штампом, имеет место равномерное прямолинейное поле деформаций [6]. Реальными линиями скольжения будут два ортогональных семейства параллельных прямых направленных под углом $\theta = \frac{\pi}{4}$ к границе (рис. 2). В данном поле линий скольжения характеристики ω и ψ постоянны. Таким образом, все элементы поворачиваются одинаково на угол ω, а также ψ — угол между главным направлением тензора деформаций и осью Ox — сохраняет свое постоянное значение.

Проанализируем поведение перемещений в рассматриваемой области. Соотношения для деформаций имеют вид [6]:

$$\varepsilon_x = -\frac{1}{2}\Gamma_e \cos 2\psi,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2}\Gamma_e \cos 2\psi,$$

$$\varepsilon_{xy} = \Gamma_e \sin 2\psi.$$

Подставим их в известные [5] формулы для приращений перемещений:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \varepsilon_x dx + \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{xy} - \omega_z\right)dy,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{xy} + \omega_z\right)dx + \varepsilon_y dy.$$

С учетом малости параметра ψ, получим:

$$\begin{aligned} du &= -\frac{\Gamma_e}{2}dx + \Gamma_e\psi_0 dy, \\ dv &= \Gamma_e\psi_0 dx + \frac{\Gamma_e}{2}dy. \end{aligned} \tag{6}$$

Уравнения (6) совместно с условиями (4) позволяют находить смещения u и v вдоль характеристик в области OBC.

Выше было показано, что на характеристике BC ω равно нулю. Однако, в точке B $\omega \neq 0$, что физически объясняется процессом вдавливания штампа. Как видим, в точке B не только происходит смена краевых условий, но и меняется значение переменной ω. Значит, для единственности решения необходимо ввести дополнительные краевые условия: либо задать ω — повороты волокна (элемента), либо указать изменение величины ψ.

В зоне BED сетка по напряжениям известна. Работая с уравнениями для деформаций (2) и краевыми условиями для напряжений (5), из физических соображений можно предположить искажение границы $y = 0 - BE$. Возмущения ω и ψ могут быть вычислены в области BED, если проведен полный анализ решения в веере BCD. Разрыв величины ω, введенный в точке B, распределяется на характеристических линиях веера. Тогда $[\omega]$ компенсируется внутри области.

Таким образом, в точках A и B следует дозадать разрыв перемещений или момент сил (поворот), что обеспечит единственность решения как упругой, так и упругопластической задач.

Литература

[1] *Шемякин Е. И.* Диссипативная функция в моделях идеальных упругопластических тел. — Докл. РАН, Механика, 2001, Т. 376, № 4.

[2] *Христианович С. А., Шемякин Е. И.* О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении. — Изв. АН СССР, МТТ, 1969, №5.

[3] *Шемякин Е. И.* Об инвариантах напряженного и деформированного состояния в математических моделях механики сплошной среды. — Докл. РАН, Механика, 2000, Т. 373, №5.

[4] *Шемякин Е. И.* Синтетическая теория прочности. Часть I. — Физическая мезомеханика, 1999, №2.

[5] *Шемякин Е. И.* О хрупком разрушении твердых тел (плоская деформация). — Изв. РАН, Механ. тверд. тела, 1997, №2.

[6] *Кончакова Н. А.* О построении моделей сплошных сред с несимметричными тензорами. — Вестн. Моск. ун-та, Сер.1, Математика, Механика, 2002, № 4.

[7] *Ревуженко А. Ф.* Механика упругопластических сред и нестандартный анализ. — Новосибирск, 2000.

[8] *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. — М., 1969.

[9] *Шемякин Е. И.* О краевых задачах теории упругости для областей с угловыми точками (плоская деформация). — Докл. РАН, Механика, 1996, Т. 347, №3.

Модель движения разгонных вихрей в следе за цилиндром

Козлов В. П.

1. Введение

При решении задач аэродинамики широко используются приближенные математические модели. Эти модели, в частности, служат для решения задач обтекания с образованием отрывных зон течение в которых, как правило, является нестационарным. Большое распространение получил метод дискретных вихрей [1], разработанный в начале XIX века Розенхидом [2] и основанный на моделировании отрывных зон «облаком» свободных дискретных вихрей. Достаточно полный анализ подходов при решении подобных задачах в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости приводится в книге [3].

В данной статье предлагается один из возможных вариантов модели течения в зоне отрыва в двухмерном случае. В качестве примера будет рассмотрена задача поперечного обтекания кругового цилиндра радиуса r дозвуковым потоком, мгновенно преобретающим постоянную скоростью $\mathbf{V}_\infty$. Из эксперимента [4, 5] известно, что в этом случае в ближнем следе за цилиндром образуется область возвратного течения, представляющая из себя пару разгонных вихрей. В течении некоторого времени эта область увеличивается, а разгонные вихри остаются симметрично расположенными относительно оси, проходящей через центр цилиндра в направлении скорости потока. На расстоянии около полутора диаметров от цилиндра вихри теряют устойчивость и поочередно сходят в поток. Задача состоит в том, что бы в рамках идеальной несжимаеммой жидкости описать движение разгонных вихрей до момента потери их устойчивого симметричного положения.

В основу данного подхода легли идеи Брайсона, предложенные им в работе [6]. В этой работе в рамках потенциальной модели течения разгонные вихри моделируются парой вихрей, имеющие не нулевую составляющую скорости относительно частиц жидкости $d\xi_{\text{в}}/dt$, где $\xi_{\text{в}}(t)$ - комплексная координата положения вихря и переменную по времени циркуляцию $\mathbf{\Gamma}_{\text{в}} = \mathbf{\Gamma}_{\text{в}}(t)$. В [6] вводятся две вихревые пелены, соединяющие вихри с поверхностью цилиндра в точке отрыва $\xi = \xi_{\mathbf{0}}$ и выводится уравнение движения каждого вихря из соотношений баланса сил, действующих на вихревую пелену и вихрь. При этом предполагается, что вихревая пелена испытывает давление со стороны жидкости и, следовательно является некотой материальной твердой линией. Понятия вихревой пелены и дискретных вихрей, введенные в работе [6] не согласуются с классическим определением дискретного вихря и вихревого слоя [2]. В [2] каждый вихрь пелены или слоя «вморожен» в среду и свободно сносится потоком, имея при этом постоянную циркуляцию и скорость, равную скорости частиц жидкости потенциального течения. Таким образом, принятые в [6] предположения

делают некорректным описание течения в следе за телом в рамках используемой модели.

В данной работе предлагается квазистационарная схема течения в следе за цилиндром. Уравнения движения вихрей выводятся строго при помощи закона об изменении колличества движения некоторого объема содержащего вихри. Основанием для рассмотрения квазистационарной модели послужили, например, работы [4, 5, 7], в которых приводятся результаты экспериментов по визуализация течения в следе за цилиндром, помещенного в поток с постоянной скоростью $\mathbf{V}_\infty$. В этих работах было установлено, что скорость центров разгонных вихрей достаточно мала по сравнению со скоростью свободного потока вблизи отрывной зоны. Таким образом в каждый момент времени течение можно считать потенциальным, а вихри в следе стационарными, положение и циркуляция, которых изменяется и зависит от времени как от параметра. Похожая картина течения и формирования разгонных вихрей набдюдается, также при обтекании плоской пластины, расположенной в поперечном потоке [5] и крылового профиля [7].

В действительности процесс формирования ближнего следа намного сложнее описанного выше и о справедливости предлагаемого подхода можно судить лишь после сравнения расчетных результатов с экспериментальными данными. Ниже приводится вывод уравнений движения вихрей.

2. Вывод уравнения

Рассматривается двумерное потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости в которую помещено тело. Введем комплексную координату $\xi = x + iy$ и $\mathbf{W}$ - комплексный потенциал скорости потока. Предположим, что $\mathbf{W} = \varphi + i\psi$, где φ - действительный потенциал, ψ - функция тока, есть суммарный потенциал от свободного течения жидкости, от тела в потоке и от вихря (или вихрей) в следе за телом, рис. 1. Характер течения жидкости таков, что выполняется уравнение Лапласса:

$$\mathbf{\Delta}\varphi = 0 \tag{1}$$

Комплексный потенциал $\mathbf{W}$ в общем виде можно представить как:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\xi, \mathbf{\Gamma}_{\text{в}}(t), \xi_{\text{в}}(t)) \tag{2}$$

Здесь $\xi_{\text{в}} = \xi_{\text{в}}(t)$ - комплексная координата положения вихря, $\mathbf{\Gamma}_{\text{в}} = \mathbf{\Gamma}_{\text{в}}(t)$ - циркуляция вихря. Пусть l некоторый замкнутый контур, внутри которого содержится вихрь и Σ - объем жидкости, содержащейся внутри контура, Риг.1. По предположению голоморфности функции $\mathbf{W}$ внутри контура l, $\mathbf{W}$ можно представить в виде:

$$\mathbf{W} = \mathbf{\Gamma}_{\text{в}} ln(\xi - \xi_{\text{в}}) + \mathbf{C_0} + \mathbf{C_1}(\xi - \xi_{\text{в}}) + \mathbf{C_2}(\xi - \xi_{\text{в}})^2 + \dots \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{C_0}, \mathbf{C_1}, \mathbf{C_2}, \cdots = const$. Вектор сопряженной комплексной скорости $\bar{\mathbf{V}}$ определяется как:

$$\bar{\mathbf{V}} = \frac{d\mathbf{W}}{d\xi}, \quad \text{где} \bar{\mathbf{V}} = u - iv \tag{4}$$

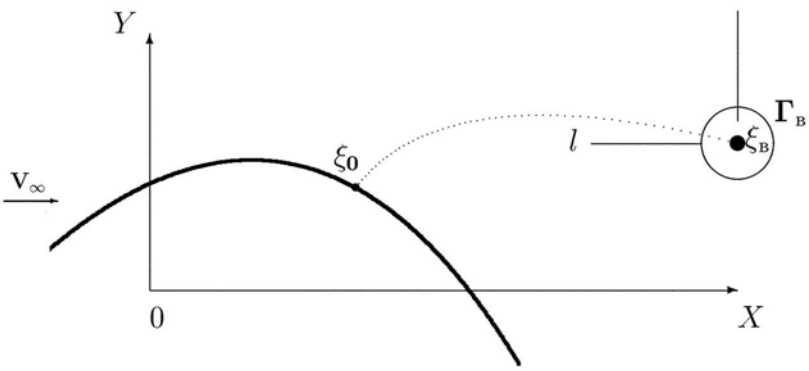


Рис. 1. Схема расположения тела в потоке и вихря в следе

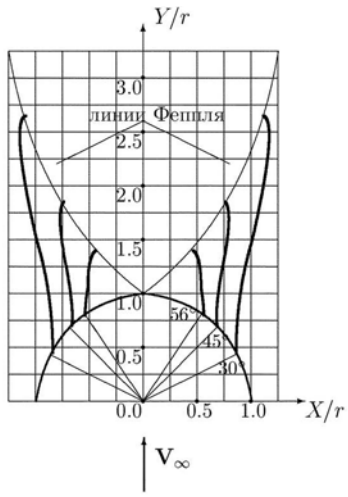


Рис. 2. Траектории движения вихрей в следе за цилиндром, расчитанные по уравнению [7] для трех положений углов отрыва

Запишем закон об изменении колличества движения объема жидкости, содержащегося внутри l:

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{P} \tag{5}$$

В уравнении (5) $\mathbf{I} = \int\limits_{\Sigma}(u + iv)d\sigma$ - импульс сил объема Σ, $\mathbf{F}$ - массовые силы, $\mathbf{P}$ - поверхностные силы давления, определяемые уравнением:

$$\mathbf{P} = ip = i(p_0 - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho(u - iv)(u + iv)) \tag{6}$$

Уравнение (6) есть интеграл Коши-Лагранжа. Устремляем объем к нулю и из-за малости объема пренебрегаем массовыми силами. После подстановки условий (3),(4),(6) в (5) и интегрирования по контуру l левой и правой части уравнения (5) получим:

$$\frac{d\mathbf{\Gamma}_в}{dt}(\xi_в - \xi_\mathbf{0}) + \mathbf{\Gamma}_в(\frac{d\xi_в}{dt} - \bar{\mathbf{C}}_\mathbf{1}) = 0 \tag{7}$$

В (7) $\bar{\mathbf{C}}_\mathbf{1} = \mathbf{V}|_{\xi=\xi_в}$ - скорость жидкости в точке $\xi_в$, $d\xi_в/dt$ - скорость вихря, $\xi_\mathbf{0}$ - комплексная координата точки отрыва, которая задается. В окрестности точки отрыва характер течения аналогичен тормозящему потоку в двугранном угле, образованном, в данном случае поверхностью тела и отошедшей от тела линией тока вследствии отрыва течения [7]. Предполагается, что $\xi_\mathbf{0} = const$ и из условия того, что в точке отрыва скорость равна нулю определяется циркуляция вихря $\mathbf{\Gamma}_в(t)$:

$$\mathbf{V}\Big|_{\xi=\xi_\mathbf{0}} = 0 \tag{8}$$

Уравнение (7), аналогичное полученному в [6] служит для определения координаты вихря $\xi_{\text{в}}$ в зависимости от времени.

В случае обтекания кругового цилиндра уравнение (7) необходимо решать для каждого, из пары симметрично расположенных относительно оси $0Y$ вихрей моделирующие разгонные. Вихри имеют противоположные по знаку циркуляции, с положительным направлением взятом против часовой стрелки. Точки отрыва расположены симметрично относительно оси $0Y$. Комплексный потенциал, в этом случае можно представить в виде:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W_d} + \mathbf{W}_{\text{в}} + \mathbf{W_r} \tag{9}$$

В (9) $\mathbf{W_d}$ - потенциал от свободного потока и диполя, моделирующего цилиндр, $\mathbf{W}_{\text{в}}$ - потенциал от пары вирхей, расположенных в точках $\xi_{\text{в}}$ и $-\bar{\xi}_{\text{в}}$, $\mathbf{W_r}$ - потенциал от «зеркальных» отображений вихрей в следе из вне, во внутренность цилиндра, расположенных в точках $r^2/\xi_{\text{в}}$ и $-r^2/\bar{\xi}_{\text{в}}$. Заметим, что в приведенной схеме расположения вихрей суммарная их циркуляция равна нулю. В явном виде $\mathbf{W}$ можно записать как [4]:

$$\mathbf{W}(\xi,t) = -i\mathbf{V}_\infty(\xi - \frac{r^2}{\xi}) - \frac{i\mathbf{\Gamma}_{\text{в}}}{2\pi}\ln\frac{(\xi-\xi_{\text{в}})(\xi+r^2/\xi_{\text{в}})}{(\xi-\bar{\xi}_{\text{в}})(\xi+r^2/\bar{\xi}_{\text{в}})} - \frac{i\mathbf{\Gamma}_{\text{в}}}{2\pi}\ln(-\frac{\xi_{\text{в}}}{\bar{\xi}_{\text{в}}}) \tag{10}$$

Условие (8), в случае цилиндра запишется как:

$$\mathbf{\Gamma} = (2\pi\mathbf{V}_\infty)\frac{(\xi_{\text{в}}-\xi_{\mathbf{0}})(\bar{\xi}_{\text{в}}-\bar{\xi}_{\mathbf{0}})(\xi_{\text{в}}+\bar{\xi}_{\mathbf{0}})(\bar{\xi}_{\text{в}}+\xi_{\mathbf{0}})}{(\xi_{\text{в}}\bar{\xi}_{\text{в}}-\mathbf{r^2})(\xi_{\text{в}}+\bar{\xi}_{\text{в}})} \tag{11}$$

3. Результаты расчетов

Расчеты проводились для трех положений точек отрыва $\xi_{\mathbf{0}} = r_0 e^{i\theta_0}$, $\theta_0 = 30°; 45°; 56°$ и $r_0 = 0.5\%$ от радиуса цилиндра. В расчетах было установлено, что вихри, удаляясь от поверхности цилиндра, асимптотически приближаются к положению на линии Феппля [4], рис. 2. При этом, расчетное время за которое вихри проходят расстояние от точки отрыва до линии Феппля соответствует экспериментально замеренному времени в работе [5]. В [5] измерялось время прошедшее от момента начала образования разгонных вихрей у поверхности цилиндра до момента потери их устойчивого положения и схода в поток. Согласие экспериментальных и расчетных данных подтверждает качественно верное описании течения в отрывной зоне за цилиндром. Рассмотренную модель можно использовать, видимо, и для случая других плохообтекаемых тел на участке формирования разгонных вихрей. При стационарном отрывном обтекании в дальнем следе образуется вихревая дорожка Кармана. Такое течение достаточно хорошо описывается моделью дискретных вихрей [1]. Предложеную, в данной работе модель можно использовать на участке формированния вихрей после отрыва пограничного слоя в ближнем следе до образования дорожки Кармана.

Литература

[1] *Белоцерковский С. М., Котовский В. Н., Ништ М. И., Федоров Р. М.* Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. Под ред. Белоцерковского С. М. — М.:Наука, 1988.

[2] *Rosenhead L.* Formation of vortices from a surfase of discontinuity. — Proc. Roy. Soc. London, A. 1932, Vol.134, № 323.

[3] *Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю.* Отрывные и кавитационные течения. — М.: Наука, 1990.

[4] *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика. — М.: Мир, 1964.

[5] *Сарпкая Т.* Течение с отрывом около тел, обладающих подъемной силой и внезапно начинающееся течение около цилиндров. — РТК, 1966, № 3.

[6] *Bryson A. E.* Symmetric votex separation on circular cylinders and cones. — J. of Applied Mechanics, 1959, December.

[7] *Бетчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973.

Сравнительный анализ величин силы Магнуса, вычисленных для вращающейся сферы в различных приближенных моделях

Миронов И. В.

1. Введение

Проблема движения в воздухе осесимметричных, вращающихся вокруг своей оси тел - одна из интересных и нерешенных полностью задач аэромеханики. Численный расчет аэродинамических характеристик при помощи полных уравнений Навье-Стокса в широком диапазоне изменяемых параметров (Re - числа Рейнольдса, M - числа Маха, ϵ - параметра вращения) не представляется возможным даже при наличие современной вычислительной техники. Поэтому для прикладных задач разрабатываются приближенные модели, позволяющие определять аэродинамические характеристики, при различных режимах обтекания тел. Характерной особенностью аэродинамики вращающихся тел является возникновение силы Магнуса из-за наличия вязкости среды.

Данная работа посвящена моделированию обтекания вращающейся сферы и полуэмпирическому определению коэффициента силы Магнуса. Приводится сравнительный анализ величин силы Магнуса, полученных в нашем подходе и в различных известных приближенных моделях приведенных ниже.

2. Приближение Озеена

В работе [1] рассматриваются решения упрощенных уравнений Навье-Стокса в приближении Озеена для случая $\epsilon \ll 1$, где ϵ - параметр вращения, $\epsilon = (r * \omega)/V_\infty$: V_∞ - величина скорости набегающего потока, r - радиус сферы, ω - величина скорости вращения сферы. В результате аналитически решенных уравнений была получена формула для вычисления коэффициента силы Магнуса C_z в следующем виде :

$$C_z = 2\epsilon \tag{1}$$

Характерно, что в соотношении (1) C_z линейно зависит от параметра вращения ϵ и не зависит от числа Рейнольдса $Re = (V_\infty * d)/\nu$ (d - диаметр сферы, ν- кинематическая вязкость среды).

3. Потенциальная модель обтекания

В работе [2] рассматривается обтекание вращающейся сферы в рамках модели потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости. Вращение сферы моделируется наложенной циркуляцией, при этом вектор вращения $\overrightarrow{\omega}$ перпендикулярен вектору

скорости набегающего потока $\overrightarrow{V_\infty}$. Обтекание каждого сечения сферы перпендикулярного плоскости, содержащей вектора $\overrightarrow{\omega}$ и $\overrightarrow{V_\infty}$, рассматривается как поперечное обтекание цилиндра с наложенной циркуляцией. Коэффициент C_z для сферы есть суммарная величина C_z для каждого цилиндра. В результате такого подхода была получена приближенная формула, имеющая вид:

$$C_z = \frac{16}{3}\epsilon \tag{2}$$

Также как и в случае приближения Озеена (1) в (2) C_z не зависит от числа Рейнольдса *Re*. По-видимому, данная модель обтекания вращающейся сферы будет лучше соответствовать режимам быстрого вращения, когда область ближнего следа уменьшается в следствие затягивания отрыва потока.

4. Модель «пограничный слой + вихревая зона»

Целью данной модели является обобщение методики [3] на случай сферических тел и турбулентного состояния пограничного слоя. Рассматривается сфера радиуса *r* при дозвуковых режимах обтекания и закретичных числах Рейнольдса. Были получены полуэмпирические формулы для вычисления C_z в зависимости от параметра вращения ϵ, числа Рейнольдса *Re* и числа Маха $M = V_\infty/a$ (a - скорость звука). Ниже кратко изложены основные положения модели.

5. Определение составляющих силы Магнуса

Известны факторы, способствующие появлению силы Магнуса [4]: асимметрия толщины пограничного слоя δ; асимметрия градиента давления среды, движущейся около поверхности тела $\partial P/\partial r$; асимметрия течения после отрыва потока; асимметрия распределения силы трения. Асимметрия распределения величин рассматривается относительно плоскости, содержащей векторы $\overrightarrow{\omega}$ и $\overrightarrow{V}_\infty$.

Определение давления, обусловленного асимметрией δ проводилось в два этапа. Вначале приближенно определялась δ на теле при учете вращения. Затем решалась задача потенциального обтекания «эффективного тела» (тело + пограничный слой). В результате преобразования Хоуарта-Манглера [6] величина δ определялась на теле при помощи известного решения задачи Блазиуса для ламинарного и турбулентного пограничного слоя. Учет вращения тела производился через модифицированное преобразование Манглера [5].

Учет вклада в силу Магнуса за счет $\partial P/\partial r$ производится при помощи разработанной выше модели пограничного слоя и двух уравнений из системы Навье-Стокса, одно из которых содержит $\partial P/\partial r$, а другое является уравнением неразрывности, из которого находится радиальная составляющая скорости V_r при известных значениях для продольной V_x и азимутальной V_ϕ составляющих скорости. Из модели пограничного слоя находилась V_x. Профиль V_ϕ строился исходя из предположения, что

переход от окружающей скорости на поверхности тела к окружной скорости в невязком течении происходит в соответствии с профилем Блазиуса [5]. При известных V_r, V_x и V_ϕ можно произвести оценку членов уравнения, содержащего радиальный градиент давления при условии, что $\delta \ll r$ и определить давление.

Выражение для коэффициента давления от двух факторов для тела сферической формы, полученное в данном исследовании, имеет вид:

$$C_p = [L - (0.2852 \cdot x^2 \cdot \epsilon^2 + 0.0197 \cdot x^4 \cdot \epsilon^4)/\beta] \cdot \epsilon \cdot V_n(\phi, \alpha) \cdot \delta(x) \tag{3}$$

Здесь $L = (1.299 \cdot T_\infty)/T' + 1.24/\beta + 0.0377$, $\delta(x) = \delta^*(x) \cdot m_n \cdot T'/T_\infty$, где $\delta^*(x)$ - толщина пограничного слоя на пластине, m_n - преобразование Манглера [6], T' - температура стенки, $\beta = |1 - M^2|^{\frac{1}{2}}$ - поправка на сжимаемость.

Учет отрыва потока производился экспериментально при определении азимутальной составляющей скорости в невязком течении $V_n(\phi, \alpha)$ после изучения структуры масло-сажевой пленки, нанесенной на поверхность тела [5]. Проведенные измерения [7] позволили нам сравнить данные экспериментов и расчетов по вышеизложенной методике коэффициента давления на цилиндре. Результаты сравнения показали, что рассмотренный метод учета отрыва потока позволяет достаточно хорошо описывать течение как в зоне сплошного обтекания, так и в отрывной зоне.

6. Определение силы Магнуса

Сила Магнуса определяется интегрированием проекции давления на нормальное к плоскости, содержащей векторы $\overrightarrow{\omega}$ и $\overrightarrow{V}_\infty$. В предположении того, что $\epsilon \sim 10^{-2}$ для сферических тел, в данной работе удалось получить соотношение для C_z:

$$C_z = -4hKP\frac{9\sqrt{3}}{8}\overline{R}^3\Big[[\frac{1}{2}\arcsin(\frac{3}{2}L\overline{R} - 1)] + \frac{1}{2}(\frac{3}{2}L\overline{R} - 1) \cdot \cos[\arcsin(\frac{3}{2}L\overline{R} - 1)] - \frac{1}{3}\cos[\arcsin(\frac{3}{2}L\overline{R} - 1)]^3\Big] \cdot \epsilon\alpha \tag{4}$$

Здесь $h = [1.3/k + 0.04 + (1 - 0.23\epsilon^2 L^2 + 0.016\epsilon^4 L^4) \cdot 1.24/\kappa]$ - составляющая от асимметричности толщины пограничного слоя, $\kappa = (|1 - M^2|)^{\frac{1}{2}}$ - поправка на сжимаемость, $k = 1 + 0.1224M^2$ - поправка на сжимаемость (при $M \ll 1 : \kappa = k \approx 1$), $P = 2$ - в случае безотрывного обтекания и $P = 3(1 - 1.52\sin\alpha)$ - когда отрыв присутствует, $L = l/d = 1$, $\overline{R} = R/d = 0.5$, $K = 5.2/\sqrt{Re_d}$ - когда течение ламинарное и $K = 0.37/\sqrt[5]{Re_d}$ - в случае турбулентности. Далее приводится сравнительный анализ полученных нами и ранее известных результатов.

7. Сравнительный анализ результатов

На рис. 1 представлены расчеты $C_z(\epsilon)$, полученные по формулам (1), (2), (4), а также результаты экспериментов из работ [8], [9], [10], [11].

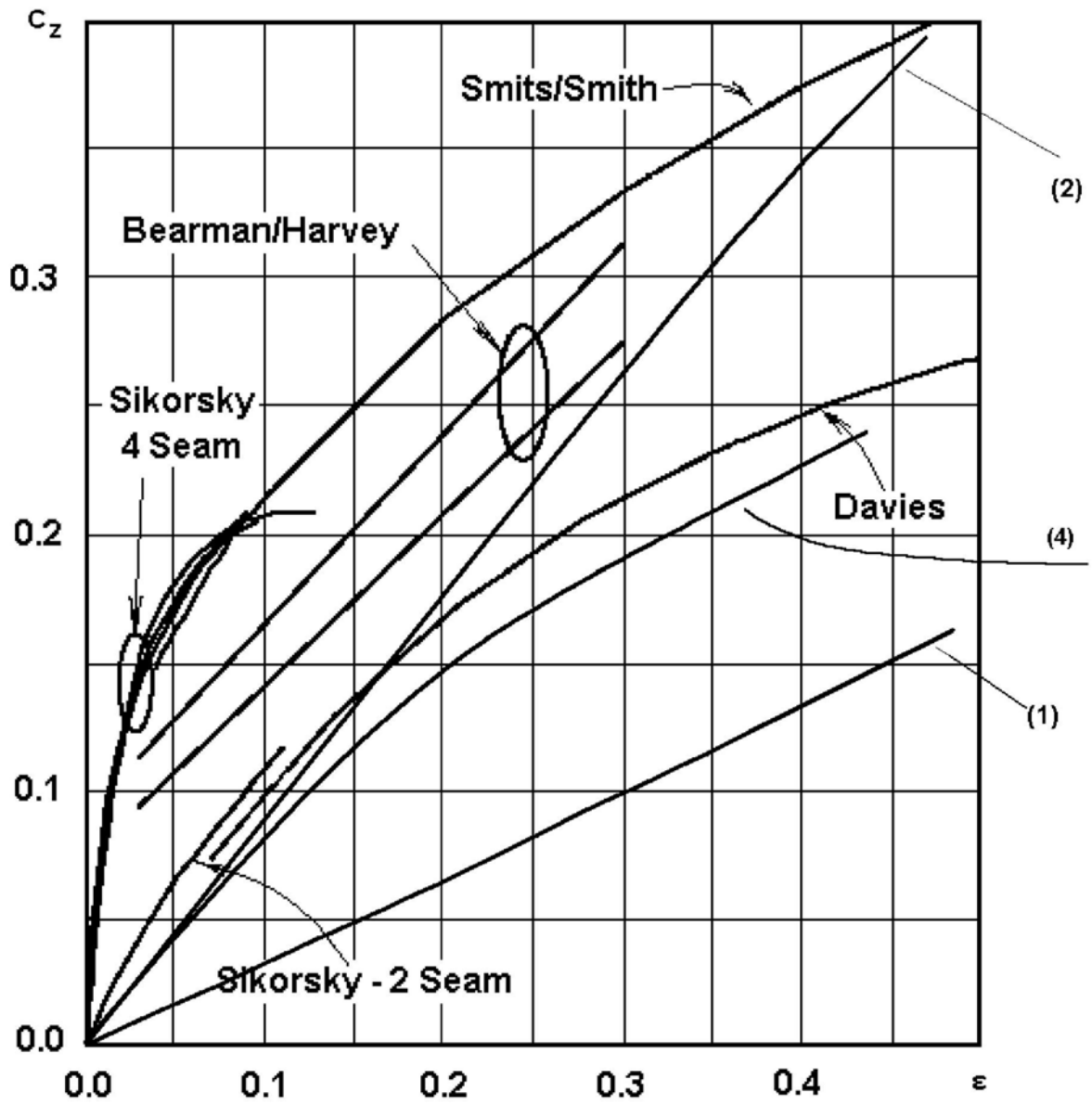


Рис. 1: Зависимость коэффициента C_z от параметра вращения ϵ

Джон Дэвис измерил коэффициент силы Магнуса с помощью вращающегося шарика для гольфа [8]. Шарик с шероховатой поверхностью свободно падал сквозь набегающий поток воздуха в аэродинамической трубе. Скорость потока $V_\infty = 32$ м/с, диапазон скоростей вращения ω : 0..5000 r.p.m., радиус шарика $r = 2.134$ см, число Рейнольдса $Re \approx 9 * 10^4$.

Сикорский исследовал вращающийся бейсбольный шарик с 2-мя и 4-мя «швами». Скорость набегающего воздушного потока $V_\infty = 42$ м/с, диапазон скоростей вращения $\omega = 0..1200$ r.p.m., радиус шарика $r = 3.68$ см, число Рейнольдса $Re = 2.1{*}10^5$ [9].

Берман и Харви исследовали шарик с шероховатой поверхностью при числах Рейнольдса в дипазоне $Re = 0.4 * 10^5..2.4 * 10^5$ и скоростях вращения $\omega = 0..6000$ r.p.m [10].

Смитс и Смит измерили коэффициент силы Магнуса для шести различных вращающихся в набегающем потоке шариков для гольфа при числах Рейнольдса $Re = 7.0 * 10^4..2.1 * 10^5$, диапазонах параметра вращения $\epsilon = 0.08..0.20$ [11]. На рис. 1 представлены результаты только одного из экспериментов.

На рис. 1 видно, что из приведенных выше приближенных формул для вычисления C_z результатам эксперимента работы [8] для турбулентного режима обтекания наиболее соответствуют значения, полученные по формуле (4).

8. Заключение

Сравнение наших расчетов с расчетными и экспериментальными данными других авторов показывают хорошее соответствие результатов для выбранных режимов обтекания. Это подтверждает разумность предложенной в данной работе модификации теории [3] для сферических тел.

Литература

[1] *Rubinow S. I., Keller J.* The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid. — Journal of Fluid Mechanics, 1961, vol. 11.

[2] *Гольштик М. А., Сорокин В. Н.* О движении частицы в вихревой камере. — ПМТФ, 1968, № 6.

[3] *Козлов В. П.* Влияние вязкости среды на движение осесимметричных вращающихся тел при больших числах Маха. — Материалы международной конференции и Чебышевских чтений, посвященных 175-летию со дня рождения Чебышева П. Л., 1996, т. 1.

[4] *Sturek W. B., Mylin D. C.* Magnus effect on boattailed shell at supersonic speed. — AIAA Pap., 1980, № 81.

[5] *Vaughn H. R., Reis G. E.* A Magnus theory for bodies of revolution. — AIAA j., 1973, vol. 11.

[6] *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1969.

[7] Козлов В. П. Распределения давления по поверхности вращающегося цилиндра в поперечном потоке и измерение подъемной силы Магнуса. - Вестник МГУ, 1992, сер. 1, № 2.

[8] *Davies J. M.* The Aerodynamics of Golf Balls. — Journal of Applied Physics, 1949, vol. 20, № 9.

[9] *Alaways L. W., Lightfoot R. B.* Aerodynamics of a Curveball: The Sikorsky Lift Data. — Sports Engineering Submitted, 1998.

[10] *Bearman P. W., Harvey J. K.* Golf Ball Aerodynamics. — Aeronaut. Q., 1976, vol. 27.

[11] *Smits A. J., Smith D. R.* Anew Aerodynamic Model of a Golf Ball in Flight. — The 1994 World Scientific Congress of Golf, 1994.

Изучение напряженного состояния породного массива в окрестности разломов и магистральных трещин

Стагурова О. В.

1. К вопросу о построении модельных геомеханических задач

Значения параметров прочности и упругости пород верхних слоев земной коры являются в принципе достаточным основанием для решения рассматриваемых задач в упругой постановке. Данное решение можно считать первым приближением и использовать для качественной оценки процессов, происходящих в породном массиве.

Задачи, приведенные в статье, решались численно методом конечных элементов в квазистатической плоской постановке. Для получения упруго-пластического решения использовалась модель среды Кулона-Прандтля. Согласно этой модели предполагается упругое поведение среды при величине накопленных напряжений ниже предела текучести и пластическое течение (без упрочнения и разупрочнения, с нулевой дилатансией) при напряжениях на пределе текучести. Напряжения на пределе текучести описываются уравнением Кулона

$$\sigma_1 = 2C \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\sigma_2$$

где C — сцепление, j — внутреннее трение, σ_1 — максимальное главное напряжение, σ_2 — минимальное главное напряжение.

2. Изучение напряженного состояния массива в зонах с разломами в плоскостях, параллельных земной поверхности. Влияние разломов на естественное напряженное состояние массива

Основной задачей данных исследований являлось оценка влияния разломов различной конфигурации и свойств на компоненты начальных главных горизонтальных напряжений в массиве.

В соответствии с конечными целями исследования выполнялись как последовательность нескольких шагов: на первом шаге изучалось влияние одиночных разломов различной геометрической конфигурации; второй этап касался изучения системы нескольких разломов и на последнем этапе рассматривался конкретный участок породной толщи в районе Старобинского месторождения калийных солей с реальной системой разломов.

Для корректного выбора расчетных схем были выполнены тестовые численные эксперименты. В результате, на базе основных правил и подходов к моделированию

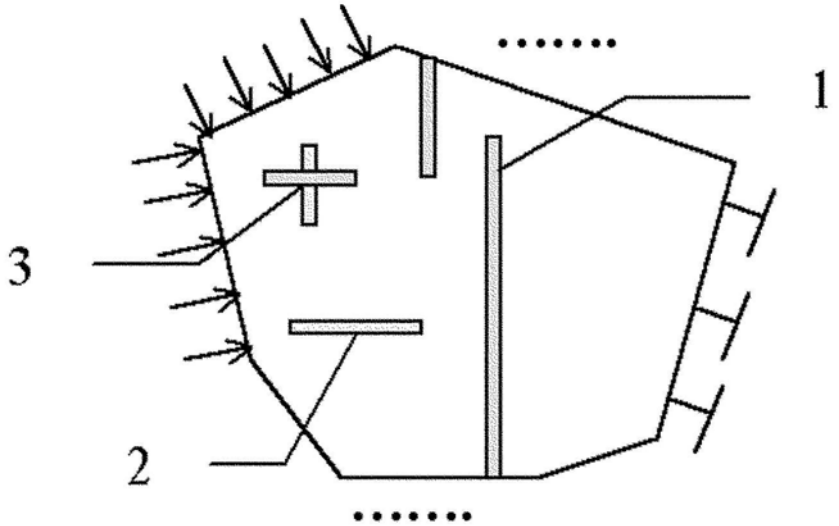


Рис. 1: Принципиальная схема граничной задачи для численных исследований

геомеханических процессов, особенностей решаемых задач и определяющих положений метода конечных элементов [1, 2] была выработана следующая схема к проведению численных исследований: рассматривается протяженный (по сравнению с линейными размерами разлома) участок породного массива, выделенный из структуры более высокого ранга, граничные условия в краевых зонах которого представляют собой совокупность воздействия силового нагружения (нормальной нагрузки), формирующейся как следствие напряженного состояния блочных структур более высокого ранга [1], и/или, на удаленных от зон разломов граничных поверхностях, отсутствие перемещений в соответствующем направлении (рис. 1). Зоны разрывных нарушений моделируются сжимаемой упругой средой. Контактные условия между массивом и зонами разрывных нарушений моделируются условиями полного сцепления.

В [1] на базе имеющихся данных о нарушении сплошности массива в разломных зонах и обобщения выполненных исследований показано, что *отношение* E_0/E_ρ *можно принять равным* $E_0 : E_\rho = 10 : 1$ (где E_0 — модуль упругости вмещающих пород, E_ρ — модуль упругости в разломных зонах).

Так как достоверных данных об абсолютной величине и характере распределения действующих сил на рассматриваемых глубинах нет, то силы, действующие в субмеридиональном и субширотном направлениях, принимались распределенными равномерно на границе исследуемой области, а их интенсивность равной 1.

Напомним, что выполненные численные исследования касались изучения влияния одиночных разломов различной геометрической конфигурации и их совокупности.

Приведем результаты исследований, относящиеся к рассмотрению влияния изолированных разломов на напряженное состояние в массиве.

В свою очередь одиночные изолированные разломы дифференцировались по отношению к граничным поверхностям на протяженные или соизмеримые с линейными

размерами области (тип 1 на рис. 1) и конечные или ограниченные (тип 2 на рис. 1). Параметрами вариации являлись: относительные линейные размеры и ширина разломов по отношению к характерным линейным протяженностям области, угол, образованный главной осью разлома с направлениями координатных осей, граничные условия в зонах сопряжения разломов и основного массива. Граничные условия в зонах сопряжения рассматривались от полного контакта до упругого взаимодействия. Кроме того, рассматривались случаи возможных взаимных сближений и относительных параллельных движений граничных поверхностей разломов.

3. Общие выводы по данному комплексу исследований

При изучении напряженно-деформированного состояния областей с разломами, линейные размеры которых соизмеримы с линейными размерами выделенной области выявлены следующие закономерности:

Наличие разлома в породном массиве приводит к такому изменению естественного поля напряжений, что хотя в большей части массива в окрестности разлома абсолютные значения компонент главных горизонтальных напряжений увеличиваются незначительно, но направления линий действия этих напряжений существенным образом изменяют свою ориентацию. Так, в зонах в непосредственной близости от разреза происходит поворот напряжений до 45° по отношению к начальным направлениям.

В граничных областях с разрезом наблюдается повышение абсолютных значений компонент главных напряжений, причем напряжения по направлению вкрест простирания разлома (будем их обозначать σ_1) увеличиваются до значений в 1.5 раза больше исходных, в тоже время значения напряжений по простиранию разлома (будем обозначать их σ_2) увеличиваются незначительно, в 1.15 раза.

Внутри разлома картина напряженного состояния обратная: абсолютные значения напряжений σ_1 находятся в пределах $0.85 - 1.0$ от первоначальных, а значения σ_2 изменяются существенным образом и достигают величин $0.5 - 0.7$ от исходных.

Увеличение ширины разреза приводит к понижению напряжений внутри разреза (достижению нижних границ упоминаемых интервалов изменения напряжений в области разреза) и к снижению концентрации напряжений в массиве в окрестности разлома.

Выполнение условий полного сцепления на границах разлома приводит к значительному увеличению напряжений в массиве в окрестности разлома по сравнению с условиями возможности взаимного перемещения блоков.

При изучении напряженно-деформированного состояния областей с разломами конечных размеров (по принятой нами терминологии) получены, в частности, дополнительно следующие выводы:

Главные напряжения в окрестности разлома меняют линии своей ориентации по сравнению с первоначальным направлением и поворачиваются на $10 - 35^\circ$.

Внутри разлома направления главных напряжений практически не меняют своей первоначальной ориентации. Вместе с тем, здесь наблюдается увеличение значений

главных напряжений по простиранию разлома σ_1 в 1.1 – 1.6 раза по сравнению с исходными и, как правило, уменьшение напряжений вкрест разлома σ_2 в 0.8 – 0.9 раз.

В окрестности разлома наблюдается повышение напряжений, а в области в «торце» разреза напряжения испытывают скачок. Кроме того, в данной области возникают зоны не только сжатия, но и растяжения.

Задание условий возможности относительных смещений граничных поверхностей разреза приводит к увеличению значений напряжений как внутри разреза, так и вокруг него. Характерной чертой является повышение напряжений σ_2 с одновременным понижением σ_1.

Влияние разреза распространяется на расстояния в 1.5 – 2 раза превышающее длину разреза.

Остановимся кратко на результатах исследований, относящиеся к рассмотрению влияния системы пересекающихся (примыкающих) разломов на напряженное состояние в массиве.

Влияние системы разломов проявляется на расстояниях в 2 – 3 раза превышающих характерные размеры разломов.

Направления линий действия главных напряжений меняют свою ориентацию в окрестности разломов на величины от 5° до 45°. В непосредственной близости от разломов главные напряжения меняют свою ориентацию так, чтобы их направления были перпендикулярны и коллинеарны главным осям разрезов.

В массиве в окрестности разломов имеют место не только области действия сжимающих напряжений, но и напряжения растяжения. Зоны действия наибольших напряжений концентрируются в узлах сопряжений и пересечений разломов и по границам разломов.

Величины концентраций напряжений значительным образом зависят от типа граничных условий. При выполнении условий полного сцепления по граничным поверхностям в областях вокруг разрезов массив испытывает деформации сжатия. Задание же условий возможности взаимных перемещений берегов разлома приводит к сильной дифференциации деформированного состояния и появлению зон растяжения.

4. Моделирование напряженно-деформированного состояния одного из блоков юго-западной Беларуси

В качестве области для проведения численных модельных исследований был взят участок на юго-западе Беларуси. Выбор места исследования определялся несколькими факторами. Во-первых, на данной территории выполнялись натурные исследования по изучению движений массивов в зоне разломов. Кроме того, на этом участке проводились комплексные исследования (на основе обработки современных данных аэрокосмических съемок, рук. Тяшкеевич И. Н.) по изучению современной активности зон разломов и нарушений.

За основу была взята тектонические карта разломов юго-западной части Беларуси, на которой был выбран блок, ограниченных размеров.

Воздействие соседних с выбранной областей массива моделировалось силовой нагрузкой, распределенной по границам выделенного региона. Внутри блока существуют разломы и нарушения различных порядков (естественно меньших, чем разломы, ограничивающие данный блок), однако, на данном этапе исследований рассматривались активные нарушения с размерами, соизмеримыми с линейными размерами области (рис. 3).

Приведем результаты выполненных исследований.

Оценка напряженного состояния в выделенной области при игнорировании системы нарушений (рис. 2)

В массиве без нарушений с криволинейной исходной формой границы естественное поле главных напряжений уже является неоднородным. Главные напряжения изменяют свое направление действия по площади области, что определяется геометрией области массива. Отметим, что, например, при тех же условиях в массиве прямоугольной формы поле напряжений будет однородным.

Помимо изменения направления линий действия, в рассматриваемой области наблюдается и повышение значений главных напряжений: компонента главных напряжений σ_1, действующая по направлению оси x, увеличивается в 1.5 – 2 раза, а компонента σ_3, действующая по направлению оси y — в 1.1 – 1.6 раз. Отсутствие отрицательных значений напряжений говорит о том, что блок испытывает только деформации сжатия.

Исследуем теперь изменение напряженного состояния в данном регионе с учетом выделенной системы нарушений (рис. 3).

Рассмотрим результаты моделирования *в случае задания граничных условий в виде условий полного сцепления в зонах контакта нарушений и собственно породной толщи.*

Как следует из анализа результатов расчетов, поле напряжений в рассматриваемой области существенным образом видоизменяется по сравнению с распределением напряжений в данной области без учета разломов (рис. 3). Внутри собственно разломов главные напряжения почти не изменяют своей ориентации, однако вблизи границ разломов напряжения стремятся повернуться так, чтобы быть ориентированными по направлению нормали к граничной поверхности нарушения и сонаправленно границе. Внутри разломов величины напряжений достигают таких значений: $\sigma_1 = 1$ – 1.9 и $\sigma_3 = 0.7$ – 1 от исходных. Наибольшие значения напряжений наблюдаются на «концах» разломов, где напряжения увеличиваются в несколько раз. В области массива ограниченной разломами значения напряжений близки к начальным. На границах разломов значения напряжений увеличиваются: σ_1 — в 1.5 – 2 раза и σ_3 — в 0.5 – 1.3 от первоначальных. Зон резких скачков напряжений (естественно кроме зон на «концах» разломов) не наблюдается. Зон наведенной трещиноватости пород и развитой пластичности тоже не просматривается. В областях, примыкающих к разломам, напряжения в среднем увеличиваются: σ_1 — в 2 раза, а σ_3 — в 1.3 от начальных. В зонах, удаленных от разломов: σ_1 достигает значений 1.5 – 1.7, а σ_3 — 1 – 1.3 от начальных.

Рассмотрим результаты моделирования *в случае задания граничных условий в*

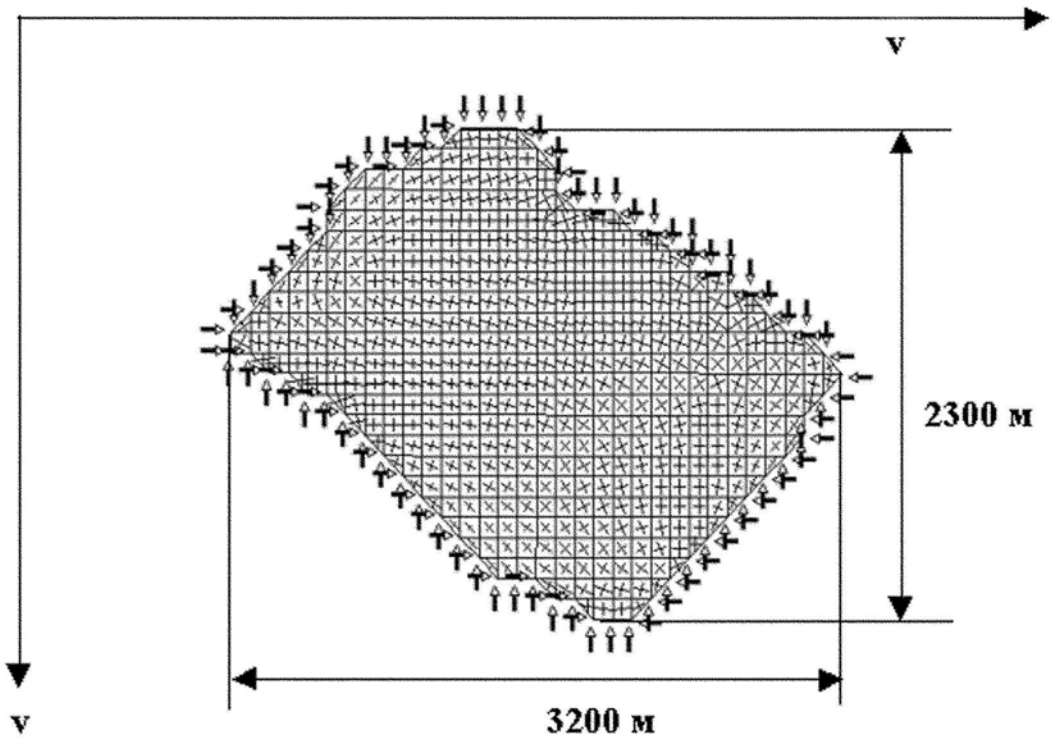


Рис. 2: Оценка напряженного состояния в выделенной области при игнорировании системы нарушений

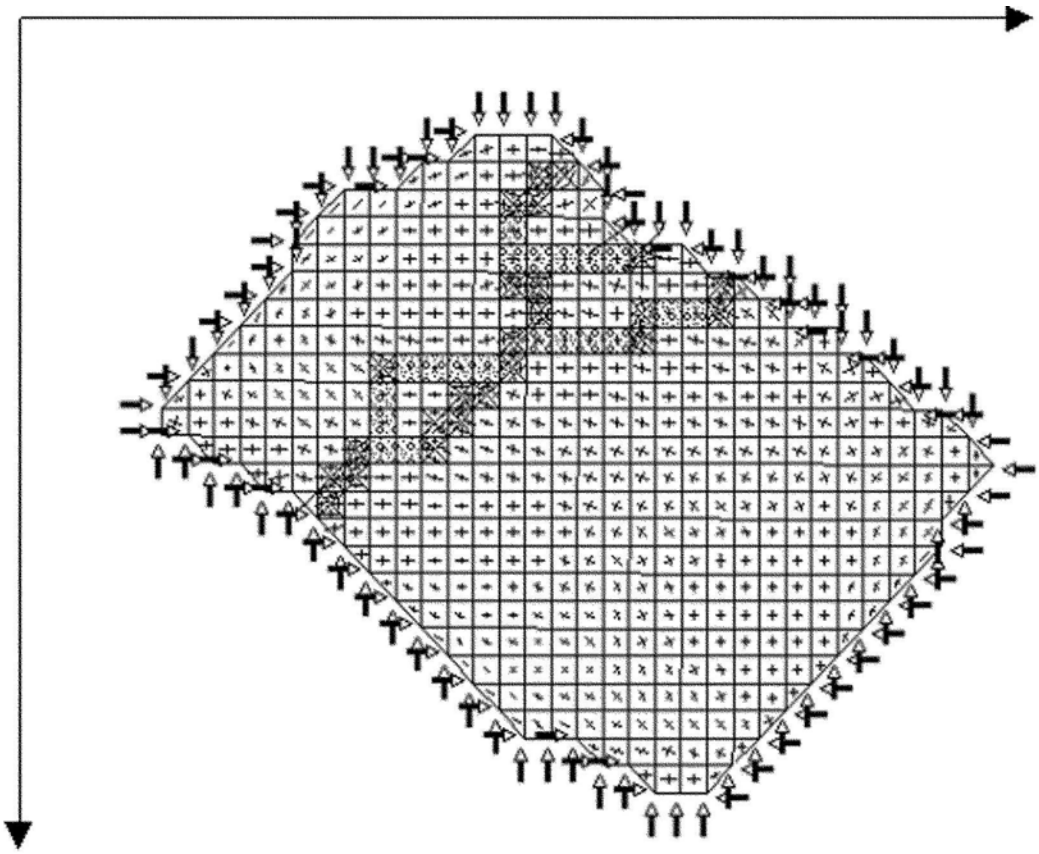


Рис. 3: Оценка напряженного состояния в выделенной области с учетом системы нарушений

виде условий возможного относительного перемещения берегов разломов друг относительно друга.

Замечание. Здесь приведены результаты расчетов для случая, когда правая часть блоковой структуры «наезжает» на левую (то есть относительное движение одних структур более активное, чем других).

Основное отличие результатов этих расчетов от предыдущей граничной задачи состоит в том, что в данном случае массив испытывает деформации сжатия и растяжения. В данном случае возможно появление зон наведенной трещиноватости и развитых пластичных деформаций. Сформированное поле напряжений является существенно неоднородным. Необходимо отметить, что в данном случае напряжения в районах разломов могут на порядок превосходить значения напряжений в других частях массива. Можно указать области, где появляются напряжения растяжения, следовательно с точки зрения безопасности они являются потенциально опасными зонами. Кроме того, в некоторых областях абсолютные значения компонент напряжений достигают больших критических величин (по сравнению с прочностью пород).

5. Выводы

Результаты компьютерного моделирования и изучения влияния неоднородности геометрии границы участка территории породного массива и наличия в последнем нарушений на естественное напряженное состояние, на примере одного из блоков юго-западной части Беларуси, позволяют сделать следующие заключения:

Поле главных начальных напряжений в рассматриваемой породной структуре является существенно неоднородным и зависит не только от физико-механических свойств массива и нарушений, но и от геометрии выделенной структуры;

Наличие разломов обуславливает весьма разнообразную картину напряженного состояния в массиве, которое существенным образом зависит от краевых условий, задаваемых на границах разломов;

В окрестности границ разломов главные напряжения ориентируются по нормали к разломам, в самих же зонах нарушений напряжения почти не меняют своих направлений;

Взаимные относительные перемещения «берегов» зон нарушений являются причиной появления в выделенной области зон наведенной трещиноватости, развитой пластичности, кроме того, помимо напряжений сжатия появляются напряжения растяжения, что является крайне опасным для устойчивости массива;

В случае полного сцепления с окружающими разлом породами в картине распределения напряжений по области не наблюдается резких «скачков» (величины напряжений при переходе от одной зоны к другой плавно изменяют свои значения), что благоприятно для развития «спокойных» деформационных процессов.

6. Изучение напряженного состояния по глубине массива в поле силы тяжести в зонах с разрывными нарушениями

В соответствии с исходной геомеханической моделью численная расчетная схема выглядит следующим образом (рис. 4): Рассматривается слоистый массив (слои соответствуют крупным геологическим образованиям — пластам), находящийся под действием сил тяжести с объемным весом γ. Граничные условия соответствуют отсутствию горизонтальных смещений на удаленных боковых границах рассматриваемой области и вертикальных смещений на нижней удаленной горизонтальной границе. Верхняя горизонтальная граница (земная поверхность) является свободной от нагрузок. В первом приближении принималось, что контактные условия соответствуют условию полного сцепления.

Замечание. Очевидно, что такая постановка задачи обеспечивает в зонах непрерывности породной толщи состояние естественного литостатического напряженного состояния. Данный факт проверен проведением численных расчетов. Поэтому, *в результате выполнения численных исследований получаем характеристики полного тензора напряжений и наведенного поля перемещений*. Естественно, в зонах геологических нарушений (например, разрывных нарушений) литостатическое напряженное состояние нарушается.

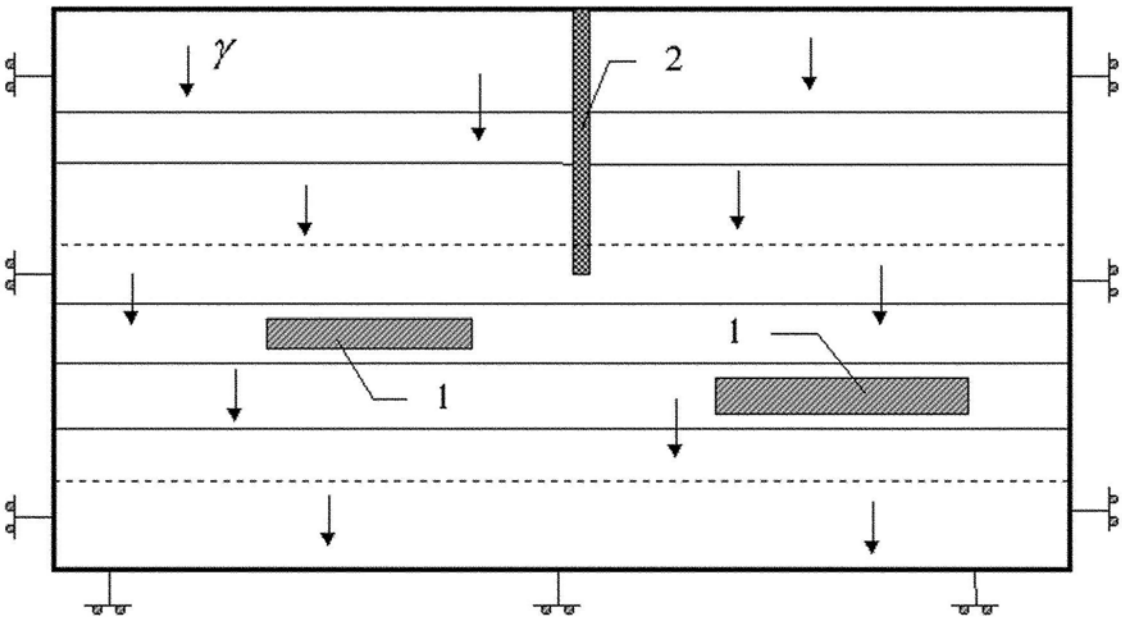


Рис. 4: Расчетная схема проведения численных экспериментов. (1) — выработанное пространство; (2) — зона разрывных нарушений

Влияние техногенного воздействия, вследствие подземных горных работ, моделировалось по нескольким схемам, в соответствии с взаиморасположением зоны разрывных нарушений и подземного выработанного пространства: горные работы расположены соответственно по одну и по обе стороны от нарушения. Рассматривались варианты последовательного увеличения объемов подземного освоенного пространства.

При анализе результатов математического моделирования основное внимание уделялось: изучению картин изменения напряженного состояния породного массива в выделенной области при различных условиях и соотношениях разрывных зон и выработанного пространства и возможности возникновения динамических срывов (появления динамических подвижек) в зоне разрывного нарушения.

7. Общие выводы выполненных расчетов

Значение максимального вертикального главного напряжения σ_3 в областях с подземными выработками изменяется незначительно, то есть создание подземных сооружений практически не оказывает влияния на величину σ_3. Изменение затрагивает величины компонент главных субгоризонтальных напряжений σ_1 и σ_2.

Важным является то, что перераспределение величин субгоризонтальных главных напряжений влечет за собой изменение и значений касательных напряжений $\tau_{max} = (\sigma_3 - \sigma_1)/2$. Последнее обстоятельство является существенным для активизации движений породных массивов в горизонтальных плоскостях.

Если в рассматриваемой области породного массива отсутствуют зоны разрывных нарушений, то изменения начального напряженного состояния в массиве главным образом определяются отношением глубины ведения подземных горных работ к характерному линейному размеру зоны освоения подземного пространства (выбирается наибольший из всех существующих). Изменения напряженного состояния в этом случае могут быть существенными в случае ведения крупномасштабных подземных работ в приповерхностных областях (на глубинах до 100 метров). В случае же освоения подземного пространства в заглубленных областях и на глубоких горизонтах изменения величин тензора напряжений не являются такими, чтобы повлечь за собой возникновение значительных разрушений породных массивов или возникновение динамических срывов.

Иная картина наблюдается в области наличия зон разрывных нарушений. Воздействие крупномасштабной подземной разработки массива на зоны с разрывными нарушениями обуславливает потенциальную возможность возникновения техногенных динамических срывов, так как в массиве появляются зоны наведенной трещиноватости.

8. Выводы по результатам комплексных исследований

В массиве горных пород в районах наличия разломов и трещин формируются *региональные и локальные исходные силовые поля с повышенными или пониженными (по сравнению со «спокойными» участками) характеристиками горизонтальных напряжений.*

Напряженное состояние в зонах наличия разрывных нарушений представляет собой совокупность напряженных и разгруженных зон (причины возникновения растягивающих напряжений связаны с блочной структурой строения среды, аналогичные выводы получены в [3]). Расположение, протяженность и напряженное состояние в этих зонах определяется степенью неоднородности массива (наличием нарушений, их свойствами, топологией строения, характером поведения и т.д.; различием прочностных и деформационных свойств собственно массива и зоны нарушений). Поэтому, напряжения, возникающие в блочной структуре, существенно зависят от свойств межблочных промежутков и трещин (т.е. свойств материала заполнителя, равномерности его распределения в трещине, наличия точечных контактов и др.).

Вблизи крупных разломов происходит перераспределение напряжений в пределах регионального поля. Вблизи контакта с зонами нарушений напряжения, действующие вдоль контакта, увеличиваются в 1.3 – 2 раза в зависимости от мощности нарушения и модуля упругости заполняющих нарушение пород. Нижний предел относится к маломощным нарушениям с модулем упругости заполнителя, близким к модулю основных пород; верхний предел — для мощных нарушений, с модулем упругости заполнителя, значительно меньшим модуля основной породы. Напряжения, перпендикулярные разлому, незначительно снижаются. Зона существенного влияния нарушения на перераспределение напряжений распространяется на расстояния, соизмеримые с линейными размерами нарушения (его мощностью). Общая зона влияния (с

напряжениями величиной более, чем на 10% превосходящих исходные напряжения) распространяется на расстояние до трех мощностей нарушения.

Высокие уровни горизонтальных напряжений по сравнению с вертикальными возникают преимущественно за счет горизонтальных движений отдельных элементов блочной структуры на земной поверхности. Причем распределение этих напряжений по поверхности Земли и их интенсивность существенно зависят от направления взаимного движения соседних элементов блочной структуры: при встречном движении уровень возникающих напряжений оказывается наибольшим, при расхождении соседних элементов интенсивность напряжений будет меньше.

Замечание. В добавление к этому приведем важный вывод, полученный в работе [3]: в малом масштабе на размере монолитной отдельности наблюдаются как сжимающие, так и растягивающие напряжения. В больших масштабах, превышающих размеры монолитной отдельности, регистрируются лишь сжимающие напряжения. Блочная среда не способна выдерживать растягивающие напряжения, так как отдельные элементы такой среды (блоки) слабо связаны между собой. В блочной среде эффекты расширения фиксируются в виде деформаций растяжения.

Значения максимального вертикального главного напряжения σ_3 в областях с разломами изменяется незначительно, изменение затрагивает в основном величины компонент главных субгоризонтальных напряжений σ_1 и σ_2.

Воздействие крупномасштабной подземной разработки массива на зоны с разрывными нарушениями обуславливает потенциальную возможность возникновения техногенных динамических срывов.

Полученные решения позволяют на стадиях инженерно-геологических изысканий выявить зоны повышенной концентрации напряжений и, соответственно, потенциально опасные участки при последующем проектировании горных работ в блочных массивах.

Литература

[1] Управление горным давлением в тектонически напряженных массивах. Часть 1, 2. Под ред. Курлени М. В. — Апатиты, 1996.

[2] *Журавков М. А., Мартыненко М. Д.* Теоретические основы деформационной механики блочно-слоистого массива соляных горных пород. — Минск: Университетское, 1995.

[3] *Адушкин В. В., Цветков В. М.* Влияние структуры и геодинамики на напряженное состояние земной коры. — XI Российская конференция по механике горных пород, Санкт-Петербург, 1977.

АННОТАЦИИ

УДК 539.3

Шемякин Е. И. **Деформации и разрушение горных пород (о кольцевой прочности)**

В задачах механики горных пород основной является задача о прочности (устойчивости) горных пород в окрестности подземной выработки. Основной моделью для таких рассуждений является круговая выработка определенного диаметра, на заданной глубине и ориентировке относительно главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3 in situ со своими главными направлениями. Обсуждается новый набор системы инвариантов для описания напряженно-деформированного состояния горных пород в этом случае.

УДК 539.374

Звягин А. В. **О расклинивании упругой среды**

В работе решается задача разрушения упругой среды тонким жестким телом. Тело движется с постоянной скоростью. В зависимости от того меньше или больше скорость тела скорости волн Рэлея меняется режим обтекания. В общем случае тела решение сводится к квадратурам, для частных случаев тела с плоскими границами решение получено в конечном виде.

УДК 534.222

Смирнов Н. Н., Никитин В. Ф. **Переход горения в детонацию в газах**

Данная работа содержит обзор последних результатов теоретических и экспериментальных исследований процессов переход горения в детонацию в смесях углеводородов с воздухом. Проанализированы различные экспериментально обнаруженные сценарии перехода горения в детонацию. Разработана модель, позволяющая производить компьютерную эмуляцию переходных процессов. На основании теоретического анализа объяснены механизм и структура течения в переходной области. Рассмотрено влияние внутренней геометрии и турбулизации потока на возникновение детонации; также обсуждается влияние температуры и концентрации топлива в несгоревшей смеси.

УДК 539.3

Киселев А. Б. **Математическое моделирование процессов необратимого динамического деформирования, микро- и макроразрушения твердых тел**

В работе представлен краткий обзор работ, которые были выполнены в последние двадцать лет на кафедре газовой и волновой динамики механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова и посвящены как построению математических моделей деформируемых твердых тел, их разрушению от стадии накопления рассеянных по телу микроповреждений до появления макротрещин, разработке методов расчета «нестандартных» констант моделей сред, связанных с параметрами поврежденности, моделям фрагментации тонкостенных конструкций и компактных элементов так и методам численного моделирования процессов динамического необратимого деформирования и разрушения.

УДК 533.6.011.5:532.526:541

Ковалев В. Л., Крупнов А. А. **Об образовании оксида азота в каталитических реакциях на поверхности многоразовых космических аппаратов**

Анализируются теоретические модели гетерогенного катализа на теплозащитных покрытиях космических аппаратов, учитывающие образования оксида азота. Установлено, что определение параметров модели катализа путем подгонки под экспериментальные данные неоднозначно и существенно зависит от выбранного механизма реакций на поверхности. Показано, что для уточнения кинетики гетерогенных каталитических процессов на теплозащитных покрытиях необходимы экспериментальные данные в более широком диапазоне изменения условий у поверхности, чем имеющиеся в настоящее время в литературе.

УДК 517.9:539.3:543.1

Демьянов Ю. А., Малашин А. А. **Вынужденные продольные колебания музыкальных струн, обусловленные их поперечными колебаниями**

Рассмотрена схема нагружения струны медиатором. Распространение продольных волн происходит без отражения на поперечных волнах. Разрыв продольных составляющих скоростей и деформаций на поперечных волнах до отражения от мест заделки остается постоянным, что является причиной возникновения продольных колебаний на частотах поперечных.

УДК 551.594.223

Дубровский В. А. **Электрогидродинамика и шаровая молния**

Представлена модель шаровой молнии как электрически поляризованный объем диэлектрической непроводящей среды, насыщенной парами воды. Возникновение шаровой молнии трактуется как процесс поляризации за счет трехмерного движения диэлектрической среды. Этот процесс описывается нелинейной системой уравнений электрогидродинамики. Показано, что такая модель учитывает наблюдаемые свойства и эволюцию шаровой молнии. Предлагаются возможные эксперименты по генерации шаровой молнии.

УДК 539.4.011:624.131.21

Куксенко Б. В. **Критерий разрушения в синтетической теории прочности**

При разработке предлагаемого критерия предполагалось, что к моменту его употребления нагружаемое тело еще сохраняет свою сплошность в том смысле, что в нем нет не только макротрещин, но и микротрещин, которые существенно изменяют мало- и мезомасштабную структуру среды. Критерий основан на гипотезе о том, что твердая фаза представляет собой аналог композита в том смысле, что в каждой его точке напряженное состояние имеет вандерваальсовый характер. В нем присутствуют, находясь в противоборстве, созидающие силы натяжения, которые имеют электромагнитное происхождение, и сходные с давлением в газах силы противодействия сжатию, происходящие из неуничтожимости импульса среды на микроуровне. Поэтому сжимающие напряжения неспособны разрушить вещество даже в результате вынуждения в нем значительных структурных изменений.

Разрушение наступает при потере способности сдерживать максимальное именно растягивающее напряжение, которое в силу своей экстремальности является главным.

УДК 530.1:532.5:538.4:550.3

Натяганов В. Л. **М. В. Ломоносов и успехи в изучении атмосферного электричества**

В работе предложена кинематическая модель сейсмоэлектрического эффекта на основе магнитогидродинамической аналогии с задачей обтекания профиля крыла самолета идеальной жидкостью. Эта «самолетная» модель позволяет единообразным способом дать теоретическое объяснение всех основных типов проявления сейсмоэлектрического эффекта по регистрируемым аномальным изменениям атмосферного электрического поля перед сильными землетрясениями. Определенное внимание уделено историческим аспектам в изучении атмосферного электричества.

УДК 532.5:537.3:538.4

Натяганов В. Л. **Ломоносов и парадоксальный феномен атмосферного электричества — шаровая молния**

На основе предложенной ранее электрокаппилярновихревой модели сферического вихря Хилла-Тейлора и свойств динамически обратимых течений вязкой жидкости построена физико-математическая модель шаровой молнии, которая позволяет объяснить все основные характерные свойства и мнимые парадоксы этой загадки атмосферного электричества в квазистационарной стадии ее существования. Получено точное решение нелинейной краевой задачи для системы стационарных уравнений Навье-Стокса с учетом электрокапиллярного эффекта на сферической границе раздела фаз.

УДК 539.3:534.1

Локшин А. А., Сагомонян Е. А. **Головная волна от точечного источника в слоистой наследственно-упругой среде**

Рассматриваются два однородных изотропных наследственно упругих полупространства, склеенных между собой вдоль границы. Не требуется, чтобы ядра наследственности слоев были одинаковы. Получена прифронтовая асимптотика отраженной и головной SH-волн, возбуждаемых источником вблизи плоскости раздела рассматриваемых полупространств. Ядра наследственности предполагаются регулярными.

УДК 532.526

Гувернюк С. В. **О гиперзвуковом обтекании тел с сетчатыми экранами**

Представлены экспериментальные и расчетные данные о структурах течений газа около компоновок тел с передними проницаемыми экранами при обтекании на режимах «сплошности». Показано, что даже в случае экранов в виде слабо затеняющих гиперзвуковой поток редких сеток возможны аномальные структуры обтекания тела, что связано с влиянием наведенной поперечной неоднородности в

сверхзвуковом потоке газа за проницаемой поверхностью.

УДК 631.459

Гендугов В. М., Глазунов Г. П. **Глобальная модель ветровой эрозии почвы и ее проверка с использованием космической съемки**

Задача математического описания ветровой эрозии почв решена комплексно. Дано математическое обоснование существующим качественным представлениям о механизмах явления. На основе изучения баланса сил, приложенных к почвенной частице, установлены закономерности их отрыва, подъема, переноса и отложения воздушным потоком.

УДК 539.3

Колпаков В. П., Козлов В. П. **Экспериментальное изучение процесса отражения гибкой растяжимой нити от поверхностей различной формы**

В данной работе изучается движение гибкой растяжимой нити до и после ее взаимодействия с поверхностями. По данным, полученным при использовании высокоскоростной кинокамеры, определяются траектории и поля скоростей заранее фиксированных элементов нити.

УДК 533.6.001.5

Мосин А. Ф., Павлова Е. С., Фалунин М. П. **Стационарные и нестационарные аэродинамические характеристики оперенных тел**

Представлены результаты экспериментального исследования зависимостей аэродинамических характеристик осесимметричной модели с затупленной головной частью и донным стабилизатором от угла атаки в диапазоне $\alpha = 0^\circ - 145^\circ$ при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях обтекания. Оценено влияние статических аэродинамических характеристик на величину коэффициента аэродинамического демпфирования колебаний тела по углу атаки на траектории полета.

УДК 534.222.2

Димитриенко И. Д., Димитриенко Ю. И. **Проблемы моделирования горения твердых топлив в перспективных двигательных установках**

Рассматриваются некоторые проблемы численного моделирования процессов горения и газодинамики течения продуктов горения в камерах сгорания перспективных твердотопливных двигательных установок. Отмечено, что повышение энергитических характеристик двигателей приводит к необходимости построения более сложных моделей горения твердых топлив, учитывающих такие процессы как перенос излучения в газовой фазе, частичную ионизацию продуктов сгорания, турбулентное течение в темной зоне горения, а также физико-химические термомеханические и микроструктурные эффекты самого механизма воспламенения твердых топлив в условиях повышенных давлений, скоростных потоков и излучений. Представлена одна из возможных моделей процессов горения, учитывающая некоторые из перечисленных особенностей. Предложен и реализован численный метод решения двумерных задач горения в камерах сгорания, позволяющий осуществить сквозное

моделирование на всем цикле работы двигательных установок от этапа зажигания до окончания работы. Представлены некоторые результаты численных расчетов.

УДК 532.54:534

Ивашнев О. Е., Смирнов Н. Н. **Структура фронта неустойчивого вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу**

При вытеснении вязкой жидкости газом из тонкой щели (ячейки Хеле-Шоу) фронт вытеснения теряет устойчивость. Газ прорывается через вязкую жидкость в виде отдельных «языков». В работе построено автомодельное решение о распространении газового «языка» в вязкой жидкости. Задача решена с учетом влияния полной кривизны поверхности раздела фаз. Рассчитана ширина «языка». Получен критерий возникновения неустойчивости — модифицированное капиллярное число и теоретически определено его критическое значение.

УДК 533.6.011.5:532.526:541.2

Афонина Н. Е., Громов В. Г., Ковалев В. Л. **Об использовании низкокаталитических материалов для теплозащиты космических аппаратов, входящих в атмосферу Марса**

Предложена модель гетерогенного катализа диссоциированной смеси углекислого газа и азота на поверхности высокотемпературных теплозащитных материалов, учитывающая неравновесные реакции адсорбции-десорбции атомов кислорода и азота, молекул окиси углерода и их рекомбинацию в реакциях Или-Райдила. Из сопоставления измеренных на плазматроне ВГУ- 4 ИПМ РАН и рассчитанных для тех же условий величин тепловых потоков в диссоциированном углекислом газе выбраны параметры рассмотренной модели катализа на трех окислительно стойких покрытиях современных теплозащитных материалов. Для условий входа космического аппарата Mars miniprobe в атмосферу Марса проведено сравнение эффективности указанных покрытий. Показана возможность их использования для данной траектории входа.

УДК 539.194

Куксенко Б. В. **Макромеханика и микромир. Механическая модель фотона**

Разработана механическая модель фотона как замкнутого в трехмерном пространстве отрезка (колечка) электрической силовой линии. Модель воспроизводит известные свойства фотонов.

УДК 534.2

Гендугов В. М. **Модель газовой детонации**

В рамках газодинамики воспламенения — теории движения реагирующей среды, опирающейся на гипотезу (альтернативную гипотезе построения газодинамики горения) о том, что уравнения замкнутой системы законов зависимы, построена модель самоподдерживающейся детонации в газе и выявлена ее структура. Она включает: ударную волну, зону индукции, поверхность воспламенения и зону горения.

УДК 532.5:538.4

Натяганов В. Л., Чайка А. А. **Сингулярный метод в ЭГД течениях Стокса для сферических капель с поверхностным зарядом**

В классе обобщенных функций построены решения ряда новых задач электрогидродинамического обтекания сферической капли с поверхностным зарядом двойного электрического слоя. Показана зависимость возникающих при этом наборов мультиполей, описывающих электрогидродинамические поля вне пробной частицы, от граничных условий. На основе этих распределений методом самосогласованного поля получены обобщения формул Эйнштейна-Тейлора для эффективной вязкости однородных эмульсий в некоторых ЭГД течениях.

УДК 532.54:534

Ивашнев О. Е., Шахмардан М. М. **Перемешивание при вытеснении вязких жидкостей из ячейки Хеле-Шоу**

При вытеснении вязкой жидкости из тонкой щели (ячейки Хеле-Шоу) другой, менее вязкой, фронт вытеснения теряет устойчивость. Вытесняющая жидкость прорывается через слой вытесняемой, образуя в нем отдельные каналы, называемые «вязкими пальцами». В работе рассмотрена структура фронта неустойчивого вытеснения, когда ни силы поверхностного натяжения, ни диффузия жидкостей не могут влиять на форму «вязких пальцев». Такая ситуация характерна при вытеснении вязкой нефти водой из пористой среды. Высказана и подтверждена расчетами гипотеза о влиянии инерционных свойств жидкости на структуру фронта. Представлены результаты аналитического решения об устойчивости первоначально плоской границы раздела жидкостей к малым возмущениям, приведено приближенное решение о вязком пальце в ячейке Хеле-Шоу с учетом инерционных свойств жидкости и даны результаты численных расчетов о эволюции фронта неустойчивого вытеснения.

УДК 539.3

Кончакова Н. А. **К вопросу о единственности построения решения задачи Прандтля**

Не единственность выбора полей скольжения и распределения скоростей в классических решениях задачи о штампе по схеме жесткопластического тела указывает на необходимость привлечения различных дополнительных соображений и использования экспериментальных наблюдений.

УДК 535.5

Козлов В. П. **Модель движения разгонных вихрей в следе за цилиндром**

В данной работе моделируется течение в отрывной зоне за поперечно-обтекаемым круговым цилиндром дозвуковым потоком, после того как поток мгновенно приобретает постоянную скорость. Предлагается квазистационарная модель в рамках потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости. При помощи соотношений полученных в модели определяются циркуляции и положения разгонных вихрей.

УДК 532.5:533.6.013

Миронов И. В. **Сравнительный анализ величин силы Магнуса, вычисленных для вращающейся сферы в различных приближенных моделях**

Рассматриваются различные приближенные модели, в которых по конечным формулам определяется коэффициент силы Магнуса. Сравниваются подходы в приближении Стокса, Озеена, а также модели «пограничный слой + течение в отрывной зоне». Результаты сравнения обсуждаются и сравниваются с экспериментальными данными.

УДК 539.3

Стагурова О. В. **Изучение напряженного состояния породного массива в окрестности разломов и магистральных трещин**

В данной работе приведены результаты численных исследований по изучению влияния наличия разломов и макротрещин в породном массиве на естественное напряженное состояние в последнем.