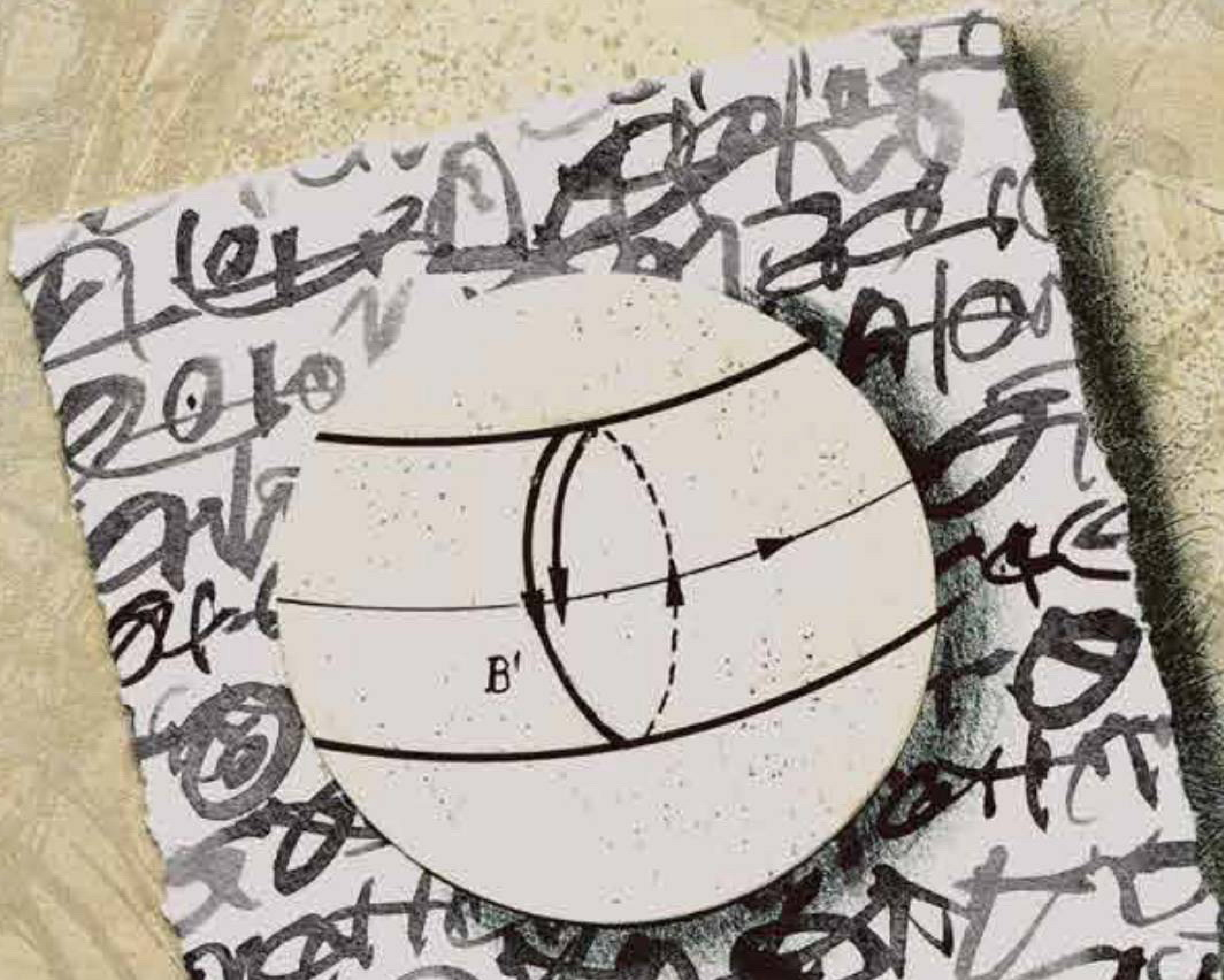
МАРТ/АПРЕЛЬ

ISSN 0130-2221
2015 · № 2

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



СИМПТОМИНО

Название этой головоломки намекает на слова «симметрия» и «полимино». Так автор, венгерский изобретатель Петер Гал (Péter Gál), обыграл цель этой головоломки: составить из четырех деталей симметричное полимино. Детали — пентамино — состоят из пяти одинаковых квадратиков, а составить нужно полимино, т.е. фигуру из нескольких таких же квадратиков, примыкающих друг к другу по стороне. Выполнить задание можно как из всех деталей, так и из двух, и из трех. Получается не одна головоломка, а сразу целых три!

Но и это не все. Автор утверждает, что использует единственный набор из четырех различных пентамино, который допускает ровно одно решение в каждом из трех случаев. Возникает дополнительная задачка — проверить это утверждение.

Желаем успеха!

Е.Епифанов

КВАНТ

МАРТ АПРЕЛЬ 2015 №2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Физика – материалы, параметры, альтернативное

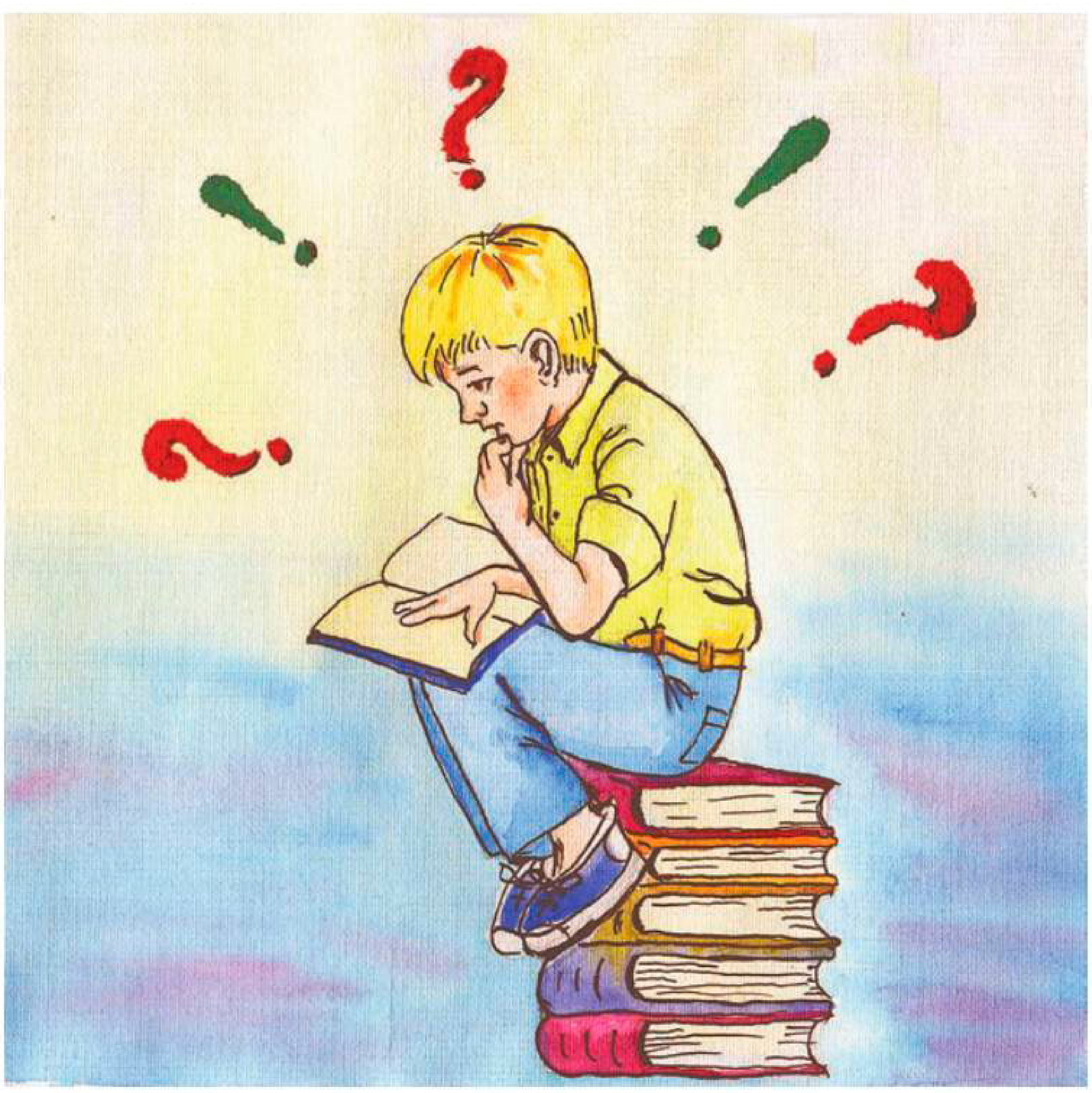
Л.АШКИНАЗИ

Всё из них

Нас окружают материалы. Еда и одежда, дома и самолеты, книги и компьютеры – все сделано из материалов. Все параметры всех вещей – вкус еды и непромокаемость одежды, прочность дома и надежность космического корабля, долговечность книги и плотность записи на диске – зависят от параметров материалов. А также от конструкции и технологии – от того, как сконструировано, из чего и как именно сделано.

Взаимодействие между конструктором, технологом и материаловедом – предельно упрощено. Конструктор, когда он конструирует, исходит из имеющихся материалов и технологических процессов. Он может пофантазировать: «а здорово было бы, если бы...» и даже может поговорить на эту тему с суровым материаловедом или с обаятельным технологом, но даже если они решат поставленную конструктором задачу, то не к утру. Поэтому основа мышления конструктора – существующие материалы и технологии. Только он может использовать предоставленные ими возможности, и от него зависит, насколько полно они будут использованы. Хороший конструктор выберет материалы с наилучшими параметрами или их сочетаниями. В зависимости от конкретной задачи самыми важными могут оказаться различные параметры.

Конструирование, технология и материаловедение – все они связаны с физикой, но по-разному. Конструктор непрерывно решает уравнения механики, оптики, тепло-, массо- и электропереноса – он это делает с помощью программных систем, которыми пользуется. Кроме того, хотя это уравнения и физических процессов, но сами-то уравнения – математические. Знание физики поможет работать конструктору, сократит поиск и убережет от ошибок, которые по наивности делают иногда программы. Но вот технолог и материаловед без физики обойтись вообще не смогут. Попытки создания новых материалов, «самых-самых», с какими-то доселе невиданными и неслыханными значениями параметров упираются в физику. А также в химию.



Желание достичь предельных значений параметров материалов, ступить на поверхность Царицы Ночи и на дно Марианской впадины, обогнать звук на земле и в воздухе, понять, как устроена Вселенная и как работает мозг, – все это человеческая культура. Вместе со всеми страстями и эмоциями, со всеми жертвами и победами, со всеми вернувшимися и не вернувшимися. Это человеческая культура – моя и твоя.

Физика и немного классификации

Наш мир состоит из объектов и процессов – и те и другие характеризуются параметрами, параметры связаны законами, знание законов позволяет решать задачи. Так видит мир физик. Например: объекты – планета и спутник, процесс – движение, параметры – массы, координаты и скорости, законы – всемирного тяготения и динамики. Оторвись от монитора, посмотри в окно – там больше пикселей и там она, Царица Ночи. И след человека, который ступил на нее, и триста восемьдесят два килограмма лунного материала, привезенных на Землю.

При взгляде на физику нормального человека должен охватывать ужас – десятки тысяч книг, которые он не то что не может понять, не может даже и прочесть! А у большинства не

Иллюстрация М.Грицук

Мы там были

понимает даже названий. Если бы школьник мог увидеть все здание физики сразу – он потерял бы сознание от ужаса. А придя в себя, тут же грохнулся бы в обморок снова – потому что осознал бы, что большая часть здания в лесах и стройке не видно конца. К счастью, школьный курс да и жизнь вообще устроены так, что мир открывается нашему взору лишь по мере движения, т.е. познания. Учебники – и школьные, и университетские – не слишком настойчиво сообщают вам, в какой именно мере познан мир. Авторы берегут вашу неокрепшую психику. Но самый кайф именно в том, что всегда найдется что-то новое и неизвестное, что-то, что можно познать.

Для упрощения изучения всего этого строения под названием «физика», где-то стройного, логичного и элегантного, где-то хаотичного и сумбурного, испокон века применяется классификация, деление на разделы. Например, на механику, теплоту, оптику и так далее. Это деление не случайно, оно – возможно, это покажется вам удивительным – опирается на биологию человека. Силу, массу, скорость, ускорение, а также температуру или, скажем, яркость мы ощущаем непосредственно. Понятно, как это влияет на деление физики на «разделы»? У физики, созданной птицами, деление похожее, но раздел «аэродинамика» занимает в их учебниках значительно больше места.

Техника и физика – не математика, классификация в них не жестка и однозначна, всегда возможны какие-то промежуточные варианты, переходные и смешанные формы. Тем не менее, даже не слишком четкая классификация помогает пониманию, а иногда – демонстрацией прорех – наводит на интересные идеи.

Классифицировать параметры можно так же, как и разделы в физике, – механические, тепловые, электрические, оптические и тому подобное. Эта классификация применяется потому, что именно так «кучкуются» параметры, чаще всего попадая в одни и те же формулы, которые и применяются для решения задач. Действительно, вряд ли вам встречалась формула, в которой механические напряжения соседствуют с электрическими, хотя такие связи встречаются. Не часто видят друг друга в одной дроби механические параметры и оптические, хотя и это бывает. Однако законы Ньютона, Ома и Снеллиуса нам более привычны.

Другой возможный способ классификации – по кругу задач или области применения. Любой грамотный инженер понимает, о каких материалах и о каких параметрах могла бы в основном идти речь в книге с названием «Материалы мощных лазеров» или, скажем, «Вакуумные материалы». Можете на эту тему поразмышлять и вы. Причем физическая и инженерная классификации пересекаются, т.е. из предложенных названий книг будет сразу видно, параметры каких групп будут наиболее существенны для этих двух областей.

Поговорим об альтернативном

Физика строит модели явлений, т.е. описания объектов и процессов, на своем языке. Этот язык – параметры, связывающие их законы физики, значения этих параметров. Выбор величин для описания не задан свыше – это результат исторического процесса. В итоге словарь физики составляют величины, с помощью которых удается наиболее эффективно строить модели. Например, когда-то понятия расстояния и массы только устанавливались, позже они стали общепринятыми. А вот чем характеризовать упавший на ногу кирпич – m^2v, mv или mv^2 – обсуждалось. Потом из этих трех формул выбрали две, одну зачем-то еще поделили на два. Обсуждение системы понятий для описания мира идет в физике и сейчас, но не в той части, которой учат в школе. Выбор параметров определяется их эффективностью для решения задач, т.е. тем, в какие законы они входят и насколько эффективны сами эти законы.

Вопрос о самих величинах возникал по мере освоения физикой той или иной части природы: понятия массы, силы и ускорения появились раньше, энергии и импульса – позже и так далее. Какие-то понятия и величины возникают сейчас и будут возникать впредь. Внутри освоенной части можно придумать новую величину, например суперускорение – скорость изменения ускорения или ускорение изменения скорости. Но в отличие от ускорения она не войдет ни в один физический закон и никому не пригодится. Выживают только величины, которые нужны для решения задач, т.е. входящие в законы, нужные для решения задач.

Физика едина во всей Вселенной, но курс физики на разных планетах выглядит по-разному. А именно, степень развития разных разделов и структура учебного курса – и школьного, и университетского – зависят от того, в каком мире живут те, кто эту физику развивает. Например, аналоги законов Кеплера на планете двойной звезды выглядят иначе и сложнее, открыли их поэтому относительно позже, закон всемирного тяготения – соответственно, тоже. На Юпитере физика не уделяет такое большое внимание идеальному газу – там это мелкий частный случай. В мире, где все время и везде температура выше 1100 °C (Меркурий не подходит!), нет ферромагнетизма. А там, где нет хороших проводников (меди) или хороших диэлектриков (керамики, стекла), иначе выглядят электротехни-

Три планеты – три физики

ка и – отчасти – раздел «Электричество» в учебниках. Размышление на тему, как выглядит физика цивилизации электрических скатов и угрей, существующей в глубинах океана, предоставляется сухопутному читателю в качестве легкого домашнего упражнения. А дельфины и летучие мыши проводят совместные конференции по акустике (меня однажды пригласили).

Некоторые законы физики изменять до какой-то степени можно, пока мы не вступаем в противоречие с чем-то принципиальным, например с законом сохранения энергии. Скажем, заменить закон Ома – ток пропорционален напряжению – на закон «ток растет с напряжением, но очень медленно» можно, и ничего принципиально не изменится. Более того, можно придумать и создать условия, в которых этот закон будет в некотором диапазоне величин соблюдаться. А вот сделать (без использования внешних источников энергии) так, чтобы в законе Ома сменился знак, нельзя.

При изменении системы единиц во всех физических законах должны измениться коэффициенты. А отсутствие коэффициента говорит о том, что именно этот закон был когда-то применен для определения единиц величины, о которой он говорит. Есть законы, которые действуют только при определенных условиях, например закон Ома. Можно придумать такую хитрую среду, что в законе Кулона заряд окажется не в первой степени, хотя привычнее будет сказать, что это нелинейная среда с зависимостью диэлектрической проницаемости от напряженности поля. Но ни при каких условиях не могут при зарядах (как и при массах в законе всемирного тяготения) оказаться разные степени – это означало бы, что результат вычислений может зависеть от того, какой заряд мы назовем «первым», а какой «вторым».

Любой физический закон выполняется в некоторых условиях и с некоторой точностью, причем эти пределы либо проверены экспериментально, либо следуют из каких-то связей с другими законами. И во многих случаях мы вправе спросить: а что будет, если в следующем знаке будет обнаружено то-то и то-то? Спросить это можно и про самые фундаментальные законы. Например: что будет, если закон сохранения энергии будет нарушаться в неком далеком знаке? А что будет, если сменить знак коэффициента трения или массы? Или если увеличить размерность пространства или времени?

Что произошло бы, если бы какая-то из мировых констант была другой – например, масса электрона или постоянная Больцмана? Сильно изменить константы нельзя – в измененном мире не будут образовываться атомы, молекулы и так далее. Если такой мир возможен и если законы физики там будут те же, то в нем не сможет быть сложных систем, а значит, и человека, наблюдателя. Отсюда делается вывод: возможно, последовательных Вселенных было более одной, но мы видим именно такую, потому что другие некому видеть. Подобное рассуждение лежит на границе области сегодняшней человеческой науки, хотите углубиться – спросите в интернете «фундаментальные константы» и «антропный принцип».

Параметры объектов и материалов можно изменять в довольно широких пределах, принципиальные противоречия возникают не скоро. Можно спросить, как изменится мир, если в десять раз увеличатся (или уменьшатся) у всех или у некоторых материалов какие-то их параметры. Например, прочность, модуль Юнга, электропроводность, теплопроводность, электропрочность, коэффициент преломления, температура плавления и так далее. Вполне интеллектуальное физическое и инженерное развлечение. Можете над этим подумать и вы.

При определении возможных вариаций величин, законов и констант надо следить за непротиворечивостью. Прогноз развития невозможной по существующим взглядам ситуации может и сам оказаться невозможным, потому что законы науки, аппарат понимания и прогнозирования, создавался путем исследования возможных ситуаций. Однако не во всех системах это так – например, в шахматных задачах можно анализировать и позиции, которые не могли получиться в реальной игре.

Здесь уместно процитировать Ричарда Фейнмана:

«Еще одно очень интересное развлечение – спрашивать себя, что бы произошло, если бы я мог как-то изменить природу, изменить физический закон? Прежде всего, если бы я мог что-то изменить, это изменение должно согласовываться с кое-какими другими вещами. А еще придется продумать все последствия

Ричард Фейнман

такого измененного закона и понять, что произойдет в результате с миром. Интересная работа. Большая. Я разок попробовал – захотел посмотреть, какая вышла б физика, если бы она была двухмерная, а не трехмерная. Два измерения – евклидова плоскость, плюс время. /…/ А потом я вот так еще развлекался. Представьте, что существует два времени. Два пространственных измерения, два временны́х. Что это будет за мир – с двумя временами?»

Впрочем, об этом писал – позже Фейнмана, но независимо от него – и автор этой статьи (спросите в интернете «Три взгляда на часы»).

Альтернативные географии, геологии, техники

Альтернативной может быть не только физика. В научно-фантастической литературе есть примеры альтернативности географии и геологии. Это мир без нефти (Евгений и Любовь Лукины, «Миссионеры», «Благие намерения»), многочисленные разнообразные миры Хола Клемента, миры с жизнью, построенной не на кислороде, а на фторе (Иван Ефремов, «Сердце Змеи»), мир с вечным источником механической энергии (торчащие из земли вечно вращающиеся стержни) и мир с избытком изотопов. Альтернативная география – особенно география распределения нефти или мест произрастания конопли – влечет альтернативную политику, важно также распределение урана и алмазов. Большинство авторов рассматривают социальные последствия, нас же интересуют физика и техника.

Имеющаяся человеческая цивилизация для передачи энергии использует перемещение топлива (уголь по железной дороге, нефть по трубе) либо электричества (по проводам). Для работы с информацией используется электричество – механические компьютеры были в реальности, а нынче упоминаются в некоторых фантастических произведениях (стимпанк). Есть ли разумные основания для рассуждений об альтернативной цивилизации без электричества вообще, или без электроэнергетики, но с информационным электричеством (связь и компьютеры), или, наконец, с электроэнергетикой, но без информационного электричества?

Первый вариант – это цивилизация без проводников (металлов, углерода). Энергетика механическая и тепловая, информационная сфера – механическая (в частности, пневмо- и гидромеханическая). Второй вариант – проводники есть, но только плохие, например тот же углерод. Энергию по углеродным проводам не прокачаешь, но компьютер или приемник сделать можно. Правда, с передатчиком будут проблемы. Разве что использовать генератор Ван де Граафа и искровой разряд? Третий вариант – проводниковые материалы есть, но за окном есть и молнии (раз в секунду). Электромагнитная помеха такая, что котлеты сами разогреваются без СВЧ-печи, ни о какой электромагнитной информатике речи нет. Мягкий вариант – без ферромагнетизма за счет проблем с некоторыми элементами или из-за жары.

Самая же простая, но уже полезная для расширения кругозора, альтернативная физика – это попытки представить, как мог бы выглядеть курс физики на Юпитере, Венере, Меркурии и, для простоты, Луне. Иными словами, при сохранении всех величин, законов, и параметров – каковы были бы отличия? Отличия в порядке и значимости разделов: на Меркурии меньше внимания было бы уделено ферромагнетизму, а на Луне – вообще магнетизму; на Юпитере физика газов начиналась бы не с идеальных газов, а с газа Ван дер Вальса; осьминоги Земли детально рассматривали бы законы гидродинамики, а первый закон Ньютона шел бы в их учебнике мелким шрифтом. Заметим, что физика иномира серьезно рассматривается в научной фантастике редко, но рассматривается. Это романы Хола Клемента и книга Бориса Штерна «Прорыв за край мира».

А зачем еще?

Рассуждения о том, что можно сделать из материалов с новыми свойствами, в литературе встречаются. Чаще всего это рассуждения о сверхпрочных материалах и о сверхпроводимости при комнатной температуре. Но почему-то никто не задумывается о том, что изменится, если будет создан, например, идеальный теплоизолятор. Попробуйте представить себе, как можно было бы использовать такие материалы и к чему бы это привело.

Рассуждения о варьировании параметров материалов и о достигнутых предельных значениях полезны для тренировки мозгов и развития фантазии, но не только. Во-первых, сегодня у нас есть какой-то определенный материал, а завтра будет лучший – как мы его применим? Полезно знать это, хотя бы отчасти, заранее. Во-вторых, если мы сумели придумать, для чего мы его применим, и видно, что применение будет полезным, откроет новые возможности и так далее, то имеет смысл именно на разработку такого материала направить усилия. В-третьих, такие рассуждения полезны – возможно, это покажется вам удивительным – для развития физики. Потому что решение любых задач полезно для развития. Задач из ваших задачников – для развития ваших мозгов, а серьезных физических задач – для развития самой физики. И вполне вероятно, что через некоторое время эти два развития окажутся связаны…

Собери квадрат

М.СКОПЕНКОВ, О.МАЛИНОВСКАЯ, С.ДОРИЧЕНКО

Бывают очень простые вопросы, ответы на которые найти совсем не просто. Вот один из них: *когда из прямоугольников, подобных данному, можно сложить квадрат?*

Иными словами,

при каких r из прямоугольников с отношением сторон r можно сложить квадрат?

Хотите узнать ответ? Тогда в путь!

Наглядные разрезания

Если r рационально, то квадрат сложить можно. В этом несложно убедиться, глядя на рисунок 1. Здесь отношения сторон всех прямоугольников равны $\frac{p}{q}$, где p и q – целые.

[redacted]

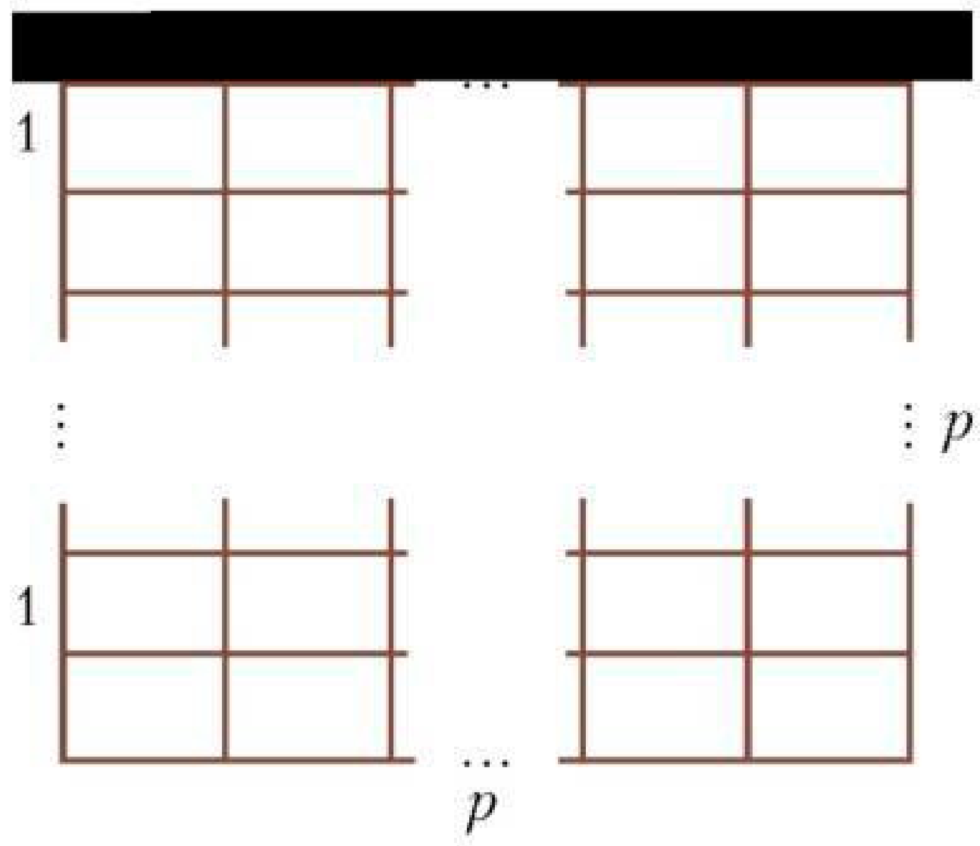


Рис. 1. Разрезание квадрата со стороной p

А может ли отношение сторон быть иррациональным? Может. Рассмотрим разбиение на 5 подобных прямоугольников на рисунке 2 – два верхних лежат горизонтально, оставшиеся – вертикально. Раз верхние прямоугольники подобны и лежат горизонтально, то они равны. Пусть их размеры $1 \times r$, тогда сторона квадрата равна $2r$. Находим длины сторон нижних прямоугольников (см. рис. 2): $2r - 1$ и $\frac{2r}{3}$. Так как нижние прямоугольники подобны верхним и расположены вертикально, то получаем уравнение $3\frac{2r-1}{r} = 2r$.

[redacted]

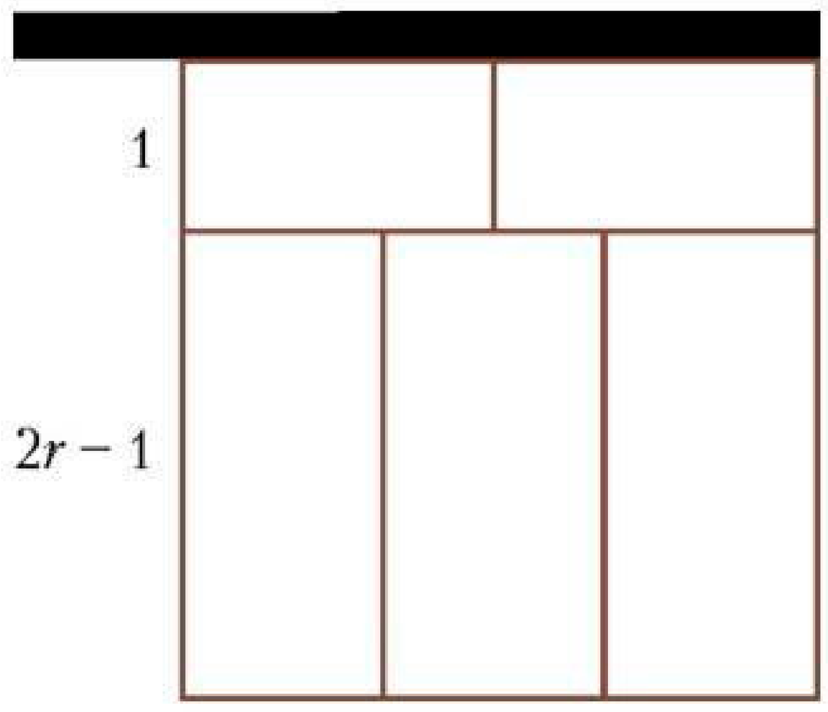


Рис. 2. Разрезание на 5 прямоугольников

Решая его, находим два корня: $r = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$, которые иррациональны. Для каждого из них строится разрезание – размеры всех прямоугольников уже выражены через r, осталось только подставить значение.

Задача 1. Дизайнеру заказали раму для квадратного окна (рис. 3). Можно ли сделать все стекла в раме подобными прямоугольниками?

Задача 2. Можно ли разрезать квадрат на 3 неравных подобных прямоугольника?

Задача 3. Можно ли разрезать квадрат на 5 квадратов?

Задача 4. Можно ли разрезать квадрат на несколько прямоугольников с отношениями сторон $2+\sqrt{2}$? Тот же вопрос для $2-\sqrt{2}$, для $3+2\sqrt{2}$ и для $3-2\sqrt{2}$.

Рис. 3. Проект окна

Интересно, какие именно иррациональные значения может принимать r. Для ответа на этот вопрос нам потребуются разрезания произвольного прямоугольника, а не только квадрата.

Истина в электричестве

Пусть большой прямоугольник разрезан на маленькие. Как выражается отношение сторон большого прямоугольника через отношения сторон маленьких?

Начнем с двух простых формул для горизонтального и вертикального разбиений на два прямоугольника (рис.4). Докажите их самостоятельно. Здесь отношения горизонтальных сторон прямоугольников к вертикальным обозначены через R, R_1, R_2.

Не кажется ли вам, что эти формулы вы уже встречали? Конечно, это же формулы для сопротивления

[redacted]

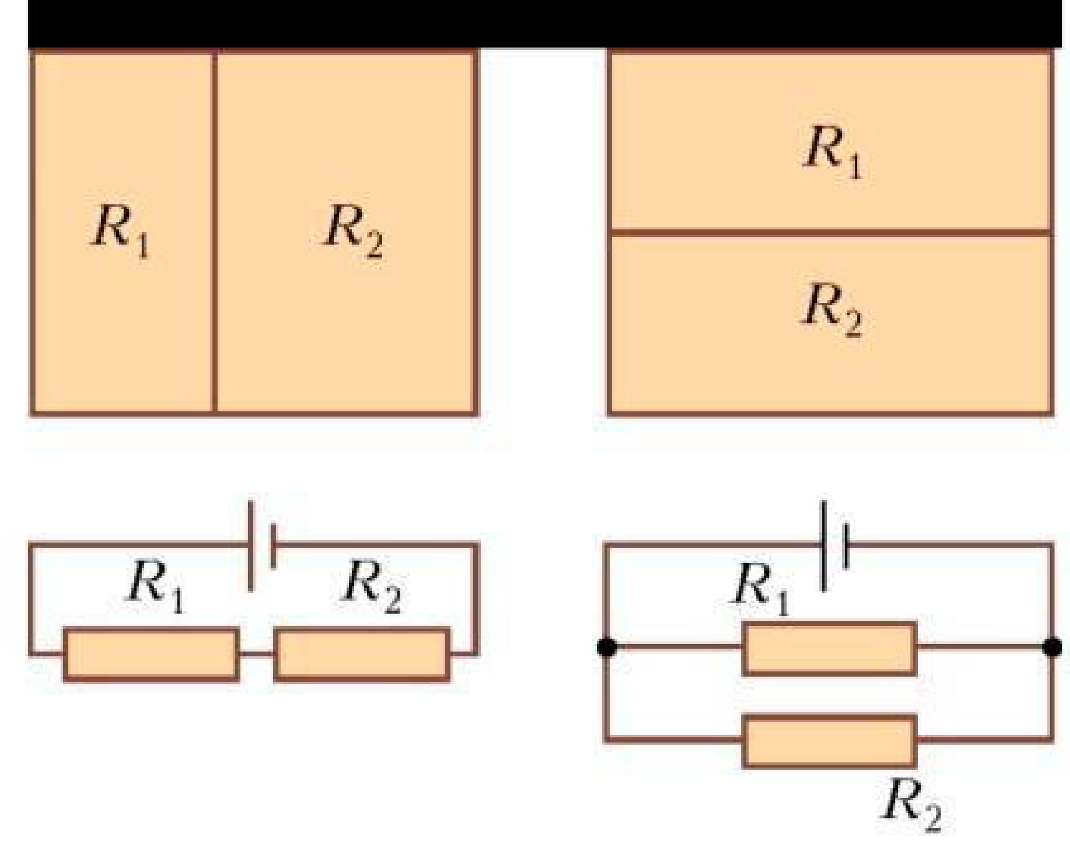


Рис. 4. Формулы для отношения сторон прямоугольника

цепей из последовательно и параллельно соединенных резисторов!

На самом деле, каждому разрезанию можно сопоставить электрическую цепь и использовать физические законы для решения нашей задачи. Этим мы сейчас и займемся.

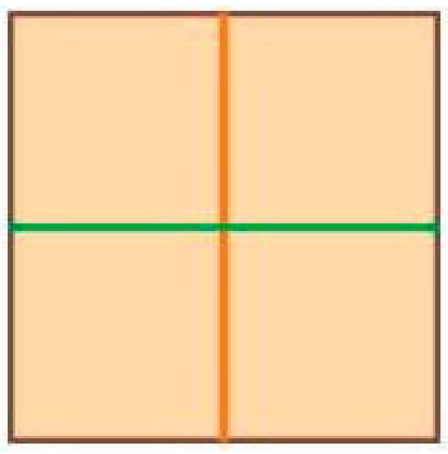


Рис. 5. Условимся считать, что в таком разрезании один горизонтальный и два вертикальных разреза

Сначала построим по разрезанию граф. На вертикальных разрезах[1] (на рисунках 5 и 6 они окрашены в оранжевый цвет) и на вертикальных сторонах большого прямоугольника отметим по красной точке. Это будут вершины графа. Для каждого маленького прямоугольника соединим ребром две красные вершины, которые лежат на разрезах, содержащих стороны прямоугольника. Ребер получится столько, сколько маленьких прямоугольников.

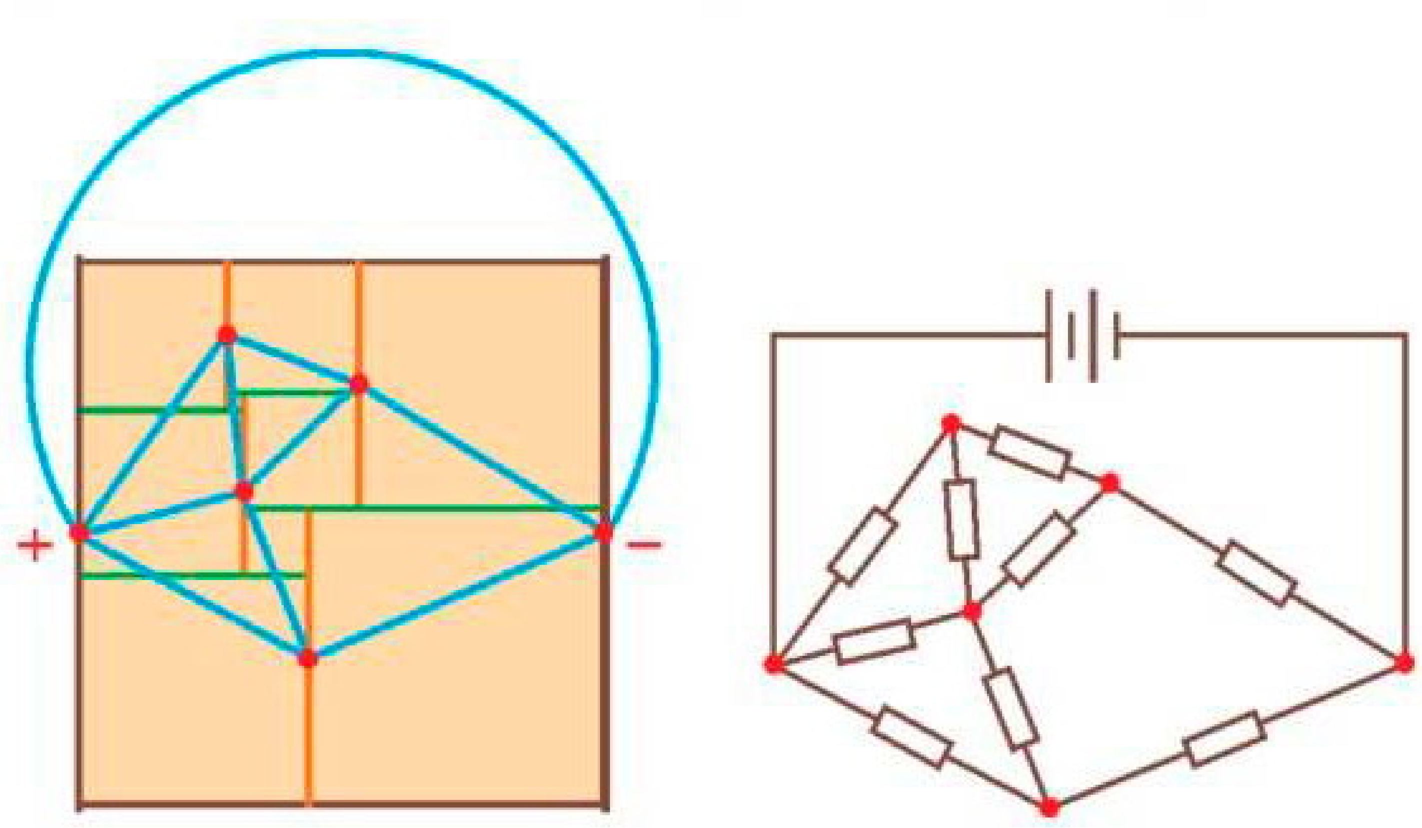


Рис. 6. Построение электрической цепи по разрезанию

Также соединим ребром крайние (слева и справа) вершины. Граф построен.

Вдоль каждого ребра, кроме последнего, припаяем резистор, сопротивление которого равно отношению горизонтальной стороны соответствующего прямоугольника к вертикальной.[2]

Припишем концам последнего ребра знаки плюс и минус и вдоль этого ребра припаяем батарейку. Напряжение батарейки возьмем равным длине горизонтальной стороны большого прямоугольника (почему – станет ясно позже).

Электрическая цепь построена.

Оказывается, отношение сторон большого прямоугольника всегда можно выразить через отношения сторон маленьких. В этом нам поможет такая теорема.

Теорема о сопротивлении цепи и отношении сторон прямоугольника. *Сопротивление электрической цепи, построенной по разрезанию, равно отношению горизонтальной стороны большого прямоугольника к вертикальной.*

Наша ближайшая цель – доказать эту теорему. Но как это сделать, если в ее формулировке участвуют физические, а не математические понятия? Ведь решаем-то мы математическую задачу о разрезании!

Придется дать строгое математическое определение электрической цепи и ее сопротивления. А физическая интуиция будет помогать нам.

Математическая модель электрической цепи

Определение. *Электрической цепью* мы называем связный плоский граф (возможно, с кратными ребрами, но без петель), в котором:

- каждому ребру сопоставлено положительное число;
- одно из ребер выделено, его концы отмечены знаками «+» и «–»;
- при удалении любого ребра граф остается связным.

Требование связности после удаления ребра нужно для того, чтобы в цепи не было «лишних» участков (по которым ток не течет).

Может возникнуть вопрос, почему мы требуем, чтобы граф был плоский – ведь электрическую цепь можно спаять из проводов, как угодно расположенных в пространстве. Объяснение такое: для нашей задачи нам достаточно плоских электрических цепей, а для них некоторые определения формулируются проще.

Определение. Выделенное ребро называется *батарейкой*, остальные – *резисторами*. Число, сопоставленное батарейке, называется *напряжением* батарейки, а числа, сопоставленные резисторам, – их *сопротивлениями*. Вершины, отмеченные знаками «+» и «–», называются *клеммами* батарейки.

Изобразим цепь на плоскости так, чтобы отрицательная клемма батарейки была правее положительной и концы каждого ребра не лежали на одной вертикальной прямой. Нарисуем на каждом резисторе стрелку слева направо, а на батарейке – справа налево, т.е. от отрицательной клеммы к положительной (рис. 7).

Определение. *Силы токов* через резисторы и батарейку – это числа на ребрах графа, которые удовлетворяют правилам Кирхгофа[3] (рис.8, 9 и 10).

Справедливы три важные теоремы.

---

[1] Дадим точное определение разреза. Покрасим все горизонтальные стороны маленьких прямоугольников, не лежащие на периметре большого, в зеленый цвет. Они объединятся в несколько зеленых отрезков, которые мы назовем *горизонтальными разрезами*. Вертикальные стороны маленьких прямоугольников, не лежащие на периметре большого, покрасим в оранжевый цвет. Полученные оранжевые отрезки делятся горизонтальными разрезами на части, именно эти части мы и назовем *вертикальными разрезами* (см. рис. 5).

[2] Конечно, отношение сторон – величина безразмерная, а сопротивление имеет размерность. Поэтому, чтобы говорить о равенстве, мы раз и навсегда фиксируем систему единиц: длины будем измерять в сантиметрах, сопротивления – в килоомах, напряжения – в вольтах, токи – в миллиамперах. В дальнейшем единицы измерения указывать не будем.

[3] Их формулировку можно найти, например, в статье «Разрезания металлического прямоугольника» в «Кванте» №3 за 2011 год. Желающим подробно разобраться в физике происходящего рекомендуем еще статью «Правила Кирхгофа» в Кванте №1 за 1985 год.

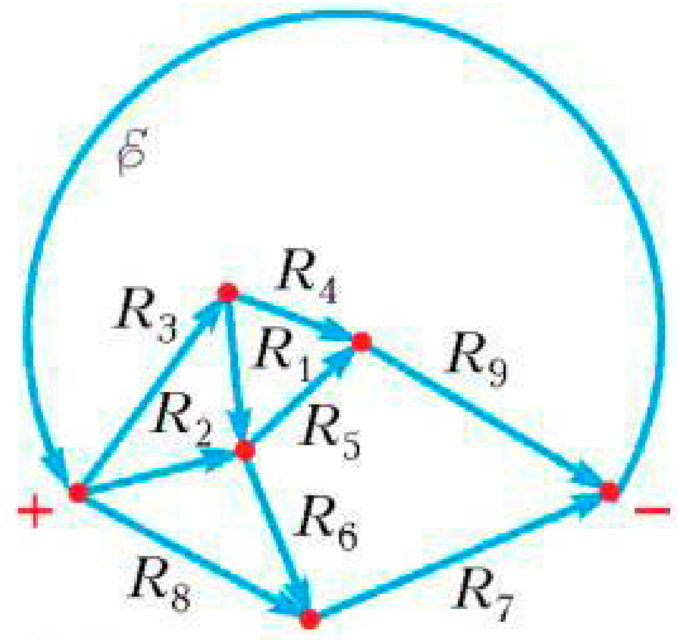


Рис. 7. Нумерация резисторов и выбор направлений на резисторах и батарейке

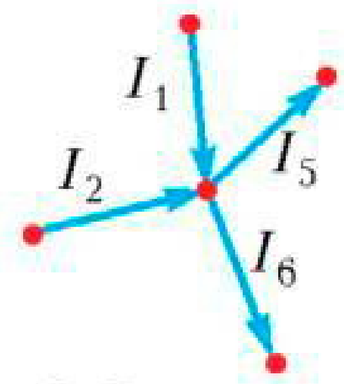


Рис. 8. Первое правило Кирхгофа: $I_1 + I_2 = I_5 + I_6$

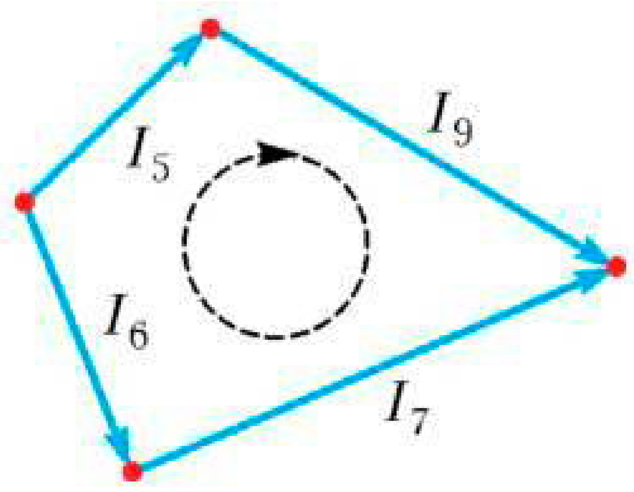


Рис. 9. Второе правило Кирхгофа для контура без батарейки: $R_5I_5 + R_9I_9 - R_6I_6 - R_7I_7 = 0$

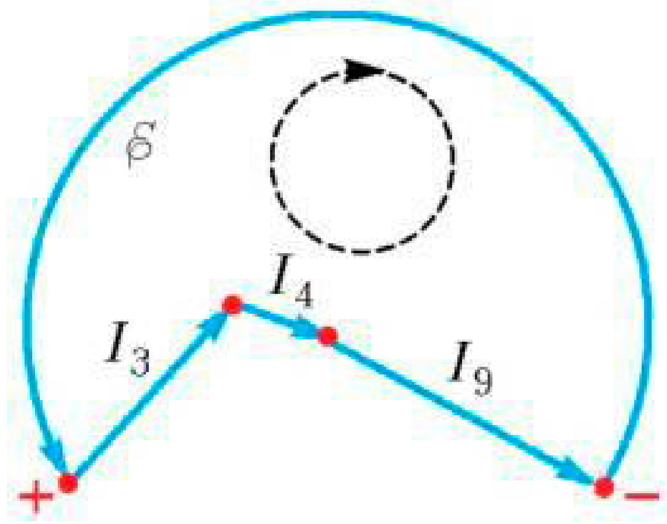


Рис. 10. Второе правило Кирхгофа для контура с батарейкой: $-R_3I_3 - R_4I_4 - R_9I_9 = -\mathscr{E}$

Теорема существования и единственности. *Для любой электрической цепи найдется расстановка чисел (сил токов) на ребрах, удовлетворяющая всем правилам Кирхгофа, и притом только одна.*

Замечание. Сила тока через резистор может быть и отрицательна (с точки зрения физики это означает, что ток течет против направления стрелки).

Теорема положительности. *Сила тока через батарейку всегда положительна (иными словами, ток через батарейку всегда течет от отрицательной клеммы к положительной).*

Теорема о силах тока и длинах сторон. *Для цепи, построенной по разрезанию, силы токов через резисторы равны длинам вертикальных сторон соответствующих маленьких прямоугольников, а через батарейку – длине вертикальной стороны большого.*

Замечание. Именно в последней теореме необходимо условие о том, что напряжение батарейки равно горизонтальной стороне большого прямоугольника.

Эти три теоремы доказаны нами в предыдущей статье «Разрезания металлического прямоугольника» в «Кванте» №3 за 2011 год для разрезаний на квадраты. Но для разрезаний на прямоугольники доказательство совершенно аналогично. Правда, половина теоремы существования и единственности, а именно утверждение о существовании, была доказана только для цепи, построенной по разрезанию, но именно в такой формулировке она нам и потребуется.

Сопротивление цепи

Определение. *Сопротивление цепи* – это отношение напряжения батарейки к силе тока через нее.

Физический смысл этого определения таков: если все резисторы цепи заменить на один резистор с таким сопротивлением, то ток через батарейку не изменится (рис. 11).

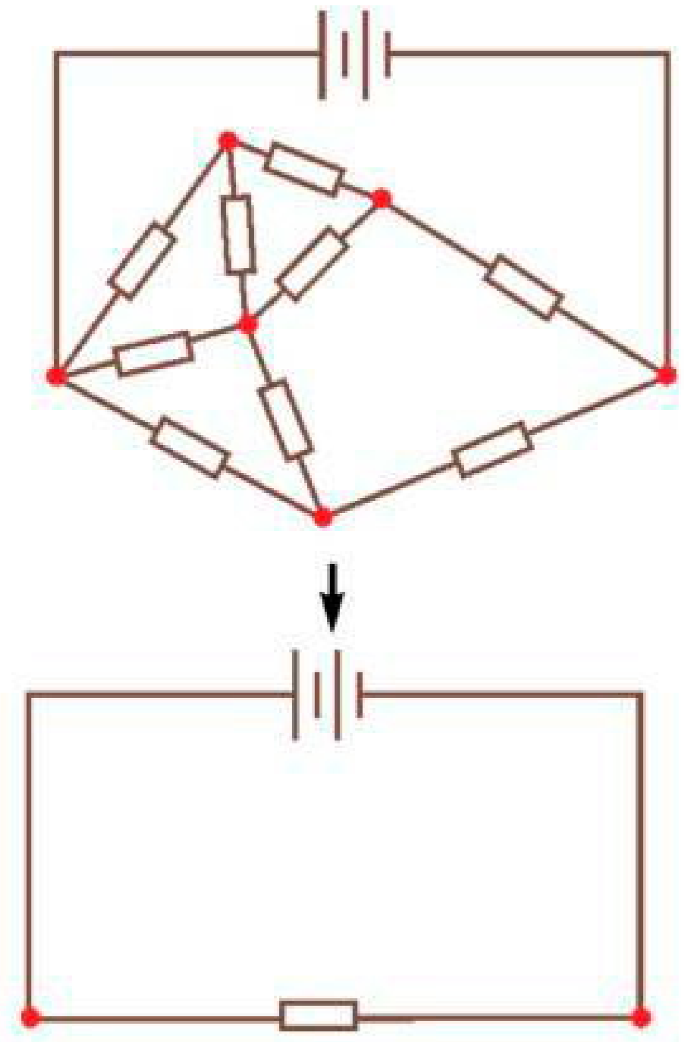


Рис. 11. Замена всех резисторов цепи на единственный резистор

Мы ввели все необходимые понятия и готовы привести

Доказательство теоремы о сопротивлении цепи и отношении сторон прямоугольника. По теореме о силах тока и длинах сторон, сила тока через батарейку равна вертикальной стороне большого прямоугольника. По определению, сопротивление цепи равно отношению напряжения батарейки к силе тока через нее, что равно отношению горизонтальной стороны большого прямоугольника к вертикальной, что и требовалось.

Доказанная теорема сводит вычисление отношения сторон прямоугольника к вычислению сопротивления электрической цепи. Но как находить это сопротивление? Тут нам очень пригодится такое утверждение:

Лемма о сопротивлении цепи. *Силы тока в электрической цепи и ее сопротивление можно выразить через сопротивления резисторов и напряжение батарейки с помощью сложения, вычитания, умножения и деления.*

Доказательство. Мы докажем эту лемму только для цепи, построенной по разрезанию. Запишем все правила Кирхгофа для нее. Возникает система уравнений, где неизвестные – это силы токов через ребра, а коэффициенты – это ±1, а также сопротивления резисторов и напряжение батарейки. Цепь построена по разрезанию, значит, у нашей системы заведомо есть решение – длины вертикальных сторон прямоугольников. А других решений и нет – по теореме существования и единственности. Если решение системы одно, то оно выражается через коэффициенты с помощью четырех арифметических операций (подумайте сами, почему, или посмотрите доказательство теоремы о решении системы из нашей предыдущей статьи). Значит, все силы тока, а также сопротивление цепи выражаются через ±1, напряжение батарейки и сопротивления резисторов. При этом от чисел ±1 в нашем выражении легко избавиться: например, заменив 1 на $\frac{r}{r}$, где r – сопротивление одного из резисторов. Лемма доказана.

На самом деле, есть явная формула для сопротивления любой электрической цепи через сопротивления резисторов. Эта формула дается *теоремой Кирхгофа о деревьях*, но нам она не понадобится.

Теперь мы можем говорить о разрезаниях прямоугольника на языке физики. Все соответствия – в Словарике (с. 9).

Невозможные разрезания

С помощью электрических цепей мы получим некоторые требования к числам r, для которых из прямоугольников с отношением сторон r можно сложить квадрат.

Словарик

Разрезание большого прямоугольника на маленькие	Электрическая цепь
Вертикальный разрез	Узел
Маленький прямоугольник	Резистор
Длина его вертикальной стороны	Сила тока через резистор
Отношение его горизонтальной стороны к вертикальной	Сопротивление резистора
Вертикальные стороны большого прямоугольника	Клеммы батарейки
Длина его вертикальной стороны	Сила тока через батарейку
Длина его горизонтальной стороны	Напряжение батарейки
Отношение его горизонтальной стороны к вертикальной	Сопротивление электрической цепи

Теорема. *Пусть квадрат разрезан на прямоугольники с отношением сторон r. Тогда r – корень ненулевого многочлена с целыми коэффициентами.*

Доказательство. Применим такой трюк: растянем квадрат в r раз по горизонтали. Получим прямоугольник с отношением сторон r, разрезанный на квадраты и прямоугольники с отношением сторон r^2. Сопоставим разрезанию электрическую цепь. Она состоит из резисторов сопротивлением 1 и r^2, а сама имеет сопротивление r. По лемме о сопротивлении цепи, число r можно выразить через числа 1 и r^2 с помощью четырех арифметических действий. Значит, найдутся два ненулевых многочлена $p(x)$ и $q(x)$ с целыми коэффициентами, такие что $r = \dfrac{p(r^2)}{q(r^2)}$, т.е. $q(r^2)\cdot r - p(r^2) = 0$. Получили, что r – корень многочлена $q(x^2)\cdot x - p(x^2)$ с целыми коэффициентами. Этот многочлен не равен тождественно нулю, так как многочлены $p(x^2)$ и $q(x^2)$ – ненулевые, причем x входит в многочлен $q(x^2)\cdot x$ только в нечетной степени, а в многочлен $p(x^2)$ – только в четной. Теорема доказана.

В обратную сторону теорема неверна. Например, квадрат нельзя разрезать на прямоугольники с отношением сторон $\sqrt{2}$ (докажите!), хотя это число – корень многочлена $x^2 - 2$.

Разрезания для r вида $a + b\sqrt{2}$

Попробуем найти все числа r вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b – рациональны, для которых квадрат разрезается на прямоугольники с отношением сторон r.

Числа вида $r = a + b\sqrt{2}$ с рациональными a и b мы будем называть *хорошими*. Число $\overline{r} = a - b\sqrt{2}$ назовем *сопряженным* к хорошему числу $r = a + b\sqrt{2}$. Сопряженное число определено однозначно, потому что хорошее число единственным образом представляется в виде $r = a + b\sqrt{2}$ с рациональными a и b (проверьте!).

Лемма об операциях над хорошими числами. *Если x и $y \neq 0$ – хорошие, то и $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, x/y – хорошие, причем* $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$, $\overline{x-y} = \overline{x} - \overline{y}$, $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$, $\overline{x/y} = \overline{x}/\overline{y}$.

Доказательство. Пусть $x = a + b\sqrt{2}$, $y = c + d\sqrt{2}$, где a, b, c, d рациональны. Тогда сразу видим, что

$$x + y = (a + c) + (b + d)\sqrt{2},$$
$$x - y = (a - c) + (b - d)\sqrt{2},$$
$$x \cdot y = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

– хорошие. Для частного x/y нужно еще применить обычный прием – «домножить на сопряженное»:

$$\frac{x}{y} = \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c - d\sqrt{2}\right)}{\left(c + d\sqrt{2}\right)\left(c - d\sqrt{2}\right)} = \left(\frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\right)\sqrt{2}.$$

Видим, что и оно – хорошее ($c^2 - 2d^2$ не равно нулю, так как y не равно нулю). Так же легко вычисляются сопряженные, например,

$$\overline{x \cdot y} = (ac + 2bd) - (ad + bc)\sqrt{2} = \left(a - b\sqrt{2}\right)\left(c - d\sqrt{2}\right) = \overline{x} \cdot \overline{y}.$$

Лемма доказана.

Задача 5. Можно ли представить $1 + \sqrt{2}$ в виде суммы квадратов нескольких хороших чисел?

Приведем пример разрезания квадрата на прямоугольники с отношением сторон $r = a + b\sqrt{2}$ в случае, когда сопряженное к нему положительно. Возьмем прямоугольник со сторонами 1 и $a + b\sqrt{2}$. Назовем его *эталонным*. Умножим стороны эталонного прямоугольника на число $\overline{r}$. Получим прямоугольник со сторонами $a - b\sqrt{2}$ и $a^2 - 2b^2$, и он подобен эталонному. Запишем $a^2 - 2b^2$ в виде k/l для

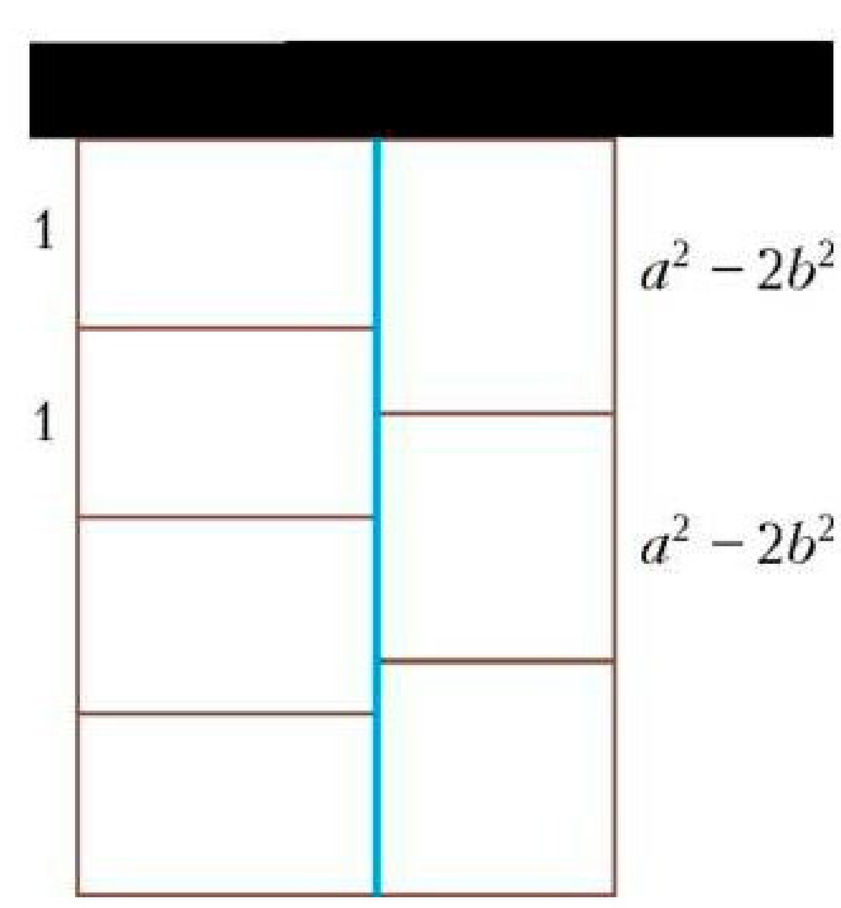


Рис. 12. Вот так из прямоугольников с хорошим отношением сторон можно составить прямоугольник с рациональными сторонами

некоторых натуральных чисел k и l. Сложим l копий этого прямоугольника и k копий эталонного, как на рисунке 12. Мы получим прямоугольник $2a \times k$ с рациональными сторонами, а из его копий уже нетрудно сложить квадрат.

Задача 6. На прямоугольном листе бумаги нарисовано разбиение на прямоугольники. Разрешается разрезать лист вдоль любого отрезка на два прямоугольника, потом произвести такие операции по отдельности с каждой из получившихся частей, и так далее. Если таким образом можно реализовать исходное разбиение, то назовем его *тривиальным* (см. рис.1, 2). Попробуйте описать все хорошие числа r, для которых существует тривиальное разрезание квадрата на прямоугольники с отношением сторон r.

Из примера видно, что если сопряженное к хорошему числу r положительно, то разрезание всегда возможно. Если же сопряженное число отрицательно, то не понятно, что делать.

Нам снова поможет физика! Давайте рассмотрим электрическую цепь, в которой сопротивления всех резисторов – положительные хорошие числа, причем сопряженные к ним тоже положительны.

Что произойдет с сопротивлением цепи, если сопротивления всех резисторов заменить на сопряженные?

Заметим, что сопротивление цепи от напряжения батарейки не зависит: если напряжение увеличить в какое-то количество раз, то ток через нее увеличится в такое же количество раз, и их отношение останется прежним. А раз так, то напряжение батарейки можно выбрать любым. Удобно считать напряжение батарейки единичным. По лемме о сопротивлении цепи и лемме об операциях над хорошими числами получаем, что силы тока в исходной цепи – хорошие числа.

Заменим все сопротивления резисторов и силы тока на сопряженные. После такой замены ни одно правило Кирхгофа не нарушится. Например, для контура на рисунке 9

$$R_5I_5 + R_9I_9 - R_6I_6 - R_7I_7 = 0 .$$

После замены на сопряженные получим

$$\begin{aligned}\bar{R}_5\bar{I}_5 + \bar{R}_9\bar{I}_9 - \bar{R}_6\bar{I}_6 - \bar{R}_7\bar{I}_7 &= \\ = \overline{R_5I_5} + \overline{R_9I_9} - \overline{R_6I_6} - \overline{R_7I_7} &= \\ = \overline{R_5I_5 + R_9I_9 - R_6I_6 - R_7I_7} &= \bar{0} = 0 ,\end{aligned}$$

т.е. правило Кирхгофа по-прежнему выполняется.

Все новые сопротивления тоже положительны, а значит, выполнена теорема существования и единственности. Поэтому числа, сопряженные к силам тока в исходной цепи, – это и есть настоящие силы тока в новой цепи. Какие-то силы тока через резисторы могли стать отрицательными – это означает лишь, что направление тока поменялось на противоположное. Но по теореме положительности сила тока через батарейку заведомо осталась положительной (т.е. по батарейке ток всегда течет от отрицательного полюса к положительному).

Раз ток через батарейку заменился на сопряженный, то и сопротивление цепи заменилось на сопряженное. Мы доказали следующую лемму.

Лемма о сопряжении. *Рассмотрим электрическую цепь, в которой сопротивления всех резисторов – положительные хорошие числа, причем сопряженные к ним тоже положительны. Тогда если заменить сопротивления резисторов на сопряженные к ним, то сопротивление цепи также заменится на сопряженное.*

Именно это поможет нам доказать основную теорему этой статьи.

Теорема о хороших числах. *Пусть* $r = a + b\sqrt{2} > 0$ *– хорошее число. Тогда из прямоугольников с отношением сторон r можно составить квадрат, если и только если число* $\bar{r} = a - b\sqrt{2}$ *положительно.*

Доказательство. Мы уже показали выше, что при $r = a - b\sqrt{2} > 0$ сложить квадрат можно. Покажем, что если $\bar{r} = a - b\sqrt{2} < 0$, то сложить квадрат нельзя. Допустим, что можно. Растянув квадрат в $a + b\sqrt{2}$ раз по горизонтали, получим прямоугольник с отношением сторон $a + b\sqrt{2}$, разрезанный на прямоугольники с отношением сторон $\left(a + b\sqrt{2}\right)^2$ и квадраты. Сопоставим этому разбиению электрическую цепь. Она состоит из резисторов сопротивлениями 1 и $\left(a + b\sqrt{2}\right)^2$. Сопротивление цепи равно $a + b\sqrt{2}$. Применим лемму о сопряжении. Тогда возникнет электрическая цепь, в которой сопротивления резисторов равны 1 и $\left(a - b\sqrt{2}\right)^2$ – числа положительные, а общее сопротивление $a - b\sqrt{2}$ – число отрицательное. Однако, сопротивление цепи всегда положительно. Полученное противоречие доказывает невозможность разрезания.

Задача 7 (для исследования). Дано хорошее число r. Какие прямоугольники можно сложить из прямоугольников с отношением сторон r?

Скованные одной дробью

А что же верно для произвольных r, не обязательно хороших? Дадим только ответ без полного доказательства. Его получили Ласкович, Ринн, Секереш и Фрайлинг в 1994 году.

Теорема о разрезании квадрата на подобные прямоугольники. *Для числа $r > 0$ следующие три условия эквивалентны:*

1) Квадрат можно разрезать на прямоугольники с отношением сторон r.

2) Для некоторых положительных рациональных чисел $c_1, \ldots, c_n$ выполнено равенство

$$c_1r + \cfrac{1}{c_2r + \cfrac{1}{c_3r + \ldots + \cfrac{1}{c_nr}}} = 1 .$$

3) Число r является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами, у которого все

[4] О комплексных числах можно прочитать в статье С.Дориченко «Комплексные числа» в «Кванте» № 5 за 2008 год.

комплексные[4] *корни имеют положительную действительную часть.*

Доказательство следствия 2) $\Rightarrow$ 1). Цепная дробь из условия 2) дает алгоритм разрезания. Для начала возьмем некоторый квадрат. Проведем вертикальную линию так, чтобы она отсекала от квадрата прямоугольник с отношением *горизонтальной* стороны к вертикальной, равным $c_1 r$. Останется прямоугольник с отношением сторон $1 - c_1 r$. Отделим от него горизонтальным отрезком прямоугольник с отношением *вертикальной* стороны к горизонтальной, равным $c_2 r$. Останется прямоугольник с отношением сторон $\frac{1}{1 - c_1 r} - c_2 r$. Продолжим этот процесс, чередуя вертикальные и горизонтальные разрезы. В силу равенства в условии 2), на n-м шаге мы получим прямоугольник с отношением сторон $c_n r$. Тем самым, квадрат оказался разбит на прямоугольники с отношениями сторон $c_1 r$, $c_2 r$, $c_3 r$, $\ldots$, $c_n r$. Разрезав каждый из них на прямоугольники с отношением сторон r, мы построим нужное разбиение.

Идея доказательства следствия 3) $\Rightarrow$ 2). Покажем на примере, как по многочлену построить цепную дробь. Пусть $r = 1 + \sqrt[3]{2}$. Это корень многочлена $f(x) = (x-1)^3 - 2$, удовлетворяющего условию 3) (проверьте!). Рассмотрим функцию

$$R(x) = \frac{f(-x) - f(x)}{f(-x) + f(x)} = \frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 3}.$$

Она равна 1 при $x = 1 + \sqrt[3]{2}$, так как это корень многочлена $f(x)$. Разложим функцию $R(x)$ в цепную дробь, последовательно выделяя целую часть:

$$R(x) = \frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 3} = \frac{1}{3}x + \frac{2x}{3x^2 + 3} = \\ = \frac{1}{3}x + \cfrac{1}{\frac{3}{2}x + \frac{3}{2x}} = \frac{1}{3}x + \cfrac{1}{\frac{3}{2}x + \cfrac{1}{\frac{2}{3}x}}.$$

При $x = 1 + \sqrt[3]{2}$ получаем равенство из условия 2).

Оказывается, для любого многочлена $f(x)$, удовлетворяющего условию 3), все коэффициенты такой цепной дроби будут положительны. Доказывать этого мы не будем.

Задача 8. Попробуйте сделать то же самое для положительного корня r многочлена $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$. Нужно ли для этого этот корень находить? Нарисуйте разрезание квадрата на прямоугольники с отношением сторон, равным этому корню r.

Доказательство следствия 1) $\Rightarrow$ 3) для хороших r мы на самом деле уже проделали. Если квадрат разрезается на прямоугольники с отношением сторон $r > 0$, то по теореме о хороших числах получаем $\bar{r} > 0$. Тогда многочлен $f(x) = (x - r)(x - \bar{r})$ удовлетворяет условию 3).

Доказательство следствий 1) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) для произвольных r выходит за рамки настоящей статьи. Оно довольно объемно и требует серьезных навыков работы с комплексными числами. Отметим только, что это рассуждение идейно похоже на доказательство теоремы о хороших числах, но использует цепи *переменного* тока[5] (рис. 13).

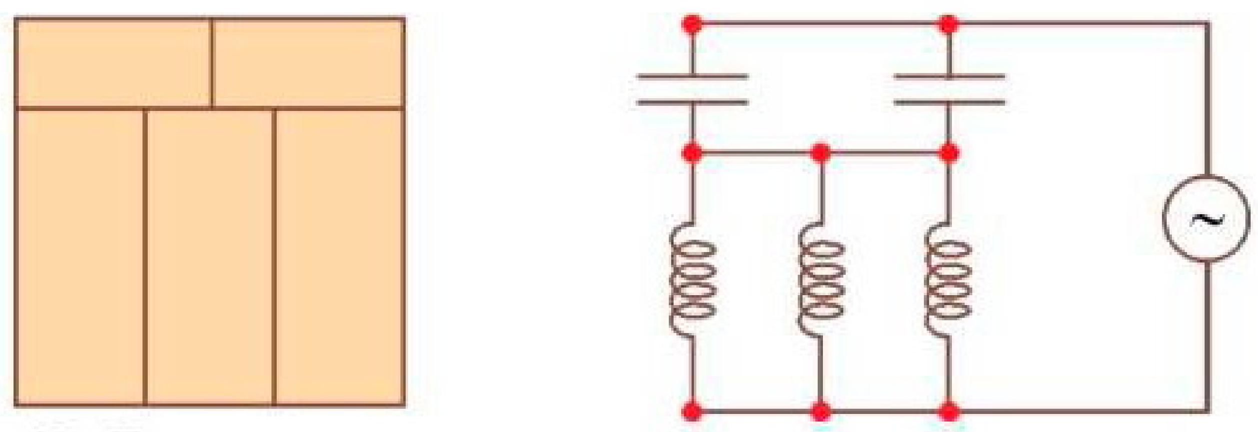


Рис. 13. Построение цепи переменного тока по разрезанию

Задача 9. Прямоугольник разрезан на несколько прямоугольников, у каждого из которых длина хотя бы одной стороны – целое число. Доказать, что и у исходного прямоугольника длина хотя бы одной стороны – целое число.[6]

Задача 10. Пусть A и B – два прямоугольника. Из прямоугольников, равных A, сложили прямоугольник, подобный B. Докажите, что из прямоугольников, равных B, можно сложить прямоугольник, подобный A.[7]

Задача 11. Найдите необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа a, b, c, d, чтобы прямоугольник $a \times b$ можно было разрезать на несколько прямоугольников $c \times d$.[8]

Замечание. В нашей предыдущей статье «Разрезания металлического прямоугольника» в «Кванте» №3 за 2011 год замечены следующие опечатки:

- В решении системы на странице 11 должно быть $x_7 = 9/16$.
- В определении электрической цепи на странице12 нужно добавить условие, что граф остается связным после удаления любого ребра. В частности, это исключает ситуацию на рисунке 11 (с. 13), когда один контур проходит по ребру дважды.

Авторы благодарны за помощь НИУ Высшая школа экономики и Институту проблем передачи информации РАН, а также школьникам Саше Анохину, Алине Ибраевой и Лене Лычагиной за полезные замечания и предложения.

---

[5] *M.Prasolov, M.Skopenkov.* Tiling by rectangles and alternating current. J. Combin. Theory Ser. A **118:3** (2011), 920–937; http://arxiv.org/abs/1002.1356

[6] Это теорема де Брёйна. Вы можете найти доказательство в статье С. Табачникова и Д. Фукса «Невозможные замощения» в «Кванте» № 2 за 2011 год (с. 25, теорема 4).

[7] *А.Шаповалов.* XXVI Турнир городов; http://turgor.ru/26/index.php

[8] *А.Колотов.* Об одном разбиении прямоугольника. «Квант» №1 за 1973 год.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2015» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2374» или «Ф2380». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2374 и М2380 предлагались на региональном этапе XLI Всероссийской олимпиады школьников по математике, задача М2276 предлагалась на XVIII Кубке памяти А.Н.Колмогорова.

Задачи М2374–М2380, Ф2380–Ф2387

М2374. После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, деленная на их количество. В некоторый момент времени T рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента T?

О.Дмитриев, Р.Женодаров

М2375. Найдите количество действительных решений уравнения

$$(x+2)(x+4)\ldots(x+2014) = \\ = (x+1)(x+3)(x+5)\ldots(x+2015).$$

Фольклор

М2376. В остроугольном треугольнике ABC точка K – середина AC (рис.1). На сторонах AB и BC как на основаниях внутрь треугольника построены равнобедренные треугольники ABM и BCN так, что $AM = BM$, $\angle AMB = \angle AKB$ и $BN = CN$, $\angle BNC = \angle BKC$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника MNK, касается стороны AC.

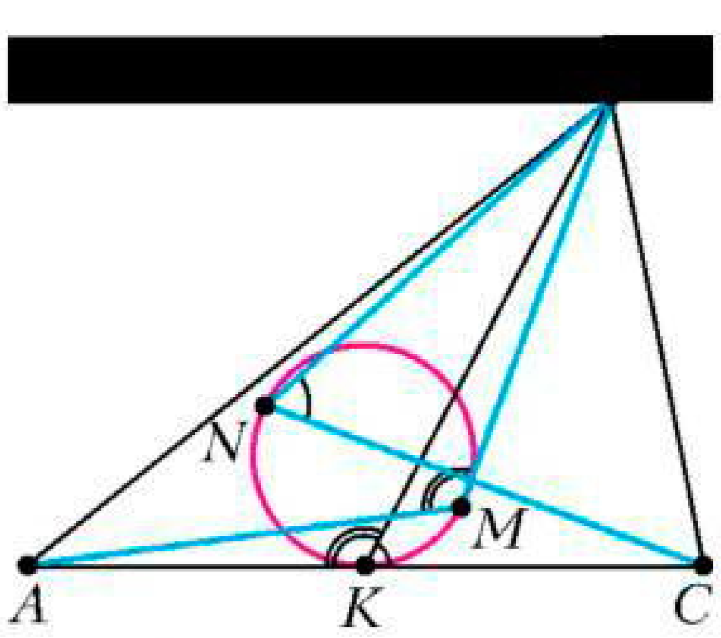


Рис. 1

А.Антропов

М2377. Для 25 натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_{25}$ вычисляют значения $S_1 = n_1 + n_2^{n_3}$, $S_2 = n_2 + n_3^{n_4}$, … …, $S_{25} = n_{25} + n_1^{n_2}$. Оказалось, что все числа $S_1, \ldots, S_{25}$ простые. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть среди чисел $n_1, \ldots, n_{25}$?

В.Сендеров

М2378. На плоскости даны n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и n различных векторов. Докажите, что можно выбрать точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$, удовлетворяющие следующим двум условиям: (1) среди n векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, …, $\overrightarrow{A_nB_n}$ каждый из данных векторов встречается ровно по разу; (2) расстояние между точками B_i и B_j не меньше, чем между точками A_i и A_j для всех пар индексов $1 \le i \le j \le n$.

Ф.Ивлев

М2379. О выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ известно, что диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке M и, кроме того, треугольники ABM, BCM, CDM, DEM, EFM и FAM – остроугольные. Докажите, что центры окружностей, описанных около этих треугольников, лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда четырехугольники $ABDE$, $BCEF$ и $CDFA$ имеют равные площади.

Н.Седракян

М2380. Дано натуральное число $n \ge 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенные в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

Д.Храмцов

Ф2380. Две утки, стартуя одновременно, не торопясь переплывают канал одинаковой в любом месте ширины, двигаясь с постоянными, но разными скоростями (рис.2). Скорость течения воды в канале тоже постоянна и равна v. Черными линиями на рисунке 3 показаны берега канала, а красными линиями для некоторого момента времени показано расположение границ областей существования волн, которые своими движениями создали на поверхности воды утки. Линии этих границ

Рис. 2

образуют одинаковые углы φ независимо от величин скоростей движения уток. Обе утки «причалили» к противоположному берегу в одном месте. Каковы скорости уток относительно воды?

Примечание. Известно, что $\varphi \approx 39^\circ$ при движении с постоянными скоростями по глубокой воде лодок, кораблей, уток – любых объектов.

Д.Уткин

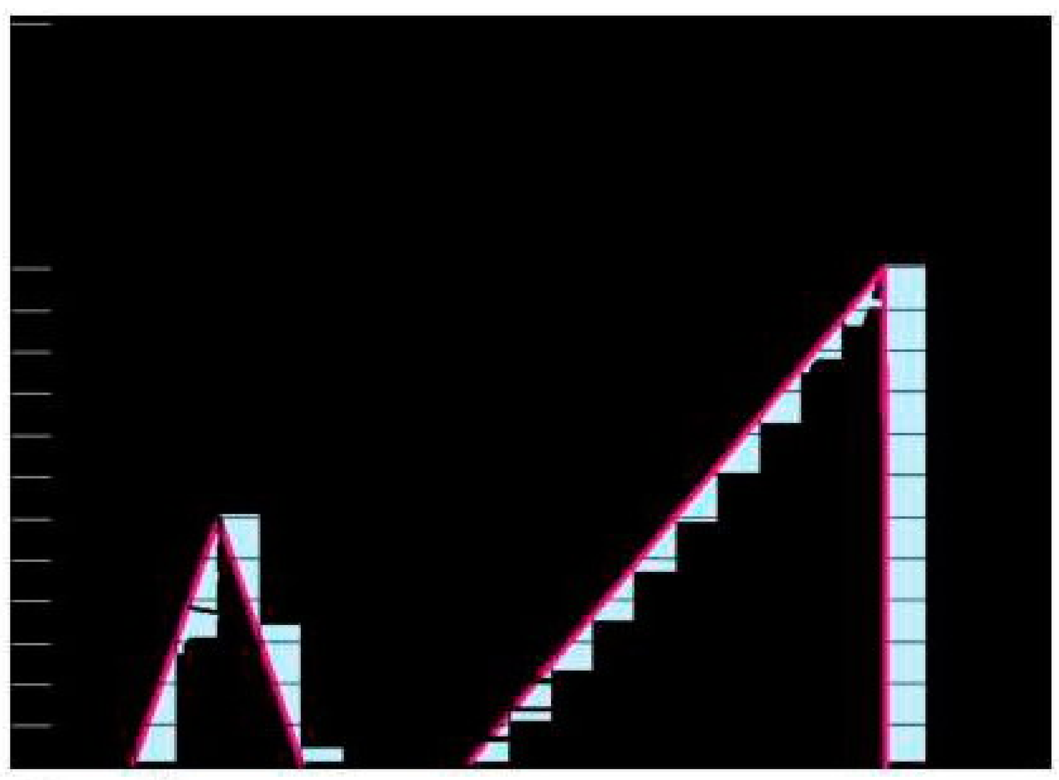


Рис. 3

Ф2381. Два висящих в воздухе груза с массами m (верхний) и M (нижний) скреплены резинкой. Верхний груз удерживается на месте двумя резинками, одна из которых горизонтальна, а вторая составляет с вертикалью угол ° . Система находится в равновесии, все резинки легкие. В некоторый момент одна из резинок порвалась. С какими ускорениями двигались грузы сразу после этого?

А.Простов

Ф2382. Стальная проволока с линейным распределением массы $\lambda = 0{,}1$ кг/м натянута между двумя одинаковыми высотными домами, расстояние между которыми $L = 100$ м. Концы проволоки жестко закреплены. При температуре 0 °С и отсутствии ветра «провис» проволоки (разность уровня крепления концов проволоки и уровня самой нижней точки провода между домами) равен $H = 0{,}5$ м $\ll L$.

1) С какой силой натянута проволока?

2) Какой будет длина этой проволоки, если ее при той же температуре уложить без натяжения на плоскую горизонтальную поверхность? Модуль Юнга стали $E = 10^{11}$ Па.

3) Как связаны друг с другом «провис» проволоки, расстояние между точками крепления ее концов и длина проволоки в нерастянутом состоянии?

4) На сколько отличаются силы натяжения этой проволоки летом при температуре +30 °С и зимой при температуре –20 °С? Коэффициент теплового расширения стали, из которой сделана эта проволока, $° = 10^{-5}$ К$^{-1}$.

5) Выдержит ли проволока натяжение, если зимой при температуре 0 °С на ней образуется наледь с линейным распределением массы $\lambda_1 = 0{,}9$ кг/м? Прочность стали $\sigma_{max} = 10^9$ Па.

С.Варламов

Ф2383. Аргон массой $m = 100$ г имеет начальную температуру $t_0 = 100$ °С и находится в сосуде объемом $V = 100$ л. Газу сообщили количество теплоты $Q = 100$ Дж, и процесс, в котором это произошло, имел теплоемкость $C = 100$ МДж/К. На сколько увеличился объем сосуда?

А.Сотников

Ф2384. По расчетам физиков, в центре Солнца температура $T \approx 15 \cdot 10^6$ К, давление $p \approx 3{,}2 \cdot 10^{16}$ Па, а плотность вещества $\rho \approx 160$ г/см^3. Массовая доля водорода в Солнце практически одинакова по всему его объему и равна 0,7. Выполняется ли для солнечного вещества уравнение Менделеева–Клапейрона?

За счет ядерных реакций вблизи центра Солнца происходит выделение энергии $W = 1$ Дж/(т · с). Солнечная постоянная (поток излучения, идущего от Солнца, через площадку 1 м^2, перпендикулярную лучам Солнца, вне атмосферы Земли на расстоянии, равном расстоянию от Земли до Солнца, т.е. $L = 150$ млн · км = 1 а.е.) равна $E = 1370$ Вт/м^2. Оцените радиус той области вблизи центра Солнца, в которой идут термоядерные реакции. С Земли видимый диск Солнца имеет угловой размер $° = 0{,}5°$.

В.Солнцев

Ф2385. Неопытный лаборант спаял замкнутую цепь из пяти батареек ° и четырех батареек β (рис.4). При этом он всегда соединял «плюс» одной батарейки с «минусом» другой. Вольтметр, подключенный к группе $\alpha - \beta - \alpha$, показал напряжение 1,5 В. Какое напряжение покажет вольтметр, подключенный:

1) к группе $\beta - \alpha - °$;

2) к группе $\beta - \alpha - \beta$;

3) к батарейке °;

4) к батарейке β?

Е.Соколов

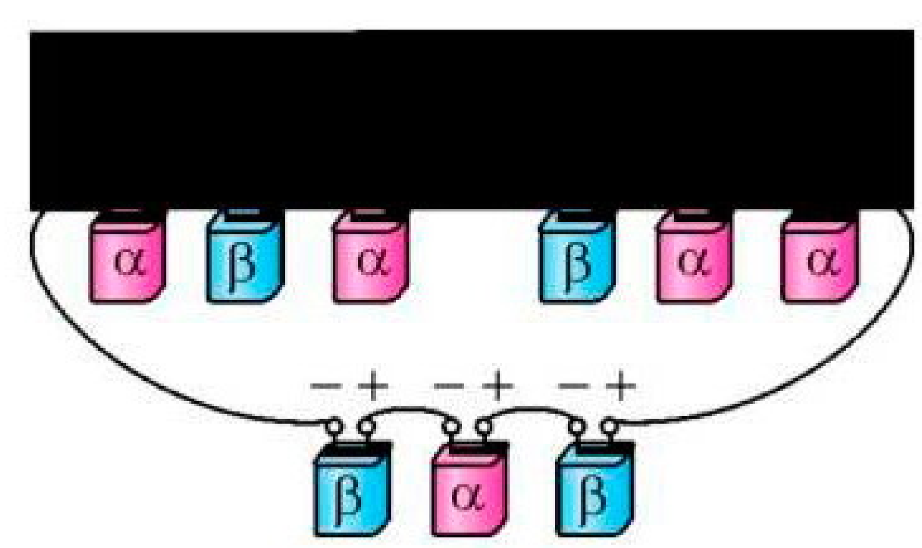


Рис. 4

Ф2386. К одному концу очень длинного соленоида, тонкий провод которого намотан в один слой виток к витку на диэлектрический немагнитный сердечник, подключен один вывод идеальной батареи с ЭДС $\mathcal{E}$. Второй вывод этой батареи через идеальный амперметр, разомкнутый ключ и проводящую длинную шину, проложенную параллельно оси соленоида, подключен к проводящему кольцу (рис.5), которое, перемещаясь поступательно вдоль оси соленоида, всегда касается его провода только в одной точке (точка, естественно, все время меняет свое положение). Контакт есть всегда, так как внутренний диаметр кольца совпадает с внешними диаметрами витков соленоида. Сопротивление соленоида, шины и кольца равно нулю. Площадь сечения соленоида S, число витков на единицу длины n, скорость движения контактного кольца вдоль оси соленоида v. Ключ замкнули в тот момент, когда

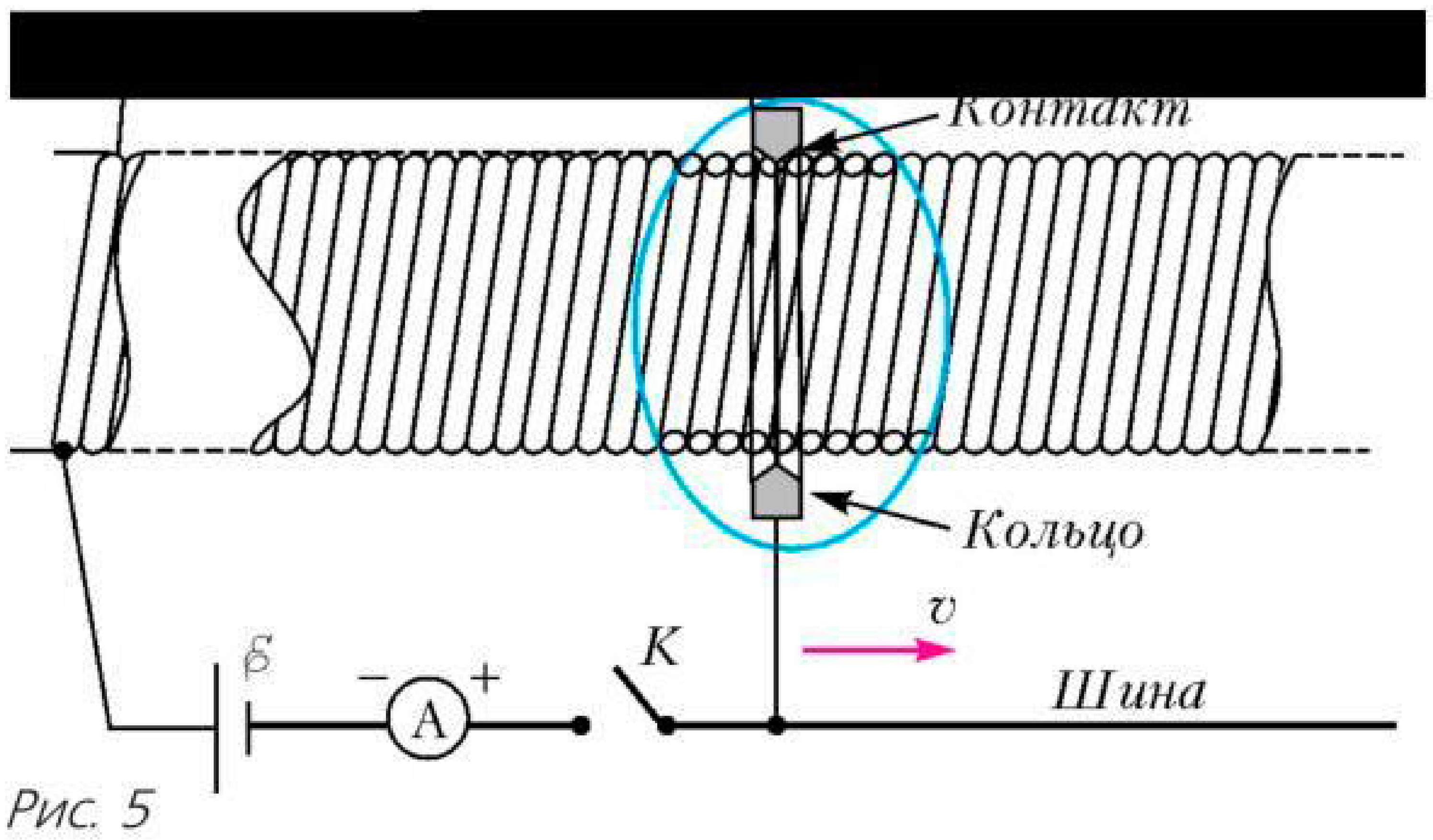


Рис. 5

кольцо касалось провода в точке, от которой до начала соленоида N_0 витков. Известно, что $N_0/n \gg \sqrt{S}$. Как будет меняться ток в соленоиде со временем? Каким будет установившееся значение этого тока?

Д.Сергеев

Ф2387. Во сколько раз отличаются освещенности поверхности Земли в безлюдной местности на экваторе 21 марта в 12:00 по местному времени (в полдень) и ровно через 12 часов в безоблачную полночь, если этой ночью в 23:59 в этом месте закончилось полное лунное затмение? Угловые размеры φ Солнца и Луны совпадают ($0{,}5°$). Расстояние от Солнца до Земли $L = 150$ млн км, а расстояние от Луны до Земли $s = 380$ тыс.км. Коэффициент рассеивания света поверхностью Луны (альбедо) ° = 11%. Считайте, что рассеянный Луной свет распределяется равномерно по всем возможным направлениям.

В.Лунин

Решения задач М2356–М2365, Ф2363–Ф2372

М2356. *В клетку на клетчатой плоскости посадили вирус. Вирус живет одну минуту, через минуту он исчезает, но оставляет после себя потомство – в каждой из четырех клеток, соседних по стороне с его клеткой, появляется по новому вирусу. На рисунке 1*

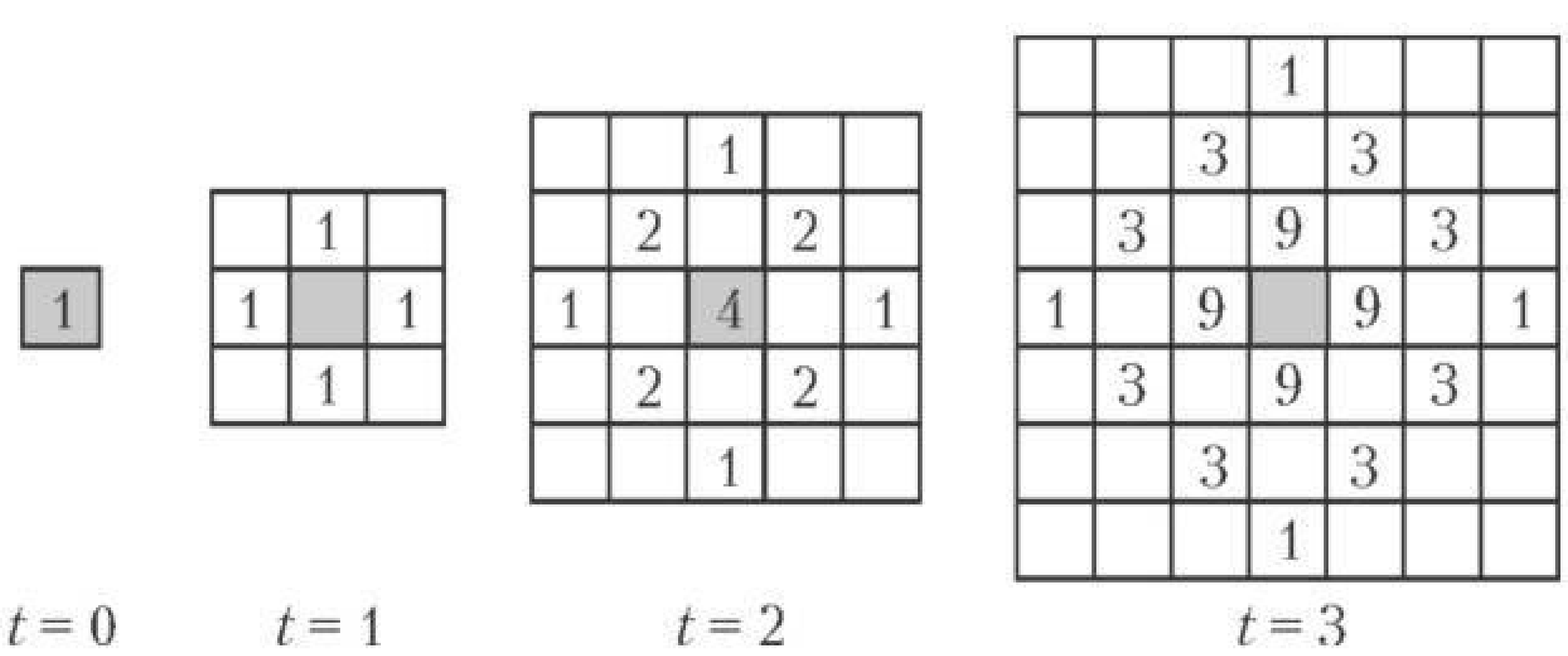


Рис. 1

показаны стадии размножения вирусов (количество и местоположение) в моменты времени t = 0, 1, 2, 3 мин. Вычислите количество вирусов в начальном поле при t = 10 мин.

Ответ: 63504.

Рассмотрим момент времени $t = n$. Если нанести на клетчатую плоскость шахматную раскраску, то ясно, что потомки вируса будут находиться в клетках одного цвета, до которых можно добраться из начальной клетки не более чем за n ходов, переходя в соседние клетки. Центры таких клеток образуют квадрат $(n+1)\times(n+1)$, стороны которого параллельны диагоналям клеток (рис.2). Обозначим эти клетки (i, j),

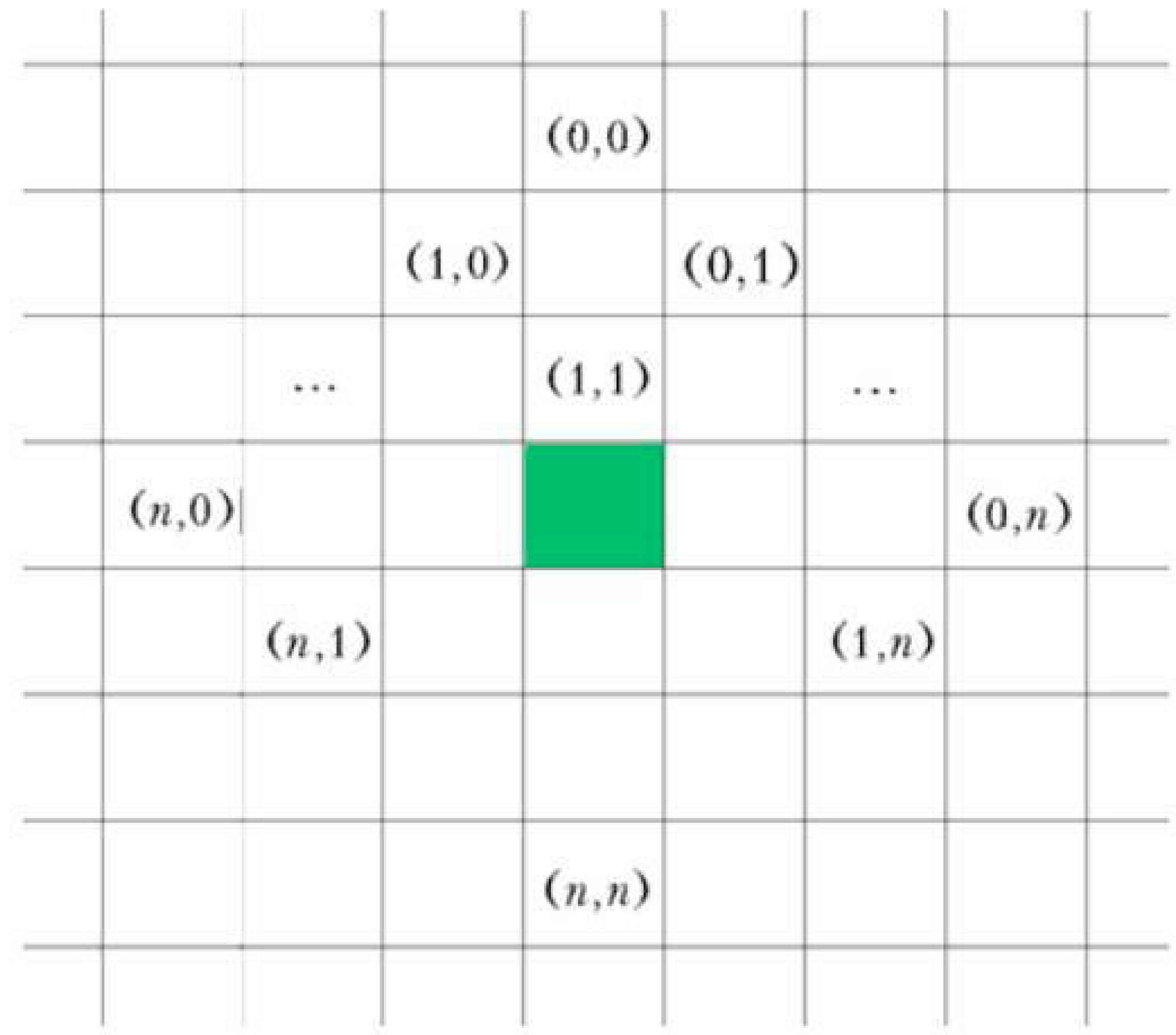


Рис. 2. Нумерация клеток в момент $t = n$

$i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ (i, j – номера рядов, так что самая верхняя клетка $(0, 0)$), а через $A_n^{i,j}$ обозначим количество потомков вируса в клетке (i, j). Покажем, используя индукцию по n, что $A_n^{i,j} = C_n^i C_n^j$, где C_n^k – число сочетаний из n по k ($C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$). Для $n = 1$ это верно. Предположим, что оно верно для некоторого n. Тогда, согласно закону размножения вируса (рис.3; в каждую клетку приходят потомки из соседних с ней клеток), для всех $i, j \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$ выполнено

$$A_{n+1}^{i,j} = A_n^{i,j} + A_n^{i-1,j} + A_n^{i,j-1} + A_n^{i-1,j-1}$$

(если i меньше 0 или больше n, то считаем, что $A_n^{i,j} = C_n^i = 0$, аналогично для j). Тогда имеем

$$A_{n+1}^{i,j} = C_n^i C_n^j + C_n^{i-1} C_n^j + C_n^i C_n^{j-1} + C_n^{i-1} C_n^{j-1} =$$

$$= \left(C_n^i + C_n^{i-1}\right)\left(C_n^j + C_n^{j-1}\right) = C_{n+1}^j C_{n+1}^{j-1},$$

тем самым наша формула доказана.

В задаче требуются найти

$$A_{10}^{5,5} = \left(C_{10}^5\right)^2 = 252^2 = 63504.$$

Замечание. Можно заметить связь этой задачи с треугольником Паскаля. Если поставить слои из кубиков с числами при $t = n$, $n - 1$, …, 1, 0 один на другой, то получится «пирамида Паскаля»: число в каждом кубике равно сумме чисел, расположенных в четырех кубиках, каждый из которых расположен в слое над данным кубиком и имеет с ним общую вершину.

В.Расторгуев

М2357. *Назовем натуральное число хорошим, если среди его делителей есть ровно два простых числа. Могут ли 18 подряд идущих натуральных чисел быть хорошими?*

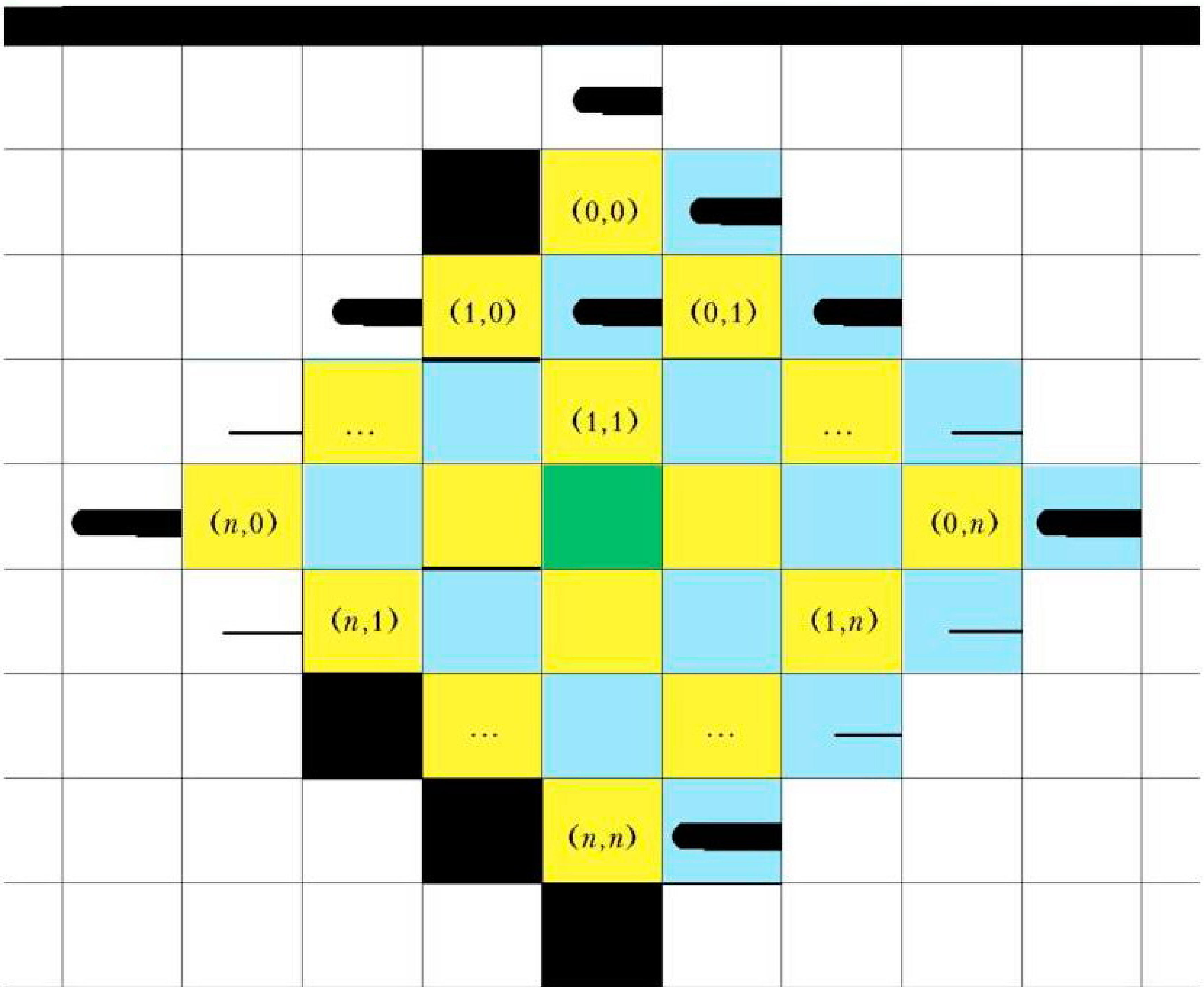


Рис. 3. Нумерация клеток в момент $t = n$ (желтые клетки) и нумерация клеток в момент $t = n + 1$ (синие клетки)

Ответ: не могут.

Предположим, что нашлись 18 хороших чисел подряд. Среди них найдутся три числа, делящихся на 6. Пусть это числа $6n$, $6(n+1)$ и $6(n+2)$. Поскольку эти числа – хорошие и в разложение каждого из них на простые множители входят двойка и тройка, других простых делителей у них быть не может.

Далее, лишь одно из трех подряд идущих натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$ может делиться на 3. Значит, остальные два являются степенями двойки. Но пары степеней двойки, отличающихся не более чем на два, – это только $(1, 2)$ и $(2, 4)$; поэтому $n \le 2$. Однако тогда среди наших 18 чисел есть простое число 13 (так как $6n \le 13 \le 6(n+2)$), не являющееся хорошим. Противоречие.

О.Подлипский

M2358. *а) Трапеция ABCD с основаниями AB и CD вписана в окружность Ω. Окружность ω проходит через точки C, D и пересекает отрезки CA, CB в точках A_1, B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 симметричны точкам A_1 и B_1 относительно середин отрезков CA и CB соответственно. Докажите, что точки A, B, A_2 и B_2 лежат на одной окружности.*

б) Сфера ω проходит через вершину S пирамиды SABC и пересекает ребра SA, SB и SC вторично в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Сфера Ω, описанная около пирамиды SABC, пересекается с ω по окружности, лежащей в плоскости, параллельной плоскости ABC. Точки A_2, B_2 и C_2 симметричны точкам A_1, B_1 и C_1 относительно середин ребер SA, SB и SC соответственно. Докажите, что точки A, B, C, A_2, B_2 и C_2 лежат на одной сфере.

а) Утверждение задачи эквивалентно равенству $CA_2 \cdot CA = CB_2 \cdot CB$. Поскольку $AA_1 = CA_2$ и $BB_1 = CB_2$, достаточно доказать, что $AA_1 \cdot AC = BB_1 \cdot BC$.

Пусть D_1 – вторая точка пересечения ω с AD (рис.1). Из симметрии имеем $AD = BC$ и $AD_1 = BB_1$. Из теоремы о произведении длин отрезков секущих теперь получаем

$$AA_1 \cdot AC = AD_1 \cdot AD = BB_1 \cdot BC,$$

что и требовалось доказать.

б) Утверждение задачи эквивалентно равенству

$$SA_2 \cdot SA = SB_2 \cdot SB = SC_2 \cdot SC.$$

Значит, ввиду равенств $AA_1 = SA_2$ и двух аналогичных, достаточно доказать, что $AA_1 \cdot AS = BB_1 \cdot BS = CC_1 \cdot CS$.

Пусть l – прямая, проходящая через центры сфер Ω и ω. Окружность пересечения этих сфер лежит в плоскости, перпендикулярной l, так что $l \perp (ABC)$. Это значит, что при повороте вокруг l описанная окружность треугольника ABC переходит в себя, и подходящим таким поворотом можно точку A перевести в B. Пусть точки S и A_1 при этом повороте переходят в S' и A_1' (они тоже лежат на ω; рис.2). Тогда

$$AA_1 \cdot AS = $$
$$= BA_1' \cdot BS' = BB_1 \cdot BS.$$

Равенство

$$AA_1 \cdot AS = CC_1 \cdot CS$$

доказывается аналогично.

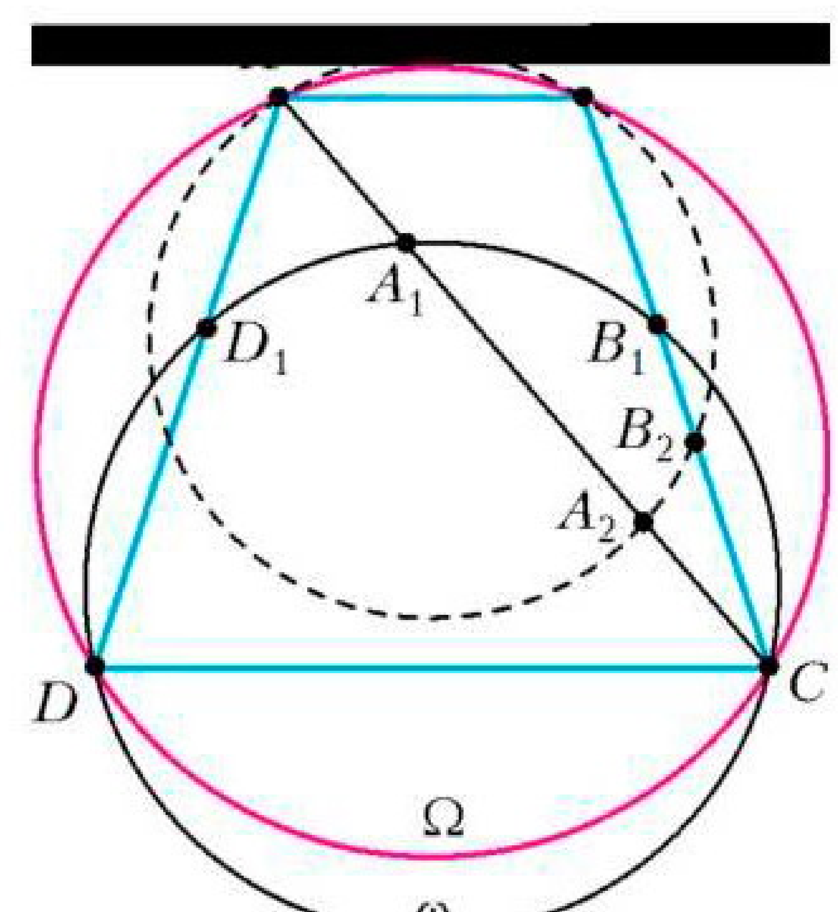


Рис. 1

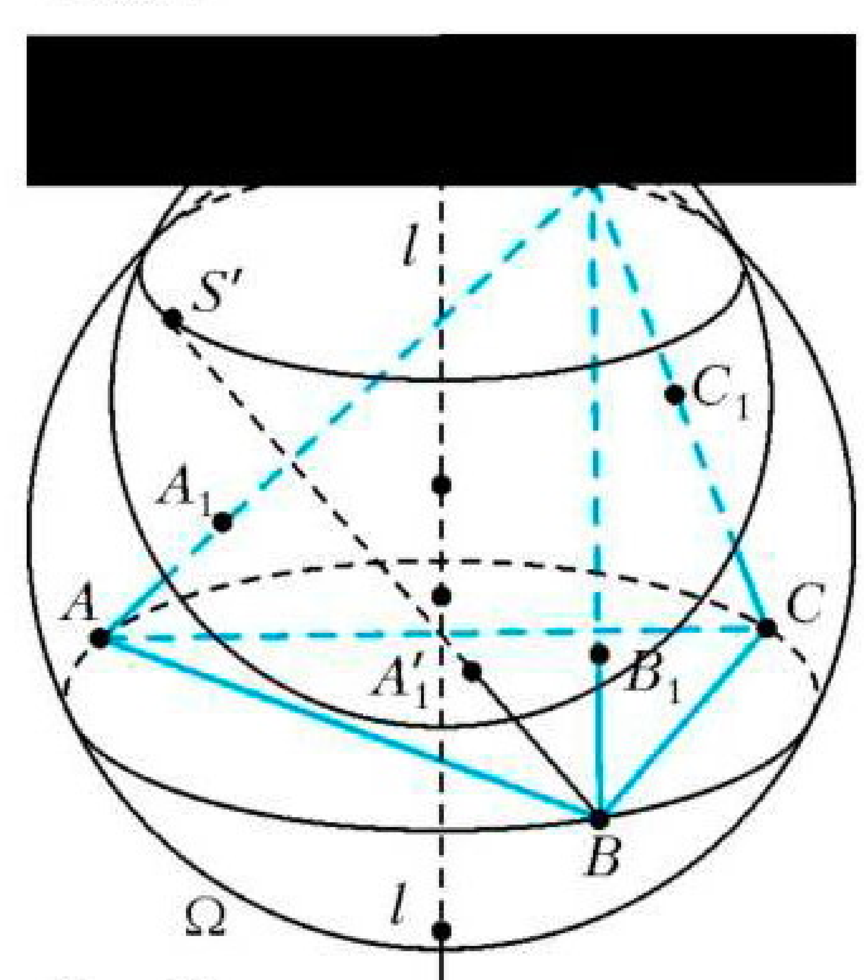


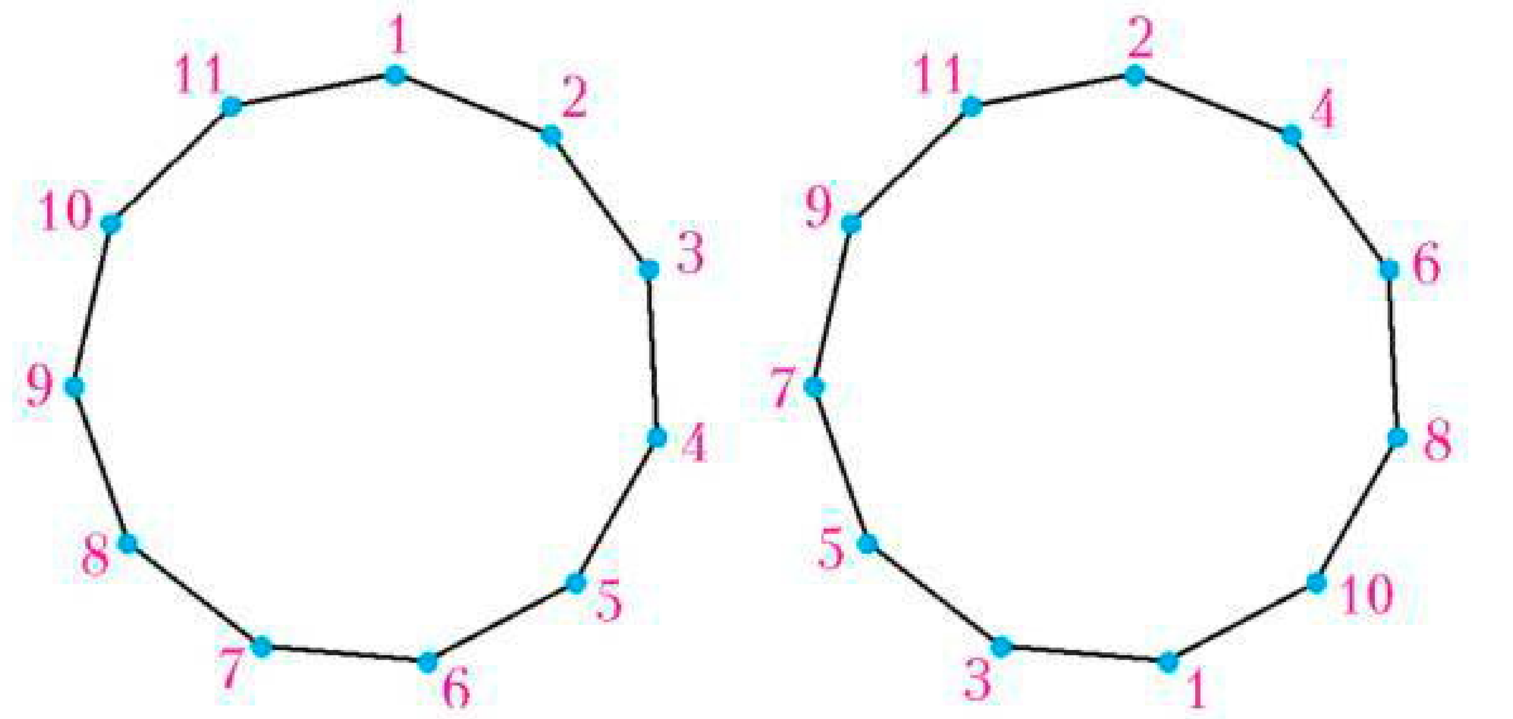
Рис. 2

И.Богданов

M2359. *На доске нарисован правильный 1001-угольник, вершины которого занумерованы числами 1, 2, … …, 1001. Из картона вырезали такой же правильный 1001-угольник. Можно ли в вершинах картонного 1001-угольника расставить числа 1, 2, …, 1001 (каждое число – по одному разу) так, чтобы при любом наложении 1001-угольников в какой-то вершине оказались равные числа (картонный многоугольник можно переворачивать)?*

Ответ: можно.

Пусть $n = 1001$. Дальнейшие рассуждения будут верны для всех нечетных и не делящихся на 3 чисел n. На рисунке показан случай $n = 11$. Не умаляя общности,



считаем, что вершины нарисованного на доске n-угольника занумерованы числами 1, 2, …, n по порядку по часовой стрелке. Расставим в вершинах картонного многоугольника последовательно по часовой стрелке числа 2, 4, …, $n-1$, 1, 3, 5, …, n (так что в i-й по счету вершине стоит число $a_i \equiv 2i \pmod n$).

Наложим картонный многоугольник на нарисованный так, чтобы совпали вершины n. Если повернуть картонный n-угольник на $2\pi k/n$ по часовой стрелке, то в вершине i нарисованного n-угольника окажется вершина с номером $b_i \equiv 2(i-1) \pmod n$. Нас интересуют i такие, что $b_i \equiv i \pmod n$ (это и будет означать, что $b_i = i$). Последнее сравнение приводит к решению $i \equiv 2k \pmod n$.

Теперь наложим картонный многоугольник с переворотом – сначала так, чтобы совпали вершины n (при этом в вершине i нарисованного n-угольника окажется вершина с номером $c_i \equiv -2i \pmod n$. Если после этого повернуть картонный n-угольник на $2\pi k/n$ по часовой стрелке, то в вершине i нарисованного n-угольника окажется вершина с номером $d_i \equiv -2(i-k) \pmod n$. Нужное нам сравнение $d_i \equiv i \pmod n$ принимает вид $3i \equiv 2k \pmod n$. Поскольку n не делится на 3, числа $3 \cdot 1$, $3 \cdot 2$, …, $3 \cdot n$ дают n разных остатков при делении на n (если $3x \equiv 3y \pmod n$, то $3(x-y)$ делится на n, а значит, и $x-y$ делится на n), следовательно, для каждого k найдется i такое, что $3i \equiv 2k \pmod n$.

Замечание. Можно доказать, что при четном n ответ в задаче отрицательный (даже если ограничиться совмещением без переворачиваний). Действительно, предположим противное. Вначале наложим картонный n-угольник каким-то образом, так что в вершине i нарисованного n-угольника окажется вершина с номером a_i картонного. Из условия будет следовать, что при каждом $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ верно $a_i \equiv i - k \pmod n$ для некоторого i (причем разным k соответствуют разные i). Складывая эти сравнения, приходим к тому, что $0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) \equiv 0$, что неверно для четного n.

Интересно узнать ответ в задаче для нечетных n вида $3k$. Как показывает первая часть решения, если ограничиться совмещением многоугольников без переворачиваний, то ответ в этом случае будет положительным.

В.Сендеров

М2360. *В республике математиков выбрали число $\circ > 2$ и выпустили монеты достоинствами в 1 рубль, а также в a^k рублей при каждом натуральном k. При этом $\circ$ было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз?*

Ответ: могло.

Покажем, что математики могли выбрать число $\circ = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}$; это число является корнем уравнения $\circ^2 + \circ = 7$. Ясно, что $\circ > 2$. Нетрудно видеть, что при натуральных m мы имеем $(2\circ)^m = a_m + b_m\sqrt{29}$, где a_m и b_m – целые числа, причем $a_m < 0 < b_m$ при нечетных m и $a_m > 0 > b_m$ при четных m. Значит, число $\circ^m$ иррационально.

Осталось показать, что для любого натурального числа n сумму в n рублей можно набрать требуемым способом. Рассмотрим все способы набрать n рублей выпущенными монетами (хотя бы один такой способ существует: можно взять n рублевых монет). Выберем из них способ, в котором наименьшее число монет. Предположим, что какая-то монета достоинства $\circ^i$ $(i \ge 0)$ встречается в этом способе хотя бы 7 раз. Тогда можно заменить 7 монет по $\circ^i$ монетами достоинств $\circ^{i+1}$ и $\circ^{i+2}$. При этом суммарное достоинство монет не изменится (поскольку $\circ^{i+1} + \circ^{i+2} = 7\circ^i$), а их количество уменьшится. Это невозможно по выбору нашего способа. Итак, этот способ удовлетворяет условию.

С.Берлов, И.Богданов

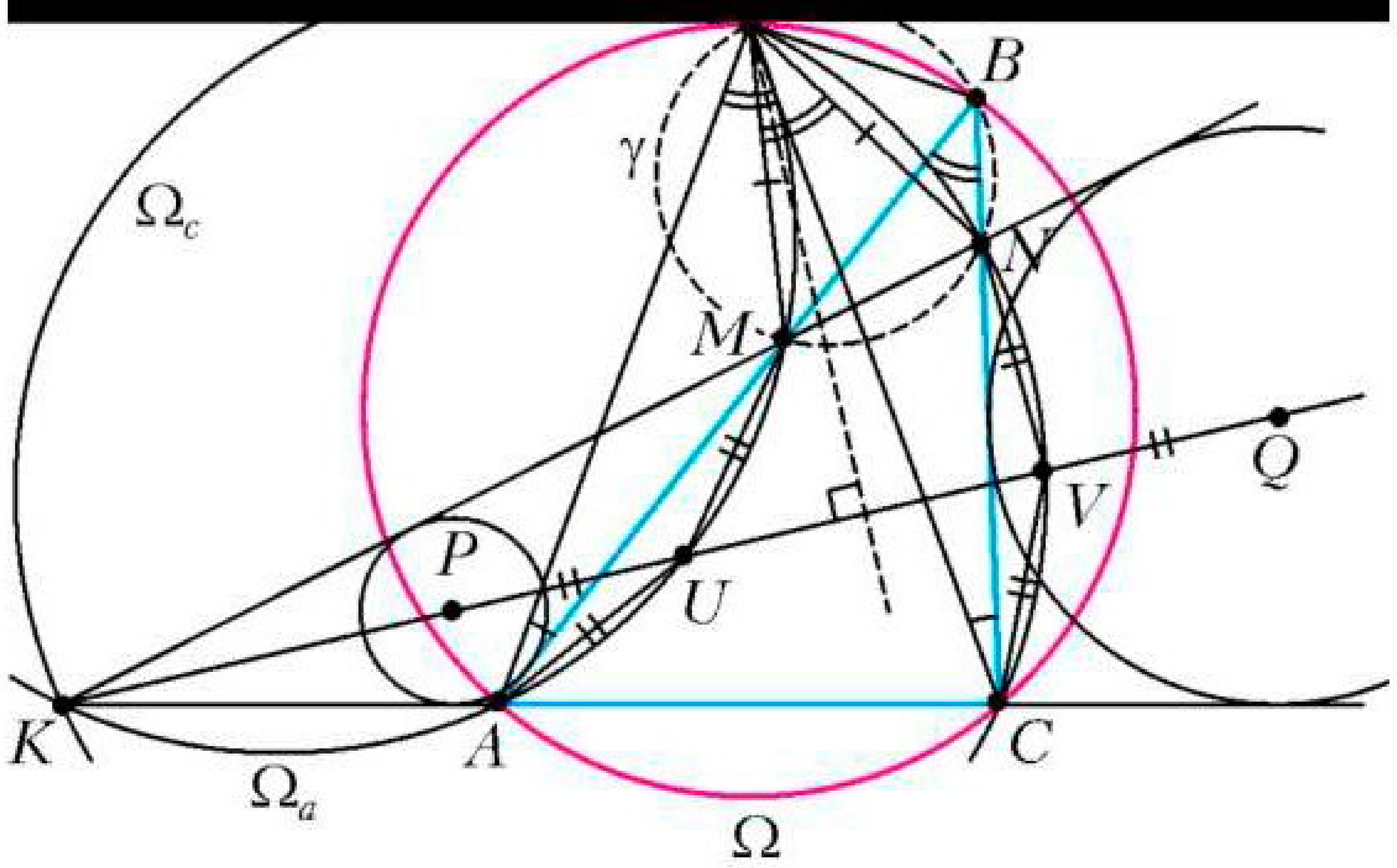
М2361. *Треугольник ABC (AB > BC) вписан в окружность Ω. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что AM = CN. Прямые MN и AC пересекаются в точке K. Пусть P – центр вписанной окружности треугольника AMK, а Q – центр вневписанной окружности треугольника CNK, касающейся стороны CN. Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q.*

Мы будем использовать следующую известную *лемму о трезубце* (доказательство леммы оставим читателю в качестве упражнения).

Лемма. *Пусть L – середина дуги YZ (не содержащей точку X) описанной окружности треугольника XYZ. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника XYZ, а I_x – центр вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны YZ. Тогда $LY = LZ = LI = LI_x$.*

Пусть S – середина дуги ABC окружности Ω (см. рисунок). Имеем $SA = SC$ (так как S лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC), $AM = CN$ и $\angle BCS = \angle BAS$ (как вписанные, опирающиеся на одну дугу). Значит, треугольники AMS и CNS равны, и они совмещаются поворотом Φ с центром в точке S на $\angle ASC = \angle ABC$. Отсюда, в частности, получаем $SM = SN$ и $\angle MSN = \angle ABC$. Из последнего равенства углов следует, что четырехугольник $MSBN$ вписан в некоторую окружность γ.

[redacted]



Окружности Ω_a и Ω_c, описанные около треугольников AMS и CNS соответственно, также совмещаются поворотом Φ. Пусть U и V – середины дуг AM и CN (не содержащих S) этих окружностей. Из поворота Φ получаем $SU = SV$ (т.е. точка S лежит на серединном перпендикуляре к UV) и $UA = VC$. Далее, из окружностей Ω и γ имеем $\angle SAK = \angle SBC = \angle SMK$, т.е. K лежит на Ω_a. Аналогично, K лежит на Ω_c.

Отсюда следует, что точки U и V вместе с точками P и Q лежат на биссектрисе угла CKN. По лемме о трезубце (для треугольников KAM и KCN) имеем $UP = UA$ и $VQ = VC$. Так как $UA = VC$, это означает, что точки P и Q симметричны относительно серединного перпендикуляра к UV, на котором лежит точка S. Значит, S равноудалена от P и Q, что и требовалось.

П.Кожевников, М.Кунгожин

М2362*. *В государстве n городов, и между каждыми двумя из них курсирует экспресс (в обе стороны). Для любого экспресса цены билетов «туда» и «обратно» равны, а для любых разных экспрессов эти цены различны. Докажите, что путешественник может выбрать начальный город, выехать из него и проехать последовательно на $n-1$ экспрессах, платя за проезд на каждом следующем меньше, чем за проезд на предыдущем. (Путешественник может попадать несколько раз в один и тот же город.)*

Уберем все экспрессы, а затем начнем запускать их обратно по одному в порядке возрастания цены (т.е. первым запустим самый дешевый, вторым – самый дешевый из остальных и т.д.). В каждый момент в каждом городе будем писать максимальное количество экспрессов, на которых можно последовательно проехать, начав из этого города, так, чтобы цены проезда монотонно убывали.

В начальный момент все числа в городах равны нулю. Пусть в некоторый момент мы вводим экспресс, соединяющий города A и B, в которых до этого были написаны числа a и b соответственно. После введения нового экспресса в A будет число, не меньшее $b+1$ (ибо теперь из A можно проехать новым экспрессом в B, а затем по маршруту длины b, начинавшемуся из B). Аналогично, в B будет написано число, не меньшее $a+1$. Поэтому сумма чисел в A и B увеличится хотя бы на 2, а числа в остальных городах не уменьшатся. Значит, и сумма всех чисел в городах увеличится хотя бы на 2.

Таким образом, когда все $n(n-1)/2$ экспрессов будут введены, сумма чисел в городах станет не меньше чем $2\cdot n(n-1)/2 = n(n-1)$. Значит, хотя бы в одном городе будет число, не меньшее $n-1$. Это и означает наличие требуемого маршрута из этого города.

Заметим, что при любом четном n можно построить пример, показывающий, что монотонного маршрута из n экспрессов может и не существовать. Приведенное в решении рассуждение работает и в том случае, когда лишь некоторые r пар городов соединены двусторонними экспрессами. В этом случае найдется монотонный маршрут из $\left\lceil \frac{2r}{n} \right\rceil$ экспрессов.

И.Богданов

М2363. *Исходно на доске написаны многочлены x^3-3x^2+5 и x^2-4x. Если на доске уже написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, разрешается дописать на нее многочлены $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ и $cf(x)$, где c – произвольная (не обязательно целая) константа. Может ли на доске после нескольких операций появиться многочлен вида x^n-1 (при натуральном n)?*

Ответ: не может.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – два многочлена и для некоторой точки x_0 выполняются равенства $f'(x_0)=0$ и $g'(x_0)=0$. Тогда, очевидно, $(f\pm g)'(x_0)=0$ и $cf'(x_0)=0$. Также $(fg)'(x_0)=f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0)=0$. Наконец, если $h(x)$ – многочлен, то $h(g(x_0))'=h'(g(x_0))g'(x_0)=0$. Таким образом, если у исходных многочленов в некоторой точке производные обращаются в ноль, то и после разрешенных условием операций также может получиться лишь многочлен, производная которого обращается в ноль в этой точке.

Заметим, что производные обоих исходных многочленов обращаются в ноль при $x=2$. Действительно, $(x^2-4x)'=2x-4=0$ при $x=2$ и $(x^3-3x^2+5)'=3x^2-6x=0$ при $x=2$. Однако $(x^n-1)'=nx^{n-1}=n\cdot 2^{n-1}\neq 0$ при $x=2$. Поэтому многочлен вида x^n-1 получить нельзя.

К.Тыщук

М2364*. *Двое игроков играют в карточную игру. У них есть колода из n попарно различных карт. Про любые две карты из колоды известно, какая из них бьет другую (при этом если A бьет B, а B бьет C, то может оказаться, что C бьет A). Колода распределена между игроками произвольным образом. На каждом ходу игроки открывают по верхней карте из своих колод, и тот, чья карта бьет карту другого игрока, берет обе карты и кладет их в самый низ своей колоды в произвольном порядке по своему усмотрению. Докажите, что при любой исходной раздаче игроки могут, зная расположение карт, договориться и действовать так, чтобы один из игроков остался без карт.*

Выпишем все возможные ситуации, которые могут встретиться в игре (т.е. все возможные пары колод у участников). Назовем ситуацию *финальной*, если все карты у одного игрока; *критической*, если у одного из игроков ровно одна карта; и *регулярной*, если у обоих игроков хотя бы по две карты. Проведем стрелку от каждой ситуации к ситуациям, которые могут из нее получиться после одного хода. Тогда из любой нефинальной ситуации ведут две стрелки, а из любой финальной – ноль. Нам надо доказать, что из каждой нефинальной ситуации по стрелкам можно дойти до финальной.

Выясним, сколько стрелок ведут в каждую ситуацию. Предположим, что она получилась в результате какого-то хода, в котором карты взял первый игрок. Тогда у него оказалось хотя бы две карты, которые лежат в конце колоды; при этом известно, что одна из них – a – бьет другую – b. Значит, в этом случае карта a была у первого игрока, а карта b – у второго, т.е. предыдущая ситуация восстанавливается однозначно. Итак, если наша ситуация регулярна, то на предыдущем ходе карты мог получить любой из двух игроков и в каждом из этих случаев предыдущая ситуация восстанавливается однозначно. Значит, в каждую регулярную ситуацию ведут ровно две стрелки. Аналогично, в каждую нерегулярную ситуацию ведет ровно одна стрелка.

Предположим, что из некоторой ситуации S нельзя попасть в финальную. Назовем ситуацию *достижимой*, если в нее можно добраться из S. Из каждой достижимой ситуации ведут две стрелки в достижимые. С другой стороны, в каждую достижимую ситуацию ведут не более двух стрелок из достижимых. Это возможно только в том случае, если в каждую достижимую ситуацию ведут ровно по две стрелки из достижимых. Из этого, в частности, следует, что все достижимые ситуации регулярны. Более того, поскольку в каждую ситуацию ведут не более двух стрелок, получаем, что все стрелки, входящие в достижимые ситуации, выходят также из достижимых.

Пусть в ситуации S у первого игрока $k > 1$ карт. Тогда в одной из двух ситуаций, из которых ведут стрелки в S, у первого игрока $k-1$ карта – назовем эту ситуацию S_1; по показанному выше, она достижима. Аналогично, если $k-1>1$, то в одной из двух ситуаций, из которых ведут стрелки в S_1, у первого игрока $k-2$ карты; назовем ее S_2 и продолжим рассуждения. В итоге мы получим цепочку из достижимых ситуаций $S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}$, причем в S_{k-1} у первого игрока одна карта, т.е. она критическая, и в нее входит только одна стрелка. Но в каждую достижимую ситуацию должно входить две стрелки – противоречие.

И.Богданов, Е.Лакштанов

М2365. *Пусть R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC соответственно, а m_a и h_a – длины, соответственно, медианы и высоты, проведенных из вершины A. Докажите, что* $\frac{R}{r} \geq \frac{2m_a}{h_a}$.

В авторском решении неравенство сводилось к неравенству относительно величин $x = b+c-a$, $y = c+a-b$, $z = a+b-c$, где a, b, c – длины сторон треугольника. Получившееся неравенство доказывалось при помощи весьма изобретательных выкладок. Другой подход к решению предложил Валерий Анатольевич Сендеров. Мы приведем здесь его решение. Пусть $\angle BAC = {}^\circ$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ и, для определенности, $\beta \leq \gamma$. Зафиксируем R и угол $^\circ$, который лежит напротив стороны a. Тем самым зафиксирована и сама сторона: $a = 2R\sin{}^\circ$. Также оказывается фиксированной сумма углов β и γ, равная $\varphi = \pi - \alpha$. Заметим, что

$$h_a = b\sin\gamma = 2R\sin\beta\sin\gamma = 8R\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Воспользовавшись известным равенством $r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, преобразуем данное неравенство $\frac{R}{r} \geq \frac{2m_a}{h_a}$ к виду

$$R\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \geq m_a \sin\frac{{}^\circ}{2}. \qquad (1)$$

Домножим неравенство (1) на 2, возведем в квадрат и используем следующие равенства:

$$4\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2} = (1+\cos\beta)(1+\cos\gamma) = 1+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\beta\cos\gamma,$$

$$4m_a^2 = 2\left(b^2+c^2\right) - a^2 = 2\left(a^2 + 2bc\cos{}^\circ\right) - a^2 = 4bc\cos{}^\circ + a^2 = 16R^2\sin\beta\sin\gamma\cos{}^\circ + a^2.$$

Получим

$$R^2(1+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\beta\cos\gamma) \geq \left(16R^2\sin\beta\sin\gamma\cos{}^\circ + a^2\right)\sin^2\frac{{}^\circ}{2}. \qquad (2)$$

Положим

$$t = \cos\frac{\varphi - 2\beta}{2} = \cos\frac{\gamma-\beta}{2}.$$

Тогда

$$2\sin\beta\sin\gamma = \cos(\gamma-\beta) - \cos(\beta+\gamma) = 2t^2 - 1 - \cos\varphi,$$

$$2\cos\beta\cos\gamma = \cos(\gamma-\beta) + \cos(\beta+\gamma) = 2t^2 - 1 + \cos\varphi,$$

$$\cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2} = 2\cos\frac{\varphi}{2}t.$$

Это означает, что неравенство (2) имеет вид

$$At^2 + Bt + C \geq 0, \qquad (3)$$

где A, B, C – некоторые постоянные, причем $B = 2R^2\cos\frac{\varphi}{2} \geq 0$. Нам нужно доказать его для $t \in \left(\cos\frac{\varphi}{2}; 1\right]$ (β принимает значения от 0 до $\frac{\varphi}{2}$). Для этого неравенство (3) достаточно проверить лишь в концах интервала. Действительно, при $A \leq 0$ это ясно, поскольку функция $f(t) = At^2 + Bt + C$ выпукла вниз, а при $A > 0$, в силу $B \geq 0$, абсцисса вершины параболы

$y = f(t)$ не больше нуля, поэтому $f(t)$ монотонно возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Случай $t = \cos\frac{\varphi}{2}$ соответствует равенству $\beta = 0$. Удобее проверить (2) (переход между (2) и (3) равносильный!), которое при $\beta = 0$, $\gamma = \varphi$ имеет вид $R^2(2 + 2\cos\varphi) \ge$ $\ge a^2 \sin^2\frac{\circ}{2}$, или, с учетом $1 + \cos\varphi = 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\circ}{2}$, $(2R)^2 \ge a^2$, что верно. Случай $t = 1$ соответствует равенству $\beta = \gamma$. При $\beta = \gamma$ проще проверить данное в условии задачи неравенство. Действительно, имеем $m_a = h_a$, и неравенство принимает вид $\frac{R}{r} \ge 2$, что, как известно, верно.

В.Сендеров

Ф2363. *В полдень по местному географическому времени 21 июня 2014 года выпускники московских школ одновременно выпускают из рук шарики, надутые гелием. Ветра нет, и шарики диаметром D = 20 см поднимаются вверх со скоростью v = 1 м/с. С какой скоростью и движутся по горизонтальной поверхности земли тени шариков? На какую высоту h должны подняться шарики, чтобы их тени на земле пропали? Широта Москвы $\varphi = 56\,°$ с. ш.*
Указание. Ось собственного вращения Земли и перпендикуляр к плоскости ее орбиты при вращении вокруг Солнца составляют между собой угол $° = 23{,}44°$. Угловой размер Солнца $\beta = 0{,}5°$.

В этот день в полдень Солнце в северном полушарии поднимается выше всего. Угол между направлением на

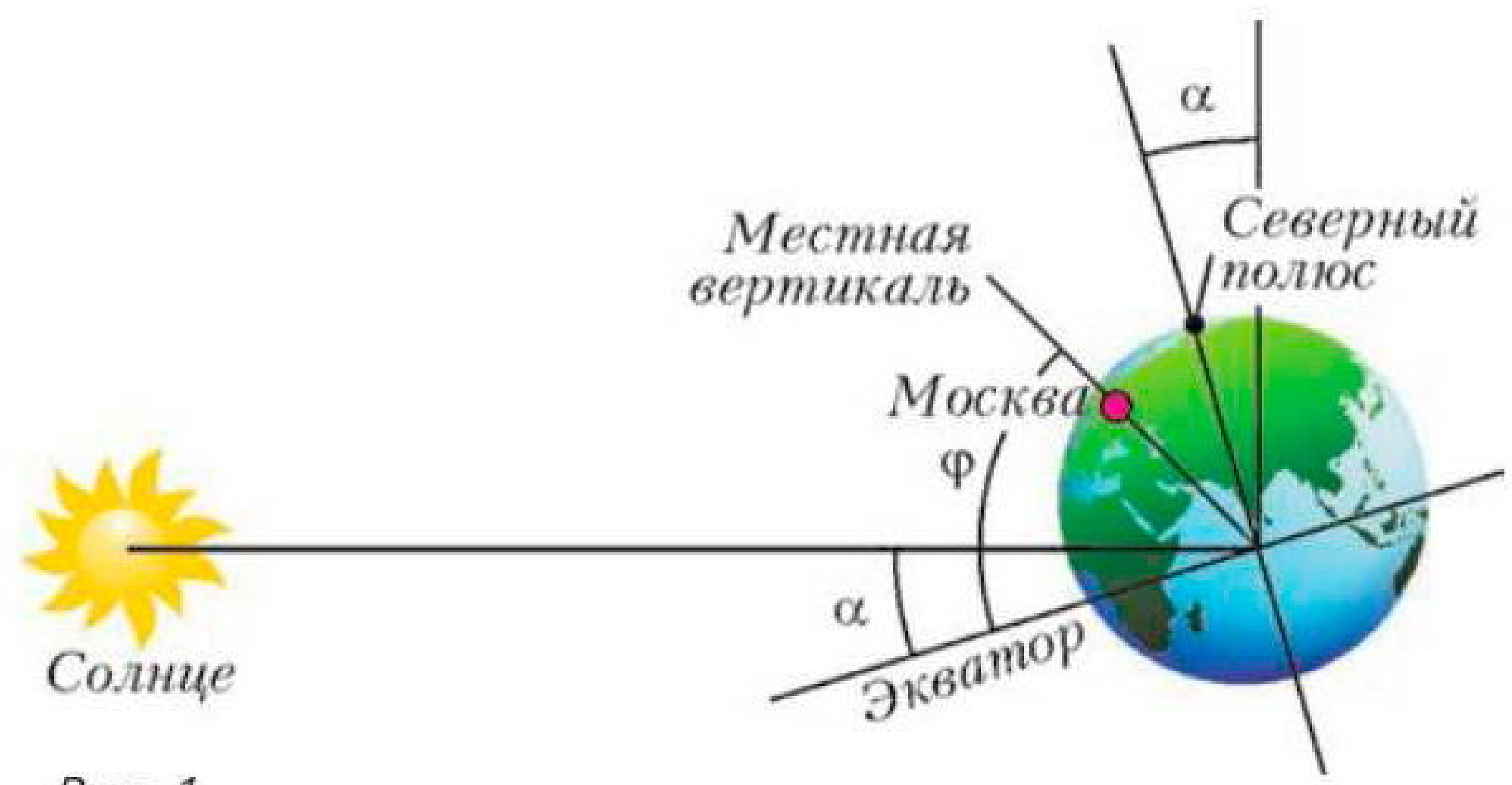


Рис. 1

Солнце и местной вертикалью в полдень равен (рис.1)

$$\gamma = \varphi - ° .$$

Следовательно, скорость движения тени шарика по земле равна

$$u = v \operatorname{tg}\gamma \approx 0{,}64 \text{ м/с}.$$

Солнце имеет угловой размер β, и когда шарик поднимется достаточно высоко, полная тень сменится неполной, т.е. тень практически пропадет. Высота шарика над поверхностью земли, при которой полной тени шарика в лучах Солнца на земле уже не будет (рис.2), должна быть такой, чтобы

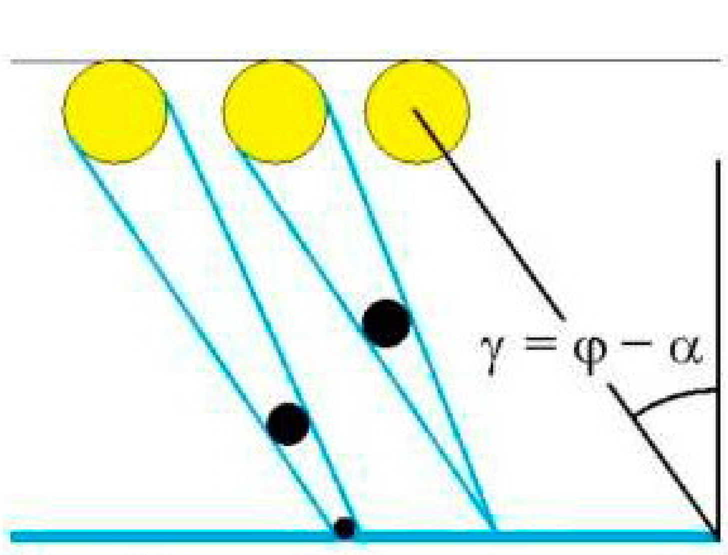


Рис. 2

расстояние от шарика до земли было равно $r = D/\beta$:

$$h = \frac{D}{\beta}\cos\gamma \approx 19{,}3 \text{ м}.$$

А.Простов

Ф2364. *Трубка с гладкими внутренними жесткими стенками открыта с двух концов и имеет длину L. Она вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из ее концов, с постоянной угловой скоростью ω против часовой стрелки, если смотреть сверху. Ось симметрии трубки всегда горизонтальна. На оси вращения внутри трубки закреплена одним концом нить длиной L/2, а к другому концу прикреплен маленький шарик, диаметр которого только немного меньше внутреннего диаметра трубки $d \ll L$. В тот момент, когда нить оказалась вытянутой вдоль меридиана и шарик был ближе всего к северу, нить порвалась. Через какое время и в каком направлении шарик вылетит из трубки? Какова по величине скорость шарика в этот момент?*

Если «пересесть» в систему отсчета, вращающуюся вместе с трубкой, то для описания движения шарика с помощью законов Ньютона нужно ввести в дополнение к реальным силам еще две силы: центробежную силу инерции и силу Кориолиса. Сила Кориолиса будет компенсироваться силами, действующими на шарик со стороны стенок трубки, поэтому в выбранной неинерциальной системе отсчета шарик будет двигаться прямолинейно внутри трубки. Начальная скорость шарика в этой системе равна нулю, сила инерции равна

$$F_{\text{и}} = mR\omega^2,$$

все остальные силы скомпенсированы. Уравнение движения шарика выглядит так:

$$m\frac{d^2R}{dt^2} = mR\omega^2$$

и имеет такое решение:

$$R(t) = A_1 \exp(\omega t) + A_2 \exp(-\omega t).$$

Величины A_1 и A_2 нужно подобрать такими, чтобы в момент разрыва нити скорость шарика была равна нулю, а расстояние до оси составляло $R(0) = L/2$. Это соответствует тому, что $A_1 = A_2 = L/4$. Из трубки шарик вылетит в тот момент времени, когда

$$\frac{L}{4}\left(\exp(\omega t) + \exp(-\omega t)\right) = L.$$

Из этого уравнения найдем промежуток времени между моментом разрыва нити и моментом вылета шарика из трубки:

$$t = \frac{\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)}{\omega}.$$

За это время трубка повернется на угол

$$° = t\omega = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) \approx 1{,}3 \text{ рад} \approx 75{,}5°.$$

Скорость шарика в исходной системе отсчета складывается из двух составляющих: из скорости вдоль оси трубки $v_= = \omega L\sqrt{3}/2$ и из скорости поперек оси трубки $v_\perp = \omega L$. Иными словами, скорость шарика в момент вылета из трубки составляет с мгновенным расположением ее оси угол

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{v_\perp}{v_=} \approx 49{,}1^\circ .$$

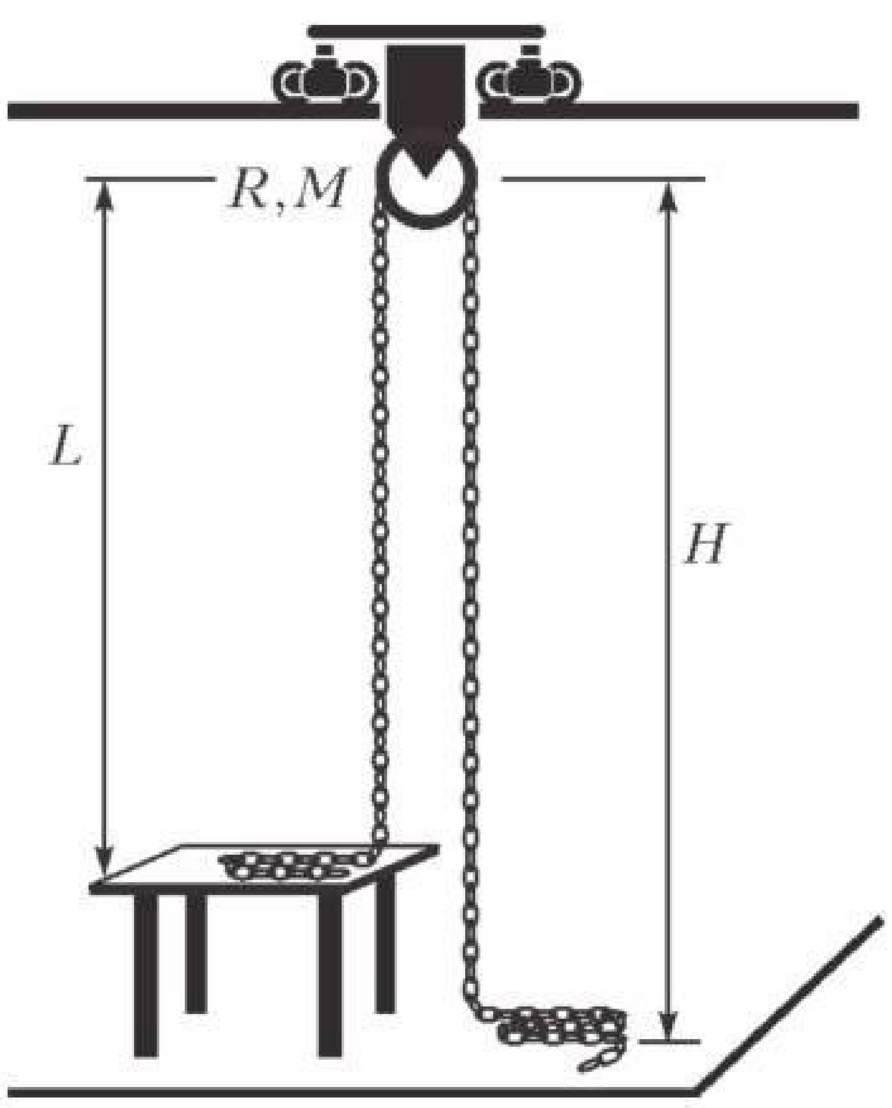
Это означает, что вектор скорости будет направлен под углом $^\circ + \varphi = 124{,}6^\circ$ к направлению на север с поворотом против часовой стрелки. Используя морскую символику, это направление обозначается примерно как WWS.

Величину скорости шарика можно найти по теореме Пифагора:

$$v = \sqrt{v_=^2 + v_\perp^2} = \frac{\omega L\sqrt{7}}{2} .$$

С.Шариков

Ф2365. *Под потолком комнаты закреплен блок радиусом R с неподвижной горизонтальной осью, находящейся на высоте H над полом (см. рисунок). Масса шкива блока M распределена равномерно по его ободу. Трение в оси блока отсутствует. Под блоком на столе высотой H – L находится бухта однородной цепочки с мелкими звеньями, масса единицы длины которой равна ρ. Цепочка перекинута через блок и частично лежит на полу, ее свободные участки вертикальны. Цепочку сначала удерживают, а затем отпускают. Какой будет установившаяся скорость движения цепочки, если бухта на столе еще не закончилась? Как зависит скорость движения цепочки на вертикальных участках от времени? Через какое время после старта скорость цепочки станет равной половине от установившегося значения?*



Будем искать ответы на вопросы в порядке их поступления. Когда скорость движения цепочки уже установилась, на ее вертикальный участок, расположенный ниже уровня стола, действует сумма сил, равная нулю. Значит, на уровне стола сила натяжения цепочки равна $F = \rho g(H - L)$. С такой же по величине силой натянута цепочка и на небольшой высоте над столом. За малое время Δt из бухты вытягивается участок цепочки массой $\Delta m = \rho v \Delta t$, который под действием силы F приобретает импульс $\Delta m v$. Отсюда находим установившую скорость движения цепочки:

$$v_{\text{уст}} = \sqrt{g(H - L)} .$$

Теперь предположим, что скорость еще не установилась, и найдем связь между текущей скоростью движения v и ускорением a. В данный момент масса движущейся части механической системы равна

$$M^* = M + \rho(L + H + \pi R).$$

Там, где из бухты выдергиваются очередные звенья, цепочка натянута с силой $f = \rho v^2$, а разница сил тяжести, действующих на правый и левый вертикальные участки цепочки, равна $F = \rho g(H - L)$. Уравнение движения системы принимает вид

$$F - f = \rho g(H - L) - \rho v^2 = aM^* = a\left(M + \rho(L + H + \pi R)\right),$$

или

$$v_{\text{уст}}^2 - v^2 = \frac{aM^*}{\rho} .$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{\Delta v}{v_{\text{уст}} + v} + \frac{\Delta v}{v_{\text{уст}} - v} = \frac{2\rho v_{\text{уст}}}{M^*}\Delta t$$

и запишем общее решением этого уравнения:

$$\ln\frac{v_{\text{уст}} + v}{v_{\text{уст}} - v} = \frac{2\rho v_{\text{уст}}}{M^*}t + \text{const} .$$

В начальный момент $v(0) = 0$, поэтому $\text{const} = 0$. Отсюда получаем зависимость между скоростью цепочки и временем, прошедшим с момента отпускания цепочки:

$$\frac{v_{\text{уст}} + v_t}{v_{\text{уст}} - v_t} = \exp\left(\frac{2\rho v_{\text{уст}}}{M^*}t\right),$$

$$v_t = v_{\text{уст}}\frac{\exp\left(\frac{2\rho v_{\text{уст}}}{M^*}t\right) - 1}{\exp\left(\frac{2\rho v_{\text{уст}}}{M^*}t\right) + 1} .$$

Чтобы ответить на последний вопрос, подставим в полученное выражение $v_T = v_{\text{уст}}/2$. Получаем

$$T = \frac{M^*\ln 3}{2\rho v_{\text{уст}}} .$$

Ц.Почкин

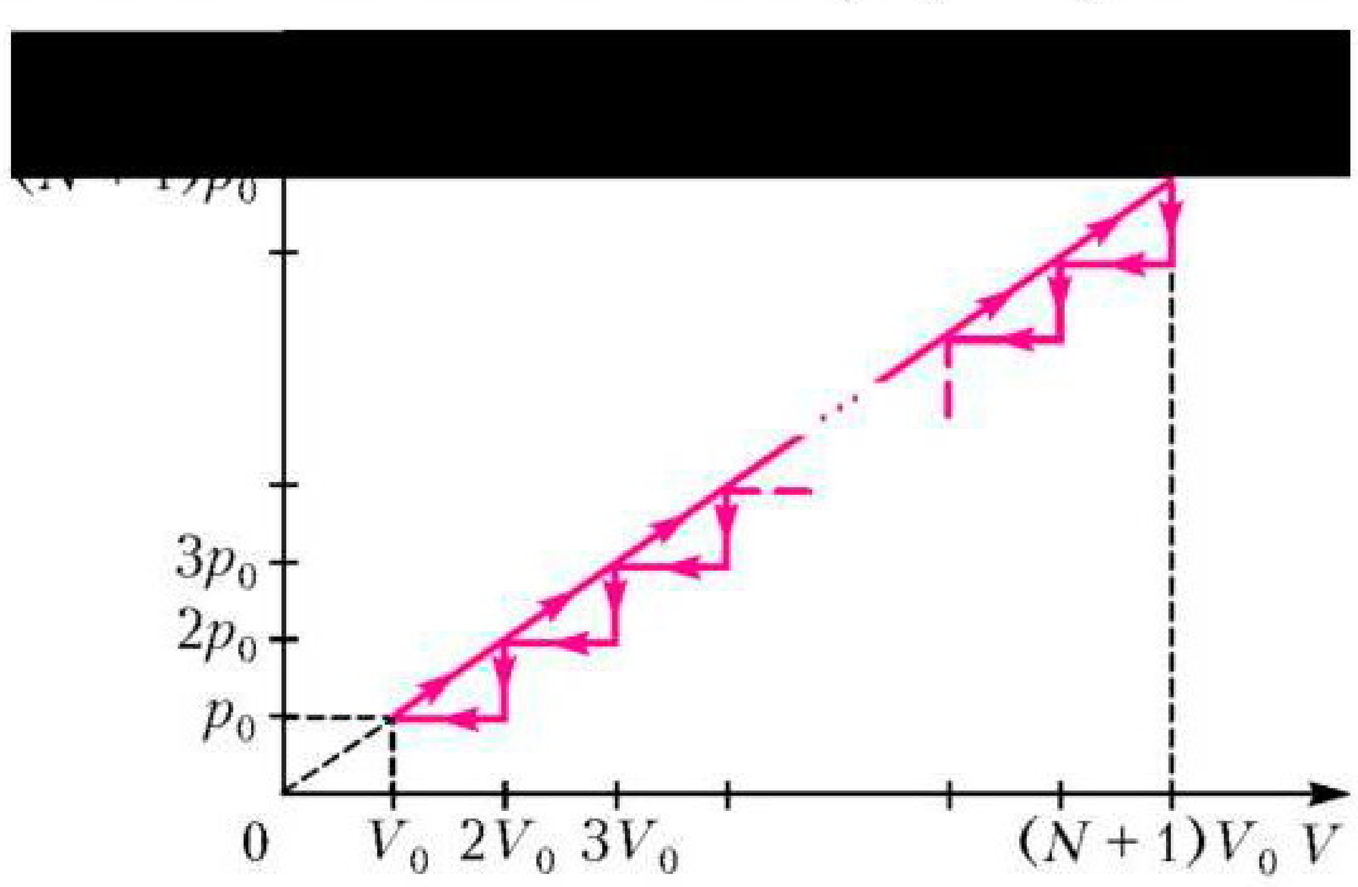
Ф2366. *Скорость звука в воздухе зависит от температуры и от давления. При атмосферном давлении повышение температуры от 273 К до 300 К (на 10%) приводит к увеличению скорости звука от 331 м/с до 347 м/с (примерно на 5%). Чтобы при постоянной температуре 300 К увеличить скорость звука в воздухе на 5%, нужно поднять давление от атмосферного до 7 МПа, т.е. в 70 раз. Объясните причины такого различия.*

При давлениях порядка атмосферного длина свободного пробега λ молекул воздуха, т.е. азота и кислорода, обратно пропорциональна концентрации молекул n и примерно в 300 раз больше диаметров D самих молекул. Ее можно рассчитать по формуле $\lambda = \left(\sqrt{2}\pi n D^2\right)^{-1}$. Поэтому передача возмущений давления от места, где они возникли, в другие места осуществляется со скоростью звука $v_{\text{зв}}$, по порядку величины совпадающей со скоростью теплового движения самих молекул $v_{\text{т}} = \sqrt{RT/\text{M}}$ (здесь M – молярная масса газа). Молекулы можно рассматривать как достаточно жесткие шарики, которые при столкновениях изменяют свои импульсы и энергии. При этом во время столкновения молекул «возмущение» может перемещаться быстрее, чем движутся сами молекулы. Пусть, например, до удара одна молекула двигалась со скоростью u, а другая покоилась. Тогда при лобовом столкновении за короткое время удара Δt центр масс двух молекул переместится на расстояние $u\Delta t/2$, а перемещение возмущения составит $u\Delta t/2 + D$. При этом скорость перемещения возмущения будет равна $u/2 + D/\Delta t$. Кстати, из этой «оценочной» формулы видно, что при достаточно большом времени соударения (т.е. при мягких шариках) скорость распространения звука может не увеличиваться, а уменьшаться.

Резюме: при повышении давления доля пути, пройденного звуком в среде, обусловленная свободным полетом молекул, уменьшается, а доля пути, пройденного звуком по молекулам при их столкновениях, увеличивается. Поскольку при атмосферном давлении первая доля была значительно больше второй доли, увеличение давления сказывается на скорости звука в значительно меньшей степени, чем повышение температуры.

З.Вук

Ф2367. *На рисунке в координатах p–V изображен замкнутый цикл с некоторым количеством идеального одноатомного газа. Сначала график представляет*



собой прямую линию, проходящую через начало координат, а потом он состоит из N одинаковых ступенек. Найдите КПД такого цикла.

Коэффициент полезного действия равен работе, совершенной газом за цикл, деленной на количество теплоты, полученное газом в этом цикле. Работа газа равна

$$A = N\frac{p_0V_0}{2}.$$

Полученное количество теплоты равно

$$Q = A' + \Delta U = \frac{p_0 + (N+1)p_0}{2}NV_0 + \left(\frac{3}{2}(N+1)^2 p_0V_0 - \frac{3}{2}p_0V_0\right) = p_0V_0N(N+2).$$

Следовательно, КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{Np_0V_0/2}{N(N+2)p_0V_0} = \frac{1}{2(N+2)}.$$

Д.Ягнятинский

Ф2368. *Зачерненная с двух сторон золотая пластинка толщиной $d = 10$ мм помещена в вакууме между двумя абсолютно черными плоскостями, температуры которых $T_1 = 0$ °С и $T_2 = 100$ °С. Теплопроводность золота $\lambda = 315$ Вт/(м · К), постоянная Стефана–Больцмана $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт · м$^{-2}$ · К$^{-4}$. Найдите установившиеся со временем температуры T_3 и T_4 на сторонах золотой пластинки.*

Тепловой поток на всех участках – между горячим телом и пластинкой, между пластинкой и холодным телом, а также внутри самой пластинки – в установившемся режиме одинаков. По установленному экспериментально Стефаном и обоснованному теоретически Больцманом закону излучения нагретых абсолютно черных тел, с плоской поверхности нагретого тела, имеющего абсолютную температуру T, излучается тепловая мощность W, пропорциональная площади поверхности S и четвертой степени температуры T. Коэффициентом пропорциональности является постоянная Стефана–Больцмана σ. Таким образом,

$$W = \sigma ST^4.$$

Черное тело поглощает все падающее на его поверхность излучение и одновременно с той же поверхности излучает в соответствии с установленным законом. Температура в условии задачи дана в градусах Цельсия, ее нужно перевести в шкалу Кельвина. Итак, выполняется такая цепочка равенств:

$$\sigma(273 + T_2)^4 - \sigma(273 + T_3)^4 = \sigma(273 + T_4)^4 - \sigma(273 + T_1)^4 = \frac{\lambda(T_3 - T_4)}{d}.$$

Золото очень хорошо проводит тепло, поэтому разумно предположить, что температуры T_3 и T_4 мало отличаются друг от друга. Тогда

$$\sigma(273 + T_2)^4 + \sigma(273 + T_1)^4 \approx 2\sigma(273 + T_{3,4})^4.$$

Отсюда получаем

$$T_{3,4} \approx 61\ \text{°C} \ \text{и} \ T_3 - T_4 \approx 12{,}44 \cdot 10^{-3}\ \text{°C}.$$

Таким образом, предположение о том, что температуры поверхностей золотой пластинки близки друг к другу, справедливо.

С.Дмитриев

Ф2369. *Радиолюбитель Вася заметил, что постоянно включенный паяльник через несколько минут работы перегревается – его температура поднимается до $t_1 = +450$ °С, а в комнате температура равна $t_0 = +20$ °С. Вася сделал устройство, которое периодически подключает паяльник к электрической сети и отключает его. Период работы устройства $T = 5$ с, из них τ секунд паяльник подключен, а $T - \tau$ секунд отключен. До какой температуры прогреется паяльник? Как должно работать это устройство, чтобы паяльник прогревался до $t_2 = +250$ °С – самой приемлемой температуры для пайки, т.е. чему равно τ? Тепловые потери в воздух пропорциональны разнице температур корпуса паяльника и воздуха.*

Время установления стационарной температуры при фиксированной мощности, потребляемой паяльником, значительно больше периода работы сконструированного Васей устройства. Разность температур корпуса паяльника и окружающей среды пропорциональна средней мощности, потребляемой паяльником от сети. Это условие можно записать в виде такого соотношения:

$$W\frac{\tau}{T} = k\left(t - t_0\right).$$

Здесь W – мощность, потребляемая подключенным паяльником от сети, k – коэффициент пропорциональности. При $\tau = T$ разность температур равна $430\,°\mathrm{C}$, следовательно, $W/k = 430\,°\mathrm{C}$, и формула для определения температуры паяльника при произвольном τ будет такой:

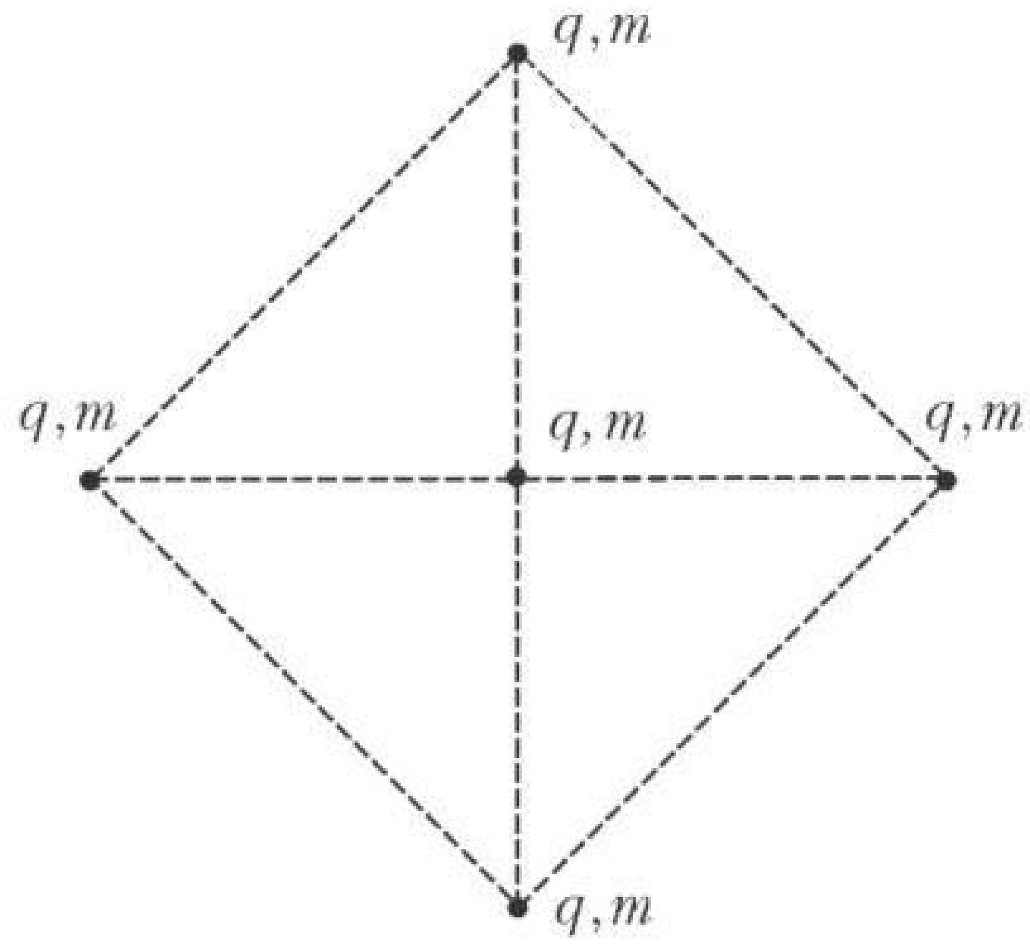
$$t = t_0 + \frac{W}{k}\frac{\tau}{T} = 20 + 430\frac{\tau}{T}.$$

Чтобы температура была равной $250\,°\mathrm{C}$, разность температур должна быть $230\,°\mathrm{C}$. Отсюда находим

$$\tau = \frac{230\,°\mathrm{C}\cdot 5\ \mathrm{c}}{430\,°\mathrm{C}} \approx 2{,}7\ \mathrm{c}.$$

В.Паяльников

Ф2370. *На рисунке представлена схема расположения точечных положительных зарядов q, масса каждого из которых m. Длина стороны квадрата равна a. Центральный заряд удерживают, а четыре угловых одновременно отпускают. Найдите скорость каждого из этих зарядов на бесконечности.*



Найдем потенциальную энергию взаимодействия зарядов. Будем считать ее так. Пусть сначала у нас были верхний и нижний заряды с энергией взаимодействия

$$W_1 = \frac{kq^2}{a\sqrt{2}}.$$

Затем мы поднесли из бесконечности левый и правый заряды. При этом потенциальная энергия увеличилась на величину

$$W_2 = 4\frac{kq^2}{a} + \frac{kq^2}{a\sqrt{2}},$$

где первое слагаемое – это энергия взаимодействия боковых зарядов с верхним и нижним, а второе слагаемое – энергия взаимодействия левого и правого зарядов между собой. Далее необходимо принести из бесконечности центральный заряд. Энергия при этом увеличится на

$$W_3 = 4\frac{kq^2}{a}\sqrt{2}.$$

В итоге суммарная потенциальная энергия взаимодействия зарядов будет равна

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{kq^2}{a}\left(4 + 5\sqrt{2}\right).$$

Из соображений симметрии следует, что каждый из угловых зарядов во время движения будет иметь одну и ту же скорость. При бесконечном разлете потенциальная энергия W перейдет в кинетическую энергию зарядов, которая, очевидно, равна

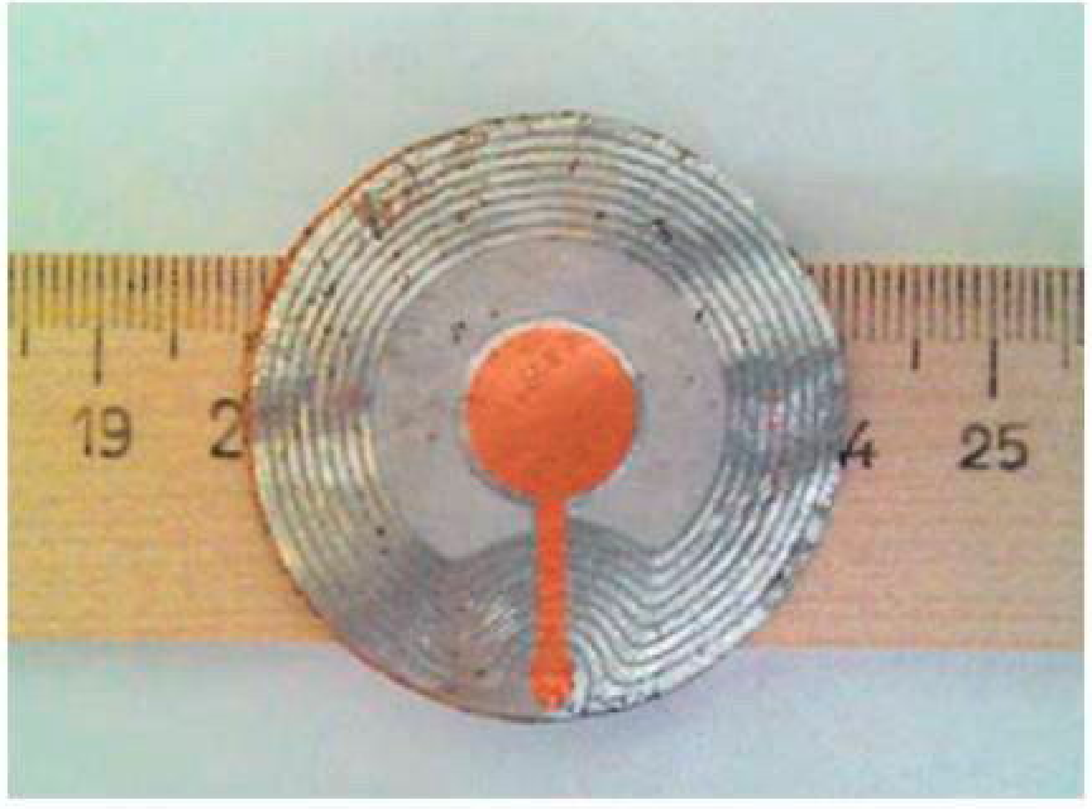
$$E_{\text{к}} = 4\frac{mv_\infty^2}{2} = 2mv_\infty^2.$$

Приравнивая кинетическую и потенциальную энергии, получаем

$$2mv_\infty^2 = \frac{kq^2}{a}\left(4 + 5\sqrt{2}\right), \text{ и } v_\infty = q\sqrt{\frac{k}{2ma}\left(4 + 5\sqrt{2}\right)}.$$

Д.Ягнятинский

Ф2371. *На фотографии (см. рисунок) изображена наклейка, которую используют для предотвращения выноса из магазина неоплаченного товара, лежащая на линейке с миллиметровыми делениями. Наклейка*



представляет собой колебательный контур, состоящий из конденсатора и катушки индуктивности. Частота электромагнитных колебаний, на которой эта наклейка резонирует, равна 8,2 МГц. Толщина зазора между пластинами конденсатора 0,05 мм. Оцените величину диэлектрической проницаемости материала, которым заполнен зазор. Расчет индуктивности спиральной катушки можно провести с помощью «калькулятора», расположенного в интернете по адресу:
http://coil32.narod.ru/calc/flat_spiral_coil.html

Резонансная частота колебаний известна из условия и связана с емкостью конденсатора и индуктивностью катушки формулой

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Судя по приведенной картинке, роль индуктивности играет спиральная металлическая лента, а роль электрического конденсатора играют две проводящие круглые пластины – с металлическим блеском и оранжевая. Толщина зазора между пластинами конденсатора задана в условии: $h = 0{,}05$ мм. Площадь S пластин конденсатора можно вычислить. Диаметр металлического кружка верхней пластины, равен примерно 1,1 см, следовательно, $S \approx 0{,}95\ \text{см}^2$. Изолятор, расположенный между пластинами конденсатора, это диэлектрик с неизвестной диэлектрической проницаемостью ε. Оценим электрическую емкость конденсатора:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S}{h} = \varepsilon \cdot 17\ \text{пФ}.$$

Гораздо сложнее оценить индуктивность нашего колебательного контура, состоящего из 8 витков. Согласно фотографии, внутренний диаметр витков $D_1 = 25$ мм, характерный поперечный размер провода $d = 0{,}7$ мм, расстояние между соседними витками $l = 0{,}3$ мм, диаметр внешнего витка $D_2 = 40$ мм. Воспользуемся услугами интернета. По указанному в условии адресу располагается программа расчета катушки индуктивностью L. Она по заданным параметрам L, D_1, d, l позволяет рассчитать число витков и, соответственно, внешний диаметр D_2 такой катушки. Нам размеры известны, поэтому программа расчета будет использоваться не в прямом, а в обратном направлении. С ее помощью получим

$$L = 3\ \text{мкГн}.$$

Тогда

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L} = 126\ \text{пФ}, \text{ и } \varepsilon = \frac{126\ \text{пФ}}{17\ \text{пФ}} = 7{,}4.$$

А.Неизвестный

Ф2372. *Тонкая круглая собирающая линза диаметром 10 см создает на экране, находящемся от нее на расстоянии 1 м, четкое изображение Солнца. Линзу распилили по диаметру пополам, верхнюю половинку*

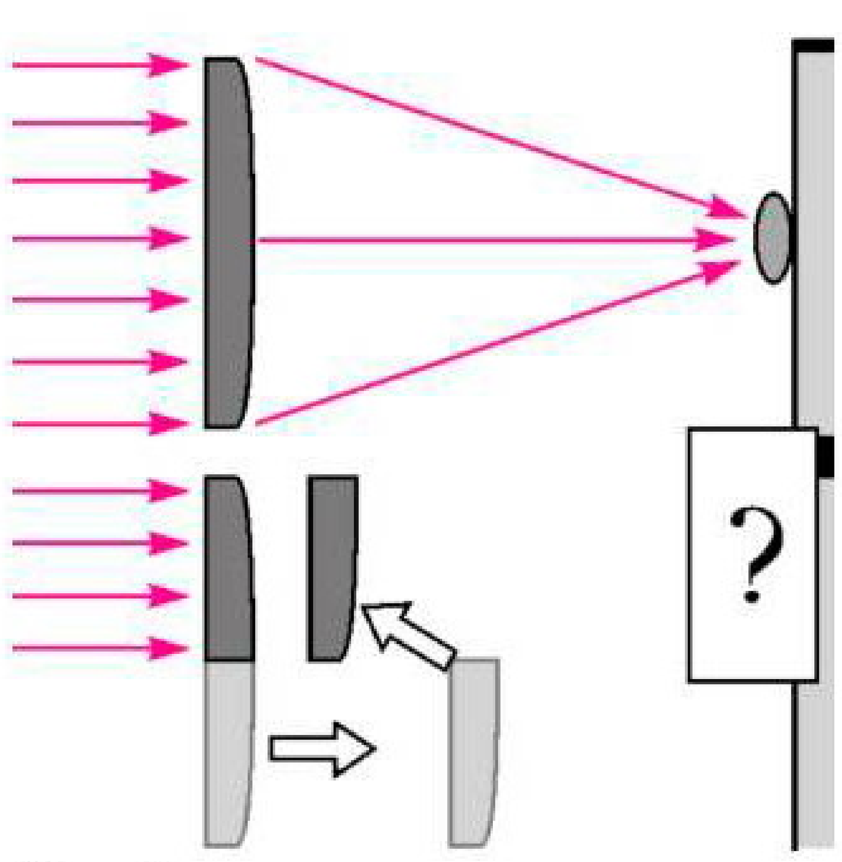


Рис. 1

оставили на месте, а нижнюю половинку переместили поступательно так, как показано на рисунке 1. Что теперь будет видно на экране?

Фокусное расстояние круглой линзы равно 1 м. Резкое (четкое) изображение Солнца на экране до разрезания линзы имело диаметр, равный примерно $1\ \text{м} \cdot \alpha = 8{,}7$ мм, где $\circ = 0{,}5^\circ$ – угловой размер Солнца, рассматриваемого с Земли. После того как линзу разрезали и изменили положение нижней ее части, условия прохождения света через линзу изменились. На рисунке 2 показаны частично перекрывающие друг друга половинки распиленной линзы. Внешний контур половинки, положение которой не изменилось, показан синей линией, а внешний контур другой половинки, которую передвинули, показан красной линией. Направление взгляда на половинки линзы совпадает с оптической осью прежней (целой) линзы.

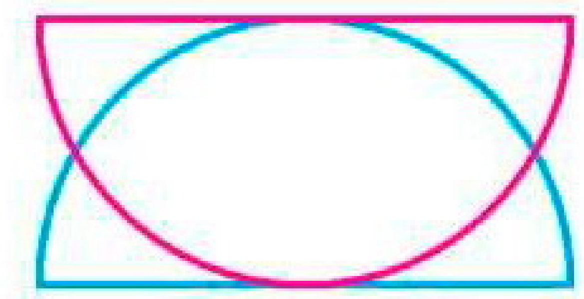


Рис. 2

На некоторых участках свет Солнца теперь проходит только через одну из половинок разрезанной линзы, а на среднем участке, на котором половинки линзы перекрывают друг друга, свет проходит через обе половинки линзы. Свет, проходящий только через участки той половинки линзы, которая осталась на месте, будет формировать на экране четкое изображение Солнца (изображение *1* на рисунке 3). Оно находится ровно на том

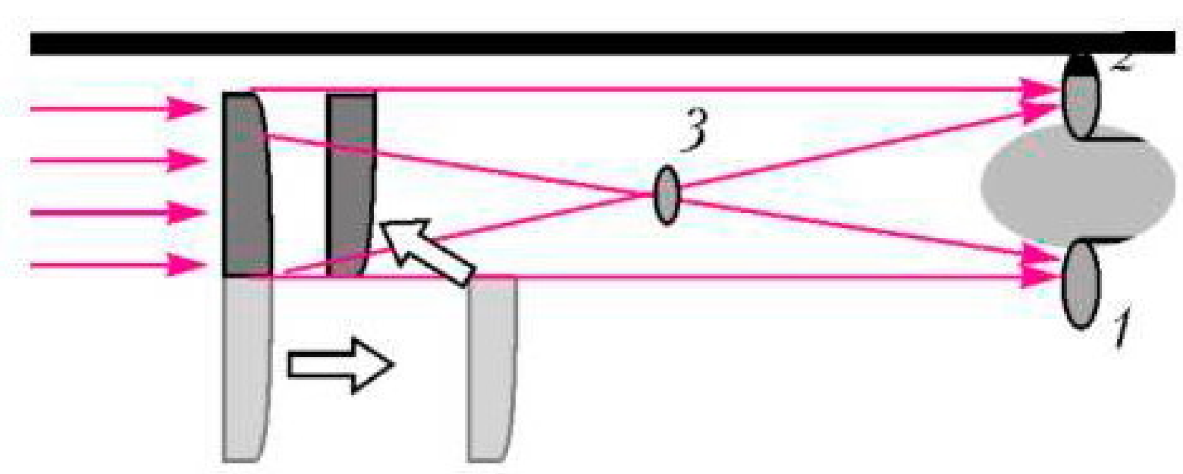


Рис. 3

же месте, где прежде находилось изображение, создаваемое целой линзой, только яркость этого изображения будет меньше. Свет, проходящий только через стекло другой половинки распиленной линзы, будет формировать второе четкое изображение (изображение *2*) Солнца на экране. Это изображение сдвинуто вверх по отношению к первому изображению на расстояние, примерно равное тому, на которое эта половинка линзы была перемещена, т.е. на $R = 5$ см. Оптические силы линз на участке, где они перекрываются, складываются, поэтому свет, прошедший через обе половинки распиленной линзы, сформирует изображение Солнца (изображение *3*), которое будет находиться посередине между экраном и составной линзой. Его диаметр $d \approx 8{,}7\ \text{мм}/2 = 4{,}35$ мм. Таким образом, на экране не будет четко сфокусированного изображения Солнца, а будет светлое пятно (нерезкое изображение Солнца) с поперечными размерами примерно

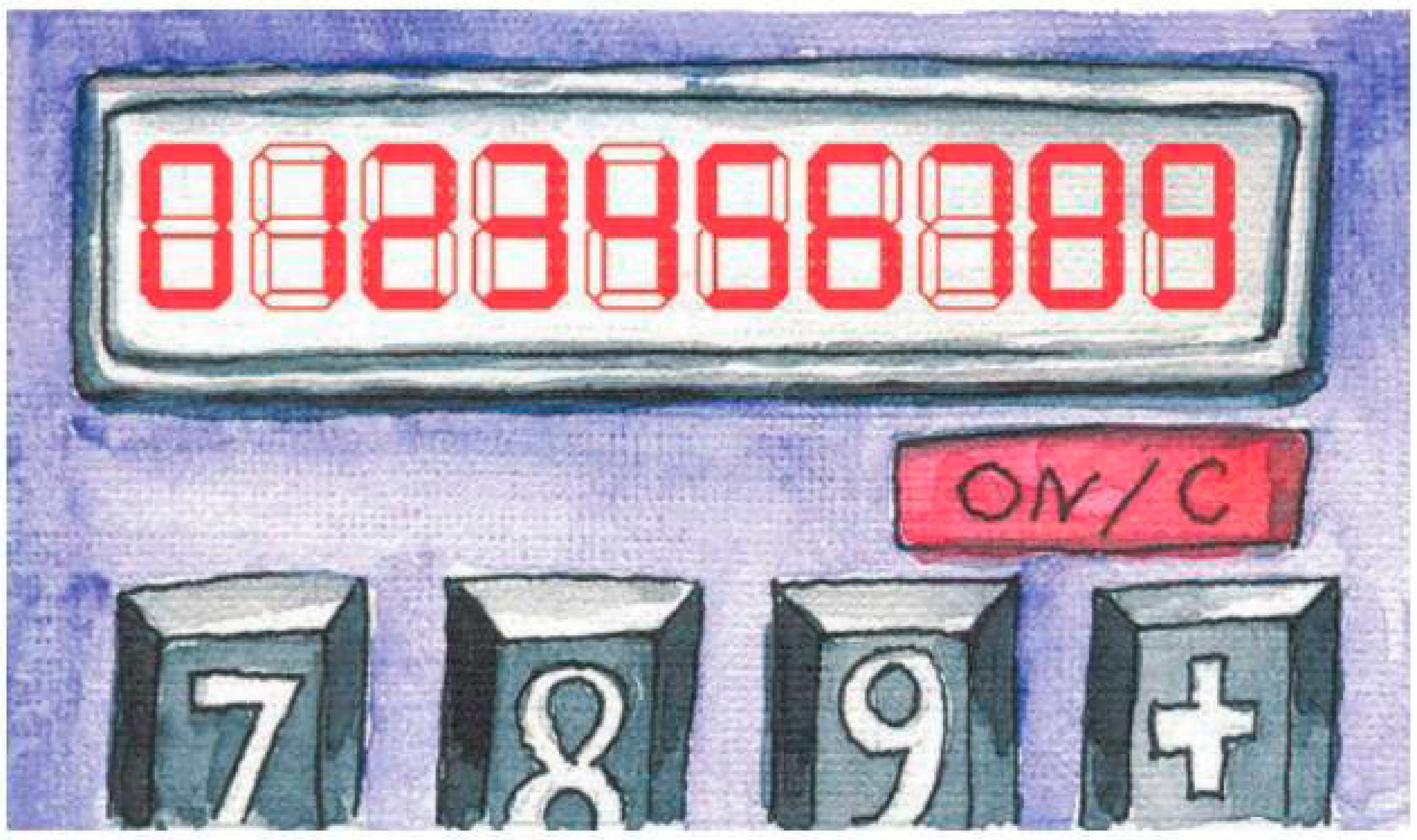
$$(R + d)\left(R\sqrt{3} + d\right) \approx 5{,}4\ \text{см} \times 9\ \text{см},$$

располагающееся между двумя резкими изображениями Солнца. Суммарная яркость всех вместе светлых пятен на экране меньше, чем яркость одного прежнего изображения Солнца.

С.Варламов

Задачи

1. На простейшем калькуляторе цифры обычно изображаются так:



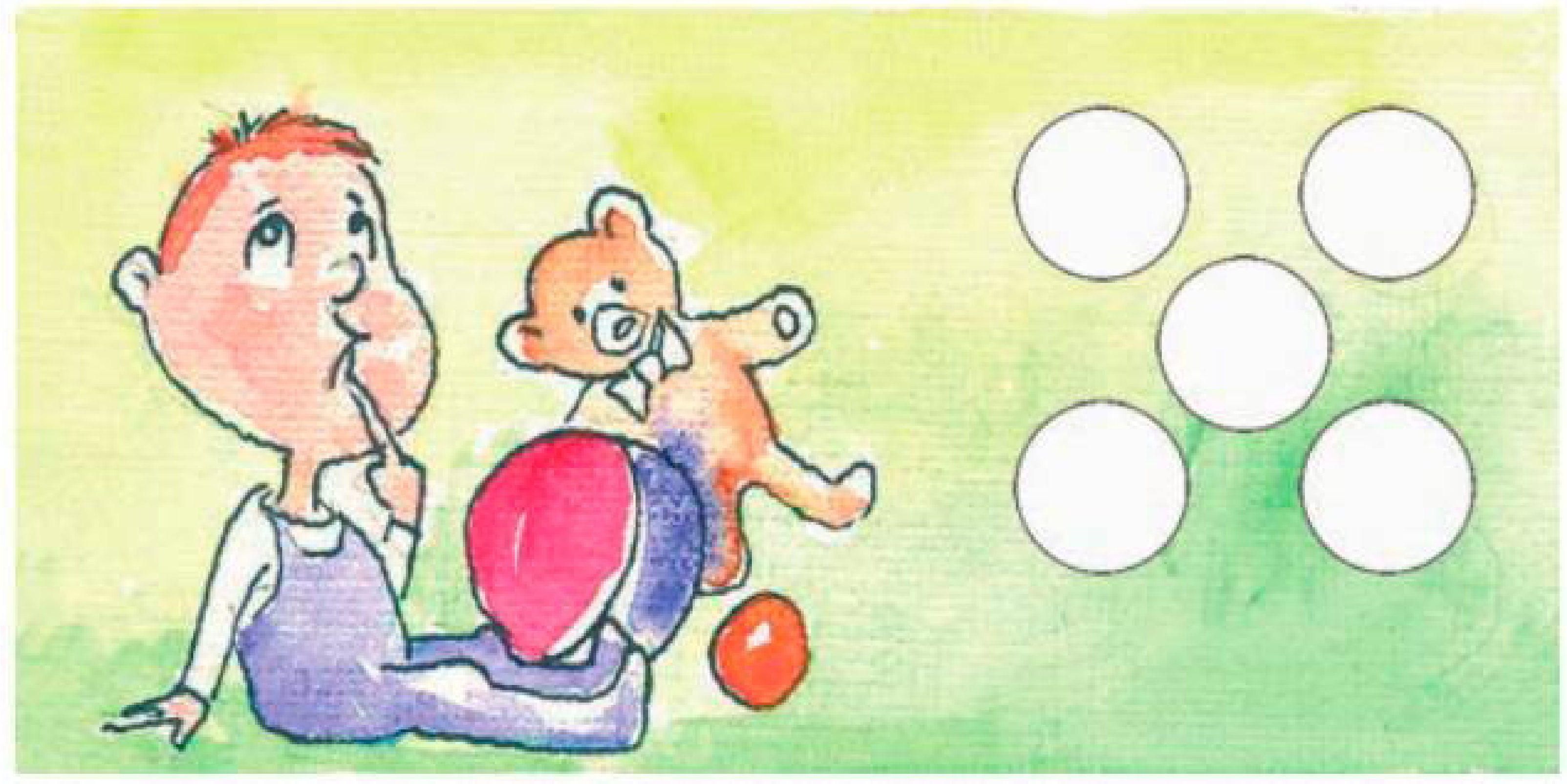
Какое наибольшее а) восьмизначное; б) семизначное число можно набрать на этом калькуляторе, которое будет выглядеть точно так же, если калькулятор повернуть на 180° (т.е. «вверх ногами»)?

Л.Штейнгарц

2. Математик с пятью детьми зашел в пиццерию.
Маша: Мне с помидорами и чтоб без колбасы.
Ваня: А мне с грибами.

Даша: Я буду без помидоров.
Никита: А я с помидорами. Но без грибов!
Игорь: И я без грибов. Зато с колбасой!
Папа: Да, с такими привередами одной пиццей явно не обойдешься...
Сможет ли математик заказать две пиццы и угостить каждого ребенка такой, какую тот просил, или все же придется три пиццы заказывать?

Е.Бакаев

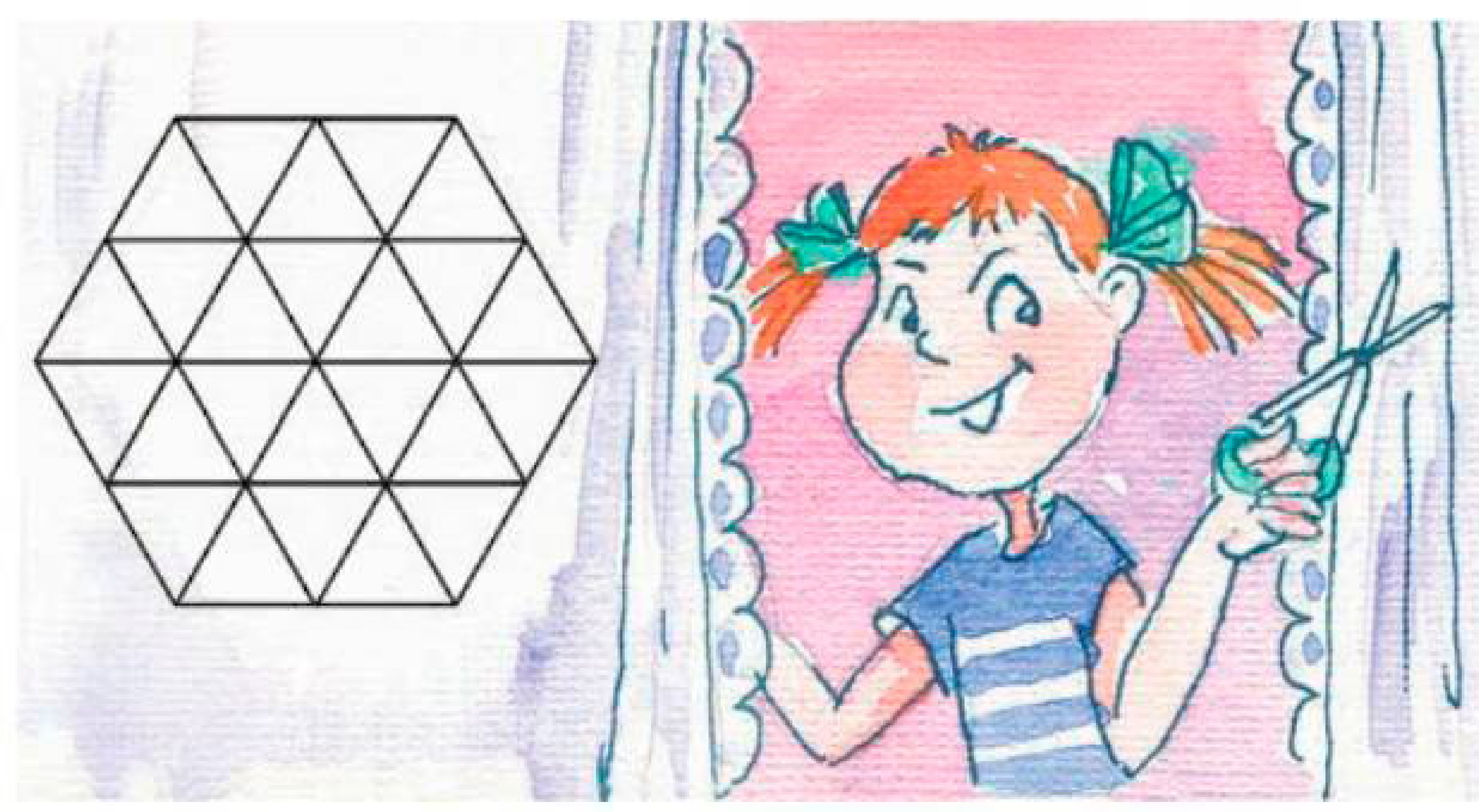


3. а) Впишите в каждый кружочек на рисунке по цифре, отличной от нуля, так, чтобы сумма цифр в двух верхних кружочках была в 7 раз меньше суммы остальных цифр, а сумма цифр в двух левых кружочках – в 5 раз меньше суммы остальных цифр.
б) Докажите, что задача имеет единственное решение.

А. Шаповалов

4. Разрежьте изображенный на рисунке шестиугольник на четыре одинаковые фигуры. Резать можно только по линиям сетки.

Е. Бакаев



5. Обезьяна становится счастливой, когда съедает три разных фрукта. Какое наибольшее количество обезьян можно осчастливить, имея 20 груш, 30 бананов, 40 персиков и 50 мандаринов? Обоснуйте свой ответ.

А. Шаповалов

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Задачи 2 – 5 предлагались в этом году на XXVI Математическом празднике.

Ребусы про «Квант»

Л.ШТЕЙНГАРЦ

Предлагаем вам необычную подборку задач-ребусов – во всех присутствует название нашего журнала. Как и всегда, в каждом ребусе надо заменить каждую букву некоторой цифрой (разные буквы – разными цифрами) так, чтобы ребус превратился в верное равенство. Если в задаче есть дополнительные условия, они оговариваются отдельно.

Некоторые из ребусов довольно трудны и потребуют немало усилий для своего решения. Ребусы подобраны так, что в каждом есть только один ответ. Попробуйте найти эти ответы, а если интересно, то и доказать их единственность.

Желаем удачи!

1. Решите ребус при условии, что число КВАНТ простое:

$$\text{КВА} \times \text{Н} \times \text{Т} = 2015$$

2. $\text{К}^{\text{В}} + \text{АНТ} = 2015$

3. $\text{КВАН} : \text{Т} = 2015$

4. Решите ребус при условии, что число КВАНТ делится на 4:

$$\begin{array}{r} \text{ФАКТ} \\ +\ \text{ФАКТ} \\ \text{ФАКТ} \\ \hline \text{КВАНТ} \end{array}$$

5. Решите ребус при условии, что число КВАНТ
а) четное;
б) нечетное:

$$\text{К}^{\text{В}} = \text{АНТ}$$

6. Решите ребус при условии, что число КВАНТ простое:

$$\text{МАТЕМ} + \text{АТИКА} = \text{КВАНТ}$$

7. Решите ребус при условии, что число КВАНТ делится на 4:

$$\text{Ф} \times \text{ИЗИКА} = \text{КВАНТ}$$

8.
$$\begin{array}{r} \text{КВАНТ} \\ +\ \text{КВАНТ} \\ \hline \text{НАУКА} \end{array}$$

9. Решите ребус при условии, что число КВАНТ делится на 3:

$$\begin{array}{r} \text{НАУКА} \\ \times\ 5 \\ \hline \text{КВАНТ} \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{r} \text{КВАНТ} \\ +\ \text{КВАНТ} \\ \text{КВАНТ} \\ \hline \text{НЬЮТОН} \end{array}$$

11. Решите ребус при условии, что число ВОЛНА делится на 4:

$$\begin{array}{r} \text{ВОЛНА} \\ +\ \text{ВОЛНА} \\ \text{ВОЛНА} \\ \hline \text{КВАНТ} \end{array}$$

12.
$$\begin{array}{r} \text{КВАНТ} \\ \text{ЛАВА} \\ +\ \text{КВАНТ} \\ \text{ЛАВА} \\ \hline \text{ВУЛКАН} \end{array}$$

13.
$$\begin{array}{r} \text{ФАНАТЫ} \\ \text{ФАНАТЫ} \\ +\ \text{ФАНАТЫ} \\ \text{ФАНАТЫ} \\ \text{ФАНАТЫ} \\ \hline \text{КВАНТА} \end{array}$$

14. Решите ребус при условии, что число КВАНТОР
а) четное;
б) нечетное:

$$\text{КВАНТ} = \text{К} \times \text{В} \times \text{А} \times \text{Н} \times \text{Т} \times \text{ОР}$$

15. Решите ребус при условии, что число КВАНТ делится на 4:

$$\text{КВАНТ} + \text{КВАНТ} = \text{СВЕТ} + \text{СВЕТ} + \text{СВЕТ}$$

Буратино и его научная работа

И.БОЯРИНОВ

Однажды Буратино вернулся домой из школы явно озадаченным. Вместо того чтобы как обычно пойти немного погулять и отдохнуть, он уселся за стол и положил перед собой чистый лист бумаги.

– Учитель сказал, что скоро у нас в школе пройдет научно-практическая конференция, на которой ученики должны рассказать о результатах своей научно-исследовательской работы, – пояснил Буратино, отвечая на недоуменный взгляд Папы Карло. – А что это за работа такая? Я ею никогда не занимался! Вот окончу школу, университет, потом найду себе место младшего научного сотрудника в лаборатории – тогда и начну проводить исследования. А что я сейчас могу? Да и знаю я сейчас так мало!

– Дорогой мой Буратино, не надо так долго ждать! Математика такая большая, что всегда можно найти новые и доступные задачи! Вы уже прошли подобные треугольники?

– Прошли.

– Вот и придумай про них что-нибудь новое, – предложил Папа Карло.

– А что тут может быть нового? Есть три признака подобия... Стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого...

– Так-то оно так, а если одну сторону треугольника увеличить в 25 раз, другую – в 15 раз, а третью – в 9 раз, то может ли новый треугольник быть подобным исходному? – спросил Папа Карло. Пусть это будет твоя **задача 1.**

– Нет, никак не может новый треугольник оказаться подобным исходному, – уверенно возразил Буратино.

[redacted]

Есть формула для сторон подобных треугольников:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = K.$$

Стороны должны быть пропорциональны. А если одну сторону увеличить в 25 раз, другую – в 15, то никакой пропорциональности сторон не получится. Какое тут может быть подобие? Никакое, – уверенно заключил Буратино.

– Можно сказать, пожалуй, что ты запутался в трех соснах, точнее – в трех сторонах! – улыбнулся Папа Карло. Давай-ка в таком случае упростим ситуацию и рассмотрим всего две стороны подобных фигур. Вот тебе

Задача 2. Две противоположные стороны прямоугольника $ABCD$ увеличили в 2 раза, а две другие стороны – в 8 раз. Может ли новый прямоугольник быть подобным исходному?

– Только предупреждаю, не торопись с ответом, чтобы не ошибиться. Подумай!

Теперь Буратино проявил осмотрительность, не стал спешить, сосредоточился и через несколько минут нарисовал на бумаге в клетку два прямоугольника – один 1×2, второй 4×8. Эти прямоугольники ясно показывали, что описанная в задаче 2 ситуация вполне возможна. Если у первого стороны длины 2 увеличить в 2 раза, стороны длины 1 – в 8 раз, то в аккурат второй прямоугольник и получится. Этот пример заставил Буратино насторожиться.

– Хорошо, – одобрительно сказал Папа Карло. – Теперь ты убедился, что иногда действительность противоречит нашим привычным представлениям. Рассмотрим обобщение задачи 2, пусть это будет для тебя тренировочная

Задача 3. Две противоположные стороны прямоугольника $ABCD$ увеличили в p раз, а две другие стороны – в q раз. Может ли новый прямоугольник быть подобным исходному и если да, то при каком условии?

Буратино справился и с этой задачей. Вы тоже можете ее решить, сверив свой ответ с приведенным в конце журнала.

Воодушевленный таким началом, Буратино вернулся к задаче 1. Как к ней подступиться, с чего начать?..

– Начнем с известного, – посоветовал Папа Карло. Для двух подобных треугольников со сторонами a, b, c и A, B, C обычно рассматривают сходственные стороны:

$$(a,b,c) \mapsto (A,B,C) = (Ka, Kb, Kc).$$

Будем считать, что длины сторон перечислены в порядке их возрастания. А в каком порядке перечислены длины сторон второго треугольника с коэффициентами 25, 15 и 9 в задаче 1? Подумай!

– Ясно, что соответствие

$$(a,b,c) \mapsto (9a, 15b, 25c)$$

невозможно – ибо для подобного треугольника не может самая длинная сторона длины c увеличиться больше, чем две другие. Рассмотри для начала такой вариант:

$$(a,b,c) \mapsto (9c, 15b, 25a).$$

Буратино так и сделал и написал систему уравнений

$$\frac{9c}{a} = \frac{15b}{b} = \frac{25a}{c}. \qquad (1)$$

Неизвестных в системе (1) три, а уравнений всего два. Это неопределенная система, причем неизвестное b вообще исчезает. Система сводится к такой: $9c = 15a$, $25a = 15c$, причем оба эти уравнения равносильны равенству $3c = 5a$. Буратино обозначил для удобства a за $3p$, тогда c получается равным $5p$, а число b может быть любым – Буратино обозначил его за q. Так он получил общее решение системы:

$$(a,b,c) = (3p, q, 5p), \qquad (2)$$

где p и q – произвольные положительные числа.

Для треугольника со сторонами $3p$, q, $5p$ переход к подобному треугольнику с коэффициентами 25, 15, 9 описывает соответствие

$$(3p, q, 5p) \mapsto (9 \times 5p, 15 \times q, 25 \times 3p) = (45p, 15q, 75p),$$

при котором коэффициент подобия $K = 15$.

Формула (2) задает стороны треугольника, который удовлетворяет условиям задачи 1. Таких треугольников бесконечно много. Причем среди них есть треугольники разной формы. В частности, при $p = 1$ и $q = 4$ получается знаменитый египетский треугольник – прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 и гипотенузой 5.

Результаты своего исследования для этого треугольника Буратино отразил в таблице 1.

Таблица 1

Стороны старые		Коэффициенты разные	Стороны новые	Коэффициент подобия $K = 15$
3	$\mapsto$	3×25	$= 75$	$= 5 \times 15$
4	$\mapsto$	4×15	$= 60$	$= 4 \times 15$
5	$\mapsto$	5×9	$= 45$	$= 3 \times 15$

В таблице 1 самая короткая сторона переходит в самую длинную, самая длинная переходит в самую короткую, а средняя сторона «остается на месте»: $(a,b,c) \mapsto (C,B,A)$. Очень наглядно показано, что коэффициенты изменения длин сторон разные, как раз те, о которых сказано в задаче 1, и тем не менее новый треугольник подобен исходному!

– Интересно, а какие будут коэффициенты изменения длин для другого соответствия сторон, например для соответствия $(a,b,c) \mapsto (A,C,B)$? – возникла мысль у Буратино.

– Молодец, – похвалил его Папа Карло, – ты теперь сам находишь задачи. Вперед, действуй!

Так на новых листах бумаги появились новые таблицы 2–4.

В таблице 2 самая большая сторона и средняя «меняются местами», меньшая сторона «остается на месте»:

$$(a,b,c) \mapsto (A,C,B).$$

Таблица 2

Стороны старые		Коэффициенты разные	Стороны новые	Коэффициент подобия $K = 20$
3	$\mapsto$	3×20	$= 60$	$= 3 \times 20$
4	$\mapsto$	4×25	$= 100$	$= 5 \times 20$
5	$\mapsto$	5×16	$= 80$	$= 4 \times 20$

В таблице 3 самая большая сторона остается на месте:

$$(a,b,c) \mapsto (B,A,C)$$

Таблица 3

Стороны старые		Коэффициенты разные	Стороны новые	Коэффициент подобия $K = 12$
3	$\mapsto$	3×16	$= 48$	$= 4 \times 12$
4	$\mapsto$	4×9	$= 36$	$= 3 \times 12$
5	$\mapsto$	5×12	$= 60$	$= 5 \times 12$

В таблице 4 самая короткая сторона переходит в среднюю, средняя – в самую длинную:

$$(a,b,c) \mapsto (B,C,A).$$

Таблица 4

Стороны старые		Коэффициенты разные	Стороны новые	Коэффициент подобия $K = 60$
3	$\mapsto$	3×80	$= 240$	$= 4 \times 60$
4	$\mapsto$	4×75	$= 300$	$= 5 \times 60$
5	$\mapsto$	5×36	$= 180$	$= 3 \times 60$

У Буратино была еще и таблица 5 для соответствия $(a,b,c) \mapsto (C,A,B)$, но вы ее получите самостоятельно. Она приведена в ответах.

– А есть другие треугольники, удовлетворяющие условию задачи 1? – спросил Буратино?

– Это надо выяснить. Но ты же знаешь, как их можно искать – для этого надо решать другие системы уравнений вида (1). Пока ты рассмотрел одну такую систему. Так что потрудись, напиши эти системы, реши их и найди треугольники. Это будет **задача 4** в твоей научной работе! – улыбнулся Папа Карло.

– Хорошо. Я решу эту задачу позже. Сейчас мне интересно знать, как ты придумал задачу 1. Почему ты взял числа 25, 15, 9? Случайно?

– Нет, конечно. Просто я со школьных лет помню, что для любого неправильного треугольника ABC со сторонами a, b, c существуют не все равные между собой три числа x, y, z такие, что треугольник MNK со сторонами xa, yb, zc подобен треугольнику ABC. Кстати, докажи и это утверждение. Пусть это будет для тебя **задача 5**.

Я же сейчас скажу тебе ответ в задаче 5: для треугольника со сторонами a, b, c при $a \neq b$ подходит набор чисел $(x, y, z) = (b^2, a^2, ab)$. При этом получается треугольник MNK со сторонами

$$(b^2a, a^2b, abc).$$

Он подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $K = ab$. Если $ab = 1$, то можно взять набор $(x, y, z) = (2b^2, 2a^2, 2ab)$. Так вот, я взял треугольник со сторонами 3, 4, 5 – а для него набор трех чисел таков: $x = 4^2 = 16$, $y = 3^2 = 9$, $z = 3 \times 4 = 12$ – они в таблице 3.

– А в таблице 1 я вижу квадраты двух других сторон и их произведение – коэффициенты 25, 9 и 15, в таблице 2 – тоже два квадрата сторон и их произведение: 25, 16 и 20, – подхватил Буратино и с воодушевлением продолжил:

– Теперь понятно. Так по сторонам любого треугольника можно найти подходящие коэффициенты для сторон. А вот если наоборот: для трех разных чисел x, y, z всегда существуют подобные треугольники со сторонами a, b, c и xa, yb, zc?

– Это уже **задача 6**, – подвел итог Папа Карло. – Ответ на твой вопрос – нет, такие треугольники существуют не для любого набора коэффициентов. Подумай, как это доказать.

...Так решал Буратино одну задачу за другой, аккуратно записывал их решения. Он совсем забыл о задании подготовить доклад на конференцию. Математика увлекла его и повела за собой...

А вы, наши читатели, добравшись до конца статьи и решив все задачи, быть может, на основе прочитанного выступите с докладом-рефератом на своей школьной конференции. Желаем успехов!

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

Несколько новых иллюстраций к «Алисе в Зазеркалье»

А.АНДРЕЕВ

И, наконец, безумство шахматной игры как нельзя лучше соответствует безумной логике Зазеркалья.

Мартин Гарднер. Комментарии к «Алисе в Зазеркалье»

ШАХМАТНАЯ ДОСКА И ШАХМАТНАЯ ЗАДАЧА, выдуманная Льюисом Кэрроллом, служат канвой для «Алисы в Зазеркалье». При этом, как пишет Гарднер, «...шахматы увязываются с темой зеркального отражения».

Вот несколько иллюстраций на эту тему.

1. Неужели Белая Королева собирается исчезнуть (рис.1), как это сделали Чеширский Кот и его растаявшая в воздухе голова?

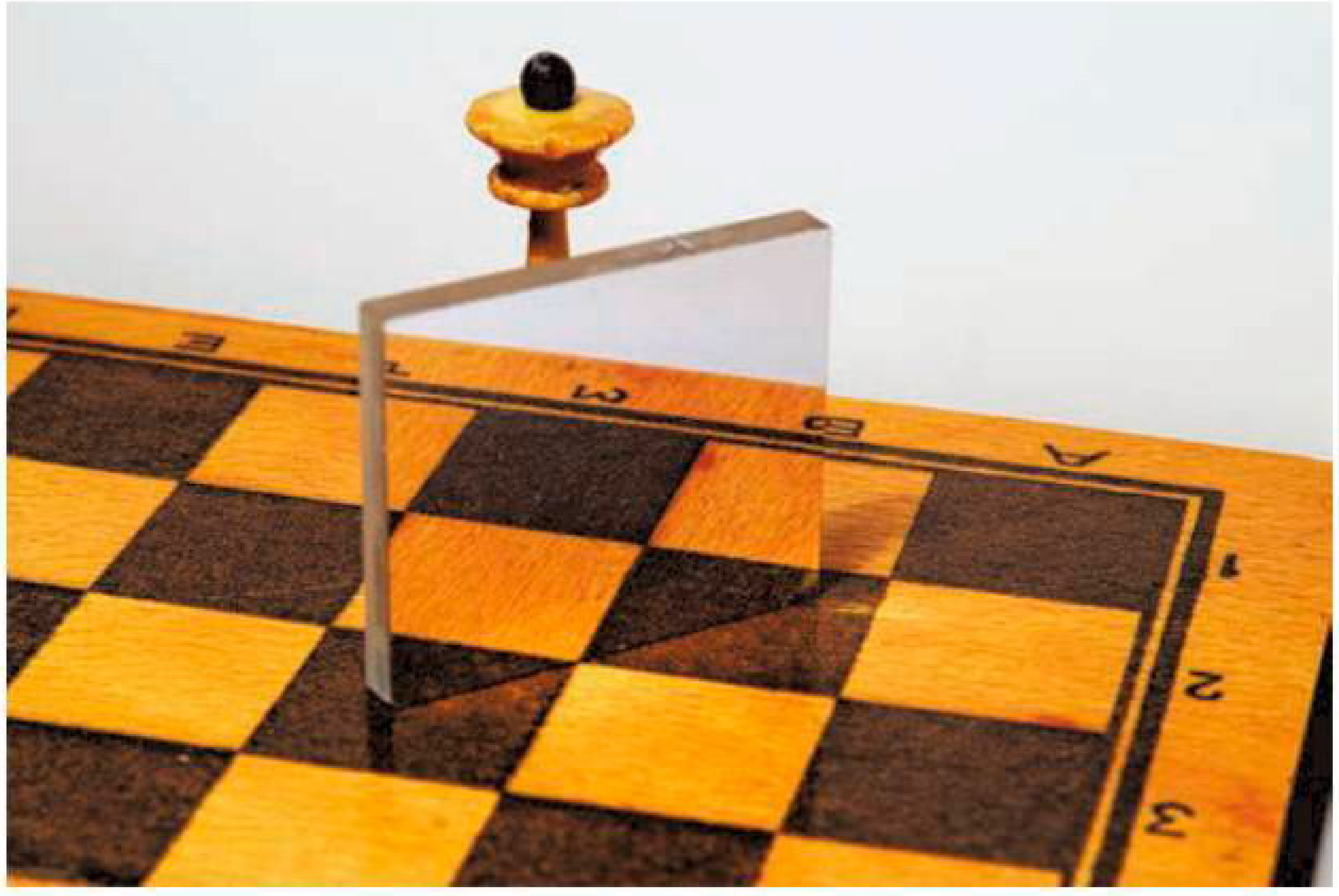


Рис. 1

Рис. 2

Нет, она всего лишь собирается обменяться телами с Черной Королевой (рис.2).

2. Возможно, все, что случилось с Алисой в Зазеркалье, – всего лишь приснилось ей. Вот небольшой отрывок, где речь идет о сне Черного Короля.

– *Милый*, правда? – спросил Траляля.

Алисе трудно было с ним согласиться. На Короле был красный ночной колпак с кисточкой и старый грязный халат, а лежал он под кустом и храпел с такой силой, что все деревья сотрясались.

– Так можно себе и голову отхрапеть! – заметил Труляля.

– Как бы он не простудился, – забеспокоилась Алиса, которая была очень заботливой девочкой. – Ведь он лежит на сырой траве!

– Ему снится сон! – сказал Траляля. – И как по твоему, кто ему снится?!

– Не знаю, – ответила Алиса. – Этого никто сказать не может.

– Ему снишься *ты*! – закричал Траляля и радостно захлопал в ладоши. – Если б он не видел тебя во сне, где бы, интересно, ты была?

А вот комментарий Гарднера к этому отрывку: Алиса видит во сне Короля, который видит во сне Алису, которая видит Короля, и так далее, словно два зеркала, поставленные друг перед другом... Что-то наподобие того, что изображено на рисунке 3.

Рис. 3

Конечно, сон Алисы и сон Черного Короля – это чрезвычайно запутанные состояния, которые не так-то легко распутать.

3. И еще один сюжет. Все время от начала до конца истории Черный Король проспал без движения (на одном поле шахматной доски), а Алиса прошла весь путь до последней горизонтали, превратившись из Белой Пешки в Белую Королеву. Естественно, что в разные моменты времени она находилась по разные стороны от Черного Короля.

Судя по всему, сейчас Алиса находится спереди (рис.4).

Или это только иллюзия (рис.5)?

Рис. 4

Рис. 5

В заключение предлагаем вам посмотреть два ролика, связанные с последним сюжетом:

http://www.youtube.com/watch?v=oJb9RnAVDuE
http://www.youtube.com/watch?v=GAmWs6zfTj8

Как по-вашему: кто из присутствующих на первом ролике исполняет роль Безумного Шляпочника, а кто – Мартовского Зайца?

Сила в один буратино

(Физическая сказка)

С.ДВОРЯНИНОВ

Из школы домой Буратино вернулся явно озабоченным. После обеда он не пошел как обычно немного погулять, а сразу взял в руки учебник.

– Что-то случилось? – Папа Карло поднял глаза на сына. – Расскажи!

– Да вот тут одна формула мне не очень нравится, – Буратино ткнул пальцем в страницу.

– Как так формула не нравится? Формула она и есть формула. У тебя в руках я вижу учебник физики. Формула выражает закон природы – его надо принимать таким, какой он есть.

– Да дело в том, что все формулы были простые и понятные. Можно сказать, естественные. Надо найти путь – умножай скорость на время: $s = vt$. И в геометрии то же: площадь прямоугольника равна произведению двух его сторон: $S = ab$. Ничего лишнего в этих формулах нет. В формуле площади треугольника появляется, правда, числовой множитель: $S = \frac{1}{2}ah_a$. Но происхождение «одной второй» понятно – треугольник в принципе можно представить как половину прямоугольника. Однако, в формуле площади круга $S = \pi r^2$ присутствует неприятный числовой множитель – иррациональное число π, бесконечная непериодическая десятичная дробь. Но ничего, к этому у нас в классе все привыкли. А так во всех остальных формулах все прекрасно: дели и умножай данные. Вот, можешь проверить меня, – и Буратино быстро по памяти написал добрый десяток формул из физики и геометрии:

$$S = a^2,\ V = \frac{4}{3}\pi R^3,\ V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,\ N = \frac{A}{t},\ a = \frac{F}{m},$$

$$A = Fs,\ I = \frac{U}{R},\ U = IR,\ E = \frac{mv^2}{2}.$$

– А сегодня мы узнали новую формулу:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Она выражает закон всемирного тяготения, открытый Ньютоном. Исходных величин три: массы двух точечных тел и расстояние между ними. И присутствует еще множитель G, называемый гравитационной постоянной. С ним можно было бы и смириться, если бы он был числом, как «одна вторая» или «пи». Но этот множитель имеет наименование и называется размерной постоянной. Я переписал из учебника:

$$G = 6{,}67384(80)\cdot 10^{-11}\ \text{м}^3\cdot\text{с}^{-2}\cdot\text{кг}^{-1},$$

или

$$G = 6{,}67384(80)\cdot 10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{кг}^{-2}.$$

Никогда такого не было, чтобы в формуле числовой множитель размерность имел. Почему нельзя написать проще:

$$F = 6{,}7\cdot 10^{-11}\frac{m_1 m_2}{r^2}? \qquad (\text{ф})$$

– Так, давай разбираться с твоей формулой, которую обозначим (ф). Вспомним, как появляется новая размерная величина. Если есть единица длины 1 м, то за единицу площади принимают площадь квадрата со стороной 1 м. Получается один квадратный метр: $1\ \text{м}\times 1\ \text{м} = 1\ \text{м}^2$. При вычислении по формулам действия следует производить не только с числами, но и с их наименованиями. Если, например, скорость тела 20 м/с, а время его движения 5 с, то пройденный путь $s = 20\ \text{м/с}\cdot 5\ \text{с} = 100\ \text{м}$. Здесь секунды сократились, словно множители в числителе и знаменателе дроби. А теперь посмотри, что получается по твоей формуле для двух точечных тел с массами $m_1 = m_2 = 1$ кг, находящихся на расстоянии $r = 1$ м.

– Да очень просто получается! Произведение в правой части (ф) равно коэффициенту $6{,}7\cdot 10^{-11}$, значит, два этих тела притягиваются с силой, равной $6{,}7\cdot 10^{-11}$ ньютонов.

– А теперь проверь формулу (ф) по размерности!

– Зачем проверять? Сила измеряется в ньютонах, вот я и добавил к числу нужное наименование, – попытался было спорить Буратино.

– Нет, это не аргумент. По формуле (ф) получается, что размерность силы $\text{кг}^2\cdot\text{м}^{-2}$. Это разве ньютон?

– Что-то я сразу не припомню. Ньютон он и есть ньютон...

– Давай вспоминать. Ньютон – это не основная единица, а производная. Она вводится на основе второго закона Ньютона $F = ma$. Сила в 1 ньютон заставляет массу в 1 килограмм двигаться с ускорением 1 метр в секунду за секунду. Ускорение – тоже производная величина с размерностью м/с^2, поэтому размерность силы это $\text{кг}\cdot\text{м/с}^2$, или $\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^{-2}$. Значит, и по формуле (ф) должно получиться $\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^{-2}$. У тебя же получилось $\text{кг}^2\cdot\text{м}^{-2}$. Явная нестыковка! Поэтому я и обозначил формулу буквой *ф* – от слова *фальшь*. Как же исправить ошибку?

– Понимаю! Чтобы превратить то, что получилось, в то, что надо, следует полученный результат умножить на $\text{кг}^{-1}\cdot\text{м}^3\cdot\text{с}^{-2}$. Вот поэтому-то и приобретает числовой множитель такую размерность! Эта размерность нужна, чтобы по закону всемирного тяготения сила имела положенную ей размерность, – уверенно заключил Буратино.

– Хорошо, размерность силы задается вторым законом Ньютона. А что получится, если единицу силы вводить по закону всемирного тяготения? – продолжил, выказывая явный интерес к предмету, Буратино.

– Тогда этот закон записывался бы в виде $F = \frac{m_1 m_2}{r^2}$, а за единицу силы принималась бы сила взаимного притяжения двух килограммовых точечных масс, расстояние между которыми равно одному метру. Эту силу можно назвать, – Папа Карло чуть улыбнулся, – ... *один буратино* и обозначить 1Б. Но так не поступают. Ибо сила эта маленькая, неудобная для практики. Использовать такую единицу – все равно что измерять расстояние между городами микронами. Неудобно.

Тут Буратино захотел немного помечтать:

– Сила в один буратино! – с выражением произнес он. – Звучит гордо! Размерность этой силы $кг^2 \cdot м^{-2} = Б$. Но тогда надо изменить запись второго закона Ньютона. Если сохранить запись $a = \frac{F}{m}$, то размерность ускорения будет $кг \cdot м^{-2}$. Чтобы ее превратить в $м \cdot с^{-2}$, в правой части уравнения нужен множитель с размерностью $кг^{-1} \cdot м^3 \cdot с^{-2}$. Размерность та же, что и у гравитационной постоянной. Это случайно?

– Нет, не случайно. Отбрасывая множитель G в законе всемирного тяготения, мы фактически в формуле $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ заменяем F на новую переменную f по формуле $F = Gf$. Но тогда эту же замену мы должны выполнить и во втором законе Ньютона, и он примет вид

$$a = G\frac{f}{m}.$$

В этом случае размерную постоянную G можно назвать инерционной постоянной. Согласно последней формуле сила величиной в один буратино заставляет двигаться тело массой один килограмм с ускорением $6{,}67384(80) \cdot 10^{-11}\ м \cdot с^{-2}$. Такое малое ускорение объясняется малостью величины G, что в свою очередь есть следствие слабости гравитационного взаимодействия. Сила взаимного притяжения проявляется только для больших масс. Так что вводить силу в один буратино, пожалуй, не стоит, – заключил Папа Карло.

– Согласен! Но когда я вырасту, я обязательно открою что-нибудь новое, в физике всегда есть место для открытий, – чуть самоуверенно заявил Буратино.

Что ж, пожелаем ему успехов.

Кошачья экономия

И.АКУЛИЧ

Согласно анекдотам, славящиеся своей бережливостью жители болгарского города Габрово отрубают кошкам хвосты, чтобы зимой, выпуская кошек на улицу, меньше времени держать открытой дверь и, как следствие, меньше терять тепла.

Давайте оценим годовую экономию дров в результате такой «рационализации».

Чтобы выпустить кошку, не обязательно открывать дверь нараспашку (габровцы уж точно такого не сделают!). Достаточно приоткрыть ее на ширину порядка $a = 0{,}2$ м. При этом сразу возникнут два потока воздуха: через нижнюю часть образовавшейся вертикальной щели холодный воздух пойдет с улицы в дом, а через верхнюю часть теплый воздух пойдет из дома на улицу. Будем считать, что эти потоки примерно равны по высоте. Таким образом, если дверь имеет высоту около 2 м, то высота каждого из потоков $h = 1$ м. Эти потоки образуются за счет разности весов столбов теплого и холодного воздуха.

Оценим скорость потока холодного воздуха у самого пола. Пусть плотности теплого и холодного воздуха равны $\rho_т$ и $\rho_х$ соответственно (об их числовых значениях поговорим позже). Очевидно, что $\rho_х > \rho_т$, но разность этих величин во много раз меньше и $\rho_т$, и $\rho_х$. Поэтому можно в данном процессе считать воздух практически несжимаемым и придать задаче эквивалентный «гидравлический» вид. А именно, пусть имеются два вертикальных цилиндрических сосуда с достаточно большим поперечным сечением S и высотой $H = 2{,}5$ м (будем считать, что такова высота от пола до потолка в доме). В сосуды налиты жидкости с плотностями $\rho_х$ и $\rho_т$. Соединим их у самого низа перемычкой. Какова будет скорость v жидкости, протекающей через перемычку?

Ответить на этот вопрос позволяет закон сохранения энергии. Пренебрегая потерями (что в оценочной задаче вполне допустимо), заметим, что если некоторое малое количество Δm жидкости перетекло из одного сосуда в другой, то уровень жидкости в одном сосуде уменьшился на $\frac{\Delta m}{S\rho}$, а во втором – поднялся на ту же величину (перемешиванием пренебрегаем). В нашем случае столб жидкости плотностью $\rho_х$ чуть-чуть опустился, а столб жидкости плотностью $\rho_т$ на столько же поднялся. В итоге суммарная потенциальная энергия уменьшилась на

$$\Delta E_п = (\rho_х SgH - \rho_т SgH)\frac{\Delta m}{S\rho_х} = \Delta mgH\frac{\rho_х - \rho_т}{\rho_х}.$$

(Продолжение см. на с. 34)

Все, что видно, видно по прямой.

Евклид

...из всех лучей, падающих из данной точки и отражающихся в данную точку, минимальны те, которые от плоских и сферических зеркал отражаются под равными углами.

Герон Александрийский

...отскакивать все от вещей заставляет природа.
И отражаться назад под таким же углом, как упало.

Тит Лукреций Кар

Не являются ли лучи света очень маленькими телами, испускаемыми светящимися веществами? Ибо такие тела будут проходить сквозь однородные среды без загибания в тень соответственно природе лучей света.

Исаак Ньютон

Сформулировав задачу математически, легко подсчитать пути всех лучей.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомы вам геометрия и оптика?

Ну зачем понадобилось разделять эти понятия, если ясно, что речь пойдет о всем известном разделе курса физики – о геометрической оптике? Однако не все так просто. Если мы обратимся к месту ее зарождения – Древней Греции и ко времени – III век до н.э., то окажется, что там и тогда только формировался понятийный аппарат той части математики, которая изучает пространственные отношения и формы тел, т.е. собственно геометрии. Оптика же, как дисциплина, исследующая свойства света, именовалась «зрительным искусством», словно намекая на ее менее знатное происхождение.

Конечно, уже тогда эти два познавательных направления в поисках связи между наблюдаемой реальностью и способами ее описания сильнейшим образом влияли друг на друга. Задачи, которыми они обменивались, способствовали созданию языка строгой науки и проверяли эффективность и работоспособность этого языка. Но лишь к XVII веку были установлены и отшлифованы законы геометрической оптики, единовластно воцарившейся на следующие два столетия и воплощавшей в себе синтез двух наук. Наконец, XIX век отделил ее от оптики физической (волновой) и поставил на свое место в сохранившейся до сих пор «табели о рангах». История геометрической оптики – один из интереснейших примеров переплетения и обогащения друг другом разнообразных областей физики и математики.

Естественно начать сегодняшний разговор с первых открытых законов геометрической оптики – прямолинейного распространения и отражения света. А к другим закономерностям, связавшим оптику и геометрию, мы обратимся в следующем выпуске «Калейдоскопа».

Вопросы и задачи

1. Можно ли устроить фотоаппарат без объектива?

2. Как нужно держать карандаш над столом, чтобы получить резко очерченную его тень, если источником света служит закрепленная у потолка лампа дневного света, имеющая форму длинной трубки?

3. Можно ли получить от непрозрачного предмета четыре полутени без тени?

4. Электрическая лампа накаливания помещена в матовый стеклянный шар, подвешенный у потолка. Под лампой держат мяч, диаметр которого в 2 раза меньше диаметра шара. На какой высоте следует поместить мяч, чтобы его тень на полу исчезла? Каким должен быть диаметр мяча, чтобы размеры его тени были одинаковы при любых расстояниях мяча от пола?

5. Непрозрачный куб закреплен так, что одна из его вершин находится на горизонтальной плоскости, а центр куба лежит на одной вертикали с этой вершиной. Сверху на куб вертикально падает широкий параллельный пучок света. Какова форма тени куба на плоскости?

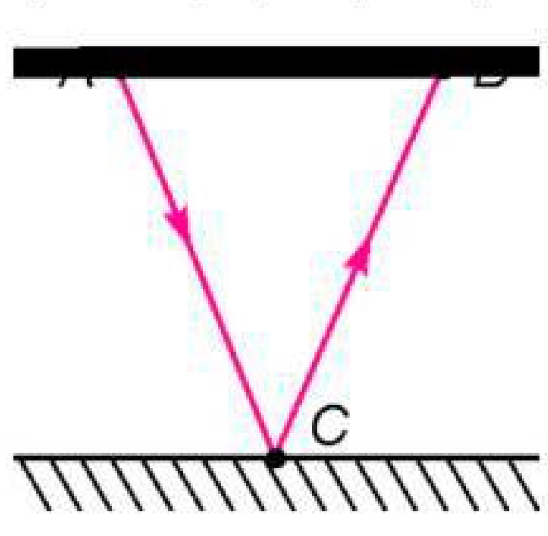
6. Как изменится расстояние между предметом и его изображением в плоском зеркале, если зеркало переместить в то место, где было изображение?

7. Человек, стоящий на берегу озера, видит на гладкой поверхности воды изображение Солнца. Как будет перемещаться это изображение при удалении человека от озера?

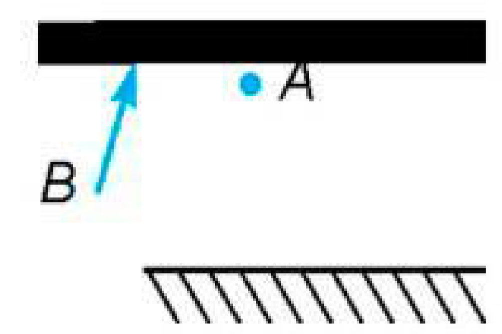
8. Солнечные лучи составляют с горизонтом угол 48°. Как надо расположить плоское зеркало, чтобы направить лучи горизонтально?

9. На поверхности озера видна сверкающая лунная дорожка. Как она образуется? Будет ли наблюдаться дорожка на идеально гладкой спокойной поверхности воды? Почему дорожка всегда ориентирована на наблюдателя?

10. Луч света падает на плоское зеркало, вращающееся с некоторой скоростью против часовой стрелки. В каком направлении и с какой скоростью вращается отраженный луч?



11. Свет исходит из источника A, отражается от зеркала и приходит в точку B, как изображено на рисунке. Покажите, что путь ACB, определенный по закону отражения, является кратчайшим из всех других возможных путей луча.



12. Определите графически, при каких положениях глаза наблюдатель сможет одновременно увидеть в плоском зеркале конечных размеров изображение точки A и отрезка BC.

13. Известны положения оси MM_1 сферического зеркала, светящейся точки A и ее изображения A_1. Найдите построением положения вершины зеркала и его центра.

[redacted]

14. Когда смотрят в вогнутую сторону блестящей ложки, то видят перевернутое изображение своего лица. Когда же смотрятся в вогнутое зеркало для бритья, то видят свое увеличенное прямое (неперевернутое) изображение. Почему?

15. Может ли изображение светящейся точки в вогнутом зеркале находиться на его оси между зеркалом и главным фокусом?

Микроопыт

Найдите простой способ определить «рост» одиноко стоящего высокого дерева, если вы располагаете лишь плоским зеркалом и рулеткой.

Любопытно, что...

...в знаменитых «Началах», подытоживших достижения древнегреческой математики, Евклид, пытаясь логически построить геометрию, часто опирался на интуицию и доверялся глазу. По всей видимости, понятие о прямой линии возникло из представления о прямолинейном распространении света в однородной среде — о так называемых «зрительных лучах». Само же слово «луч» соотносят по смыслу со словом «стрела».

...Архимед занимался как «чистой» математикой, так и ее приложениями, в том числе военными. Исследуя свойства зеркал, он изучал построение в них отражений, особенно в «зажигательных» зеркалах, чьи свойства были связаны с коническими сечениями. Так, им было доказано, что лучи, вышедшие из фокуса эллиптического зеркала, после отражения собираются в другом его фокусе.

...геометрические построения с помощью циркуля и линейки, без которых часто невозможно обойтись при решении задач по оптике, древнегреческие ученые считали наиболее изящными и ценили выше, чем построения с помощью других инструментов.

...наряду с математикой и астрономией средневековые арабские ученые усердно изучали оптику, возбуждавшую, по их мнению, интерес к геометрии. Например, прославленный автор оптического трактата Альхазен повествует в нем не только о плоских, но и о сферических, цилиндрических и конических вогнутых и выпуклых зеркалах; получает в них изображения, определяя их положение и величину. Также он разбирает способность параболоида вращения отражать лучи, исходящие из его фокуса, параллельным пучком.

...английский философ и естествоиспытатель XIII века Роджер Бэкон, положивший начало катакаустике — учению о зажигательных приборах, полагал, что оптика — «украшение всей философии». Однако за резкую критику трудов Аристотеля и занятия такими непонятными современникам вещами, как камера-обскура, чье изобретение ему приписывала легенда, он был обвинен в ереси и магии и брошен в тюрьму.

...строгие правила построения изображений в сферических зеркалах были установлены в конце XVII века Христианом Гюйгенсом и графом Эренфридом фон Чирнхаусом, известным как изобретатель европейского белого фарфора. Кроме того, этим ученым, благодаря исследованию свойств «зажигательных» кривых, были созданы чрезвычайно большие фокусирующие линзы и зеркала, при помощи которых удалось продемонстрировать горючесть алмаза.

...знаменитый математик Карл Фридрих Гаусс оставил заметный след и в геодезии, усовершенствовав для ее нужд оптическую сигнализацию и изобретя специальный прибор — гелиотроп, и в физике, где, в том числе, развил метод зеркального отсчета, применяемый в чувствительных электромагнитных приборах.

...выдающийся естествоиспытатель Герман Гельмгольц, впервые давший математическую трактовку закона сохранения энергии, был и конструктором оригинальных измерительных приборов. Так, ему принадлежит изобретение офтальмоскопа — глазного зеркала, позволяющего наблюдать дно человеческого глаза.

...особенность кошачьих глаз светиться в темноте связана с отражением от них света почти параллельным пучком. На этом эффекте в 30-е годы XX века было разработано устройство под названием «кошачий глаз». Оно устанавливалось на опасных участках дорог, предупреждая водителей отраженным светом фар их же приближающихся автомобилей.

...при строительстве сложных инженерных сооружений — мостов, тоннелей, высотных зданий, крупных научных установок — требуется контролировать расстояния до нескольких километров с точностью до долей миллиметра. Справиться с этой задачей позволяют лазерные дальномеры — их лучи расходятся очень слабо. Компактным примером такого прибора может служить лазерная указка.

...несколько лет назад был создан телевизор с жидкокристаллическим экраном, исполняющим в выключенном состоянии функции зеркала. Разработка современных оптиков и инженеров, признанная одним из самых смелых изобретений начала XXI века, привела к новому дизайну домашнего пространства, успешно конкурируя с зеркалами из стекла и амальгамы.

Что читать в «Кванте» о геометрической оптике

(публикации последних лет)

1. «Отражение от тонких цилиндрических зеркал» — 2009, №1, с.47;
2. «Что мы видим в зеркале?» — 2009, №2, с.30;
3. «Каустики на плоскости и в пространстве» — 2010, №3, с.48;
4. «Оптические явления в автобусе» — 2012, №2, с.42;
5. «Физический калейдоскоп. Выпуск 3» — 2012, Приложение №3, с.112;
6. «Геометрия световых лучей» — 2013, №1, с.55;
7. «Многоликая тень» — 2013, №2, с.43;
8. «Цилиндрическое зеркало-трубка» — 2014, №1, с.40;
9. «Между зеркалами» — 2015, №1, с.42.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 31)

По закону сохранения энергии эта величина должна быть равна кинетической энергии перетекающей жидкости:

$$\Delta E_{п} = E_{к} = \frac{\Delta m v^2}{2}.$$

Отсюда получаем

$$v = \sqrt{2gH\frac{\rho_{х} - \rho_{т}}{\rho_{х}}}.$$

Такова скорость воздуха у самого пола. С ростом расстояния от пола она будет сложным образом уменьшаться вследствие взаимодействия с соседними потоками воздуха, пока не упадет до нуля на высоте h, где поток холодного воздуха сменится встречным потоком теплого воздуха. Поскольку речь идет об оценке, будем считать, что эта скорость меняется линейно: от значения v на уровне пола до нуля на высоте h. Следовательно, средняя скорость потока воздуха будет равна $\frac{v}{2}$. Если время, в течение которого дверь открыта, равно t, то в комнату войдет масса холодного воздуха

$$M = \rho_{х} ha\frac{v}{2}t = hat\sqrt{\frac{gH\rho_{х}(\rho_{х} - \rho_{т})}{2}}.$$

Эту массу воздуха придется нагреть от температуры $T_{х}$ до температуры $T_{т}$, где $T_{х}$ и $T_{т}$ – температуры холодного и теплого воздуха соответственно. На это потребуется количество теплоты

$$Q = cM(T_{т} - T_{х}) = chat\sqrt{\frac{gH\rho_{х}(\rho_{х} - \rho_{т})}{2}}(T_{т} - T_{х}),$$

где $c = 1000$ Дж/(кг · К) – средняя удельная теплоемкость воздуха.

Теперь оценим, на сколько за год уменьшится время нахождения двери в открытом состоянии в результате отрубания хвоста у кошки. Если длина хвоста $L = 0{,}2$ м, а скорость прохождения кошки через дверь $u = 2$ м/с, то за одно открывание двери экономия времени составит L/u. Будем считать, что кошку надо дважды в сутки выпустить на улицу и, соответственно, дважды впустить. Значит, суточная экономия времени будет равна $4L/u$.

Далее следует обратиться к климатическим справочникам. Согласно данным из интернета, отопительный сезон в горных районах Болгарии (а город Габрово именно там и расположен) длится, как правило, от середины сентября до середины мая. Это примерно 8 месяцев, или около $N = 240$ суток в год, поэтому экономия времени открытости двери составит

$$\Delta t = \frac{4NL}{u}.$$

По тем же справочникам средняя температура наружного воздуха в течение отопительного периода равна +3 °С, т.е. $T_{х} = 276$ К. В доме примем температуру равной нашей общепринятой комнатной температуре +18 °С, т.е. $T_{т} = 291$ К.

Осталось определить плотности холодного и теплого воздуха. При нормальных условиях – температуре $T_0 = 273$ К и давлении $p_0 = 760$ мм рт.ст. $= 1{,}013 \cdot 10^5$ Па – плотность воздуха равна $\rho_0 = 1{,}293$ кг/м^3. Но p_0 – это среднее давление на уровне моря, тогда как Габрово расположено на 390 м выше уровня моря. Известно, что атмосферное давление снижается приблизительно на 1 мм рт.ст. при подъеме на каждые 12 м. Поэтому атмосферное давление в Габрово можно оценить величиной

$$p_{Г} = \left(760 - \frac{390}{12}\right) \text{ мм рт.ст.} = 727{,}5 \text{ мм рт. ст.} = 0{,}970 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Считая воздух идеальным газом и учитывая, что плотность и объем газа связаны между собой обратно пропорциональной зависимостью, можно уравнение состояния воздуха записать в виде

$$\frac{p_0}{T_0\rho_0} = \frac{p_{Г}}{T_{х}\rho_{х}} = \frac{p_{Г}}{T_{т}\rho_{т}},$$

откуда находим

$$\rho_{х} = \frac{T_0\rho_0 p_{Г}}{T_{х} p_0} \quad \text{и} \quad \rho_{т} = \frac{T_0\rho_0 p_{Г}}{T_{т} p_0}.$$

В итоге получаем экономию в затраченном количестве теплоты, равную

$$\Delta Q = cha\Delta t T_0\rho_0 (T_{т} - T_{х})\sqrt{\frac{gH\frac{T_0\rho_0 p_{Г}}{T_{х} p_0}\left(\frac{T_0\rho_0 p_{Г}}{T_{х} p_0} - \frac{T_0\rho_0 p_{Г}}{T_{т} p_0}\right)}{2}} = \frac{4chaNLT_0\rho_0 p_{Г}}{u p_0}\frac{T_{т} - T_{х}}{T_{х}}\sqrt{\frac{gH(T_{т} - T_{х})}{2T_{т}}}.$$

Теперь перейдем непосредственно к дровам. Удельная теплота сгорания дров, согласно справочникам, составляет примерно $q = 2 \cdot 10^7$ Дж/кг. Поскольку дрова принято измерять не по массе, а по объему, то надо взять из справочников также и среднюю плотность дерева: $\rho_{д} = 500$ кг/м^3. Кроме того, следует учесть также коэффициент полезного действия печи. Лучшие современные водогрейные и паровые котлы имеют КПД порядка 0,9. КПД обычной печи существенно ниже и близок к $\eta = 0{,}7$. В результате находим, наконец, годовой объем сэкономленных дров:

$$V = \frac{\Delta Q}{q\rho_{д}\eta} = \frac{4chaNLT_0\rho_0 p_{Г}}{uq\rho_{д}\eta p_0}\frac{T_{т} - T_{х}}{T_{х}}\sqrt{\frac{gH(T_{т} - T_{х})}{2T_{т}}} =$$

$$= \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 0{,}2 \cdot 240 \cdot 0{,}2 \cdot 273 \cdot 1{,}293 \cdot 0{,}970 \cdot 10^5}{2 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 500 \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5} \times$$

$$\times \frac{291 - 276}{276}\sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 2{,}5(291 - 276)}{2 \cdot 291}} \text{ м}^3 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 40 \text{ см}^3,$$

что соответствует кусочку дерева объемом примерно вдвое больше спичечного коробка. Вроде бы немного, но в масштабах всего Габрово (почти 60 тысяч жителей) да, скажем, за сто лет – экономия существенная.

Не пора ли перенимать передовой опыт?

Поле и линии поля

А.РЫБАКОВ

«Определяйте значения слов – и вы избежите половины заблуждений!» – сказал один умный человек. Вот именно этим мы и займемся.

Поле в физике и в математике

Когда математик говорит *поле*, он всего-навсего имеет в виду, что в какой-то области пространства в каждой точке задано число (если это скалярное поле) или вектор (если это векторное поле). Какова физическая природа этих чисел или этих векторов, для математика безразлично. Только для наглядности, для «связи с жизнью», он может привести в качестве примеров скалярных полей, скажем, поле температур воздуха (или поле давлений) в атмосфере. Для векторных полей обычным примером является поле скоростей в потоке жидкости или газа.

А что же называется полем в физике? Нечто совсем другое!

Поле (физическое) – это особая форма материи. Поле осуществляет взаимодействие между частицами. Каждому типу взаимодействий отвечает свое поле. В школьном курсе говорится только о гравитационном и электромагнитном полях; в некоторых случаях можно говорить отдельно об электрическом (электростатическом) и отдельно о магнитном поле.

Как-то услышал от ученика такой вопрос: «Электростатическое поле – это скалярное или векторное поле?» Вот замечательный пример того, как в одной фразе термин *поле* используется в двух разных смыслах! Ответим на вопрос ученика. Электростатическое поле (в физическом смысле) может описываться как вектором напряженности – и тогда мы имеем векторное поле $\vec{E}(x,y,z)$, так и скалярным потенциалом – и тогда мы имеем скалярное поле $\varphi(x,y,z)$. А переход от одного способа описания к другому осуществляется соотношением

$$E_s = -\frac{d\varphi}{ds},$$

где в правой части стоит производная потенциала по направлению оси s, в левой – проекция вектора напряженности на это направление. В базовом школьном курсе (и в заданиях ЕГЭ) это соотношение используется в простейшем частном случае – для однородного поля и прямой s, совпадающей с силовой линией этого поля.

Векторные поля и линии вектора

Какие еще векторные поля рассматриваются в школьном курсе, кроме поля вектора $\vec{E}$? Ну, конечно, магнитное поле, которое описывается вектором магнитной индукции $\vec{B}$. А также гравитационное поле, которое можно описывать вектором напряженности поля – аналогично тому, как это делается в электростатическом поле:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m},$$

где величину этого вектора в поле тяготения планеты мы называем ускорением свободного падения. А вот при анализе течения жидкости (или газа) можно говорить о поле вектора скорости частицы $\vec{v}$.

Для графического представления векторного поля используют *линии поля*, или *линии соответствующего вектора*. Как все, конечно, помнят, линия поля – это такая линия, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором поля. Линию вектора напряженности $\vec{E}$ называют силовой линией, а линию вектора магнитной индукции $\vec{B}$ называют магнитной линией[1].

После определения линий вектора в любом учебнике всегда следует такое утверждение: линии поля проводят так, чтобы их густота соответствовала величине поля. Будем для краткости называть это утверждение *правилом густоты*.

А всегда ли удастся именно так проводить линии поля? Здесь надо прежде всего отдавать себе отчет в том, о какой густоте идет речь. Идет ли речь о густоте линий в пространстве (т.е. об их числе в расчете на единицу площади перпендикулярной к ним поверхности) или об их густоте на плоском рисунке (тогда это число линий в расчете на единицу длины перпендикулярной к ним линии).

Начнем с линий вектора $\vec{E}$. Возьмем самый простой случай – рассмотрим электростатическое поле точечного заряда. Величина напряженности поля при удалении от заряда убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Удастся ли провести силовые линии так, чтобы их густота убывала по такому же закону? Удастся, если речь идет о линиях в пространстве, например если мы строим модель поля из проволочек. И не удастся, если речь идет о линиях на плоском рисунке, который мы обычно используем. Что из этого следует?

На первый взгляд кажется, что представление электростатического поля на рисунке при помощи эквипотенциальных поверхностей, точнее их плоских аналогов – эквипотенциалей, и при помощи силовых линий одинаково удобно, одинаково информативно. Теперь мы видим, что это не так. Картина эквипотенциалей может представлять поле количественно. Если нам понадобится бóльшая точность, надо будет всего лишь проводить эти эквипотенциали с меньшим шагом. Но при описании поля картиной силовых линий *на плоскости* количественный подход по указанной выше причине в принципе невозможен. Картина силовых линий может давать нам лишь иллюстрацию, «картинку», лишь качественное представление о поле (что тоже, конечно, немало).

Поток вектора и правило густоты

В векторном поле вводится важная величина (важная, в частности, для формулирования физических законов) – поток вектора через поверхность.

Напомним, что многие важнейшие физические величины определяются для *элементарных*, т.е. бесконечно малых объектов. А для перехода к объектам конечных размеров мы должны прибегать к суммированию по бесконечно малым элементам, т.е. к интегрированию.

Возьмем очень малую плоскую площадку. Насколько малую? Математик сказал бы «бесконечно малую». Физик скажет «столь малую, что интересующий нас вектор в пределах этой площадки можно считать постоянным». Проведем нормаль $\vec{n}$ (т.е. перпендикуляр) к этой площадке, введем на этой нормали (произвольным образом) положительное направление. Далее для определенности будем вести

[1] Называть ее магнитной *силовой* линией автору представляется неправильным, так как она не показывает направление какой-либо силы. Но приходится признать, что такой терминологии придерживаются авторитетнейшие справочные издания и многие учебники.

речь о векторе магнитной индукции $\vec{B}$. Проекцию вектора $\vec{B}$ на нормаль будем обозначать B_n. Магнитным потоком через эту площадку называют величину

$$\Delta\Phi_B = B_n \Delta S = B\Delta S \cos\alpha ,$$

где α – угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к площадке. Для расчета магнитного потока через произвольную поверхность S надо мысленно разбить всю поверхность на бесконечно малые (плоские) площадки и просуммировать потоки через все площадки – это и есть интеграл по поверхности. Может быть, школьный курс и обошелся бы без этой сложной конструкции, если бы не закон электромагнитной индукции.

Итак, поток вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через какую-то поверхность S равен

$$\Phi_B = \int_S B_n dS .$$

Заметим, что в базовом курсе физики (и в ЕГЭ) всегда ограничиваются случаем плоского контура и натянутой на него плоской поверхности, при этом формула для магнитного потока приобретает совсем простой вид:

$$\Phi_B = B_n S ,$$

где S – площадь контура.

Аналогично вводится поток вектора в любом векторном поле. Поток – скалярная величина. Знак же его зависит от того, какое именно направление нормали к поверхности мы будем считать положительным. Если поверхность замкнутая, то обычно положительным считают направление наружу.

Несложно заметить, что две величины – число линий, пересекающих поверхность, и поток вектора поля через эту поверхность – сходным образом зависят от параметров задачи. Это наводит на мысль закрепить эту похожесть в строгом определении, т.е. придать правилу густоты строгий, математический смысл. Так, в авторитетных источниках поток вектора отождествляется с количеством векторных линий, пересекающих поверхность изнутри наружу. А далее следует пояснение, что *количество линий* – название несколько условное, так как это количество, как правило, имеет размерность и порой оказывается дробным, но широко применяется из-за своей наглядности.

И действительно, рассуждения на языке векторных линий очень просты и наглядны. Вспомним, что магнитные линии непрерывны. Поэтому сколько линий вошло в какой-то объем, столько же и вышло. С учетом только что сформулированного правила на строгом математическом языке это значит, что поток вектора $\vec{B}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S B_n dS = 0 .$$

Течение жидкости или газа и линии тока

Само название величины – поток вектора, о которой мы ведем речь, сохраняет память о ее происхождении. И в самом деле, поток вектора впервые был введен в гидродинамике для вектора скорости *частицы* $\vec{v}$. При этом, конечно, речь идет не о молекуле. Частица – это малый макроскопический объем среды, в котором находится очень большое число молекул. Линии вектора $\vec{v}$ называются линиями тока. По картине линий тока мы можем судить о направлении скорости течения в каждой точке. Но ведь и по траекториям отдельных частиц мы можем судить о том же. А не совпадают ли линии этих двух типов?

Нет, в общем случае не совпадают. Подчеркнем их различия. Линии тока фиксируются в один момент времени для различных частиц. При построении же траектории мы следим во времени за одной частицей. Так что в общем случае (когда параметры течения меняются со временем) эти линии различаются. Но это различие исчезает тогда, когда все характеристики течения со временем не меняются (такое течение называют стационарным). В монографиях по гидродинамике эти соображения могут быть изложены на строгом математическом языке, но сути дела это не меняет. Итак, в стационарном течении линии тока совпадают с траекториями частиц.

Поток вектора $\vec{v}$ через поверхность определяем как обычно:

$$\Phi_v = \int_S v_n dS .$$

Теперь поставим любимый школьный вопрос: каков физический смысл этой величины? Обратите внимание на размерность, она не случайна:

$$[\Phi] = [v][S] = \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \text{м}^2 = \frac{\text{м}^3}{\text{с}} .$$

Это, конечно, является подсказкой. Действительно, несложно доказать, что Φ_v – это объем среды, прошедшей через выделенную поверхность за единицу времени (см. Дополнения). Эти рассуждения проводятся во многих школьных учебниках при обсуждении уравнения Бернулли и обычно сопровождаются картиной линий тока, аналогичной представленной на рисунке 1. При стационарном течении по каналу массы жидкости, протекшей за какое-то время через сечения S_1 и S_2, одинаковы (при стационарном течении не может меняться масса среды, заключенная в объеме между этими сечениями). Мы обычно считаем жидкость несжимаемой, в этом случае плотность во всех точках одинакова. Поэтому из утверждения о равенстве масс следует равенство соответствующих объемов, т.е. равенство потоков Φ_v, а значит, и числа линий тока, пересекающих эти сечения.

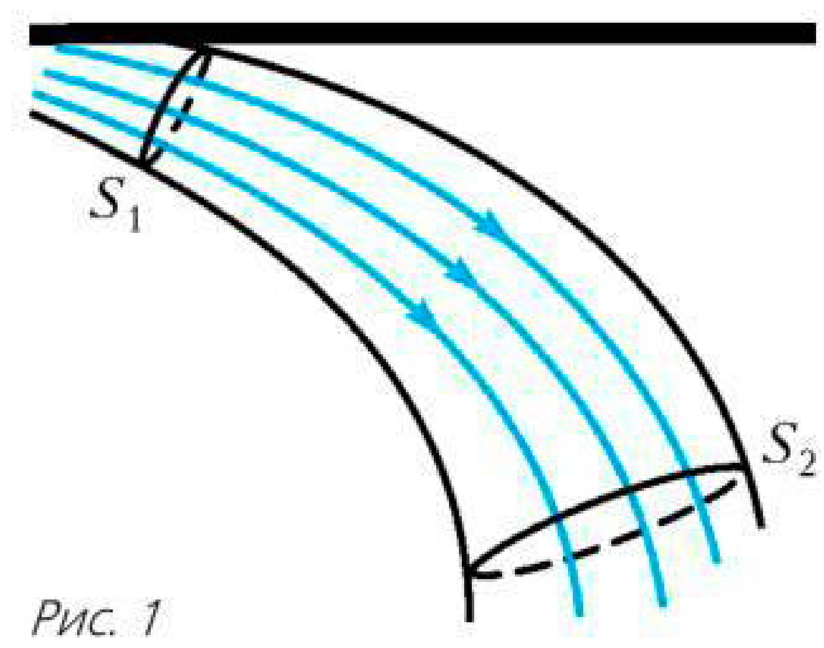


Рис. 1

Что изменится в этих рассуждениях при переходе к течению сжимаемого газа? На первый взгляд, картина линий тока должна сохранить свой вид. Но это не так! Из одинаковости массы, протекшей через сечения S_1 и S_2, теперь уже не следует равенство соответствующих объемов, ведь плотность газа меняется по трубе. (Как именно она меняется, можно было бы установить из уравнений газодинамики, задав конкретные условия течения, – но мы не будем этим заниматься.) Так что в случае газа нет никаких оснований утверждать равенство потоков Φ_v через сечения S_1 и S_2, а следовательно, и одинаковость числа линий тока, пересекающих сечения S_1 и S_2.

Итак, если мы хотим сохранить правило густоты, то должны были бы рисовать линии тока, заканчивающиеся или начинающиеся в объеме. Согласиться с такой картинкой (т.е. расстаться с представлениями о непрерывности линий тока) психологически было бы очень трудно. Но можно описывать течение газа не вектором скорости, а вектором «массовой скорости» $\vec{w} = \rho\vec{v}$, где ρ – плотность газа. Величина потока этого вектора через поперечное сечение канала равна массе газа, прошедшей через сечение за единицу времени, т.е. одинакова в любом сечении, и все требования к линиям вектора $\vec{w}$ удовлетворяются. Таким образом, могут одновременно выполняться и требование непрерывности линий, и правило густоты.

Магнитные линии

Теперь займемся магнитными линиями, т.е. линиями вектора $\vec{B}$. Отсутствие магнитных зарядов приводит к тому, что магнитные линии непрерывны, т.е. не могут в какой-то точке начинаться или заканчиваться. Как же тогда они могут выглядеть? Один вариант очевиден – они могут быть замкнутыми кривыми. Кроме того, магнитная линия может начинаться в бесконечности и заканчиваться в бесконечности (именно так выглядит, например, магнитная линия, идущая по оси кругового витка с током).

Следующий пример покажет, что существуют магнитные линии и совсем другого типа. Пусть провод, по которому идет ток I, свернут в окружность. Ясно, что в непосредственной близости к проводу магнитные линии близки к окружностям. Все такие линии одного размера образуют поверхность тора (рис.2).

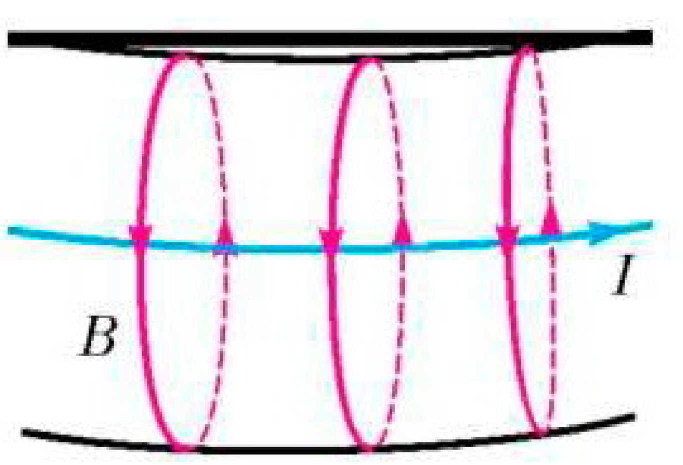


Рис. 2

Немного усложним ситуацию: расположим по оси этого витка с током I прямой провод, по которому идет малый ток i. Теперь в области выделенных нами магнитных линий появится дополнительное поле b. Магнитные поля кругового тока и прямого тока будут накладываться друг на друга. Как в этом случае будет выглядеть магнитная линия суммарного поля $\vec{B}+\vec{b}$? После одного оборота магнитная линия не совпадет сама с собой, а превратится в винтовую линию на поверхности тора (рис.3). Шаг этой винтовой линии h будет определяться током i: чем меньше i, тем меньше b и, следовательно, тем меньше h. Обратим внимание на одно удивительное обстоятельство – получается, что чем *меньше* суммарное поле на поверхности тора, тем *более плотно* будет навиваться винтовая магнитная линия на тор!

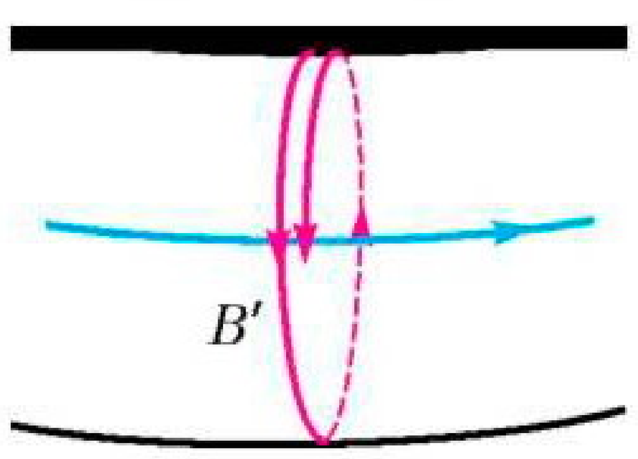


Рис. 3

Получается, что в общем случае и для магнитных линий тоже оказывается невозможным следовать правилу о густоте линий.

Рассмотренный выше пример можно проанализировать «до конца» – т.е. выяснить, совпадет ли винтовая магнитная линия, описав весь тор, сама с собой. Оказывается, это будет иметь место лишь при определенных значениях отношения i/I (впрочем, этот результат весьма нагляден). В общем же случае винтовая магнитная линия будет бесконечно навиваться на тор.

Этот пример показывает, что возможен и третий тип магнитной линии – не имеющей начала и конца и при этом остающейся в ограниченной области пространства. Густота линий в этом случае бесконечно велика при конечной величине поля.

Заметим, что если для электростатического поля есть возможность другого способа графического представления – с помощью эквипотенциалей, то для магнитного поля такой возможность нет – магнитное поле непотенциально.

Итак, картина линий вектора – чрезвычайно удобный способ наглядного представления любого векторного поля. Но пользоваться этим «инструментом» надо с большой осторожностью.

* * *

Интересна история рассмотренного нами примера. Он впервые появился в 1929 году в первом издании замечательного учебника И.Е.Тамма «Основы теории электричества». Учебник переиздается до сих пор. Автор учебника впоследствии стал академиком и лауреатом Нобелевской премии. В 1950–51 годах И.Е.Таммом и его учеником (ныне всем известным) А.Д.Сахаровым была выдвинута идея создания термоядерного реактора. Так стали называть установку, где плазма нагревалась бы до таких температур, при которых в ней могут идти реакции синтеза легких ядер – в таких реакциях выделяется огромная энергия. Главная идея авторов состояла в том, что плазму можно удерживать от контакта со стенкой магнитным полем. В последние десятилетия оказалось, что магнитное поле именно такой геометрии, которая рассмотрена выше, играет большую роль в одном из типов термоядерных реакторов – в стеллараторе.

Дополнения

Чтобы не загромождать основной текст статьи, там оставлены только важные, «идейные» вопросы. А в этот раздел вынесены частные, «технические» моменты, причем сформулированные в виде задач.

1. *Поток вектора определяется для какой-то поверхности. Но в законе электромагнитной индукции все учебники всегда говорят о потоке вектора магнитной индукции через контур. Почему это возможно?*

Дело в том, что число магнитных линий, пересекающих разные поверхности, опирающиеся на данный контур, например поверхности S_1, S_2, S_3 на рисунке 4, одинаково, т.е. одинаковы и потоки через любые такие поверхности. Поэтому-то и можно не указывать конкретную поверхность, а говорить просто о магнитном потоке *через контур*, общем для всех поверхностей.

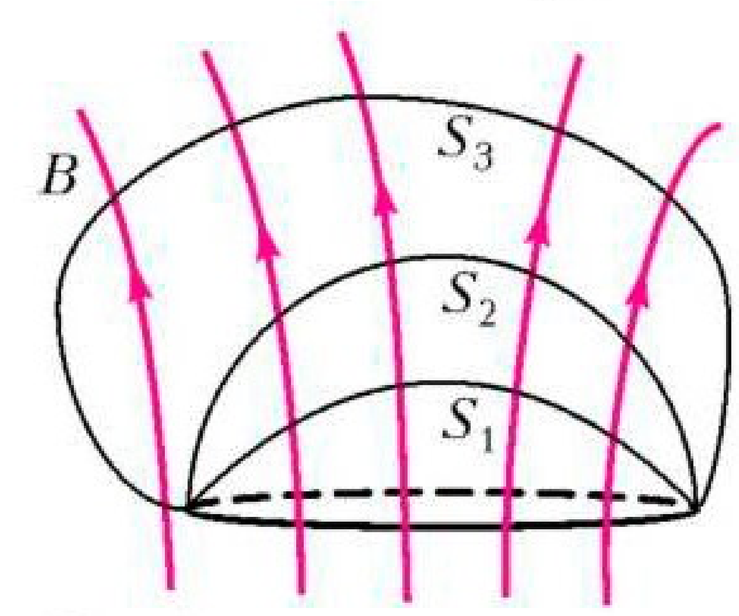


Рис. 4

Обратите внимание на то, что одна из магнитных линий на рисунке 4 пересекает одну поверхность (S_3) дважды и это обстоятельство, на первый взгляд, нарушает сформулированное выше утверждение. Но эта линии пересекает поверхность S_3 с разных сторон – снаружи и изнутри, и потому она должна учитываться в сумме магнитных линий один раз со знаком «+», а другой раз со знаком «–», т.е. она вообще не будет учитываться в этой сумме.

2. *Найдите магнитный поток через полусферу радиусом R в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Ось полусферы составляет с вектором $\vec{B}$ угол α (рис.5).*

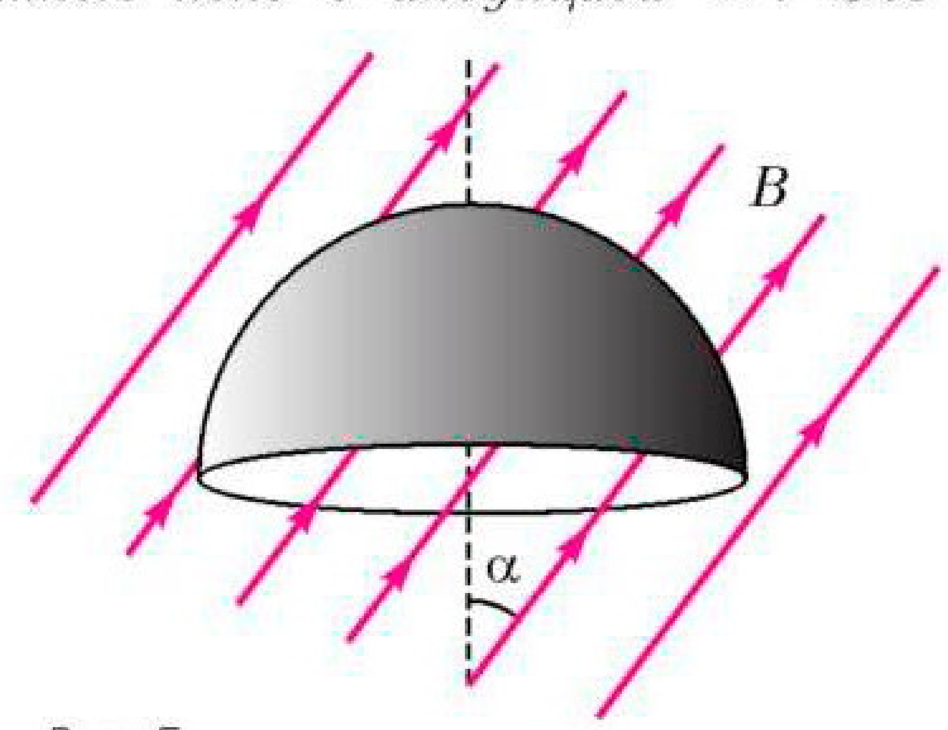


Рис. 5

На первый взгляд, такая задача может показаться слишком сложной – явно не для школьного курса. Действительно, вычислять интеграл по полусфере – непростая задача. Но никакой необходимости в этом нет, ведь интересующий нас поток равен потоку по

(Продолжение см. на с. 53)

Абстрактная математика волейбольного турнира

М.ГОРЕЛОВ

Рассматриваемая ниже задача, взятая «из жизни», довольно неожиданно потребовала для своего решения привлечения идей из очень многих, казалось бы, весьма далеких областей математики. В данной статье эта задача используется как удобный повод рассказать о некоторых из этих идей, относящихся к алгебре и теории чисел. К сожалению, рамки статьи не позволили рассказать о связях задачи с аффинной геометрией и основаниями математики. Подумав над этой задачей самостоятельно, читатель может найти эти, а возможно, и другие, еще более удивительные связи.

Главным, конечно же, является не повод, а те идеи, о которых пойдет речь. Они важны для самой математики и успешно работают в действительно серьезных приложениях, например в теории планирования экспериментов и теории кодов. Последняя область в настоящее время весьма интенсивно развивается в связи с компьютеризацией всей человеческой деятельности.

Постановка задачи

На протяжении двух десятилетий Международная федерация волейбола проводит гран-при среди женских сборных. До 2012 года регламент соревнований был следующим.

В турнире участвуют 16 команд. На предварительном этапе соревнований проводятся три тура. В каждом туре команды разбиваются на четыре группы по четыре команды в каждой, и команды каждой группы играют по круговой системе (каждая с каждой). По итогам трех туров восемь команд, одержавших наибольшее количество побед, проходят в финальный этап соревнований.

Реальное расписание соревнований предполагало, что некоторые из сборных встречались за три тура дважды, а некоторые не встречались вовсе. Например, в 2011 году сборная России дважды играла с командой Перу и ни разу не встретилась с командой Китая. Это не очень хорошо. Во-первых, матч Россия–Перу не из самых интересных. А во-вторых, это не совсем справедливо. Представим, например, что среди шестнадцати команд есть заведомый аутсайдер, который намного слабее всех остальных. Тогда команда, которая встречается с ним дважды, получает очевидное преимущество. Или, наоборот, если одна из команд гораздо сильнее всех остальных, то сборная, которая встретится с ней дважды, будет в заведомо худшем положении по сравнению с командами, которые с лидером ни разу не встретятся.

Комментатор одного из телеканалов утверждал, что составить расписание так, чтобы никакие две команды не встречались дважды, не получится. Естественно возникает вопрос: а так ли это? И вообще, какое наибольшее число туров можно провести так, чтобы никакие две команды не встретились дважды? Последним вопросом мы и будем заниматься.

Вопрос оказывается довольно трудным, поэтому, приступая к его исследованию, разумно посмотреть на аналогичные, но более простые задачи.

Чтобы понять, что значит «аналогичный», обычно стоит сформулировать более общую задачу, что мы и сделаем. Наиболее естественное обобщение выглядит так.

В турнире участвуют n^2 команд. В каждом туре команды разбиваются на n групп по n команд в каждой, и внутри группы каждая команда играет с каждой. Какое наибольшее число туров можно провести так, чтобы никакие две команды не встретились дважды?

Теперь можно приступать к решению.

Верхняя оценка

Сначала получим один простой, но полезный результат, справедливый в общем случае.

Выберем любую команду, например сборную России. В лучшем случае она сыграет с каждой из оставшихся, поэтому всего она может провести не более n^2-1 игр. В каждом туре эта команда играет $n-1$ матчей. Значит, количество туров не может превысить $\dfrac{n^2-1}{n-1}=n+1$.

Здесь нам уже немножко повезло, поскольку при делении получилось целое число.

Простейшие случаи

А теперь будем двигаться от простого к сложному (постепенно выясняя, что значит «простое»). Начать естественно с маленьких значений n.

Случай $n = 1$ тривиален.

Рассмотрим $n = 2$. Пусть мы уже нашли оптимальное расписание. Допустим, согласно этому расписанию команды разбиваются на группы A и B. Обозначим команды, вошедшие в группу A, номерами 1 и 2, а команды из группы B – числами 3 и 4. Таким образом, группы, сформированные в первом туре, задаются таблицей 1.

Таблица 1

1	2
3	4

Понятно, что во втором туре в одну группу могут входить только команды, стоящие в разных строках этой таблицы. Переставив, если нужно, команды в нижней строке (и сменив нумерацию), можно добиться того, что согласно выбранному оптимальному расписанию во втором туре будут играть команды, стоящие в одном столбце.

А теперь замечаем, что для третьего тура остается всего одна возможность, когда играют команды, стоящие в этой таблице по диагоналям, т.е. 1 и 4, а также 2 и 3.

Итак, мы нашли расписание, которое позволяет провести три тура. А больше провести нельзя, как показывает результат предыдущего раздела. Таким образом, для $n = 2$ задача решена.

При этом удалось нащупать хорошую идею: команды стоит записывать в виде квадратной таблицы размера $n \times n$. Но тогда и нумеровать их разумно не одним числом, а двумя: номером строки (сверху вниз) и номером столбца (слева направо). Так и будем поступать в дальнейшем.

Обратимся к случаю $n = 3$. В этом случае теоретически возможно не более четырех туров. Попробуем построить соответствующее расписание.

Для двух первых туров варианты понятны: в первом туре формируются группы A, B, C из команд, стоящих в одной строке, а во втором – группы D, E, F из команд, стоящих в одном столбце (для любого расписания команды можно так расставить в таблицу, что это условие будет выполняться).

Для третьего тура тоже есть идея: формировать группы G, H, I «по диагонали», так, как показано в таблице 2. А тогда

Таблица 2

I,J	H,K	G,L
H,L	G,J	I,K
G,K	I,L	H,J

для четвертого тура остается один вариант (именно в этом случай $n = 3$ проще случая $n = 4$). А именно, в одну группу с командой (1, 1) (стоящей в первой строке и первом столбце) могут входить только команды, с которыми она еще не играла, т.е. (2, 2) и (3, 3). Аналогично, в одну группу с командой (1,2) могут входить команды (2, 3) и (3, 1), а с командой (2, 1) – команды (1, 3) и (3, 2). Так формируются группы J, K, L.

Теперь уже несложно проверить, что таким образом действительно получилось допустимое расписание и, следовательно, для $n = 3$ задача тоже решена.

Попробуем разобраться в том, какие закономерности управляют построенным расписанием. Ключевое замечание состоит в том, что в группу G входят команды $(i,\ j)$, для которых сумма $i + j$ дает при делении на 3 остаток 1. В группу H входят команды, для которых эта сумма делится на 3. А в группу I – команды, для которых остаток от деления $i + j$ на 3 равен 2.

А что же для четвертого тура? Там в одну группу входят команды $(i,\ j)$, для которых сумма $i + 2j$ дает один и тот же остаток при делении на 3.

Эти идеи весьма плодотворны, но, чтобы двигаться дальше, нужно развить соответствующий математический аппарат.

Упражнение 1. Рассмотрим случай $n = 4$. Будем составлять расписание по аналогии с предыдущим, распределяя команды в группы сначала по строкам, затем по столбцам, а потом параллельно одной из диагоналей квадратной таблицы. Тогда уже четвертый тур провести, соблюдая все условия, не удастся. Докажите это.

Арифметика вычетов

Аппарат, излагаемый в данном разделе, был развит К.Ф.Гауссом[1] в его книге «Disquisitiones arithmeticae» («Арифметические исследования»), вышедшей в 1801 году.

Фиксируем некоторое натуральное число n. Тогда множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел можно разбить на n классов. В один из них $\{\ldots, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \ldots\}$ войдут числа, делящиеся на n. В другой $\{\ldots, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, 3n+1, \ldots\}$ – числа, дающие при делении на n остаток 1, и так далее. В последний класс $\{\ldots, -2n-1, -n-1, -1, n-1, 2n-1, 3n-1, \ldots\}$ войдут числа, дающие при делении на n остаток $n - 1$. Эти классы называются *классами вычетов по модулю n*, множество всех этих классов обозначается $\mathbb{Z}_n$.

Будем обозначать множество (класс), в которое входит число k, символом $[k]$. Это очень удобно. Хотя нужно привыкнуть к тому, что, например, $[n + 1] = [1]$. А в остальном можно закрывать глаза на наличие квадратных скобок и обращаться с этими множествами, как с обычными числами. Например, эти множества можно складывать и умножать. Делается это следующим образом.

Чтобы найти сумму множеств $[k]$ и $[l]$, нужно выбрать какое-нибудь число k' из множества $[k]$ и какое-нибудь число l' из множества $[l]$, найти их сумму $k' + l'$ и объявить класс, в который входит эта сумма, суммой $[k] + [l]$ классов $[k]$ и $[l]$. Аналогично определяется и произведение классов. Правда, нужно убедиться, что эти операции сложения и умножения определены корректно, т.е. что результат не зависит от того, какие представители классов были выбраны для вычисления произведения или суммы. Но делается это несложно.

[1] Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) – крупнейший немецкий математик, не чуждавшийся и прикладных задач.

Покажем, например, что корректно определена операция умножения. Пусть нам нужно найти произведение классов $[k]$ и $[l]$. Выберем двух представителей k' и k'' из класса $[k]$ и двух представителей l' и l'' из класса $[l]$. Найдем произведения $k'l'$ и $k''l''$. Их разность $k'l' - k''l'' = k'(l' - l'') + (k' - k'')l''$ делится на n, так как выражения в каждой из скобок в последней формуле делятся на n (в силу того, что там стоят числа из одного класса). Значит, числа $k'l'$ и $k''l''$ принадлежат одному классу, что и требовалось доказать.

Упражнение 2. Докажите, что операция сложения классов определена корректно.

Операции сложения и умножения классов наследуют от целых чисел многие свойства. Наиболее важными из них являются следующие.

1. *Ассоциативность сложения.* Для любых классов $[k]$, $[l]$ и $[m]$ выполняется равенство $([k] + [l]) + [m] = [k] + ([l] + [m])$.
2. *Существование нуля.* Существует такой класс $[0]$, что для любого класса $[k]$ выполняется равенство $[k] + [0] = [k]$.
3. *Существование противоположного класса.* Для любого $[k]$ существует класс $-[k]$, для которого выполняется равенство $[k] + (-[k]) = [0]$.
4. *Коммутативность сложения.* Для любых классов $[k]$ и $[l]$ выполняется равенство $[k] + [l] = [l] + [k]$.
5. *Ассоциативность умножения.* Для любых классов $[k]$, $[l]$ и $[m]$ выполняется равенство $([k]\cdot[l])\cdot[m] = [k]([l]\cdot[m])$.
6. *Дистрибутивность.* Для любых классов $[k]$, $[l]$ и $[m]$ выполняется равенство $([k]+[l])\cdot[m] = [k]\cdot[m] + [l]\cdot[m]$.
7. *Существование единицы.* Существует такой класс $[1]$, что для любого класса $[k]$ выполняется равенство $[k]\cdot[1] = [k]$.
8. *Коммутативность умножения.* Для любых классов $[k]$ и $[l]$ выполняется равенство $[k]\cdot[l] = [l]\cdot[k]$.

Докажем, для примера, свойство дистрибутивности. Для этого фиксируем в классах $[k]$, $[l]$ и $[m]$ элементы k, l и m. Тогда по определению сложения классов элемент $k + l$ принадлежит классу $[k] + [l]$. А значит, по определению умножения классов, элемент $(k + l)m$ принадлежит классу $([k]+[l])\cdot[m]$. С другой стороны, по определению умножения классов элементы km и lm принадлежат классам $[k]\cdot[m]$ и $[l]\cdot[m]$ соответственно. Тогда по определению сложения классов элемент $km + lm$ принадлежит классу $[k]\cdot[m] + [l]\cdot[m]$. Но по свойству целых чисел числа $(k + l)m$ и $km + lm$ равны. А так как число $(k+l)m = km + lm$ принадлежит и классу $([k]+[l])\cdot m$, и классу $[k]\cdot[m] + [l]\cdot[m]$, то эти классы совпадают. Что и требовалось доказать.

Упражнение 3. Докажите еще два свойства на выбор.

Таким образом, арифметика классов вычетов очень похожа на арифметику обычных целых чисел.

Метод, которым была построена эта арифметика, весьма общий. Он называется *факторизацией*. Факторизация позволяет отвлечься от незначительных деталей и сосредоточить внимание на свойствах, наиболее важных. При решении нашей задачи составления расписания волейбольного турнира наиболее важными являются свойства делимости. Поэтому мы и начали заниматься арифметикой вычетов.

Для небольших значений модуля n можно построить полные таблицы сложения и умножения. Для $n = 5$ они приведены в таблицах 3 и 4. Заполняются они так. На пересечении четвертой строки и пятого столбца таблицы умножения должно стоять произведение классов [3] и [4]. Находим $[3]\cdot[4] = [3\cdot 4] = [12] = [2]$. Поэтому в соответствующей клетке и написан класс [2].

Таблица 3

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[0]	[1]	[2]	[3]

Таблица 4

×	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[0]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[0]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[0]	[4]	[3]	[2]	[1]

Упражнение 4. Составьте таблицы сложения и умножения для $n = 2, 3, 4$.

Наблюдение за этими таблицами позволяет выявить важные свойства соответствующих операций. Например, эти таблицы симметричны относительно главных диагоналей, идущих из левого верхнего в правый нижний угол. Это соответствует свойствам коммутативности сложения и умножения.

Одно наблюдение стоит отметить особо. Во всех строках таблицы умножения, кроме второй, встречается класс [1]. Если вы выполнили последнее упражнение, то вы можете заметить, что это свойство выполняется при $n = 2$ и 3, но не выполняется при $n = 4$. Это наблюдение можно обобщить следующим образом.

Для простого модуля n выполняется следующее свойство.

9. *Существование обратного класса.* Для любого $[k]$, отличного от $[0]$, существует класс $[k]^{-1}$, для которого выполняется равенство $[k]\cdot([k]^{-1}) = [1]$.

Доказать это свойство позволяет другое наблюдение. Во всех строках приведенной таблицы умножения, кроме второй, все числа различны. Это справедливо и для любого простого модуля n. Для доказательства допустим противное. Тогда существуют классы $[k]$, $[l]$ и $[m]$ такие, что $[l] \neq [m]$, $[k] \neq [0]$, но $[k]\cdot[l] = [k]\cdot[m]$. Выберем в классах $[k]$, $[l]$ и $[m]$ представителей k, l и m так, чтобы они принадлежали множеству $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Тогда kl и km принадлежат одному классу, значит, разность $kl - km$ делится на n. Но $kl - km = k(l-m)$. Каждый из сомножителей правой части этой формулы больше $-n$, но меньше n (и отличен от нуля), а потому не делится на n. А значит, на n не делится и произведение (вот здесь важно, что n – простое число). Противоречие доказывает нужное свойство.

Теперь можно доказать и свойство 9. Здесь стоит воспользоваться еще одним преимуществом классов вычетов над обычными числами. Количество классов вычетов всегда конечно. А именно, их число равно n. Итак, в каждой строке таблицы умножения стоит один из n классов. Причем все эти классы различны, а их число равно n, если не брать в расчет самую левую клетку. Поэтому каждый класс встречается ровно один раз. Отсюда следует свойство 9.

Кольца и поля

Если на некотором множестве заданы операции сложения и умножения, для которых выполняются свойства 1–6, то это множество называется *кольцом*. Если выполняются свойства 1–7, то говорят о *кольце с единицей*. Когда выполняются свойства 1–8, мы имеем дело с *коммутативным кольцом с единицей*. А если выполняются свойства 1–9, то множество называют *полем*.

Существует большое число колец и полей. Многие из них читателю наверняка известны.

Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ является кольцом. Множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и действительных чисел $\mathbb{R}$ являются полями. Кольцом является множество всех многочленов.

В предыдущем разделе было показано, что множество $\mathbb{Z}_n$ классов вычетов по модулю n является кольцом при любом n и полем, если n – простое число.

Приведем еще один, на первый взгляд экзотический, но на самом деле важный пример. Пусть задано произвольное множество X. Научимся складывать и умножать его подмножества. Для этого рассмотрим функции, определенные на множестве X и принимающие значения из поля $\mathbb{Z}_2$. Поскольку $\mathbb{Z}_2$ – поле, эти функции можно складывать и умножать по обычным правилам. Между такими функциями и подмножествами множества X естественным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие. А именно, функции f можно поставить в соответствие множество $Y_f = \{x \in X : f(x) = [1]\}$. Обратно, множеству $Y \subset X$ можно поставить в соответствие функцию

$$f_Y(x) = \begin{cases} [1], & \text{если } x \in Y, \\ [0] & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

А теперь суммой множеств Y и Z можно назвать множество $Y + Z$, которое соответствует сумме $f_Y + f_Z$. Аналогично определится произведение $Y \cdot Z$. При таком определении произведение множеств – это просто их пересечение. А сумма – это симметрическая разность, т.е. множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств Y или Z. Свойства кольца при этом наследуются от кольца $\mathbb{Z}_2$.

Упражнения

5. Какое множество в этом кольце играет роль нуля?

6. Существует ли в этом кольце единица?

Важность понятий кольца и поля определяется тем, что такие структуры весьма многочисленны, а доказательства их свойств можно провести один раз для них всех. В частности, можно использовать хорошо известные свойства целых и действительных чисел. Нужно только проверить, что при их доказательствах не использовалось ничего, кроме перечисленных в предыдущем разделе свойств.

Линейные уравнения

В частности, обычным образом может быть построена теория линейных уравнений над полем вычетов $\mathbb{Z}_n$, где n – простое число.

Например, если $[a] \neq [0]$, то уравнение $[a]\cdot[x] + [b] = [0]$ имеет единственное решение. В самом деле, в силу свойства 3 существует класс $-[b]$ такой, что $[b] + (-[b]) = [0]$. Тогда $([a]\cdot[x] + [b]) + (-[b]) = [0] + (-[b]) = -[b]$ (свойство 2). Теперь по свойству 1 имеем

$$[a]\cdot[x] + ([b] + (-[b])) = -[b],$$

или $[a]\cdot[x] = -[b]$. Далее, по свойству 9 существует класс $[a]^{-1}$. Тогда $[a]^{-1}\cdot([a]\cdot[x]) = [a]^{-1}(-[b])$, и по свойству 5 получим равенство $\left([a]^{-1}\cdot[a]\right)\cdot[x]=[a]^{-1}\left(-[b]\right)$, откуда $[x]=[a]^{-1}\left(-[b]\right)$ (по определению обратного класса). Таким образом, решение найдено.

Разберемся с системами двух линейных уравнений с двумя неизвестными вида

$$\begin{cases}[a]\cdot[x]+[b]\cdot[y]=[k],\\ [c]\cdot[x]+[d]\cdot[y]=[l]\end{cases}$$

(естественно предполагать, что и в паре $([a],[b])$ и в паре $([c],[d])$ по крайней мере один класс отличен от $[0]$). Здесь удобно перейти на геометрический язык. Множество всех упорядоченных пар $([x],[y])$ по аналогии со случаем поля действительных чисел назовем плоскостью. Тогда множество решений уравнения $[a]\cdot[x]+[b]\cdot[y]=[k]$ – это, разумеется, прямая.

Теперь геометрическая интуиция подсказывает, что две прямые либо параллельны, либо пересекаются в единственной точке. Это действительно так.

Рассмотрим сначала случай, когда классы $[a]$ и $[b]$ «пропорциональны» классам $[c]$ и $[d]$, т.е. существует такой ненулевой класс $[m]$, что $[m]\cdot[a]=[c]$ и $[m]\cdot[b]=[d]$. Тогда система преобразуется к виду

$$\begin{cases}[a]\cdot[x]+[b]\cdot[y]=[k],\\ [m]\left([a]\cdot[x]+[b]\cdot[y]\right)=[l],\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}[a]\cdot[x]+[b]\cdot[y]=[k],\\ [a]\cdot[x]+[b]\cdot[y]=\left([m]^{-1}\right)[l].\end{cases}$$

В этом случае, если $[k]\neq\left([m]^{-1}\right)[l]$, то система решений, очевидно, не имеет, а если $[k]=\left([m]^{-1}\right)[l]$, то решением является вся прямая, задаваемая любым из уравнений системы.

А в случае, когда классы $[a]$ и $[b]$ «не пропорциональны» классам $[c]$ и $[d]$, система имеет единственное решение. Действительно, пусть, например, $[a]\neq[0]$. Тогда из первого уравнения системы получим $[x]=[a]^{-1}\cdot\left([k]+\left(-[b]\cdot[y]\right)\right)$. Подставив это выражение во второе уравнение, получим одно уравнение с одним неизвестным, причем коэффициент перед этим неизвестным будет ненулевой (как раз из-за «непропорциональности»). Такое уравнение, как мы видели, имеет единственное решение $[y]$. А найдя его, по формуле $[x]=[a]^{-1}\cdot\left([k]+\left([b]\cdot[y]\right)\right)$ можно найти и неизвестное $[x]$.

Упражнения

7. Докажите, что рассматриваемая система имеет единственное решение в том и только в том случае, когда $[a]\cdot[d]+\left(-[b]\cdot[c]\right)\neq[0]$.

8. Докажите, что в этом случае решение системы дается формулами

$$[x]=\left([k]\cdot[d]+\left(-[l]\cdot[b]\right)\right)\left([a]\cdot[d]+\left(-[b]\cdot[c]\right)\right)^{-1}$$

и

$$[y]=\left([k]\cdot[c]+\left(-[l]\cdot[a]\right)\right)\left([a]\cdot[d]+\left(-[b]\cdot[c]\right)\right)^{-1}.$$

Возвращение к волейболу

Вернемся к найденному решению задачи составления расписания волейбольного турнира для $n = 3$. Мы условились записывать команды в виде квадратной таблицы размера 3×3. Строки и столбцы этой таблицы можно нумеровать не числами 1, 2, 3, а классами вычетов $[0]$, $[1]$, $[2]$ по модулю 3. Тогда группы в каждом туре – это параллельные прямые. В первом туре они задаются уравнениями $[x] = [k]$, во втором – уравнениями $[y] = [k]$, в третьем – уравнениями $[x] + [y] = [k]$, а в четвертом – уравнениями $[x]+[2]\cdot[y]=[k]$ (в каждом случае k пробегает значения 0, 1, 2).

Упражнение 9. Докажите, что в поле вычетов по модулю 3 прямые $[x]+[2]\cdot[y]=[k]$ и $[2]\cdot[x]+[y]=[l]$ параллельны.

Тот факт, что никакие две команды не встречаются дважды, следует из того, что две непараллельные прямые пересекаются в одной точке. В каждую группу входит три команды – это то же самое, что прямая состоит из трех точек. А максимальное количество туров – это количество классов параллельных прямых.

Но те же рассуждения проходят и над полем вычетов по любому простому модулю. В самом деле, то, что система двух «непропорциональных» уравнений имеет единственное решение, уже установлено в предыдущем разделе.

Над полем вычетов по простому модулю n каждая прямая состоит из n точек. Действительно, если $[a]\neq[0]$, то можно произвольным образом задать значение $[y]$ (здесь имеется n возможностей), и тогда, решив линейное уравнение с одним неизвестным, найдем единственное значение $[x]$. В случае $[a] = [0]$ должно быть $[b]\neq[0]$, и все аналогично.

Остается посчитать число различных классов параллельных прямых. Прежде всего, заметим, что имеется один класс «вертикальных» прямых, задаваемых уравнениями вида $[x] = [k]$. Здесь k может принимать n значений 0, 1, …, $n - 1$, а потому этот класс параллельных прямых состоит из n прямых. Во всех остальных случаях уравнение $[a]\cdot[x]+[b]\cdot[y]=[k]$ можно привести к виду $[b]^{-1}\cdot[a]\cdot[x]+[y]=[b]^{-1}\cdot[k]$. Поэтому, придавая коэффициенту $[a]$ разные значения, мы будем получать непараллельные прямые. Всего имеется n возможностей, что соответствует n классам по n прямых в каждом. Итого получим $n + 1$ класс параллельных прямых.

Значит, при простом n можно построить допустимое расписание волейбольного турнира, состоящее из $n + 1$ тура. Поэтому для таких значений n задача решена.

Упражнение 10. Выпишите явно расписание турнира для случая $n = 5$.

Но в наиболее интересном для нас случае $n = 4$ эти рассуждения не проходят, поскольку кольцо $\mathbb{Z}_4$ не является полем. Поэтому, например, над этим полем линейное уравнение $[2]\cdot[x]+[2]\cdot[y]=[1]$ не имеет решений.

Тем не менее, использованная выше идея проходит. Нужно только сконструировать поле, состоящее из четырех элементов. Для построения такого поля можно воспользоваться теми же идеями, что были использованы выше. Нужное поле можно сконструировать из классов вычетов. Только элементами этих классов будут не числа, а многочлены. Реализация этого плана не содержит принципиально новых идей, но требует некоторого навыка к абстрактному мышлению. Поэтому мы не будем приводить полных рассуждений, а выпишем таблицы сложения и умножения, отправляясь непосредственно от аксиом поля.

Поле из четырех элементов

Обозначим элементы поля буквами o, e, k и l. Будем считать, что элемент o играет роль нуля, а элемент e – роль единицы.

Начнем с таблицы умножения (табл.5). Свойство 7 позволяет заполнить второй столбец, а в совокупности со свойством 8 – еще и вторую строку.

Таблица 5

×	o	e	k	l
o	o	o	o	o
e	o	e	k	l
k	o	k	l	e
l	o	l	e	k

Разберемся с первой строкой. Пусть x – произвольный элемент поля. Умножим равенство $o + o = o$ на x. Получим $o \cdot x + o \cdot x = o \cdot x$. Прибавив к обеим частям этого равенства $-o \cdot x$, найдем $o \cdot x = o$.

Теперь найдем произведение $k \cdot l$. Равенство $k \cdot l = o$ невозможно, так как, умножив его на k^{-1}, получили бы $l = o$ вопреки выбору обозначений. Равенство $k \cdot l = k$ опять невозможно, так как после умножения его на k^{-1} получили бы $l = e$. По тем же причинам невозможно равенство $k \cdot l = l$. Остается один вариант $k \cdot l = e$.

Аналогично предыдущему абзацу доказывается, что $k \cdot k \neq o$ и $k \cdot k \neq k$. Если бы $k \cdot k = e$, то в силу результата предыдущего абзаца $k \cdot k = k \cdot l$ и тогда $k = l$, что невозможно. Значит, $k \cdot k = l$. Аналогично, $l \cdot l = k$.

Таблица 6

+	o	e	k	l
o	o	e	k	l
e	e	o	l	k
k	k	l	o	e
l	l	k	e	o

Теперь обратимся к таблице сложения (табл.6). Первую строку и первый столбец легко заполнить, пользуясь свойствами 2 и 4. Как и выше, доказывается, что $k + e \neq k$ и $k + e \neq e$. Равенство $k + e = o$ тоже приводит к противоречию, так как тогда после умножения на k получили бы $k \cdot k + k = o$, $l + k = o$ и, следовательно, $k + e = l + k$, откуда $l = e$. Значит, $k + e = l$. Аналогично, $l + e = k$.

Далее, очевидно, $k + l \neq k$ и $k + l \neq l$. Равенство $k + l = o$ влечет $k \cdot k + k \cdot l = o$, $l + e = o$, $k = e$, т.е. приводит к противоречию. Остается одна возможность $k + l = e$.

Теперь, $e + e \neq e$, $e + e \neq l = k + e$ и $e + e \neq k = l + e$. Значит, $e + e = o$. Умножая последнее равенство на k и l соответственно, получим $k + k = o$ и $l + l = o$. Таким образом, можно построить только одно поле из четырех элементов.

Дальнейшее уже полностью следует описанной выше схеме, поэтому не будем лишать читателя удовольствия получить решение основной задачи самостоятельно.

Упражнения

11. Убедитесь, что множество $\{o, e, k, l\}$ с операциями сложения и умножения, заданными таблицами 5 и 6, образует поле.

12. Постройте оптимальное расписание для турнира из 16 волейбольных команд.

Можно показать, что найденное таким образом решение единственно с точностью до переименования команд и перестановки групп и туров. Но для этого потребуется знание геометрии! Эта геометрия элементарна, хотя тоже немного выходит за рамки школьной программы.

Что дальше?

Подобным образом можно решить задачу для значений n, являющихся степенью простого числа. Следующий по сложности случай соответствует $n = 6$. Вот здесь начинаются настоящие трудности. Дело в том, что количество элементов конечного поля непременно должно быть степенью простого числа. Поэтому поля, состоящего из шести элементов, попросту не существует. И использовать ту же идею в этом случае не получается. Решение задачи в этом случае мне неизвестно (но исходную практическую задачу решить все-таки удалось!).

Жизнь не стоит на месте. В 2013 году регламент соревнований был изменен. Теперь в турнире участвуют 20 команд, которые в каждом туре делятся на пять групп по четыре команды в каждой. Изложенных выше соображений достаточно, чтобы получить результаты, содержащиеся в следующих упражнениях.

Упражнения

13. В турнире по новым правилам нельзя провести больше шести туров так, чтобы каждая команда встречалась с каждой не более одного раза. Докажите это.

14. Докажите, что можно провести пять туров с соблюдением необходимых условий.

И, наконец, главное. Да, исходная прикладная задача решена. Но любой профессиональный математик знает, что не стоит бросать задачу сразу после ее решения. Очень часто бывает так, что самое интересное начинается после этого. Попробуйте подумать над этой задачей и ее решением. Уверяю вас, на этом пути можно найти еще много ценного!

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Уравнение теплового баланса

А.ЧЕРНОУЦАН

Уравнением теплового баланса называют запись закона сохранения энергии для теплоизолированной системы нескольких тел, изначально имевших различные температуры и приведенных в тепловой контакт друг с другом. В результате теплообмена все тела системы приобретают одинаковую температуру, после чего теплообмен прекращается, т.е. система приходит в состояние теплового равновесия (рис.1). Температуру теплового равновесия будем обозначать t^*.

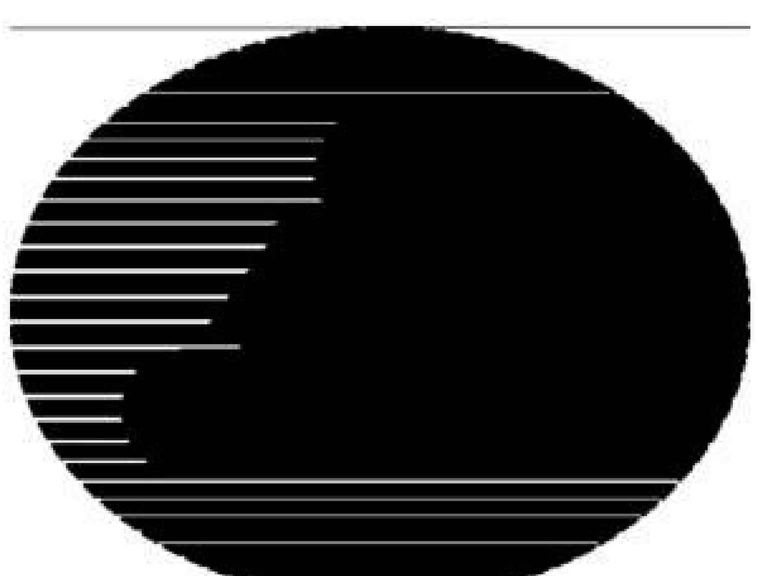


Рис. 1

Уравнение теплового баланса будем записывать в виде

$$Q_1 + Q_2 + \ldots = 0, \quad (1)$$

причем количество теплоты Q считается положительным, если тело получает тепло, и отрицательным, если тело тепло отдает. Можно все отрицательные количества теплоты перенести в правую часть равенства, т.е. записать уравнение теплового баланса в виде «сумма полученных количеств теплоты равна сумме отданных». Выбор формы записи – вопрос вкуса, но, как мы увидим, выбранная нами форма обладает большей степенью автоматизма.

Формулы для подсчета количества теплоты имеют разный вид в зависти от процесса теплообмена.

1) При нагревании или охлаждении твердого тела или

жидкости

$$Q = C\Delta t = C(t_2 - t_1), \qquad (2)$$

где C – теплоемкость тела (размерность теплоемкости $[C]$ = = Дж/К). Для однородных тел (состоящих из одного вещества)

$$Q = cm\Delta t = cm(t_2 - t_1), \qquad (3)$$

где c – удельная теплоемкость *вещества*, из которого состоит тело ($[c]$ = Дж/(кг·К)). Удельные теплоемкости различных веществ можно найти в справочниках (в ЕГЭ некоторые удельные теплоемкости приводятся в начале варианта). Теплоемкость всего тела обычно используют, если оно состоит из различных материалов. Для однородного тела $C = mc$. Заметим, что если t_1 – начальная температура, а t_2 – конечная, то правило знаков для Q выполняется автоматически. Второе важное замечание: температуры не надо переводить из градусов Цельсия в градусы Кельвина, так как в уравнения входят только *разности температур*.

2) Если в процессе перехода к состоянию теплового равновесия с каким-нибудь из тел происходит фазовое превращение, то это тело при постоянной температуре получает (отдает) количество теплоты, пропорциональное массе вещества, испытавшего фазовое превращение. Предполагается, что все процессы фазового превращения происходят при атмосферном давлении. При плавлении твердого вещества (кристаллизации жидкости), которое происходит при температуре плавления, тело получает (отдает) количество теплоты

$$Q = \pm\lambda m, \qquad (4)$$

где λ – удельная теплота плавления ($[\lambda]$ = Дж/кг), знак «+» соответствует плавлению, знак «–» – кристаллизации. При испарении жидкости (конденсации пара), которое происходит равновесно при температуре кипения (температуре равновесия между жидкостью и паром при атмосферном давлении), тело получает (отдает) количество теплоты

$$Q = \pm rm, \qquad (5)$$

где r – удельная теплота парообразования ($[r]$ = Дж/кг), знак «+» соответствует испарению, знак «–» – конденсации.

Для воды (которая присутствует в большинстве задач) $c = 4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К), $\lambda = 3{,}3\cdot10^5$ Дж/кг, $r = 2{,}3 \times 10^6$ Дж/кг, температура плавления 0 °С, температура кипения 100 °С, удельная теплоемкость льда $c_л = 2{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

И последнее замечание, перед тем как мы перейдем к разбору задач. Формулы (2)–(5) позволяют вычислить *количество теплоты*, подведенное к телу в соответствующем процессе при постоянном (атмосферном) давлении. В некоторых задачах (например, на переход механической энергии во внутреннюю) требуется использовать формулы для *изменения внутренней энергии* в различных процессах. Эти формулы отличаются на величину работы против атмосферного давления, совершенной телом при изменении его объема. Например, при нагревании тела на Δt изменение его объема равно $\Delta V = \beta V\Delta t$, где β – коэффициент объемного расширения, поэтому изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U = Q - p_0\Delta V = cm\Delta t - p_0\beta\frac{m}{\rho}\Delta t = \left(c - \frac{p_0\beta}{\rho}\right)m\Delta t .$$

Легко проверить, что поправка к теплоемкости составляет не больше сотой доли процента. При плавлении изменение объема связано с различием в плотностях жидкости и твердого тела:

$$\Delta U = Q - p_0\Delta V = \lambda m - p_0\left(\frac{m}{\rho_ж} - \frac{m}{\rho_т}\right),$$

и поправка к λ составляет не больше десятой доли процента. Для процесса парообразования поправка более существенна. Пренебрегая объемом жидкости по сравнению с объемом пара, получим

$$\Delta U = Q - p_0\Delta V = rm - p_0V_п = m\left(r - \frac{RT}{M}\right).$$

Поправка к r может составлять несколько процентов (для воды примерно 7%).

Самое для нас важное состоит в том, что уравнение закона сохранения энергии для процессов теплообмена в теплоизолированной системе нужно записывать именно в форме (1), а не в виде $\Delta U_1 + \Delta U_2 + \ldots = 0$, как это делается в некоторых пособиях и учебниках. Дело в том, что в процессе теплообмена тела совершают работу не только друг над другом (сумма этих работ равна нулю), но и против внешнего (атмосферного) давления. Сложив уравнения первого закона термодинамики для всех тел системы, получим

$$Q_1 + Q_2 + \ldots = (\Delta U_1 + \Delta U_2 + \ldots) + (A_1 + A_2 + \ldots) = \Delta U + A .$$

В правой части равенства стоят два слагаемых (изменение внутренней энергии системы и работа системы против внешнего давления), сумма которых равна нулю вследствие того, что система теплоизолированная, но каждое из которых может быть отлично от нуля. Именно поэтому в таблицах приводят значения коэффициентов в формулах (2)–(5) для вычисления количества теплоты (при атмосферном давлении), а не для вычисления изменения внутренней энергии.

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных задач. Начнем с самого простого случая, когда тела системы нагреваются или охлаждаются, но не испытывают фазовых превращений.

Задача 1. *Для приготовления ванны емкостью $V = 200$ л смешали холодную воду при $t_1 = 10$ °С с горячей при $t_2 = 60$ °С. Сколько литров холодной воды нужно взять, чтобы в ванне установилась температура $t^* = 40$ °С?*

Решение. Конечная температура каждого из тел равна t^*, поэтому уравнение (1) имеет вид

$$c_в(\rho_в V_1)(t^* - t_1) + c_в(\rho_в V_2)(t^* - t_2) = 0 ,$$

или, в числах,

$$V_1\cdot 30 + V_2\cdot(-20) = 0 .$$

Полный объем двух порций воды должен быть равен объему ванны:

$$V_1 + V_2 = V .$$

Получаем

$$V_1 = \frac{V}{2{,}5} = 80 \text{ л} .$$

Задача 2. *Термометр, показывающий температуру $t_1 = 22$ °С, опускают в воду, после чего он показывает температуру $t^* = 70$ °С. Чему была равна температура (в °С) воды до погружения термометра? Масса воды $m_2 = 40$ г, теплоемкость термометра $C_1 = 7$ Дж/К.*

Решение. Термометр показывает свою собственную температуру, которая в состоянии теплового равновесия равна температуре окружающей среды. Теплом обмениваются термометр и вода, конечное показание термометра дает нам температуру теплового равновесия. Уравнение теплового баланса имеет вид

$$C_1(t^* - t_1) + c_в m_2(t^* - t_2) = 0 ,$$

откуда находим

$$t_2 = t^* + \frac{C_1}{c_в m_2}(t^* - t_1) = 72 \text{ °С} .$$

Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, характерной для любого процесса измерения: использование измерительного прибора может изменить измеряемую величину, и возникает необходимость рассчитать первоначальное, не искаженное процессом измерения, значение этой величины.

Задача 3. *После опускания в воду, имеющую температуру $t_в = 10$ °C, тела, нагретого до $t_1 = 100$ °C, установилась температура $t_1^* = 40$ °C. Какой станет температура (в °C) воды, если, не вынимая первого тела, опустить в нее еще одно такое же тело, нагретое до $t_2 = 120$ °C?*

Решение. Сначала запишем уравнение теплового баланса для первого процесса теплообмена:

$$C\left(t_1^* - t_1\right) + c_в m_в \left(t_1^* - t_в\right) = 0 .$$

Во втором процессе теплообмена участвуют уже три тела – первое тело, вода и второе тело (с такой же теплоемкостью, как у первого):

$$C\left(t_2^* - t_1^*\right) + c_в m_в \left(t_2^* - t_1^*\right) + C\left(t_2^* - t_2\right) = 0 .$$

На первый взгляд может показаться, что в этих двух уравнениях содержится три неизвестных: C, $c_в m_в$ и t_2^*. Однако, разделив оба уравнения на теплоемкость тела C, увидим, что неизвестных только два: $c_в m_в / C$ и t_2^*. Выразив отношение теплоемкостей из первого уравнения и подставив во второе, найдем

$$t_2^* = 60 \text{ °C} .$$

Задача 4. *В калориметре смешиваются три химически не взаимодействующие незамерзающие жидкости массами 1, 10 и 5 кг с удельными теплоемкостями 2, 4 и 2 кДж/(кг · К) соответственно. Температуры первой и второй жидкостей до смешивания были 6 °C и –40 °C. Температура смеси стала –19 °C. Найдите температуру (в °C) третьей жидкости до смешивания.*

Решение. Эта задача демонстрирует, насколько удобнее использовать уравнение теплового баланса в форме (1), а не в виде «сумма полученных количеств теплоты равна сумме отданных». Дело в том, что нам заранее не известно, отдает третья жидкость тепло или получает. Правда, ответ не зависит от того, в какую часть равенства поставить это тело, но не ясно, понимает ли это школьник. При использовании же уравнения (1) никаких проблем не возникает, все знаки регулируются автоматически:

$$c_1 m_1 \left(t^* - t_1\right) + c_2 m_2 \left(t^* - t_2\right) + c_3 m_3 \left(t^* - t_3\right) = 0 .$$

Получаем

$$t_3 = 60 \text{ °C} .$$

Перейдем к задачам с фазовыми превращениями. Если в выражениях для количеств теплоты, полученных при нагревании или отданных при охлаждении, по-прежнему не надо заботиться о знаках (надо только всегда из конечной температуры вычитать начальную), то перед количествами теплоты фазовых превращений (формулы (4), (5)) надо ставить знак «руками»: «+» для испарения и плавления, «–» для конденсации и кристаллизации. Кроме того, надо помнить, что, нагревшись до температуры плавления, твердое тело будет поглощать тепло при постоянной температуре, пока полностью не расплавится. Только после этого дальнейшее получение тепла приведет к нагреванию жидкости. Аналогичным образом происходит кристаллизация жидкости при ее охлаждении до температуры плавления. После нагревания жидкости до температуры кипения при дальнейшем получении тепла происходит равновесное превращение жидкости в насыщенный пар при постоянной температуре, причем количество пара пропорционально полученному количеству теплоты (формула (5)). Если же в начальном состоянии присутствует пар при температуре кипения, то предполагается, что он конденсируется при этой температуре, и только потом происходит охлаждение образовавшейся жидкости (т.е. процесс конденсации насыщенного пара происходит равновесно).

Приступая к решению задачи, надо четко представить все этапы перехода каждого из тел из начального состояния в конечное (равновесное) состояние. Для наглядности можно использовать диаграмму перехода тел системы в равновесное состояние с наглядным изображением всех этапов перехода для каждого из тел. Как это делать, мы покажем на конкретных примерах.

Задача 5. *Ванну емкостью $V = 85$ л необходимо заполнить водой, имеющей температуру $t^* = 30$ °C, используя воду при температуре $t_1 = 80$ °C и лед при температуре $t_2 = -20$ °C. Определите массу льда, который следует положить в ванну.*

Решение. В процессе теплообмена первое тело (горячая вода) просто охлаждается до температуры теплового равновесия t^*, а холодный лед сначала нагревается до температуры плавления $t_{пл} = 0$ °C, затем лед должен полностью расплавиться при постоянной температуре, и только потом получившаяся вода нагревается до температуры t^*. Диаграмма тепловых процессов для этого случая показана на рисунке 2. Температура на таких диаграммах условно отложена на вертикальной оси, поэтому процессы с увеличением температуры направлены снизу вверх, с уменьшением – сверху вниз, идущие при постоянной температуре – горизонтально. Сверху над каждым процессом написан ключевой параметр, входящий в формулу для количества теплоты, снизу – масса вещества, участвующего в процессе. Глядя на такую диаграмму, можно автоматически записать уравнение теплового баланса:

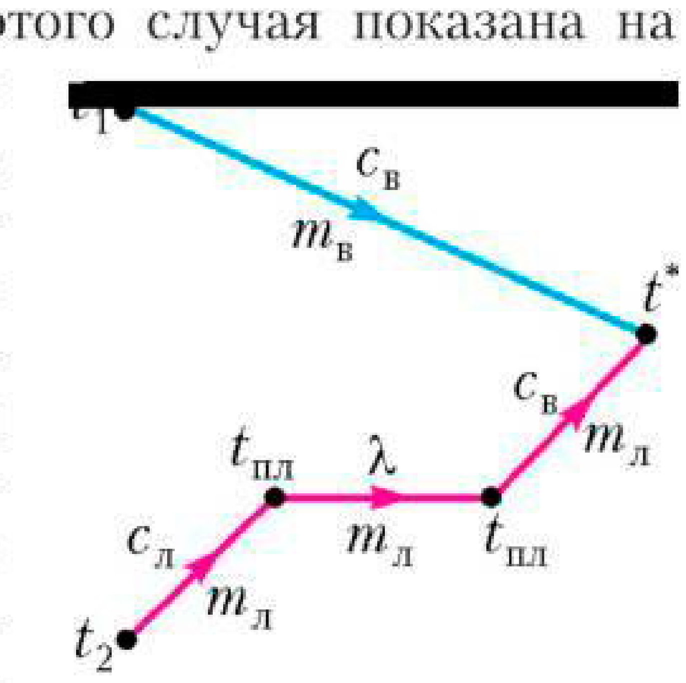


Рис. 2

$$c_в m_в \left(t^* - t_1\right) + c_л m_л \left(t_{пл} - t_2\right) + \lambda m_л + c_в m_л \left(t^* - t_{пл}\right) = 0 .$$

Вторым уравнением является условие сохранения массы:

$$m_в + m_л = \rho_в V .$$

Отсюда, исключая $m_в$, находим

$$m_л = 25 \text{ кг} .$$

Задача 6 (ЕГЭ). *В калориметр с водой бросают кусочки тающего льда. В некоторый момент кусочки льда перестают таять. Первоначальная температура воды $t_1 = 20$ °C. На сколько процентов увеличилась масса воды?*

Решение. Первое, на что надо обратить внимание, это скрытая информация, содержащаяся в условии. Хотя о температуре льда не сказано напрямую, но слова «тающий лед» означают, что температура льда равна температуре плавления, т.е. $t_2 = t_{пл} = 0$ °C. Слова «кусочки льда перестают таять» означают, что лед больше не может получать тепло, т.е. что температура воды опустилась до температуры плавления и система пришла в тепловое равновесие: $t^* = t_{пл} = 0$ °C. И наконец, очевидно, что увеличение массы воды равно массе растаявшего льда. Составим диаграмму тепловых процессов (рис. 3) и запишем соот-

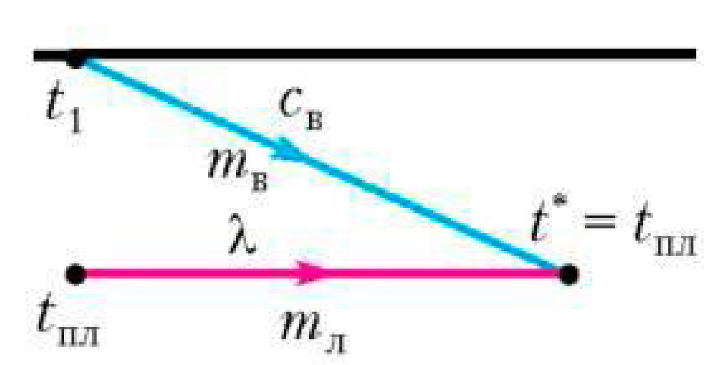


Рис. 3

ветствующее уравнение теплового баланса:

$$c_{\text{в}}m_{\text{в}}\left(t_{\text{пл}}-t_1\right)+\lambda m_{\text{л}}=0 .$$

Получаем

$$\frac{\Delta m_{\text{в}}}{m_{\text{в}}}=\frac{m_{\text{л}}}{m_{\text{в}}}=\frac{c_{\text{в}}\left(t_1-t_{\text{пл}}\right)}{\lambda}=0,25 ,$$

т.е. масса воды увеличилась на 25%.

Задача 7 (ЕГЭ). *В калориметре находился лед массой $m_1 = 1$ кг. Какой была температура льда, если после добавления в калориметр $m_2 = 15$ г воды, имеющей температуру $t_2 = 20$ °С, в калориметре установилось тепловое равновесие при температуре $t^* = -2$ °С?*

Решение. Чтобы достигнуть температуры теплового равновесия, вода должна охладиться до температуры плавления (таяния) льда ($t_{\text{пл}} = 0$ °С), затем замерзнуть (кристаллизоваться), и только после этого получившийся лед охладится до t^*. На диаграмме тепловых процессов (рис.4) над линией кристаллизации мы поставили $-\lambda$, так как при кристаллизации тела отдают тепло (получают отрицательное тепло). Уравнение теплового баланса имеет вид

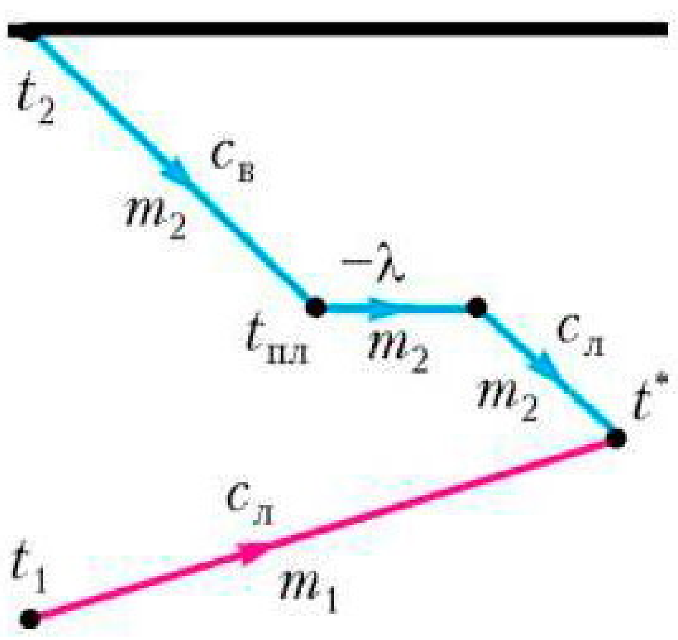


Рис. 4

$$c_{\text{л}}m_1\left(t^*-t_1\right)+c_{\text{в}}m_2\left(t_{\text{пл}}-t_2\right)+\left(-\lambda\right)m_2+c_{\text{л}}m_2\left(t^*-t_{\text{пл}}\right)=0 .$$

Проведя вычисления, найдем

$$t_1=-5\ ^\circ\text{C} .$$

До сих пор тепловые процессы, происходящие с телами в процессах теплообмена и прихода к тепловому равновесию, описывались одним сценарием, без вариантов. Следующая задача – первая, в которой возможны два варианта развития событий и необходимо провести маленькое исследование, чтобы выбрать один из них.

Задача 8 (ЕГЭ). *В калориметре находится вода, масса которой $m_{\text{в}} = 100$ г и температура $t_1 = 0$ °С. В него добавляют кусок льда, масса которого $m_2 = 20$ г и $t_2 = -5$ °С. Какой будет температура содержимого калориметра после установления в нем теплового равновесия?*

Решение. Хотя задача похожа на предыдущую, но теперь, в новой формулировке, появляется неоднозначность: либо вся вода замерзнет и в конце остается только холодный (с температурой меньше 0 °С) лед, либо только часть воды замерзнет, а лед уже нагреется до 0 °С и именно такая температура установится в калориметре. В данном случае сразу видно, что количество теплоты $Q_1 = \lambda m_{\text{в}}$, которое необходимо забрать у воды, чтобы ее заморозить, во много раз больше, чем количество теплоты $Q_2 = c_{\text{л}}m_{\text{л}}\left(t_{\text{пл}}-t_2\right)$, которое надо сообщить льду, чтобы нагреть его до 0 °С. Значит, реализуется второй вариант. Однако, если ответ не очевиден, нет необходимости проводить специальное исследование или решать задачу для каждого из вариантов. Достаточно записать уравнение теплового баланса только для первого варианта, и если получится отрицательная температура t^*, то это и будет правильный ответ. Но если получится положительный ответ, то, поскольку это невозможно, реализуется второй вариант, т.е. $t^* = 0$ °С. Уравнение теплового баланса для первого варианта имеет вид (рис.5)

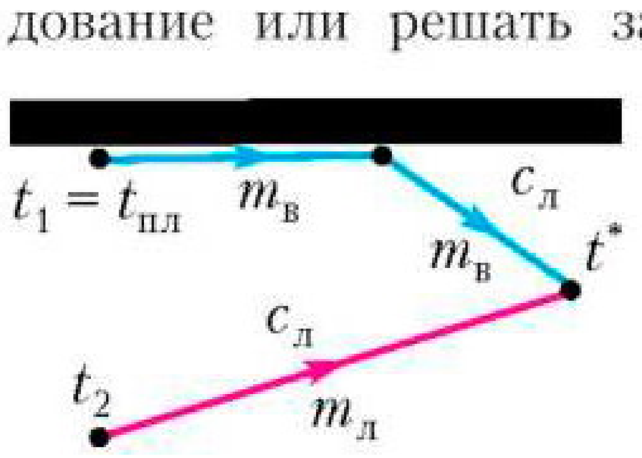


Рис. 5

$$\left(-\lambda\right)m_{\text{в}}+c_{\text{л}}m_{\text{в}}\left(t^*-t_{\text{пл}}\right)+c_{\text{л}}m_{\text{л}}\left(t^*-t_2\right)=0 ,$$

и ответ получается сильно положительный (больше 100 °С). Следовательно, правильный ответ $t^* = 0$ °С.

Заметим, что выбор сценария, который быстрее всего приведет нас к цели, зависит от вопроса задачи. Если бы в задаче спрашивалось, сколько воды останется в системе, то нужно было бы записать уравнение теплового баланса для второго варианта (рис.6):

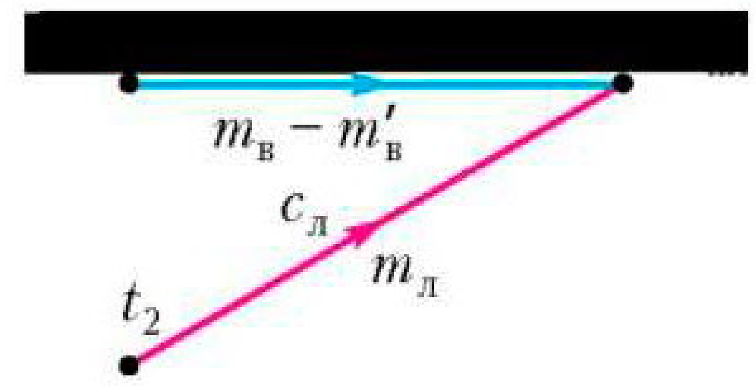


Рис. 6

$$\left(-\lambda\right)\left(m_{\text{в}}-m'_{\text{в}}\right)+c_{\text{л}}m_{\text{л}}\left(t_{\text{пл}}-t_2\right)=0 .$$

Если $m'_{\text{в}}$ получится отрицательной, то делаем вывод, что воды не останется, т.е. вся она замерзнет.

Задача 9 (ЕГЭ). *В калориметре находился лед массой $m_1 = 1$ кг при температуре $t_1 = -5$ °С. В него добавляют воду массой $m_2 = 200$ г, имеющую температуру $t_2 = 20$ °С. Какой будет температура содержимого калориметра после установления в нем теплового равновесия?*

Решение. В этой задаче возможны три сценария: температура равновесия будет отрицательной (вся вода замерзнет), положительной (весь лед растает) или равной нулю. Мы можем начать с небольшого исследования, которое позволит нам исключить один из вариантов. Сравним количества теплоты $Q_1 = c_{\text{в}}m_{\text{в}}\left(t_{\text{пл}}-t_1\right)$ и $Q_2 = c_{\text{л}}m_{\text{л}}\left(t_{\text{пл}}-t_2\right)$, которые должны получить тела для достижения температуры плавления 0 °С. Легко убедиться, что Q_1 больше по модулю, чем Q_2. Это означает, что лед раньше начнет таять, чем вода замерзать. Следовательно, первый сценарий исключен. Записав уравнение теплового баланса для второго сценария (рис.7):

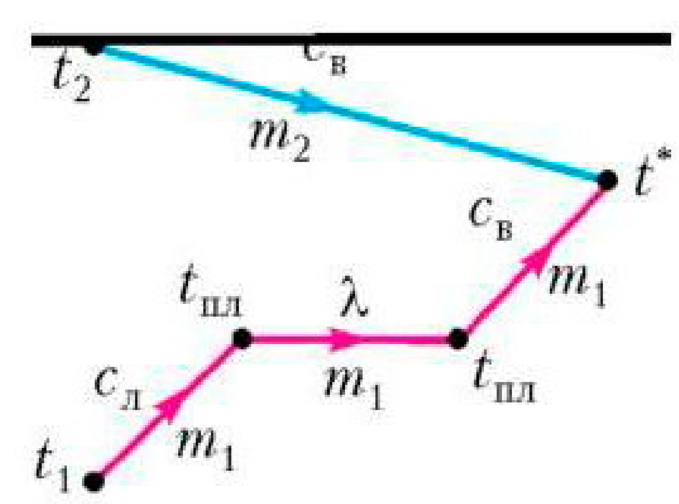


Рис. 7

$$c_{\text{л}}m_1\left(t_{\text{пл}}-t_1\right)+\lambda m_1+c_{\text{в}}m_1\left(t^*-t_{\text{пл}}\right)+c_{\text{в}}m_2\left(t^*-t_2\right)=0 ,$$

мы получим для t^* отрицательный ответ, что невозможно в этом сценарии. Значит, правильный ответ опять 0 °С.

Можно ли здесь, как в предыдущей задаче, исследовать только один из сценариев и получить правильный ответ? В данном случае обойтись одним расчетом удастся только при условии, что мы сразу угадаем правильный вариант. Если же он окажется неправильным, то для получения правильного ответа придется еще раз записать уравнение теплового баланса. Так что выбранный нами путь (с предварительным небольшим исследованием) выглядит привлекательнее.

Теперь несколько задач с испарением и конденсацией.

Задача 10 (ЕГЭ). *В сосуд с водой опущена трубка. По трубке через воду пропускают пар при температуре $t_{\text{п}} = 100$ °С. Вначале масса воды увеличивается, но в некоторый момент масса воды перестает увеличиваться, хотя пар по-прежнему пропускают. Первоначальная масса воды $m_{\text{в}1} = 230$ г, а в конце масса $m_{\text{в}2} = 260$ г. Какова первоначальная температура воды по шкале Цельсия? Потерями тепла пренебречь.*

Решение. Масса воды перестает увеличиваться, когда ее температура сравняется с температурой пара (температурой кипения), причем увеличение массы воды будет равно массе сконденсировавшегося пара. Уравнение теплового баланса для этого случая имеет вид (рис.8)

$$c_{\text{в}}m_{\text{в}1}\left(t_{\text{п}}-t_{\text{в}}\right)+\left(-r\right)\left(m_{\text{в}2}-m_{\text{в}1}\right)=0 .$$

Решая это уравнение, находим

$$t_в = 38{,}6\ °C .$$

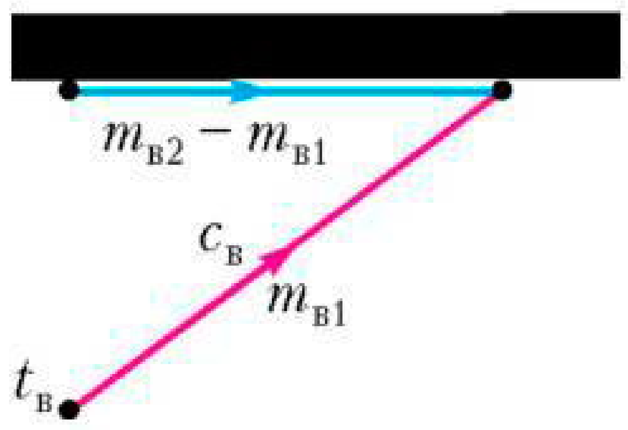


Рис. 8

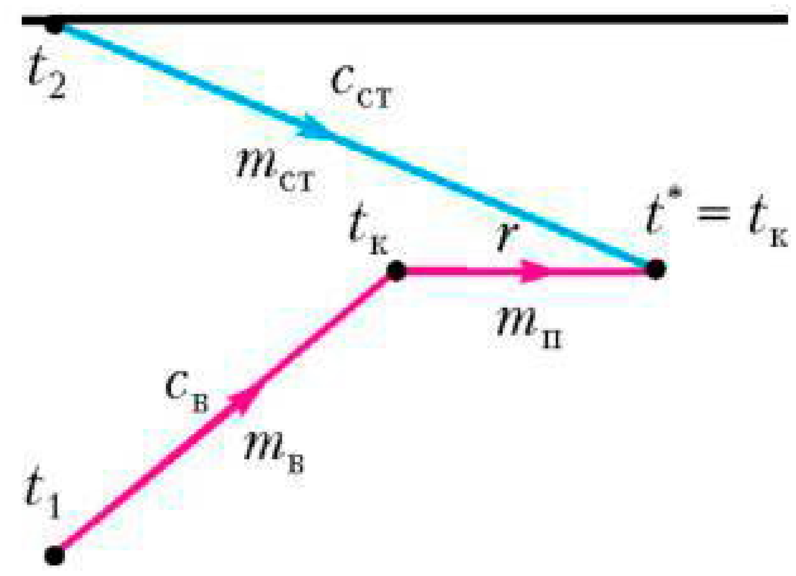


Рис. 9

Задача 11. *В сосуд, содержащий $m_в = 4{,}6$ кг воды при $t_1 = 20\ °C$, бросают кусок стали массой $m_{ст} = 10$ кг, нагретый до $t_2 = 500\ °C$. Вода нагревается до $t_к = 100\ °C$, и часть ее обращается в пар. Найдите массу образовавшегося пара. Удельная теплоемкость стали $c_{ст} = 460$ Дж/(кг · К).*

Решение. Конечная температура системы (температура теплового равновесия) равна температуре кипения воды. Нарисуем диаграмму тепловых процессов (рис.9) и запишем уравнение теплового баланса:

$$c_в m_в (t_к - t_1) + r m_п + c_{ст} m_{ст} (t_к - t_2) = 0 ,$$

из которого найдем

$$m_п = 128 \text{ г}.$$

В следующей задаче происходят одновременно два фазовых превращения – плавление и конденсация.

Задача 12. *Смесь, состоящую из $m_л = 2{,}5$ кг льда и $m_в = 7{,}5$ кг воды, нужно нагреть до температуры $t^* = 50\ °C$, пропуская пар при температуре $t_п = 100\ °C$. Определите необходимое для этого количество пара.*

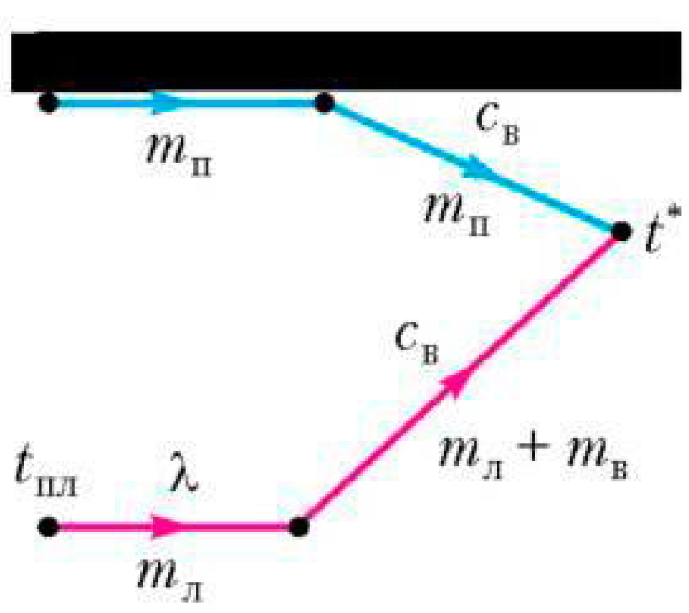


Рис. 10

Решение. Начальная температура смеси воды и льда равна температуре плавления (таяния) льда $t_{пл} = 0\ °C$. Сначала плавится лед, потом вся получившаяся вода нагревается до t^* за счет количества теплоты, полученного при конденсации и охлаждении пара. Уравнение теплового баланса имеет вид (рис.10)

$$\lambda m_л + c_в (m_л + m_в)(t^* - t_{пл}) + (-r) m_п + c_в m_п (t^* - t_п) = 0 .$$

Решая уравнение, находим

$$m_п = 1{,}17 \text{ кг}.$$

А в этой задаче «возможны варианты».

Задача 13. *В сосуд, содержащий $m_1 = 9$ кг воды при $t_1 = 20\ °C$, вводится $m_2 = 1$ кг пара при $t_2 = 100\ °C$. Определите конечную температуру в сосуде. Теплоемкость сосуда и потери тепла не учитывать.*

Решение. Первый сценарий – пар полностью конденсируется при температуре $100\ °C$ и получившаяся вода охлаждается до температуры теплового равновесия. Второй сценарий – вода нагревается до температуры кипения раньше, чем весь пар конденсируется, тогда $t^* = 100\ °C$. Запишем уравнение теплового баланса для первого сценария (рис.11), и если получится ответ больше $100\ °C$, то реализуется второй сценарий. Итак,

$$c_в m_1 (t^* - t_1) + (-r) m_2 + c_в m_2 (t^* - t_2) = 0 ,$$

откуда получаем

$$t^* = 78\ °C .$$

Это и есть ответ задачи.

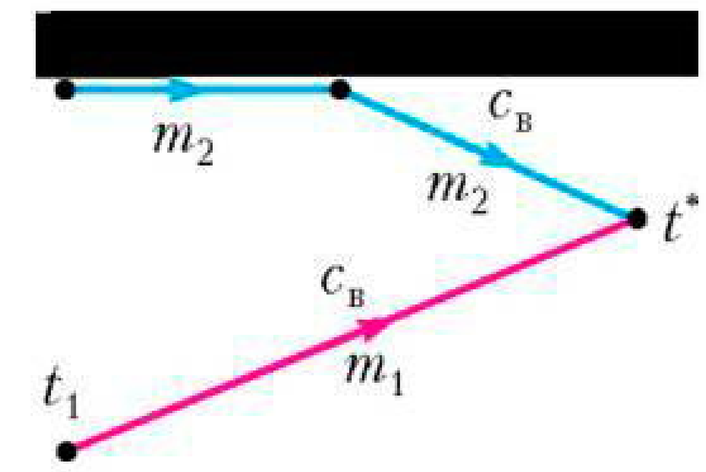


Рис. 11

В последней задаче число вариантов возрастает.

Задача 14. *В сосуде имеется некоторое количество льда при температуре $t_л = -50\ °C$. В сосуд запускают водяной пар при температуре $t_п = 100\ °C$. Найдите установившуюся температуру воды в сосуде, если масса пара равна половине массы льда.*

Решение. В данном случае возможны четыре варианта сценария, приводящие к четырем видам ответа. Если льда слишком много, то может получиться отрицательная температура (в конце – только холодный лед). Если льда поменьше, то может получиться ответ $0\ °C$ (в конце – смесь льда и воды). Если льда еще меньше, может получиться ответ между $0\ °C$ и $100\ °C$ (в конце – только вода). Наконец, может получиться ответ $100\ °C$ (в конце – пар и вода). План решения: пишем уравнение для третьего сценария, и если получается ответ между $0\ °C$ и $100\ °C$ – угадали! Если получится больше $100\ °C$, то реализуется четвертый сценарий (ответ $100\ °C$). Но если получится меньше $0\ °C$, то придется еще сделать выбор между первым и вторым сценариями. Тогда пишем уравнение теплового баланса для первого сценария, и если ответ положительный, то реализуется второй сценарий (ответ $0\ °C$). Итак, третий сценарий (рис.12):

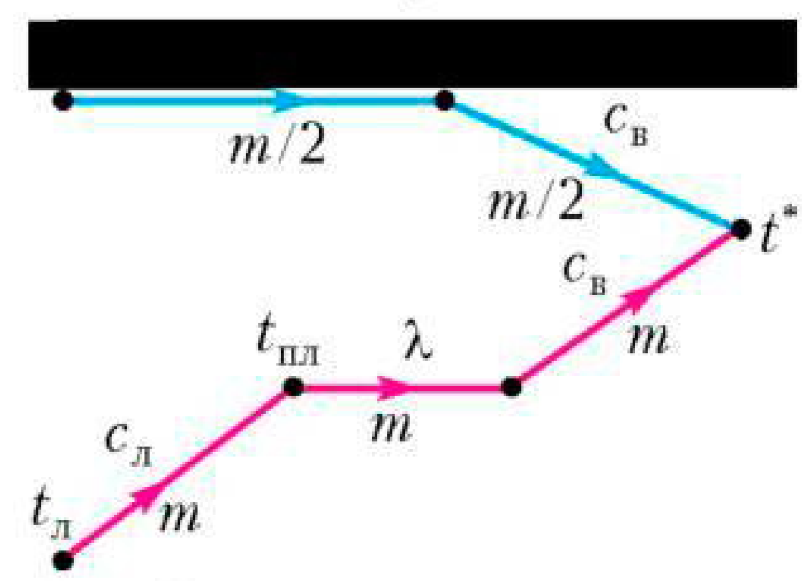


Рис. 12

$$c_л m (t_{пл} - t_л) + \lambda m + c_в m (t^* - t_{пл}) + (-r)\frac{m}{2} + c_в \frac{m}{2}(t^* - t_п) = 0 .$$

Получаем $t^* = 180\ °C$, что означает реализацию четвертого сценария и ответ $100\ °C$ (повезло!).

Упражнения

1. Нужно смешать воду при температуре $50\ °C$ и воду при температуре $10\ °C$ так, чтобы температура смеси оказалась равной $20\ °C$. Во сколько раз больше надо взять холодной воды, чем горячей?

2. Медное тело, нагретое до $100\ °C$, опущено в воду, масса которой равна массе медного тела. Тепловое равновесие наступило при температуре $30\ °C$. Определите начальную температуру (в °C) воды. Удельная теплоемкость меди 360 Дж/(кг · К).

3. В сосуд налили 0,1 кг воды при температуре $60\ °C$, после чего температура воды понизилась до $55\ °C$. Считая, что теплоемкость сосуда равна 70 Дж/К, найдите начальную температуру (в °C) сосуда.

4. Для измерения температуры воды массой 20 г в нее погрузили термометр, который показал $32{,}4\ °C$. Какова действительная температура (в °C) воды, если теплоемкость термометра 2,1 Дж/К и перед погружением в воду он показывал температуру помещения $8{,}4\ °C$?

5. Нагретое до $110\ °C$ тело опустили в сосуд с водой, в результате чего температура воды повысилась от 20 до $30\ °C$. Какой стала бы температура (в °C) воды, если бы в нее одновременно с первым опустили еще одно такое же тело, но нагретое до $120\ °C$?

6 (ЕГЭ). Для охлаждения лимонада массой 200 г в него бросают кубики льда, имеющего температуру $0\ °C$. Масса каждого кубика 8 г. Первоначальная температура лимонада $30\ °C$. Сколько целых кубиков надо бросить в лимонад, чтобы установилась температура не выше 16 °С ? Тепловыми потерями пренебречь. Удельная теплоемкость лимонада такая же, как у воды.

7. В литр воды при температуре 20 °С брошен ком снега массой 250 г, частично уже растаявший, т.е. содержащий некоторое количество воды при 0 °С . Температура воды в сосуде при достижении теплового равновесия оказалась равной 5 °С . Определите количество воды в коме снега.

8. (ЕГЭ). В теплоизолированный сосуд с большим количеством льда при температуре 0 °С заливают 1 кг воды с температурой 44 °С . Какая масса льда расплавится при установлении теплового равновесия в сосуде.

9. Количество теплоты, выделяемое при конденсации 1 кг пара при температуре 100 °С и охлаждении получившейся воды до 0 °С , затрачивается на таяние некоторого количества льда, температура которого 0 °С . Определите массу растаявшего льда.

10. В сосуде имеется некоторое количество воды и такое же количество льда в состоянии теплового равновесия. Через сосуд пропускают водяной пар при температуре 100 °С . Найдите установившуюся температуру воды в сосуде, если масса пропущенного пара равна первоначальной массе воды.

Алгебраический расчет в задачах на построение

Л.ШТЕРНБЕРГ

«ПОСТРОИТЬ С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ» – эта фраза встречается в самых «геометрических» из задач по геометрии. С них геометрия и начиналась. Чем был вооружен древнегреческий *гео-метр* (земле-мер)? Колышками и мотком веревки. Привязанная к колу веревка – циркуль, натянутая между двумя колышками – линейка (без делений, разумеется). Все! И с этим нехитрым инструментом древние греки исхитрялись делать очень много.

Казалось бы, зачем все это теперь нужно? Ну разве что – чтобы задавать задачи на экзаменах? Не нужно? Ой ли! А у вас никогда не возникало желание, скажем, ваш садовый участок «четвертовать на три неравные половины»? И чем это кончилось? Не удалось, так как под рукой не было дигитального теодолита и астролябии с встроенным компьютером или компьютера с встроенной астролябией? А футбольное поле в школьном дворе не пробовали разметить?

Надеемся, что после этой статьи у вас все получится. А пока посмотрим на задачи.

Задача 1. *Дан треугольник. Постройте окружности с центрами в вершинах треугольника так, чтобы они касались друг друга (рис.1,а).*

Решение задач на построение обычно начинается с того, что нужно найти (и доказать) какое-то хорошее свойство элементов искомых фигур (точек или прямых) или фигур, непосредственно связанных с искомыми. В учебнике в решении этой задачи вам скорее всего предложат заметить тем или иным способом, что точки K, M, P пересечения этих окружностей со сторонами являются точками касания вписанной окружности. Действительно, перпендикуляры к сторонам, возведенные в точках K и M, пересекутся в точке O, причем $KO = OM$ как две касательные из одной точки. Аналогично рассуждая с парами точек K, P и M, P, получим, что все три перпендикуляра пересекутся в одной точке, равноотстоящей от сторон. Эта точка нам знакома, и построить ее мы умеем. После чего построить все 3 окружности несложно.

Если вы не заметили этого свойства, к решению можно подойти и другим способом (рис.1,*б*): начнем построение и попробуем понять, что нам мешает удовлетворить все условия – после построения произвольной окружности с центром в A, окружности с центром в B и с центром в C строятся однозначно, но последняя окружность не будет касаться первой. Как же надо изменить построение, чтобы окружности коснулись? Соединив точки пересечения K' и M' и

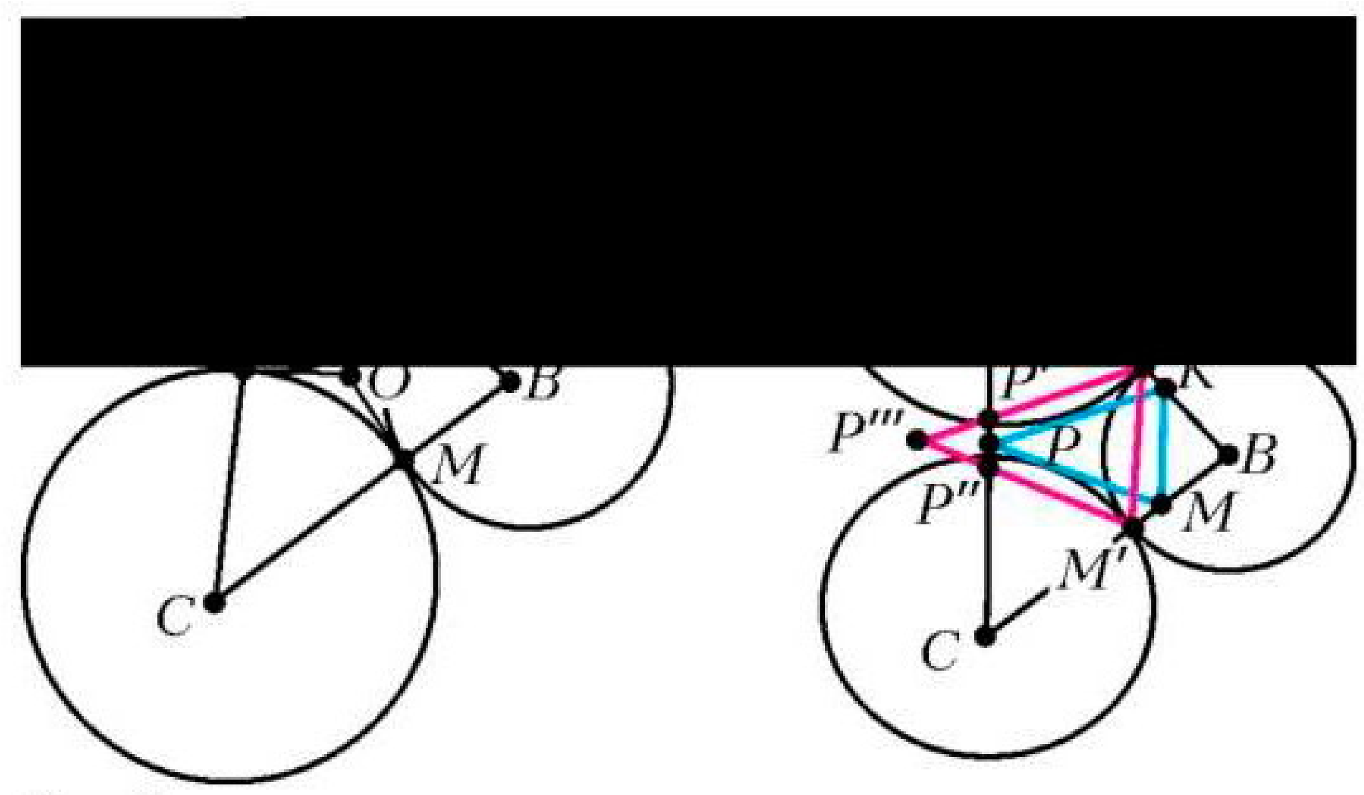


Рис. 1

продлив отрезки $K'P'$ и $M'P''$ до пересечения, получим треугольник, который подобен треугольнику KMP, дающему искомые точки, причем P''', P и B находятся на одной прямой (доказательства и детали построения проведите самостоятельно). Что делать дальше – очевидно. Но построение получится более длинным.

Как видим, не заметить хорошее свойство – это плохо. А вот как начать думать, чтобы его заметить, это момент неформальный – и бывает, что это не удается. Но что делать, если муза геометрии была занята с вашим соседом и вы не увидели ни того, ни другого решения? Переформулируем задачу как задачу *на вычисление*.

Задача 1а. *Дан треугольник. Вычислите радиусы окружностей, удовлетворяющих описанным в задаче 1 условиям.*

Решение не вызывает трудностей. Раз треугольник задан, то заданы все его элементы, в частности стороны. Обозначив их a, b, c (так, что сторона a лежит напротив вершины A, b – напротив вершины B, c – напротив вершины C) и обозначив r_a , r_b и r_c радиусы окружностей с центрами в A, B и C соответственно, получаем систему

$$\begin{cases} a = r_b + r_c, \\ b = r_a + r_c, \\ c = r_a + r_b. \end{cases}$$

Решение системы сложностей не вызывает: $r_a = (b + c - a)/2$, $r_b = (a + c - b)/2$, $r_c = (a + b - c)/2$.

Провести некоторую прямую и построить на ней отрезки нужной длины, а затем использовать эти отрезки как радиусы теперь не сложно.

Безусловно, это решение уступает по элегантности двум предыдущим решениям, но …

– Задача решена? Да!

– Циркулем и линейкой? Да!

– Можно ли не засчитать это решение? Нет!

Что и требуется доказать! Кстати, отметим, что по эффективности (количеству элементарных манипуляций, выполняемых циркулем и линейкой) это «некрасивое» решение даже превосходит «красивое».

Итак, идея ясна: переформулировать задачу как задачу на вычисление, *вычислить* нужный размер и *построить отрезок нужной длины*. Но в данном примере все действия сводились к сложению, вычитанию и делению пополам, а если придется решать квадратное уравнение? Оказывается, циркулем и линейкой можно делать почти все: умножать, делить, извлекать квадратные корни (для выполнения этих операций предполагаем, что дан единичный отрезок).

1. **Умножение**. На стороне произвольного угла откладываем отрезки длиной 1 и a, на второй стороне – отрезок длиной b (рис.2,*а*). Соединив точки K и M прямой и проведя через точку C прямую, параллельную KM, получим отрезок, длина которого численно равна (измеряется) $a \times b$. То же можно получить другим путем (рис.2,*б*): отложив на прямой

[redacted]

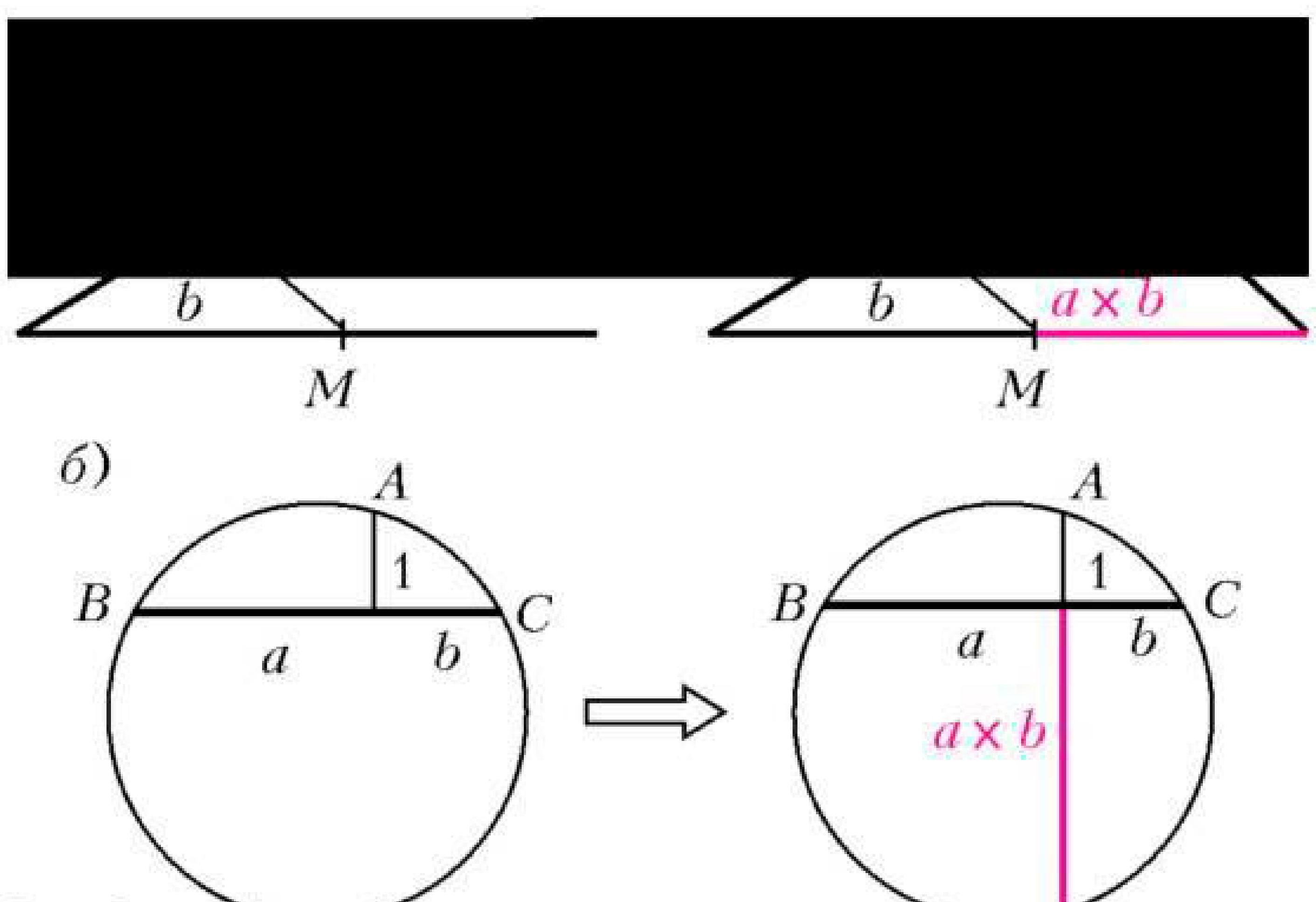


Рис. 2

отрезки a и b, а на перпендикуляре к этой прямой – единичный отрезок, можно по трем точкам A, B, C построить окружность и, продлив перпендикуляр до пересечения с окружностью, получить нужный отрезок.

2. **Деление** иллюстрируется рисунками 3,*а*,*б*.

[redacted]

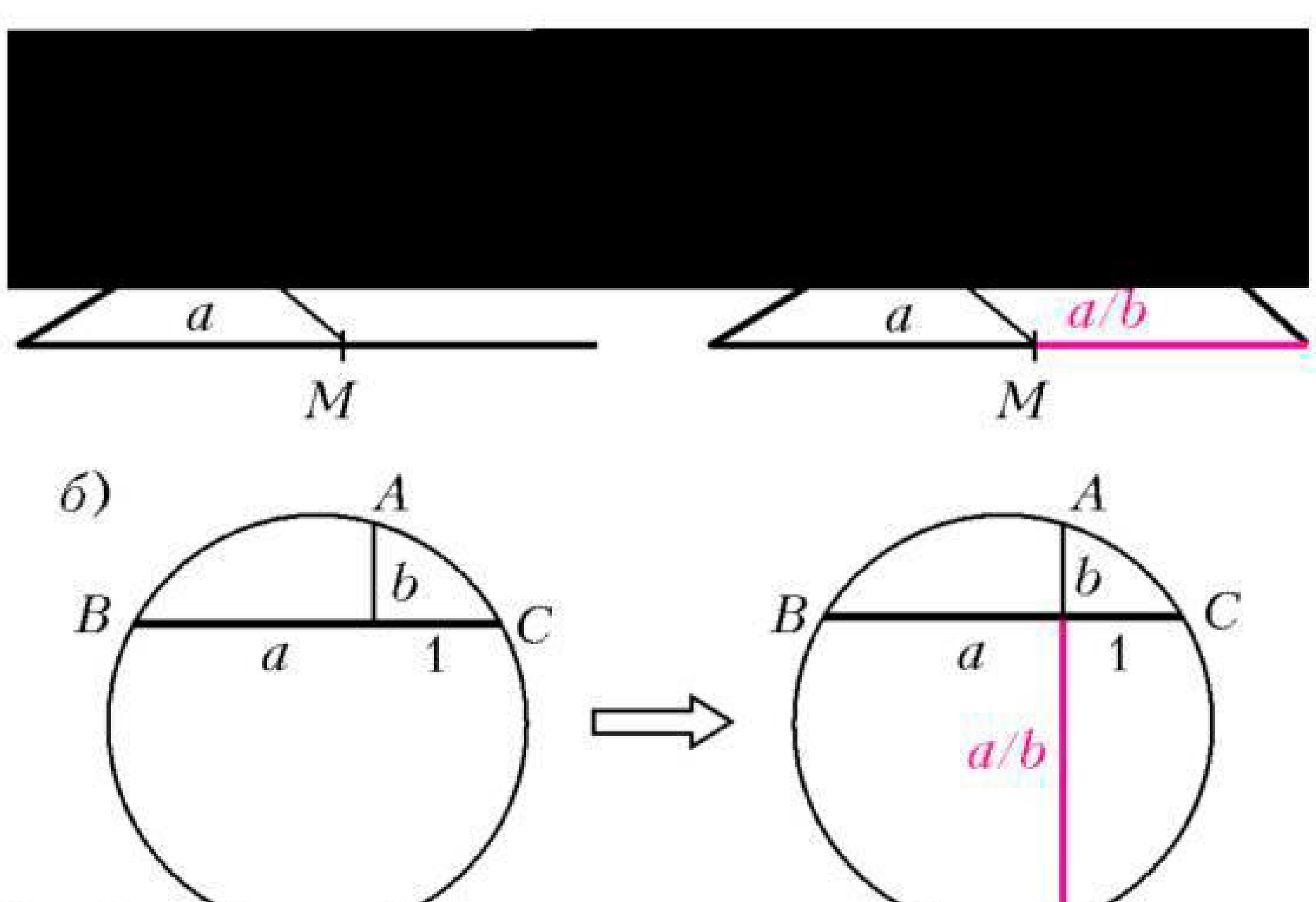


Рис. 3

3. **Извлечение квадратного корня** иллюстрируется рисунком 4 (окружность строится на отрезке длины $a + 1$ как на диаметре и проводится перпендикулярная хорда).

4. **Построение любой рациональной константы** сводится к делению и показано на рисунке 5 (показано получение значения $2/5$).

Теперь, когда мы видим, например, выражение $l = (a + b/3) \cdot c/d$, где величины a, b, c, d можно измерить циркулем на чертеже, для построения отрезка l остается единственный вопрос: откуда взять единичный отрезок? Ответ прост: возьмите любой отрезок и скажите, что это

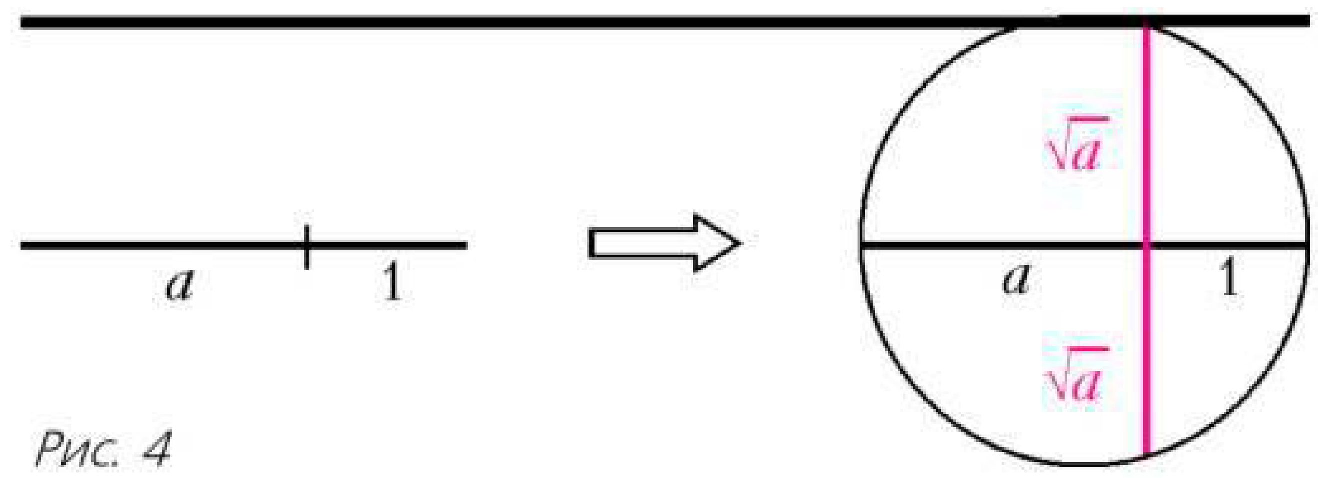


Рис. 4

[redacted]

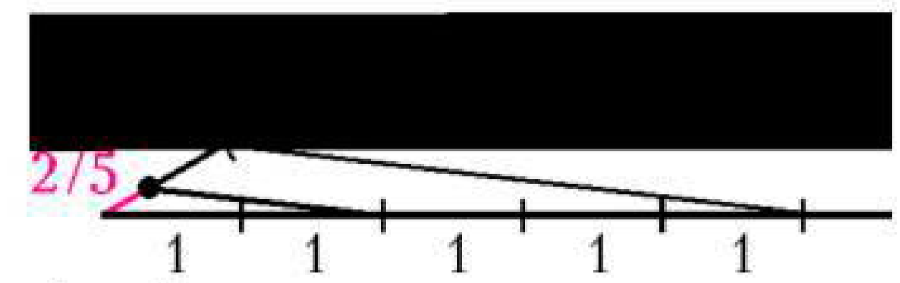


Рис. 5

новая единица измерения, которую вы назвали своим именем, например 1 Петр. Далее все будем измерять не в метрах, а в Петрах. Разумеется, результат умножения, деления и извлечения корня зависит от того, какой длины был взят единичный отрезок. Однако если в результате нам надо получать *линейные* размеры, результат не будет зависеть от величины единичного отрезка. Предлагаем читателю убедиться в этом в качестве упражнения.

Теперь рассмотрим еще одну задачу.

Задача 2. *Дан треугольник. Линией, параллельной одной из сторон, поделите его на две части равной площади.*

Геометрическое решение даже искать не будем – в школе его точно не проходили. Сразу займемся алгеброй.

Понятно, что если длина основания равна a, длины сторон – b и c, а высота равна h, то линия должна проходить на высоте kh от вершины, где $k = \sqrt{0,5}$, а длина этой линии будет ka, и проходить она будет через точки на сторонах, отстоящие от вершины на расстояния kb и kc соответственно. Далее все – чистая техника:

– берем любой отрезок, который назовем единицей;

– делим его пополам (это мы умеем) и получаем половину;

– извлекаем из нее корень (см. рис. 4);

– берем одну из сторон, скажем b, множим на результат предыдущего действия (см. рис. 2);

– откладываем результат от вершины вдоль соответствующей стороны и проводим через получившуюся точку линию, параллельную основанию.

Все! Очевидно, что так можно поделить треугольник в любой рациональной пропорции.

Задачи для самостоятельного решения

3. Сформулируйте и решите задачу, аналогичную разобранной задаче 1, для выпуклого четырехугольника, пятиугольника, … , n-угольника. Всегда ли будет существовать решение и в каких случаях оно будет единственно?

4 (из Древней Греции). Пахотная земля деревни зажата между самой деревней, рекой и горой и представляет собой треугольник. В деревне проживает 17 семей. Землю надо поделить поровну между всеми. Узкие треугольники, сходящиеся в одной вершине, жителей не устраивают – они хотят параллельные полосы. Как же это сделать – разделить землю на участки равной площади отрезками, параллельными стороне треугольника? (Нравы в деревне те еще – если не сумеете поделить поровну – убьют: в таких условиях работали древние геометры.)

Подсказка: начните с трех семей.

5. Решите предыдущую задачу, если пахотная земля представляет собой трапецию и требуется поделить ее отрезками, параллельными основаниям.

6. Дана окружность и точка A вне ее. Проведите через точку секущую, которая пересекает окружность в точках B и C таких, что B – середина AC.

Указание: воспользуйтесь теоремой о произведении отрезков секущих.

Региональный этап XLI Всероссийской олимпиады школьников по математике

ЗАДАЧИ

9 класс

Первый день

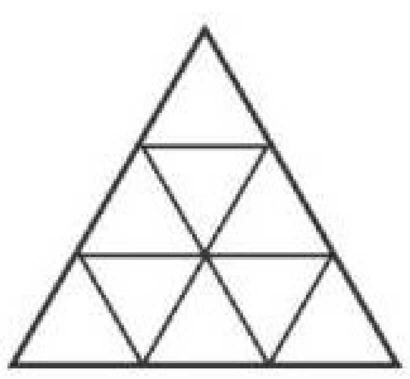
1. За круглым столом сидят 2015 человек, каждый из них – либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Им раздали по одной карточке, на каждой карточке написано по числу; при этом все числа на карточках различны. Посмотрев на карточки соседей, каждый из сидящих за столом сказал: «Мое число больше, чем у каждого из двух моих соседей». После этого k из сидящих сказали: «Мое число меньше, чем у каждого из двух моих соседей». При каком наибольшем k это могло случиться?

О.Подлипский

2. Назовем натуральное число *интересным*, если сумма его цифр – простое число. Какое наибольшее количество интересных чисел может быть среди пяти подряд идущих натуральных чисел?

О.Подлипский

3. Правильный треугольник со стороной 3 разбит на девять треугольных клеток, как показано на рисунке. В этих клетках изначально записаны нули. За один ход можно выбрать два числа, находящихся в соседних по стороне клетках, и либо прибавить к обоим по единице, либо вычесть из обоих по единице. Петя хочет сделать несколько ходов так, чтобы после этого в клетках оказались записаны в некотором порядке последовательные натуральные числа n, $n+1$, …, $n+8$. При каких n он сможет это сделать?



О.Дмитриев, Р.Женодаров

4. В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрисы угла ABC и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую AC в точках B_1 и B_2 соответственно. Из точек B_1 и B_2 провели касательные к окружности, вписанной в треугольник ABC, отличные от прямой AC. Они касаются этой окружности в точках K_1 и K_2 соответственно. Докажите, что точки B, K_1 и K_2 лежат на одной прямой.

Л.Емельянов

Второй день

5. См. задачу М2374 «Задачника «Кванта».

6. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Пусть BK – биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

Д.Бараш, Б.Обухов

7. Числа a, b, c и d таковы, что $a^2+b^2+c^2+d^2 \circ 4$. Докажите, что $(2+a)(2+b) \ge cd$.

А.Храбров

8. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается тройка, а любые два соседних члена различаются не больше чем на 1. Сколько последовательностей ему придется выписать?

И.Богданов

10 класс

Первый день

1. Целые числа a, $x_1, x_2, \ldots, x_{13}$ таковы, что

$$a = (1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{13}) \circ (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_{13}).$$

Докажите, что $ax_1x_2\ldots x_{13} \circ 0$.

В.Сендеров

2. На плоскости отметили все вершины правильного n-угольника, а также его центр. Затем нарисовали контур этого n-угольника и центр соединили со всеми вершинами, в итоге n-угольник разбился на n треугольников. Вася записал в каждую отмеченную точку по числу (среди чисел могут быть равные). В каждый треугольник разбиения он записал в произвольном порядке три числа, стоящих в его вершинах; после этого он стер числа в отмеченных точках. При каких n по тройкам чисел, записанным в треугольниках, Петя всегда сможет восстановить число в каждой отмеченной точке?

И.Рубанов

3. Пусть AL – биссектриса треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку AL пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точках P и Q. Докажите, что окружность, описанная около треугольника PLQ, касается стороны BC.

С.Берлов

4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{a+\frac{1}{a}} + \sqrt{b+\frac{1}{b}} + \sqrt{c+\frac{1}{c}} \ge 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right).$$

П.Козлов

Второй день

5. См. задачу 5 для 9 класса.

6. См. задачу 6 для 9 класса.

7. Коэффициенты a, b, c квадратного трехчлена $f(x) \circ ax^2+bx+c$ – натуральные числа, сумма которых равна 2000. Паша может изменить любой коэффициент на 1, заплатив 1 рубль. Докажите, что он может получить квадратный трехчлен, имеющий хотя бы один целый корень, заплатив не более 1050 рублей.

Н.Агаханов

8. См. задачу М2380 «Задачника «Кванта».

11 класс

Первый день

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. На новогодний вечер пришли несколько супружеских пар, у каждой из которых было от 1 до 10 детей. Дед Мороз выбирал одного ребенка, одну маму и одного папу из трех разных семей и катал их в санях. Оказалось, что у него было ровно 3630 способов выбрать нужную тройку людей. Сколько всего могло быть детей на этом вечере?

С.Волчёнков

3. Продолжения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Оказалось, что площади треугольников ABC_0, AB_0C и A_0BC равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

А.Якубов

4. См. задачу 4 для 10 класса.

Второй день

5. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Оказалось, что для любых чисел a и b верно неравенство $f(a^2+b^2) \ge f(2ab)$. Докажите, что хотя бы один из корней этого трехчлена – отрицательный.

А.Храбров

6. Есть полусферическая ваза, закрытая плоской крышкой. В вазе лежат четыре одинаковых апельсина, касаясь вазы, и один грейпфрут, касающийся всех четырех апельсинов. Верно ли, что все четыре точки касания грейпфрута с апельсинами обязательно лежат в одной плоскости? (Все фрукты являются шарами.)

Л.Емельянов

7. По кругу расставлено 300 положительных чисел. Могло ли случиться так, что каждое из этих чисел, кроме одного, равно разности своих соседей?

С.Берлов

8. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается число 4 или число 5, а любые два соседних члена различаются не больше чем на 2. Сколько последовательностей ему придется выписать?

И.Богданов

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, О.Подлипский

Региональный этап Олимпиады имени Максвелла

Теоретический тур

Справочные данные (могут понадобиться для любой из задач)

Ускорение свободного падения $g \approx 9{,}8$ м/с^2

Плотность дерева (сосны) $\rho_д = 400$ кг/м^3

Плотность воздуха $\rho_0 \approx 1{,}3$ кг/м^3

Плотность воды $\rho_в \approx 1000$ кг/м^3

Плотность льда $\rho_л = 917$ кг/м^3

7 класс

Задача 1. Скорость света

Экспериментатор Глюк исследовал движение солнечного зайчика, который изначально покоился, затем с постоянной скоростью перемещался вдоль прямой, а в конце пути опять замер. Глюк раз в минуту записывал в таблицу координату зайчика:

t, мин	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x, м	0	0	–	7	–	–	–	47	–	–	50

Правда, несколько раз он отвлекался и пропустил несколько измерений (в таблице – прочерки). Помогите экспериментатору определить, в какой момент зайчик начал движение. С какой скоростью зайчик перемещался? Как долго он перемещался? Кроме этого, заполните пропуски в таблице.

М.Замятнин

Задача 2. Который путь длиннее?

Первую треть пути автомобиль ехал со скоростью v_1, а последнюю треть времени – со скоростью v_3. На втором участке пути его скорость равнялась средней скорости движения на всем пути. Известно, что $v_1 > v_3$. Какой из участков самый короткий, а какой самый длинный? На каком участке автомобиль находился дольше всего, а на каком – меньше всего?

В.Слободянин

Задача 3. Коробка с сахаром (1)

Кубики сахара-рафинада плотно упакованы в коробку, на которой написано: «Масса нетто (m) 500 г, 168 штук». Длина самого длинного ребра коробки c = 98 мм. Вдоль самого короткого ребра коробки укладывается ровно 4 кусочка сахара. Чему равна плотность сахара-рафинада?

Примечание. «Нетто» – это масса продукта без учета массы упаковки (тары).

С.Кармазин

Задача 4. С одним велосипедом

Группа туристов из трех человек направилась из пункта A в пункт $Б$, расстояние между которыми L = 22 км. Попутных машин нет. В распоряжении группы есть один велосипед, на котором одновременно могут ехать не больше двух человек. Скорость движения пешим ходом составляет v_0 = 5 км/ч, при езде на велосипеде одного человека его скорость равна v_1 = 20 км/ч, а при езде вдвоем – v_2 = 15 км/ч. Как должны действовать туристы, чтобы за минимальное время добраться до пункта $Б$? Найдите это время.

С.Варламов

8 класс

Задача 1. Равновесие

Планка массой m и два одинаковых груза массой $2m$ каждый с помощью легких нитей прикреплены к двум блокам (рис.1). Система находится в равновесии. Определите силы натяжения нитей и силы, с которыми планка действует на грузы. Трения в осях блоков нет.

М.Замятин

Задача 2. Неизвестное в неизвестном

Экспериментатор Глюк проводил интересный опыт по погружению кубика, изготовленного из неизвестного материала, в жидкость неизвестной плотности (рис.2). В таб-

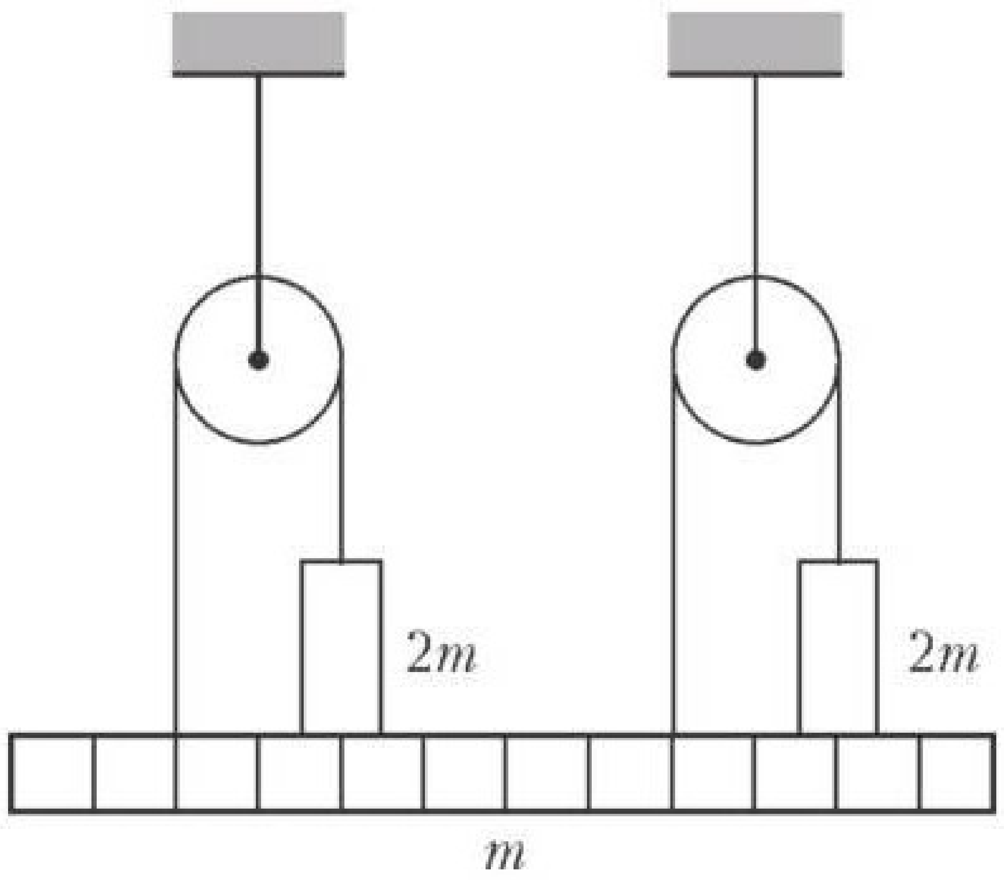


Рис. 1

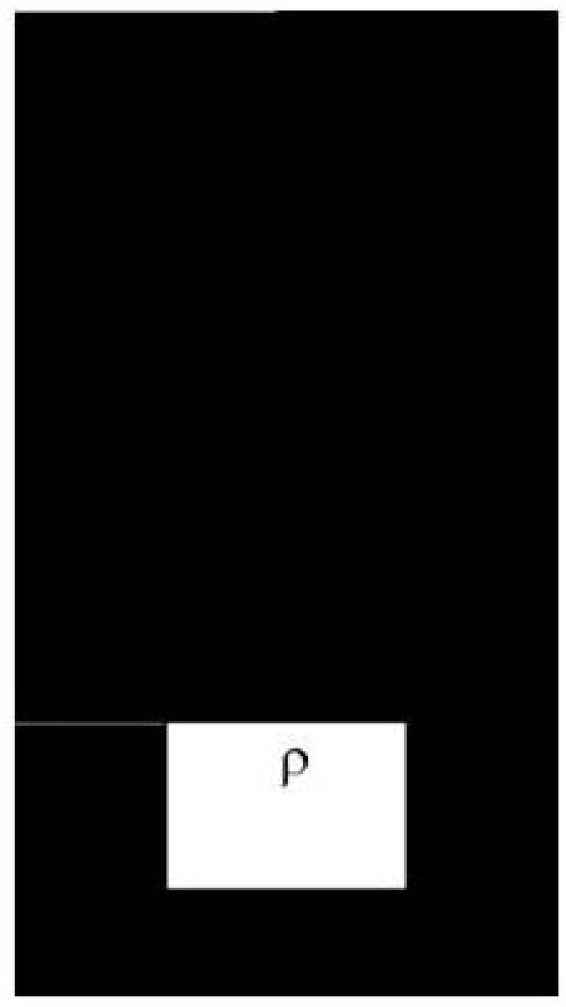


Рис. 2

лицу он занес показания динамометра, соответствующие различным глубинам погружения кубика. Некоторые значения силы он забыл и не стал их вносить в таблицу. По результатам измерений определите плотность кубика и плотность жидкости.

М.Замятин

h, см	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F, Н	8,74	8,09					4,84	4,19	3,93	3,93

Задача 3. Коробка с сахаром (2)

Кубики сахара-рафинада плотно упакованы в коробку, на которой написано: «Масса нетто (m) 500 г, 168 штук». Протяженность самого длинного ребра коробки $c = 112$ мм. Вдоль самого короткого ребра коробки укладывается ровно 3 кусочка сахара. Чему равна плотность сахара-рафинада?

Примечание. «Нетто» – масса продукта без учета массы упаковки (тары). Достоверно известно, что плотность сахара-рафинада не превышает $4 \cdot 10^3$ кг/м^3.

С.Кармазин

Задача 4. Лед на чашке весов

В одной чашке на равноплечных весах лежит кусок льда, который уравновешен гирей массой 1 кг, находящейся в другой чашке. Когда лед растаял, равновесие нарушилось. Груз какой массы и на какую чашку следует добавить, чтобы восстановить равновесие?

М.Осин

Публикацию подготовил В.Слободянин

Региональный этап XLIX Всероссийской олимпиады школьников по физике

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Постоянная планка

При каких значениях массы M возможно равновесие грузов на массивной однородной планке (рис.1)? Нити и блоки невесомы. Трения нет. Масса m известна.

М.Замятин

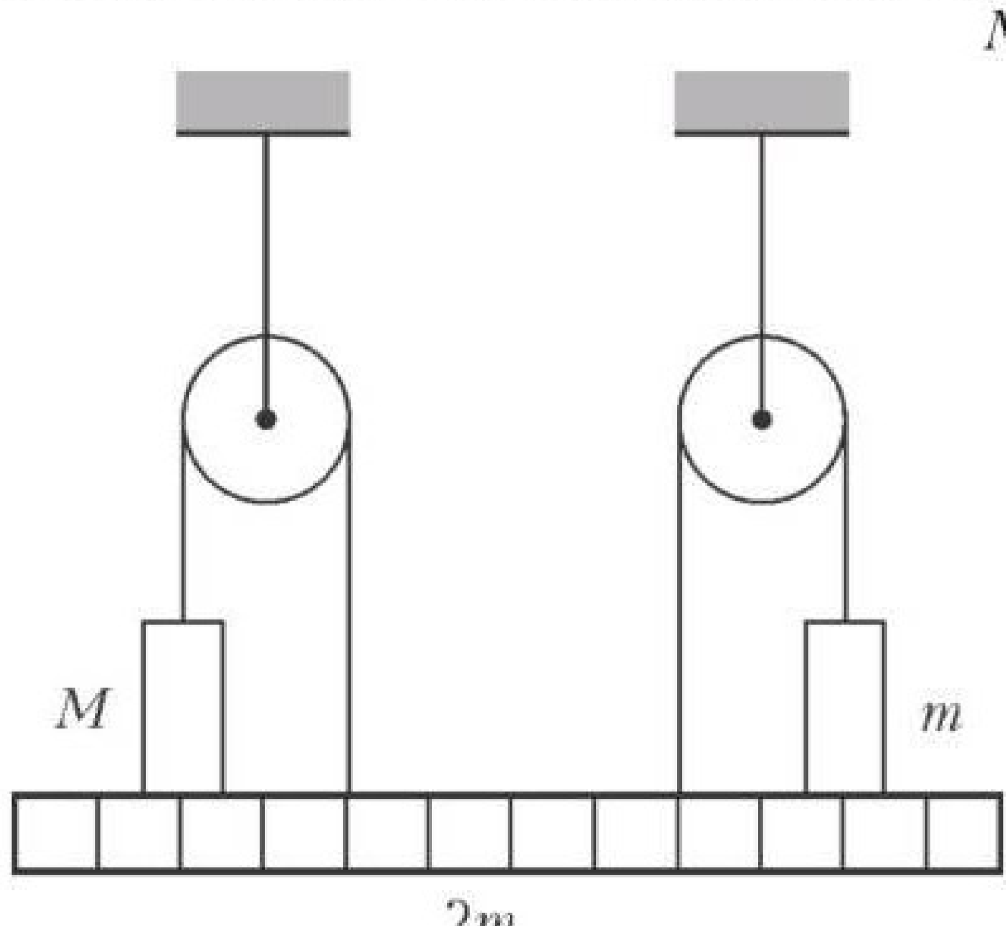


Рис. 1

Задача 2. Карлсон уже не тот

Однажды у Карлсона заглох моторчик, и он стал падать вертикально вниз с постоянной скоростью $v_1 = 6$ м/с. После ремонта мотор стал развивать постоянную силу тяги. Из-за этого при вертикальном подъеме Карлсон выходил на скорость $v_2 = 3$ м/с. С какой постоянной скоростью он двигался в горизонтальном полете? Силу сопротивления воздуха считать пропорциональной квадрату скорости. Карлсон, будучи в меру упитанным, одинаково обтекаем во всех направлениях.

М.Замятнин

Задача 3. Амперметры

Из четырех одинаковых амперметров собрали цепь (рис.2), которую подключили к источнику с небольшим напряжением. Определите силу тока, текущего через перемычку AB

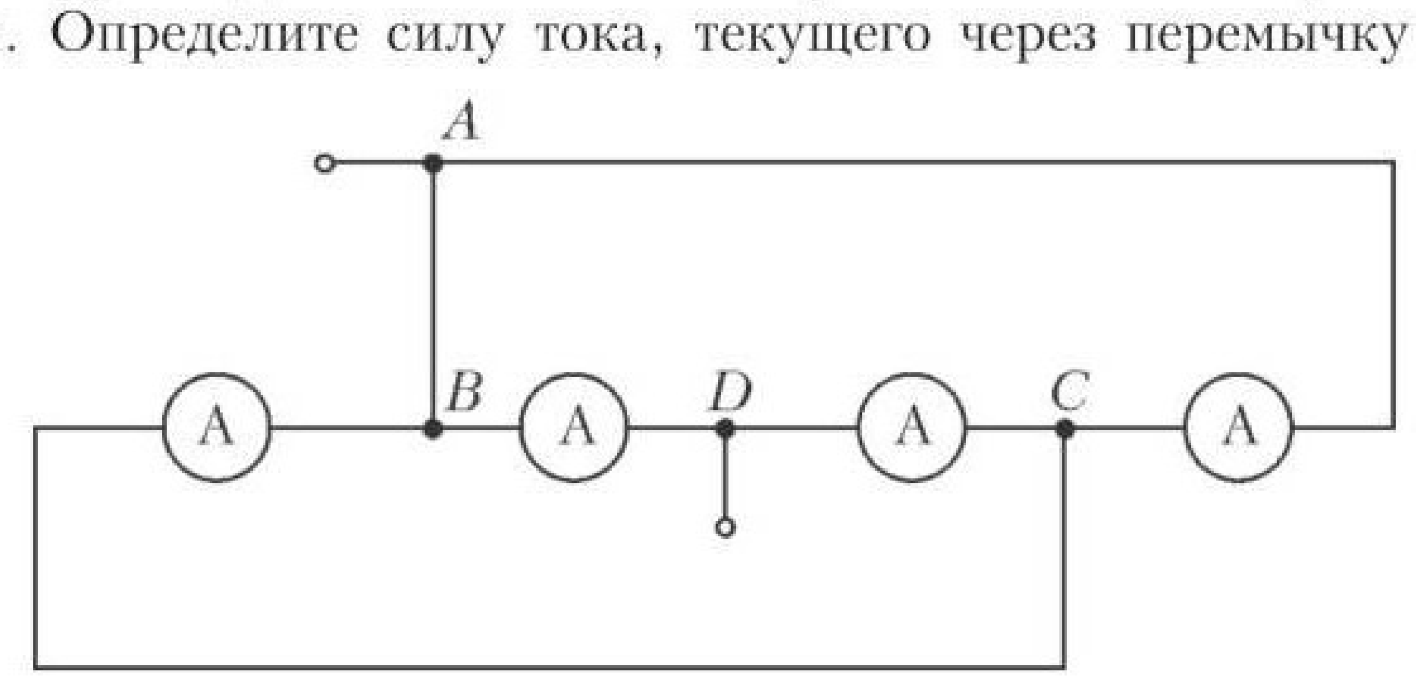


Рис. 2

(сопротивление перемычки и соединительных проводов много меньше сопротивления амперметра), если сумма показаний всех амперметров $I_0 = 49$ мА.

М.Замятнин

Задача 4. Полет

Скорость камня, брошенного с горизонтальной плоскости под углом к горизонту, через время $\tau = 0{,}5$ с после броска составляла $\alpha = 80\%$ от начальной скорости, а еще через τ она составляла $\beta = 70\%$. Найдите полное время полета камня. На каком расстоянии от места броска упал камень? Ускорение свободного падения g ° $9{,}8$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

Н.Аполонский

Задача 5. Положение Солнца

На листе с приведенной фотографией (рис.3) восстановите положение солнца и верхнего края забора. Все построения проводите непосредственно на этом листе, а в своей тетради приведите необходимые пояснения.

С.Варламов

Рис. 3

10 класс

Задача 1. Ящик с пружинами

Внутри черного ящика находятся две легкие пружины жесткостями k и $2k$, связанные легкой нерастяжимой нитью, и легкий подвижный блок (рис.4). В начальном состоянии внешняя сила $F = 6$ Н, приложенная к свободному концу нити, обеспечивает деформацию нижней пружины $x = 1$ см. Какую минимальную работу должна совершить внешняя сила, чтобы сместить вниз свободный конец нити еще на x?

М.Замятнин

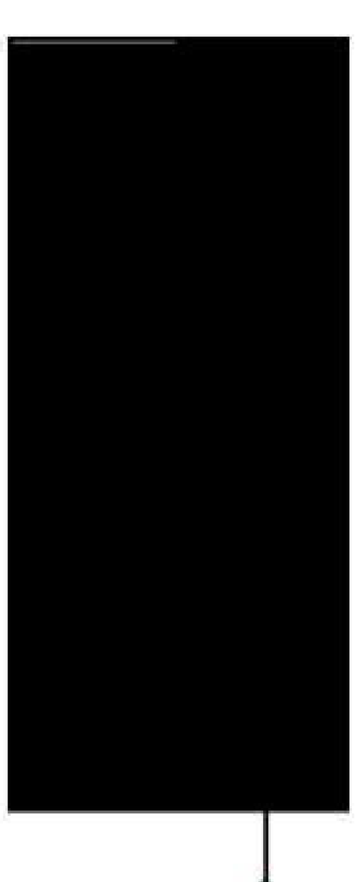


Рис. 4

Задача 2. Два в одном

На pV-диаграмме (рис.5) изображены три замкнутых процесса, происходящих с идеальным газом: *1–2–4–1*, *2–3–4–2* и *1–2–3–4–1*. На участках *1–2* и *3–4* температура газа постоянна, а на участках *2–3* и *4–1* газ теплоизолирован. Известно, что в первом процессе совершается работа $A_1 = 5$ Дж, а во втором процессе $-A_2 = 4$ Дж. Найдите коэффициент полезного действия третьего процесса, если коэффициенты полезного действия первых двух процессов равны.

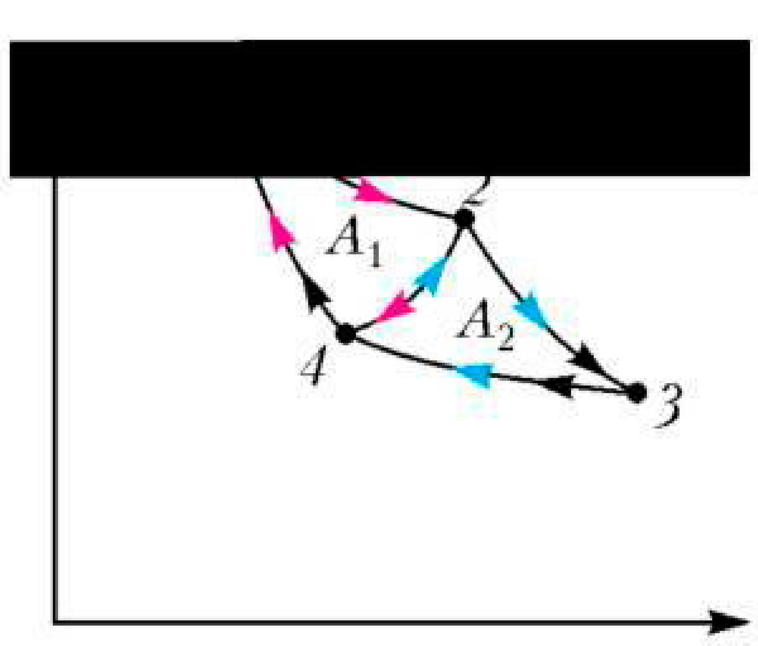


Рис. 5

В.Слободянин

Задача 3. Приключения пробирки

Пробирка длиной $l = 35$ см, содержащая воздух при температуре $T_0 = 300$ К, полностью погружена в ртуть плотностью $\rho = 13600$ кг/м^3 так, что дно пробирки касается поверхности жидкости и пробирка вертикальна. При этом жидкостью заполнена часть пробирки длиной $h = 10$ см. Пробирку поднимают вверх до тех пор, пока ее нижний край не достигнет поверхности ртути (пробирку из ртути не вынимают), причем в процессе подъема температура воздуха в пробирке не меняется. Затем температуру воздуха в пробирке изменили, и ртуть снова заполнила часть пробирки длиной h. Найдите конечную температуру воздуха в пробирке. Атмосферное давление $p_0 \circ 10^5$ Па.

И.Алескеров

Задача 4. Сложный сплав

Из сплава с линейно изменяющимся с расстоянием удельным сопротивлением изготовлены два тонких проводника одинаковой длины с вдвое отличающейся площадью сечения. Удельное сопротивление с одного конца каждого из проводников ρ_1, а с другого ρ_2. Проводники соединили параллельно и подключили к идеальному источнику с напряжением U, а к их серединам – точкам a и b – подсоединили идеальный вольтметр (рис.6). Найдите показание вольтметра.

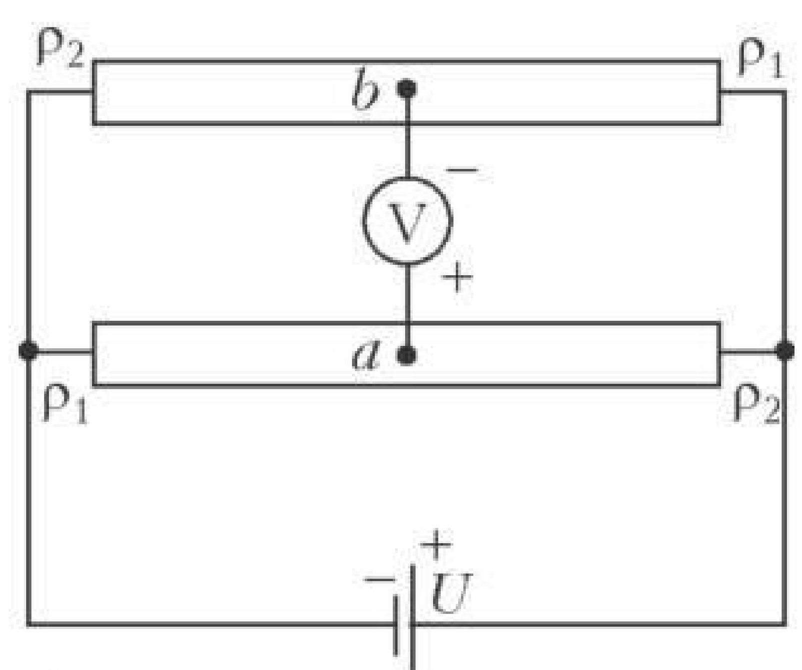


Рис. 6

М.Замятнин

Задача 5. Две шайбы

На гладкой поверхности находятся две одинаковые гладкие шайбы радиусом R (рис.7). Одной из шайб сообщают скорость v_0 вдоль оси x. Спустя некоторое время происходит абсолютно упругий удар. При каком значении прицельного параметра d проекция скорости второй шайбы на ось y будет максимальна?

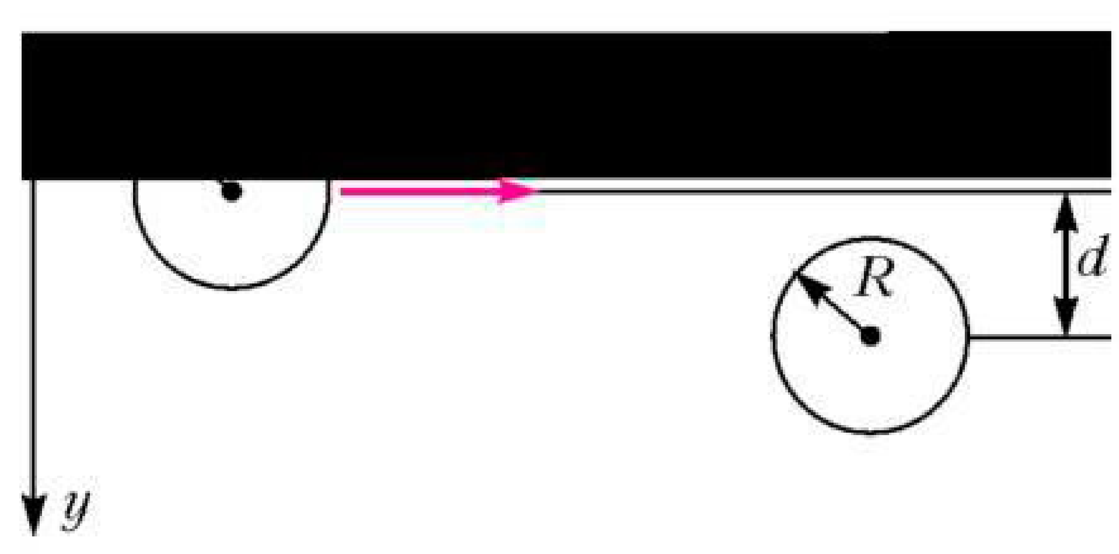


Рис. 7

В.Горгадзе

11 класс

Задача 1. Математический маятник

Маленький шарик колеблется на легкой нерастяжимой нити в поле тяжести $\vec{g}$ с большой угловой амплитудой α.

Найдите ускорение, с которым движется шарик в момент времени, когда натяжение нити в 4 раза превышает минимальное значение. Найдите также наименьшую амплитуду колебаний $\alpha_{\min}$, при которой возможна такая ситуация.

А.Шеронов

Задача 2. Перезарядка конденсаторов

Три одинаковых конденсатора емкостью C каждый, резистор сопротивлением R и диод D включены в схему (рис.8).

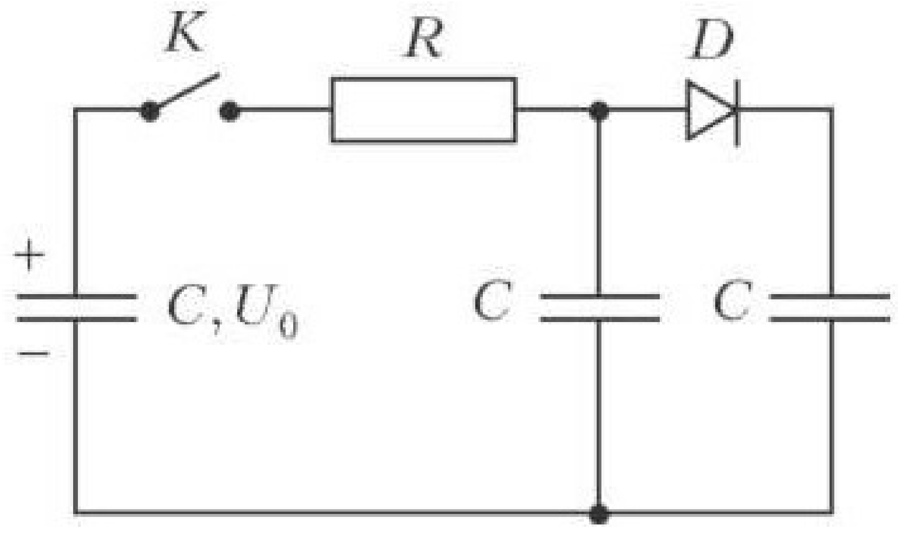


Рис. 8

Вольт-амперная характеристика диода представлена на рисунке 9. Первоначально левый конденсатор заряжен до

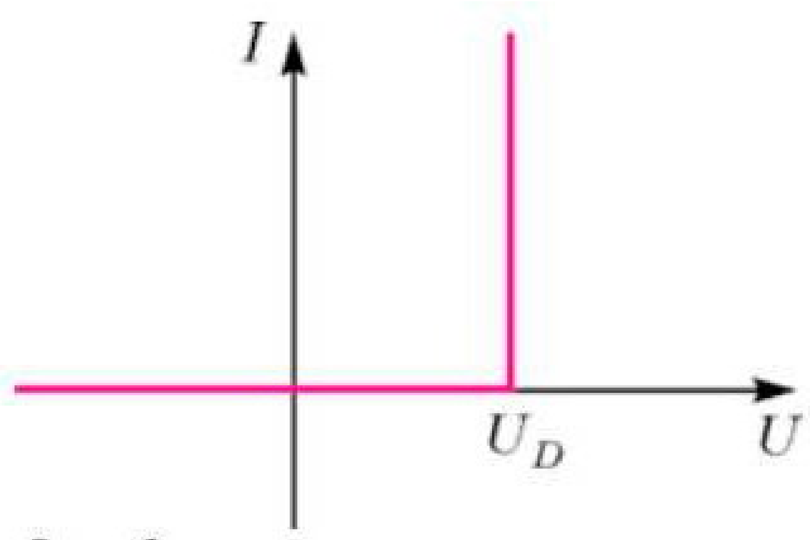


Рис. 9

напряжения U_0, при этом заряд его верхней пластины положительный. Два других конденсатора не заряжены, ключ разомкнут. Затем ключ замыкают. Определите:

1) напряжения на конденсаторах через большой промежуток времени после замыкания ключа;

2) количество теплоты, которое выделится в схеме к этому моменту времени;

3) количество теплоты, выделившееся к этому моменту на диоде;

4) количество теплоты, выделившееся к этому моменту на резисторе.

А.Шеронов

Задача 3. Ускорение доски

На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска длиной L и массой M. На краю доски покоится небольшой брусок. На брусок начинает действовать постоянная горизонтальная сила так, что он движется вдоль доски с ускорением, которое больше ускорения доски. Найдите ускорение, с которым двигалась доска, если за время движения по ней бруска выделилось количество теплоты Q.

Н.Аполонский

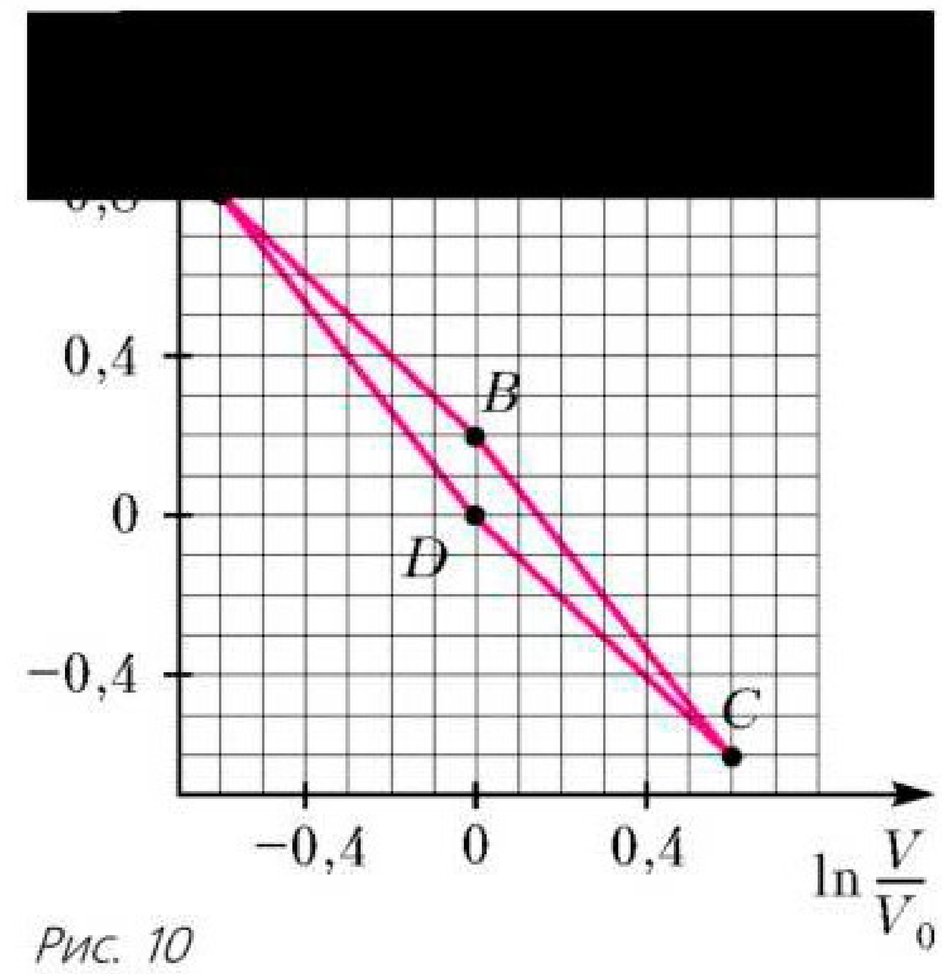


Рис. 10

Задача 4. Циклический процесс

На рисунке 10 представлен график циклического процесса, совершенного над идеальным многоатомным газом. Найдите КПД этого процесса.

Примечание. Процесс с постоянной теплоемкостью C называется политропическим и для идеального газа задается уравнением

$$pV^{\frac{C_p-C}{C_V-C}} \circ \text{const}\,,$$

где C_p – теплоемкость газа при постоянном давлении, а C_V – теплоемкость газа при постоянном объеме.

В.Слободянин

Задача 5. Провисла-натянулась

На гладкой горизонтальной плоскости находятся три бруска, массы которых m_1, m_2 и m_3 (рис.11; вид сверху). Упругая легкая резинка связывает бруски *1* и *2* и проходит

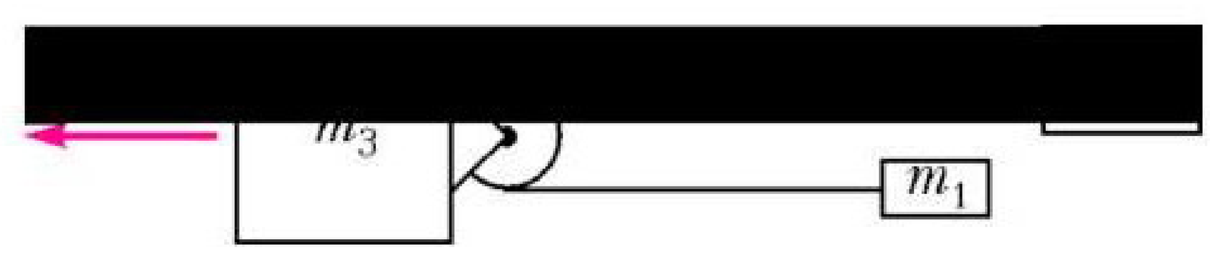


Рис. 11

через блок, прикрепленный к бруску *3*. Трения в системе нет. Исходно бруски неподвижны, а резинка чуть провисает. Бруску *3* ударом (мгновенно) сообщают скорость v.

1) Найдите скорости брусков в момент, когда растяжение резинки наибольшее.

2) Какими будут скорости брусков, когда резинка снова провиснет?

3) В случае, когда v = 1 м/с, m_1 = 1 кг, m_2 = 2 кг, m_3 = 3 кг, найдите скорость v_3 третьего бруска при наибольшем растяжении резинки.

И.Воробьев

Публикацию подготовил В.Слободянин

Поле и линии поля

(Начало см. на с. 35)

«основанию» полусферы, а он считается элементарно:

$$\Phi_B \circ BS\cos\alpha = B\pi R^2\cos\alpha\,.$$

3. *Докажите сформулированное в тексте статьи утверждение о физическом смысле величины* Φ_v.

Выделим малый элемент поверхности ΔS, укажем нормаль $\vec{n}$ к этому элементу и вектор скорости $\vec{v}$ среды (рис.6). За малое время Δt через ΔS пройдет среда в объеме косого цилиндрика с высотой $v_n\Delta t$ и основанием ΔS, т.е. за единицу времени пройдет объем $v_n\Delta S$. Переходя к бесконечно малым элементам поверхности и суммируя по всем таким элементам, мы приходим к выводу, что полученный интеграл имеет смысл полного объема среды, прошедшей за единицу времени через поверхность S. Что и требовалось доказать.

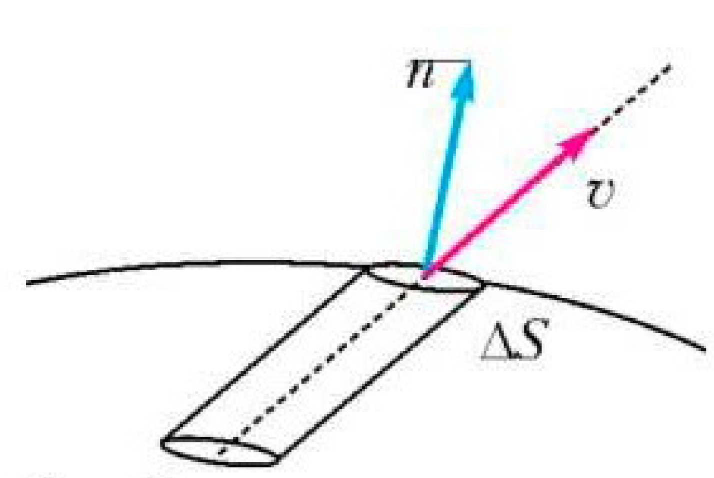


Рис. 6

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» № 1)

1. Можно: 2015 = 405 + 406 + 407 + 408 + 409.
Найти ответ можно было, обозначив искомые последовательные числа как n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$. Тогда их сумма равна $5n+10$ и равна 2015. Сокращая на 5, получаем $n+2 = 403$, откуда $n = 405$.
2. Например, так, как показано на рисунке 1.

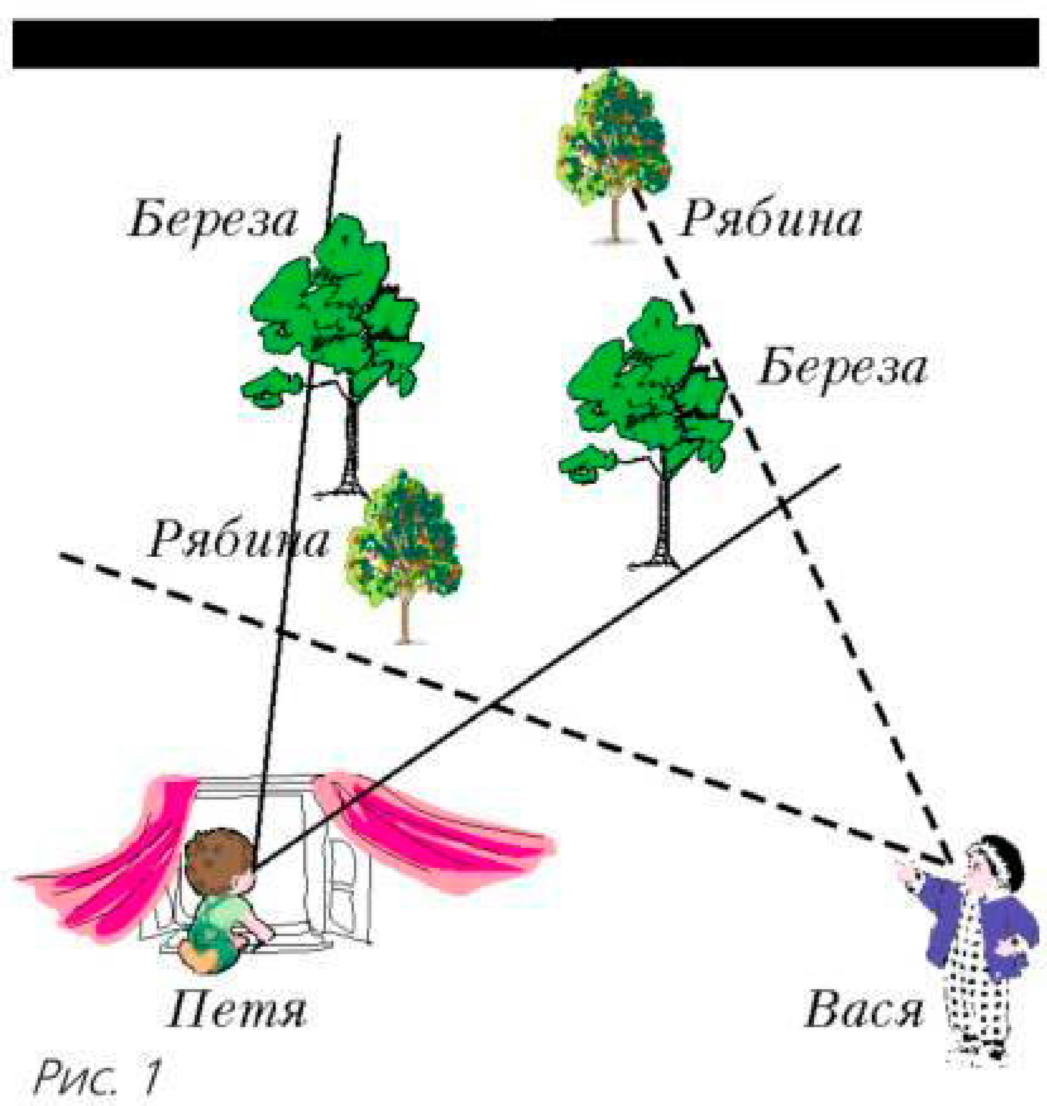


Рис. 1

3. Не могли.
Предположим, что все одиннадцать ответили «лжец». Лжец мог так ответить только в том случае, если справа от него сидит рыцарь. А рыцарь мог так ответить только в том случае, если справа от него сидит лжец. Значит, сидящие за столом лжецы и рыцари чередуются. Но одиннадцать — нечетное число, поэтому лжецы и рыцари не могут чередоваться.
4. На 11 фигурок.
Каждый уголок состоит из трех клеток квадрата, пятиклеточная фигурка — из пяти клеток, а каждая из 49 клеток окажется в одной из фигурок разрезания. Следовательно, общее количество фигурок будет наименьшим, если пятиклеточных фигурок будет наибольшее возможное количество, т.е. нам нужно, чтобы трехклеточных фигурок было наименьшее возможное количество. Квадрат нельзя разрезать только на пятиклеточные фигурки, так как 49 не делится на 5. Также невозможны случаи, когда при разрезании будет ровно одна трехклеточная фигурка или будут ровно две трехклеточные фигурки, так как в первом случае на пятиклеточные фигурки останется $49 - 3 = 46$ клеток, а во втором $49 - 6 = 43$ клетки; однако числа 46 и 43 не делятся на 5. Если же будут ровно три трехклеточные фигурки, то останется $49 - 9 = 40$ клеток, их количество делится на 5 ($40 = 5 \cdot 8$). На рисунке 2 показано, что требуемое разрезание на 3 трехклеточные фигурки и на 8 пятиклеточных существует. Поэтому наименьшее количество фигурок равно $3 + 8 = 11$.

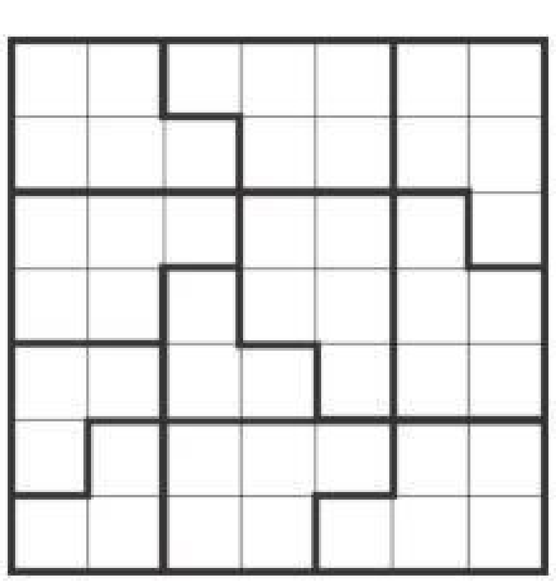


Рис. 2

5. Эта теорема не верна.
Можно, например, взять квадрат со стороной 1 м и прямоугольник со сторонами $\frac{1}{1000}$ м и 1000 м. Их площади будут одинаковы – по 1 м^2. Интуитивно понятно, что не получится и квадрат, и прямоугольник разрезать на один и тот же набор из 100 фигурок – среди частей прямоугольника обязательно найдется длинная фигурка, которая не влезет в квадрат. Более строго объяснить это можно так. Разделим одну из длинных сторон прямоугольника на 100 равных частей с помощью 101-й точки (1-я и 101-я точки будут вершинами). Так как точек 101, то какие-то две из них обязательно окажутся в одной части. Но расстояние между ними будет минимум 1000 м : 100 = 10 м, а в квадрате самые далекие точки – это его противоположные вершины, и расстояние между ними заведомо меньше, скажем, суммы двух его сторон, т.е. меньше 2 м. Поэтому часть с выбранными двумя точками не влезет в квадрат.

КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

(см. «Квант» № 5–6 за 2014 г.)

6. 1344.
Пусть наибольшее синее число – это x. Раз количество синих чисел равно наибольшему синему числу, то синие числа – это в точности все числа от 1 до x. Значит, красные числа – все остальные, т.е. $x+1$, …, 2015. Наименьшее из них в два раза меньше их количества, т.е. $x+1 = \frac{2015-x}{2}$, откуда $2x + 2 = 2015 - x$, $3x = 2013$, $x = 671$. Красных чисел тогда $2015 - 671 = 1344$.
7. За 13 операций.
За 13 операций переставить фишки в обратном порядке легко. Например, так. Поскольку фишки 1 и 15 соседние, то на одной из дуг между ними изначально фишек нет. Оставим 1 и 15 фишки на месте, а остальные переставим на эту пустую дугу в нужном порядке. На это потребуется как раз 13 операций.
Меньшим числом операций обойтись не получится, потому что в этом случае на своих местах останутся хотя бы три фишки, а значит, как минимум три номера будут стоять по порядку по часовой стрелке.
8. Тройки равных положительных чисел.
Очевидно, что тройки равных чисел $x = y = z$ подходят. Докажем теперь, что никакая другая тройка чисел подойти не может. Предположим противное: пусть числа $x \ge y \ge z$, среди которых есть хотя бы два не равных друг другу, удовлетворяют условию задачи. Ясно, что тройки чисел можно рассматривать с точностью до пропорциональности, поэтому будем считать, что $z = 1$ и эта тройка имеет вид $(x, y, 1)$.
Возьмем треугольник со сторонами $a = \frac{x+1}{x}$, $b = 1$, $c = 1$ (такой треугольник существует, так как $x > 1$ и поэтому $1 < \frac{x+1}{x} < 2$, т.е. этот набор из трех чисел удовлетворяет неравенству треугольника). Проверим, существует ли треугольник со сторонами ax, by, cz. Имеем: $ax = x + 1$, $by = y$, $cz = 1$. Но в силу выбора чисел x и y получается, что $x + 1 \ge y + 1$ – неравенство треугольника не выполняется, значит, треугольника с такими сторонами существовать не может. Противоречие.
9. 22.
Введем систему координат так, что большая диагональ нашего кирпича-параллелепипеда соединяет точки $O(0, 0, 0)$ и $A(6, 10, 15)$. Посчитаем число N точек пересечения диагонали OA с плоскостями $x = 1$, $x = 2$, …, $x = 5$, $y = 1$, $y = 2$, …, $y = 9$, $z = 1$, $z = 2$, …, $z = 14$, которые параллельны граням параллелепипеда. Диагональ делится этими точками на $N + 1$ часть и, значит, протыкает $N + 1$ единичных кубиков.
С плоскостями $x = 1$, $x = 2$, …, $x = 5$ у диагонали OA $N_x = 5$ точек пересечения, с плоскостями $y = 1$, $y = 2$, … …, $y = 9$ – $N_y = 9$ точек пересечения, с плоскостями $z = 1$,

$z = 2$, ..., $z = 14$ − $N_z = 14$ точек пересечения. Трудность в том, что среди всех этих точек есть совпадающие, и это надо учесть, чтобы не посчитать их по несколько раз. Рассмотрим пока только плоскости вида $y = k$ и $z = m$. Любая точка на прямой OA имеет вид $(6t, 10t, 15t)$. Поэтому, чтобы последние две координаты y, z этой точки были целыми, должно выполняться равенство $z : y = 15 : 10$, откуда $y = 2k$, $z = 3k$, где k − целое. Таких точек на диагонали четыре: при $k = 1,2,3,4$. Значит, среди точек пересечения диагонали с плоскостями вида $y = k$ и $z = m$ мы посчитали дважды $N_{yz} = 4$ точки.

Аналогично находим $N_{xy} = 1$ и $N_{xz} = 2$. Кроме того, заметим, что на диагонали OA нет точек (кроме ее концов O и A), у которых все три координаты одновременно целые (так как НОД(6, 10, 15) = 1). Поэтому ни одну из точек пересечения диагонали с плоскостями мы не посчитали трижды.

Тем самым,

$$N = N_x + N_y + N_z - N_{xy} - N_{yz} - N_{xz} =$$
$$= 5 + 9 + 14 - 1 - 4 - 2 = 21.$$

Значит, диагональ OA протыкает 22 кубика.

10. Пусть I − центр вписанной окружности треугольника ABC. Тогда AI − биссектриса угла BAC и $AI \perp MN$, значит, $l_A \parallel AI$.

Пусть A', B', C' − середины сторон BC, CA и AB соответственно. Так как $AB \parallel A'B'$ и $AC \parallel A'C'$, то l_A − биссектриса угла $B'A'C'$. Аналогично, l_B и l_C − биссектрисы углов $C'B'A'$ и $A'C'B'$. Тем самым, l_A, l_B и l_C пересекаются в центре вписанной окружности треугольника $A'B'C'$.

РЕБУСЫ ПРО «КВАНТ»

1. *Указание*: разложите число 2015 на простые множители.
Задача имеет единственное решение:

$403 \times 5 \times 1 = 2015$

2. *Указание*: рассмотрите степени цифр, которые близки к числу 2015.
Задача имеет единственное решение:

$6^4 + 719 = 2015$

3. *Указание*: запишите данное равенство «в столбик» в таком виде: $2015 \times \text{Т} = \text{КВАН}$.
Задача имеет единственное решение:

$6045 : 3 = 2015$

4. *Указание*: запишите данное равенство «в столбик» в таком виде: $\text{ФАКТ} \times 3 = \text{КВАНТ}$.
Задача имеет единственное решение:

$$\begin{array}{r} 9520 \\ +\,9520 \\ 9520 \\ \hline 28560 \end{array}$$

5. *Указание*: подумайте, каким наибольшим числом может быть число слева.
Каждое задание имеет единственное решение:

а) $8^3 = 512$

б) $3^6 = 729$

6. *Указание*: начните с проверки того, что получится, если А = 1, затем А = 2 и т.д.
Задача имеет единственное решение:

$43724 + 37583 = 81307$

7. *Указание*: запишите пример «в столбик».
Задача имеет единственное решение:

$8 \times 12195 = 97560$

8. *Указание*: сначала объясните, что цифра А − четная. А цифра К может быть и нечетной (почему?).
Задача имеет единственное решение:

$$\begin{array}{r} 32467 \\ +\,32467 \\ \hline 64934 \end{array}$$

9. *Указание*: сначала подумайте, какой может быть цифра Н.
Задача имеет единственное решение:

$$\begin{array}{r} 13863 \\ \times\quad\;\; 5 \\ \hline 69315 \end{array}$$

10. *Указание*: сначала подумайте, какой может быть цифра Н. А затем цифра Т.
Задача имеет единственное решение:

$$\begin{array}{r} 60917 \\ +\,60917 \\ 60917 \\ \hline 182751 \end{array}$$

11. *Указание*: сначала выясните, какой может быть цифра Н. А затем цифры А и Т.
Задача имеет единственное решение:

$$\begin{array}{r} 13752 \\ +\,13752 \\ 13752 \\ \hline 41256 \end{array}$$

12. *Указание*: сначала выясните, какой может быть цифра В. Затем многое прояснится.
Задача имеет единственное решение:

$$\begin{array}{r} 61927 \\ 5919 \\ +\quad 61927 \\ 5919 \\ \hline 135692 \end{array}$$

13. *Указание*: запишите равенство в виде $\text{ФАНАТЫ} \times 5 = \text{КВАНТА}$ и определите цифру А.
Задача имеет единственное решение:

$$\begin{array}{r} 104098 \\ 104098 \\ +\,104098 \\ 104098 \\ 104098 \\ \hline 520490 \end{array}$$

14. *Указание*: запишите число КВАНТ поразрядно: 10000К + + 1000В + 100А + 10Н + Т.
Каждое задание имеет единственное решение:

а) $18432 = 1 \times 8 \times 4 \times 3 \times 2 \times 96$

б) $13248 = 1 \times 3 \times 2 \times 4 \times 8 \times 69$

15. *Указание*: запишите «в столбик» выражение и слева, и справа.
Задача имеет единственное решение:

$12360 + 12360 = 8240 + 8240 + 8240$

БУРАТИНО И ЕГО НАУЧНАЯ РАБОТА

Ответ к задаче 3. Да, если отношение сторон прямоугольника $ABCD$ равно $\sqrt{p/q}$.

В таблице 5 самая короткая сторона переходит в самую длинную, средняя − в самую короткую: $(a,b,c) \mapsto (C,A,B)$.

Таблица 5

Стороны старые		Коэффициенты разные	Стороны новые	Коэффициент подобия $K = 60$
3	$\mapsto$	3×100	$= 300$	$= 5 \times 60$
4	$\mapsto$	4×45	$= 180$	$= 3 \times 60$
5	$\mapsto$	5×48	$= 240$	$= 4 \times 60$

Ответ к **задаче 4.** Имеются еще две серии треугольников для коэффициентов изменения длин сторон 25, 15, 9:

$$(3p,5p,5p) \mapsto (9\times 5p, 25\times 3p, 15\times 5p) = (45p, 75p, 75p)\,,\ K = 15$$

и

$$(3p,3p,5p) \mapsto (15\times 3p, 9\times 5p, 25\times 3p) = (45p, 45p, 75p)\,,\ K = 15.$$

Обе серии содержат равнобедренные треугольники разной формы.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Да, если заменить объектив диском из черной бумаги с отверстием диаметром около 0,2 мм, как в камере-обскуре.
2. Карандаш нужно расположить параллельно лампе и как можно ближе к столу. При этом тени, создаваемые отдельными участками лампы, будут почти точно накладываться друг на друга.
3. Можно, например если футболист в центре поля освещен прожекторами, установленными высоко по углам стадиона.
4. Тень исчезнет, когда мяч будет находиться на половине высоты комнаты. Размеры тени будут постоянны, если диаметр мяча будет равен диаметру шара.

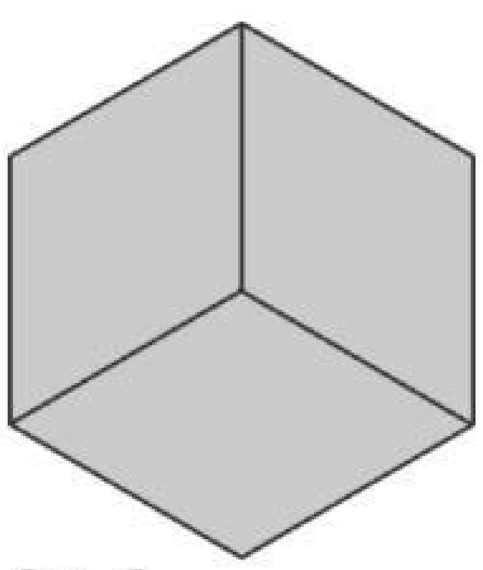


Рис. 3

5. Тень от куба имеет форму правильного шестиугольника (рис.3).
6. Расстояние увеличится в два раза.
7. Изображение будет приближаться к берегу.
8. Зеркало следует расположить под углом 24° или 66° относительно горизонта.
9. Дорожка на поверхности воды возникает из-за отражения света от мелких волн, которые ориентированы в различных направлениях. На идеально гладкой поверхности воды дорожки нет – есть только одно изображение Луны, как в плоском зеркале. При самых разных положениях наблюдателя отраженные лучи попадают к нему в глаз – каждый наблюдатель видит «свою» дорожку.
10. Отраженный луч вращается против часовой стрелки с удвоенной скоростью вращения зеркала.
11. Для доказательства следует построить изображение источника A в зеркале и сравнить длины путей A_1CB и A_1DB (рис. 4).

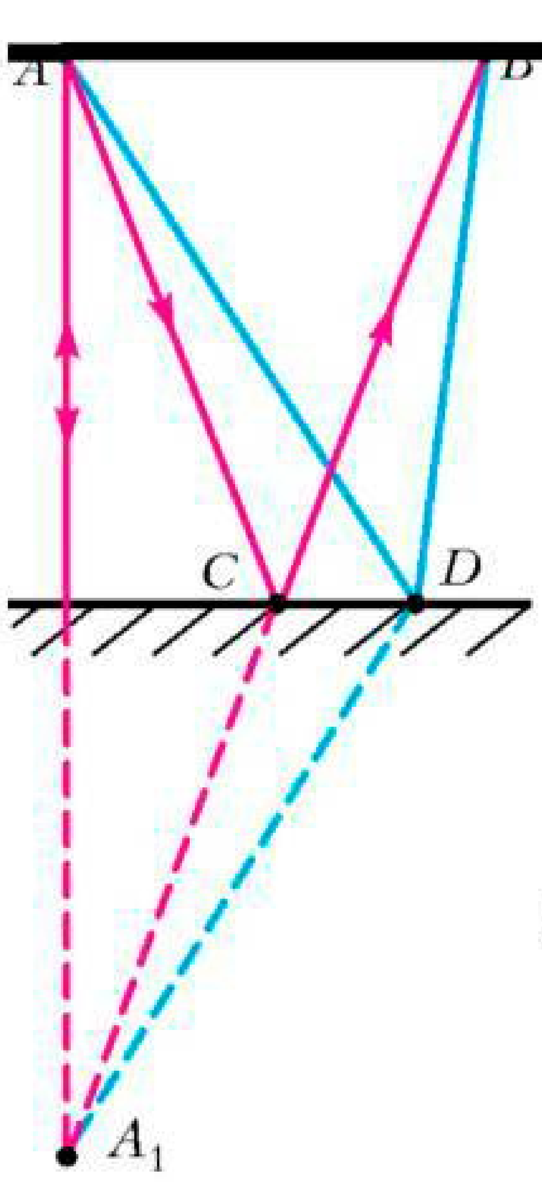


Рис. 4

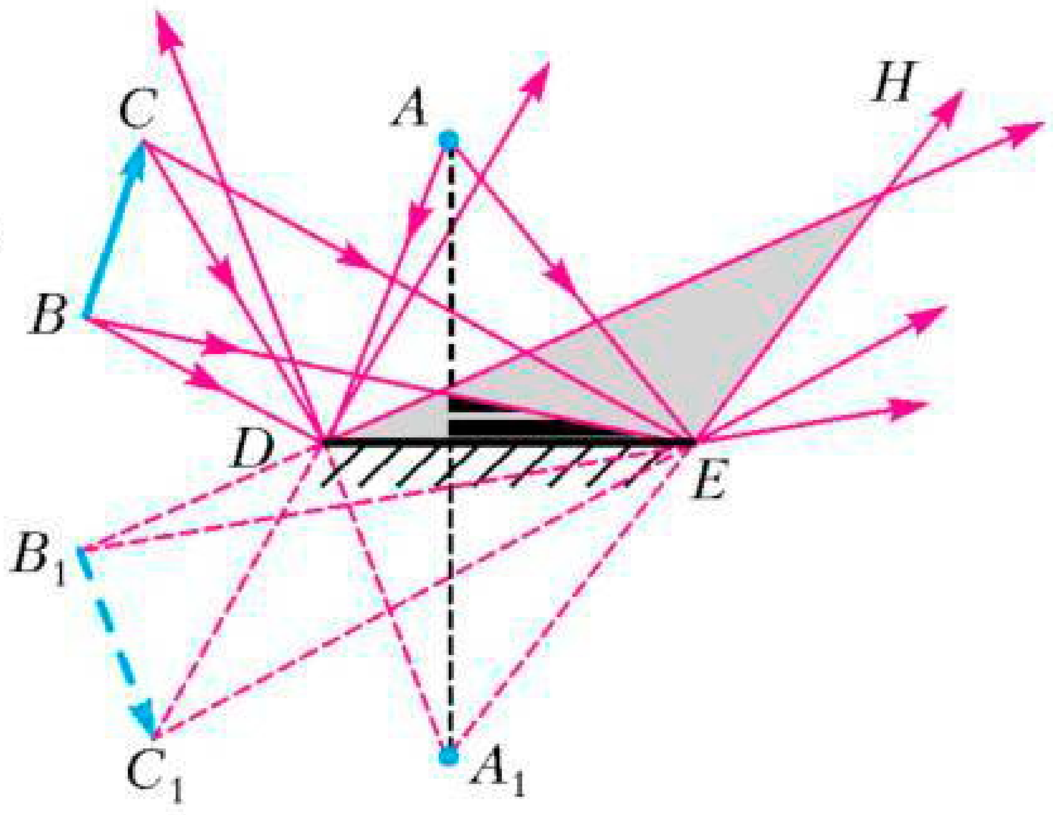


Рис. 5

12. Одновременно увидеть изображение точки A и отрезка BC можно только при расположении глаза внутри треугольника DEH (рис. 5).

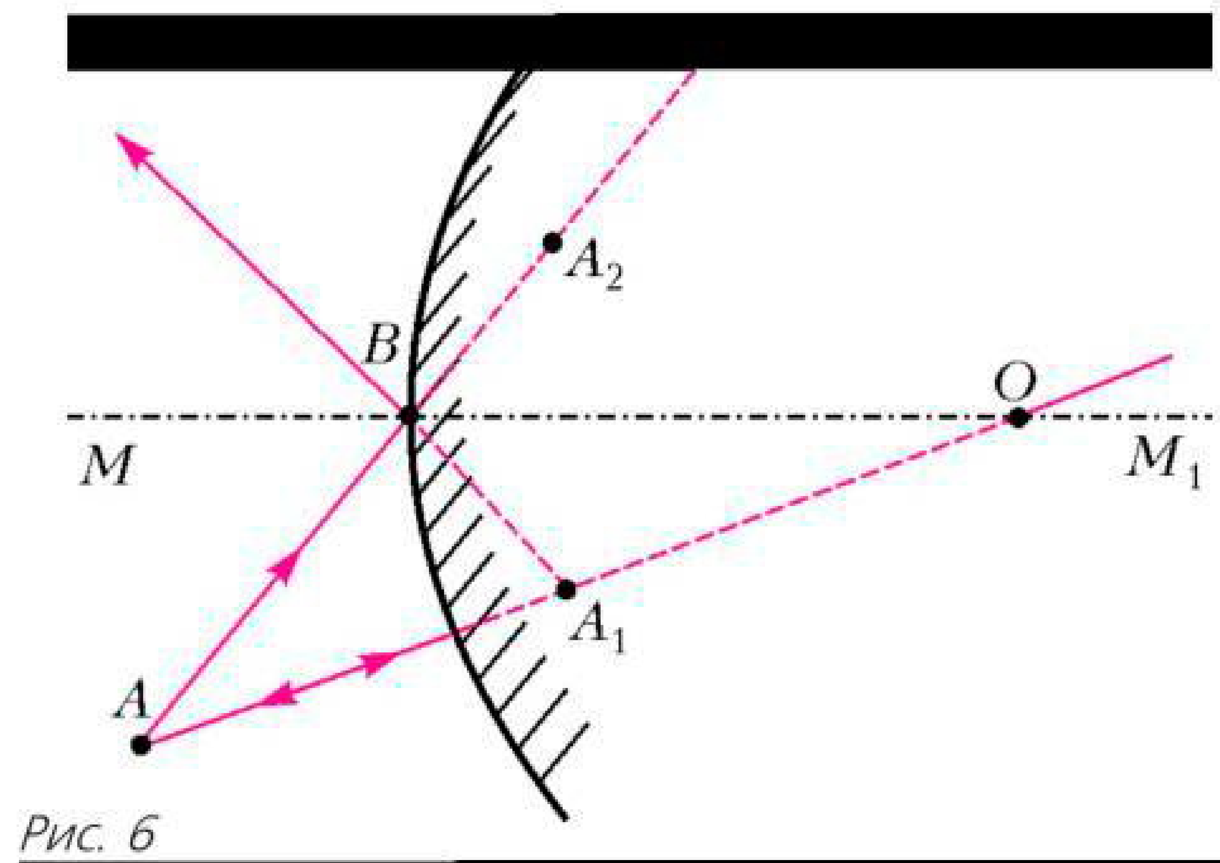


Рис. 6

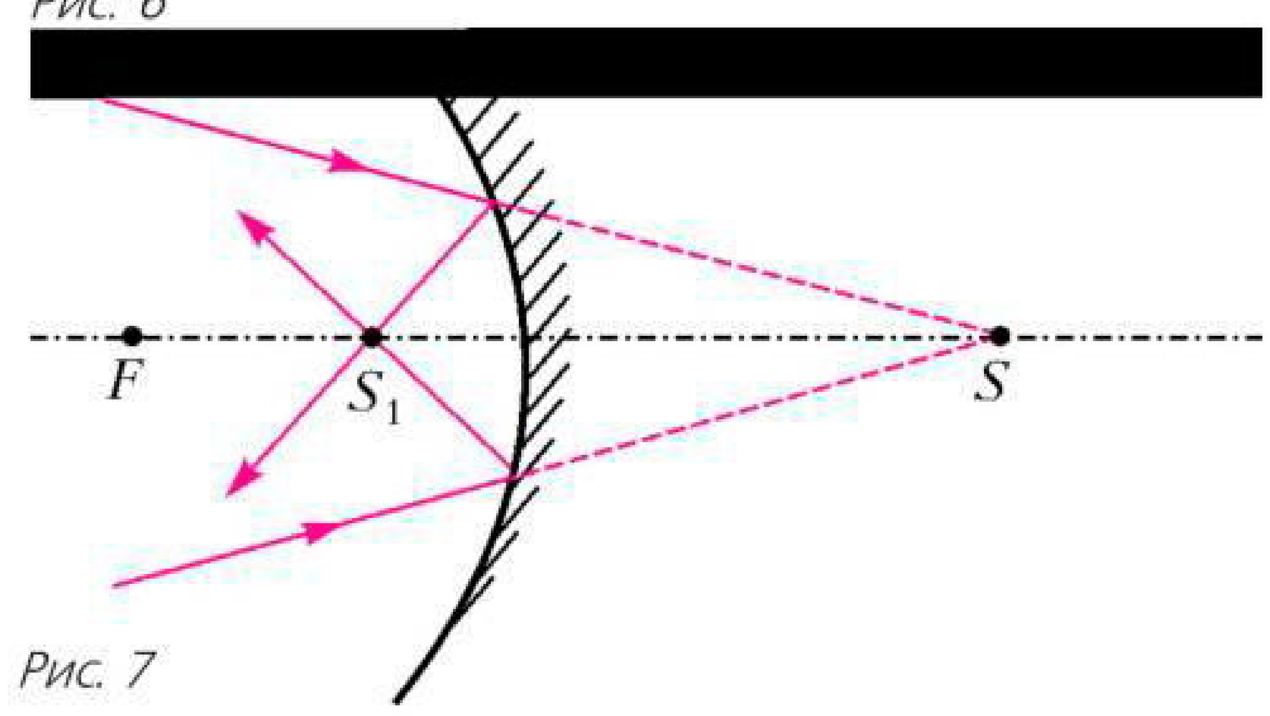


Рис. 7

13. Надо построить точку A_2, симметричную точке A_1, и провести линии AA_2 и AA_1 (рис. 6). Пересечение этих линий с осью MM_1 зеркала определяет положение его вершины B и центра O. Зеркало – выпуклое.
14. У зеркала для бритья большой радиус кривизны. Обычно при пользовании им лицо располагают в пределах фокусного расстояния, поэтому видят прямое мнимое изображение. Поверхность же ложки имеет заметно меньший радиус кривизны. Когда смотрят в нее, лицо обычно находится за пределами фокусного расстояния, поэтому видят перевернутое действительное изображение.
15. Может, если светящаяся точка – мнимая, т.е. если на зеркало падает сходящийся пучок лучей (рис. 7).

Микроопыт

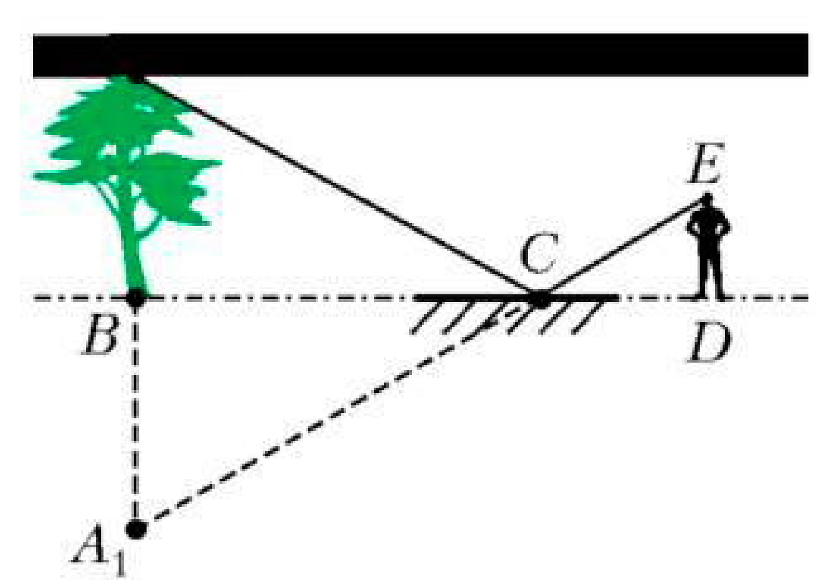


Рис. 8

На некотором расстоянии от измеряемого дерева (AB) на ровной земле в точке C (рис. 8) положите горизонтально зеркало и отойдите от него назад в точку D, стоя в которой вы увидите в зеркале верхушку A дерева. Тогда дерево во столько раз выше вашего роста (ED), точнее расстояния от ваших глаз до земли, во сколько раз расстояние BC от дерева до зеркала больше расстояния CD от зеркала до вас.

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОВОГО БАЛАНСА

1. 3.	**2.** 24 °С .	**3.** 25 °С .	**4.** 33 °С .	**5.** 39 °С .
6. 4.	**7.** 75 г.	**8.** 0,56 кг.	**9.** 8 кг.	**10.** 100 °С .

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XLI ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. 2013.
Пусть A и B – люди, которым достались карточки с самым большим и самым маленьким числами соответственно. Поскольку они оба сказали первую фразу, A – рыцарь, а B –

лжец. Но если бы они сказали вторую фразу, то A солгал бы, а B сказал бы правду; это невозможно. Значит, A и B сказать вторую фразу не могут, и $k \le 2013$.

Покажем, что ситуация, когда оставшиеся 2013 человек смогут сказать вторую фразу, возможна. Пусть сидящим за столом достались (по часовой стрелке) карточки с числами 1, 2, 3, …, 2015; при этом карточка с числом 2015 досталась рыцарю, а остальные – лжецам. Тогда первую фразу могут сказать все, а вторую – все, кроме людей с карточками 1 и 2015.

2. 4.

Среди пяти подряд идущих натуральных чисел могут найтись 4 интересных числа. Например, подойдут числа 199, 200, 201, 202, 203 (с суммами цифр 19, 2, 3, 4 и 5).

Докажем теперь, что все 5 чисел не могут оказаться интересными.

Среди наших пяти чисел есть три, лежащие в одном десятке. Тогда их суммы цифр – последовательные числа; значит, все они не могут одновременно быть простыми.

3. Только при $n = 2$.

Покажем, что числа 1, 2, …, 9 получить нельзя. Сумма исходных чисел равна 0, а за каждый ход сумма чисел изменяется на 2. Значит, она всегда четна, т.е. числа 1, 2, …, 9 с суммой 45 получить нельзя.

Набор 2, 3, …, 10 получить можно. Один из возможных способов представлен на рисунках 9, *а–в*, где одинаковые числа показывают, к каким двум клеткам и сколько раз применяется операция прибавления единицы. Итоговый результат показан на рисунке 9, *г*.

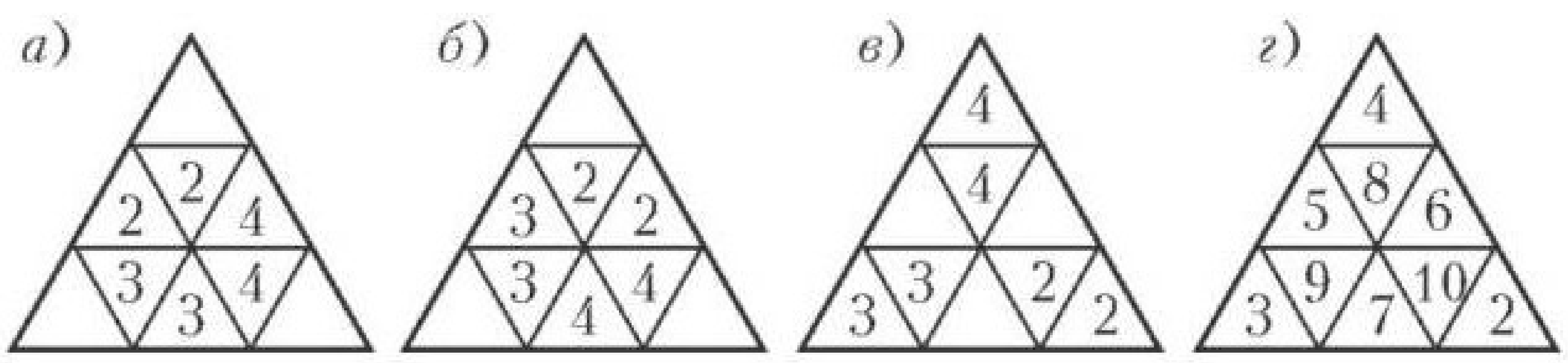


Рис. 9

Покажем, наконец, что при $n > 2$ нельзя получить набор чисел n, $n + 1$, …, $n + 8$. Предположим противное. Раскрасим клетки в шахматном порядке так, как показано на рисунке 10. Тогда при каждом ходе одна из выбранных клеток – белая, а другая – синяя. Значит, суммы чисел в белых и синих клетках изменяются на одно и то же число. Так как вначале эти суммы равны, они окажутся равными и в конце. С другой стороны, сумма чисел в синих клетках окажется не больше чем $(n+8)+(n+7)+(n+6) = 3n + 21$, а сумма чисел в белых – не меньше чем $n+(n+1)+\ldots+(n+5) = 6n + 15$. При $n > 2$ имеем $6n + 15 = (3n+15)+3n > 3n + 15 + 6 = 3n + 21$; значит, требуемые суммы равными не будут. Противоречие.

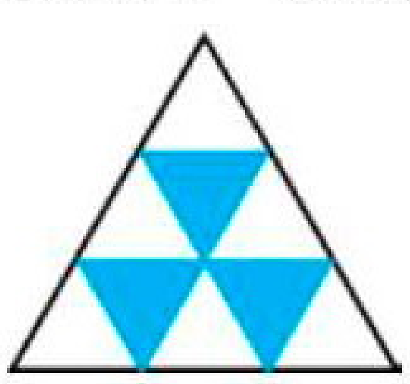


Рис. 10

4. Обозначим через I центр окружности ω, вписанной в треугольник ABC. Пусть D – точка касания ω со стороной AC (рис.11). Так как прямая BB_1 проходит через центр ω, точки D и K_1 симметричны относительно прямой BB_1, т.е. BI – биссектриса угла K_1BD. Докажем, что BI также является биссектрисой угла K_2BD; отсюда будет следовать требуемое. Рассмотрим окружность °, построенную на B_2I как на диаметре. Так как внутренняя и внешняя биссектрисы угла треугольника перпендикулярны, а B_2K_2 и B_2D касаются ω, имеем $\angle B_2BI = \angle B_2K_2I = \angle B_2DI = 90°$. Значит, точки I, B, D и K_2 лежат на окружности °. Радиусы ID и IK_2 окружности ω равны, поэтому равны и стягиваемые ими дуги окружности °; следовательно, $\angle IBD = \angle IBK_2$, т.е. BI – биссектриса угла K_2BD. Это нам и требовалось.

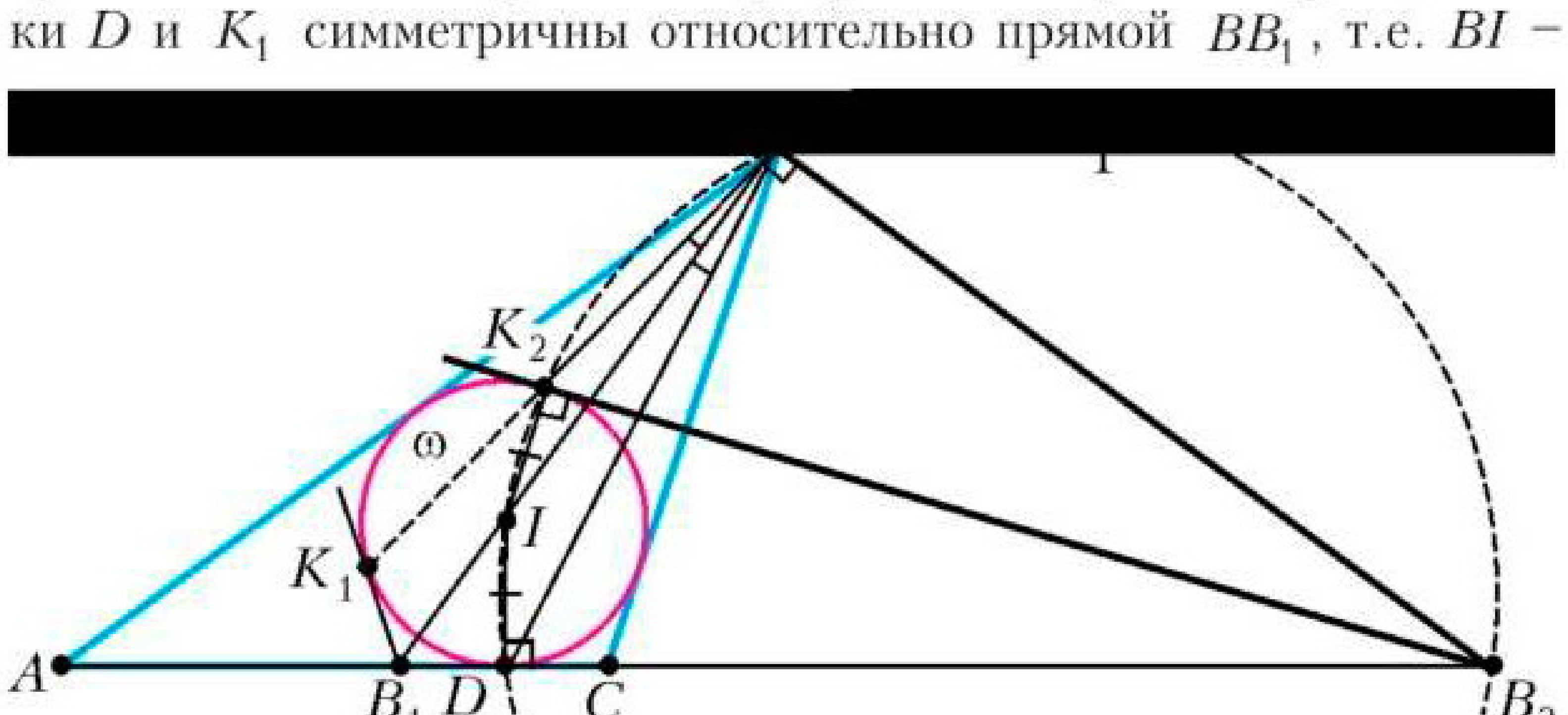


Рис. 11

6. Опустим из точки K перпендикуляр KH на гипотенузу AB (рис.12). Прямоугольные треугольники KCB и KHB равны по гипотенузе и острому углу ($\angle KBC = \angle KBH$). Значит, $CB = HB$ и $KC = KH$.

Далее, в окружности, описанной около $AKLB$, на хорды AK и KL опираются равные углы, поэтому $AK = KL$. Значит, прямоугольные треугольники KHA и KCL равны по катету и гипотенузе, откуда $HA = CL$. Итак, $CB + CL = HB + HA = AB$, что и требовалось доказать.

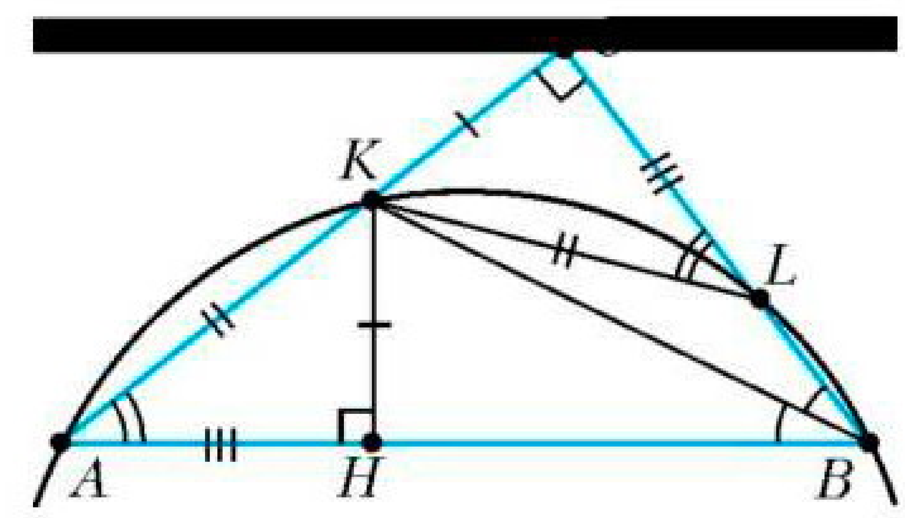


Рис. 12

7. По неравенству о средних имеем

$$cd \le |cd| = \sqrt{c^2d^2} \le \frac{c^2 + d^2}{2} = \frac{4 - a^2 - b^2}{2}.$$

Следовательно, достаточно показать, что

$$(2+a)(2+b) \ge \frac{4 - a^2 - b^2}{2}.$$

Перенесем все в левую часть, домножим на 2 и раскроем скобки. Мы получим эквивалентное неравенство

$$4 + 4a + 4b + 2ab + a^2 + b^2 \ge 0.$$

Левая часть последнего неравенства переписывается в виде

$$4 + 4(a+b) + (a+b)^2 = (2+a+b)^2;$$

значит, это выражение неотрицательно, что и требовалось доказать.

8. $3^{100} - 2^{100}$.

Обозначим $n = 100$. Назовем последовательность из n натуральных чисел, любые два соседних члена которой различаются не больше чем на 1, *интересной*. Каждой интересной последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сопоставим *разностную* последовательность $b_i = a_{i+1} - a_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n - 1$). Все члены разностной последовательности равны 0 или ±1, так что количество всевозможных разностных последовательностей равно 3^{n-1}.

Посчитаем сначала количество S всех интересных последовательностей, минимальный член которых не превосходит 3. Рассмотрим произвольную разностную последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_{99}$. Любые две интересные последовательности, соответствующие ей, отличаются прибавлением одного и того же числа к каждому члену. Значит, среди них ровно по одной последовательности с минимальным членом, равным 1, 2 и 3. Таким образом, $S = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$.

В S учтены все последовательности, выписываемые Петей, и несколько *лишних* – тех, в которых не встречается 3. Ясно, что если в интересной последовательности встречаются числа, как большие 3, так и меньшие 3, то и 3 тоже встречается. Но минимальный член каждой лишней последовательности не больше 2, значит, и все их члены не превосходят 2. Итак, все лишние последовательности состоят из единиц и двоек. С другой стороны, каждая последовательность из единиц и двоек является интересной и, стало быть, лишней.

Итого, лишних последовательностей ровно 2^n, а значит, искомое количество равно $S - 2^n = 3^n - 2^n$.

10 класс

1. Если какое-то из чисел x_i равно 0, утверждение задачи очевидно. Если одно из x_i равно ± 1, то $a = 0$, так что утверждение также верно. В противном случае при каждом i число $(1+x_i)(1-x_i) = 1 - x_i^2$ отрицательно. С другой стороны, из условия имеем

$$0 \le a^2 = (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_{13})\cdot(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{13}).$$

Но в правой части стоит отрицательное число (как произведение 13 отрицательных чисел вида $(1-x_1)(1+x_1)$). Противоречие.

2. При нечетных n.

Пусть $A_1A_2\dots A_n$ – данный многоугольник, а S – его центр. Покажем сначала, что если n четно, то существуют две различные расстановки, при которых соответствующие тройки будут одинаковыми. Тогда Петя не сможет восстановить исходные числа. В первой расстановке поставим в S число 2, а во все вершины n-угольника – по 1. Во второй расстановке поставим в S число 1, а в вершины n-угольника – единицы и двойки чередующимся образом. Для обеих расстановок все тройки будут «1, 1, 2».

Осталось показать, что при нечетном n Петя сможет восстановить все числа. Отметим, что число из вершины A_i пишется в двух тройках, а число из S – в n тройках. Значит, только число из S будет встречаться во всех тройках нечетное число раз и Петя сможет его определить. После этого для каждой пары соседних вершин n-угольника он знает, какие два числа написаны в них. Осталось по этим данным восстановить числа в вершинах. Заметим сразу, что если Петя сумеет восстановить, скажем, число в A_1, то затем из пары (A_1, A_2) он восстановит число в A_2, затем – в A_3 и т.д. Итак, ему достаточно восстановить число в одной вершине n-угольника.

Если в какой-то паре, скажем (A_1, A_2), два числа равны, то Петя восстановит число в A_1. Пусть такой пары нет, а в вершинах (A_1, A_2) написаны числа a и b. Если в (A_2, A_3) написана не та же пара, то она пересекается с (a,b) по числу, написанному в A_2, и Петя восстановит это число. Итак, он не сможет восстановить число в вершине A_2, только если в (A_2, A_3) записана пара (a,b). Аналогично, в (A_3, A_4) тоже должна быть записана эта же пара, иначе Петя сможет определить число в A_3, и т.д. Итак, Петя не сможет восстановить числа в вершинах n-угольника, только если числа a и b в этих вершинах чередуются; это невозможно, так как n нечетно.

3. Заметим, что треугольники PLQ и PAQ симметричны относительно прямой PQ. Через точку A проведем касательную XY к окружности, на которой лежат точки A, B, C, P, Q (рис. 13). Для решения задачи достаточно доказать, что прямые XY и BC симметричны относительно прямой PQ. А поскольку точки A и L симметричны относительно прямой PQ, остается установить равенство углов XAL и BLA.

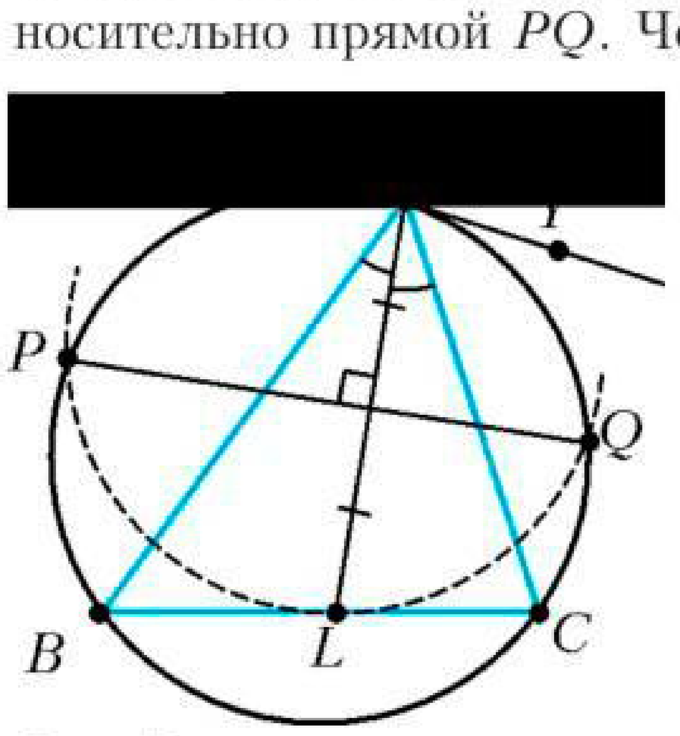


Рис. 13

Используя касание и теорему о внешнем угле треугольника, имеем

$$\angle XAL = \angle XAB + \angle BAL = \angle ACB + \angle CAL = \angle ACL + \angle CAL = \angle BLA,$$

что и требовалось.

4. Заметим, что

$$a + \frac{1}{a} = a + \frac{ab+ac+bc}{a} = a + b + c + \frac{bc}{a}.$$

Применяя неравенство о средних для чисел a и bc/a, получаем

$$a + \frac{1}{a} \ge b + c + 2\sqrt{bc} = \left(\sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2.$$

Отсюда $\sqrt{a + \frac{1}{a}} \ge \sqrt{b} + \sqrt{c}$. Аналогичным образом выводятся неравенства $\sqrt{b + \frac{1}{b}} \ge \sqrt{c} + \sqrt{a}$ и $\sqrt{c + \frac{1}{c}} \ge \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Складывая последние три неравенства, получаем требуемый результат.

7. Покажем, что можно из исходного трехчлена получить новый, имеющий хотя бы один целый корень, изменив коэффициенты a, b, c суммарно даже не более чем на 1022.

Если коэффициент c не больше 1022, то, сделав его равным нулю, мы получим искомый трехчлен $f_1(x) = ax^2 + bx$, имеющий целый корень $x = 0$.

Пусть теперь $c \ge 1023$; тогда из условия получается, что $a + b \le 977$. Рассмотрим два последовательных квадрата, между которыми находится c: $m^2 \le c < (m+1)^2$. Поскольку $c < 2000 < 45^2$, имеем $m \le 44$. Тогда одна из разностей $c - m^2$ и $(m+1)^2 - c$ не превосходит

$$\frac{1}{2}\left((m+1)^2 - m^2\right) = \frac{1}{2}(2m+1),$$

т.е. она не больше $m \le 44$. Итак, найдется натуральное k, для которого $\left|c - k^2\right| \le 44$. Заменив теперь a на -1, b на 0, а c на k^2, мы изменим коэффициенты суммарно не более чем на $(a+b+1) + \left|c - k^2\right| \le 978 + 44 = 1022$ и получим трехчлен $f_2(x) = -x^2 + k^2$, имеющий целый корень $x = k$.

11 класс

2. 33.

Пусть на вечере было p супружеских пар и d детей (из условия, $d \le 10p$). Тогда каждый ребенок состоял в $(p-1)(p-2)$ тройках: маму можно было выбрать из одной из $p - 1$ супружеских пар, а при зафиксированном выборе мамы папу можно было выбрать из одной из $p - 2$ оставшихся пар. Значит, общее количество троек равно $d\cdot(p-1)(p-2) = 3630$. Поскольку $d \le 10p$, получаем $3630 \le 10p^3$, т.е. $p^3 \ge 363 > 7^3$. Значит, $p \ge 8$.

Далее, число $3630 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 11^2$ имеет два делителя $p - 1$ и $p - 2$, отличающихся на 1. Если один из этих делителей делится на 11, то другой дает остаток 1 или 10 при делении на 11. Тогда он взаимно прост с 11, а значит, он делит $2\cdot 3\cdot 5 = 30$ и при этом не меньше 10. Нетрудно видеть, что этим делителем может быть только 10; тогда $p - 2 = 10$, $p - 1 = 11$ и $d = 3630/110 = 33$.

Если же оба числа $p - 2$ и $p - 1$ не делятся на 11, то число $2\cdot 3\cdot 5 = 30$ делится на их произведение; это противоречит тому, что $p \ge 8$.

3. Лемма. *Пусть A, B, C и D – различные точки на плоскости, причем прямые AC и BD пересекаются в точке E. Тогда*

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{BE}{DE}.$$

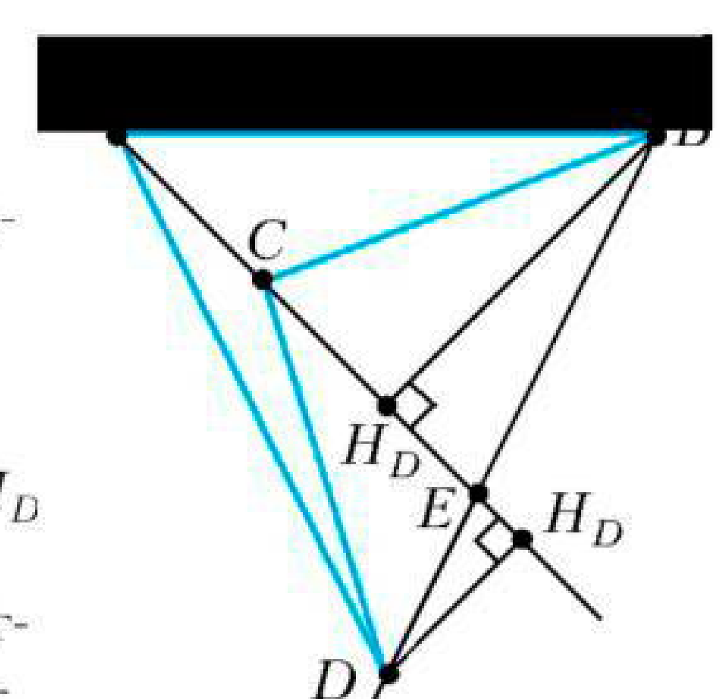


Рис. 14

Доказательство. Пусть BH_B и DH_D – высоты в треугольниках ABC и ADC соответственно (рис. 14). Тогда $BH_B \parallel DH_D$, поэтому треугольники BH_BE и DH_DE подобны; отсюда $\frac{BH_B}{DH_D} = \frac{BE}{DE}$. С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{AC\cdot BH_B}{2}$ и $S_{ADC} = \frac{AC\cdot DH_D}{2}$, откуда $\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{AC\cdot BH_B}{AC\cdot DH_D} = \frac{BH_B}{DH_D} = \frac{BE}{DE}$, что и требовалось.

Перейдем к решению задачи. Обозначим через M точку пересечения медиан ΔABC (рис.15). Из леммы следует, что $S_{AMB} = S_{AMC}$; из условия теперь получаем, что $\frac{S_{AMB}}{S_{AC_0B}} = \frac{S_{AMC}}{S_{AB_0C}}$. Опять применяя лемму, получаем $\frac{MC_1}{C_1C_0} = \frac{MB_1}{B_1B_0}$, откуда $C_1B_1 \parallel C_0B_0 \parallel BC$. Поскольку четырехугольник BCB_0C_0 вписан, он является равнобокой трапецией или прямоугольником; в любом случае, $BM = MC$, т.е. треугольник BMC – равнобедренный, и его медиана MA является и высотой. Значит, и в треугольнике ABC медиана AA_1 является высотой, т.е. $AB = AC$. Равенство $AB = BC$ доказывается аналогично.

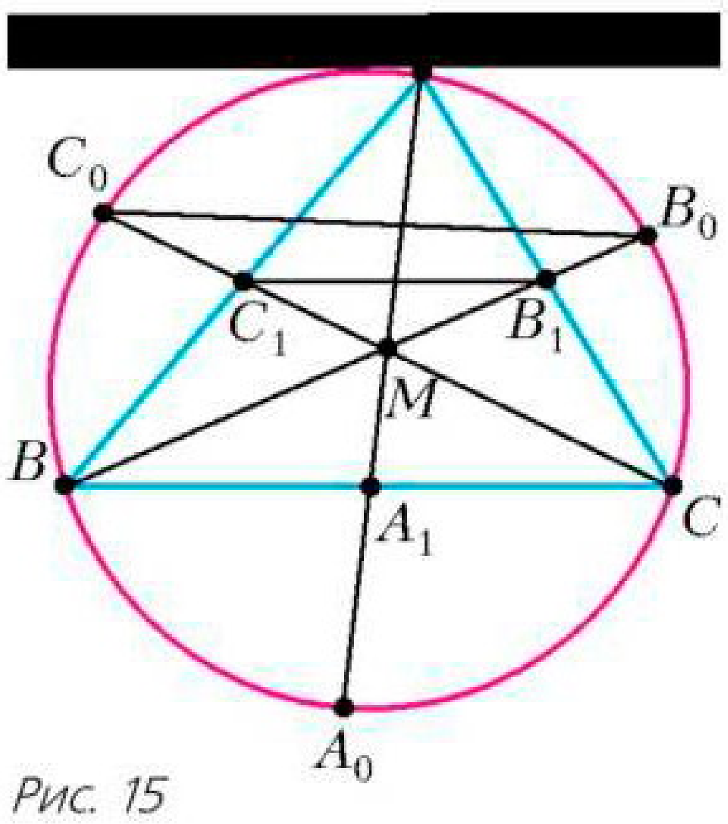


Рис. 15

5. Подставим в условие $b = 0$ и получим, что $f\left(a^2\right) \geq f(0)$ при всех a. Следовательно, $f(t) \geq f(0)$ при любом положительном t. Из этого и свойств графика квадратичной функции следует, в частности, что ветви параболы направлены вверх. Предположим, что оба корня трехчлена неотрицательны. Тогда вершина параболы имеет положительную абсциссу, назовем ее t_0. Но трехчлен в точке t_0 принимает единственное минимальное значение, т.е. $f(0) > f(t_0)$. Противоречие.

6. Верно.

Обозначим центры вазы, грейпфрута и апельсинов через V, G и A_1, A_2, A_3, A_4 соответственно. Заметим, что все эти шесть точек различны, так как все фрукты находятся под крышкой. Пусть соответствующие апельсины касаются грейпфрута в точках K_1, K_2, K_3, K_4, а вазы – в точках P_1, P_2, P_3, P_4. Обозначим радиусы вазы, грейпфрута и апельсина через v, g и a соответственно.

Рассмотрим треугольники VGA_i (рис. 16). В них сторона VG – общая; кроме того, $VA_i = VP_I - A_iP_i = v - a$ и $GA_i = GK_i + K_iA_i = g + a$. Значит, все эти треугольники равны по трем сторонам. Поскольку $GK_i = g$ и $K_iA_i = a$, точки K_i соответствуют друг другу в этих треугольниках. Тогда перпендикуляры из них на общую сторону VG падают в одну и ту же точку X. Поэтому все точки K_i лежат в плоскости, проходящей через X перпендикулярно VG.

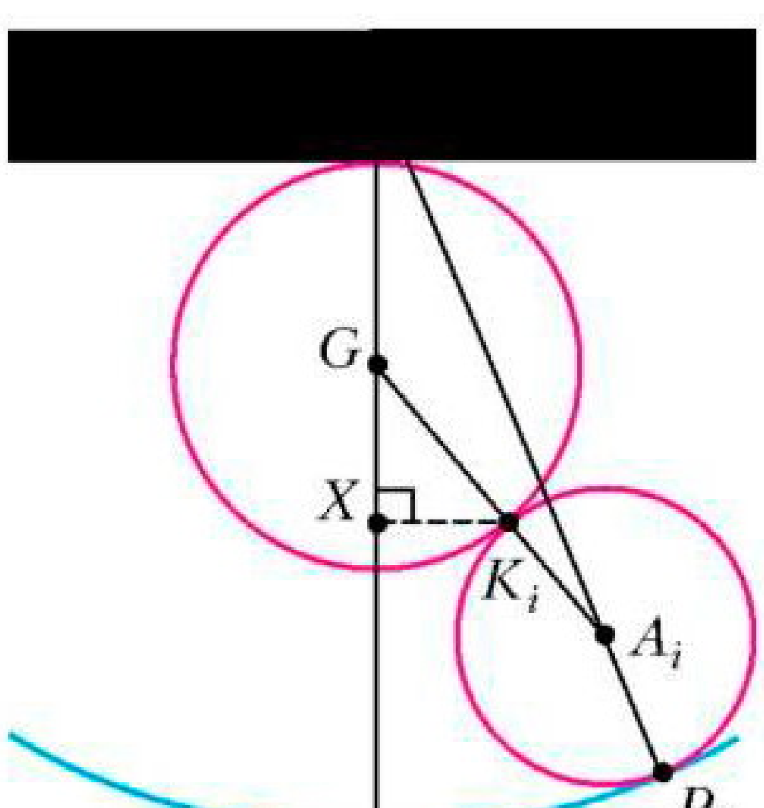


Рис. 16

7. Не могло.

Предположим, что требуемая расстановка существует. Ясно, что наибольшее из чисел не может равняться разности соседей; значит, каждое из остальных чисел равно разности соседей. В частности, наибольшее число встречается ровно один раз; обозначим его через m.

Пусть d – одно из наименьших чисел в круге. Рассмотрим любую из двух дуг между d и m; пусть на ней стоят подряд числа $d = a_0, a_1, \ldots, a_k = m$. Докажем индукцией по $I = 0, 1, \ldots, k - 1$, что $a_{i+1} \geq a_i$. В базовом случае $i = 0$ утверждение верно, ибо d – наименьшее число. Для перехода от $i - 1$ к i предположим, что $i < k$ и $a_{i-1} \leq a_i$. Тогда равенство $a_i = a_{i-1} - a_{i+1}$ невозможно, ибо $a_{i+1} > 0$, и поэтому $a_i = a_{i+1} - a_{i-1}$. Значит, $a_{i+1} > a_i$, что и доказывает переход индукции. Мы заодно показали, что $a_{i+1} = a_i + a_{i-1}$ при всех $i = 1, \ldots, k - 1$.

Аналогично, если на другой дуге между d и m стоят подряд числа $d = b_0, b_1, \ldots, b_l = m$, то $b_0 \leq b_1 \leq \ldots \leq b_l$ и $b_{i+1} = b_i + b_{i-1}$ при всех $i = 1, 2, \ldots, l - 1$. Наконец, для числа $a_0 = b_0 = d$ условие задачи также должно выполняться, так что $d = \left|a_1 - b_1\right|$. Без ограничения общности можно считать, что $d = b_1 - a_1$; тогда $a_2 = a_0 + a_1 = b_1 > a_1$.

Продолжим теперь последовательности $a_0, a_1, \ldots$ и $b_0, b_1, \ldots$ согласно формулам $a_{i+1} = a_i + a_{i-1}$ и $b_{i+1} = b_i + b_{i-1}$. Докажем индукцией по $i = 1, 2, \ldots$, что $a_i < b_i \leq a_{i+1}$. При $i = 1$ это уже доказано выше. При $i = 2$ из соотношений $b_0 = a_0 \leq a_1 < b_1 = a_2$ получаем $a_2 = a_1 + a_0 < b_1 + b_0 = b_2 \leq a_2 + a_1 = a_3$. Для перехода индукции предположим теперь, что $i \geq 3$, и утверждение уже доказано для меньших значений i. По предположению индукции имеем $a_{i-2} < b_{i-2} \leq a_{i-1} < b_{i-1} \leq a_i$, откуда $a_i = a_{i-1} + a_{i-2} < b_{i-1} + b_{i-2} = b_i \leq a_i + a_{i-1} = a_{i+1}$, что и требовалось.

Итак, мы получили, что $a_0 = b_0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots$ Значит, равенство $b_l = a_k$ возможно лишь при $k = l + 1$; но тогда общее количество чисел в круге равно $k + l = 2l + 1$, что не может равняться 300. Противоречие.

8. $5^{100} - 3^{100}$.

Обозначим $n = 100$. Назовем последовательность из n натуральных чисел, любые два соседних члена которой различаются не больше чем на 2, *интересной*. Каждой интересной последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сопоставим *разностную* последовательность $b_i = a_{i+1} - a_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n - 1$). Все члены разностной последовательности равны 0, ±1 или ±2, так что количество всевозможных разностных последовательностей равно 5^{n-1}.

Посчитаем сначала количество S всех интересных последовательностей, минимальный член которых не превосходит 5. Рассмотрим произвольную разностную последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_{99}$. Любые две интересные последовательности, соответствующие ей, отличаются прибавлением одного и того же числа к каждому члену. Значит, среди них ровно по одной последовательности с минимальным членом, равным 1, 2, 3, 4 или 5. Таким образом, $S = 5 \cdot 5^{n-1} = 5^n$.

В S учтены все последовательности, выписываемые Петей, и несколько *лишних* – тех, в которых не встречается ни 4, ни 5. Ясно, что, если в интересной последовательности встречаются числа, как большие 5, так и меньшие 4, то 4 или 5 также встретится. Но минимальный член каждой лишней последовательности не больше 3, значит, и все их члены не превосходят 3. Итак, все лишние последовательности состоят из чисел 1, 2 и 3. С другой стороны, каждая последовательность из чисел 1, 2 и 3 является интересной и, стало быть, лишней. Итого, лишних последовательностей ровно 3^n, а значит, искомое количество равно $S - 3^n = 5^n - 3^n$.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ОЛИМПИАДЫ ИМЕНИ МАКСВЕЛЛА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

1. Из-за редких измерений из таблицы сразу не ясно, в какой момент зайчик начал движение, а в какой – остановился. Можно построить график зависимости координаты от времени и по нему найти время движения. По коэффициенту наклона графика найдем скорость движения зайчика: v = 10 м/мин. Разделив перемещение x = 50 м на скорость v, найдем полное время движения: t_0 = 5 мин. Время начала движения можно определить по перемещению за третью минуту. Оно составляет 7 м, следовательно, зайчик двигался 0,7 мин. Время старта: 2,3 мин от начала измерений. На месте пропусков должны быть числа 0, 17, 27, 37, 50 и 50 соответственно.

2. Поскольку $v_1 > v_3$, то для $v_{\text{ср}}$ справедливо неравенство

$$v_1 > v_{\text{ср}} = v_2 > v_3 .$$

Учитывая, что $T_1 + T_2 + T_3 = T$, получим

$$T_1 < T_3 < T_2 .$$

На первом участке $\frac{s}{3} = v_1 T_1$. Следовательно, $s > 3v_{\text{ср}}T_1$, откуда

$$T_1 < \frac{s}{3v_{\text{ср}}} = \frac{T}{3} = T_3 .$$

На третьем участке

$$s_3 = v_3\frac{T}{3} < v_{\text{ср}}\frac{T}{3} = \frac{s}{3} = s_1 .$$

Кроме того,

$$s_1 + s_2 + s_3 = s .$$

Отсюда следует

$$s_3 < s_1 < s_2 .$$

3. Так как в коробке уложено 4 слоя кусочков сахара, то в одном слое их 42 штуки. Число 42 можно разложить на простые множители: $42 = 2\cdot 3\cdot 7$. Следовательно, один слой может иметь размеры $21\cdot 2$, $14\cdot 3$ или $7\cdot 6$ кусочков. Первые два варианта противоречат условию, так как тогда вдоль самого короткого ребра укладывалось бы 2 или 3 кусочка. Таким образом, вдоль длинного ребра укладывается 7 кусочков, и, соответственно, размер ребра кубика сахара равен

$$a = \frac{c}{7} = \frac{98\text{ мм}}{7} = 14\text{ мм} .$$

Общий объем сахара равен

$$V = 14\text{ мм}\cdot 14\text{ мм}\cdot 14\text{ мм}\cdot 168 = 460992\text{ мм}^3 \approx 0{,}461\cdot 10^{-3}\text{ м}^3 .$$

Плотность сахара равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{0{,}5\text{ кг}}{0{,}461\cdot 10^{-3}\text{ м}^3} \approx 1085\text{ кг/м}^3 .$$

4. Время путешествия будет минимальным, если все туристы одновременно прибудут в пункт назначения, а велосипед все время будет задействован: от *А* к *Б* на нем будут ехать двое, а от *Б* к *А* – один. Пусть два туриста на велосипеде проехали расстояние x. На это им потребовалось время

$$t_2 = \frac{x}{v_2} .$$

Затем один из них, назовем его первым, до пункта *Б* шел пешком и прошел расстояние $L - x$ за некоторое время t_0, а другой, назовем его вторым, поехал обратно навстречу своему товарищу, назовем его третьим, который из *А* шел пешком. Пусть на обратную дорогу второй потратил время   . Если второй и третий встретятся от пункта *А* на расстоянии $y = L - x$, то далее проедут на велосипеде расстояние x и прибудут в пункт *Б* одновременно со спешившимся первым туристом. Запишем эти условия на языке формул. Для первого туриста:

$$v_0(t_2 + \ ) = L - x .$$

За время t_2 третий турист прошел расстояние $x_1 = v_0 t_2 = x\frac{v_0}{v_2}$. Следовательно, велосипедист проедет обратно, до встречи со своим товарищем, расстояние $x - x_1$ за время

$$= \frac{x - x_1}{v_0 + v_1} = \frac{v_2 - v_0}{v_2}\frac{x}{v_0 + v_1} .$$

Из записанных выражений получим

$$v_0\left(\frac{x}{v_2} + \frac{v_2 - v_0}{v_2}\frac{x}{v_0 + v_1}\right) = L - x .$$

Решив это уравнение относительно x и подставив числовые значения, найдем

$$x = 15\text{ км}.$$

Тогда

$$t_2 = \frac{x}{v_2} = 1\text{ ч},\quad L - x = 7\text{ км},\quad t_0 = \frac{L - x}{v_0} = 1{,}4\text{ ч} .$$

Таким образом, все время путешествия составит

$$T = t_2 + t_0 = 2{,}4\text{ ч} .$$

8 класс

1. Поскольку система находится в равновесии, запишем для нее правило моментов относительно точек O_1 и O_2, лежащих на линии действия сил натяжения нитей, за которые подвешены блоки (рис. 17):

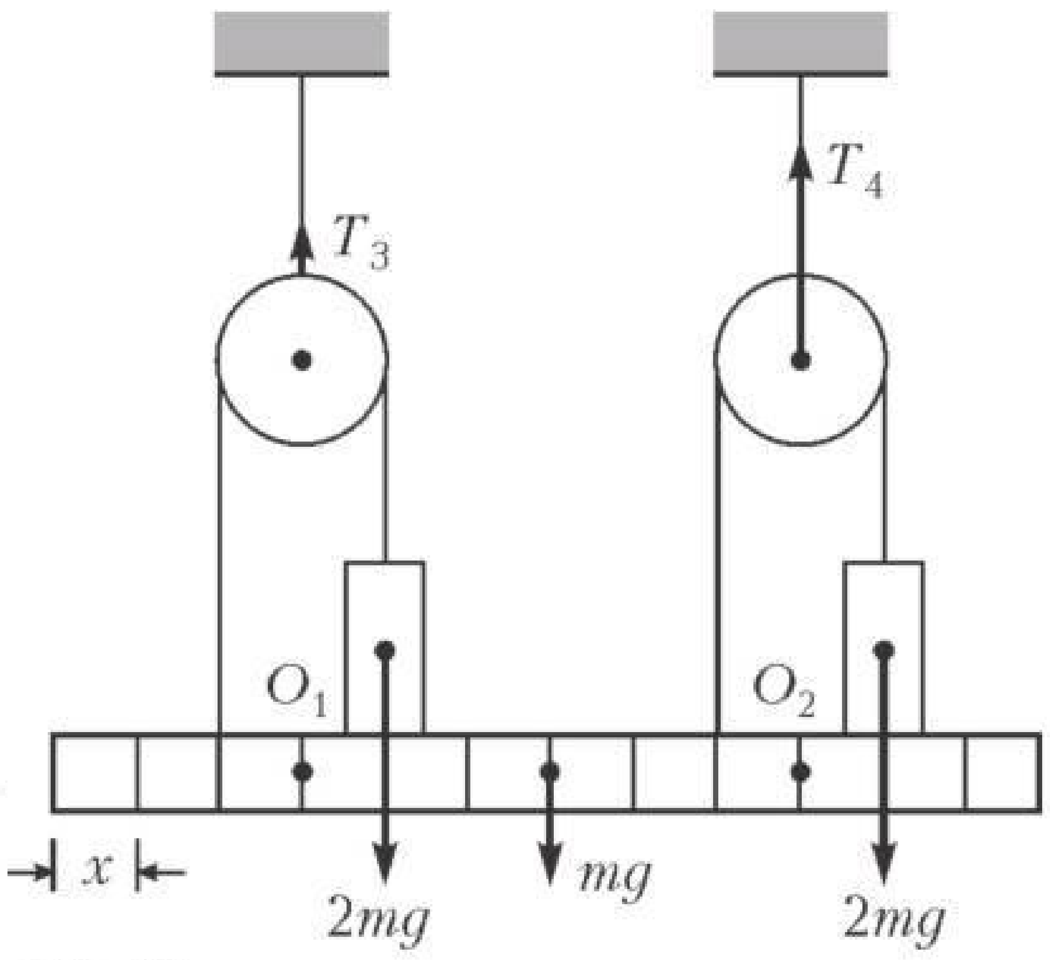


Рис. 17

$$2mg\cdot x + mg\cdot 3x + 2mg\cdot 7x - T_4\cdot 6x = 0 ,$$

$$T_3\cdot 6x - 2mg\cdot 5x - mg\cdot 3x + 2mg\cdot x = 0 .$$

Отсюда найдем

$$T_3 = \frac{11}{6}mg ,\quad T_4 = \frac{19}{6}mg .$$

Сила натяжения нити, удерживающей левый груз, равна

$$T_1 = \frac{T_3}{2} = \frac{11}{12}mg .$$

Аналогично, сила натяжения нити, удерживающей правый груз, равна

$$T_2 = \frac{T_4}{2} = \frac{19}{12}mg .$$

Из условия равновесия левого груза найдем силу, с которой на него действует планка:

$$N_1 = 2mg - T_1 = \frac{13}{12}mg .$$

Аналогично, для правого груза

$$N_2 = 2mg - T_2 = \frac{5}{12}mg .$$

2. Показания динамометра перестают изменяться при погружении кубика на 7,4 см (убедитесь в этом с помощью табличных данных), значит, длина его ребра равна $a = 7{,}4$ см. Это позволяет найти плотность материала, из которого изготовлен кубик:

$$\rho = \frac{F(0)}{ga^3} \approx 2{,}2\text{ г/см}^3 .$$

По мере погружения кубика в жидкость сила Архимеда возрастает, а показания динамометра уменьшаются. Это будет продолжаться до тех пор, пока кубик полностью не погрузится в жидкость. Максимальная сила Архимеда равна

$$F_{\text{А}} = F(0) - F(7{,}4) \approx 4{,}06\text{ Н}.$$

Следовательно, плотность жидкости составляет

$$\rho_0 \approx 1{,}21\text{ г/см}^3 .$$

3. Вдоль длинного ребра коробки можно положить либо 14, либо 8 кусочков сахара (подробнее – см. решение задачи 3 для 7 класса). В первом случае получается плотность, противоречащая условию, а во втором случае получается плотность

$$\rho \approx 1{,}08\text{ г/см}^3 = 1080\text{ кг/м}^3 .$$

4. На тело со стороны окружающего воздуха действует сила

Архимеда. Обычно по сравнению с силой тяжести тела она ничтожна и ее не учитывают. В нашем случае это не так. Пусть m – масса льда. Его объем $V_л = \frac{m}{\rho_л}$. После плавления лед превратится в воду. Ее объем $V_в = \frac{m}{\rho_в}$. Из-за уменьшения объема уменьшится и сила Архимеда:

$$\Delta F_A = \rho_0 g\left(\frac{m}{\rho_л} - \frac{m}{\rho_в}\right),$$

где ρ_0 – плотность воздуха. Поэтому чашка с водой опустится вниз (равновесие нарушится). Чтобы восстановить равновесие, на чашку с гирей следует добавить груз массой

$$\Delta m = \frac{\Delta F_A}{g} = \rho_0\left(\frac{m}{\rho_л} - \frac{m}{\rho_в}\right).$$

Поскольку сила Архимеда мала по сравнению с силой тяжести льда или гири, можно считать, что масса льда равна массе гири, т.е. 1 кг. Тогда

$$\Delta m = m_г\left(\frac{\rho_0}{\rho_л} - \frac{\rho_0}{\rho_в}\right) \approx 0{,}12 \text{ г}.$$

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XLIX ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

1. Равновесие возможно, если существуют отличные от нуля силы реакции грузов и планки и силы натяжения нитей. Для нахождения сил натяжения рассмотрим только внешние силы, действующие на систему. Правила моментов относительно точек O_1 и O_2, лежащих на линиях действия сил натяжения верхних нитей (рис.18), имеют вид

$$2mg \cdot 3x + mg \cdot 7x = Mg \cdot x + 2T_2 \cdot 6x,$$

$$mg \cdot x + 2T_1 \cdot 6x = 2mg \cdot 3x + Mg \cdot 7x,$$

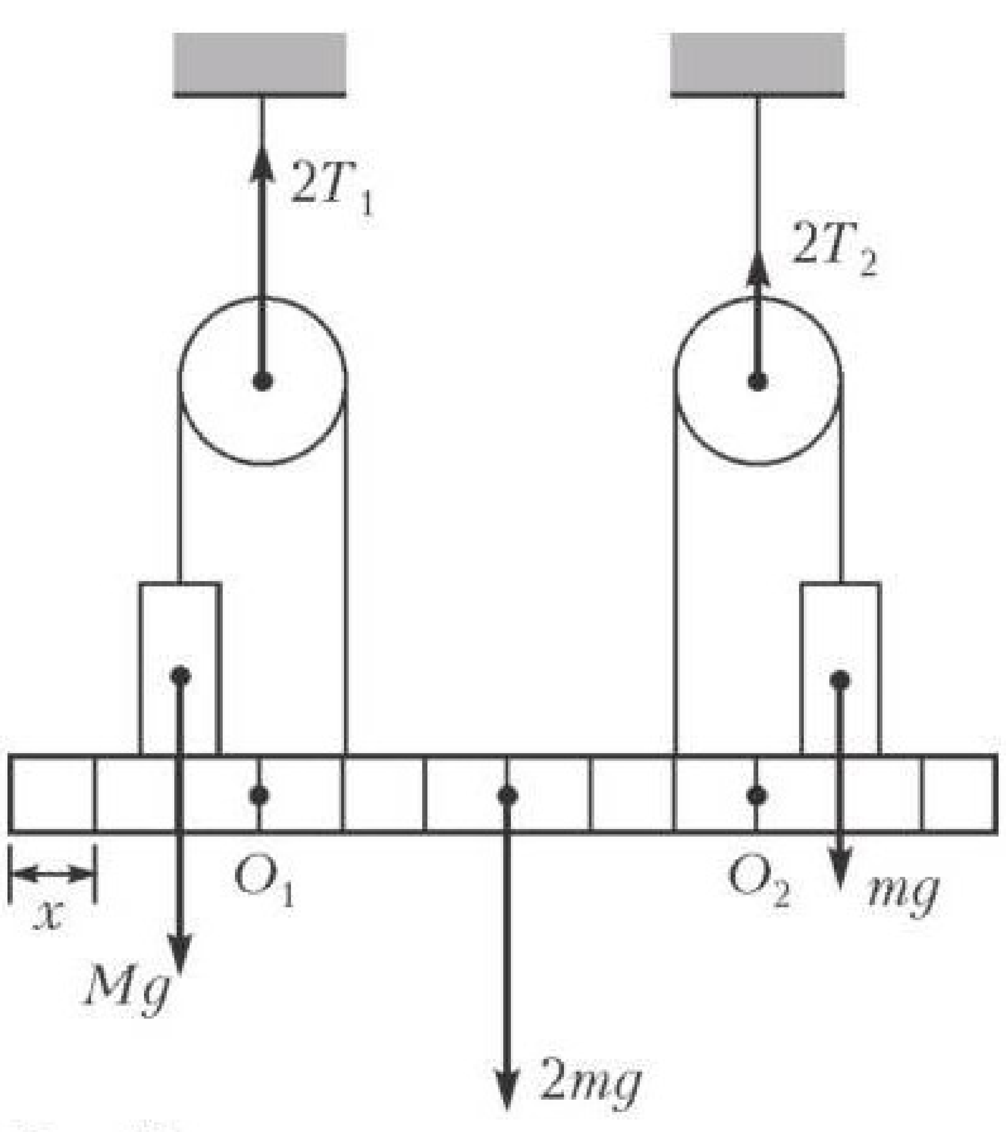


Рис. 18

откуда

$$T_1 = \frac{5m + 7M}{12} g,$$

$$T_2 = \frac{13m - M}{12} g.$$

Видно, что левая нить не провисает при любых массах M, а правая натянута при $M < 13m$. Запишем теперь условия равновесия для каждого из грузов в отдельности:

$$Mg = T_1 + N_1,$$

$$mg = T_2 + N_2.$$

Отсюда, с учетом выражений для сил натяжения, для сил реакции планки получаем

$$N_1 = \frac{5(M - m)g}{12}, \quad N_2 = \frac{(M - m)g}{12}.$$

Положительные значения этих сил будут только при $M > m$. Таким образом, равновесие системы возможно для

$$m < M < 13m.$$

2. По условию сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости, т.е. $F_c = kv^2$. Запишем условия свободного падения:

$$mg = kv_1^2,$$

вертикального взлета:

$$F_т = mg + kv_2^2$$

и горизонтального полета:

$$F_т^2 = (mg)^2 + \left(kv_3^2\right)^2.$$

Отсюда найдем

$$v_3 = \sqrt[4]{v_2^2\left(v_2^2 + 2v_1^2\right)} \approx 5{,}2 \text{ м/с}.$$

3. Пронумеруем амперметры слева направо и изобразим эквивалентную схему (рис. 19). Поскольку все амперметры одинаковые, запишем

$$I_1 = I_4 = I,$$

$$I_3 = I_1 + I_4 = 2I.$$

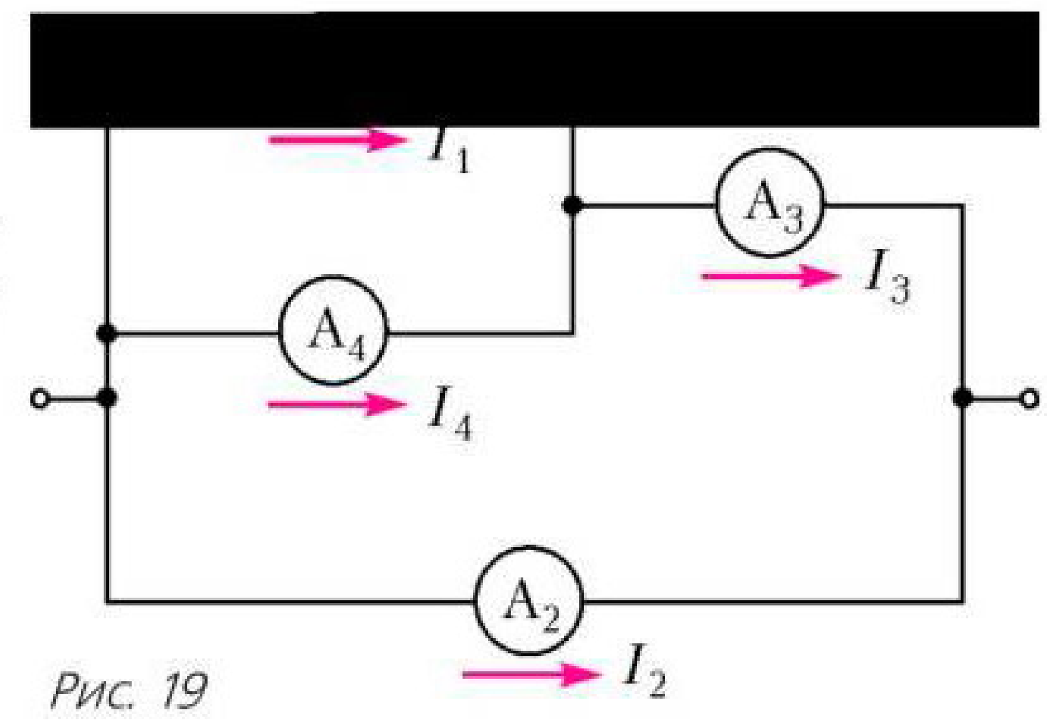


Рис. 19

Обозначим внутреннее сопротивление амперметра r, тогда напряжение источника равно

$$U = I_1 r + I_3 r = 3Ir = I_2 r, \text{ откуда } I_2 = 3I.$$

По условию,

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 7I, \text{ или } I = \frac{I_0}{7} = 7 \text{ мА}.$$

Искомая сила тока через перемычку AB равна

$$I_{AB} = I_1 + I_2 = 4I = 28 \text{ мА}.$$

4. Пусть v_{x0} – проекция скорости тела в начальный момент на горизонтальную ось, а v_{y0} – на вертикальную. Проекция скорости тела на горизонтальную ось сохраняется, а проекция на вертикальную ось изменяется по закону

$$v_y(t) = v_{y0} - gt.$$

Величина скорости тела в любой момент t равна

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{x0}^2 + \left(v_{y0} - gt\right)^2}.$$

По условию,

$$v(\ ) = \sqrt{v_{x0}^2 + \left(v_{y0} - g\ \right)^2} = \alpha\sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2},$$

$$v(2\ ) = \sqrt{v_{x0}^2 + \left(v_{y0} - 2g\ \right)^2} = \beta\sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}.$$

Отсюда найдем

$$v_{x0} = 10{,}53 \text{ м/с}, \quad v_{y0} = 10{,}85 \text{ м/с}.$$

Полное время полета равно

$$t_п = \frac{2v_{y0}}{g} = 2{,}21 \text{ с},$$

расстояние от места броска до места падения –

$$l = v_{x0} t_п = 23{,}3 \text{ м}.$$

5. Световые лучи распространяются прямолинейно. Слева на фотографии (рис. 20) запечатлены люди вместе с отбрасываемыми ими тенями. Полностью видна тень девушки в черном плаще. Через вершины ее головы и тени проведем прямую *1*, на которой будет лежать изображение солнца. То же справедливо, например, для ребенка в коляске и его тени. Если на фотографии тень от какого-нибудь прута забора и прут лежат на одной прямой, то на этой же прямой находится изображение солнца. Найдем на фотографии наиболее подходящий прут и проведем через него линию *2*. На пересечении линий *1* и *2* лежит изображение солнца – точка S. Зная положение солнца, можно восстановить положение верхнего края забора.

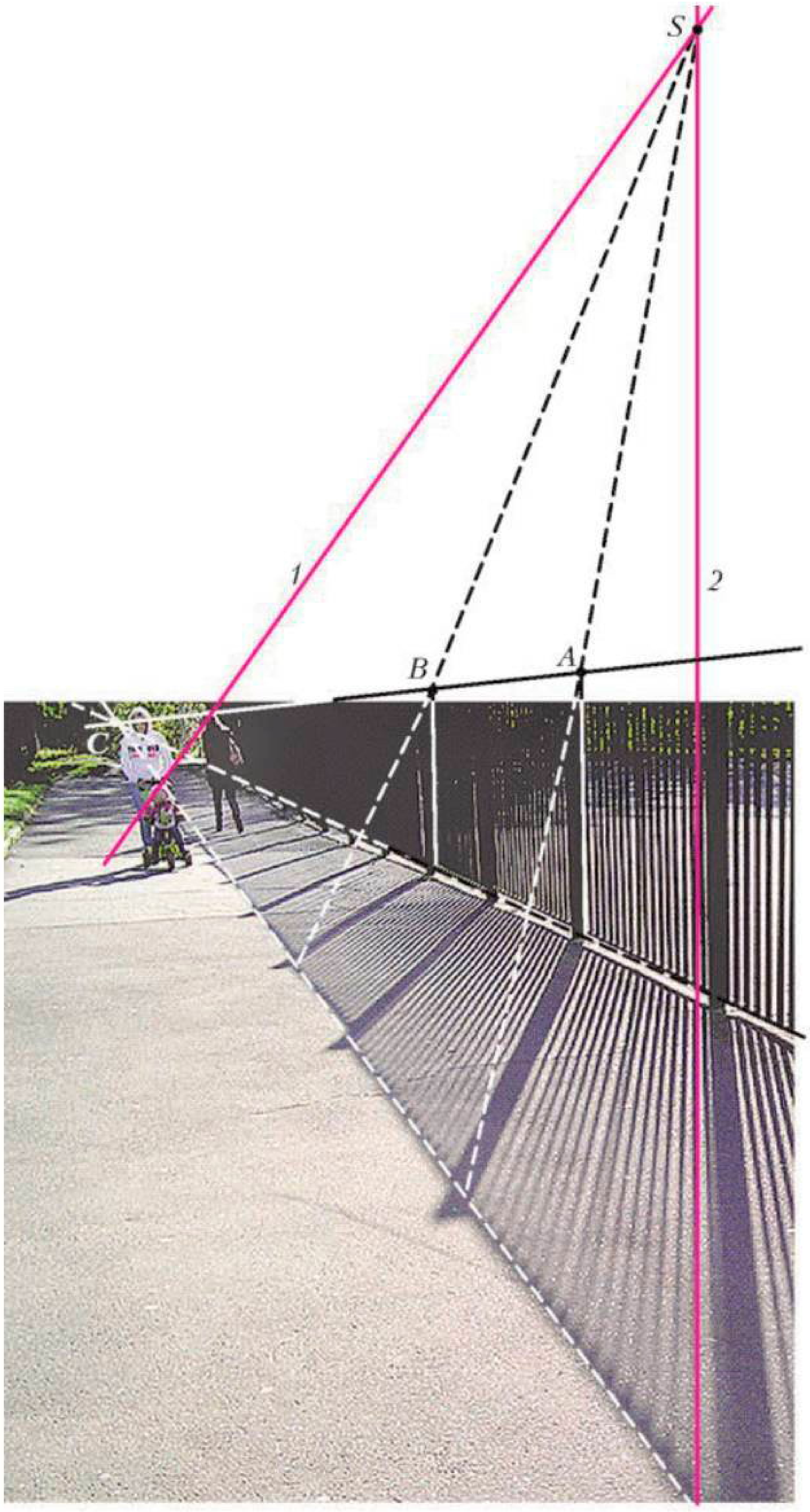


Рис. 20

Проведем прямую через верхушку тени, отбрасываемой одним и столбов, и точку S. Проведем также прямую, являющуюся продолжением этого столба. На пересечении двух этих прямых лежит вершина столба – точка A. Аналогичным образом можно найти вершину другого столба – точку B и через две этих точки провести прямую, соответствующую верхнему краю столба. Эта прямая должна также проходить через точку C – пересечение прямых, являющихся продолжениями тени верхнего края забора и тени нижнего края забора. Эта точка также может быть использована для восстановления верхнего края забора.

10 класс

1. Из-за наличия блока сила, растягивающая верхнюю пружину, вдвое больше силы, растягивающей нижнюю пружину. Тогда, по закону Гука, деформации верхней и нижней пружин одинаковы:

$$F = kx,\ 2F = 2kx.$$

Пусть при смещении свободного конца нити на x вниз растяжение верхней пружины увеличится на y. При этом блок опустится вниз на y и растяжение нижней пружины также будет равно y. Поскольку нить нерастяжима,

$$x = 3y.$$

Внешняя сила сначала равна $F = kx$, в конце она равна $F_1 = k(x+y) = (4/3)kx = (4/3)F$ и линейно зависит от x. Работу этой силы найдем как площадь под графиком $F(y)$:

$$A = \frac{F+F_1}{2}x = \frac{7}{6}Fx = 0{,}07\ \text{Дж}.$$

2. В процессе *1–2–4–1* на участке *1–2* к газу подводят количество теплоты Q_1, а на участке *2–4* газ отдает количество теплоты Q. В процессе *2–3–4–2* на участке *4–2* к газу подводят Q тепла, а на участке *3–4* газ отдает Q_2 тепла. В процессе *1–2–3–4–1* на участке *1–2* к газу подводят Q_1 тепла, а на участке *3–4* газ отдает Q_2 тепла. В первых двух процессах проходится один и тот же участок *2-4*, но в разных направлениях, поэтому в одном цикле на этом участке совершается положительная, а в другом – такая же по величине, но отрицательная работа. Отсюда следует, что

$$A = A_1 + A_2.$$

По определению коэффициента полезного действия,

$$\eta_1 = \frac{A_1}{Q_1},\ \eta_2 = \frac{A_2}{Q},\ \eta = \frac{A}{Q_1}.$$

Поскольку $\eta_1 = \eta_2$, то $Q = (A_2/A_1)Q_1$. По закону сохранения энергии, $A_1 = Q_1 - Q$. Отсюда

$$Q_1 = \frac{A_1^2}{A_1 - A_2},\ \text{и}\ \eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2} = 0{,}36 = 36\%.$$

3. Проверим, не выходит ли часть воздуха из пробирки. В конечном состоянии объем воздуха не может превышать объем пробирки, а давление не может превышать атмосферное. Таким образом, по закону Бойля–Мариотта получаем условие

$$p_\text{н}V_\text{н} = p_\text{к}V_\text{к} \le p_0V_\text{пр},\ \text{или}\ \left(p_0 + \rho g(l-h)\right)(l-h) - p_0 l \le 0.$$

Это условие не выполняется, поэтому мы приходим к выводу, что во время подъема часть воздуха из пробирки выходит и по окончании пробирка будет целиком заполнена воздухом при атмосферном давлении. Запишем для этого случая уравнение состояния для воздуха:

$$p_0V_\text{пр} = \nu RT_0.$$

После изменения температуры уравнение состояния примет вид

$$(p_0 - \rho gh)V_\text{к} = \nu RT,\ \text{где}\ V_\text{к} = \frac{l-h}{l}V_\text{пр}.$$

Отсюда находим искомую температуру:

$$T = \frac{(p_0 - \rho gh)(l-h)}{p_0 l}T_0 = 186\ \text{К}.$$

Если не учитывать выход воздуха, то получается неправильный «ответ»:

$$T_\text{непр} = \frac{p_0 - \rho gh}{p_0 + \rho g(l-h)}T_0 = 70\ \text{К}.$$

4. Сопротивление проводника длиной L и площадью поперечного сечения S, удельное сопротивление которого линейно меняется с длиной от ρ_l до ρ_r, можно найти по формуле

$$R = \frac{\rho_l + \rho_r}{2}\frac{L}{S}.$$

Мысленно разобьем каждый проводник посередине на два последовательно соединенных с сопротивлениями R_1, R_2 и R_3, R_4 соответственно. Для первого проводника запишем

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_2 + (\rho_1+\rho_2)/2}{\rho_1 + (\rho_1+\rho_2)/2} = \frac{\rho_1 + 3\rho_2}{3\rho_1 + \rho_2}.$$

Поскольку при последовательном соединении проводников напряжения на них пропорциональны сопротивлениям, то

$$U_2 = U\frac{R_2}{R_1+R_2} = U\frac{3\rho_1+\rho_2}{4(\rho_1+\rho_2)}.$$

Аналогично,

$$U_4 = U\frac{R_4}{R_3+R_4} = U\frac{\rho_1+3\rho_2}{4(\rho_1+\rho_2)}.$$

Напряжение на резисторе сопротивлением R_2 равно сумме напряжений на резисторе сопротивлением R_4 и на вольтметре:

$$U_2 = U_4 + U_{\text{в}}, \text{ откуда } U_{\text{в}} = U_2 - U_4 = \frac{U}{2}\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}.$$

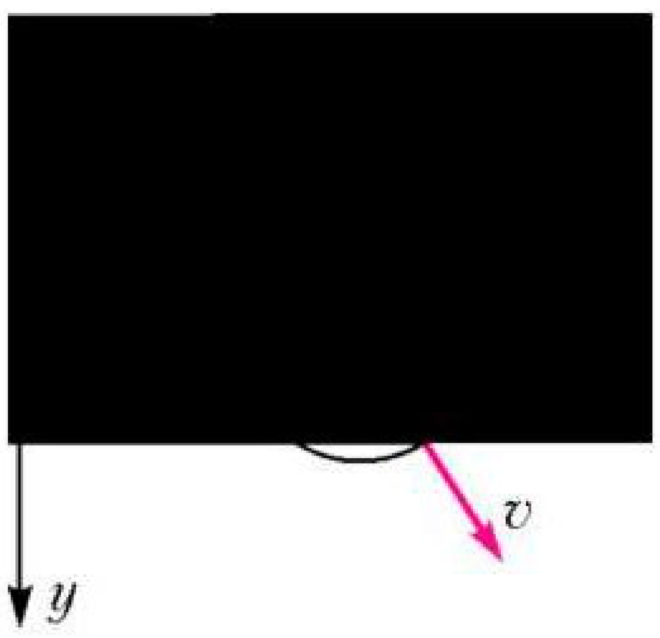


Рис. 21

5. Поскольку шайбы гладкие, при столкновении действующие между ними силы будут направлены вдоль прямой, соединяющей центры шайб. Обозначим скорость второй шайбы после столкновения $\vec{v}$, ее направление показано на рисунке 21. По закону сохранения импульса скорость первой шайбы после удара будет равна

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 - \vec{v}.$$

При абсолютно упругом ударе кинетическая энергия сохраняется:

$$v_0^2 = (\vec{v}_0 - \vec{v})^2 + v^2 = v_0^2 - 2v_0 v\cos\alpha + 2v^2,$$

откуда

$$v = v_0\cos\alpha.$$

Проекция скорости второй шайбы на ось y есть

$$v\sin\alpha = v_0\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}v_0\sin 2\alpha.$$

Эта проекция максимальна при $\alpha = 45°$, в этом случае

$$d = \sqrt{2}R.$$

11 класс

1. Обозначим массу шарика m, а длину нити l и рассмотрим момент, когда нить составляет угол φ с вертикалью. Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекции на ось, параллельную нити:

$$m\frac{v^2}{l} = T - mg\cos\varphi.$$

Из закона сохранения энергии,

$$m\frac{v^2}{2} = mgl(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Отсюда получим

$$T = mg(3\cos\varphi - 2\cos\alpha).$$

Видно, что сила натяжения нити минимальна при $\varphi = \alpha$ и равна $T_{\min} = mg\cos\alpha$. При угле φ таком, что $\cos\varphi = 2\cos\alpha$, натяжение в 4 раза превышает минимальное:

$$T = 4T_{\min} = 2mg\cos\varphi.$$

В этот момент нормальное ускорение шарика равно

$$a_{\text{н}} = \frac{T - mg\cos\varphi}{m} = g\cos\varphi,$$

а тангенциальное ускорение –

$$a_{\text{т}} = g\sin\varphi.$$

Полное ускорение шарика равно

$$a = g\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = g.$$

Ситуация, когда сила натяжения нити в 4 раза превышает минимальную, возможна, если

$$\cos\varphi = 2\cos\alpha \le 1,$$

откуда

$$\alpha_{\min} = 60°.$$

2. Нужно рассмотреть два случая: случай малых напряжений U_0, когда правый конденсатор вообще не будет заряжаться, так как напряжение на среднем конденсаторе не превзойдет напряжение открытия диода U_D, и случай, когда заряжается и правый конденсатор тоже. Если диод не открывается, то первоначальный заряд левого конденсатора делится поровну между двумя конденсаторами. Напряжения на конденсаторах через большой промежуток времени после замыкания ключа будут такими:

$$U_1 = \frac{U_0}{2},\ U_2 = \frac{U_0}{2},\ U_3 = 0.$$

Видно, что этот случай реализуется при $U_D \ge U_0/2$. Выделившееся в цепи количество теплоты Q найдем из закона сохранения энергии:

$$Q = \frac{CU_0^2}{2} - 2\frac{C(U_0/2)^2}{2} = \frac{CU_0^2}{4}.$$

Поскольку ток через диод не тек, все тепло выделилось на резисторе.

Теперь рассмотрим случай $U_D < U_0/2$. При зарядке правого конденсатора напряжение U_3 на нем будет меньше, чем напряжение U_2 на среднем конденсаторе на величину U_D. Напряжения U_1 и U_2 на левом и среднем конденсаторах к окончанию перезарядки будут равными: $U_1 = U_2 = U$. Условие сохранения заряда имеет вид

$$CU_0 = 2CU + C(U - U_D), \text{ откуда } U = \frac{U_0 + U_D}{3}.$$

Общее количество теплоты, выделившееся к концу процесса в схеме, будет равно разности начальной и конечной энергий конденсаторов:

$$Q = \frac{CU_0^2}{2} - 2\frac{CU^2}{2} - \frac{C(U-U_D)^2}{2} = \frac{C\left(U_0^2 - U_D^2\right)}{3}.$$

Количество теплоты, выделившееся на диоде, равно $Q_D = q_D U_D$, где $q_D = CU_3$ – заряд правого конденсатора к концу процесса перезарядки. Таким образом,

$$Q_D = \frac{C\left(U_0U_D - 2U_D^2\right)}{3}.$$

Остальное тепло выделится на резисторе:

$$Q_R = Q - Q_D = \frac{C\left(U_0^2 - U_0U_D + U_D^2\right)}{3}.$$

3. Пусть m – масса бруска, a – искомое ускорение доски, ka – ускорение бруска ($k > 1$), F – постоянная сила, действующая на брусок, $F_{\text{тр}}$ – сила трения между доской и бруском. Запишем второй закон Ньютона для бруска и для доски в проекции на горизонтальную ось:

$$F - F_{\text{тр}} = mka,$$

$$F_{\text{тр}} = Ma.$$

Если t – время движения бруска от одного края доски до другого, то в лабораторной системе отсчета путь, пройденный бруском, равен $L_m = kat^2/2$, а путь, пройденный доской, равен $L_M = at^2/2$. Разность этих путей есть длина доски:

$$L = L_m - L_M.$$

Работа силы, приложенной к бруску, равна

$$A = FL_m = (mka + Ma)L_m .$$

Закон сохранения энергии для системы брусок + доска имеет вид

$$A = \frac{m}{2}(kat)^2 + \frac{M}{2}(at)^2 + Q = mkaL_m + MaL_M + Q .$$

Отсюда получим

$$Q = Ma(L_m - L_M) = MaL \text{, и } a = \frac{Q}{ML} .$$

4. График процесса состоит из четырех прямых, каждую из которых можно задать уравнением вида

$$y + nx = c,$$

где $y = \ln(p/p_0)$, $x = \ln(V/V_0)$, а c – некоторая константа. Для участков AB и CD $n = 1$, а для участков BC и AD $n = 4/3$. Произведя потенцирование уравнения, получим

$$pV^n = c_1 \text{, где } c_1 = p_0V_0^n e^{c_1} .$$

Участки AB и CD описываются уравнением $pV = \text{const}$, т.е. являются изотермами, а участки BC и AD описываются уравнением $pV^{4/3} = \text{const}$, т.е. являются адиабатами (газ многоатомный). Значит, исследуемый процесс есть цикл Карно, и его КПД равен

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} ,$$

где T_1 – температура на верхней изотерме, а T_2 – на нижней. Из уравнения состояния идеального газа следует

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_DV_D}{p_BV_B} = \frac{p_D}{p_B} = e^{-0,2} = 0,82 .$$

Отсюда получаем

$$\eta = 0,18 = 18\% .$$

5. 1) Пусть T – сила натяжения резинки, тогда сила, действующая со стороны блока на брусок *3*, равна $2T$. Ускорения брусков обозначим a_1, a_2 и a_3 соответственно. По второму закону Ньютона,

$$m_1a_1 = T,\ m_2a_2 = T,\ m_3a_3 = 2T.$$

То же отношение справедливо для изменения импульсов (с учетом направлений):

$$m_1v_1 = m_2v_2 = 2m_3(v - v_3) .$$

Скорость изменения длины нити $dL/dt = 2v_3 - (v_1 + v_2)$ при наибольшем растяжении обращается в ноль, т.е.

$$v_1 + v_2 = 2v_3 .$$

Отсюда находим

$$v_3 = v\frac{m_3(m_1 + m_2)}{m_1m_2 + m_1m_3 + m_3m_2} ,$$

$$v_1 = v\frac{2m_3m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + m_3m_2} ,$$

$$v_2 = v\frac{2m_3m_1}{m_1m_2 + m_1m_3 + m_3m_2} .$$

Остается в силе следствие второго закона Ньютона:

$$m_1v_1 = m_2v_2 = 2m_3(v - v_3) .$$

2) При возвращении резинки снова в ненатянутое состояние, по закону сохранения энергии,

$$m_1\frac{v_1^2}{2} + m_2\frac{v_2^2}{2} + m_3\frac{v_3^2}{2} = m_3\frac{v^2}{2} .$$

Отсюда находим

$$v_3 = v\frac{4m_1m_3 + 4m_3m_2 - m_1m_2}{m_1m_2 + 4m_1m_3 + 4m_3m_2} ,$$

$$v_1 = v\frac{4m_3m_2}{m_1m_2 + 4m_1m_3 + 4m_3m_2} ,$$

$$v_2 = v\frac{4m_3m_1}{m_1m_2 + 4m_1m_3 + 4m_3m_2} .$$

3) Подставляя в полученную в первом пункте формулу числовые значения, находим

$$v_3 = \frac{9}{11}\ \text{м/с} .$$

Журнал «Квант» издается с января 1970 года. Раз в два месяца выходит очередной номер журнала и приложение к нему.

Подписаться на наш журнал можно с любого номера в любом почтовом отделении связи. Подписной номер в каталоге «Пресса России» 90964.

Отдельные номера журнала или приложения к нему можно приобрести в редакции «Кванта» (Ленинский проспект, дом 64-А), а также в магазине «Математическая книга» в Московском центре непрерывного математического образования (Большой Власьевский переулок, дом 11).

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: (495) 930-56-48
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь
www.Pareto-print.ru

Партии-лауреаты

Когда-то шахматные состязания проводились довольно редко, и самая красивая партия в крупном турнире часто признавалась партией года. Но как определить партию года теперь, когда число соревнований возросло во много раз? Надежнее всего для этого привлечь югославский «Шахматный Информатор» – солидное издание, которое с середины прошлого века (1966 г.) регулярно проводит «конкурсы красоты». В XX веке «Информатор» выходил дважды в год, в XXI – трижды в год, причем в каждом томе он содержит около 600 самых ценных партий, сыгранных за «отчетный период». После появления в свет очередного тома члены авторитетного жюри (обычно в составе десяти гроссмейстеров) принимаются за дело: внимательно просматривают партии и оценивают их по десятибалльной системе. Партия №1, по мнению эксперта, получает десять баллов, №2 – девять и т.д., №10 – один балл. Суммирование оценок дает лучшую партию тома, соответственно выявляются претенденты на победу в годовом конкурсе. Окончательный выбор (одна партия из двух или трех) делается ведущим «Шахматную страничку», причем предпочтение отдается встречам чемпионов мира.

Итак, приглашаем вас посетить выставку 50 партий-лауреатов за полстолетия, 1966 – 2015. Конечно, она займет много номеров «Кванта», сегодня – первые три лауреата.

Спасский – Петросян

Матч на первенство мира, 7-я партия

Москва, 1966

Дебют ферзевых пешек

С четвертой попытки Спасскому наконец удалось дойти до встречи с чемпионом. Однако его звездный час еще не пробил: в ожесточенной борьбе Петросян сумел сохранить титул. Эффектно завершился поединок, в котором Петросян применил свой излюбленный тактический прием – жертву качества.

1. d4 ♘f6 2. ♘f3 e6 3. ♗g5 d5 4. ♘bd2 ♗e7 5. e3 ♘bd7 6. ♗d3 c5 7. c3 b6 8. 0-0 ♗b7 9. ♘e5 ♘:e5 10. de ♘d7 11. ♗f4 ♕c7 12. ♘f3 h6 13. b4 g5! 14. ♗g3 h5 15. h4 gh 16. ♗f4 0-0-0 17. a4? К сложной игре вело 17. bc bc 18. ♖b1. **17...c4! 18. ♗e2 a6 19. ♔h1 ♖dg8 20. ♖g1 ♖g4 21. ♕d2 ♖hg8 22. a5 b5 23. ♖ad1 ♗f8! 24. ♘h2 ♘:e5!** Фирменная жертва качества, которую Спасский вынужден принять. **25. ♘:g4 hg 26. e4 ♗d6 27. ♕e3 ♘d7.** Быстрее к цели вело 27...g3! 28. fg hg 29. ♖gf1 f5! **28. ♗:d6 ♕:d6 29. ♖d4 e5! 30. ♖d2 f5!** Симпатичная позиция, вся пешечная фаланга черных двинулась вперед.

31. ed f4! За качество у черных сильнейшая атака. **32. ♕e4 ♘f6 33. ♕f5+ ♔b8 34. f3 ♗c8 35. ♕b1 g3 36. ♖e1 h3 37. ♗f1 ♖h8 38. gh ♗:h3 39. ♔g1 ♗:f1 40. ♔:f1 e4!** В заключение еще один прорыв. **41. ♕d1 ♘g4! 42. fg f3 43. ♖g2 fg+. Белые сдались.** На 44. ♔g2 решает 44...♕f4 45. ♖f1 ♖h2+ 46. ♔g1 ♔e3+. Петросян очень гордился этой партией, которая ярко иллюстрирует его стиль игры.

Фишер – Штейн

Сус, 1967

Испанская партия

1. e4 e5 2. ♘f3 ♘c6 3. ♗b5 a6 4. ♗a4 ♘f6 5. 0-0 ♗e7 6. ♖e1 b5 7. ♗b3 d6 8. c3 0-0 9. h3 ♗b7 10. d4 ♘a5 11. ♗c2 ♘c4 12. b3 ♘b6 13. ♘bd2 ♘bd7 14. b4 ed 15. cd a5 16. ba c5 17. e5 de 18. de ♘d5 19. ♘e4 ♘b4 20. ♗b1 ♖a5 21. ♕e2 ♘b6. Фишер рекомендовал 21...♖e8, а после хода конем считал, что черным уже не защититься. **22. ♘fg5! ♗:e4 23. ♕:e4 g6 24. ♕h4 h5 25. ♕g3 ♘c4 26. ♘f3 ♔g7 27. ♕f4 ♖h8 28. e6 f5.** Неприятельский король серьезно ослаблен, и белые проводят эффектный финал.

29. ♗:f5! ♕f8. Принимать жертву нельзя – 29...gf 30. ♕g3 + ♔f8 31. ♕g6 ♕e8 32. ♗h6+ ♖:h6 33. ♕:h6+ ♔g8 34. ♘g5. **30. ♗e4 ♕:f4 31. ♗:f4 ♖e8 32. ♖ad1 ♖a6 33. ♖d7 ♖:e6 34. ♘g5 ♖f6 35. ♗f3! ♖:f4 36. ♘e6+ ♔f6 37. ♘:f4 ♘e5 38. ♖b7 ♗d6 39. ♔f1 ♘c2 40. ♖e4 ♘d4 41. ♖b6 ♖d8 42. ♘d5+ ♔f5.** Здесь партия была отложена, но при доигрывании черные продержались недолго. **43. ♘e3+ ♔e6 44. ♗e2 ♔d7 45. ♗:b5+ ♘:b5 46. ♖:b5 ♔c6 47. a4 ♗c7 48. ♔e2 g5 49. g3 ♖a8 50. ♖b2 ♖f8 51. f4 gf 52. gf ♘f7 53. ♖e6+ ♘d6 54. f5 ♖a8 55. ♖d2 ♖:a4 56. f6. Черные сдались.** Убедительная победа Фишера в межзональном турнире, который он, уверенно лидируя, неожиданно покинул...

Ботвинник – Портиш

Монте-Карло, 1968

Английское начало

За приверженность активному позиционному стилю Портиша часто называли венгерским Ботвинником. От встречи «настоящего» Ботвинника со своим «двойником» следовало ожидать спокойного маневрирования фигур, но Ботвинник действовал, как молодой Таль: одну за другой пожертвовал две ладьи и в результате едва не объявил натуральный мат!

1. c4 e5 2. ♘c3 ♘f6 3. g3 d5 4. cd ♘:d5 5. ♗g2 ♗e6 6. ♘f3 ♘c6 7. 0-0 ♘b6 8. d3 ♗e7 9. a3 a5 10. ♗e3 0-0 11. ♘a4 ♘:a4 12. ♕:a4 ♗d5 13. ♖fc1 ♖e8 14. ♖c2 ♗f8. Следовало прикрыть пункт c7 ходом 14...♗d6. **15. ♖ac1 ♘b8.** Вот что имел в виду Портиш. Проблему пешки «c» он хочет решить радикально – продвигая ее на шаг вперед. **16. ♖:c7! ♗c6.** Ладья в западне, но черные недооценили тактическую операцию противника.

17. ♖1:c6! bc 18. ♖:f7!! Сыграно в духе старых мастеров. Жертва на f7 – дело обычное, но для этого чаще используется конь. **18...h6.** После 18...♔:f7 следует операция, напоминающая спертый мат: 19. ♕c4+ ♔g6 20. ♕g4+ ♔f7 21. ♘g5+ ♔g8 22. ♕c4+ ♔h8 23. ♘f7+ ♔g8 24. ♘h6+ ♔h8 25. ♕g8×. **19. ♖b7 ♕c8 20. ♕c4+ ♔h8 21. ♘h4! ♕:b7 22. ♘g6+ ♔h7 23. ♗e4 ♗d6 24. ♘:e5+ g6 25. ♗:g6+ ♔g7 26. ♗:h6+! Черные сдались.**

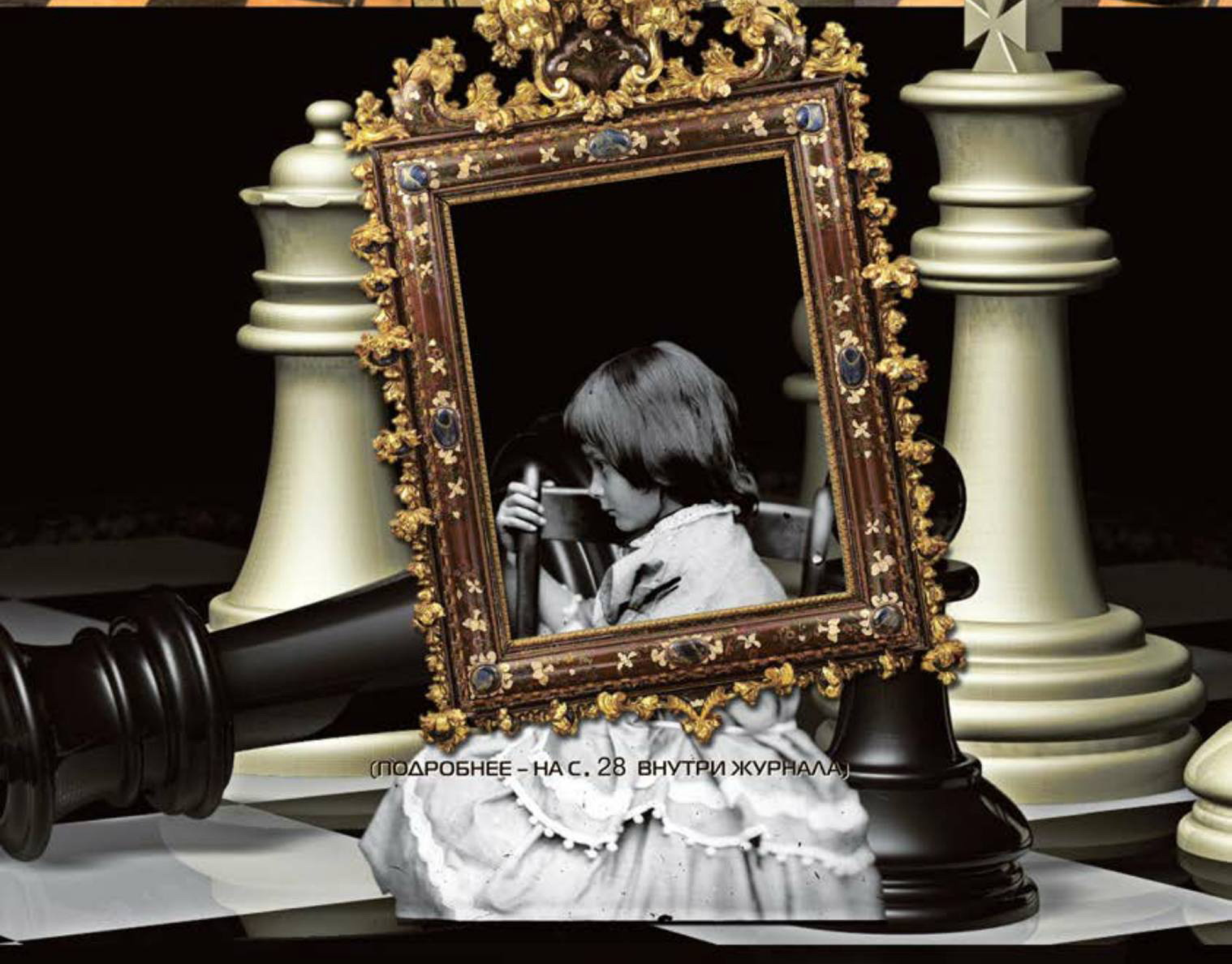
Е.Гик

Индекс 90964

Прогулки с физикой

АЛИСА В ЗАЗЕРКАЛЬЕ

Алиса прошла сквозь зеркало и оказалась в Зазеркалье, где мир представляет собой большую шахматную доску.



(ПОДРОБНЕЕ – НА С. 28 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)