

Я. Г. ПАНОВКО

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Издание третье, переработанное

Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия
для студентов высшей технической школы механики

ук 9092



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1981

Павловский Я. Г. *Введение в теорию нелинейных колебаний: Учеб. пособие для вузов.* — 3-е изд., перераб. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. — 368 с. — ISBN 5-06-014135-3.

[illegible]

В течение зимы (2-е полу.— 1980 г.) добытыми водами при малом расходе поливальных насосов орошали:

Для студентов и аспирантов вузов, а также для инженеров, специалистов различных направлений машиностроительных систем.

Tafel 5. Hb. 102. Baßgarnen. 38 mm.

Received 2000-09-07; revised 2001-01-04; accepted 2001-02-01.

CONCLUSION

Figure 1 *Flowchart illustrating the selection of studies for the meta-analysis*

11. <http://www.ck12.org/Book-Search>

1. Общие сведения о контролируемом товаре (ТГ). 2. Составные или конструктивные элементы (структурные части) составных партий (11). 3. Характеристики контролируемого материала; или, наоборот, при производстве (14). 4. Правила и факторы безопасности (12).

Глава I. Свободные исследования 39

§ 1. Ланцазовые системы с одной степенной свободой для

1. Изменен дифференциальный плановый и его номер 120. 2. Метод Планк 120. 3. Изменены условия работы двигателя от дифференциального планового 120.

6. 2. Система с одной степенью свободы при базисном ви-

3. Пашинский трюизм (1944), 4. Пашинский трюизм (1951),
5. Пашинский трюизм (1954), 6. Углубленный трюизм (1954).

§ 3. Системы с одной степенью свободы при жесткой-

1. Общедоступная (ОД), 2. Точные расчеты (ТЧ), 3. Интегрально-дифференциальная (ИД).

В. А. Шенников, кандидат физико-математических наук, профессор

[illegible]Гладиш Н. Взаимодействие человека... 104

§ 5. Линейные системы с одной степенной кардой: при

[illegible]

В. В. Давыдов и В. В. Давыдова

[illegible]

7. Системы с одной степенью свободы при нелинейной упругости	143
1. Общие замечания (143). 2. Системы с одной степенью свободы (143). 3. Сохранение энергии (143). 4. Устойчивость систем (143). 5. Системы с одной степенью свободы (143). 6. Системы с одной степенью свободы (143).	
8. Системы с одной степенью свободы при нелинейной упругости	149
1. Общие замечания (149). 2. Системы с одной степенью свободы (149). 3. Системы с одной степенью свободы (149). 4. Системы с одной степенью свободы (149). 5. Системы с одной степенью свободы (149). 6. Системы с одной степенью свободы (149).	
Глава III. Параметрические колебания	171
9. Общие понятия	171
1. Общие понятия (171). 2. Системы с одной степенью свободы (171). 3. Системы с одной степенью свободы (171). 4. Системы с одной степенью свободы (171). 5. Системы с одной степенью свободы (171). 6. Системы с одной степенью свободы (171).	
10. Параметрические колебания на гармоническом крутильном маятнике	177
1. Колебания на гармоническом маятнике (177). 2. Колебания на гармоническом маятнике (177). 3. Колебания на гармоническом маятнике (177). 4. Колебания на гармоническом маятнике (177). 5. Колебания на гармоническом маятнике (177). 6. Колебания на гармоническом маятнике (177).	
11. Параметрические колебания на маятнике с крутильной пружиной	183
1. Общие замечания (183). 2. Системы с одной степенью свободы (183). 3. Системы с одной степенью свободы (183). 4. Системы с одной степенью свободы (183). 5. Системы с одной степенью свободы (183). 6. Системы с одной степенью свободы (183).	
Глава IV. Устойчивость систем с одной степенью свободы	188
12. Устойчивость систем с одной степенью свободы	188
1. Общие замечания (188). 2. Системы с одной степенью свободы (188). 3. Системы с одной степенью свободы (188). 4. Системы с одной степенью свободы (188). 5. Системы с одной степенью свободы (188). 6. Системы с одной степенью свободы (188).	
13. Сохранение энергии и устойчивость систем	203
1. Общие замечания (203). 2. Системы с одной степенью свободы (203). 3. Системы с одной степенью свободы (203). 4. Системы с одной степенью свободы (203). 5. Системы с одной степенью свободы (203). 6. Системы с одной степенью свободы (203).	
14. Параметрические колебания на маятнике с крутильной пружиной	212
1. Общие замечания (212). 2. Системы с одной степенью свободы (212). 3. Системы с одной степенью свободы (212). 4. Системы с одной степенью свободы (212). 5. Системы с одной степенью свободы (212). 6. Системы с одной степенью свободы (212).	
15. Системы с одной степенью свободы	218
1. Общие замечания (218). 2. Системы с одной степенью свободы (218). 3. Системы с одной степенью свободы (218). 4. Системы с одной степенью свободы (218). 5. Системы с одной степенью свободы (218). 6. Системы с одной степенью свободы (218).	
16. Системы с одной степенью свободы	226
1. Общие замечания (226). 2. Системы с одной степенью свободы (226). 3. Системы с одной степенью свободы (226). 4. Системы с одной степенью свободы (226). 5. Системы с одной степенью свободы (226). 6. Системы с одной степенью свободы (226).	
Список литературы	249
Предметный указатель	249

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга входит в серию учебных пособий, выходящих в издательстве «Наука» в составе дополнений к «Курсу теоретической механики» Н. В. Бутемкина, Я. Л. Пуца и Д. Р. Морина. Эти дополнения рассчитаны на студентов, которые по профилю подготовки нуждаются в более подробном ознакомлении с рядом избранных проблем механики: теорией устойчивости движения, теорией механических колебаний, аналитической механикой, теорией гиризма, теорией механического удара и т. д.

Теория механических колебаний особенно важна для инженеров, работающих в области машиностроения, приборостроения, авиа- и судостроения, промышленного и транспортного строительства, а также в некоторых других областях техники. Однако на инженерных факультетах среди курсовых специальностей ряд отечественных университетов, тесно связанных с проблемой механических колебаний; хотя поставлена эта задача почти всегда обладает заметной спецификой, по ее сути, в конечном счете, решаются на основе общих принципов и методов, составляющих содержание теории колебаний.

Важность теории колебаний общепризнана, и в ряде ведущих вузов страны эта теория, или более или менее специализированные ее модификации, является самостоятельным элементом учебного плана, обязательной или факультативной дисциплиной; во многих других вузах систематически работают дополнительные семинары по теории колебаний, приходящие не только студентам, но также аспирантам и молодым инженерам.

Настоящая книга предназначена служить учебным пособием для любых таких занятий; можно надеяться, что она окажется полезной и для лиц, приступающих к самостоятельному изучению теории механических колебаний.

Эта теория является частью механики, выделенной признаком общности рассматриваемых колебательных явлений. В основном тот же признак использован и при дальнейшем внутреннем разграничении теории в этой книге, где каждая из четырех глав посвящена колебаниям определенного типа (свободные колебания, вынужденные колебания, параметрические колебания, автоколебания).

В вычислительный аппарат теории механических колебаний все больше принимают понятия, заимствованные из теории элентрических цепей и теории автоматического управления (частотные методы, комплексные представления сил и перемещений), а также матричные методы. Эти понятия ограничены и в настоящей книге, но без особых подробностей — в конце книги, она имеет смысл только в области линейных колебаний.

В книге кратко описываются различные приближенные методы анализа нелинейных систем. Каждый из этих методов находится в том месте изложения, где впервые он может оказаться полезным. Поэтому уже в первой главе можно найти элементарное изложение методов медленно меняющихся амплитуд, гармонического баланса и др., которые обычно излагаются (если вообще излагаются) лишь в самом конце курса.

По сравнению с другими книгами подобного назначения здесь относительно большее внимание уделено примерам, значительная часть которых — нечеткая, в смысле сэмплированиям виде — соответствует практическим ситуациям.

Автор благодарен всем коллегам, которые своими советами и замечаниями помогли улучшить книгу.

Ленинград
октябрь 1969 г.

Я. Р. Виноков

ВВЕДЕНИЕ

1. Общие цели и содержание теории. Сорок лет назад академик Н. Д. Папалогос писал: «Не будет, вероятно, преувеличением сказать, что среди процессов, как свободно протекающих в природе, так и используемых в технике, колебания, понимаемые в широком смысле этого слова, занимают во многих отношениях выдающееся, часто первостепенное место».

Можно было бы привести множество примеров, иллюстрирующих важность колебательных явлений в технических устройствах. В одних случаях колебания вредны (именно эти случаи впервые привлекли внимание инженеров к проблемам теории колебаний), в других случаях они приносят пользу и целенаправленно применяются в современной технике.

Механические колебания могут причинить значительный вред. Часто они создают прямую угрозу прочности всяким ответственным конструкциям, таким, как валопроводы, турбинные лопатки, воздушные винты, мосты, перекрытия промышленных зданий и т. п.; колебания непосредственно служат причиной многих аварий, а иногда и тяжелых катастроф. В других случаях колебания способны нарушить нормальные условия эксплуатации, — такими, например, вибрации станков, мешающие достижению необходимой чистоты обработки деталей, или колебания приборов, установленных на вибрирующем основании (например, на автомобиле или на самолете), приводящие к нарушению точности показаний. Наконец, иногда колебания оказывают вредное физиологическое действие на лиц, организм которых подвергается длительным вибрациям (например, работающих с ручным пневмоинструментом вибрационного типа). Во всех перечисленных случаях теория колебаний решает задачи предупреждения и, по возможности, предотвращения вредного действия колебаний.

С другой стороны, ныне все шире применяются различные технологические процессы, основанные на использовании искусственно возбуждаемых колебаний. К таким процессам относятся, например, вибротрубоукрепление свай, при котором сваи весьма быстро погружаются в грунт под действием ритмичных колебаний вибропозитивной нагрузки; другим примером может служить вибротранспортировка сыпучих материалов, частицы которых перемещаются в одну сторону вдоль колеблющегося лотка (виброконвейеры). С помощью теории колебаний удается не только вскрыть довольно сложную природу соответствующих физических явлений, но и установить оптимальные параметры режима колебаний, при которых достигается максимальная эффективность технологического процесса.

Таким образом, теория механических колебаний служит научной основой решения множества разнообразных технологических задач большого практического значения.

Часто теория колебаний разделяют на части по признаку числа степеней свободы механической системы: сначала рассматривают колебания систем с одной степенью свободы, затем колебания систем с несколькими степенями свободы и, наконец, колебания систем с бесконечно большой числом степеней свободы (систем с распределенными параметрами). Такое разделение имеет оправданные методологические основания и делает явным было традиционным.

Однако в последние годы вымателся явоб и, по-видимому, более перспективный принцип, согласно которому отдельные разделы теории колебаний выделяются по признаку физического характера рассматриваемых явлений. Следуя этому принципу, далее читателя, знакомый лишь с базовыми теориями колебаний, легче выделить два достаточно самостоятельных раздела: исследование свободных колебаний и исследование вынужденных колебаний. В первом из этих разделов изучаются колебания автономных систем, происходящие под действием возмущающих (и, возможно, диссипативных) сил около состояния равновесия; такими, например, являются колебания после нарушения равновесия простейших систем, изображенных на рис. 0.1 (а — маятник, б — груз на пружине). Ко второму разделу относятся изучение колебательных процессов, вызываемых и поддерживаемых вынуждающими силами, т. е. силами, заданными в виде известных функций

времени и не зависящими от движения системы. Примерами могут служить те же системы — маятник и груз на пружине, но при действии вынуждающих сил $P(t)$ (t — время).

В некоторых случаях вынужденные колебания возникают в результате нелинейного взаимодействия, т. е.

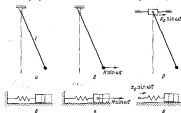


Рис. 0.1

заданного в виде известной функции времени принудительного движения какой-либо точки (каких-либо точек) механической системы. Такие случаи иллюстрированы рис. 0.1, в, г; в схеме в колебания маятника вызываются заданным колебательным движением оси подвеса в горизонтальном направлении, а в схеме г колебания груза возникают вследствие заданного движения левого конца пружины.

При дальнейшем углублении в проблему механических колебаний можно обнаружить существование колебательных явлений иных типов, которые принципиально отличаются от только что рассмотренных.

Примером всего отмеченных параметрических колебаний, возникающие в системах, параметры которых (жесткость или масса) заданным образом периодически изменяются во времени. Примером параметрического возбуждения может служить маятник, ось подвеса которого совершает заданное колебание в вертикальном направлении (рис. 0.2, а). Если состояние относительного покоя будет каким-либо образом нарушено, то возникнут угловые

колебания, причем в зависимости от соотношения параметров системы упругие колебания могут быть как ограниченными, так и неограниченно возрастающими во времени. В последнем случае говорят о параметрических резонансах системы. И по физической сущности, и по математическому описанию эта задача принципиально отличается от задачи о вынужденных колебаниях маятника при заданном горизонтальном движении оси подвеса (рис. 0.1, б).



Рис. 0.2

Совершенно особое явление представляют автоколебания — нестационарные колебания, поддерживаемые за счет энергии, которая подводится к системе от источника колебательного характера. При этом силы, подводящие в систему от источника энергии, меняются во времени в зависимости от самого движения системы и при отсутствии движения равны нулю.

Простой пример автоколебательной системы показан на рис. 0.2, в — маятник, который при падении прокатившись через положение равновесия испытывает действие мгновенного импульса δ заданной величиной и направлением в сторону скорости. Такие импульсы могут поддерживать незатухающие колебания маятника при наличии трения в системе. Здесь нужно подчеркнуть, что действующее на автоколебательную систему внешнее поле (в данном случае ударное) не является вынуждающим фактором в обычном смысле этого термина, так как оно не задано в виде явной функции времени, а управляет самим движением.

К колебательным также относятся системы с переменными параметрами, если эти параметры заданы периодическими функциями координат (а не времени). Иногда такие системы называют автопараметрическими.

Физические различия между природой колебаний указанных четырех типов весьма глубоки; а достаточный мере специфичны в соответствующих математических методах исследования. Каждому из этих типов колебаний посвящена отдельная глава.

2. Составление механической модели ограниченного числа степеней свободы. Любая реальная механическая

система представляется в виде бесконечного числа материальных точек, masses которых бесконечно малы; то же как связи между этими точками не являются абсолютно жесткими, то число степеней свободы такой системы бесконечно велико. Точное решение задач о колебаниях деформируемых систем удается получить в замкнутой форме лишь в некоторых, относительно простых случаях (например, задачи о свободных и вынужденных колебаниях упругих стержней постоянного сечения при равномерном распределении массы по длине стержня). В общем случае это сделать невозможно, и приходится упрощать расчетную модель, в частности путем уменьшения числа степеней свободы. Можно указать три основных способа образования нестационарных моделей.

Первый способ состоит в том, что относительно менее массивные части системы полагается вовсе лишними массы и представляются в виде бесконечно малых элементов (жестких или деформируемых), а наиболее

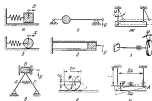


Рис. 0.3

жесткие части конструкции принимаются за абсолютно твердые тела; если размеры последних малы, то их считают материальными точками.

На рис. 0.3, а — показаны примеры образования типов способностей с одной степенью свободы. Следует обратить внимание на их характерные особенности: упругие элементы, изображенные в виде пружин на рис. а, б, в, считаются безмассовыми; то же относится к упругим стержням на рис. г, д, з и жестким стержням

на рис. а, ж, и; в схемах на рис. б, в значение не сопротивляется сдвигу; в схеме на рис. г груз считается сосредоточенным (материальная точка). Здесь же, в таблице на рис. д горизонтальные перемещения грузов считаются пренебрежимо малыми. В качестве обобщенной координаты принято: на рис. а, б — горизонтальное перемещение, на рис. а, г, д — вертикальное перемещение, на рис. в — α — угол поворота.

На рис. 0.4 показаны образцовые также же образом системы, имеющие более чем одну степень свободы. Конфигурация системы, показанной на рис. а, определяется

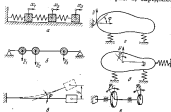


Рис. 0.4

перемещениями x_1, x_2, x_3 поступательно движущихся грузов; эта система обладает тремя степенями свободы. То же относится и к системе на рис. б, если считать грузы материальными точками (при учете конечных размеров грузов и шарнира их поворотов система на рис. б имеет шесть степеней свободы). Положение системы на рис. в определяется двумя обобщенными координатами — вертикальным перемещением центра масс груза y и углом его поворота φ . Таким же числом степеней свободы имеет твердое тело, показанное на рис. г; здесь за обобщенные координаты приняты вертикальная координата подвешивающей опоры и угол поворота тела вокруг этой опоры. В отличие от него масса подвешенного горизонтальной опоры тела на рис. д имеет три степени свободы. Если масса тела в системе на рис. е пренебрежимо мала, то система

обладает двумя степенями свободы; в качестве обобщенных координат на рисунке показаны угол поворота массенных дисков φ_1, φ_2 .

Согласно второму способу распределение по всему объему системы свойства податливости определяется в конечном числе точек (или линий). При этом система представляется в виде совокупности упруго (или упругоупруго) соединенных жестких элементов. Например, упругий балка с непрерывно распределенной массой



Рис. 0.5



Рис. 0.6

(рис. 0.5, а) может быть приближенно заменена конечной жесткой массой, соединенной упругими шарнирами. При выборе числа шарниров следует исходить из требуемого уровня точности (см. варианты замены на рис. 0.5, б, в).

Третий способ основан на некоторых априорных предположениях об известных конфигурации системы в процессе колебаний.

Пусть для определенности речь идет о колеблющейся показанной на рис. 0.4, а системе с тремя степенями свободы. Согласно этому способу можно принять, что соотношение между перемещениями $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ известны во времени, а числовые значения таких соотношений ($x_2/x_1 = \alpha, x_3/x_1 = \beta$) являются постоянными; разумеется, это вносит элемент произвола в решение. В результате движение системы полностью описывается одной функцией времени, например $x_1(t)$, через которую непосредственно выражаются перемещения всех точек системы; такая система имеет всего одну степень свободы.

Согласование тому же способу, для двухсторонней балки (рис. 0.5, б) принимается, что в любой момент времени колеблющаяся форма изогнутой оси остается неизменной и меняется лишь ее масштаб. Если заранее задать форму в виде «подходящей» координатной функции $f(x)$,

то пренебры ось балки будут аппроксиматся приведенным

$$y(x, t) = q(t)f(x), \quad (0.1)$$

в котором $q(t)$ — функция времени, являющаяся единственной неизвестной задачей. Для иллюстрации на рис. 0.6 показана изогнутая ось балки в различные моменты времени колебаний t_1, t_2 и t_3 ; все крайние имеют одну и ту же форму и различаются лишь масштабом. Таким образом, при фиксированном выборе функции $f(x)$ выражение (0.1) определяет переход к системе с одной степенью



Рис. 0.7

свободы, причем $q(t)$ представляет собой обобщенную координату.

Эта идея приведения к системе с одной степенью свободы лежит в основе названного ниже метода Рунге (см. стр. 29—35).

Точность решения может быть повышена, если вместо (0.1) написать движение балки душной преобразованием

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n q_i(t)f_i(x), \quad (0.2)$$

где $f_i(x)$ — заданные координатные функции, $q_i(t)$ — искомого функции времени, играющие роль обобщенных координат, n — количество в модели число степеней свободы системы.

О соображениях, которыми следует руководствоваться при выборе координатных функций, будет сказано ниже.

Одна и та же система может быть приведена к системе с несколькими степенями свободы любым из трех способов. В качестве примера на рис. 0.7, а—з показаны три варианта приведения для двухсторонней балки с распределенной массой (рис. 0.7, а).

3. Составление механической модели; силы, действующие при колебаниях. В курсах механики известны основные типы сил, которые могут действовать на материальную точку: силы, зависящие от времени; силы, зависящие от положения точки; силы, зависящие от скорости точки.

В большинстве случаев в этих типах сводятся к тем обобщенным силам, которые действуют при колебаниях механических систем. Рассмотрим их подробнее, ограничиваясь здесь системами с одной степенью свободы.

Обобщенные вынуждающие силы — внешние силы типа $Q(t)$, зависящие заданными функциями времени; также силы служат причиной свободных колебаний. Источники возмущениями вынуждающих сил весьма разнообразны: периодически изменяющиеся силы давления газовой среды в цилиндрах двигателей внутреннего сгорания, инерционные эффекты в виброиспытателях, периодически притяжение электромагнитов и др. Очень различны и законы их изменения во времени, хотя в практике наиболее часто встречаются периодические вынуждающие силы. Иногда вынуждающие силы не детерминированы, а представляют собой случайные функции времени (случайные процессы).

В некоторых случаях вынуждающие колебаний задается кинематически, когда какому-либо точкам системы предписано некоторое определенное движение — оно также может быть детерминированным или случайным процессом. В частности, кинематическим является вынуждающие колебаний автомобиля или железнодорожного вагона при движении по неровному пути. Как будет показано ниже, любое кинематическое вынуждающее может быть представлено в виде некоторого эквивалентного силового возбуждения, т. е. некоторого действительного соответствующего сил.

Обобщенные восстанавливающие силы — силы, зависящие от положения (конфигурации) системы, т. е. от обобщенных координат. Среди потенциальных сил особое значение имеют *вспомогательные силы*, т. е. силы, возникающие при установившихся системах от воздействия равновесия в направлении так, чтобы вернуть систему в это положение. Именно восстанавливающие силы обуславливают обобщенные колебательные свойства механических систем — их способность совершать свободные колебания.

В механических системах с упругими элементами восстанавливающие силы возникают вследствие деформирования этих элементов при колебаниях (упругие силы). В других случаях роль восстанавливающей силы может играть сила тяжести (маятник) или архимедова сила (маятник).

Зависимость восстанавливающих сил от обобщенных координат, как правило, нелинейной; однако при нели-

движения малых колебаний — что во многих случаях достаточно — часто всего достаточно линеаризация точек неустойчивости. Для системы с одной степенью свободы линейная восстановительная сила всегда может быть задана в виде

$$Q(q) = -cq, \quad (0.3)$$

где q — обобщенная координата, c — обобщенный коэффициент жесткости. Например, если для маятника (рис. 0.1, а) принять за обобщенную координату угол отклонения от вертикали, то обобщенная сила (момент силы тяжести) равна $-mg \sin q \approx -mgq$, т. е.

$$c = mg l.$$

Никогда обобщенная восстанавливающая сила возникает вследствие одностороннего влияния двух различных причин. Таким, например, упруго закрепленный маятник (рис. 0.5, а), для которого

$$c = c_0^2 + mg l,$$



Рис. 0.5

где c_0 — коэффициент жесткости упругим, т. е. статическая сила, способная выгнуть удлиненное пружины на единицу длины. Эти системы могут быть противоположными по направлению; так, для опрокинутого маятника (рис. 0.8, в)

$$c = c_0^2 - mg l.$$

Если пружина имеет малую жесткость, такую, что $c_0 l < mg$, то обобщенный коэффициент жесткости становится отрицательным, т. е. существует неустойчивая сила по отношению к восстановительной.

Обобщенные силы трения момент от обобщенных скоростей (по крайней мере от их знака) и направлены противоположно движению. Силы трения возникают и в соприкосновении тел и в опорах механической системы, а также в материалах ее элементов. К этой категории также относятся силы сопротивления среды (жидкости, газа), в которой происходит колебание; также и наподобие сил даже усиленно также называются силами трения. Особенно значительны трение и демпфирование, которые спо-

правильно входят в механические системы для гашения колебаний. Чаще всего силы трения представляют реакцию колебаний, например, служат причиной затухания свободных колебаний; нелинейные системы, в которых действуют такие силы, называются диссипативными. В некоторых случаях силы трения оказывают противоположное действие и возбуждают колебания (в автоколебательных системах — см. главу IV).

Зависимость обобщенной силы трения от обобщенной скорости колеблется часто представляют в одной из следующих форм (для диссипативных систем с одной степенью свободы):

сила линейного трения

$$Q(\dot{q}) = -b\dot{q}; \quad (0.4)$$

нелинейная сила трения *)

$$Q(\dot{q}) = -b \operatorname{sign} \dot{q}; \quad (0.5)$$

сила нелинейно-вязкого трения, обычно аппроксимируется степенностью

$$Q(\dot{q}) = -b|\dot{q}|^n \operatorname{sign} \dot{q} \quad (0.6)$$

или зависимость

$$Q(\dot{q}) = -b_1\dot{q} - b_2\dot{q}^3 - b_3\dot{q}^5 - \dots \quad (0.7)$$

В некоторых системах действуют силы *связанного* характера. Такими, например, силы $Q(q, \dot{q})$, зависящие от координат и времени, которые можно представить в виде суммы невязанной силы и вынуждающей силы; эти силы характерны для параметрических систем, в которых кратко было уже сказано выше. Связанным характером обладают также силы $Q(q, \dot{q})$, зависящие от координат и скоростей и при этом неэргодичные в виде суммы невязанной силы и силы трения; иногда такие силы приводят механической системе автоколебательные свойства.

При составлении механической модели большое значение имеет разумное пренебрежение несущественными составляющими сил, а для учитываемых в анализе составляющих — строгая систематизация их свойств. Так,

*) Здесь имеется в виду простейший вид нелинейного трения, в котором не учитываются различия между обобщенными силами трения и трением диссипации.

при определении собственных частот механических систем в большинстве случаев допустимо пренебречь действием сил трения; тем можно пренебречь и при исследовании вынужденных колебаний в достаточно удаленной от резонанса. Аналогично этому, если рассматриваются малые колебания, то часто можно не учитывать нелинейностей восстанавливающих сил.

Впрочем, подобные упрощения нужно делать осторожно, имея в виду, что, казалось бы, малые влияния иногда могут явиться причиной важных последствий принципиального характера. Так, даже весьма малые силы трения необходимо учитывать при анализе затухающих свободных колебаний, а также при определении резонансных или сверхрезонансных амплитуд вынужденных колебаний. Подобно этому нужно помнить, что даже малые параметрические силы могут вызвать весьма опасные колебания типа параметрического резонанса (см. главу III).

4. Понятие о фазовой плоскости. Обычно описанию движения системы с одной степенью свободы в виде зависимости обобщенной координаты от времени $q = q(t)$ не является достаточно удобным. В ряде случаев, особенно при изучении нелинейных установившихся колебаний, определенными достоинствами обладает представление движения на фазовой плоскости.

Состояние системы в любой фиксированный момент времени t определяется парой соответствующих значений q и $\dot{q}$ и может быть представлено координатами (фазой) точкой в плоской декартовой системе координат $q, \dot{q}$, если откладывать по оси абсцисс обобщенную координату q , а по оси ординат — обобщенную скорость $\dot{q}$. Такая плоскость называется фазовой.

В процессе движения рассматриваемой системы значения q и $\dot{q}$ изменяются и соответственно меняется положение изображающей точки на фазовой плоскости. Геометрическое место изображающих точек для данного движения называется фазовой траекторией. На рис. 0.2, а, б показаны фазовые траектории для случаев равномерного (а) и равноускоренного (б) движения материальной точки. Показаны исходной изображающей точки M_0 , определяются начальными условиями.

Для построения фазовой траектории при заданном законе движения $q(t)$ нужно путем дифференцирования образовать выражение скорости $\dot{q}(t)$, а затем исключить

время из двух уравнений:

$$q = q(t), \quad \dot{q} = \dot{q}(t). \quad (0.8)$$

Функции

$$\dot{q} = \dot{q}(q) \quad (0.9)$$

и описывает фазовую траекторию данного движения. Впрочем, для построения фазовой траектории переход к линейной функции (0.9) не обязателен; фазовую траекторию

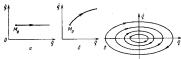


Рис. 0.2

можно строить непосредственно по уравнениям (0.8), которые представляют уравнение фазовой траектории в канонической форме.

Фазовая плоскость особенно удобна для представления колебательных процессов, когда координата и скорость не выходят за известные пределы; поэтому вся картина движения даже в течение неограниченного времени занимает ограниченную часть фазовой плоскости. Такими, например, свободные гармонические колебания

$$q = A \sin(kt + \alpha),$$

причем угловая частота k , а также максимумы от начальных условий величинами A и α известны. Для скорости имеем

$$\dot{q} = Ak \cos(kt + \alpha). \quad (0.10)$$

Исключив время из этих двух уравнений, получим уравнение фазовой траектории

$$q^2 + \frac{\dot{q}^2}{k^2} = A^2, \quad (0.11)$$

т. е. уравнение эллипса.

В данном случае вся фазовая плоскость занята бесконечным множеством вложенных друг в друга таких эллипсов с общим центром в начале координат и отличающихся

закрывах друг от друга только параметром A (рис. 0.9, в). Направления движения изображаются точкой вдоль фазовых траекторий показанных на рисунках стрелками. Как фазовые траектории системы одностепенны, а начальные условия фиксируют определенный выбор конкретной траектории.

Совокупность фазовых траекторий описывает все возможные движения данной системы и называется *фазовой диаграммой* (фазовым портретом) данной системы. Структура фазовой диаграммы полностью характеризует качественные особенности возможных движений рассматриваемой системы.

Следует иметь в виду, что фазовая диаграмма не только может служить иллюстрацией закона движения, но и после того как он найден путем интегрирования дифференциального уравнения задачи. В принципе фазовая диаграмма может быть построена непосредственно, по этому уравнению, без его решения в виде $q = q(t)$.

Так, для автономной системы, описываемой системой дифференциальных уравнений

$$\dot{q} + h^2 q = f(q, \dot{q}), \quad (0.12)$$

после замены $\dot{q} = \frac{dq}{dq}$ получается уравнение

$$\frac{dq}{dq} = \frac{f(q, \dot{q}) - h^2 q}{\dot{q}}, \quad (0.13)$$

которое определяет некоторую связь между переменными q и $\dot{q}$. В принципе решение этого дифференциального уравнения первого порядка имеет вид

$$\dot{q} = \dot{q}(q, C), \quad (0.14)$$

где постоянная C определяется начальными условиями $\dot{q} = \dot{q}_0$ при $q = q_0$ (q_0 и $\dot{q}_0$ — начальные значения обобщенной координаты и обобщенной скорости). Каждому значению C соответствует определенная фазовая траектория, а совокупность таких траекторий образует фазовую диаграмму системы.

В некоторых случаях дифференциальное уравнение (0.13) удается решить аналитически в замкнутой форме; в частности, в квадратурах приводится случай, когда выражение $f(q, \dot{q})$ не содержит $\dot{q}$ и переменные в (0.13) разделяются. В общем случае для интегрирования урав-

нения (0.13) нужно обращаться к ЭВМ. (В свое время были предложены различные специальные приемы графического интегрирования названного уравнения; теперь этими приемами практически не пользуются.)

В автономных системах равны нулю обобщенная скорость (знаменатель правой части уравнения (0.13)) и обобщенное ускорение (числитель правой части уравнения (0.13)). Таким образом, в точках фазовой плоскости, соответствующих состояниям равновесия, производная $d\dot{q}/dq$ не определена и вместе с этим не определено направление касательной к фазовой траектории. Такие точки называются особыми точками дифференциального уравнения. В численной теории дифференциальных уравнений устанавливается, что через любую особую точку проходит либо больше чем одна фазовая траектория, либо не проходит ни одной. Например, как мы видели на рис. 0.9, а, через особую точку в начале координат не проходит ни одной из фазовых траекторий (такая точка называется *особой точкой типа «центр»*; ниже будут рассмотрены особые точки других типов).

Через любую регулярную точку фазовой плоскости (т. е. не особую точку) проходит одна и только одна фазовая траектория. Изображающая точка, движущаяся в верхней полуплоскости, определяет состояние системы с положительными значениями обобщенной скорости, т. е. состояния, которым соответствуют возрастание обобщенной координаты, поэтому такая изображающая точка движется вдоль фазовой траектории слева направо. Соответственно, изображающая точка, находящаяся в нижней полуплоскости, движется вдоль фазовой траектории справа налево. Отсюда также следует, что касательная к фазовой траектории в точках пересечения траекторий с осью q перпендикулярна этой оси.

определяется только обобщенной координатой q и не зависит явно от времени, то скорость точки равна

$$v_i = \frac{dr_i}{dt} = \frac{dr_i}{dq} \dot{q},$$

и, следовательно,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{dr_i}{dq} \right)^2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \dot{q}^2 \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{dr_i}{dq} \right)^2.$$

Выходящая сюда сумма в общем случае является функцией обобщенной координаты q ; обозначим

$$\sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{dr_i}{dq} \right)^2 = A(q) \quad (1.3)$$

и разложив последнее выражение в ряд Маклорена в окрестности значения $q = 0$, получим

$$A(q) = A(0) + A'(0)q + \frac{A''(0)}{2}q^2 + \dots$$

Здесь штрихи обозначают производные функции $A(q)$ по обобщенной координате q .

В этом параграфе рассматривается частный, но практически очень важный случай малых колебаний системы около положения ее равновесия; отсчет координаты q удобно вести от этого положения. При малых значениях q в разложении можно удерживать лишь один первый член, который обозначим через α ; тогда кинетическая энергия примет вид, сходный с выражением кинетической энергии одной материальной точки:

$$T = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2. \quad (1.4)$$

Выходящий сюда множитель α называется коэффициентом инерции или инерционным коэффициентом (иногда его называют также обобщенной или приведенной массой).

Конечно, для определения инерционного коэффициента нет необходимости каждый раз фактически строить сумму (1.3), разложить ее в ряд Маклорена и затем выделить первый член этого ряда. В большинстве от вида механической системы и выбора обобщенной координаты достаточно любым образом получить выражение кинетической энергии через квадрат обобщенной скорости; при

Глава I

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 1. Линейные системы с одной степенью свободы при отсутствии трения

1. Основное дифференциальное уравнение и его решение. Изучение свободных колебаний представляет определенный интерес в связи с практическими задачами о движении механической системы после какого-либо возмущения ее состояния равновесия. Однако не только этим определяется важность темы, которой посвящена настоящая глава. Дело в том, что характеристики свободных колебаний (собственные частоты и собственные формы) полностью определяют индивидуальными динамическими свойствами механической системы и имеют первостепенное значение также при анализе ее вынужденных колебаний.

Рассмотрим в общем виде консервативную механическую систему с одной степенью свободы, для которой уравнение Лагранжа имеет известную из курса теоретической механики форму:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь t — время, q — обобщенная координата, $\dot{q}$ — обобщенная скорость, T — кинетическая энергия, Π — потенциальная энергия.

Прежде всего образуем выражение кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i v_i \quad (1.2)$$

где m_i — масса i -й материальной точки, v_i — скорость этой точки. Если $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор i -й материальной точки

этом значением ϵ определяется как коэффициент в выражении (1.4).

Обратимся теперь к определению потенциальной энергии Π , которая представляет собой функцию обобщенной координаты q :

$$\Pi = \Pi(q). \quad (1.5)$$

Если, как это чаще всего бывает, потенциальная энергия обладает свойствами непрерывности и дифференцируемости, то ее можно разложить в ряд Магнана в окрестности значения $q=0$:

$$\Pi = \Pi(0) + \Pi'(0)q + \frac{\Pi''(0)}{2}q^2 + \dots \quad (1.6)$$

где, как и выше, штрихи обозначают дифференцирование по обобщенной координате q . Постоянному члену члену этого разложения может быть приписано любое значение, так как потенциальная энергия определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Поэтому удобно положить $\Pi(0) = 0$. Далее нужно вспомнить следующее

$$\Pi' = -Q, \quad (1.7)$$

определяющее связь потенциальной энергии с обобщенной силой Q . Так как в положении равновесия обобщенная сила равна нулю, то при отсчете координаты q от положения равновесия системы произвольная $\Pi'(0)$ обратится в нуль; при этом разложение (1.6) начнется с члена, содержащего вторую степень координаты q . Считая перемещения q малыми, мы сохраним в разложении (1.6) только упомянутый член, так что окончательно получим

$$\Pi = \frac{\epsilon}{2} \epsilon q^2, \quad (1.8)$$

где постоянная

$$\epsilon = \Pi''(0) \quad (1.9)$$

называется обобщенным коэффициентом жесткости или каллидурным коэффициентом.

Знак постоянной ϵ зависит от устойчивости положения равновесия, от которого ведется отсчет координаты q . Согласно теореме Лагранжа — Дираке потенциальная энергия консервативной системы в положении устойчивого равновесия имеет минимум, т. е. $\Pi''(0) > 0$. Отсюда следует, что $\epsilon > 0$ вблизи устойчивого положения равновесия.

Для определения обобщенного коэффициента жесткости ϵ в каждом конкретном случае достаточно построить выражение потенциальной энергии в виде квадратичной функции обобщенной координаты q , причем отсчет координаты q следует вести от положения равновесия и при этом, что этому положению соответствует нулевое значение потенциальной энергии. Если окажется, что $\epsilon < 0$, то это будет означать неустойчивость соответствующего положения равновесия.

Подстановка в уравнение Лагранжа (1.1) выражения (1.4) и (1.8) для кинетической и потенциальной энергии, получим основное дифференциальное уравнение задачи о свободных колебаниях:

$$a\ddot{q} + \epsilon q = 0. \quad (1.10)$$

Никогда, в зависимости от вида механической системы, может оказаться более удобным не метод Лагранжа, а какой-либо иной путь составления дифференциального уравнения задачи; разумеется, что независимо от выбранного способа для рассматриваемых здесь линейных систем с одной степенью свободы без трения окончательное дифференциальное уравнение запишется в виде (1.10).

Введем обозначение

$$k = \sqrt{\frac{\epsilon}{a}}, \quad (1.11)$$

тогда вместо (1.10) получим

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. \quad (1.12)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$q = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt, \quad (1.13)$$

причем постоянные C_1 и C_2 определяются через начальные условия $q(0) = q_0$ и $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ в виде

$$C_1 = \frac{\dot{q}_0}{k}, \quad C_2 = q_0.$$

Окончательно имеем

$$q = \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt + q_0 \cos kt, \quad (1.14)$$

Никогда нельзя будет иной формой записать:

$$q = A \sin(kt + \alpha), \quad (1.15)$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2 + a_0^2} \quad \alpha = \arctg \frac{v_0}{k a_0} \quad (1.16)$$

Из выражения (1.15) видно, что движение представляет собой затухающие гармонические колебания с амплитудой A и угловой частотой k (рис. 1.1).



Рис. 1.1

число свободных колебаний за 2π единиц времени. ПерIOD свободных колебаний, т. е. длительности одного полного цикла колебаний, определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}}. \quad (1.17)$$

Пример 1.1. Определить собственную частоту системы (рис. 1.2), состоящей из упруго закрепленного горизонтально расположенного рейки A , который лежит на упруго закрепленном основании цилиндра B и колеса C . Считать, что трение между рейкой и цилиндром исключает возможность проскальзывания рейки

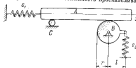


Рис. 1.2

по цилиндру. Обозначения: m_1 — масса рейки, m_2 — масса цилиндра, c_1 — коэффициент жесткости горизонтальной пружины, c_2 — коэффициент жесткости вертикальной пружины, g — ускорение силы тяжести, l — расстояние от оси цилиндра до точки приложения

силы вертикальной пружины. Массами пружин и колеса C пренебречь.

Принимая за обобщенную координату горизонтальное перемещение какой-либо точки рейки: так как рейка жестко соединена с осью, то выбор этой точки безразличен. Определим координату x будем считать от положения равновесия, когда обе пружины не деформированы.

При перемещении рейки на расстояние x , цилиндр сместится на угол $\varphi = x/l$. Кинетическую энергию системы найдем

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\varphi}^2$$

подставив сюда $\dot{\varphi} = m_2 \dot{x}^2 / l^2$, получим

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{m_2}{l^2} \right) \dot{x}^2.$$

Отсюда непосредственно видно, что эквивалентный коэффициент в данном случае равен

$$c = c_1 + \frac{c_2}{l^2}.$$

Потенциальная энергия определяется деформацией обеих пружин:

$$U = \frac{1}{2} c_1 x^2 + \frac{1}{2} c_2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(c_1 + \frac{c_2}{l^2} \right) x^2.$$

Таким образом, коэффициент жесткости системы равен

$$c = c_1 + \frac{c_2}{l^2}.$$

Тогда по формуле (1.17) найдем собственную частоту:

$$\omega = \sqrt{\frac{c_1 + \frac{c_2}{l^2}}{m_1 + \frac{m_2}{l^2}}}.$$

Пример 1.2. Определить движение системы, возникающее после одностороннего вертикального удара по грузу, который связан с безмассовой жесткой упруго закрепленной балкой (рис. 1.3, а). Обозначения: $2l$ — длина балки, m — масса груза, c_1 — коэффициент жесткости пружины, S — величина вертикального и горизонтального удара груза.

Прежде всего найдем положение равновесия (рис. 1.3, б). Пусть в этот момент угол отклонения вертикальной горизонтальной балки равен φ_0 . Тогда балка отклонится от своего положения равновесия на угол φ_0 . На балку действует следующая сила: вес груза mg , реакция пружины $c_1 l \varphi_0$, реакция шарнирной опоры. Для определения угла φ_0 составим уравнение моментов

отклонения центра шариковой опоры:

$$2\omega_0 l - c_0 l^2 \varphi_0 = 0. \quad (4)$$

Отсюда находим

$$\varphi_0 = \frac{2\omega_0 l}{c_0 l^2}.$$

Теперь перейдем к анализу движения и обозначим через φ угол дебалансного отклонения при движении системы после удара. Тогда полный угол отклонения равен $\varphi_0 + \varphi$, а полная реакция пружины составляет $c_0 l^2 (\varphi_0 + \varphi)$.

Составим дифференциальное уравнение вынужденного движения балки — груза:

$$2\omega_0 l - c_0 l^2 (\varphi_0 + \varphi) = -4\omega_0 l^2 \frac{d^2}{dt^2} (\varphi_0 + \varphi).$$

где $4\omega_0 l^2$ — момент инерции системы. Если рассмотреть свободный член этого уравнения, то сумма моментов двух частей системы (а) отклонения правой части, и она получила дифференциальное уравнение для координаты φ , состоящейной от независимых переменных:

$$4\omega_0 \ddot{\varphi} + c_0 \varphi = 0. \quad (5)$$

Теперь можно заметить, что предельно малые отклонения равновесного положения системы, в сущности, лишней операции. Можно было поступить иначе: заранее сместить на расчетных силах, действующих в системе, тогда она находится в состоянии равновесия, а величина в дифференциальном уравнении движения только момент дебалансного рычажка $4\omega_0 l^2$ (его момент равен $-c_0 l^2 \varphi$); при этом сразу получили уравнение (5). Обычно именно так и поступают в подобных случаях.

Составим уравнение (5) с помощью уравнения (1.10), noting, что вынуждающий коэффициент и коэффициент жесткости соответственно равны $a = 4\omega_0$, $c = c_0$. Тогда по формуле (1.15) находим собственную частоту:

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c_0}{\omega_0}}.$$

Перейдем к формулировке начальных условий, соответствующих движению после приложения ударного импульса A . В момент, непосредственно следующий за ударом, движение балки остается

неизменным, следовательно, $\dot{\varphi}_0 = 0$. Скорость груза получает мгновенное приращение $\dot{\varphi}_0$, определяемое из теоремы об изменении количества движения:

$$2\omega_0 \dot{\varphi}_0 - 0 = A.$$

Скоростное, начальное условие имеет вид

$$\dot{\varphi}_0 = 0, \quad \ddot{\varphi}_0 = \frac{A}{2\omega_0 l}.$$

Согласно решению (1.14) движение описывается выражением

$$\varphi = \frac{A}{2\omega_0 l^2} \sin \lambda t,$$

причем наибольшее отклонение от положения равновесия равно

$$\varphi_{\max} = \frac{A}{2\omega_0 l^2} = \sqrt{\frac{A}{c_0 m l}}.$$

а вынуждающий угловой ускорение в процессе

$$c_0 \varphi_{\max} l = A \sqrt{\frac{c_0}{m}}.$$

2. Метод Рунге. Во введении был показан приближенный способ приспособить к системе с одной степенью свободы, основанный на аналогии с комбинацией колебаний в конфигурации системы при ее колебаниях. После такого приспособления нужно образовать соответствующие выражения для потенциальной и кинетической энергии и тем самым установить значения коэффициента жесткости c и инерционного коэффициента a . После этого по формуле (1.14) вычисляется собственная частота.

Рунге дала такую теорему, согласно которой вычисленный указанным способом результат всегда приводит к преувеличенному значению собственной частоты.

Пример. Рассмотрим для системы на рис. 4.4, а дано: масса маятника m , коэффициент жесткости мая пружины также одинаковы и равен c_0 . Следуя методу Рунге, примем $x_1 = \alpha x$, $x_2 = \beta x$, где α и β — некоторые разумно выбранные числа.

Кинетическая энергия системы выражается через единственную обобщенную скорость $\dot{x}$:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + \alpha^2 + \beta^2).$$

а потенциальной энергии системы — через эквивалентную обобщенную координату x_0 :

$$H = \frac{1}{2} c_0 \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} c_0 (x_0 - c_1)^2 + \frac{1}{2} c_0 (x_0 - x_2)^2 = \\ = \frac{1}{2} c_0 x_0^2 [1 + (\alpha - 1)^2 + (\beta - \alpha)^2].$$

Следовательно, коэффициенты Фраммона (1.12) в данном случае равны

$$a = \pi(1 + \alpha^2 + \beta^2); \quad c = c_0[1 + (\alpha - 1)^2 + (\beta - \alpha)^2]$$

и собственная частота определяется выражением:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{c_0}{m} \sqrt{\frac{1 + (\alpha - 1)^2 + (\beta - \alpha)^2}{1 + \alpha^2 + \beta^2}}.$$

Конечно, этот результат зависит от выбранных значений α и β . Если рассмотреть частоту как функцию α и β , то согласно упомянутой теореме Рэлея минимум этой функции определяет наименьшее значение частоты; но этому поводу см. ниже более простой пример 1.3.

Остановимся на случае свободных незатухающих колебаний балки*. Прогиб y в любой точке оси балки с абсциссой x меняется во времени, т. е.

$$y = y(x, t), \quad (1.18)$$

Согласно основной идее метода Рэлея примем

$$y = y(t)f(x), \quad (1.19)$$

где $f(x)$ — произвольная функция координаты x , характеризующая форму изогнутой оси балки при колебании, $y(t)$ — некоторая, пока неизвестная, функция времени.

Так как функция $f(x)$ задается более или менее произвольно, то результат решения задачи окажется, как правило, приближенным (если случайно в качестве $f(x)$ будет принята истинная форма оси балки при колебании, то результат окажется точным).

Форму оси следует выбирать с учетом заданного способа закрепления балки, которым определяются граничные условия для функции $f(x)$.

Различаются *квантоватые* и *силовые* граничные условия. Рассмотрим эти условия в частных случаях, обозначив через x_0 абсциссу рассматриваемого конца балки.

* Предположим, что материал стержня однороден и изотропен и знаком с теорией изгиба балок при статических нагрузках.

На жестко заделанном конце балки невозможны прогиб и поворот, т. е.

$$y(x_0, t) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(x_0, t) = 0.$$

Эти равенства должны удовлетворяться в любой момент времени, что будет иметь место, если входящая в (1.19) функция $f(x)$ удовлетворяет условиям

$$f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 0. \quad (1.20)$$

Здесь строгим образом соблюдена операция дифференцирования по координате x . Оба условия (1.20) — кинематические, т. е. относятся к перемещениям конечного сечения.

Если конец $x = x_0$ шарнирно оперт, то на этом конце должны тождественно равняться нулю и прогиб и изгибающий момент**)

$$y(x_0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_0, t) = 0.$$

Отсюда следуют граничные условия для функции $f(x)$:

$$f(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0. \quad (1.21)$$

Первое из этих условий — кинематическое, второе условие — силовое.

Наконец, на свободном конце $x = x_0$ должны равняться нулю изгибающий момент и поперечная сила, т. е.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_0, t) = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x_0, t) = 0.$$

При этом должны удовлетворяться два силовых граничных условия:

$$f'(x_0) = 0, \quad f'''(x_0) = 0. \quad (1.22)$$

Далее будем полагать, что функция $f(x)$ выбрана с учетом тех или иных заданных граничных условий; обратимся к определению кинематической и потенциальной энергий.

** Здесь необходимо вспомнить соотношение между кинематическим моментом $M = EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $Q = EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, где M — изгибающий момент, Q — поперечная сила, EJ — жесткость сечения при изгибе.

Скорость мгновенного движения любой точки оси балки определяется выражением

$$\frac{dy}{dt} = \dot{q}(t) f(x).$$

Соответствующие кинетическая энергия бесконечно малого элемента длины dx равна

$$\frac{1}{2} m(x) dx \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m(x) \dot{q}^2(t) f^2(x) dx.$$

Здесь $m(x)$ — интенсивность распределенной массы, $m(x)dx$ — масса рассматриваемого элемента. Интегрируя по всей длине l , находим полную кинетическую энергию балки

$$T = \frac{\dot{q}^2(t)}{2} \int_0^l m(x) f^2(x) dx, \quad (1.23)$$

Сравним полученный результат с общим выражением (1.4) для кинетической энергии, приходим к заключению, что входящий в (1.23) интеграл представляет собой инерционный коэффициент:

$$m = \int_0^l m(x) f^2(x) dx. \quad (1.24)$$

Для определения потенциальной энергии нужно исходить из выражения

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx,$$

которое устанавливается в курсе сопротивления материалов. Подставляя сюда

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = q(t) F(x),$$

находим

$$U = \frac{q^2(t)}{2} \int_0^l EJ [F'(x)]^2 dx.$$

На основании этого результата с выражением (1.8) сле-

дует, что коэффициент жесткости определяется формулой

$$c = \int_0^l EJ [F'(x)]^2 dx. \quad (1.25)$$

После определения коэффициентов m и c по формулам (1.24) и (1.25) собственная частота находится согласно (1.11) в виде

$$k_0 = \sqrt{\frac{EJ \int_0^l [F'(x)]^2 dx}{m \int_0^l f^2(x) dx}}. \quad (1.26)$$

Можно доказать, что если функция $f(x)$ удовлетворяет заданным кинематическим граничным условиям, то приближенный результат (1.26) всегда больше истинного значения наименьшей собственной частоты балки.

Метод Рунге может быть использован для приближенного определения наименьшей собственной частоты любой системы с распределенными параметрами — не только балок, совершающих нитяные колебания, но и стержней при их продольных или крутильных колебаниях, а также — с соответствующей модификацией — рамных конструкций, пластин и оболочек.

Так, например, в случае продольных колебаний стержня аналогично сказанному признается, что продольные перемещения $x(x, t)$ описываются тем же уравнением (1.19). При этом граничными условиями будут: на свободном конце $F'(x_0) = 0$, на закрепленном конце $F(x_0) = 0$. При помощи прежних рассуждений можно получить собственную частоту в виде

$$k = \sqrt{\frac{EF \int_0^l [F'(x)]^2 dx}{m \int_0^l f^2(x) dx}}. \quad (1.27)$$

где $F(x)$ — площадь сечения стержня.

Пример 1.3. Двухмассовая система (рис. 1.8, а) определяется следующими параметрами: $m_1 = m_2 = m$, $c_1 = c_2 = c_0$.

Найти собственную частоту по методу Рунга, приняв $x_0 = 0,1$; (α — параметр), и исследовать, как зависит выбор начальной x_0 в пределах 0 $\leq x_0 \leq 1$ на вычисляемое значение собственной частоты. В данном случае имеем

$$T = \frac{1}{2} \alpha x_1^2 + \frac{1}{2} \alpha (\alpha x_1)^2 = \frac{1}{2} \alpha x_1^2 (1 + \alpha^2);$$

$$II = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\alpha x_1 - x_1)^2 = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 (\alpha^2 - 2\alpha + 2).$$

Следовательно, $c = \alpha(1 + \alpha^2)$, $c = c_1(\alpha^2 - 2\alpha + 2)$ и собственная частота равна

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{T}} = \gamma \sqrt{\frac{c_1}{\alpha}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\alpha^2 - 2\alpha + 2}{1 + \alpha^2}}.$$

Зависимость коэффициента γ от параметра α ($\alpha > 0$) изображена на рис. 1.4, 5. Как уже говорилось выше, при произвольном выборе x_0 вычисляемое значение частоты имеет погрешность; точный результат $\gamma = 0,618$ (см. ниже пример 4.3) соответствует точке минимума кривой на рис. 1.4, 5, где $\alpha = 1,618$. Из графика, можно видеть, однако, что в зоне минимума значения γ довольно слабо зависят от погрешности x_0 . Поэтому метод Рунга, применяемый при выборе начальной x_0 , обычно не вызывает больших ошибок в определении собственной частоты.

Как известно, то же относится и в другом вычислительном систем — в том и состоит практическая ценность метода Рунга.



Рис. 1.4



Рис. 1.5

Пример 1.4. Найти методом Рунга собственную частоту колебаний системы балки постоянного поперечного сечения $EI = 10^4$ см⁴; определится также постоянная жесткости k ее массы (рис. 1.6).

Приним считаем

$$f(x) = \frac{x^3}{T}, \quad (6)$$

что удовлетворяет каноническим граничным условиям на левом конце и одному из условий на правом конце (кан-

ное условие $f'(l) = 0$ здесь нарушено). Подставляя (6) в (1.24), имеем

$$k = \frac{4,8l}{T^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

В качестве формы колебаний лучше принять функцию

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{2l^2} + \frac{x^6}{12l^3}, \quad (8)$$

которая удовлетворяет всем граничным условиям задачи:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0,$$

$$f'(l) = 0, \quad f''(l) = 0.$$

Подставляя (8) в формулу (1.28), найдем

$$k = \frac{3,84}{T^2} \sqrt{\frac{EI}{m}},$$

что лишь на 3,4 % отличается от известного точного значения

$$k = \frac{3,51}{T^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

3. Зависимость устойчивости равновесия от коэффициента жесткости. Во всех рассмотренных выше случаях речь шла о колебаниях около положения равновесия устойчивого равновесия; формальным признаком устойчивости служат положительность коэффициента жесткости c , равного значению второй производной $II''(0)$ потенциальной энергии в положении равновесия. В реальных механических системах может случиться, что $c < 0$.

При $c < 0$ основное дифференциальное уравнение (1.10) можно записать в виде

$$a\ddot{q} - c^*q = 0, \quad (1.28)$$

где $c^* = |c|$ — абсолютное значение обобщенного коэффициента жесткости. Решение уравнения (1.28)

$$q = A \operatorname{sh}(k^*t + \alpha), \quad (1.29)$$

где $k^* = \sqrt{c^*/a}$, описывает монотонное удаление системы от равновесного положения и свидетельствует о его неустойчивости.

Знач коэффициента c зависит от параметров системы, т. е. в некоторых случаях состояние равновесия может быть устойчивым или неустойчивым в зависимости от комбинации значений этих параметров.

Обращаясь к рассмотрению таких случаев, будем считать, что существуют лишь один варьируемый параметр S системы, при изменении которого может измениться лишь коэффициент жесткости $c = c(S)$. Состояния равновесия устойчивы в той области значений S , в которой $c(S) > 0$; при $c(S) < 0$ состояния равновесия неустойчивы (случаи отрицательной жесткости). Критическое значение параметра S является корнем уравнения

$$c(S) = 0. \quad (1.30)$$

Пример 1.5. Для симметричной системы, изображенной на рис. 1.6, введен обозначения: G — вес тела, l — момент инерции тела относительно оси вращения, c_0 — суммарный коэффициент



Рис. 1.6



Рис. 1.7

жесткости обеих пружин, b — высота расположения центра тяжести тела, l — момент инерции тела относительно оси вращения. Найти критическое значение коэффициента жесткости c_0 .

При малых значениях угла отклонения тела дифференциальные уравнения вращательного движения имеют вид

$$I\ddot{\varphi} + (c_0 b^2 - Gb)\varphi = 0.$$

Таким образом, в данном случае устойчивость равновесия определяется знаком равенства

$$c = c_0 b^2 - Gb.$$

Критическое значение $c_{cr} = Gb/l$.

Пример 1.6. Найти критическое значение силы P для системы, изображенной на рис. 1.7, а; весом пружины пренебречь. Коэффициент жесткости спиральной пружины, расположенной внизу стоек, равен c_0 . На стержень стоек надеты кольца, соответствующий диаметр стоек равен радиусу на угол, рав-

ный отклонению. Обозначим: l — высота стоек, b — длина пружины стержня, G — вес стоек. Сила, действующая на стержень, при ее отклонении на малый угол φ , показана на рис. 1.7, б.

Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения стоек (для малых отклонений)

$$Pl\ddot{\varphi} + P\varphi l + \frac{G}{2}\varphi - c_0\varphi = \frac{G\varphi^2}{2b}.$$

Так как $b \sin \varphi \approx l \sin \varphi$, то при малых углах φ в φ можно принять $\varphi = \varphi(b)$. Таким образом, обобщенный коэффициент жесткости равен

$$c = c_0 - \frac{G}{2} - Pl \left(1 + \frac{l}{b}\right).$$

Отсюда непосредственно видно, что критическое значение силы P в соответствии с (1.30) определяется выражением

$$P_{cr} = \left[c_0 - \frac{G}{2}\right] \left[l \left(1 + \frac{l}{b}\right)\right]^{-1}.$$

При увеличении размера b критическое значение P_{cr} также увеличивается.

Пример 1.7. Основой, изображенной на рис. 1.8, а, является жесткая рама I , вращающаяся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикального оси. Горизонтальный стержень 2

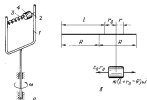


Рис. 1.8

длиной $2R$ служит направляющей осью для пружины 3; одна конец пружины связан с рамой, а с другим концом прикреплен груз m массой m , который может скользить без трения вдоль стержня 2. Коэффициент жесткости пружины равен c_0 , а ее неравномерная длина равна l . Найти критическое значение угловой скорости.

Назначение относительного равновесия груза соответствуют растяжению пружины на величину Δl , которая может быть

подвешен на системе сдв, длиной из рис. 1.8, δ , т. е. на соответствующий $m(l + r_0 - R)\omega^2 = c_0 r_0$. (a)

Устойчивость этого состояния равновесия грубо зависит от значения угловой скорости вращения системы.

Примем систему вращаем на известное количество, тогда движение грубо вдоль стержня будет являться относительным движением. Обозначим через r действительное удлинение стержня и в произвольный момент времени движения, приняв направление силы вправо и над $m(\ddot{r} + r_0 + r - R)\omega^2$. Тогда дифференциальное уравнение относительного движения грубо примет вид

$$m\ddot{r} = -c_0(r_0 + r) + m(l + r_0 + r - R)\omega^2,$$

или, при учете (a),

$$m\ddot{r} + (c_0 - m\omega^2)r = 0.$$

Средственный коэффициент жесткости равен $c = c_0 - m\omega^2$, а критическое значение угловой скорости составляет $\omega_{cr} = \sqrt{c_0/m}$. Отметим, что ось не зависит от значений l и r_0 и совпадает со значением собственной частоты свободной грубо на пружине при отсутствии вращения.

При $\omega > \omega_{cr}$ состояние относительно равновесия грубо неустойчиво.

Пример 1.8. Показанная на рис. 1.8, а система представляет собой маятник и состоит из стержня l с горизонтальной осью поворота I и грубо B . Горизонтальная ось маятника равномерно вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, совпадающей с радиальным положением оси стержня. Найти критическое значение угловой скорости.

Решим задачу при обозначениях: l — длина стержня, m — масса грубо, φ — малый угол отклонения стержня от вертикали (рис. 1.8, б). В дифференциальное уравнение от относительного движения маятника будем писать момент силы тяжести и момент парной силы инерции

$$-mgl\varphi + m\omega^2 l r_0 = m l \ddot{\varphi}.$$

(Нормальная сила инерции параллельна оси поворота и в уравнение моментов не входит.) Таким образом, мы приходим к уравнению

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)\varphi = 0,$$

из которого непосредственно видно, что критическое значение скорости не зависит от массы грубо и равно

$$\omega_{cr} = \sqrt{g/l}.$$

При $\omega < \omega_{cr}$ система устойчива, причем частота свободных колебаний определяется формулой

$$\lambda = \sqrt{\frac{g}{l} - \omega^2}.$$

При $\omega > \omega_{cr}$ состояние относительно равновесия неустойчиво.

В рассмотренных простых примерах не существует необходимости в составлении дифференциальных уравнений движения, так как для существования об устойчивости и для определения критического значения параметра было достаточно построить выражения $c(\delta)$. Однако для систем с несколькими степенями свободы — даже находящимися под действием только позиционных сил — исследование устойчивости требует предварительного составления дифференциальных уравнений движения (см. гл. IV).

Устойчивость состояний равновесия удобно исследовать также с помощью фазовых диаграмм. Отметим, что их можно построить и по решенным заданное дифференциальное уравнение движения, т. е. по разысканной функции движения $q = q(t)$ в явной форме.

С помощью замены $\dot{q} = \dot{q} \frac{dq}{dq}$ из (1.12) получается дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{d\dot{q}}{dq} = -\frac{F(q)}{q}, \quad (1.34)$$

После интегрирования мы вновь приходим к уравнению (0.14) и к семейству замкнутых, показанному на рис. 0.9, в. Если $c < 0$, то после замены $k_2^2 = -c/l$ получим вместо (1.31) дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{d\dot{q}}{dq} = -\frac{k_2^2 q}{q}.$$

Его решение имеет вид

$$q^2 - \frac{q^2}{k_2^2} = A^2.$$

Фазовые траектории для этого случая показаны на рис. 1.10. Она состоит из семейства гипербол и четырех полуэллипсов, являющихся асимптотами этих гипербол.

Заданное возмущенное состояние равновесия определяет начальное положение изображающей точки. С течением времени эта точка будет монотонно удаляться от начала вдоль соответствующей кривой фазовой траектории: это означает монотонный уход системы от состояния равновесия.



Рис. 1.10

Изменение составляет изображающей точки, движущейся по прямой $\dot{q} = -k^2 q$; если в начальный момент задано такое возмущение, что $\dot{q}(0) = -k^2 q(0)$, то система будет стремиться к состоянию равновесия. Но это не может изменить оценки состояния равновесия как неустойчивого: достаточно любого сколь угодно малого нарушения указанного специально выбранного возмущения, как система начнет неограниченно удаляться от состояния равновесия. В данном случае отмеченная выше точка равновесия особая точка (0, 0) является седлом.

§ 2. Системы с одной степенью свободы при наличии линейной восстанавливающей силы и трения

1. **Линейное трение.** Для изучения свободных колебаний системы с одной степенью свободы при наличии линейного трения будем исходить из уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial U}{\partial q} + Q_*, \quad (2.1)$$

в котором Q_* — обобщенная сила линейного трения. Для ее определения примем, что на единицу точки системы действует сила линейного трения

$$R_1 = -\beta \dot{x}_1, \quad (2.2)$$

где β — коэффициент трения. Вспомогательное выражение обобщенной силы

$$Q_* = \sum_{i=1}^n R_i \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}}$$

и известное соотношение

$$\frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}},$$

будем иметь

$$Q_* = - \sum_{i=1}^n \beta \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}} = - \sum_{i=1}^n \beta \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}}.$$

Но так как

$$\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (\dot{x}_i^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial \dot{q}},$$

то

$$Q_* = - \sum_{i=1}^n \frac{\beta \dot{x}_i^2}{2} = - \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2.$$

Входящая сюда сумма

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \frac{\dot{x}_i^2}{2} \quad (2.3)$$

формально сходна с выражением кинетической энергии и ее называют *диссипативной функцией Рэлея*. Способ, использованный выше при построении выражения (1.4) для кинетической энергии, в данном случае также приведет к компактному выражению

$$\Phi = \frac{1}{2} b \dot{q}^2, \quad (2.4)$$

где b — обобщенный коэффициент вязкости.

Окончательно приходим к следующему выражению для обобщенной силы трения:

$$Q_* = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = - b \dot{q}. \quad (2.5)$$

Так как по-прежнему $T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2$, $U = \frac{1}{2} c q^2$, то уравнение Лагранжа (2.1) принимает вид

$$a \ddot{q} + b \dot{q} + c q = 0. \quad (2.6)$$

При не слишком больших значениях обобщенного коэффициента вязкости, когда $b < 2\sqrt{ac}$, общее решение

дифференциального уравнения (2.6) имеет вид

$$q = e^{-\lambda t} (C_1 \sin k_2 t + C_2 \cos k_2 t), \quad (2.7)$$

где

$$\lambda = \frac{b}{2a}, \quad k_2 = \sqrt{k^2 - \lambda^2}, \quad (2.8)$$

а константы C_1 и C_2 определяются из начальных условий

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0$$

в форме

$$C_1 = \frac{\dot{q}_0 + \lambda q_0}{k_2}, \quad C_2 = q_0.$$

Другая форма решения имеет вид

$$q = A e^{-\lambda t} \sin(k_2 t + \alpha), \quad (2.9)$$

где

$$A = \sqrt{\frac{(\dot{q}_0 + \lambda q_0)^2}{k_2^2 - \lambda^2} + q_0^2}, \quad \tan \alpha = \frac{q_0 \sqrt{k^2 - \lambda^2}}{\dot{q}_0 + \lambda q_0}.$$

Как видно из (2.7) или (2.9), движение представляет собой затухающие колебания с постоянной частотой, но

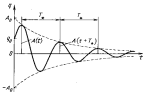


Рис. 2.1

постепенно убывающими амплитудами, так что процесс в целом характеризуется монотонным убыванием амплитуд (строго говоря, этот термин относится только к незатухающему процессу гармонических колебаний) — см. рис. 2.1.

Огибающие кривой процесса определяются функциями

$$A = \pm A_0 e^{-\lambda t}, \quad (2.10)$$

где A_0 — начальная ордината огибающей.

Угловая частота свободных затухающих колебаний определяется выражением

$$k_2 = \sqrt{k^2 - \lambda^2} = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \quad (2.11)$$

соответственно длительность одного цикла составляет

$$T_2 = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{4\pi a}{\sqrt{4ac - b^2}}.$$

Число всего влияния трения на собственную частоту пропорционально малю, т. е. можно принять $k_2 \approx k$, $T_2 \approx T$.

Последовательность максимальных отклонений следует закону геометрической прогрессии, так как согласно (2.10) отношение двух последовательных максимальных отклонений $A(t):A(t+T_2)$, взятых при интервале времени T_2 , является постоянной величиной, равной $e^{-\lambda T_2}$. Логарифмический показатель этого отношения называется логарифмическим декрементом; он равен

$$\Delta = \lambda T_2 = \frac{2\pi b}{\sqrt{4ac - b^2}} \approx \frac{\pi b}{\sqrt{ac}}. \quad (2.12)$$

Логарифмический декремент служит удобной количественной характеристикой темпа затухания свободных колебаний.

При достаточно больших значениях коэффициента вязкого трения, когда $b > 2\sqrt{ac}$, общее решение дифференциального уравнения (2.6) вместо (2.7) запишется в виде

$$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (2.13)$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Постоянные интегрирования определяются через начальные условия выражениями

$$C_1 = \frac{-\lambda_2 q_0 + \dot{q}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad C_2 = \frac{-\lambda_1 q_0 + \dot{q}_0}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Движение, описываемое выражением (2.13) — неколебательное (рис. 2.2); при любых начальных условиях величина $\dot{q}$ и $\ddot{q}$ экспоненциально стремятся к нулю.

В случае, когда $\delta = 2\sqrt{ac}$ (критическое затухание), решение дифференциального уравнения (2.6) имеет вид

$$q = e^{-at} [q_0 + (\dot{q}_0 + \dot{q}_s)t] \quad (2.14)$$

и по характеру не отличается от показанного на рис. 2.2.

Обратимся к предположительно рассматриваемому движению на фазовой плоскости и найдем ее случай относительно малого трения (см. выражение (2.8)). Обозначим выражение скорости

$$\dot{q} = Ae^{-at} [k_a \cos(k_a t + \alpha) - k_b \sin(k_a t + \alpha)] \quad (2.15)$$

и будем рассматривать систему (2.9), (2.15) как уравнение фазовых траекторий в параметрической форме. На рис. 2.3,а изображены две типичные фазовые траектории; они представляют собой спирали, закручивающиеся

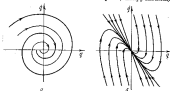


Рис. 2.3

по началу координат — особую точку, которая в данном случае называется *устойчивым фокусом*.

В случае относительно большого трения, когда движение описывается решением (2.13), для скорости находим:

$$\dot{q} = C_1 e^{at} + C_2 e^{at}. \quad (2.16)$$

Рассматривая (2.13) и (2.16) как уравнения фазовых траекторий в параметрической форме, приходим к фазовой диаграмме, показанной на рис. 2.3,б. В данном случае начало координат является особой точкой типа *устойчивой узлы*.

Пример 2.1. По экспериментальной амплитудно-фазовой характеристике системы с одной степенью свободы установлено, что за один цикл амплитуда уменьшается на 40 %. Определить, в какой мере трение и жесткость повлияло на частоту колебаний. Пренебрежимо малым логарифмическим decrement

$$\Delta = \Delta_T = \ln \frac{1}{1 - 0.4} = 0.511,$$

откуда

$$\Delta = \frac{0.511}{T_d} = \frac{0.511}{2\pi} \sqrt{k^2 - b^2}.$$

Решая это уравнение, находим, что затухание Δ^2 весьма мало по сравнению с Δ^2 :

$$\Delta^2 = 0.000123.$$

Собственная частота колебаний

$$k_n = \sqrt{k^2 - b^2} = 0.9974$$

отличается от собственной частоты системы без трения всего на 0.3 %.

Из этого примера видно, что даже при значительном затухании колебаний (почти двукратное уменьшение амплитуды за один цикл) сила трения незначительно влияет на частоту колебаний.

2. Нелинейное трение. При обработке опытных амплитудно-фазовых характеристик свободных затухающих колебаний чаще всего обнаруживается, что уменьшение амплитуд не следует закону геометрической прогрессии; это служит признаком того, что трение отличается от линейного.

Нелинейная зависимость сил трения от скорости может быть описана различными аналитическими выражениями. Примем, что обобщенная сила трения Q_s пропорциональна n -й степени скорости, причем показатель степени $n \neq 1$ зависит от конкретных свойств среды трения; эту зависимость запишем в форме (0.8) или в эквивалентной форме

$$Q_s = -b|\dot{q}|^{n-1}\dot{q}. \quad (2.17)$$

В таком случае основное дифференциальное уравнение имеет вид

$$a\ddot{q} + b|\dot{q}|^{n-1}\dot{q} + cq = 0. \quad (2.18)$$

Точное решение этого нелинейного дифференциального уравнения получить в замкнутой форме невозможно, но существует ряд способов, позволяющих построить приближенное аналитическое описание движения. Наилучшим из них.

Метод усредненного баланса. Согласно этому методу предполагается, что искомое движение близко к гармоническому, но характеризуется медленно изменяющейся амплитудой и постоянной частотой, для которой можно принять значение k , соответствующее консервативной системе без трения. Таким образом, рассматривая колебания вблизи одной из точек колебаний и считая начало отсчета

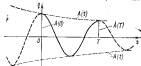


Рис. 2.4

времени с моментом, когда отклонение достигает максимума (рис. 2.4), можно приближенно принять, что движение описывается функцией

$$q = A(t) \cos kt, \quad (2.15)$$

где $A(t)$ — медленно меняющаяся функция времени, т. е. $AT \ll A$, $A \ll Ak$. Тогда в выражении обобщенной скорости

$$\dot{q} = -Ak \sin kt + \dot{A} \cos kt$$

можно пренебречь вторым слагаемым и приближенно принять

$$\dot{q} = -Ak \sin kt.$$

По выражению (2.17) образуем обобщенную силу трения:

$$Q_1 = b(Ak)^n |\sin kt|^{n-1} \sin kt.$$

Работа силы трения за рассматриваемый цикл равна

$$U = \int_0^T Q_1 \dot{q} dt = -bk^{n+1} \int_0^T [A |\sin kt|]^{n+1} dt.$$

В этом вычислении можно приближенно принять, что в течение рассматриваемого периода амплитуда A постоянна. Тогда получим

$$U = -4b(Ak)^{n+1} \int_0^{T/2} \sin^{n+1} ktdt = -4bA^{n+1}k^n \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} \varphi d\varphi.$$

Входящий сюда интеграл обозначим буквой I ; он выражается через гамма-функцию Γ (для его интеграла второго рода), для которой имеются готовые таблицы:

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} \varphi d\varphi = \frac{2^{n-1} \pi^2 \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi(n+1) \Gamma(n)} \quad (2.20)$$

С помощью таких таблиц можно вычислять следующие значения I в зависимости от показателя n :

n	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
I	1,000	0,875	0,785	0,718	0,662	0,624	0,589

Омечательно также

$$U = -4bA^{n+1}k^n I(n). \quad (2.21)$$

Полученное выражение равно изменению энергии системы за рассматриваемый цикл. Так как в начале и конце рассматриваемого цикла кинетическая энергия равна нулю, то изменение полной энергии определяется изменением потенциальной энергии Π ; конечно, при вычислении этого изменения необходимо учесть разницу между максимальными отклонениями $A(0)$ и $A(T)$.

В начале цикла $\Pi(0) = \frac{1}{2} \epsilon A^2(0)$. В конце цикла

$$\Pi(T) = \frac{1}{2} \epsilon A^2(T).$$

Средствительно, выражение (отрицательное) потенциальной энергии равно

$$\Delta \Pi = \frac{1}{2} \epsilon [A^2(T) - A^2(0)] = \frac{1}{2} \epsilon [A(T) + A(0)] [A(T) - A(0)].$$

Сумму, стоящую в правой части равенства в первом слагаемом, приближенно заменим через $2A(0)$, а разность, входящую во второе слагаемое, обозначим через ΔA . Тогда

будет

$$\Delta \Pi = \varepsilon A \Delta A, \quad (2.22)$$

(Здесь вместо $A(0)$ можно написать просто A .) Приравняв работу (2.21) приращению энергии (2.22), получим уравнение в конечных разностях

$$-4bA^{n+1}k^2J(\varepsilon) = \varepsilon A \Delta A,$$

или

$$\Delta A = -\frac{4b(Ak)^2J(\varepsilon)}{\varepsilon} \quad (2.23)$$

Это уравнение складывает приращение (отрицательное) амплитуды за один цикл со значением амплитуды в начале этого цикла. Рассматривая огибающую как непрерывную кривую, описываемую дифференцируемой функцией времени $A = A(t)$, приближенно приходим

$$\Delta A = T \frac{dA}{dt} = \frac{2\pi}{k} \frac{dA}{dt}.$$

Тогда уравнение в конечных разностях (2.23) примет вид дифференциального уравнения для огибающей:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{2bk^{n+2}J(\varepsilon)}{\pi\varepsilon} A^n. \quad (2.24)$$

При интегрировании этого уравнения нужно различать два случая: когда $n=1$ и когда $n \neq 1$.

В случае $n=1$ (линейное трение) согласно (2.20) $J = \pi/4$, и уравнение (2.24) принимает форму

$$\frac{dA}{dt} = -kA. \quad (2.25)$$

Здесь $k = \frac{b\pi^2}{2\varepsilon} = \frac{b}{2\varepsilon}$. Решение линейного уравнения (2.25) имеет вид

$$A = A_0 e^{-kt}, \quad (2.26)$$

где A_0 имеет смысл начальной ординаты огибающей. Таким образом, при $n=1$ мы приходим к известному (точному) результату (2.10). Хотя это соотношение относится только к огибающей (из-за различия между k и k_0 график движения будет неидеально экспоненциальным), но это убедительно свидетельствует в пользу применимости метода энергетического баланса.

В случае $n \neq 1$ уравнение (2.24) нелинейное, но его точное решение нетрудный не вызывает, так как поременимо разделим:

$$\frac{dA}{A^n} = -\frac{2bk^{n+2}J(\varepsilon)}{\pi\varepsilon} dt. \quad (2.27)$$

После интегрирования при начальном условии $A(0) = A_0$ находим зависимость $A(t)$:

$$A = \frac{A_0}{\sqrt[n]{1 + \frac{2b(n-1)k^{n+2}J(\varepsilon)A_0^{n-1}}{\pi\varepsilon} t}}. \quad (2.28)$$

Конкретный вид этой зависимости определяется значением показателя n .

Прежде всего остановимся на случае, когда $n=2$ (квадратическое трение); при этом из (2.28) получаем

$$A = \frac{A_0}{1 + \frac{4bk^3A_0}{3\pi\varepsilon} t}, \quad (2.29)$$

т. е. огибающая имеет вид гиперболы.

С помощью решения (2.28) можно получить огибающую и для другого частного случая, когда $n=0$. Согласно (2.17) этому случаю соответствует выражение

$$Q_n = -b \frac{1}{|v|}, \quad (2.30)$$

определяющее силу трения, величина которой не зависит от величины скорости. Подставив $n=0$ в общее решение (2.28), получим

$$A = A_0 - \frac{2b}{\pi\varepsilon} t, \quad (2.31)$$

т. е. убывание амплитуд следует линейному закону, а амплитуды образуют арифметическую прогрессию; этот результат также соответствует точному решению.

На рис. 2.5 показаны первые огибающие для трех указанных выше значений n . Общий вид фазовых траек-



Рис. 2.5

торой такой же, как и в случае линейного трения (рис. 2.3, а).

Отметим, что при $n \neq 1$ отношение двух соседних наибольших отклонений колеблющихся отсюда можно выключить, что логарифмический декремент оказывается переменным величиной, зависящей от амплитуды:

$$\Lambda = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}}$$

где i — номер рассматриваемого цикла. Если, как это предполагалось выше, разность $\Delta A_i = A_{i+1} - A_i$ мала по сравнению с A_i , то можно записать:

$$\Lambda = \ln \frac{A_{i+1} - \Delta A_i}{A_{i+1}} = \ln \left(1 - \frac{\Delta A_i}{A_{i+1}} \right) \approx - \frac{\Delta A_i}{A_i}.$$

Подставив сюда выражение (2.23), получим зависимость логарифмического декремента от амплитуды:

$$\Lambda = \frac{6m^2 g I(s)}{c} A^{n-1}.$$

Отсюда непосредственно видно, что лишь при $n = 1$ логарифмический декремент не зависит от амплитуды колебаний и остается постоянным в процессе колебаний. При $n = 2$ в процессе затухания логарифмический декремент убывает вместе с увеличением амплитуды, а при $n = 0$ (нулевой трение), наоборот, он увеличивается с увеличением амплитуды.



Рис. 2.4

Зависимость логарифмического декремента от амплитуды колебаний схематически показаны на рис. 2.4.

Метод моделирования называется аналогом. Этот приближенный метод был предложен Ван дер Полем для широкого класса задач о колебаниях систем со слабой нелинейностью, когда дифференциальное уравнение движения можно представить в виде

$$\ddot{q} + k_0^2 q = f(q, \dot{q}), \quad (2.32)$$

где $f(q, \dot{q})$ — функция, состоящая из относительно малых нелинейных членов. Например, в задаче о затухающих свободных колебаниях систем с нелинейным трением можно переписать уравнение (2.18) в виде (2.32), положив

$$f(q, \dot{q}) = -\frac{1}{2} |\dot{q}|^{n-1} \dot{q}. \quad (2.33)$$

Рассмотрим решение уравнения (2.32) по методу медленно меняющейся амплитуды для общего случая, а затем вернемся к частному случаю (2.33).

Решение дифференциального уравнения (2.32) запишем в виде

$$q = A \cos(k_0 t - \varphi), \quad (2.34)$$

но предполагается, что A и φ — функции времени.

В зависимости от свойств произвольных функций $A(t)$ и $\varphi(t)$ уравнение (2.34) может описывать более или менее близкий к гармоническим колебаниям с частотой k_0 . При постоянных A и φ уравнение (2.34) описательно точно описывает гармонические колебания. В случае, когда A и φ — почти постоянные, т. е. медленно меняющиеся функции времени, выражение (2.34) описывает колебания с медленно меняющейся амплитудой и фазой; этот случай типичен для систем со слабой нелинейностью, в частности для рассматриваемых здесь систем.

Если подставить выражение (2.34) в основное уравнение задачи (2.32), то получится уравнение, содержащее две неизвестные функции A и φ . Для определенности заменим одной функцией q двумя функциями A и φ можно указать какое-либо дополнительное соотношение между последними; Ван дер Полю предложил принять в качестве такого соотношения следующее:

$$\dot{A} \cos(k_0 t - \varphi) + A \dot{\varphi} \sin(k_0 t - \varphi) = 0. \quad (2.35)$$

Если теперь продифференцировать выражение (2.34), то с учетом (2.35) получим весьма простое выражение для скорости:

$$\dot{q} = -k_0 A \sin(k_0 t - \varphi), \quad (2.36)$$

— такое же, как если бы величинами A и φ были постоянными. Поэтому в выражение для ускорения войдет относительно простым и не будет содержать вторых

производных $\dot{A}$ и $\dot{\varphi}$:

$$\ddot{q} = -\dot{A}k_0 \sin(k_0 t - \varphi) - Ak_0^2 \cos(k_0 t - \varphi) + \\ + Ak_0 \dot{\varphi} \cos(k_0 t - \varphi). \quad (2.35)$$

Подстановка выражения (2.34), (2.36) и (2.37) в заданное уравнение (2.32), получим уравнение первого порядка

$$-\dot{A}k_0 \sin \varphi + Ak_0 \dot{\varphi} \cos \varphi = f[A \cos \varphi, -Ak_0 \sin \varphi], \quad (2.38)$$

где $\varphi = k_0 t - \varphi$.

Из соотношений (2.35) и (2.38) можно найти следующие выражения для производных $\dot{A}$ и $\dot{\varphi}$:

$$\dot{A} = -\frac{1}{k_0} f[A \cos \varphi, -Ak_0 \sin \varphi] \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = \frac{1}{Ak_0} f[A \cos \varphi, -Ak_0 \sin \varphi] \cos \varphi. \quad (2.39)$$

До сих пор все выкладки были вполне строгими, и лишь теперь делается упреждение, касающееся некоторой приближенности к решению. Предполагая, что рассматриваемая система близка к линейной, мы можем считать, что переменные A и φ не успевают получить заметных приращений за один цикл $2\pi/k_0$ и что производные $\dot{A}$ и $\dot{\varphi}$ постоянны в течение любого одного цикла. Поэтому, хотя эти производные выражаются сложными колебательными функциями времени (2.39), мы позволим большой ошибкой замена этих функций их средними за период $2\pi/k_0$ значениями:

$$\dot{A} = -\frac{1}{2\pi k_0} \int_0^{2\pi} f[A \cos \varphi, -Ak_0 \sin \varphi] \sin \varphi d\varphi, \\ \dot{\varphi} = \frac{1}{2\pi A k_0} \int_0^{2\pi} f[A \cos \varphi, -Ak_0 \sin \varphi] \cos \varphi d\varphi. \quad (2.40)$$

Конечно, при интегрировании в правых частях величины A считается постоянной. Именно эта операция упростила и сделала существование метода возможным уменьшая амплитуду.

Уравнения (2.40), запишем в более коротком виде:

$$\dot{A} = \frac{\Phi(A)}{2\pi k_0}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\Psi(A)}{2\pi k_0 A} \quad (2.41)$$

(укороченные уравнения Ван дер Поля), причем

$$\Phi(A) = -\int_0^{2\pi} f[A \cos \varphi, -Ak_0 \sin \varphi] \sin \varphi d\varphi, \\ \Psi(A) = \int_0^{2\pi} f[A \cos \varphi, -Ak_0 \sin \varphi] \cos \varphi d\varphi. \quad (2.42)$$

Таким образом, прежде всего вычислять интегралы (2.42) в предположении, что A — постоянная величина. После этого интегрируются дифференциальные уравнения (2.41); конечно, на этом этапе выкладки уже принимаются, что величина A — переменная.

Возвращаясь к задаче о свободных колебаниях систем с нелинейным трением, обратим с помощью (2.33) выражения (2.42):

$$\Phi(A) = -\int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{b}{a} + [-Ak_0 \sin \varphi]^{n-1} (-Ak_0 \sin \varphi) \right\} \sin \varphi d\varphi = \\ = -\frac{4bA^n k_0^n}{a} \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} \varphi d\varphi, \\ \Psi(A) = 0$$

Интеграл, входящий в выражении $\Phi(A)$, уже встречался выше и был обозначен через $I(n)$ (см. (2.20)); следовательно

$$\Phi(A) = -\frac{4bA^n k_0^n}{a} I(n).$$

Теперь согласно (2.41) получим укороченное уравнение

$$\dot{A} = -\frac{3bA^n k_0^{n-1} I(n)}{a}.$$

Если теперь положить $a = c/k_0^n$, то мы вновь приходим к уравнению (2.34). Полученному мыте методом энергетического баланса в предположении, что $k \approx k_0$. Следовательно, дальнейшее решение приводит вновь к уравнению для свободной (2.28).

Хотя в данном случае метод медленно меняющихся амплитуд не дал новых результатов, но даже мы увидим, что он окажется весьма полезным при решении других колебательных задач.

3. Гистерезисное трение. При циклическом деформировании упругих тел, даже при малых напряжениях наблюдается некоторое нарушение закона Гука, выражающееся в появлении петли гистерезиса; на рис. 2.7 показана такая петля в координатных осях напряжения σ — деформация ϵ . Расстояние между ветвями петли гистерезиса можно считать энергией, рассеиваемую за один цикл колебаний в единицу объема материала. Так как расстояние между ветвями обычно весьма мало, точную форму петли в экспериментах установить затруднительно. В то же время площадь петли может быть определена достаточно надежно.



Рис. 2.7

Установлено, что площадь петли гистерезиса для большинства конструктивных материалов практически не зависит от темпа деформирования (т. е. от частоты процесса), но зависит от амплитуды деформации.

Силаовое сопротивление не зависит ни от частоты колебаний, ни от амплитуды. Эта зависимость обычно принимается в форме

$$Q = \alpha A^{n+1}, \quad (2.43)$$

где α и n — постоянные, определяемые из экспериментов.

Такая зависимость принципиально отличается от линейной зависимости Q от амплитуды A (2.31), в которую входит амплитуда колебаний только в степени $n+1$, однако в выражении (2.31) входит также и частота k , от которой не зависит коэффициент α выражения (2.43).

Для определения закона, связывающего затухание колебаний при гистерезисном трении, вновь воспользуемся уравнением энергетического баланса и приравняем рассеиваемую энергию (ее следует взять со знаком ми-

нус) приращению энергии (2.22) за один период:

$$-\alpha A^{n+1} = \epsilon \Delta A.$$

Отсюда следует уравнение в конечных разностях

$$\Delta A = -\frac{\alpha}{\epsilon} A^n,$$

которое, как и (2.23), можно заменить дифференциальным уравнением

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\alpha}{2\pi\epsilon} A^n. \quad (2.44)$$

После интегрирования этого уравнения при начальном условии $A(0) = A_0$ получим

$$A = \frac{A_0}{\sqrt[n]{1 + \frac{\alpha(n-1)A_0^{n-1}}{2\pi\epsilon}}}, \quad (2.45)$$

Отметим, что в частных случаях $n=0$, $n=1$, $n=2$ здесь вновь получаются результаты, эмпирически показанные выше на рис. 2.5. Любопытно, что при гистерезисном трении таким образом получается экспоненциальная зависимость $A(t)$ (если $n=1$), которая типична для случая линейного вязкого трения.

Напомним, однако, что вязкое трение можно считать не только частным случаем нелинейного трения (2.17), но и частным случаем принятой здесь основной зависимости (2.43); в общем случае оно характеризуется значением $n=0$.

4. Ударное демпфирование. В некоторых системах основной причиной затухания колебаний является не непрерывное действие сил трения, а мгновенные потери энергии при соударениях. Рассмотрим случай, когда такие соударения происходят всякий раз, когда система проходит через положение равновесия, причем мгновенная потеря энергии пропорциональна энергии системы перед соударением. В этом случае мгновенные потери энергии удобно представить через скорость системы в период соударения;

$$Q = b v^2, \quad (2.46)$$

где b — некоторый постоянный коэффициент, имеющий размерность массы.

Рассмотрим какой-либо полуцикл колебаний, который начинается при максимальном отклонении $A(0)$.

В течение первой четверти цикла система движется с постоянной энергией $\frac{1}{2}cA^2(0)$, и квадрат скорости в конце этой четверти цикла равен $v^2 = \frac{c}{2}A^2(0)$. После этого происходит соударение и в результате этого — мгновенно вторая энергия на величину (2.46); далее система начинает движение, обладая энергией

$$\frac{cA^2(0)}{2} - \frac{1}{2}cA^2(0) = \frac{cA^2(0)}{2}\left(1 - \frac{2\alpha}{a}\right), \quad (2.47)$$

которая остается постоянной в течение всей второй четверти цикла. Поэтому, в момент, завершающий эту четверть цикла, потенциальная энергия равна величине (2.47):

$$\frac{cA^2(T/2)}{2} = \frac{cA^2(0)}{2}\left(1 - \frac{2\alpha}{a}\right).$$

Отсюда находим отношение отклонений в начале и конце первого полуцикла:

$$\frac{A(0)}{A(T/2)} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha/a}}.$$

Для следующего полуцикла аналогично можно получить

$$\frac{A(T/2)}{A(T)} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha/a}}.$$

Сравнивая вышесказанное отношение $A(0)$ и $A(T)$, находим

$$\frac{A(0)}{A(T)} = \frac{1}{1 - 2\alpha/a}, \quad (2.48)$$

т. е. отношение последовательных максимальных отклонений является постоянной величиной. Отсюда можно заключить, что огибающая кривой затухающих колебаний представляет собой экспоненту

$$A = Ae^{-\lambda t},$$

которая характеризуется логарифмическим декрементом

$$\Lambda = \lambda T = \ln \frac{1}{1 - 2\alpha/a}.$$

При малых отношениях $2\alpha/a$ можно принять

$$\Lambda \approx 2\alpha/a. \quad (2.49)$$

Фазовая диаграмма для рассматриваемого процесса представлена на рис. 2.8; она состоит из отрезков осей $\dot{q}$ и эллиптических дуг.

§ 3. Системы с одной степенью свободы при нелинейной восстанавливающей силе

1. Общие понятия. В некоторых случаях переменная при колебаниях может быть настолько значительна, что в разложении потенциальной энергии (1.8) необходимо учитывать не только члены, содержащие q^2 , но и последующие члены. Иногда разложение (1.8) вообще не содержит квадратичного члена и начинается с члена выше второй степени. Отметим также, что в некоторых системах потенциальная энергия, соответствующая состоянию равновесия, не имеет аналитического минимума и вообще неопределима в виде (1.8).

Во всех этих случаях обобщенная восстанавливающая сила нелинейна и соответственно, уравнение дифференциальное уравнение движения.

Простейшим примером может служить задача о больших колебаниях математического маятника (рис. 3.1).

Если принять за обобщенную координату φ угол отклонения маятника от вертикали, то переменная масса Λ , на которой находится груз, равна

$$\Lambda = l(1 - \cos \varphi),$$

соответственно потенциальная энергия определяется выражением

$$П = mg\Lambda = mgl(1 - \cos \varphi).$$

При весьма малых значениях φ можно принять

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2},$$

после чего потенциальная энергия оказывается квадратичной функцией обобщенной координаты φ , и мы приходим к линейной задаче.



Рис. 2.8



Рис. 3.1

Такое представление становится недостаточно точным при значительных углах отклонения. Для точного решения нужно обратиться к уравнению Лагранжа (1.1)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\alpha g^2 \sin \varphi.$$

Так как кинетическая энергия равна

$$T = \frac{m^2 \dot{\varphi}^2}{2},$$

то согласно (1.1) получим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi} + \frac{F}{T} \sin \varphi = 0.$$

В более общем случае дифференциальное уравнение имеет вид

$$a\ddot{\varphi} + F(\varphi) = 0, \quad (3.1)$$

где

$$F(\varphi) = \frac{dU}{d\varphi}$$

представляет собой функцию с обратным знаком обобщенную восстанавливающую силу, являющуюся нелинейной функцией координаты φ .

Зависимость $F(\varphi)$ называют каллиброванной характеристикой, или характеристикой жесткости. На рис. 3.2 показаны некоторые нелинейные системы с одной степенью свободы и соответствующие им характеристики жесткости. Среди приведенных здесь характеристик можно выделить характеристики симметричные (рис. 3.2, а, б, в) и несимметричные (рис. 3.2, г), характеристики с разрывами (рис. 3.2, в), характеристики гладкие (рис. 3.2, а) и ломаные (рис. 3.2, б, в, г).

2. Точные решения. В отмеченных выше случаях рассмотрение свободных колебаний сводится к интегрированию нелинейного дифференциального уравнения (3.1). Выразив обобщенное ускорение через обобщенную скорость $\dot{\varphi} = \dot{q} \frac{dq}{d\varphi}$, получим вместо (3.1) уравнение второго порядка, связывающее скорость $\dot{q}$ с координатой q :

$$\dot{q} \frac{d\dot{q}}{dq} + \frac{F(q)}{a} = 0, \quad (3.2)$$

Предположим, что система совершает колебательное движение, и выберем за начало отсчета времени момент, когда обобщенная скорость равна нулю и достигнута

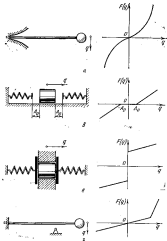


Рис. 3.2

любимого отклонения системы от положения равновесия ($q_{\text{max}} = A$)^{*}.

^{*} При невыполнении зависимости $F(q)$ в начале начальных координат может оказаться, что обобщенная скорость в нуль является не обратным. Так, например, если восстанавливающая

Разделив переменные в уравнении (3.2) и интегрируя его, имеем

$$\int_a^q \dot{q} dq = -\frac{1}{a} \int_a^q P(q) dq,$$

или

$$\frac{\dot{q}^2}{2} = -\frac{1}{a} \int_a^q P(q) dq - \frac{1}{a} \int_q^A P(q) dq. \quad (3.3)$$

Это соотношение выражает закон сохранения энергии: кинетическая энергия и произвольный момент (или убывание потенциальной энергии при переходе системы из крайнего положения в рассматриваемое. На (3.3) наладим обобщенную скорость в функции координаты:

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{a} \int_a^q P(q) dq}. \quad (3.4)$$

Знак минус перед корнем выбран потому, что в рассматриваемом интервале движения (первый полуоборот) обобщенная скорость отрицательна.

Дальнейшее интегрирование соотношения (3.4) дает время в функции обобщенной координаты q :

$$t = -\int_a^q \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{a} \int_a^q P(q) dq}} = \int_q^A \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{a} \int_q^A P(q) dq}}. \quad (3.5)$$

Если характеристика консервативной силы симметрична, т. е. функция $P(q)$ четная, то время перехода системы из крайнего положения ($q_{\max} = A$) в положение равновесия ($q=0$) составит четверть периода; следовательно

в устойчивом положении равновесия материалу сообщить достаточно большую начальную скорость $v > 2\sqrt{a}$, то движение бесконечно продолжительное (периодическое движение обобщенной скорости). Впрочем, и в этом отношении предостережение можно заметить: колебательная система, так или иначе обобщенной скорости колебаний около некоторого среднего значения,

также,

$$\frac{T}{4} = \int_a^A \frac{dq}{\sqrt{\left(\frac{2}{a}\right) \int_q^A P(q) dq}};$$

соответственно частота свободных колебаний определяется формулой

$$k = \frac{2\pi}{T} = \pi \int_a^A \frac{dq}{\left(\frac{2}{a}\right) \int_q^A P(q) dq}. \quad (3.6)$$

Нелинейное решение не дает возможности найти в замкнутом виде закон движения $q(t)$, но превращает задачу определения частоты свободных колебаний в квадратуру. Во всех случаях для вычислений по формуле (3.6) эффективно использование ЭВМ, хотя иногда их можно завершить в аналитической форме.

Остановимся на частном случае чисто нелинейной характеристики, которая не содержит линейного члена,

$$P(q) = \beta q^{2n-1}, \quad (3.7)$$

где β и n — постоянные. Последовательно наладим

$$\begin{aligned} \int_a^A P(q) dq &= \frac{\beta}{2n} (A^{2n} - a^{2n}), \\ \int_a^A \frac{dq}{\sqrt{\frac{\beta}{2n} (A^{2n} - q^{2n})}} &= \sqrt{\frac{2n}{\beta}} A^{2-n} \int_a^A \frac{dq}{V 1 - \gamma^n}, \end{aligned}$$

Заменяя здесь $\gamma^n = \eta$, получим для внешнего вида интеграла следующее выражение через гамма-функцию:

$$\int_a^A \frac{dq}{\sqrt{1 - \gamma^n}} = \frac{1}{2n} \int_0^1 \eta^{\frac{1}{n}-1} (1 - \eta)^{-\frac{1}{2}} d\eta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)}{2n \Gamma\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Окончательно по формуле (3.6) находим

$$k = T_n(a) \sqrt{\frac{2}{a}} A^{n-1}, \quad (3.8)$$

ГП*

$$I_n(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi n}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)} \quad (3.9)$$

Значения $I_n(x)$ даны в следующей таблице:

n	0,5	1	1,5	2	2,5
I_n^*	1,111	1,000	0,949	0,9472	0,9225

Из формулы (3.8) видно, что при $n \neq 1$ частота свободных колебаний зависит от ее амплитуды.

Типичная для нелинейных систем зависимость частоты от амплитуды не позволяет считать частоту параметром самой системы; поэтому для нелинейных систем обычно пользуются не терминем «собственные частоты», а терминем «частота свободных колебаний».

Как мы видели, даже при сравнительно несложном виде зависимости (3.7) вычисления частоты приводят к неэлементарным функциям. Часто вместо этих вычислений

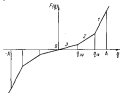


Рис. 3.3

приходится делать приближения, так как входящий в формулу (3.8) интеграл не сводится к табулированным функциям. Однако в линейном случае, когда нелинейная характеристика восстанавливаемой силы состоит из линейных участков (рис. 3.3), можно получить независимо от (3.6) точное решение задачи о свободных колеба-

ния, пользуясь способом непрерывного интегрирования (прямой интеграции).

Способ основан на последовательном решении ряда линейных задач, относящихся к отдельным участкам. Постоянные интегрирования определяются на начальных условиях, расклад перепада от этапа к этапу в условной периодичности.

Пусть кусочно-линейная характеристика системы симметрична и состоит из n участков, границы которых определяются значениями координат $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ (n индексов указывают номера смежных участков, причем нумерация идет от крайнего участка к началу). Заданная, например, нелинейная условная $q(0) = A$, $\dot{q}(0) = 0$ в интегрируя линейное дифференциальное уравнение, относимое к первому этапу, мы сможем найти время движения на первом этапе t_1 и соответствующую концу этапа скорость $\dot{\varphi}_1$. Принимая известные значения φ_1 и $\dot{\varphi}_1$ за начальное условие движения на втором этапе, можно найти время движения t_2 и скорость $\dot{\varphi}_2$ в конце этапа. Наконец, на n -м этапе, которому соответствует переходный через начало координат участок характеристики, можно найти время t_n прохождения n -го этапа (от его начала φ_{n-1} до $\varphi = 0$). В данном случае на этом можно остановиться, так как из-за симметричности характеристики и симметрии движения сумма найденных промежутков времени равна четверти периода свободных колебаний:

$$\frac{T}{4} = t_1 + t_2 + \dots + t_n.$$

Отсюда можно определить частоту свободных колебаний:

$$k = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2(t_1 + t_2 + \dots + t_n)}. \quad (3.10)$$

В случае несимметричной характеристики необходимо продолжить определение отрезков времени t_n , соответствующих отрицательным значениям координаты φ . Вычисления начинаются в момент времени, когда обращается в нуль скорость $\dot{\varphi}$; отсюда вычисляются таким образом отрезки времени равнополупериоду свободных колебаний.

Конечно, уже при трех-четыре участках аналитические выкладки становятся громоздкими и необходимо обращаться к машинному счету на ЭВМ.

Наилучший способ, в принципе, можно применить и в тех случаях, когда заданная характеристика жесткости произвольная; для этого нужно выписать ее ломаной, составленной из достаточно большого числа прямых или кривых отрезков. Поскольку для дальнейших выкладок потребуется ЗВМ, здесь уместно напомнить, что с помощью ЗВМ можно организовать и непосредственное численное нахождение частот свободных колебаний по ранее полученному выражению (3.6).



Рис. 14

Пример 3.1. Найти частоту малых свободных горизонтальных колебаний круглого однородного диска, удерживаемого при помощи пружины с жесткостью k_1 (рис. 1.4). Начальное движение по горизонтальной плоскости происходит без скольжения. При вертикальном движении ось пружины, l — ее первоначальная длина, m — масса диска, R — радиус диска, ω — его вращ. l — длина пружины в недеформированном состоянии, c_1 — ее коэффициент жесткости.

Примером на обобщенную координату x рассмотрим движение центра диска, исходя из канонической записи:

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{I\dot{\phi}^2}{2N^2}$$

Подставляя $I = mR^2/2$, находим

$$T = \frac{3}{4} m \dot{x}^2,$$

т. е. инерционный коэффициент равен

$$\alpha = \frac{3}{2} m. \quad (4)$$

Для определения потенциальной энергии пружины предположим, что удлинение при горизонтальном смещении центра диска

$$\Delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l.$$

Следовательно,

$$U = \frac{1}{2} c_1 [\sqrt{l^2 + x^2} - l]^2.$$

Разлагая полученное выражение в ряд в окрестности точки нулевого удлинения, находим

$$U = \frac{c_1 x^2}{8l};$$

следует, что характеристика восстанавливающей силы чистая кубическая:

$$F(x) = \frac{3c_1}{8l} x^3.$$

Полученное выражение соответствует зависимости (3.7), в которой нужно положить $\beta = c_1/(24l)$, $n = 2$. Тогда по формуле (1.8) и таблице значений $A_n(\alpha)$ найдем полную частоту свободных колебаний диска:

$$\Delta = 0,3472 \sqrt{\frac{c_1}{3m}} \frac{A}{T} = 0,4891 \sqrt{\frac{c_1}{m}} \frac{A}{T}.$$

Пример 3.2. Найти способ колебаний нутряного маятника, между амплитудой и частотой свободных колебаний системы с параметрами (рис. 3.2, 8). Симметричные нулевые-линейные характеристики системы ориентированы вертикально:

$$\begin{aligned} F(x) &= c_1(x + A_0), & x < -A_0 \\ F(x) &= 0, & -A_0 < x < A_0 \\ F(x) &= c_1(x - A_0), & x > A_0 \end{aligned}$$

На первом участке при $x > A_0$ дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + \frac{c_1}{m}(x - A_0) = 0,$$

а его общим решением служат выражения

$$x = C_1 \sin k_0 t + C_2 \cos k_0 t + A_0,$$

в котором $k_0 = \sqrt{c_1/m}$ (m — масса груза). Постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий

$$x(0) = A_0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

и равны

$$C_1 = 0, \quad C_2 = A - A_0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x &= A_0 \sin k_0 t + A_0(1 - \cos k_0 t), \\ \dot{x} &= -(A - A_0)k_0 \sin k_0 t. \end{aligned}$$

Время t_1 прохождения первого участка найдено из условия, что при $t = t_1$ должно быть $x = A_0$:

$$t_1 = \frac{\pi}{2k_0}.$$

При этом скорость в конце первого этапа равна

$$A_2 = -(A - A_0)k_0.$$

Свободное движение на втором участке описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} = 0,$$

высшими резонансы

$$x = D_1 + D_2 t$$

Сопоставляя данное начало отсчета времени с коэффициентом перевода системы с первого участка на второй, определяем постоянные D_1 и D_2 с условием, что $x = A_0$, $\dot{x} = -(A - A_0)k_0$ при $t = 0$. Отсюда следует

$$D_1 = A_0, \quad D_2 = -(A - A_0)k_0,$$

так что из второй связи выразим

$$y = A_0 - (A - A_0)k_0 t.$$

Теперь найдем время, необходимое для переключения системы из положительной характеристики координатной оси в отрицательную, соответствующую координате $x = 0$:

$$t_2 = \frac{A_0}{(A - A_0)k_0}.$$

Таким образом, частота свободных колебаний равна

$$\omega = \frac{2\pi}{t_1 + t_2} = \frac{k_0}{1 + \frac{1}{\pi} \frac{A}{A_0 - 1}}.$$

3. Приближенные способы. Из-за сложности интегрирования, входящих в точную формулу (3.6), для определения частоты свободных колебаний часто пользуются приближенными способами. Конечно, их применимость несколько ограничена из-за нелинейности, которые имеют предостаточно современных ЭВМ; однако эти способы по сих пор остаются весьма полезными средством для выявления общего характера зависимости частоты колебаний от их амплитуды, а также для приближенных расчетов.

Рассмотрим несколько приближенных способов применительно к случаю симметричной характеристики $F(q)$. Отметим, что некоторые из них разработаны для колебаний более широкого круга явлений, чем рассматриваемые в этом параграфе, и будут неоднократно встречаться в последующем изложении.

Простейший способ. Наиболее прост, хотя не всегда достаточно точен, следующий прием. Примем, что колебания в нелинейной системе с симметричной характеристикой описываются законом

$$q = A \sin(kc + \alpha), \quad (3.11)$$

подобно тому как это происходит в линейных системах. Выражение (3.11) является точным решением только

тогда, когда характеристика $F(q)$ линейна. В общем случае подстановка (3.11) в дифференциальное уравнение (3.1) не обращает его в тождество.

Отметим, что в моменты прохождения через нулевые значения рассматриваемые уравнения (3.1) упрощаются выражением (3.11), и потребуем, кроме того, чтобы уравнение (3.1) удовлетворялось также в те моменты, когда обобщенная координата q достигает максимума, т. е. равна A . При этом обобщенное уравнение $\dot{q}$ также максимално по модулю:

$$\dot{q}_{\max} = -Ak^2.$$

Сопоставляя, в указанные моменты должно выполняться равенство

$$-Ak^2 + F(A) = 0,$$

т. е.

$$k^2 = \frac{F(A)}{A^2}. \quad (3.12)$$

Последнее уравнение позволяет легко получить достаточно правильное общее представление о связи частоты k с амплитудой A .

Так, если нелинейная характеристика имеет вид (2.7), то по формуле (3.12) найдем для частоты выражение

$$k = \sqrt{\frac{3A^{n-1}}{2A}} = \sqrt{\frac{3}{2}} A^{n-1},$$

которой коэффициент перед степеню амплитуды (см. точное решение (3.8)), не лишь приближенно определяет значение коэффициента при A^{n-1} ; если, например, $n = 2$,

то по формуле (3.8) найдем $k = 0,8672 \sqrt{\frac{3}{2}} A$, а по приближенной формуле $k = \sqrt{\frac{3}{2}} A$ (ошибка составляет 18 %).

Способ прямой линеаризации. Способ основан на непосредственной (прямой) замене нелинейной характеристики $F(q)$ некоторой эквивалентной линейной функцией. Так, при симметричной характеристике вместо $F(q)$ принимается

$$F_s(q) = cq, \quad (3.13)$$

где c — коэффициент линеаризации, значение которого определяется из следующих соображений. Умножив за-

меняющейся характеристики (3.13) от изменяемой характеристики $F(q)$ зависит от координаты q (рис. 3.5):

$$r(q) = F(q) - cq.$$

В задачах о колебаниях, очевидно, более существенным является значение r при больших значениях координаты q ; поэтому в выражении интегрального уклонения естественно считать роль разностей r при больших значениях координаты q . Примем за меру уклонения произведение

$$rq = [F(q) - cq]q$$

и рассмотрим интегральное квадратическое уклонение

$$S = \int_{-A}^A (rq)^2 dq,$$

Рис. 3.5.

которое, очевидно, зависит от выбора параметра c . Для минимизации этого уклонения воспользуемся условием

$$\frac{dS}{dc} = 0, \quad (3.14)$$

на котором и может быть найдено минимизирующее значение c . После этого задачу можно считать, в сущности, решенной, так как она привела к линейному уравнению.

Итак, задача сводится к минимизации интеграла

$$S = \int_{-A}^A [F(q) - cq]^2 q^2 dq, \quad (3.15)$$

т. е. к определению минимизирующего значения c . Выполняя операции, указанные в (3.14) и (3.15), получим

$$c = \frac{5}{24A^3} \int_{-A}^A F(q) q^4 dq = \frac{5}{A^3} \int_0^A F(q) q^4 dq. \quad (3.16)$$

Так, например, при характеристике (3.7) находим

$$c = \frac{5}{A^3} \int_0^A [q^2] q^4 dq = \frac{5}{7} \beta A^2.$$

Соответственно для частоты получим:

$$\lambda = 0.8432 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} A.$$

Погрешность этого результата составит всего 0.23 %. Идея минимизации интегрального квадратического уклонения можно распространить и на случай несимметричных характеристик.

Метод гармонического баланса. Этот приближенный метод является одним из наиболее распространенных при решении многих нелинейных задач теории колебаний. Применительно к рассматриваемому здесь дифференциальному уравнению (3.1), когда $F(q) = -F(-q)$, его простейший вариант состоит в следующем.

Как и выше, применим решение этого уравнения в виде (3.11) и подставим его в левую часть дифференциального уравнения (3.1). Второе слагаемое $F[A \sin(kt + \alpha)]$ является периодической функцией периода $2\pi/k$, и его можно разложить в ряд Фурье. Сохранив в этом разложении один первый член, приближенно имеем

$$F[A \sin(kt + \alpha)] = b_1(A) \sin(kt + \alpha), \quad (3.17)$$

где b_1 — коэффициент Фурье, определенный выражением

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad \varphi = kt + \alpha. \quad (3.18)$$

Подстановка выражений (3.11) и (3.18) в уравнение (3.1) приводит к соотношению

$$-\alpha A k^2 + b_1(A) = 0,$$

из которого следует первое приближение для квадрата частоты:

$$k^2 = \frac{b_1(A)}{\alpha A}. \quad (3.19)$$

Пусть, например, функция $F(q)$ определяется выражением (3.7). Тогда по формуле (3.18) находим

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\beta A^3 \sin^2 \varphi \sin \varphi] d\varphi = \frac{3}{2} \beta A^3.$$

т. е.

$$k^2 = 0,75 \frac{B}{a} A^2, \quad k = 0,8660 \sqrt{\frac{B}{a}} A$$

с ошибкой 2,2 %.

Метод медленного изменения амплитуд. Для того чтобы применять к рассматриваемой задаче интегрированный метод медленного изменения амплитуды (см. стр. 54), нужно прежде всего выразить из заданной функции $F(\varphi)$ линейную часть φ (если функция $F(\varphi)$ чисто нелинейная, т. е. не содержит линейного слагаемого, то метод в принципе неприменим) и представить дифференциальное уравнение (3.1) в виде (2.32), положив

$$f(x, \dot{\varphi}) = -\frac{F(x)}{a} + k_0^2 \dot{\varphi} \quad (3.20)$$

(здесь $k_0^2 = c/a$ — квадрат собственной частоты линеаризованной системы). Далее образуется выражение (2.42):

$$\Phi(A) = - \int_0^{2\pi} \left[-\frac{F(A \cos \varphi)}{a} + k_0^2 A \cos \varphi \right] \sin \varphi d\varphi, \quad (3.21)$$

$$\Psi(A) = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{F(A \cos \varphi)}{a} + k_0^2 A \cos \varphi \right] \cos \varphi d\varphi. \quad (3.22)$$

Рассматривая выражение (3.21), можно заметить, что под знаком интеграла переключаются четный и нечетный функции угла φ , а заданным произведением интегрирования от функции ортогональным, так что $\Phi(A) = 0$. Отсюда, согласно первому уравнению (2.41), следует $\dot{A} = 0$, или $A = \text{const}$ — результат, который можно было предвидеть для рассматриваемой задачи о свободных колебаниях консервативной системы.

После того, как будет вычислено значение $\Psi(A)$, по второму уравнению (2.41) образуется величина φ . Важно отметить, что эта величина постоянная, так что $\varphi = \dot{\varphi}t + \varphi_0$ и аргумент в решении (2.34) принимает вид

$$\varphi = k_0 t - \varphi = (k_0 - \dot{\varphi})t - \varphi_0.$$

Таким образом, частота свободных колебаний заданной нелинейной системы определяется выражением

$$k = k_0 - \dot{\varphi} = k_0 - \frac{\Psi(A)}{2\pi k_0 A}. \quad (3.23)$$

Пример 3.3. Составить с точными значениями зависимость частоты свободных колебаний системы с валом, действующим поперечным способом в способе прямой линеаризации (рис. 3.2, в). Характеристики системы описываются выражениями, данными в начале примера 3.2.

По простейшей формуле (3.12) получим

$$k^2 = k_0^2 \left(1 - \frac{A_0}{A} \right), \quad (3.4)$$

где $k_0^2 = c/a$.

Для вычисления по способу прямой линеаризации приведем использованные формулы (3.16), разделив область интегрирования

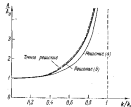


Рис. 3.4

при $x > 0$ на два участка. На первом участке ($0 \leq x \leq A_0$) $F(x) = -\varphi$ и интегрирование даст нуль. Поэтому

$$c = \frac{c}{A_0^2} \int_{A_0}^A c_0(x - A_0)x^2 dx = c_0 \left(1 - \frac{5A_0}{4A} + \frac{A_0^2}{4A^2} \right), \quad (3.5)$$

$$k^2 = k_0^2 \left(1 - \frac{5A_0}{4A} + \frac{A_0^2}{4A^2} \right).$$

На рис. 3.4 показаны зависимость k от A (3.5), а также найденный в примере 3.2 результат точного решения.

Пример 3.4. Для системы с кубической характеристикой

$$F(\varphi) = c\varphi + \beta\varphi^3$$

найти частоту свободных колебаний методом гармонического баланса и методом малых нелинейных амплитуд.

Первое приближение по методу гармонического баланса найдем по выражению (3.23), подставив туда

$$\varphi_1 = \frac{\beta}{\alpha} \int_0^{2\pi} \left[\alpha A \sin \varphi + \beta A^3 \sin^3 \varphi \right] \sin \varphi d\varphi = cA + \frac{3}{4} \beta A^3.$$

Таким образом, получим

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3\beta A^2}{4\alpha}. \quad (3.4)$$

Для решения по методу малых нелинейных амплитуд найдем по выражению (3.22)

$$\Psi(A) = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\beta A^2 \cos^2 \varphi}{\alpha} \right) \cos \varphi d\varphi = -\frac{3}{8} \frac{\beta A^3}{\alpha}$$

в соответствии со выражением (3.23)

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8} \frac{\beta A^2}{\alpha \omega_0}.$$

или

$$\omega^3 = \omega_0^3 + \frac{3\beta A^2}{4\alpha} + \frac{9}{64} \frac{\beta^2 A^4}{\alpha^2 \omega_0^2}. \quad (3.5)$$

Как видно, результаты (3.4) и (3.5) совпадают с точностью до высшей степени малости с выражением (3).

Здесь, кстати, отметим, что решение (3) получается обобщением, если характеристическая система чисто полиномиальна, т. е. когда $c = 0$ и соответствующая $\omega_0 = 0$. В этом случае надлежит отметить о том, что метод малых нелинейных амплитуд в принципе применим только к системам с малыми нелинейностями.

§ 4. Линейные системы с несколькими степенями свободы

1. Способы составления дифференциальных уравнений движения. Наиболее общий вид дифференциальных уравнений движения может быть получен в форме уравнений Лагранжа, которые при консервативных силах имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad (4.1)$$

где T и U — кинетическая и потенциальная энергии, q_j и $\dot{q}_j$ — обобщенные координаты и обобщенные скорости, $j = 1, 2, \dots, s$ — номер координаты, s — число степеней свободы.

На курсе теоретической механики известно, что при малых движениях голономной системы со стационарными связями около положения равновесия кинетическая и потенциальная энергии следующим образом выражаются через обобщенные координаты:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s c_{jk} q_j q_k. \quad (4.2)$$

Здесь $j = 1, 2, \dots, s$; $k = 1, 2, \dots, s$; $a_{jk} = a_{kj}$ — инерционные коэффициенты, $c_{jk} = c_{kj}$ — коэффициенты жесткости, вычисляемые также обобщенными коэффициентами жесткости.

К выражениям (4.2) можно прийти путем рассуждений, аналогичных приведенным выше при выводе уравнений (1.4) и (1.8), относящихся к системе с одной степенью свободы.

Если рассматриваемое нулевым значением координат положение равновесия устойчиво, то потенциальная энергия в этом положении имеет экстремальный минимум, а второе из выражений (4.2) есть положительно определенная квадратичная форма. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства (критерий Сильвестра):

$$\begin{aligned} c_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \\ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{vmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Применительно к системам с несколькими степенями свободы эти неравенства имеют тот же смысл, что и условие $c > 0$ для системы с одной степенью свободы (см. § 1). При выполнении неравенств (4.3) система, выходящая из положения равновесия, совершает свободные колебания.

Подставив выражения (4.2) в уравнение (4.1), получим следующую систему линейных однородных диффе-

рещиальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=1}^n (a_{jk} \ddot{q}_k + c_{jk} \dot{q}_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (4.4)$$

Конечно, фактически составленная система уравнений (4.4) не обязательно имеет по схеме Лагранжа. Во многих задачах о колебаниях удобно пользоваться более непосредственными способами — прямым и обратным.

Согласно *прямому способу* из системы выделяются сосредоточенные массы (или твердые тела) и каждая из них рассматривается как свободная материальная точка (или совокупность как свободное тело), находящаяся под действием внешних сил (веса, упругих сил), которые выражаются через выбранные обобщенные координаты; после этого записываются соответствующие дифференциальные уравнения движения для материальных точек (или тел).

Обратный способ применяется там, где после отделения сосредоточенных масс (или твердых тел) рассматриваются оставшиеся безмассовыми системы жестких и упругих связей, т. е. безмассовый элемент системы, который находится под действием кинетических

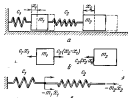


Рис. 4.1

реакций отдельных частей системы, причем кинетические реакции (силы инерции) выражаются через обобщенные ускорения. Затем формулируются статические соотношения для переносов безмассового (безматериального) элемента системы.

Проведем свободности названных способов на примере системы с двумя степенями свободы, состоящей из двух тел с массами \$m_1\$ и \$m_2\$, соединенных двумя пружинами, жесткости которых равны \$c_1\$ и \$c_2\$ (рис. 4.1).

За обобщенные координаты примем горизонтальные перемещения \$x_1\$ и \$x_2\$ пружин, считывая эти перемещения от состояния равновесия, в котором пружины не деформированы. Удлинения пружин в процессе движения равны \$\Delta l_1 = x_1\$, \$\Delta l_2 = x_2 - x_1\$.

Основной способ (уравнения Лагранжа). Прямое можно находить кинетическую энергию груза:

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2}$$

и потенциальную энергию деформации пружин

$$U = \frac{c_1 x_1^2}{2} + \frac{c_2 (x_2 - x_1)^2}{2}.$$

Далее образуем производные, необходимые для подстановки в уравнения Лагранжа (4.1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1), \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = c_2 (x_2 - x_1).$$

Теперь запишем уравнения (4.1):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Прямой способ. Выделим грузы и рассмотрим их как свободные тела под действием сил упругости \$N_1\$ и \$N_2\$, определяемых удлинениями \$\Delta l_1\$ и \$\Delta l_2\$ обеих пружин (рис. 4.1, б):

$$N_1 = c_1 \Delta l_1 = c_1 x_1,$$

$$N_2 = c_2 \Delta l_2 = c_2 (x_2 - x_1).$$

Дифференциальные уравнения движения грузов имеют вид

$$m_1 \ddot{x}_1 = -N_1 + N_2,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -N_2.$$

Подставив сюда выражения для сил N_1 и N_2 , приходим к равному количеству системы уравнений:

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) = 0,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) = 0.$$

Обратный способ. Отделим грузы и рассмотрим упругий безмассовый элемент системы под действием кинетических реакций $-m_1 \ddot{x}_1$ и $-m_2 \ddot{x}_2$ (рис. 4.1, в). В этой схеме первая пружина нагружена силой $-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2$, а вторая пружина — силой $-m_2 \ddot{x}_2$. Перемещение x_1 конца первой пружины, равное ее удлинению, можно считать в виде

$$x_1 = \frac{-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2}{c_1}.$$

Перемещение правого конца второй пружины x_2 равно сумме удлинений обеих пружин, т. е.

$$x_2 = \frac{-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2}{c_1} + \frac{-m_2 \ddot{x}_2}{c_2}.$$

Из двух последних соотношений получаем

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + c_1 x_2 &= 0, \\ \frac{c_2}{c_1} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \left(1 + \frac{c_2}{c_1} \right) \ddot{x}_2 + c_1 x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Полученные выше по основному и прямому способам формы записи говорят о том, что при выборе обобщенных координат кинетическая энергия имеет каноническую форму:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 a_j \dot{q}_j^2, \quad (4.7)$$

т. е. не содержит произведений скоростей $\dot{q}_j \dot{q}_k$ при $j \neq k$. При этом каждое из уравнений Лагранжа содержит только по одному обобщенному ускорению, как это получается и при применении прямого способа. Если обобщенные координаты были выбраны так, чтобы каноническую форму имела потенциальная энергия

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 c_j q_j^2, \quad (4.8)$$

то уравнения Лагранжа совпали бы с уравнениями, полученными с помощью обратного способа. Составляя полученные варианты записи по прямому и обратному способам, можно сделать следующее общее заключение относительно структуры дифференциальных уравнений: при составлении системы уравнений по прямому способу $c_{ij} = 0$ при $i \neq j$, а при составлении по обратному способу $c_{ij} = 0$ при $i = j$. Таким образом, найдем прямым способом, мы приходим вместо (4.4) к системе

$$a_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^s c_{ik} q_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (4.9)$$

а применяя обратный способ — к системе

$$\sum_{k=1}^s c_{ik} \ddot{q}_k + c_{ii} \ddot{q}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (4.10)$$

(вместо a_{ij} в уравнениях (4.7) и (4.9) занесено c_{ij} , так как второй индекс становится лишним; аналогично, вместо c_{ij} в уравнениях (4.8) и (4.10) занесено c_{ij}).

Принципиально важно, что специальным выбором обобщенных координат можно придать каноническую форму как кинетической, так и потенциальной энергии. Такие координаты q_j ($j = 1, 2, \dots, s$) называются **нормальными** или **каноническими**. При этом

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s c_j q_j^2 \quad (4.11)$$

и уравнения Лагранжа приобретают наиболее простой вид

$$a_j \ddot{q}_j + c_j q_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (4.12)$$

Каждое из них интегрируется независимо от других. Иными словами, при использовании главных координат система как бы представляет собой совокупность независимых парциальных систем с одной степенью свободы. Часто можно заранее указать, какие канонические параметры (или их комбинации) являются главными координатами, и для перехода к ним требуются обширные выкладки, объем которых не уступает объему выкладки при решении задачи в произвольных принятых (не главных) обобщенных координатах. Поэтому введение понятия главных координат практически во всех случаях решает задачу о свободных колебаниях, по оси

полезно для углубленного понимания их закономерностей и для теоретического анализа.

Связь между вариантами записей (4.9) и (4.10) удобно проследить, исходя из фундаментальных соотношений, определяющего статическое перемещение в упругой линейной системе общего вида:

$$q_j = \sum_{k=1}^n \delta_{jk} F_k \quad (j = 1, 2, \dots, r), \quad (4.11)$$

в которой δ_{jk} — коэффициент влияния для перемещений, т. е. значение j -й обобщенной координаты, соответствующее действию статически предположенной k -й обобщенной силы, равной единице (в строительной механике величины δ_{jk} называют обобщенными перемещениями). В матричной форме соотношения (4.11) имеют вид

$$\{q\} = [\delta] \{F\}, \quad (4.12)$$

где

$$\{q\} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_r \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

представляет собой матрицу-столбец (вектор) обобщенных коэффициентов,

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{r1} & \delta_{r2} & \dots & \delta_{rn} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

— матрицу коэффициентов влияния для перемещений,

$$\{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

— матрицу-столбец (вектор) обобщенных сил.

Выведя матрицу

$$[\delta]^{-1} = [r] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

обратную матрицу (4.16), и умножив слева матричное соотношение (4.14) на матрицу (4.16). Тогда получим

$$[r] \{q\} = \{F\}. \quad (4.17)$$

Для того чтобы выразить физический смысл элементов r_{jk} матрицы (4.16), представим себе, что на все точки системы наложены единичные силы, направленные в одну и ту же обобщенную перемещения, кроме перемещения q_k , причём последнему придано значение $q_k = 1$. Тогда r_{jk} представит собой реакцию j -й декартезированной силы, соответствующую перемещению $q_k = 1$ (в строительной механике величины r_{jk} называют обобщенными реакциями).

Из соотношения (4.17) следует дифференциальные уравнения прямого метода, а из соотношения (4.16) — уравнения обратного метода. В самом деле, в задачах о свободных колебаниях $F_k = -m_k \ddot{q}_k$, так что если известна диагональная матрица

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

то можно записать

$$\{F\} = -[m] \{q\}. \quad (4.21)$$

Подставляя (4.21) в (4.17), получим

$$[r] \{q\} = -[m] \{q\}, \quad (4.22)$$

т. е. уравнения типа (4.9); после подстановки (4.21) в (4.14) найдем

$$\{q\} = -[\delta] [m] \{q\}, \quad (4.23)$$

т. е. уравнения типа (4.10).

Хотя уравнения (4.9) и (4.10) в принципе эквивалентны, однако объемы операций, связанных с вычислением коэффициентов, могут оказаться различными.

Прямой способ особенно удобен для систем простой структуры, если в таких системах упругие силы можно выразить через перемещения двух соседних тел. Таковы, например, системы, изображенные на рис. 4.2. Пусть q_j — обобщенная координата, представляющая горизонтальное перемещение j -го груза в схеме на

таких решений:

$$q_j = A_{j1} \sin(k_j t + \alpha_1) + A_{j2} \sin(k_j t + \alpha_2) + \dots + A_{js} \sin(k_j t + \alpha_s) \quad (j = 1, 2, \dots, s),$$

где буквы A теперь представляют два выражения: первый непосредственно обозначает номер координаты, а второй — номер собственной частоты. Коротко решение можно записать в виде

$$q_j = \sum_{i=1}^s A_{ji} \sin(k_j t + \alpha_i) \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (4.33)$$

Таким образом, как известно (т. е. при произвольных начальных условиях), движение каждой из обобщенных координат соответствует полигармоническому закону, причем число гармонических составляющих равно числу степеней свободы системы. Отметим, что если собственные частоты несоизмеримы (как это нередко бывает в реальных системах), то процесс, описываемый выражением (4.33), строго говоря, не периодичен.

При близости хотя бы двух собственных частот общий закон движения оказывается весьма своеобразным. Рассмотрим систему с двумя степенями свободы, причем $k_1 \approx k_2$. Тогда, например, для первой обобщенной координаты имеем

$$q_1 = A_{11} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_{12} \sin(k_2 t + \alpha_2). \quad (4.34)$$

Если вместо обозначения

$$B_{1, \pm} = \frac{1}{2} (A_{11} \cos \alpha_1 \pm A_{12} \cos \alpha_2), \\ B_{1, \mp} = \frac{1}{2} (A_{11} \sin \alpha_1 \pm A_{12} \sin \alpha_2), \quad (4.35)$$

то вместо (4.34) можно записать

$$q_1 = B_1 (\sin k_1 t + \sin k_2 t) + B_2 (\sin k_1 t - \sin k_2 t) + \\ + B_3 (\cos k_1 t + \cos k_2 t) + B_4 (\cos k_1 t - \cos k_2 t). \quad (4.36)$$

Заменяя суммы и разности тригонометрических функций произведением таких функций, получим

$$q_1 = 2B_1 \sin \frac{k_1 + k_2}{2} t \cos \frac{k_1 - k_2}{2} t + 2B_2 \sin \frac{k_1 - k_2}{2} t \times \\ \times \cos \frac{k_1 + k_2}{2} t + 2B_3 \cos \frac{k_1 + k_2}{2} t \cos \frac{k_1 - k_2}{2} t - \\ - 2B_4 \sin \frac{k_1 + k_2}{2} t \sin \frac{k_1 - k_2}{2} t. \quad (4.37)$$

Заметим, что функции аргумента $\frac{k_1 - k_2}{2} t$ меняются медленно по сравнению с функциями аргумента $\frac{k_1 + k_2}{2} t$. Поэтому вместо (4.37) можно написать

$$q_1 = D_1 \sin kt + D_2 \cos kt, \quad (4.38)$$

где

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (4.39)$$

— среднее значение двух близких частот $k_1 \approx k_2$,

$$D_1 = 2 \left(B_1 \cos \frac{\Delta k}{2} t - B_2 \sin \frac{\Delta k}{2} t \right), \\ D_2 = 2 \left(B_2 \sin \frac{\Delta k}{2} t + B_3 \cos \frac{\Delta k}{2} t \right) \quad (4.40)$$

— медленно меняющиеся периодические функции времени; их частота $\frac{\Delta k}{2} = \frac{k_1 - k_2}{2}$.

Окончательно выходим вместо (4.34)

$$q_1 = A_0 \sin(kt + \alpha_0), \quad (4.41)$$

где

$$A_0 = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}, \quad \alpha_0 = \arctg \frac{D_1}{D_2} \quad (4.42)$$

— медленно меняющаяся функция времени. Таким образом, движение носит синусоидальный характер с

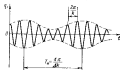


Рис. 4.5

периодически медленно меняющейся амплитудой; график этого движения показан на рис. 4.5. Период изменения амплитуды составляет

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Delta k/2} = \frac{4\pi}{k_1 - k_2} \quad (4.43)$$

и тем больше, чем ближе частоты k_1 и k_2 . Такие колебания называются *близкими*.

Движения, соответствующие второй обобщенной координате q_2 , также представляют собой близкие, но сдвинутые по фазе относительно друг друга q_1 .

Пример 4.2. Найти собственные частоты для системы, рассмотренной выше в примере 4.1.

Подставим решение (4.27) в уравнения для деформационных уравнений (стр. 82), получим однородную систему

$$\begin{pmatrix} \frac{m^2}{2J^2} \dot{q}^2 - 1 & \frac{m^2}{2J^2} \dot{q}^2 \\ \frac{m^2}{2J^2} \dot{q}^2 & \frac{m^2}{2J^2} \dot{q}^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Детерминант определителя

$$\begin{vmatrix} \frac{m^2}{2J^2} \dot{q}^2 - 1 & \frac{m^2}{2J^2} \dot{q}^2 \\ \frac{m^2}{2J^2} \dot{q}^2 & \frac{m^2}{2J^2} \dot{q}^2 - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

косо разрешимости которого получим частотное уравнение

$$\frac{m^2 \dot{q}^2}{12(JJ)^2} \dot{q}^2 - \left(\frac{m^2}{2J^2} + \frac{m^2}{2J^2} \right) \dot{q}^2 + 1 = 0.$$

Его корни (для $p \ll 1$) имеют вид

$$A_1^2 = \frac{3EJ}{\pi^2} \left(1 - \frac{9p^2}{4} \right), \quad A_2^2 = \frac{3EJ}{\pi^2} \left(1 + \frac{9p^2}{4} \right).$$

3. *Собственные формы*. Если вернуться к системе уравнений (4.28) и подставить в нее какой-либо i -й член частотного уравнения, то один из уравнений станет тождественно выполненным, т. е. неиспользованным уравнений останется только $s-1$; следовательно из общих решений однородных систем алгебраических уравнений. Эти уравнения связывают между собой s амплитуд $A_1, A_2, \dots, A_s$ и позволяют выразить все амплитуды через какую-либо одну из них, например через первую. Соотношения эти называются

$$\kappa_2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad \kappa_3 = \frac{A_3}{A_1}, \quad \dots, \quad \kappa_s = \frac{A_s}{A_1} \quad (4.54)$$

определяет относительные амплитуды рассматриваемой i -й гармоник, т. е. описывает конфигурацию системы в процессе свободных колебаний с i -й собственной частотой; эта конфигурация определяется с точностью

до одного произвольного множителя, т. е. масштаб конфигурации остается неопределенным.

Такие конфигурации системы зависят только от свойств самой системы и называются *собственными формами*; каждому корню частотного уравнения соответствует своя собственная форма, определенная соотношениями (4.54), т. е. число собственных форм равно числу степеней свободы системы.

Величина κ_i называется *коэффициентами собственной формы*; они определяются только параметрами самой системы (коэффициенты формы не обязательно безразмерные величины, так как обобщенные координаты могут иметь разную размерность). Так как общий масштаб какой-либо из собственных форм произвольный, можно одну (любую) коэффициентов формы положить равным единице. Число остальных коэффициентов κ_i равно $s-1$ для каждой собственной формы, т. е. составляет $s(s-1)$ для всех собственных форм.

Общее решение (4.53) с определенными коэффициентами форм записывается в виде

$$q = \sum_{i=1}^s \kappa_i A_i \sin(\dot{h}_i t + \alpha_i) \quad (i = 1, 2, \dots, s; \kappa_i = 1; i = 1, 2, \dots, s), \quad (4.55)$$

т. е. содержит $2s$ постоянных (в амплитуд A_i и постоянные начальных фаз α_i); для определения этих постоянных служат $2s$ начальных условий, выражающих значения обобщенных координат и обобщенных скоростей в начальный момент.

Если подставить какое-либо i -е частное решение в систему (4.9), то получим следующие соотношения:

$$-m \dot{q}^2 \kappa_i + \sum_{j=1}^s c_j \kappa_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s; i = 1, 2, \dots, s).$$

Аналогично, если подставить i -е частное решение в систему (4.10) найдем

$$-M \sum_{j=1}^s a_{ij} \kappa_j + c_i \kappa_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s; i = 1, 2, \dots, s).$$

Эти соотношения будут использованы ниже, в п. 3 § 8.

Пример 4.3. Найти собственные частоты и собственные формы для системы, показанной на рис. 4.1, приняв для примера $c_1 = c_2 = m$, $m_1 = m_2 = m$. Подставить решения (4.27) в полученные выше дифференциальные уравнения (4.8), положить $q_1 = a$, $q_2 = -a$, тогда получим

$$\begin{aligned} (2c_0 - m\dot{\omega}^2)A_1 - c_0A_2 &= 0, \\ -c_0A_1 + (c_0 - m\dot{\omega}^2)A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из равенства нулю определителя

$$\begin{vmatrix} 2c_0 - m\dot{\omega}^2 & -c_0 \\ -c_0 & c_0 - m\dot{\omega}^2 \end{vmatrix} = 0$$

следует частотное уравнение

$$\dot{\omega}^4 - 3 \frac{c_0}{m} \dot{\omega}^2 + \frac{c_0^2}{m^2} = 0.$$

Отсюда находим для корней:

$$\dot{\omega}_{1,2}^2 = \frac{c_0}{2m} (3 \pm \sqrt{5}),$$

т. е.

$$\dot{\omega}_1^2 = 0,382 \frac{c_0}{m}, \quad \dot{\omega}_2^2 = 2,618 \frac{c_0}{m}.$$

Положив $x_1 = x_2 = 1$, для определения остальных коэффициентов собственных форм воспользуемся правилом из таблицы (а) (то же можно получить и из второго уравнения):



Рис. 4.8

$$\begin{aligned} x_{01} &= \frac{2c_0 - m\dot{\omega}^2}{c_0} = 1,618, \\ x_{02} &= \frac{2c_0 - m\dot{\omega}_1^2}{c_0} = -0,618. \end{aligned}$$

Сопоставившие собственные формы показаны на рис. 4.8 а, б.

Полученные выше общие соотношения можно записать также в матричной форме.

Вместо уравнений (4.4) имеем

$$[a] \{q\} + [c] \{q\} = 0, \quad (4.48)$$

где $\{q\}$ — матрица-столбец (4.15),

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

— симметричная матрица инерционных коэффициентов,

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

— симметричная матрица коэффициентов жесткости.

Решение уравнения (4.48) будем искать в виде

$$\{q\} = \{A\} \sin(k\tau + \alpha), \quad (4.51)$$

где

$$\{A\} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

— матрица-столбец амплитуд. Подставляя (4.51) в (4.48), получим матричное уравнение

$$-[\alpha] \{A\} k^2 + [c] \{A\} = 0, \quad (4.53)$$

т. е.

$$([c] - [\alpha] k^2) \{A\} = 0. \quad (4.54)$$

Отсюда видно, что матрица-столбец $\{A\}$ отлична от нуля только при условии

$$\det([c] - [\alpha] k^2) = 0, \quad (4.55)$$

которое совпадает с частотным уравнением (4.29). Переписав равенство (4.53) в виде

$$[\alpha]^{-1} [c] \{A\} = k^2 \{A\}, \quad (4.56)$$

замечем, что $\{A\}$ является собственным вектором матрицы $[\alpha]^{-1} [c]$, а k^2 — собственным значением этой матрицы.

4. Ортогональность собственных форм. Между амплитудами A_{i0} и A_{j0} , определяемыми для каких-либо собственных форм (i и j), существует соотношение, выражающее важное свойство ортогональности собственных форм. Установим это соотношение исходя из общей формы уравнений (4.28) для амплитуд. При $k^2 = k_n^2$ каково-либо j -й строка этой системы, записанная для n -й частоты, может быть представлена в виде

$$k_n^2 \sum_{m=1}^n a_{jm} A_{m0} = \sum_{m=1}^n c_{jm} A_{m0} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (4.57)$$

Умножив равенство (4.57) на амплитуду A_{jm} и сложив все уравнения, получим

$$k_m^2 \sum_{j=1}^n A_{jm} \sum_{r=1}^n a_{jr} A_{rm} = \sum_{j=1}^n A_{jm} \sum_{r=1}^n c_{jr} A_{rm} \quad (4.58)$$

или, после изменения порядка суммирования в обеих частях равенства,

$$k_m^2 \sum_{j=1}^n A_{rm} \sum_{j=1}^n a_{jr} A_{jm} = \sum_{j=1}^n A_{rm} \sum_{j=1}^n c_{jr} A_{jm} \quad (4.59)$$

Так как $c_{jr} = c_{rj}$, можно записать

$$\sum_{j=1}^n c_{jr} A_{jm} = \sum_{j=1}^n c_{rj} A_{jm}. \quad (4.60)$$

Но согласно (4.57)

$$\sum_{j=1}^n c_{rj} A_{jm} = k_m^2 \sum_{j=1}^n a_{rj} A_{jm} \quad (4.61)$$

следовательно, соотношение (4.59) принимает вид

$$k_m^2 \sum_{j=1}^n A_{rm} \sum_{j=1}^n a_{jr} A_{jm} = k_m^2 \sum_{j=1}^n A_{rm} \sum_{j=1}^n a_{rj} A_{jm} \quad (4.62)$$

(при записи правой части мы воспользовались равенством $a_{jr} = a_{rj}$). Но, поскольку частоты k_m и k_n различны, из равенства (4.62) следует

$$\sum_{j=1}^n A_{rm} \sum_{j=1}^n a_{jr} A_{jm} = 0. \quad (4.63)$$

Последнее соотношение выражает свойство ортогональности любых двух n -й и m -й собственных форм.

Свойство ортогональности, выраженное соотношением (4.63), формулируется более компактно в случаях, когда $a_{jr} = 0$ при $j \neq r$. Именно в такой форме обычно получают канонические коэффициенты при исследовании прямого способа составления дифференциальных уравнений. При этом соотношение (4.63) упрощается и принимает вид (вместо a_{jr} достаточно писать a_{jj})

$$\sum_{j=1}^n a_{jj} A_{rm} A_{jm} = 0. \quad (4.64)$$

Согласно (4.59) вместо (4.63) можно также записать

$$\sum_{j=1}^n A_{rm} \sum_{j=1}^n c_{jr} A_{jm} = 0. \quad (4.65)$$

Если $c_{jr} = 0$ при $j \neq r$, так это получается по обратному способу, то соотношение (4.65) упрощается:

$$\sum_{j=1}^n c_{rr} A_{rm} A_{jm} = 0. \quad (4.66)$$

Отметим, что любую конфигурацию системы можно разложить по собственным формам колебаний; это свойство является полезным при изучении вынужденных колебаний.

Пусть векторы мгновенной конфигурации системы описываются совокупностью линейных обобщенных координат $B_1, B_2, \dots, B_n$; для этих значений можно записать

$$B_j = d_{j1}A_1 + d_{j2}A_2 + \dots + d_{jn}A_n \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (4.67)$$

и рассматривать (4.67) как систему уравнений, определяющих коэффициенты линейного преобразования $d_{11}, d_{12}, \dots, d_{nn}$. Для того чтобы найти эти коэффициенты, нет необходимости решать систему (4.67); удобнее воспользоваться свойством ортогональности собственных форм. Имеем в виду случаи, для которых указанное свойство формулируется в виде (4.65), умножим каждую строку системы (4.67) на соответствующее ее номеру j выражение $d_{j1}A_1$ (m — номер искомого коэффициента d_{jm}), а затем сложим все строки. Тогда в левой части образуется сумма $\sum_{j=1}^n B_{jm} A_{jm}$, а в правой части — сумма

$$d_{11} \sum_{j=1}^n a_{jj} A_{j1} A_{jm} + d_{21} \sum_{j=1}^n a_{jj} A_{j2} A_{jm} + \dots + d_{j1} \sum_{j=1}^n a_{jj} A_{j1} A_{jm}.$$

Согласно (4.65) среди этих членов остается от нуля только член $d_{mm} \sum_{j=1}^n a_{jj} A_{jm}^2$, и в результате мы получаем компактное выражение

$$d_{mm} = \frac{\sum_{j=1}^n c_{jj} B_j A_{jm}}{\sum_{j=1}^n a_{jj} A_{jm}^2}. \quad (4.68)$$

Пример 4.4. Найдите собственные формы для системы, рассмотренной в примерах 4.1 и 4.2.

Для определения собственных форм обратим отношение A_2/A_1 из первого уравнения, данное в примере 4.2 (стр. 85):

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1 - \frac{m_2}{2k_2} \omega^2}{\frac{m_1}{2k_1} \omega^2}.$$

Подставим сюда поочередно найденные ранее значения k_1^2 и k_2^2 . Получим

$$x_{11} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{3}{2}, \quad x_{12} = \frac{A_2}{A_1} = -\frac{3I}{3\sqrt{2}}$$

Эти отношения характеризуют обе собственные формы (рис. 4.7, а, б). Как видно из рисунка, первая собственная форма характеризуется сравнительно малым углом наклона груза, а вторая форма — относительно большим наклоном пружины кона.

Можно убедиться в ортогональности этих форм. Подставим в условие ортогональности (4.64) $x_1 = x$, $x_2 = m_2 x$, а также найденные отношения A_2/A_1 , A_{22}/A_{12} . Тогда получим

$$\begin{aligned} & m A_{11} A_{22} + m_2^2 A_{22} A_{12} = \\ & = m A_{11} A_{12} \left[1 + \mu^2 \frac{3}{2} \left(-\frac{3I}{3\sqrt{2}} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$



Рис. 4.7

5. Роль начальных условий. Для определения $2n$ постоянных, входящих в общее решение (4.45), необходимы значения обобщенных координат $q_j(0)$ и обобщенных скоростей $\dot{q}_j(0)$ в момент $t = 0$. Подставив эти значения в общее решение (4.45) и в соответствующие выражения для скоростей, получим систему уравнений относительно постоянных A_{ij} и α_j :

$$\begin{aligned} q_j(0) &= \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \sin \alpha_i, \\ \dot{q}_j(0) &= \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \dot{\alpha}_i \cos \alpha_i, \\ (j &= 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Связанные между амплитудами гармонических составляющих $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{2n}$ входящих в закон движения любой координаты q_n зависят от начальных условий.

При произвольных заданных начальных условиях движение любой обобщенной координаты будет происходить по полигармоническому закону, так что отношения между обобщенными координатами будут периодически изменяться во времени. По этой причине запишем-таки закон движения (линейный, осцилляторный) реального процесса свободных колебаний, как правило, не представляя собой синусоиду, характерную для процесса свободных колебаний системы с одной стопной свободой. Однако при специальном выборе начальных условий можно добиться того, что движение будет описываться только какой-либо одной, например r -й, составляющей:

$$q_j = A_r \sin(k_r t + \alpha_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (4.70)$$

В этом случае отношение между обобщенными координатами будет оставаться неизменным во времени и соответствовать r -й собственной форме. В частности, для реализации этого r -го частного колебания достаточно, чтобы в начальный момент обобщенные скорости равнялись нулю, а обобщенным координатам были приданы значения, соответствующие r -ю собственной форме.

Пример 4.5. Найдя движение системы, рассмотренной в примере 4.1, если состояние равновесия характеризуется наклоном к центру тяжести груза мизинцевого пальца δ .

В данном случае начальные условия должны быть сформулированы следующим образом:

$$x(0) = \delta, \quad \dot{x}(0) = \frac{\delta}{\omega_1}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} y &= A_{11} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_{12} \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ x &= A_{21} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_{22} \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned}$$

Подставим сюда найденные в примере 4.5 отношения амплитуд, получим

$$\begin{aligned} y &= A_{12} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_{12} \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ x &= \frac{3}{2} A_{12} \sin(k_1 t + \alpha_1) - \frac{3I}{3\sqrt{2}} A_{12} \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned}$$

Для определения четырех постоянных $A_{11}, A_{12}, \alpha_1, \alpha_2$ используем указанные выше начальные условия:

$$A_{11} \sin \alpha_1 + A_{12} \sin \alpha_2 = \delta, \quad \frac{3}{2} A_{11} \sin \alpha_1 = \frac{2I}{3\sqrt{2}} A_{12} \sin \alpha_2 = 0,$$

$$A_{11} A_{12} \sin \alpha_1 + A_{12} A_{12} \sin \alpha_2 = \frac{\delta}{\alpha_1}, \quad \frac{3}{2} A_{11} A_{12} \sin \alpha_1 - \frac{2I}{3\sqrt{2}} A_{12} A_{12} \sin \alpha_2 = 0$$

Отсюда находим

$$A_{12} = \frac{8\epsilon^2}{\sqrt{32k_2l}} \quad A_{22} = \frac{8\epsilon^2}{8\sqrt{32k_2l}}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0.$$

Следовательно, для данной системы выполняется

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{g^2}{\sqrt{32k_2l}} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \sin k_2 l + \frac{g}{8} \frac{g^2}{\sqrt{3}} \sin k_2 l \right], \\ q &= \frac{8\epsilon}{\sqrt{32k_2l}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin k_2 l + \frac{3}{8} \frac{g}{\sqrt{3}} \sin k_2 l \right] \end{aligned}$$

и имеет двукратный характер.

6. Случай краевых и нулевых концов. До сих пор, говоря о краевых частотных уравнениях, мы считали их простыми и не связанными между собой. Однако в некоторых случаях частотное уравнение может иметь как нулевые, так и краевые корни.

Убеждены в возможности этого на примере механической системы с двумя степенями свободы. На частотное уравнение (4.32) непосредственно видно, что при выполнении равенства

$$(a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{21})^2 = 4(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)(a_{11}c_{22} - c_{12}^2) \quad (4.71)$$

два корня частотного уравнения будут равны друг другу, а при выполнении равенства

$$c_{11}c_{22} = c_{12}^2 \quad (4.72)$$

один из корней частотного уравнения обращается в нуль.

Но следует думать, что равенства (4.71) или (4.72)

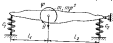


Рис. 4.8

выполняются при каких-то исключительных обстоятельствах; в действительности системы с краевыми или нулевыми концами встречаются довольно часто.

В качестве примера рассмотрим свободные колебания плоской системы с двумя степенями свободы, показанной на рис. 4.8. Обозначим через c_{11} и c_{22} коэффициенты жест-

кости пружин, а через m и ρ — массу и радиус инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести. За обобщенные координаты примем вертикальные перемещения центра тяжести тела y и угол поворота тела φ . Тогда кинетическая и потенциальная энергии запишутся в виде

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{y}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2), \\ \Pi &= \frac{c_1 (y + l_1 \varphi)^2}{2} + \frac{c_2 (y - l_2 \varphi)^2}{2}. \end{aligned}$$

Соответственно этому уравнения Лагранжа принимают форму

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + (c_1 + c_2)y + (c_1 l_1 - c_2 l_2)\varphi &= 0, \\ m\rho^2 \ddot{\varphi} + (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2)\varphi + (c_1 l_1 - c_2 l_2)y &= 0. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Теперь предположим, что параметры рассматриваемой системы удовлетворяют двум простым (и реально существующим) соотношениям:

$$c_1 l_1 = c_2 l_2, \quad \rho^2 = l_1 l_2 \quad (4.74)$$

тогда вместо полученных дифференциальных уравнений имеем

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + (c_1 + c_2)y &= 0, \\ m\ddot{\varphi} + (c_1 + c_2)\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Следовательно, первоначальные коэффициенты и обобщенные коэффициенты жесткости в данном случае определяются формулами

$$\begin{aligned} e_{11} &= e_{22} = m, & e_{12} &= e_{21} = 0, \\ c_{11} &= c_{22} = c_1 + c_2, & e_{12} &= e_{21} = 0 \end{aligned}$$

и условие (4.71) выполняется, т. е. обе частоты рассматриваемой системы равны одна другой. Впрочем, это видно непосредственно из уравнений (4.75), так как

$$k_1 = k_2 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}.$$

Ввиду независимости уравнений (4.75) частотные интегрированные одного уравнения не связаны с частотными

интегрированием другого уравнения:

$$y = A_1 \sin(kt + \alpha_1),$$

$$\varphi = A_2 \sin(kt + \alpha_2).$$

Для определения постоянных A_1 , A_2 , α_1 , α_2 служат четыре начальных условия.

В общей теории линейных дифференциальных уравнений установившегося, что обычно (но не всегда!) при кратных корнях характеристического уравнения и решении возникают связанные типы $t \sin kt$ и $t \cos kt$, содержащие аргумент так же, как тригонометрических функций; в наших задачах эти корни соответствовали бы нарастающим колебаниям. Однако в рассматриваемых здесь случаях свободных колебаний консервативных систем такие связанные колебания не могут — но противоречило бы справедливому для таких систем закону сохранения механической энергии (там было это отмечено к диссипативным системам).



Рис. 4.9

Показаны на рис. 4.9, а, б. Подробное остановимся на системе, изображенной на рис. 4.9, б и обозначим: c — жесткость связи на кручение^{*)}, I_1 , I_2 — моменты инерции дисков относительно продольной оси системы.

Принимая за обобщенные координаты углы поворота φ_1 и φ_2 дисков относительно некоторого начального положения (в этом положении вал не изогнут), получим следующие выражения для кинетической и потенциальной энергии системы:

$$T = \frac{I_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{I_2 \dot{\varphi}_2^2}{2}, \quad \Pi = \frac{c(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2}.$$

Соответственно этому уравнения Лагранжа имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 - c(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + c(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0, \end{aligned} \quad (4.76)$$

^{*)} В соображении материала установившегося; $c = GJ/L$, где G — модуль сдвига, J — полярный момент инерции сечения вала, L — длина вала.

т. е.

$$a_{11} = I_1, \quad a_{22} = I_2, \quad a_{12} = a_{21} = 0,$$

$$c_{11} = c_{22} = c, \quad c_{12} = c_{21} = -c.$$

При этом выполняется условие (4.73) в один из корней частотного уравнения равен нулю. Действительно, подставим найденные значения коэффициентов в частотное уравнение, получим

$$-(I_1 c + I_2 c)k^2 + I_1 I_2 k^4 = 0,$$

откуда

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \sqrt{c \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}}. \quad (4.77)$$

Для того чтобы понять физический смысл нулевой частоты, вернемся к системе дифференциальных уравнений (4.76). Их главным свойством состоит в том, что они допускают не только частное решение колебательного типа

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \sin(kt + \alpha), \\ \varphi_2 &= A_2 \sin(kt + \alpha), \end{aligned} \quad (4.78)$$

но также частное решение вида

$$\varphi_1 = \varphi_2 = C_1 + C_2 t,$$

которое описывает равномерное вращение всей системы как жесткого целого (без скручивания упругого вала). Этому частному решению и соответствует нулевой корень частотного уравнения $k_1 = 0$.

Частному решению (4.78) соответствует отличная от нуля частота k_2 , данная в формуле (4.77), а также определенное отношение амплитуд колебательного движения

$$\kappa_{21} = \frac{A_2}{A_1} = -\frac{I_1}{I_2}.$$

Таким образом, общее решение представляется в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \sin(kt + \alpha) + C_1 + C_2 t, \\ \varphi_2 &= \kappa_{21} A_1 \sin(kt + \alpha) + C_1 + C_2 t \end{aligned} \quad (4.79)$$

и содержит четыре постоянных: A_1 , α , C_1 и C_2 , определяемые из начальных условий.

Движение, описываемое законом (4.79), представляет собой колебания, наложенные на релаксацию

го вращения. Чисто колебательную составляющую движения легко выделить путем введения новой переменной

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1,$$

которая представляет мгновенный угол поворота диска, т. е. угла закручивания вала. Если теперь записать уравнения (4.76) в виде

$$\ddot{\varphi}_1 - \frac{e}{J_1}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0,$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{e}{J_2}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

и затем вычесть первое уравнение из второго, то получим одно дифференциальное уравнение для функции φ :

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{e}{J_1} + \frac{e}{J_2} \right) \varphi = 0.$$

Отсюда видно, что колебания угла φ следуют одностороннему закону

$$\varphi = A \sin(\Omega t + \alpha).$$

Можно сказать, что рассматриваемая система имеет одну степень свободы, которой соответствует значение системы как жесткого тела, и одну колебательную степень свободы. Аналогично, в более сложном случае, когда в валовом соединении s дисков, число колебательных степеней свободы равно $s - 1$.

7. Вязаные течения. Дифференциальные уравнения движения элементов, если учесть, что при колебаниих механической системы возникают силы трения. В случаях, когда она линейно зависит от скоростей точек системы, дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + \dots + a_{1s}\ddot{q}_s + b_{11}\dot{q}_1 + b_{12}\dot{q}_2 + \dots + b_{1s}\dot{q}_s + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + \dots + c_{1s}q_s = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (4.80)$$

или, в матричной форме,

$$[a][\ddot{q}] + [b][\dot{q}] + [c][q] = 0, \quad (4.81)$$

где матрицы $[a]$ и $[c]$ определяются выражениями

(4.49) и (4.50), а

$$[b] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{ss} \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

— матрица демпфирования.

Решение уравнений (4.80) следует искать в форме, отличающейся от (4.27), а именно

$$q_j = A_j e^{\lambda_j t} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (4.83)$$

После подстановки (4.83) в (4.80) получится однородная система алгебраических уравнений относительно A_j . В матричной форме эта система имеет вид

$$([a]\lambda^2 + [b]\lambda + [c]) \lambda_j = 0. \quad (4.84)$$

Для того чтобы все A_j одновременно не обнулялись и, следовательно, чтобы решение было определено системой (4.84), это приводит к характеристическому уравнению

$$\det([a]\lambda^2 + [b]\lambda + [c]) = 0. \quad (4.85)$$

Если все элементы матрицы (4.82) действительные, то действительные части всех корней характеристического уравнения — отрицательны. При этом среди корней уравнения (4.85) могут оказаться отрицательные действительные корни, каждому из которых соответствует действительное затухающее движение механической системы. Наряду с этим среди корней могут оказаться и комплексные сопряженные корни вида $\lambda = -\alpha + i\beta$, $\lambda' = -\alpha - i\beta$ ($\alpha > 0$). Им соответствует затухающее колебательное движение, описываемое выражением

$$q_1 = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \beta t + C_1 \sin \beta t). \quad (4.86)$$

Общее решение (4.80) получается как результат наложения всех частных решений.

Пример 48. Рассмотрим на рис. 4.10 систему состоящую из свободного вращающегося на горизонтальной оси J маховика m , двух упругих стержней F и F' с коэффициентами жесткости c и c' и вязкого демпфера R , характеризующегося коэффициентом демпфирования β . Найти общий характер движения системы, которое возникает по-



Рис. 4.10

или нарушение системы равновесия груза. Плотность ρ считать постоянными.

Обозначим через x_1 и x_2 отклонения пластинок и груза от положения равновесия. Тогда для пластинок имеем

$$-cx_1 - bx_2 + c_0(x_1 - x_2) = 0, \quad (4)$$

для груза —

$$-bx_2(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_2. \quad (5)$$

Положим $x_1 = A_1 e^{i\lambda t}$, $x_2 = A_2 e^{i\lambda t}$, получаем однородную систему

$$(c_0 + c_2 + b\lambda^2)A_1 - c_0 A_2 = 0, \quad -c_0 A_1 + (c_2 + m\lambda^2)A_2 = 0.$$

Правые части однородности

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 + b\lambda^2 & -c_0 \\ -c_0 & c_2 + m\lambda^2 \end{vmatrix} = 0,$$

приводит к характеристическому уравнению

$$m b \lambda^4 + m(c_1 + c_2)\lambda^2 + b c_0 \lambda^2 + c_1 c_2 = 0. \quad (6)$$

К тому же результату можно было прийти, если исключить координату x_1 из уравнений (4) и (5) и написать уравнение третьего порядка для x_2 :

$$m b \ddot{x}_2 + m(c_1 + c_2)\dot{x}_2 + b c_0 x_2 + c_1 c_2 x_2 = 0. \quad (7)$$

Сопоставившему порядку уравнения (4) рассматриваемую механическую систему можно считать системой с 1/2 степенями свободы (сравнительно с числом точек степеней свободы было четыре: A , A_1 , A_2 , грузом) и относится к вынужденным системам. В нашем примере достаточно было учесть массу пластины b , чтобы система дифференциальных уравнений имела четвертый порядок; такая механическая система (обладает двумя степенями свободы).

Среди корней характеристического уравнения (6) по крайней мере один окажется действительным отрицательным. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим левую часть уравнения. При $\lambda = 0$ она, очевидно, положительна, а при достаточно больших отрицательных значениях λ она становится отрицательной. Следовательно, должен существовать корень $\lambda_1 = -\alpha_1$ ($\alpha_1 > 0$).

После того как этот корень найден (для определенности достаточно одной первой ЗММ), левую часть уравнения (6) разделим на множитель $\lambda - \lambda_1$ и решим полученным путем общий однородное уравнение. При этом выйдут три остальных корня, в общем случае комплексных, виде $\lambda_{2,3} = -\alpha_2 \pm i\beta$ ($\alpha_2 > 0$).

Таким образом, движение груза описывается выражением

$$x_2 = A_{11} e^{-\alpha_1 t} + e^{-\alpha_2 t} (A_{12} \sin \beta t + A_{13} \cos \beta t),$$

подкорректировав три постоянные. Для их нахождения необходимо указать три начальных условия, определяющих $x_2(0)$, $\dot{x}_2(0)$ и $\ddot{x}_2(0)$ в начальный момент времени. Отметим, что начальное значение $\ddot{x}_2(0)$ независимо задать нельзя — оно определяется из соотношения (4).

Глава II

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 5. Линейные системы с одной степенью свободы при отсутствии трения

1. Особное уравнение при силовом вынуждении. Рассмотрим в главе I механические системы характеризуются действиями вынуждающих сил, а в некоторых случаях также диссипативных сил. Эти силы не только влияют на движение системы, но и сами управляются этим движением, поскольку они зависят от обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Как указывалось во введении, такую задачу категорично образуют вынуждающие силы, т. е. силы внешнего происхождения, описываемые заданными функциями времени и не зависящие от движения системы. Колебания, вызываемые вынуждающими силами, называются вынужденными. Независимо от физической природы вынуждающих сил мы будем исходить из того, что алгебра из них задана в виде некоторой явной функции времени:

$$F_i = F_i(t), \quad (5.1)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$ — порядковый номер материальной точки.

Если механическая система имеет одну степень свободы и приложенные к точкам системы внешние силы заданы в виде (5.1), то обобщенная вынуждающая сила определяется из выражения возмущенной работы

$$\delta A = \sum_{i=1}^n F_i \delta r_i = \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial r_i}{\partial q} \delta q \quad (5.2)$$

в виде

$$Q(t) = \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial r_i}{\partial q}. \quad (5.3)$$

Соответственно уравнение Лагранжа принимает вид (при отсутствии трения)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = Q(\varphi). \quad (5.4)$$

Подставляя сюда выражения (1.4) и (1.8) для кинетической и потенциальной энергии, приходим к дифференциальному уравнению задачи о вынужденных колебаниях

$$a\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} = Q(\varphi), \quad (5.5)$$

которое будем записывать в виде

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = \frac{Q(\varphi)}{a}. \quad (5.6)$$

Здесь через $k^2 = c/a$ по-прежнему обозначим квадрат собственной частоты рассматриваемой системы.

Рассмотрим, например, действие горизонтальной силы $P(t)$ на маятник (рис. 5.1, а). Примем за обобщенную

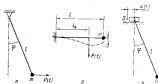


Рис. 5.1

координату угол φ отклонения маятника от вертикали и обозначим через m массу маятника, а через l — его длину. Тогда при малых углах отклонения

$$T = \frac{m \omega^2 \varphi^2}{2}, \quad \Pi = -\frac{mgl\varphi^2}{2}, \quad Q = P(t)l \quad (5.7)$$

и уравнение вынужденных колебаний (5.6) принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = \frac{P(t)}{ml}. \quad (5.8)$$

Наша задача составляет дифференциальное уравнение вынужденных колебаний по описанному выше прямому или обратному способам. Пусть, например, в точке $x = l_0$ балки приложена вынуждающая сила $P(t)$ (рис. 5.1, б); будем считать, что массой балки можно пренебречь по сравнению с массой m сосредоточенного груза, закрепленного на конце балки $x = l$. Для составления дифференциального уравнения колебаний удобно пользоваться обратным способом. Рассмотрим балку под действием силы $P(t)$ и силы инерции $-m\ddot{u}$, можем записать

$$y = P(t)\delta(l, l_0) - m\ddot{u}\delta(l, l_0),$$

где $\delta(l, l_0)$ и $\delta(l, l)$ — соответствующие коэффициенты влияния, рассчитанные методами теории сопротивлений материалов,

$$\delta(l, l_0) = \frac{(2l - l_0)^2}{6EI}, \quad \delta(l, l) = \frac{l^2}{3EI}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение колебаний груза запишется в виде

$$\frac{ml^3}{3EI} \ddot{\varphi} + \varphi = \frac{P(t)(2l - l_0)^2}{6EI}.$$

Вынужденные колебания балки возникнут и в том случае, когда вертикальная сила не меняется по модулю ($P = \text{const}$), но точка ее приложения движется вдоль балки. При этом абсцисса l_0 , а вместе с этим и коэффициент влияния $\delta(l, l_0)$ становится функциями времени, так что дифференциальное уравнение принимает вид (если $l_0 = u(t)$):

$$\frac{ml^3}{3EI} \ddot{\varphi} + \varphi = \frac{P(2l - u(t))^2 l^2}{6EI}. \quad (5.9)$$

Решение этого уравнения см. ниже в примере 5.5.

2. Случай кинематического возбуждения. К дифференциальному уравнению (5.6) сводятся не только задачи о силевом возбуждении, но также задачи о кинематическом возбуждении, когда колебания механической системы вызываются некоторым заданным (в частности, колебательным) движением каких-либо ее точек.

Так, например, если к грузу маятника не приложена сила, но ось шарнира обладает горизонтальной подвиж-

ности и ей задаем колебания $x = x(t)$, то они вызовут колебания и самого маятника (рис. 5.1, а). Для того чтобы получить дифференциальное уравнение абсолютного движения, запишем (сравнить с выражением (3.7)):

$$T = \frac{m(\ddot{x} + \dot{x}^2)}{2}, \quad \Pi = \frac{\pi \dot{x}^2}{2}, \quad Q = 0; \quad (5.10)$$

откуда для угла φ следует уравнение Лагранжа

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = -\frac{\ddot{x}}{l}. \quad (5.11)$$

Как видно, оно совпадает с основным дифференциальным уравнением (5.8), составленным для случая внешнего возбуждения, если ввести эквивалентную вынуждающую силу $Q(t) = -m\ddot{x}$.

Выпишем несколько имен траекторий этой задачи, если рассматривать движение маятника как сложное, состоящее из заданного поступательного перемещения движения вместе с шарниром и местного относительного поворотного движения. Дифференциальное уравнение относительного движения следует составить, считая переносной силой инерции $-m\ddot{x}$, момент которой составляет $-m\ddot{x}l$. При этом предел в уравнении моментов

$$-m\ddot{x}l\theta - m\ddot{x}l = m\ddot{x}l\varphi, \quad (5.12)$$

которое совпадает с уравнением (5.11).

Формально системы, показанные на рис. 5.1, а, и, обладающие различным типом ступенной свободы, так как подвижные системы на рис. 5.1, а описываются двумя координатами — углом φ и линейным перемещением x . Но координата $x(t)$ задана, она не свободна, так что второй ступенной свободой системы в сущности не обладает; свободной координатой, т. е. неизвестной функцией времени, является только угол отклонения φ , как мы видели, для нее выводится достаточно общее дифференциальное уравнение (5.6).

Нельзя, в этой задаче только составить и второе уравнение Лагранжа, составляющее координату x . Но такого уравнения определяющей приращением и ось шарнира сила, необходимая для создания заданного движения шарнира; потому, вопрос об определении этой силы имеет и не является.

На рис. 5.2 показаны еще два примера систем с кинематическим возбуждением колебаний. В первом случае вертикальные колебания упруго подвешенного груза 1 вызываются заданными вертикальными колебаниями платформы 2; во втором случае крутильные колебания

диска 1 вызываются из-за вращательных колебаний опорного диска 2, которые здесь считаются заданными.

В подобных случаях уравнение составляется дифференциальное уравнение относительного движения тел, обозначенных на рисунках цифрами 1. Результаты решения такой задачи позволяют сразу определить усилия в упругих элементах.

Пример 5.1. Составить дифференциальное уравнение вертикальных колебаний упруго подвешенного груза при известном движении колеса на шарнирном участке пути (рис. 5.2). Профиль участка задан уравнением

$$y = A(1 - e^{-\eta x}),$$

где A — предел, к которому стремится высота подвески; η — параметр, характеризующий крутизну профиля. Кроме того, даны: m — масса груза, l — масса распределения центра тяжести груза при его относительном повороте, c — коэффициент жесткости упругой подвески, v — постоянная горизонтальная скорость груза. Размеры колеса показаны на рис. 5.2.

Рассмотрим движение груза относительно поступательного движения осей 1, 2, которые вместо шарнира с центром колеса. Ось 2 совпадает с вертикальной осью подвески, а горизонтальная ось 1 проходит по высоте l , считая от уровня профиля. Тогда при движении по поверхности абсолютная вертикальная координата начала горизонтальной координатной системы определяется выражением

$$y_0 = A(1 - e^{-\eta x}) + l.$$

Подставляя сюда $x = vt$ и дважды дифференцируя по времени, найдем переносное вертикальное ускорение

$$w_0 = -A\eta^2 v^2 e^{-\eta vt}$$

и переносную силу инерции упруго подвешенного груза

$$F_0 = m\dot{w}_0 = -m\eta^2 v^2 A e^{-\eta vt}.$$

Дифференциальное уравнение относительного движения груза имеет вид

$$m\ddot{\eta} = -c\eta + m\eta^2 v^2 A e^{-\eta vt};$$



Рис. 5.2

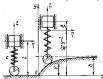


Рис. 5.3

приводя его к форме (5.4), имеем

$$\ddot{q} + k^2 q = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t.$$

Решение этого уравнения см. ниже в примере 5.4 (стр. 116—118).

3. Действие гармонической вынуждающей силы. Обращаясь теперь к решению основного дифференциального уравнения (5.6) и считая ее случай, когда обобщенная



Рис. 5.4

сила связана с ее частотой. Решение дифференциального уравнения

$$\ddot{q} + k^2 q = \frac{H}{a} \sin \omega t \quad (5.13)$$

состоит из двух частей: 1) решения однородного уравнения $\ddot{q} + k^2 q = 0$, а именно: $C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$; 2) частного решения уравнения (5.13), которое при $\omega \neq k$ следует искать в виде $A \sin \omega t$. Подставляя это выражение в (5.13), найдем, что $A = \frac{H}{a(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t$. Таким образом, решение уравнения (5.13) при произвольных начальных условиях имеет вид

$$q = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \frac{H}{a(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

В случае нулевых начальных условий, полагая $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$, получаем

$$C_1 = -\frac{\omega H}{k^3(k^2 - \omega^2)}, \quad C_2 = 0.$$

Сократившись,

$$q = \frac{H}{a(k^2 - \omega^2)} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin kt \right). \quad (5.14)$$

Полученное решение представляет разность двух гармонических составляющих с различными частотами. В действительности этот процесс можно наблюдать лишь в самом начале, так как неучтенные при составлении уравнения силы трения вызывают постоянное затухание колебаний с обобщенной частотой k (см. ниже § 6). Поэтому на истечение некоторого времени колебания становятся практически монотонными с частотой ω .

Если частоты ω и k близки между собой, то возникают биения, или востор при сложении двух гармонических колебаний (см. § 4, рис. 4.5); однако и в этом случае с течением времени и пространством неслучайно-ем одной из гармоник (с частотой k) движение будет все больше приближаться к монотонному с частотой ω .

Таким образом, наиболее существенная, стационарная часть процесса (затухающие вынужденные колебания) описывается первым членом выражения (5.14)

$$q = \frac{H}{a(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t. \quad (5.15)$$

Амплитуда этих колебаний, зависящая от частоты ω , определяется выражением

$$A = \frac{H}{a|k^2 - \omega^2|} = \frac{H}{|c - \omega^2|}, \quad (5.16)$$

знаменатель которого (динамическая жесткость) характеризует эффективную жесткость системы при гармоническом возбуждении. Выражение $1/(c - \omega^2)$ определяет амплитуду вынужденных колебаний при единичной амплитуде вынуждающей силы (амплитудно-частотная характеристика, для обозначения которой в советской литературе пользуются аббревиатурой АЧХ).

Выражением (5.16) можно предать вид

$$A = \mu \eta_m.$$

Здесь

$$\mu = \frac{1}{|1 - \omega^2/k^2|} \quad (5.17)$$

— коэффициент динамичности, показывающий, во сколько

но раз амплитуда установившихся вынужденных колебаний больше переменной $\varphi_{ст} = H/c$, вынуждающей статической равнодействующей силой H . Для случая, когда H не зависит от ω , зависимость коэффициента динамичности от отношения частот ω/k представлена графиком на рис. 5.5 (эргономическая кривая).

Как видно, с возрастанием частоты ω от нуля коэффициент динамичности увеличивается и при $\omega/k \rightarrow 1$ стремится к бесконечности. При дальнейшем возрастании



Рис. 5.5



Рис. 5.6

частоты коэффициент динамичности постепенно убывает и при $\omega/k > 12$ становится меньше единицы; в этой области динамический эффект вынуждающей силы слабее, чем при ее статическом действии. Этим свойством часто пользуются в толкании, а именно, для уменьшения колебаний объектов, подверженных действию гармонически вынуждающих сил, уменьшают жесткость упругих связей; при этом собственная частота уменьшается, а вместе с тем возрастает отношение ω/k . Нужно отметить, что согласно (5.13) при $\omega/k < 1$ перемещение находится в фазе с вынуждающей силой, а при $\omega/k > 1$ — в противофазе.

Если $H = K\omega^2$, где K — постоянная (например, в машинах с неэластичными роторами $K = M\gamma$, где M — масса ротора, γ — эксцентриситет центра тяжести, см. рис. 5.4), то согласно формуле (5.16) амплитуда колебаний складывается образом синуса с отношением частот ω/k :

$$A = \frac{K}{k \sqrt{1 - k^2 \omega^2}}.$$

Синхронизирующий резонансный крайня показан на рис. 5.6. В отличие от резонансной кривой на рис. 5.5 при неограниченном возрастании частоты ω амплитуда колебаний стремится не к нулю, а к значению $K/2k$.

Особое состояние системы при $\omega = k$ называется резонансом; для этого состояния решением (5.14) оказывается нулевая, так как оно было получено в предположении, что $\omega \neq k$. В резонансном случае вместо (5.13) нужно исходить из дифференциального уравнения

$$\ddot{y} + k^2 y = \frac{H}{c} \sin kt,$$

решение которого при нулевых начальных условиях имеет вид

$$y = -\frac{H}{2c} (kt \cos kt - \sin kt).$$

Здесь нужно обратить внимание на появление члена $kt \cos kt$, содержащего время или знака косинуса, т. е. неограниченно возрастающего во времени; этот член называется резонансным (искомым). Однако, в § 6, будет установлено, что силы трения ограничивают это возрастание, так что амплитуды колебаний остаются конечной и при $t \rightarrow \infty$.

Пример 5.1. Вектор пути синхронизмального профиля

$$y_0 = A_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (a)$$

(рис. 5.7) с постоянной периодической скоростью v движется упруго поддерживаемый груз массой m . Определить наибольшую допустимую жесткость коэффициента жесткости подвески c , если требуется, чтобы амплитуда колебаний груза не превышала 0,05 A_0 .

Подставим в (a) $t = \omega t$, найдем ordinаты искомого косяка профиля в функции времени:

$$y_0 = A_0 \sin \frac{\pi \omega t}{l}.$$

Рис. 5.7

Обозначим через y абсолютные вертикальные перемещения груза, соответствующие от резонансного уравнения, ищем дифференциальное уравнение $-c(y - y_0) = m\ddot{y}$, или

$$m\ddot{y} + cy = c y_0$$

Отсюда видно, что вынужденные колебания имеют частоту $\nu = \omega \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\omega/\omega_0)}$, т. е. ее амплитуда равна ωA_0 . Следовательно, выражение (5.14) является амплитудой абсолютных колебаний груза:

$$\left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right| = \left| 1 - \frac{\omega^2 \beta^2 \sin^2}{\omega_0^2} \right|,$$

которая по условиям задачи не должна превосходить значения 0,05 A_0 . Следовательно,

$$\frac{1}{\frac{\omega^2 \beta^2 \sin^2}{\omega_0^2} - 1} < 0,05,$$

т. е.

$$\omega < \frac{0,47 \omega_0^2}{\beta}.$$

Пример 5.3. Для условий предыдущего примера определить допустимое значение коэффициента жесткости κ , если требуется, чтобы допустимое усилие в подшипнике не превышало 5 % статического веса груза $m_0 g$.

При пренебрежении вынужденными колебаниями динамическая нагрузка подшипника равна $A - A_0$, с тем самым допустимым усилием в подшипнике составляет

$$\kappa(A - A_0) = \frac{\kappa A_0}{\left| 1 - \frac{\omega^2 \beta^2 \sin^2}{\omega_0^2} \right|}.$$

По условию должно быть

$$\frac{\kappa A_0}{\left| 1 - \frac{\omega^2 \beta^2 \sin^2}{\omega_0^2} \right|} < 0,15 m_0 g.$$

При $\omega = \omega_0$ Отсюда видно, что коэффициент жесткости должен быть либо достаточно малым, увеличивающим перемещение

$$\kappa < \frac{m_0 g}{1 + 20 A_0 \omega_0^2 / g},$$

(при любых значениях безразмерной дробь $20 A_0 \omega_0^2 / g$), либо достаточно большим, уменьшающим перемещение

$$\kappa > \frac{m_0 g}{1 - 20 A_0 \omega_0^2 / g}$$

(при $20 A_0 \omega_0^2 / g < 1$).

4. Действие произвольной вынуждающей силы. Решения дифференциального уравнения (5.5) при произвольной задающей правой части может быть получено с по-

мощью известного из курса математики метода вариации произвольных постоянных. Однако более кратким и ясным путем решения, к изложению которого мы и переходим.

Пример того рассмотрим асимптотическую задачу. Пусть в момент $t = \xi$ в подвижной системе приложен обобщенный импульсный импульс S ; согласно (1.14) при $t > \xi$ решение имеет вид

$$q = q(\xi) \cos k(t - \xi) + \frac{q(\xi)}{k} \sin k(t - \xi).$$

Входящие сюда значения обобщенной координаты и обобщенной энергии непосредственно после приложения импульса равны $q(\xi) = 0$, $\dot{q}(\xi) = \frac{S}{a}$. Следовательно, движение описывается выражением

$$q = \frac{S}{a k} \sin k(t - \xi). \quad (5.18)$$

Функция

$$R(t, \xi) = \frac{\sin k(t - \xi)}{a k},$$

описывающая движение, вызываемое единичным импульсом, назовем *импульсной реакцией системы*.

Теперь будем рассматривать произвольную вынуждающую силу $Q = Q(t)$ как бесконечную последовательность элементарных импульсов $Q(\xi) d\xi$, показанных на рис. 5.8. Подставив в выражение (5.18) $S = Q(\xi) d\xi$, мы найдем колебания, вызываемые действием одного из таких элементарных импульсов. Чтобы определить движение, которое вызывается заданной силой, необходимо сложить влияния всех элементарных импульсов; таким образом, при нулевых начальных условиях находим

$$q = \frac{1}{a k} \int_0^t Q(\xi) \sin k(t - \xi) d\xi. \quad (5.19)$$

Если кроме рассмотренной здесь силы $Q = Q(t)$ в заданные моменты времени $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ (здесь $\xi_n < t$) на



Рис. 5.8

систему действуют конечно мгновенные импульсы $S_0, S_1, \dots, S_i$, то вместо (5.19) будет

$$q = \frac{1}{2k} \left[\int_0^t Q(\xi) \sin k(t - \xi) d\xi + \sum_{i=0}^n S_i \sin k(t - \xi_i) \right].$$

Наряду с (5.19) существует другой вариант решения, который иногда оказывается более удобным. Преобразуем (5.19) с помощью правила интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Положим здесь $Q(\xi) = u$ и $\sin k(t - \xi) d\xi = dv$, находим $dv = Q(\xi) d\xi$ и $v = \frac{1}{k} \cos k(t - \xi)$. Соответственно (5.19) преобразуется к виду

$$q = \frac{1}{2k^2} \left[Q(\xi) \cos k(t - \xi) - \int_0^t \dot{Q}(\xi) \cos k(t - \xi) d\xi \right]_0^t = \\ = \frac{1}{k} \left[Q(t) - Q(0) \cos kt - \int_0^t \dot{Q}(\xi) \cos k(t - \xi) d\xi \right]. \quad (5.20)$$

Этим выражением можно пользоваться только в тех случаях, когда при $t > 0$ функция $Q(t)$ не имеет разрывов, т. е. производная $\dot{Q}(t)$ известна на всем промежутке интегрирования.

Если сила $Q(t)$ претерпевает конечные разрывы $\Delta Q_1, \Delta Q_2, \dots, \Delta Q_i$, и заданные моменты времени $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i$ ($\xi_i < t$) (см. рис. 5.9), то вместо (5.20) будем иметь

$$q = \frac{Q(0)}{k} - \\ - \frac{1}{k} \int_0^t \dot{Q}(\xi) \cos k(t - \xi) d\xi - \\ - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^i \Delta Q_i \cos k(t - \xi_i).$$

Рис. 5.9

Остановимся на двух наиболее частых случаях.

1. Действие кратковременной силы. Пусть сила $Q = Q_0$ внезапно подается в момент $t = 0$, действует в течение малого промежутка времени t_0 , и затем

внезапно исчезает (рис. 5.10). Если t_0 меньше периода свободных колебаний $T/2$, то наибольшее отклонение системы достигается после прекращения силы. Тогда для $t > t_0$ согласно решению (5.19)

$$q = \frac{Q_0}{2k} \int_0^{t_0} \sin k(t - \xi) d\xi = \frac{2Q_0}{k} \sin \frac{k t_0}{2} \sin k \left(t - \frac{t_0}{2} \right).$$

Наибольшее отклонение равно

$$q_{\max} = \frac{2Q_0}{k} \sin \alpha,$$

где $\alpha = t_0/T$. Коэффициент динамичности, равный отношению $q_{\max}$ к статическому перемещению $q_{st} = Q_0/k$,

$$\mu = 2 \sin \alpha,$$

определяется таким значением α (рис. 5.11) и не превосходит значения 2.

Нужно заметить, что если постоянная сила действует в течение малой доли периода свободных колебаний, то



Рис. 5.10

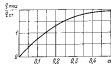


Рис. 5.11

действие такой силы во много раз меньше статического; например, при $t_0/T = 0.01$ можно найти $\mu = 0.063$ — динамический эффект в 16 раз меньше статического. Вообще действие кратковременной силы определяется не столько ее силой, сколько значением ее амплитуды. В самом деле,

$$q = \frac{1}{2k} \int_0^{t_0} Q(\xi) \sin k(t - \xi) d\xi = \\ = \frac{1}{2k} \left[\sin kt \int_0^{t_0} Q(\xi) \cos k\xi d\xi - \cos kt \int_0^{t_0} Q(\xi) \sin k\xi d\xi \right]. \quad (5.21)$$

Так как $k_1^2 = \frac{2\pi}{T} k$ меньше, чем величина $\frac{2\pi}{T} t_0$, которую здесь следует считать малой, то k_1^2 — малое число. Поэтому можно принять $\sin k_1^2 t = 0$, $\cos k_1^2 t = 1$ и вместо (5.2f) получим

$$q = \frac{\sin k_1^2 t}{2k} Q(0) \dot{e}_k^2 = \frac{S \sin k_1^2 t}{2k},$$

где $S = \int_0^{t_0} Q(0) \dot{e}_k^2 dt$ — импульс силы.

Таким образом, движение приблизительно определяется импульсом кратковременной силы; подробности ее изменения в промежуток времени t_0 мало влияют на результаты.

2. Действие линейно возрастающей по времени силы $Q(t) = \beta t$ ($\beta > 0$);

здесь β есть скорость изменения силы (рис. 5.12, а). По формуле (5.30) находим

$$q = \frac{1}{\varepsilon} \left[\beta t - \beta \int_0^t \cos k(t-\tau) d\tau \right] = \frac{\beta t}{\varepsilon} - \frac{\beta}{\omega k} \sin k_1^2 t.$$

График движения показан на рис. 5.12, б и является суммой линейного и синусоидального слагаемых. Линейное слагаемое представляет изменение обобщенной координаты, рассчитанное в предположении безмассовости системы (математическое пружинное), а синусоидальное слагаемое отражает колебательную часть решения; амплитуда этих колебаний, равная $\beta/\omega k$, увеличивается с возрастанием скорости изменения силы β .

Пример 5.4. Найти относительные колебания груза в системе, рассмотренной выше в примере 5.1 (сер. 505–506).

Исходим движению данного груза найдем путем решения дифференциального уравнения, составленного выше в примере 5.1. Но вместо этого уравнения видно, что вынуждающая сила (это служит возмущающая сила воздуха) равна

$$Q(t) = \alpha h^2 v_0 e^{-\gamma t},$$

Подставляя это выражение в решение (5.19), находим

$$q = h \frac{\gamma^2 v_0}{\omega^2 + \gamma^2 v_0^2} \left(e^{-\gamma t} + \frac{\gamma v_0}{k} \sin k_1^2 t - \cos k_1^2 t \right).$$

При достаточно больших значениях времени можно приближать первым членом в скобках и рассматривать только процесс установившихся колебаний:

$$q = h \frac{\gamma^2 v_0}{\omega^2 + \gamma^2 v_0^2} \left(\frac{\gamma v_0}{k} \sin k_1^2 t - \cos k_1^2 t \right).$$

Амплитуда этих колебаний равна

$$A = h \left(\frac{\gamma v_0}{k} \right)^2 / \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma v_0}{k} \right)^2}.$$

В случае, если $\gamma v_0 \ll k$ (это соответствует реальному условию), находим

$$A = \left(\frac{\gamma v_0}{k} \right)^2 h.$$

т. е. амплитуда относительных колебаний пропорциональна квадрату скорости v_0^2 .

Пример 5.5. Найти движение груза, находящегося на конце вертикальной балки, если сила P оказывает постоянное значение, но точка ее приложения движется от начала конца балки с постоянной скоростью v (рис. 5.1, в).

Дифференциальное уравнение движения груза было получено ранее в задаче (5.9), т. е.

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{P v^2 t^2 (2l - vt)}{2m l^3},$$

где $k^2 = 3Mg/(m l^3)$. Согласно (5.19) имеем при $t < l/v$

$$x = \frac{1}{\omega k} \int_0^t \frac{P v^2 t^2 (2l - vt)}{2m l^3} \sin k(t-\tau) d\tau,$$

или, после вычислений,

$$x = \frac{P v^2}{2m k^3 l^3} \left[-v t^2 + 2l^2 + \frac{6}{k^2} (k l - l + t \cos k_1^2 t) - \frac{6v}{k^2} \sin k_1^2 t \right].$$

Для вертикальной скорости груза находим

$$\dot{x} = \frac{3P v^2}{2m k^3 l^3} \left[2l - v t + \frac{2v}{k^2} \left(t - \frac{l}{v} \sin k_1^2 t - \cos k_1^2 t \right) \right].$$

В

Полученные выражения можно привести к следующему виду:

$$x = x_{ст} \left[\frac{3\pi^2 - \tau^2}{2} + \frac{3}{\pi^2} (\tau - 1 + \cos \alpha) - \frac{3}{\pi^2} \sin \alpha \right],$$

$$\dot{x} = \dot{x}_{ст} \left[\frac{3(2\pi - \tau^2)}{2\pi} + \frac{2}{\pi^2} (1 - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha) \right].$$

Для $x_{ст} = P/(m\omega^2)$ — статический баланс при статическом действии приложенной на массу силы P , $\alpha = \Delta l/l$ и $\tau = \pi(1 - \Delta l/l)$ — безразмерные параметры. В момент, когда сила спадает с балки, $\tau = 1$ и $\alpha = 0$.

$$x_1 = x_{ст} \left[1 + \frac{3(2\pi \sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{\pi^2} \right],$$

$$\dot{x}_1 = \frac{3\dot{x}_{ст}}{\pi^2} \left[\frac{\alpha^2}{2} + 1 - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \right].$$

Так как в момент прекращения действия отклоненной балки x и скорости $\dot{x}$ равны нулю, то дальнейшее движение системы будет происходить по закону свободных колебаний

$$x = x_1 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_1}{\omega} \sin \omega t$$

(в момент времени t от момента, когда сила спадает с балки). Наибольшее отклонение составит

$$x_{\max} = \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{\dot{x}_1}{\omega}\right)^2}.$$

Вычисления показывают, что оно может превышать значение статического прогиба не более чем на 14–15 %.

5. Действие периодической вынуждающей силы. Во многих технических приложениях возникает задача

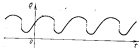


Рис. 5.13

о вынужденных, вызываемых действием гармонической, но периодической силой (рис. 5.13)

$$Q(t) = Q_0 \sin \omega t, \quad (5.22)$$

где T — период вынуждающей силы. На стр. 107 в связи со случаем гармонического возбуждения колебаний было отмечено, что величина вынужденных сопротивлений по-прежнему зависит от частоты, происходящая с собственной частотой, и можно принять, что на источнике некоторого времени обобщенная координата является в критическом состоянии вынуждающей силой по закону (5.15). Те же соображения позволяют и в рассмотренном здесь случае периодического возбуждения ограничиться учетом только установившихся вынужденных колебаний. Для решения этой задачи можно воспользоваться двумя путями.

Первый из них основан на разложении функции (5.22) в ряд Фурье:

$$Q(t) = \frac{Q_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (G_n \cos n\omega t + H_n \sin n\omega t), \quad (5.23)$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$G_n = \frac{2}{T} \int_0^T Q(t) \cos n\omega t dt, \quad H_n = \frac{2}{T} \int_0^T Q(t) \sin n\omega t dt \quad (5.24)$$

$$(n=0, 1, 2, \dots).$$

Записав уравнение (5.5) в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{Q_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (G_n \cos n\omega t + H_n \sin n\omega t),$$

учтем, что система линейна; это значит, что можно рассмотреть по отдельности действие каждого из слагаемых вынуждающей силы и найти установившиеся вынужденные колебания, а затем сложить полученные результаты:

$$x = \frac{1}{\omega_0^2} \left[\frac{Q_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n \cos n\omega t + H_n \sin n\omega t}{1 - n^2 \omega^2 / \omega_0^2} \right]. \quad (5.25)$$

Таким образом, движение, вызываемое полугармонической вынуждающей силой, также является полугармоническим. Конечно, отношение между амплитудами гармоник этого движения не равно отношению между амплитудами соответствующих гармоник вынуждающей силы; в частности, может случиться, что какая-либо n -я

составляющая вынуждающей силы с относительно по большой амплитудой вынуждает свободное колебательное движение. Это будет тогда, когда частота ω этой гармонической составляющей частоты k , так как при этом знаменатель соответствующего члена суммы (5.23) близок к нулю. При равенстве частот $\omega = k$ наступают резонанс (за исключением случаев, когда соответствующие величины C_1 и B_1 равны нулю).

Описанный способ отыскания выделяет основные возможности резонансных режимов, но не очень удобен, так как приводит к бесконечным рядам, которые не всегда достаточно быстро сходятся.

Рассмотрим теперь иной способ, который приводит к замкнутому решению для установившихся вынужденных колебаний. Рассматривая действие периодической силы (5.22), будем рассуждать так: решение $q = q(t)$, имеющее тот же период T , что и y сила, т. е. оно должно удовлетворять равенству периодичности:

$$q - q(0) = q(T), \quad \dot{q} - \dot{q}(0) = \dot{q}(T), \quad (5.25)$$

где q_0 и $\dot{q}_0$ — обобщенная координата и обобщенная скорость в момент, принимаемый за начало отсчета времени t . Движение в интервале $[0, T]$ описывается вынужденным

$$\ddot{q} = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt + \frac{1}{\omega^2} \int_0^t Q(\xi) \sin k(t - \xi) d\xi, \quad (5.27)$$

которое является обобщением решения (5.19) на случай нулевых значений q_0 и $\dot{q}_0$.

Для дальнейшего необходимо образовать выражение обобщенной скорости $\dot{q}$. При дифференцировании по времени t интервала, входящего в (5.27), должно получиться два слагаемых: первое представляет производную по верхнему пределу t и равно подынтегральной функции при $\xi = t$, а второе — результат дифференцирования по t входящего как параметр под знак интеграла. Но второе из этих слагаемых равно нулю и, таким образом,

$$\dot{q} = -q_0 k \sin kt + \dot{q}_0 \cos kt + \frac{1}{\omega^2} \int_0^t Q(\xi) \cos k(t - \xi) d\xi. \quad (5.28)$$

Для момента времени $t = T$ выражения (5.27) и (5.28) дают

$$q(T) = q_0 \cos kT + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kT + \frac{1}{\omega^2} \int_0^T Q(\xi) \sin k(T - \xi) d\xi, \quad (5.29)$$

$$\dot{q}(T) = -q_0 k \sin kT + \dot{q}_0 \cos kT + \frac{1}{\omega^2} \int_0^T Q(\xi) \cos k(T - \xi) d\xi.$$

Теперь введем сокращенные обозначения для постоянных величин:

$$\int_0^T Q(\xi) \cos k\xi d\xi = C_2, \quad \int_0^T Q(\xi) \sin k\xi d\xi = S_2, \quad (5.30)$$

и перепишем выражения (5.29) в виде

$$\begin{aligned} q_1 &= q_0 \cos kT + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kT + \frac{\sin kT}{\omega^2} C_2 = \frac{\cos kT}{\omega^2} S_2, \\ \dot{q}_1 &= -q_0 k \sin kT + \dot{q}_0 \cos kT + \frac{\cos kT}{\omega^2} C_2 + \frac{\sin kT}{\omega^2} S_2. \end{aligned} \quad (5.31)$$

В левых частях этих соотношений заменим $q(T)$ на q_0 и $\dot{q}(T)$ на $\dot{q}_0$, как это следует из условий периодичности решения (5.25). Из соотношения (5.31) представляется собой простую систему двух алгебраических уравнений относительно неизвестных q_0 и $\dot{q}_0$; решив ее, найдем

$$q_0 = \frac{1}{\omega^2} \left[C_2 \cotg \frac{kT}{2} + S_2 \right], \quad \dot{q}_0 = \frac{1}{\omega^2} \left[S_2 \cotg \frac{kT}{2} - C_2 \right]. \quad (5.32)$$

Теперь с помощью выражения (5.27) можно окончательно получить

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{\omega^2} \left[\left(C_2 \cotg \frac{kT}{2} + S_2 \right) \cos kt + \right. \\ &\quad \left. + \left(S_2 \cotg \frac{kT}{2} - C_2 \right) \sin kt + 2 \int_0^t Q(\xi) \sin k(t - \xi) d\xi \right]. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Это решение представляет движение в промежуток времени $[0, T]$, и в него можно формально подставить $t > T$. Однако, имея график $q(t)$ для $0 \leq t \leq T$, можно

Вследствие периодичности решения без потери общности можно считать его в соседних промежутках $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$, ...

Пример 5.6. Найти резонансные амплитуды колебания, возбуждаемые в линейной системе с одной степеню свободы



Рис. 5.14

функцией $q(t) = Q_0$ кусочно-постоянной импульсной силой $Q(t+T) = Q(t)$ (рис. 5.14):

$$Q(t) = Q_0 \quad \text{при} \quad 0 < t < \frac{T}{2}, \quad Q(t) = -Q_0 \quad \text{при} \quad \frac{T}{2} < t < T.$$

Получим разложение в ряд Фурье, по формулам (5.24) найдем

$$C_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots);$$

$$H_n = \frac{4Q_0}{\pi n} \quad (n = 1, 3, 5, \dots); \quad H_n = 0 \quad (n = 2, 4, 6, \dots),$$

и согласно (5.23) возмущающие колебания представляются суммой четных гармоник:

$$q = \frac{4Q_0}{\pi n} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin nt}{n(1 - (n\omega/k)^2)}.$$

При $k/n = \pi$ ($n = 1, 3, 5, \dots$) наступит резонанс.

Найдем теперь явный вид колебаний решения. Для этого предварительно вычленим по формулам (5.20):

$$C_2 = \frac{2Q_0}{\pi} \sin \frac{kT}{2} \left(1 - \cos \frac{kT}{2}\right), \quad C_0 = -\frac{2Q_0}{\pi} \cos \frac{kT}{2} \left(1 - \cos \frac{kT}{2}\right).$$

Тогда выражение (5.23) примет вид

$$z = \frac{Q_0}{\pi} \left(1 - \cos kt - \cos \frac{kT}{2} \sin kt\right) \quad \left(0 < t < \frac{T}{2}\right),$$

$$z = -\frac{Q_0}{\pi} \left[1 - \cos k\left(t - \frac{T}{2}\right) - \cos \frac{kT}{2} \sin k\left(t - \frac{T}{2}\right)\right] \quad \left(\frac{T}{2} < t < T\right).$$

Как видно, этот результат значительно более удобен для последующих вычислений, чем ряд, полученный выше по первому способу. Отметим, что в этой записи сразу можно выделить предельное условие резонанса $kT/2 = \pi/2$ ($n = 1, 3, 5, \dots$).

Пример 5.7. Найти предельные относительные линейной системы с одной степенью свободы от положения равновесия, если на нее действует периодическое возмущающее воздействие, описанное на рис. 5.15, а. Найдем период вынужденных колебаний $2\pi/k$, амплитуду периода вынужденных T , а также амплитуду собственного периода $2\pi/\omega$.

В данном случае различие в ряд колебаний несущественно из-за его медленной скорости. Воспользуемся вторым способом

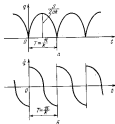


Рис. 5.15

разложения в ряд Фурье по началу отсчета времени момент, непосредственно следующий за моментом приложения импульса вынуждения. По формулам (5.20) найдем

$$C_n = \delta_n, \quad C_0 = 0.$$

Кроме того, в данном случае

$$\int_0^T Q(t) \sin k(t-t) dt = \delta \sin kt.$$

Получим из (5.23) и учитывая, что $kT = \pi$, имеем

$$z(t) = \frac{S \sin(\pi t/T)}{2\pi k}.$$

Наибольшие относительные разбежки $S/(2\pi k)$, т. е. явные колебания, для в случае действия описанного импульса. График вынужденных колебаний показан на рис. 5.15, б. На графике скорости (рис. 5.15, в) ясно видны разрывы скорости, обусловленные приложениям импульсов.

§ 6. Системы с одной степенью свободы при наличии линейной восстанавливающей силы и трения

Полным трением на вынужденные колебания, происходящие вдали от резонансных режимов, обычно пренебрегают, и в практических расчетах им чаще всего пренебрегают. Однако если резонанса учет трения становится необходимым; без этого ошибки в определении амплитуд вынужденных колебаний становятся недопустимо большими.

При произвольной заданной вынуждающей силе анализ колебаний относительно прост при условии, что трение в системе — линейное. Значительно сложнее исследование колебаний систем с нелинейным трением — даже в простейшем случае часто гармонической вынуждающей силы приходится довольствоваться лишь приближенным решением.

1. Действие гармонической вынуждающей силы. Если трение в системе линейное, то в случае вынужденных колебаний дифференциальное уравнение (2.6) должно быть дополнено членом, выражающим действие вынуждающей силы; здесь примем ее в виде

$$Q(t) = H \sin \omega t, \quad (6.1)$$

так что получим

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = H \sin \omega t. \quad (6.2)$$

Введем преобразование

$$b = \frac{h}{\omega_0}, \quad k^2 = \frac{c}{a}, \quad (6.3)$$

придем к уравнению в следующий форме:

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + k^2 q = \frac{H}{a} \sin \omega t. \quad (6.4)$$

Его общее решение имеет вид

$$q = e^{-ht} (C_1 \sin k_0 t + C_2 \cos k_0 t) + \frac{H}{a \sqrt{k^2 - \omega^2 + 4h^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \gamma), \quad (6.5)$$

где

$$k_0 = \sqrt{k^2 - h^2} \quad (6.6)$$

если частота затухающих колебаний системы, а угол γ , характеризующий оставшиеся фазы перемещения от фа-

зы силы, определяется выражением

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2h\omega}{k^2 - \omega^2}; \quad (6.7)$$

константы C_1 и C_2 находятся из начальных условий.

Первая часть полученного решения представляет собой колебания с частотой k_0 , которые с течением времени затухают и вскоре после начала процесса становятся

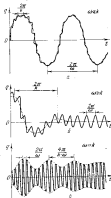


Рис. 6.1

практически несущественными. Основные значения имеет вторая часть общего решения

$$q = \frac{H}{a \sqrt{k^2 - \omega^2 + 4h^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \gamma), \quad (6.8)$$

описывающая установившиеся колебания, происходящие с частотой возбуждения.

Постепенное установление стационарного колебательного процесса с частотой ω иллюстрировано на рис. 6.1 для трех случаев. В первом случае (рис. 6.1, а), когда $\omega \ll k$, в начале движения основные колебания частоты ω сопровождаются затухающими колебаниями большей частоты. В противоположном случае, когда $\omega \gg k$ (рис. 6.1, б) на основные колебания с частотой ω накладываются затухающие колебания с меньшей частотой k . Наконец, при близких значениях частот k и ω движение имеет характер биений, которые постепенно затухают (рис. 6.1, в).

Амплитуда установившихся колебаний определяется выражением

$$A = \frac{H}{\varepsilon \sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}} = \frac{H}{\varepsilon \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2}{k^2}}} \quad (6.9)$$

Отношение амплитуды A к статическому перемещению $q_{ст} = H/\varepsilon$ равно

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2}{k^2}}} \quad (6.10)$$

и представляет собой коэффициент динамичности. Зависимость коэффициента динамичности от отношения частот ω/k показана на рис. 6.2, а для различных значений $2k/\varepsilon$, характеризующих перемещающее действие линейного трения; эти графики дополняют рис. 5.5, который относится к системам без трения.

Максимумы кривых $\mu(\omega/k)$ лишь незначительно смещены влево от значения $\omega/k = 1$; поэтому резонансное значение динамического коэффициента обычно определяют при $\omega = k$ по выражению

$$\mu_{рез} = \frac{k}{2\varepsilon} \quad (6.11)$$

Согласно (2.12) это значение выражается через логарифмический декремент:

$$\mu_{рез} = \frac{\pi}{\Delta} \quad (6.12)$$

Иногда резонансное значение коэффициента динамичности называют добротностью системы: чем больше добротность, тем острее резонансный пик.

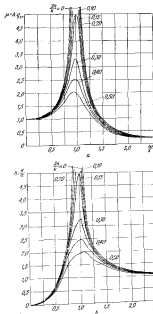


Рис. 6.2

В этом параграфе мы предположим, что амплитуда вынуждающей силы имеет заданное постоянное значение, но зависящее от частоты ω . Если амплитуда B вынуждающей силы пропорциональна квадрату частоты ($B = K\omega^2$), то, подобно (6.9), находим

$$A = \frac{K\omega^2}{\omega^4 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4\eta^2\omega^2}{k^4}}} \quad (6.13)$$

На рис. 6.2, б показаны графики зависимости относительной амплитуды A_0/K от значений ω/k при различных значениях отношения $2\eta/k$.

Пример 6.1. Вертикальная вынуждающая сила (6.1) действует на тело массой m , которое связано с системой пружин и демпферов (рис. 6.2, а); c — коэффициент жесткости системы пружин; b — коэффициент вязкости демпфера. Определить

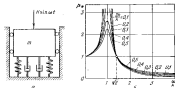


Рис. 6.2

амплитуду силы, передаваемой на основание пружинами и демпфером при установившемся вынужденном колебательном движении.

Исходящая сила, передаваемая на основание, определяется выражением

$$N = k\dot{x} + c\dot{x},$$

в котором $\dot{x}$ — вертикальное перемещение тела, вызываемое от основания движением.

Подставляя сюда согласно (6.8) — (6.10)

$$\dot{x} = \frac{\mu R}{c} \sin(\omega t - \gamma),$$

получим после замены $b = 2\eta\omega/k^2$

$$N = \mu R \left[\sin(\omega t - \gamma) + \frac{2\eta\omega}{c} \cos(\omega t - \gamma) \right].$$

Максимальное значение силы N равно

$$N_{\max} = \mu R \sqrt{1 + \frac{4\eta^2\omega^2}{c^2}}.$$

Посредством отношения $N_{\max}/R$, называемого коэффициентом передачи силы, определяем, во сколько раз амплитуда силы, передаваемой основанием, больше амплитуды заданной вынуждающей силы; она равна

$$K_s = \frac{N_{\max}}{R} = \sqrt{1 + \frac{4\eta^2\omega^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4\eta^2\omega^2}{k^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4\eta^2\omega^2}{k^4}}}.$$

На рис. 6.3, в изображен график зависимости коэффициента передачи силы от отношения ω/k при различных значениях $2\eta/k$. Можно заметить, что все кривые, построенные от коэффициента жесткости k , пересекаются в точке с координатами $(\sqrt{2}; 1)$; при $\omega/k < \sqrt{2}$ действие демпфера способствует снижению амплитуды силы, передаваемой на основание, а при $\omega/k > \sqrt{2}$ (как это бывает в хорошо амортизированных системах) — эту силу увеличивает.

2. Действие произвольной вынуждающей силы. В общем случае, когда вынуждающая сила представляет собой произвольную заданную функцию времени $Q(t)$, следует исходить из дифференциального уравнения

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = Q(t), \quad (6.14)$$

общее решение которого можно получить способом, которым мы пользовались в § 5 при выводе формул (5.19).

Пусть в системе в момент t прикладывается мгновенный импульс величиной S . Последующий процесс представляется собой затухающие колебания, описываемые выражением (2.9). Подставляя A и α согласно из условий в начале движения, — при $t = \frac{1}{2}$ должно быть $\dot{x} = 0$ и $x = S/k$:

$$A = \frac{Se^{\alpha t}}{\omega k}, \quad \alpha = -k_0 \frac{1}{2}.$$

Таким образом, движение, вызванное однократным импульсом, описывается законом

$$q = \frac{Se^{-k_0(t-1/2)}}{\omega k_0} \sin k_0(t - \frac{1}{2}). \quad (6.15)$$

Рассматривая вынуждающую силу как последовательность элементарных импульсов $Q(\frac{1}{2})d\frac{1}{2}$ и интегрируя

(6.15), получим для нулевых начальных условий решение

$$y = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t Q(\xi) e^{-\lambda(t-\xi)} \sin k_0 (\xi - \eta) d\xi. \quad (6.16)$$

В некоторых случаях удобно пользоваться решением в явном виде, подобным выражению (5.30). Если функция $Q(t)$ дифференцируема, то поступая, как в § 3, получим

$$y = \frac{1}{\omega_0} \left(Q(t) - Q(0) e^{-\lambda t} \left(\cos k_0 t + \frac{\lambda}{k_0} \sin k_0 t \right) - \int_0^t Q(\xi) e^{-\lambda(t-\xi)} \left[\cos k_0 (\xi - \eta) + \frac{\lambda}{k_0} \sin k_0 (\xi - \eta) \right] d\xi \right). \quad (6.17)$$

Если же сила $Q(t)$ претерпевает конечные разрывы $\Delta Q_1, \Delta Q_2, \dots$ в заданные моменты времени $\xi_1, \xi_2, \dots$, то

$$y = \frac{1}{\omega_0} \left(Q(t) - \int_0^t Q(\xi) e^{-\lambda(t-\xi)} \left[\cos k_0 (\xi - \eta) + \frac{\lambda}{k_0} \sin k_0 (\xi - \eta) \right] d\xi - \sum_{i=1}^n \Delta Q_i e^{-\lambda(t-\xi_i)} \left[\cos k_0 (\xi - \xi_i) + \frac{\lambda}{k_0} \sin k_0 (\xi - \xi_i) \right] \right). \quad (6.18)$$

Пример 6.1. Найти движение системы, вызываемое действием линейно возрастающей по времени силы, график которой показан на рис. 6.12 с учетом малых сопротивления, характеризующих коэффициентом λ .

В данном случае удобно пользоваться решением в форме (6.17).

Подставляя $\dot{Q} = \lambda$, находим

$$y = \frac{\beta t}{c} - \frac{\beta e^{-\lambda t} \sin k_0 t}{c k_0}$$

Колебания постепенно затухают и движение приближается к движению материальной точки под действием силы $y = \beta t/c$ (рис. 6.4).

3. Действие периодической вынуждающей силы. Если сила задана в виде периодической функции периода T , то, как и в § 5 и 3, вынуждаемые ею установившиеся



Рис. 6.4

иногда вынужденные колебания можно найти двумя способами.

Часто всего выходит из того, что периодическую функцию $Q(t)$ можно разложить в ряд Фурье и затем суммировать движения, вызываемые каждой из гармоник. Тогда на основе решения (6.8) можно, подобно (5.25), записать для установившихся колебаний

$$y = \frac{1}{\omega_0} \left[\frac{Q_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n \cos(n\omega t - \gamma_n) + R_n \sin(n\omega t - \gamma_n)}{\sqrt{\left(1 - \frac{n^2 \omega^2}{k_0^2}\right)^2 + \frac{n^4 \omega^4}{k_0^4}}}\right]. \quad (6.19)$$

Кроме обозначений, введенных выше в связи с выражением (5.25), здесь обозначено:

$$12 \gamma_n = \frac{2\lambda n \omega}{\omega_0^2 - n^2 \omega^2}. \quad (6.20)$$

Как уже указывалось, ряд (6.19) всегда сходится достаточно быстро и для достаточно точного описания движения приходится учитывать значительное число членов ряда. От этого недостатка свободен другой способ, который основан на свойствах периодичности установившегося процесса движения.

Примем некоторый момент за начало отсчета времени и обозначим, как обычно, ϕ_0 — начальное значение обобщенной координаты, $\dot{\phi}_0$ — начальное значение обобщенной скорости. Тогда, подобно (5.27) и (5.28), найдем

$$\begin{aligned} y = e^{-\lambda t} & \left(\frac{\dot{\phi}_0 + \frac{\lambda \phi_0}{k_0}}{k_0} \sin k_0 t + \dot{\phi}_0 \cos k_0 t \right) + \\ & + \frac{1}{\omega_0} \int_0^t Q(\xi) e^{-\lambda(t-\xi)} \sin k_0 (\xi - \eta) d\xi, \\ \dot{y} = e^{-\lambda t} & \left(-\frac{\lambda^2 \phi_0 + \frac{\lambda \dot{\phi}_0}{k_0}}{k_0} \sin k_0 t + \dot{\phi}_0 \cos k_0 t \right) + \\ & + \frac{1}{\omega_0} \int_0^t Q(\xi) e^{-\lambda(t-\xi)} \cos k_0 (\xi - \eta) d\xi - \\ & - \frac{\lambda}{\omega_0} \int_0^t Q(\xi) e^{-\lambda(t-\xi)} \sin k_0 (\xi - \eta) d\xi. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Подставив сюда $t = T$, получим выражения для $q(T)$ и $\dot{q}(T)$. Далее в соответствии с условиями периодичности в левые части вместо $q(T)$ и $\dot{q}(T)$ можно подставить соответственно q_0 и $\dot{q}_0$. Это приводит к двум алгебраическим соотношениям q_0 и $\dot{q}_0$ из уравнений:

$$\begin{aligned} q_0 (e^{bT} - \cos k_b T) - \frac{\dot{q}_0 + k_b}{k_b} k_b T &= \\ &= \frac{1}{2k_b} (C_2 \sin k_b T - S_2 \sin k_b T) \\ q_0 \sin k_b T + \frac{\dot{q}_0 + k_b}{k_b} (e^{bT} - \cos k_b T) &= \\ &= \frac{1}{2k_b} (C_2 \cos k_b T + S_2 \sin k_b T), \end{aligned} \quad (3.22)$$

в которых для краткости введены обозначения

$$\begin{aligned} C_2 &= \int_0^T Q(\xi) e^{b\xi} \cos k_b \xi d\xi, \\ S_2 &= \int_0^T Q(\xi) e^{b\xi} \sin k_b \xi d\xi. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Из уравнений (3.22) находим значения q_0 и $\dot{q}_0$ и, вернувшись к первому из уравнений (3.21), получаем окончательное решение задачи:

$$\begin{aligned} q = \frac{e^{-bt}}{2k_b (1 - 2e^{bT} \cos k_b T + e^{2bT})} \times \\ \times [(e^{bT} (C_2 \sin k_b T - S_2 \cos k_b T) + S_2) \cos k_b t + \\ + e^{bT} (C_2 \cos k_b T + S_2 \sin k_b T) - C_2] \sin k_b t + \\ + \frac{1}{2k_b} \int_0^t Q(\xi) e^{-b(t-\xi)} \sin k_b (t - \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Уравнение (3.24) описывает закон движения системы в интервале времени $[0, T]$. Этот закон затем повторяется в следующих интервалах времени: $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$ и т. д. Если построить график функции (3.24), то заменив его на период, два периода и т. д. получим график движения для следующих (или предыдущих) интервалов времени.

В частном случае, когда трения в системе отсутствует, т. е. $b = 0$, выражение (3.24) переходит в ранее найденное выражение (5.33).

Пример 6.3. Найти движение, которое возникает действием односторонних периодических амплитуд δ . Период импульсов T и значения коэффициентов a, b и c будем считать заданными.

Согласно началу отсчета времени с момента, наступающим сразу после приложения какого-либо импульса, получим по формулам (3.23), так и в примере 5.6, $C_2 = S_2 = 0$. При этом выражение (3.24) приобретает вид

$$q = \frac{Se^{-bt} - D [\sin k_b (T - t) + e^{bT} \sin k_b t]}{2k_b (1 - 2e^{bT} \cos k_b T + e^{2bT})}.$$

При малом отношении периода T импульсов к собственному периоду $2\pi/k_b$ (высокочастотное возбуждение) зависимость $q(t)$ имеет вид, показанный на рис. 6.3, а; при этом за один период T

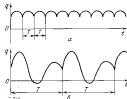


Рис. 6.3

управляет собственными двумя частями одного цикла свободных колебаний и роль внешнего трения относительно невелика. В противоположном случае, когда отношение собственных периодов равно (или больше) единице (низкочастотное возбуждение), зависимость $q(t)$ выглядит показанной на рис. 6.3, б. Здесь за один период T происходит более одного цикла свободных колебаний и становится заметной роль внешнего трения.

Особенно важен случай резонанса, когда период T импульсов в целое число раз больше периода $2\pi/k_b$ свободных колебаний. Обозначим увеличенное число циклов n , такое $T = 2n\pi/k_b$. В этом случае $\sin k_b T = 0$, $\cos k_b T = 1$ движение описывается выражением

$$q = \frac{Se^{-bt} \sin k_b t}{2k_b (1 - e^{-2bT})}.$$

Получим, что аддитивный импульс увеличивает движение

$$q_1 = \frac{\pi \sqrt{3}}{1 - \alpha \sqrt{3}} e^{-\beta t} \sin \omega_0 t,$$

т.е. в случае резонанса, вызванного периодическим ударом, движение описывается тем же выражением, но с действительным коэффициентом:

$$\alpha = \beta, \frac{1}{1 - \alpha \sqrt{3}}.$$

Максимум $1/(1 - \alpha \sqrt{3})$ характеризует величину вынужденной реакции. Для этого максимума приближение можно сделать

$$\beta = \frac{1}{1 - \alpha \sqrt{3}} \approx \frac{1}{\Delta T} = \frac{\omega_0}{2\pi \Delta t}.$$

Отсюда, можно видеть, что, тем самым самым является в прямой реакции, когда $\alpha = \beta \Delta T$ к обобщенной частоте ω_0 , показана на рис. 6.6 для случая $\Delta t = 0.1$.



Рис. 6.6

Рис. 6.6. Зависимость коэффициента β от обобщенной частоты вынуждения $\alpha = \beta \Delta T$ к обобщенной частоте ω_0 , показана на рис. 6.6 для случая $\Delta t = 0.1$.

4. Комплексная форма решения. При анализе установившихся вынужденных колебаний часто используются комплексные величины — комплексной обобщенной силой $\tilde{Q}$ и комплексной обобщенной перемещением (комплексной координаты) $\tilde{q}$. Хотя комплексная форма анализа может показаться несколько искусственной, но она очень удобна, в частности, тем, что позволяет удобно оперировать над функциями типа гармонических колебаний (дифференцирование, интегрирование, решение линейных уравнений и т. д.) выполняется гораздо проще, когда эти функции представляются не в виде синусов и косинусов, а в комплексной форме в виде экспонент (показательных функций).

Переход к комплексной форме может выполняться по-разному. Например, при гармоническом возбуждении колебаний в заданном выборе начала отсчета времени гармоническую вынуждающую силу можно описать выражением $Q = R \sin \omega t$ (такой выбор начала отсчета времени не обязателен; ниже будут рассмотрены иные варианты). Далее находят комплексную вынуждающую силу $\tilde{Q} = R e^{i\omega t}$, мнимая часть которой равна заданной вынуждающей силе; $\text{Im } \tilde{Q} = Q$ ($e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$), и комплексное перемещение $\tilde{q}$, мнимая часть которого

представляет собой искомую обобщенную координату: $\text{Im } \tilde{q} = q$. Таким образом, дифференциальное уравнение (6.2) можно переписать в виде

$$\text{Im}(\alpha \ddot{\tilde{q}} + \beta \dot{\tilde{q}} + \gamma \tilde{q}) = \text{Im}(R e^{i\omega t}),$$

а отсюда — перейти к уравнению, соответствующему комплексным величинам $\tilde{q}$ и $\tilde{Q}$ (*):

$$\alpha \ddot{\tilde{q}} + \beta \dot{\tilde{q}} + \gamma \tilde{q} = R e^{i\omega t}, \quad (6.25)$$

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$\tilde{q} = \tilde{A} e^{i\omega t}. \quad (6.26)$$

Подставляя (6.26) в (6.25) и отбрасывая на общий множитель $e^{i\omega t}$, получим уравнение относительно комплексной амплитуды $\tilde{A}$, из которого находим

$$\tilde{A} = \frac{R}{\gamma - \alpha \omega^2 + i \beta \omega}. \quad (6.27)$$

Знаменатель правой части

$$F = \gamma - \alpha \omega^2 + i \beta \omega \quad (6.28)$$

называется комплексной динамической жесткостью. Таким образом, комплексная амплитуда вынужденных колебаний равна отношению амплитуды гармонической вынуждающей силы и комплексной динамической жесткости системы. Напротив, обратная комплексной динамической жесткости

$$W = \frac{1}{\gamma - \alpha \omega^2 + i \beta \omega} \quad (6.29)$$

представляет собой частотную характеристику (комплексную динамическую податливость) системы. Как видно, частотная характеристика системы определяет комплексную амплитуду вынужденных колебаний при единичной амплитуде вынуждающей силы.

* Вместо вместо уравнения (6.25) пишут

$$\alpha \ddot{\tilde{q}} + \beta \dot{\tilde{q}} + \gamma \tilde{q} = R e^{i\omega t},$$

мысленно подставляя под $\tilde{q}$ комплексное перемещение $\tilde{q}$ и имея в виду, что затем в правую часть уравнения $\tilde{Q}$ будет подставлена только ее мнимая часть (см. также примеч. на стр. 184).

Комплексная амплитуда (6.27) может быть представлена также в виде экспоненты. Для этого нужно прежде всего освободиться от мнимости в знаменателе, умножив числитель и знаменатель (6.27) на выражение $c - i\omega^2 - - i\omega\gamma$. Тогда получим

$$\bar{A} = \frac{H [(c - i\omega^2) - (i\omega\gamma)]}{(c - i\omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\bar{A} = A e^{-i\gamma}, \quad (6.30)$$

где

$$A = |\bar{A}| = \frac{H}{\sqrt{(c - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}}, \quad \gamma = \arctg \left[\frac{\omega\gamma}{c - \omega^2} \right]. \quad (6.31)$$

Таким образом, согласно (6.26) и (6.30) комплексное переменное определяется в виде

$$\bar{q} = \bar{A} e^{i\omega t} = A e^{i\omega t - i\gamma}, \quad (6.32)$$

а его мнимая часть, т. е. искомое перемещение, — в виде

$$q = A \sin(\omega t - \gamma). \quad (6.33)$$

Естественно, полученные результаты совпадают с полученными выше (см. выражения (6.7) и (6.8)).

Принятый выше выбор начала отсчета времени, конечно, не имеет принципиального значения. Так, при другом энергичном выборе начала отсчета времени ту же вынуждающую силу можно записать в виде $Q = H \cos \omega t$. Тогда комплексные величины найдутся так, чтобы было $Q = \operatorname{Re} \bar{Q}$, $q = \operatorname{Re} \bar{q}$. Для этих величин вновь получаются уравнения (6.25)* и остаются справедливыми все соотношения (6.26)–(6.32); лишь вместо (6.33) естественно получить

$$q = A \cos(\omega t - \gamma).$$

Наконец, если начало отсчета времени принято произвольно, то вынуждающая сила представляется в виде $H \sin(\omega t + \varphi)$. Выходя уравнения (6.25) будет

$$m \ddot{q} + b \dot{q} + c q = H e^{i(\omega t + \varphi)}$$

* В этом случае иногда поступают, как сказано в скобках на стр. 133, но упускают в расчете ее мнимую, а действительную часть.

и вместо частного решения (6.26) нужно принять

$$\bar{q} = \bar{A} e^{i(\omega t + \varphi)}.$$

При этом опять останутся справедливыми выражения (6.27)–(6.31), но вместо (6.32) получим

$$\bar{q} = \bar{A} e^{i(\omega t + \varphi - \gamma)},$$

а вместо (6.33) —

$$q = A \sin(\omega t + \varphi - \gamma).$$

Так и должно было получиться, ибо характерные же колебаний (амплитуда, частота) совпадают с тем, что было найдено выше для случая, когда вынуждающая сила зависела от t в виде $H \sin \omega t$.

Комплексная форма удобна и при анализе действия произвольной периодической вынуждающей силы, которую можно представить в виде разложения в ряд Фурье (5.23). В данном случае к комплексной форме удобно перейти несколько иначе, чем это было сделано выше. В каждый член ряда (5.23) подставим

$$\cos n\omega t = \frac{1}{2} (e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}), \quad \sin n\omega t = \frac{1}{2i} (e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}).$$

Тогда после пересгруппировки слагаемых вынуждающая сила запишется в виде

$$Q(t) = \frac{G_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} [(G_n - iH_n) e^{in\omega t} + (G_n + iH_n) e^{-in\omega t}]. \quad (6.34)$$

Входящую сюда сумму можно представить в виде двух сумм. Первую из них запишем в виде $\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{in\omega t}$, где $B_n = \frac{1}{2} (G_n - iH_n)$, а вторую — в виде $\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* e^{-in\omega t}$, где $B_n^* = \frac{1}{2} (G_n + iH_n)$. Заменяя старую сумму эквивалентным выражением $\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* e^{-in\omega t}$, придем к тому разложению (6.34) компактную форму

$$Q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\omega t}, \quad (6.35)$$

в которой

$$B_n = \begin{cases} \frac{1}{2} (G_n - iH_n) & \text{при } n > 0; \\ \frac{1}{2} G_0 & \text{при } n = 0; \\ \frac{1}{2} (G_n + iH_n) & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Отметим, что каждое из слагаемых $B_n e^{i n t}$ — комплексная величина (кроме вещественного слагаемого B_0), но сумма любой пары слагаемых с номерами n и $-n$ — вещественна. Соответственно действительная и мнимая суммы (6.35). Совокупность величин [25,] представляет амплитудный спектр силы $Q(t)$.

Опираясь на представление (6.35), запишем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{i n t} \quad (6.36)$$

и будем рассуждать его решение в виде

$$q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n e^{i n t}. \quad (6.37)$$

Подставляя (6.37) в (6.36) и почленно приравнивая коэффициенты при одинаковых членах $e^{i n t}$, входящих в обе части равенства, найдем комплексные амплитуды

$$\tilde{A}_n = B_n W_n. \quad (6.38)$$

Здесь

$$W_n = \frac{1}{c - n^2(\omega_0)^2 + i n b \omega_0} \quad (6.39)$$

— частотная характеристика, подобная (6.29), но с заменой ω на $n\omega_0$. Окончательно имеем

$$q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n W_n e^{i n t}. \quad (6.40)$$

Отметим, что здесь, как и в (6.36), каждому слагаемому номера n соответствует комплексное сопряженное слагаемое номера $-n$, так что сумма любой такой пары слагаемых вещественна.

Совокупность величин $[25, W_n]$ образует амплитудный спектр перемещения $q(t)$. Составляем (6.35) и (6.40),

можно условно сказать, что амплитудный спектр перемещений является амплитудным спектром вынуждающей силы, «преломленному» на частотную характеристику системы. Так как частотная характеристика зависит от номера n , то соотношения между амплитудами гармоник перемещения отличаются (чаще всего, существенно отличаются) от соотношений между амплитудами гармоник

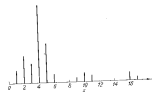
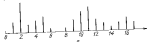


Рис. 6.7

вынуждающей силы. Естественно, что, как правило, особенно значительными оказываются амплитуды тех гармоник перемещения, частота которых близка к собственной частоте системы.

Один из примеров такого рода показан на рис. 6.7, который относится к случаю, когда на систему с собственной частотой $\frac{1}{2}$ действует периодическая вынуждающая сила с периодом $8\pi/k$. Частоты гармоник этой силы равны $\frac{k}{4}, \frac{k}{2}, \frac{3k}{4}, k, \frac{5k}{4}, \dots$, т. е. частота четвертой гармоники совпадает с собственной частотой системы. На рис. 6.7, а показаны амплитуды гармоник вынуждающей силы, а на рис. 6.7, б — амплитуды гармоник перемещения.

Таким образом, переход к комплексной форме складывает определенные удобства при анализе колебаний, вызывае-

ных не только гармонической, но и произвольной периодической вынуждающей силой. Более того, комплексная форма также позволяет удобнее изучать колебания, вызываемые действием непериодических вынуждающих сил $Q(t)$. Такую силу можно представить в виде интеграла Фурье

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (6.41)$$

который можно рассматривать как обобщение сумм дискретных элементов, данной в выражении (6.35). В (6.41) сила $Q(t)$ представлена совокупностью элементарных гармонических составляющих со всеми частотами, непрерывно распределенными в бесконечных пределах $[-\infty, \infty]$, причем малому материалу частот от ω до $\omega + d\omega$ соответствует элементарный гармонический составляющая с амплитудой $F(\omega)d\omega$. Соответственно аналогично, $F(\omega)$ можно рассматривать как непрерывный амплитудный спектр силы $Q(t)$. Для этого оправдано выражение

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (6.42)$$

которое называется преобразованием Фурье или *фурье-образом* функции $Q(t)$. Фурье-образ $F(\omega)$ — комплексная функция частоты:

$$F(\omega) = A(\omega) + iB(\omega), \quad (6.43)$$

в которой $A(\omega)$ и $B(\omega)$ — действительные функции частоты. Поскольку $Q(t)$ — действительная функция, то из (6.43) следует, что

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(t) \cos \omega t dt, \quad B(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(t) \sin \omega t dt, \quad (6.44)$$

а интеграл Фурье (6.41) для $Q(t)$ принимает вид

$$Q(t) = 2 \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega - 2 \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (6.45)$$

Согласно (6.38) элементарная вынуждающая сила $F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ вызывает колебания той же частоты, а их

амплитуда равна $F(\omega)W(\omega)d\omega$. Следовательно, колебания, вызываемые всеми элементарными вынуждающими, т. е. заданной амплитудной силой $Q(t)$, определяются в виде интеграла

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) W(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (6.46)$$

где $W(\omega)$ — частотная характеристика (6.29), которая в каждом случае является непрерывной функцией частоты. Однако переписав $Q(t)$ также можно представить в виде, аналогичном (6.41):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (6.47)$$

где $f(\omega)$ — амплитудный спектр перемещения. Составляя выражения (6.46) и (6.47), видим, что

$$f(\omega) = F(\omega)W(\omega). \quad (6.48)$$

Таким образом, можно сказать, что амплитудный спектр перемещения равен амплитудному спектру вынуждающей силы, умноженному на частотную характеристику системы.

Рассмотрим пример. Положим, что на линейную систему с одной степеню свободы, начиная с момента $t=0$, действует произвольная вынуждающая сила $Q(t)$, исчезающая в некоторый заданный момент T , так что при $t > T$ сила равна нулю. Как будет происходить движение системы после прекращения силы, т. е. при $t > T$?

Перемещение системы при $t > T$ можно определить с помощью (6.19) в виде

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\omega_0^2} \int_0^T Q(t) \sin k(t-t) dt = \\ &= \frac{1}{\omega_0^2} \left[\sin kT \int_0^T Q(t) \cos k_t t dt - \cos k_t T \int_0^T Q(t) \sin k_t t dt \right]. \end{aligned}$$

Так как при $t < 0$ и $t > T$ сила $Q(t)$ равна нулю, то последнее выражение можно записать, формально расширяя

предела интегрирования:

$$q = \frac{1}{\omega^2} \left[\sin k\tau \int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi) \cos k\xi d\xi - \cos k\tau \int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi) \sin k\xi d\xi \right].$$

Согласно (6.42) можно написать

$$q = \frac{2\pi}{\omega^2} [A(k) \sin k\tau + B(k) \cos k\tau].$$

Здесь $A(k)$ и $B(k)$ — составленная амплитудного спектра вынуждающей силы, соответствующая частоте $\omega = k$. Амплитуда колебаний величины $q(t)$ определяется выражением

$$q_{\max} = \frac{2\pi}{\omega^2} \sqrt{A^2(k) + B^2(k)} = \frac{2\pi}{\omega^2} |F(k)|. \quad (6.49)$$

Отсюда видно, что при любой вынуждающей силе амплитуда составленных колебаний зависит только от модуля величины $F(\omega)$ при $\omega = k$.

3. Влияние нелинейно-вязкого трения при гармонической вынуждающей силе. Запишем решение задачи о вынужденных колебаниях при произвольных нелинейных силах трения затухательного типа в простейшем случае действия моногармонической вынуждающей силы, когда дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{q} + R(q) + \alpha q = H \cos \omega t. \quad (6.50)$$

Для приближенного решения этого уравнения воспользуемся методом энергетического баланса, т. е. заменим кривую нелинейной силы $R(q)$ эквивалентной в энергетическом отношении линейной силой $b_0 q$; коэффициент b_0 будем рассчитывать из условия равенства работ, совершаемых обеими силами за один период:

$$\int_0^T R(\dot{q}) \dot{q} dt = \int_0^T b_0 \dot{q} \dot{q} dt. \quad (6.51)$$

Далее приближенно примем, что и в общем случае нелинейного трения стационарный колебательный процесс описывается, как и в случае линейного трения, выражением

$$q = A \sin(\omega t - \gamma). \quad (6.52)$$

При этом уравнение энергетического баланса (6.51) можно записать для полуволны колебаний, в течение ко-

торого скорость (а вместе с этим и сила H) не меняет знак. Подставим (6.52) в (6.51), найдем

$$- \int_0^{\pi} R(-A \sin \psi) A \sin \psi d\psi = \frac{\pi}{2} A^2 \alpha b_0, \quad (6.53)$$

где $\psi = \omega t - \gamma$. Отсюда следует формула, определяющая эквивалентный коэффициент линейного трения:

$$b_0 = - \frac{2 \int_0^{\pi} R(-A \sin \psi) \sin \psi d\psi}{\pi A^2}. \quad (6.54)$$

Пусть, например, сила трения задана квадратичной зависимостью (2.17). При этом

$$R(q) = \Delta q |q|^{n-1}$$

и числитель выражения (6.54) равен

$$2 \int_0^{\pi} \Delta (-A \sin \psi)^n \sin \psi d\psi = -4 \Delta^n A^n \int_0^{\pi} \sin^{n+1} \psi d\psi.$$

Входящий сюда интеграл был выше обозначен через I (см. § 2, (2.20)), так что окончательно получим

$$b_0 = \frac{4\Delta}{\pi} (A\alpha)^{n-1}. \quad (6.55)$$

Аналогично можно определить эквивалентный коэффициент b_0 и в других случаях нелинейного трения.

После того как коэффициент b_0 найден, задача сводится к рассмотрению эквивалентной линейной системы, движение которой определяется дифференциальным уравнением (6.4). Запишем соответствующее этой задаче выражение (6.9) для амплитуды колебаний, подставив $b = b_0/2\alpha \pm \epsilon = \alpha k^2$:

$$A = \frac{H}{\epsilon \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \left[\frac{b_0/2\alpha}{\epsilon}\right]^2}}. \quad (6.56)$$

Здесь неизвестная амплитуда A входит не только в левую часть равенства, но и в правую его часть, так как коэффициент b_0 зависит от той же амплитуды A . В связи с этим соотношение (6.56) следует рассматривать не как формулу, а как уравнение для определения амплитуды A .

Для построения резонансной кривой удобнее разписать уравнение (8.56) относительно ω/k :

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{1 - \frac{k_0^2}{3\omega^2 k^2}} \pm \sqrt{\left(\frac{k_0^2}{3\omega^2 k^2}\right)^2 - \frac{k_0^2}{\omega^2} + \left(\frac{H}{Ak}\right)^2},$$

а затем, задавшись значениями A , вычислить $b_0(A)$ и определить соответствующие отклики ω/k .

Для определения резонансной амплитуды положим в (8.56) $\omega = k$; тогда уравнение примет вид

$$b_0(A) = \frac{H}{3A}.$$

В частности, если коэффициент b_0 определяется формулой (8.55), можно найти $A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3H}{4kU}}$; например, при $n=2$ ($U=0,867$) получим $A = \frac{1,08}{k} \sqrt{\frac{H}{k}}$.

Нужно отметить, что в рассматриваемых задачах амплитуда вынужденных колебаний не пропорциональна амплитуде силы.

6. Величие гистерезиса. То же соотношение энергетического баланса может быть положено в основу исследования вынужденных колебаний при наличии статическо-нелинейного гистерезиса. Для этого нужно приравнять площадь петли гистерезиса, определенную формулой (2.43)

$$Q = \pi A^{n+1},$$

работе, совершаемой за один период эквивалентной силой линейного трения. Эта работа здесь больше правой части соотношения (6.53), вычисленной для полупериода, так что получаем равенство

$$\pi A^{n+1} = \pi A^2 \omega b_0.$$

Отсюда находим коэффициент эквивалентного линейного трения в виде

$$b_0 = \frac{\pi A^{n-1}}{n\omega},$$

и уравнение (8.56) принимает вид

$$A = \frac{H}{c \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{\pi A^{n-1}}{n\omega}\right)^2}} \quad (8.57)$$

Решение этого нелинейного алгебраического уравнения неслучайно при значениях $n=0$ (сухое трение) и $n=2$; для вычислений при иных значениях n удобнее воспользоваться обратной зависимостью

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{1 \pm \frac{H}{cA} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi A^n}{n\omega}\right)^2}}.$$

Для резонансных условий ($\omega = k$) из (8.57) сразу находим $A = \sqrt[n]{nH/\pi}$.

Отметим, что гистерезисную силу трения при возмущающих гармонических колебаниях удобно описать соотношением

$$R = \frac{\pi A^n}{n} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{k^2}} \operatorname{sgn} \dot{q}. \quad (8.58)$$

(амплитудная петля гистерезиса — см. рис. 8.6), которое соответствует выражению (2.43) для рассинхронизации на один цикл фазы. Если воспользоваться выражением (8.58), то можно найти установившиеся вынужденные колебания, не прибегая к методу эквивалентного баланса, непосредственно из дифференциального уравнения движения

$$\ddot{q} + \frac{\pi A^n}{n\omega} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{k^2}} \operatorname{sgn} \dot{q} + k^2 q = \frac{H}{\omega} \sin \omega t. \quad (8.59)$$



Рис. 8.6

Это, казалось бы, сложное, нелинейное уравнение имеет весьма простое точное решение

$$q = A \sin(\omega t - \gamma). \quad (8.60)$$

Для определения A и γ подставим решение (8.60) в уравнение (8.59), получим

$$-A\omega^2 \sin(\omega t - \gamma) + \frac{\pi A^n}{n\omega} \cos(\omega t - \gamma) + A k^2 \sin(\omega t - \gamma) = \frac{H}{\omega} \sin \omega t. \quad (8.61)$$

Второй член в левой части зависит без множителя $\operatorname{sgn} \dot{q}$, так как нулями для уравнения смена знака силы тре-

ним (при известном значении скорости) здесь обозначается известным значением скорости. Преобразуя соотношения (5.61), получаем

$$\begin{aligned} & \left[A(k^2 - \omega^2) \cos \gamma + \frac{\alpha A^2}{\alpha \omega} \sin \gamma - \frac{B}{\alpha} \right] \sin \omega t - \\ & - \left[A(k^2 - \omega^2) \sin \gamma - \frac{\alpha A^2}{\alpha \omega} \cos \gamma \right] \cos \omega t = 0. \end{aligned}$$

Для тождественного выполнения этого равенства необходимо, чтобы выражения, стоящие в квадратных скобках, были порознь равны нулю, т. е.

$$A(k^2 - \omega^2) \cos \gamma + \frac{\alpha A^2}{\alpha \omega} \sin \gamma = \frac{B}{\alpha},$$

$$A(k^2 - \omega^2) \sin \gamma - \frac{\alpha A^2}{\alpha \omega} \cos \gamma = 0.$$

Отсюда находим

$$A = \frac{B}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha A^{2-1}}{\alpha \omega}\right)^2}}, \quad \tan \gamma = \frac{\alpha A^{2-1}}{\alpha \omega (k^2 - \omega^2)}. \quad (5.62)$$

Заметим, что первое из соотношений (5.62) совпадает с ранее найденным соотношением (5.57).

7. Случайные колебания*. Ввиду вышесказанного можно считать, что вынуждающие силы заданы как детерминированные функции времени. Такая постановка задает теорию вынужденных колебаний приливов, когда случайные составляющие внешних сил (практически всегда колебательные) относительно малы по сравнению с основными, детерминированными составляющими. Но в ряде приложений задат весьма значительные вынуждающие силы и принцип не поддается удовлетворительному детерминистическому описанию и должны считаться случайными функциями времени. Таким, например, нагружены на работе органы многих строительных и сельскохозяйственных машин, опорные нагрузки на здания и некоторые сооружения и т. п. Со случайными функциями времени приходится иметь дело и в некоторых задачах в инженер-

техническом возбуждении, например при анализе колебаний автомобиля, движущегося по неровной дороге, или при расчетах конструкций на сейсмические нагрузки.

Теория случайных вынужденных колебаний посвящена решению задач следующих четырех типов:

- 1) отыскание вероятностных характеристик движения системы по заданным вероятностным характеристикам внешнего воздействия (классическая задача);
- 2) отыскание вероятностных характеристик внешних воздействий по известным (экспериментально найденным) вероятностным характеристикам реакций (обратная задача);
- 3) определение свойств системы (по оператору и параметрам) по известным (экспериментально найденным) вероятностным характеристикам на входе и выходе системы (задача идентификации);
- 4) синтез систем, обладающих заданными свойствами по отношению к некоторому классу внешних воздействий (задача синтеза, часто понимаемая задачей оптимизации).

Очень коротко остановимся на первой задаче применительно к вынужденным колебаниям линейной механической системы с одной степенью свободы.

В практических условиях случайные вынуждающие силы нередко характеризуются определенной однородностью относительно времени, она заключается в том, что среднее значение, причем не из средних амплитуд, но общий характер заметных изменений во времени не претерпевают. Однородны во времени и некоторые виды случайного нелинейного возбуждения, как, например, возмущения неровностей дороги на движущийся по ней автомобиль, качение, при условии, что на большом протяжении времени покрытия остается практически неизменным, а автомобиль движется с постоянной скоростью.

Такие воздействия с постоянными вероятностными характеристиками относятся к категории стационарных случайных процессов. В эту категорию входят и результаты таких воздействий, т. е. вызванные ими колебания механических систем (имеются в виду колебания около устойчивого состояния равновесия).

Из стационарной случайной функции, описывающей вынуждающую силу, всегда можно выделить и выделить ее математическое ожидание, постоянное значение от-

* Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями теории вероятностей.

неизвестности функции; после этого рассматривается перенесенный составок — квадратичная случайная функция $\hat{Q}(t)$. Выразительный характеристический по свойству служит корреляционная функция — математическое ожидание произведения $\hat{Q}(t)\hat{Q}(t+\tau)$, слагаемые которого относятся к двум моментам времени, разделенным промежутком τ . Эта функция оценивает степень зависимости между значениями случайной функции в различные моменты времени. Если случайная функция действительно стационарна, то результаты вычисления не могут зависеть от выбора момента времени t , а будут зависеть только от абсолютной величины $|\tau|$.

В практических случаях корреляционную функцию $k_\tau(\tau)$ получают путем обработки данных натурных наблюдений и часто представляют в виде косинусных аналитических выражений типа

$$D e^{-\alpha|\tau|}, D e^{-\alpha|\tau|}, D e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau, D e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau$$

с соответствующими подобранными значениями параметров D , α , β . Отметим, что в ходе такой обработки контролируется сама стационарность изучаемого процесса — по признаку независимости математического ожидания произведения $\hat{Q}(t)\hat{Q}(t+\tau)$ от выбора значений t . Разумеется, что для введенного стационарного случайного процесса корреляционную функцию можно определить как математическое ожидание произведения $\hat{Q}(t)\hat{Q}(t)$. Значение корреляционной функции при $\tau=0$ представляет собой математическое ожидание квадрата стационарной случайной функции, т. е. ее дисперсию $k_0(0)=D$.

При обсуждении детерминированных видов теории вынужденных колебаний в п. 5 § 5 и п. 5 § 6 колебательный процесс был представлен в виде суммы гармонических колебаний различных частот. Распределение амплитуд по различным частотам (дискретный или непрерывный амплитудный спектр) дает возможность судить о том, какого рода колебания имеют место в рассматриваемом процессе, исходя его внутренней структуры. Такие спектральные представления могут относиться и к вынуждающей силе, и к координате системы $q(t)$.

Аналогично этому стационарный случайный процесс также может быть описан суммой гармонических составляющих, но их амплитуды будут случайными величина-

ми. Спектром стационарной случайной функции принято называть распределение дисперсий по всем частотам. Если спектр непрерывный, то его описывают функцией $S(\omega)$ — спектральной плотностью дисперсии стационарной случайной функции (часто слово «дисперсия» в этом наименовании опускают). Между спектральной плотностью $S(\omega)$ и корреляционной функцией $k(\tau)$ существует соотношение

$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (6.63)$$

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (6.64)$$

определяющие прямой и обратное косинус-преобразование Фурье.

Если в (6.63) положить $\tau=0$, то для дисперсии стационарной случайной функции получим

$$D = k(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (6.65)$$

Таким образом, если корреляционная функция $k_\tau(\tau)$ известна (задана, найдена), то по выражению (6.64) находим спектральную плотность $S_0(\omega)$ и можно перейти к определению колебаний механической системы, вызванных действием случайной силой. Здесь основным является соотношение

$$S_y(\omega) = |W|^2 S_0(\omega), \quad (6.66)$$

связывающее спектральную плотность колебаний системы $S_y(\omega)$ со спектральной плотностью вынуждающей силы. В этом соотношении W — частотная характеристика системы, которая для силового возбуждения была дана выше выражением (6.29), так что

$$|W|^2 = \frac{1}{(c - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}. \quad (6.67)$$

После вычисления $S_2(\omega)$ по выражению (6.66) можно найти дисперсию обобщенной координаты

$$D_2 = \int_0^{\infty} S_2(\omega) d\omega, \quad (6.68)$$

и, наконец, среднеквадратического значение величины q :

$$\sigma_q = \sqrt{D_2}. \quad (6.69)$$

§ 7. Системы с одной степенью свободы при внешней восстанавливающей силе

1. Основные понятия. Нелинейность восстанавливающей силы существенно осложняет анализ колебаний, и в этом параграфе будет рассмотрено действие только гармонической вынуждающей силы; даже в этом наиболее простом случае приходится довольствоваться приближенным решением задачи. Характеристику нелинейной восстанавливающей силы будем считать симметричной:

$$F(q) = -F(-q), \quad (7.1)$$

а силы трения — отсутствующими.

При продольном возбуждении дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$a\ddot{q} + F(q) = H \sin \omega t, \quad (7.2)$$

Необходимо сразу отметить, что функция

$$q = A \sin \omega t, \quad (7.3)$$

описывающая закон движения линейных систем, в данном случае не является точным решением задачи; если подставить (7.3) в уравнение (7.2), то оно не может быть тождественно удовлетворено ни при каком значении A . Естественно ожидать, что решение будет содержать также высшие гармоники с частотами $2\omega, 3\omega, \dots$, а возможно, и высшие гармоники с частотами $\omega/2, \dots$; тем не менее мы убедимся, что это в самом деле так. Колебания с частотой ω относительно ω частотами называют *субгармоническими*, колебания с частотами $2\omega, 3\omega, \dots$ — *субсубгармоническими*, а колебания с частотой $\omega/2$ — *сверхгармоническими*.

В первом приближении можно ограничиться рассмотрением только основных колебаний; они чаще всего наиболее важны; этому посвящен следующий п. 2. Даль-

нейшее уточнение можно получить, введя супергармонические колебания (см. п. 3) и субгармонические колебания (см. п. 4).

2. Основные колебания. Для нахождения основных колебаний приближенно применим закон движения в виде (7.3) и воспользуемся методом гармонического баланса (см. также стр. 69—70). Образует периодическую функцию $F(A \sin \omega t)$ и, разложив ее в ряд Фурье, ограничимся учетом одного первого члена:

$$F(A \sin \omega t) \approx b_1 \sin \omega t. \quad (7.4)$$

Здесь b_1 определяется выражением (3.18). Подставив выражение (7.3) в первый член уравнения (7.2) и выражение (7.4) — во второй член того же уравнения, получим приближенное соотношение

$$-aA\omega^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = H, \quad (7.5)$$

из которого можно определять амплитуду A .

Пусть, например, характеристика восстанавливающей силы имеет вид

$$F(q) = \alpha q + \beta q^3. \quad (7.6)$$

Приняв во внимание

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} (\alpha A \sin \varphi + \beta A^3 \sin^3 \varphi) \sin \varphi d\varphi = \pi \alpha A + \frac{3}{4} \pi \beta A^3.$$

При этом уравнение (7.5) принимает форму

$$A \left(\frac{\alpha}{a} + \frac{3}{4} \frac{\beta}{a} A^2 \right) = \frac{H}{a} + A\omega^2. \quad (7.7)$$

Для выполнения численных свойств решения кубического уравнения (7.7) можно воспользоваться графическим способом; но одной изюбрности им, пожалуй, предпочтительнее аналитическое решение.

Построим график зависимости левой части от амплитуды A (см. график $P_1(A)$ на рис. 7.1, а), а также прямую $P_2(A)$, соответствующую правой части; если часто-

та « поворачивая, то прямая P_0 пересечет кривую P_2 в одной точке, абсциссой которой A_1 является единственное действительное корнем уравнения (7.7). С увеличением частоты ω угол наклона прямой к оси абсцисс будет возрастать, а значение корня A_1 — увеличиваться. Наконец, при достаточно большом значении $\omega = \omega_*$ прямая P_0 коснется кривой P_2 в третьем квадранте (рис. 7.1, б).

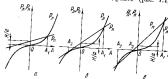


Рис. 7.1

а при дальнейшем увеличении ω будет пересекать кривую P_2 в трех точках (рис. 7.1, в).

Соответственно уравнению (7.8) при $\omega > \omega_*$ будет иметь три действительных корня: A_1 , A_2 , A_3 . Нижесказанной одной этих кривых при постепенном увеличении частоты ω показано на рис. 7.2, а; здесь же изображена линия показана *скелетная* кривая, выражающая связь между частотой и амплитудой свободных колебаний той же системы.

Полученная амплитудно-частотная зависимость напоминает резонансную кривую для линейной системы, однако резонансный пик жестко деформирован: соответствующие нелинейные скелетной линии при жесткой характеристике. Для системы с мягкой характеристикой амплитудно-частотная зависимость имеет вид, изображенный рис. 7.2, б.

Хотя полученная зависимость приближенная, однако оно дает, по крайней мере качественно, верное представление об изменении амплитуды вынужденных колебаний с изменением их частоты: при достаточно больших значениях частоты вынуждающей силы решение становится многозначным и одному значению частоты соответствует три значения амплитуды A колебаний.

Дополнительные исследования (см. ниже § 9) показывают, что из трех возможных режимов движения при $\omega > \omega_*$

$$q = A_1 \sin \omega t, \quad q = A_2 \sin \omega t, \quad q = A_3 \sin \omega t, \quad (7.8)$$

устойчивы первый и второй, а третий режим неустойчив, — следовательно малые возмущения этого режима приводят движение системы к первому или второму режиму. В связи с этим физически осуществимы только первый и второй стационарные режимы.

Если постепенно увеличивать от нуля частоту ω , то амплитуды увеличатся, следуя ветви I (см. рис. 7.2, а).

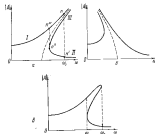


Рис. 7.2

Если при некотором значении частоты $\omega = \omega_*$ система испытывает достаточно большое кратковременное возмущение, то происходит «срыв» амплитуды на ветви II (точка A и A'). Если затем постепенно увеличивать частоту ω , то амплитуда колебаний будет уменьшаться, следуя кривой II . Если же после срыва амплитуд частоту ω уменьшать, то будет происходить обратное нарастание амплитуды до точки A'' . При дальнейшем увеличении частоты амплитуда резко увеличивается (точка A''').

на величину I и затем вновь постепенно уменьшается, следуя кривой I .

Другое, также приближенное, решение можно получить по способу прямой линеаризации. Согласно этому приближенному способу (см. § 3) нелинейная характеристика $F(q)$ заменяется линеаризованной линейной, так что дифференциальное уравнение (7.2) сразу принимает вид

$$a\ddot{q} + cq = B \sin \omega t. \quad (7.9)$$

Величина c определяется так, как это было показано в § 3, по формуле (3.16); можно отметить, что в данном случае она не является параметром системы, а зависит от амплитуды колебаний. Амплитуда стационарной части решения линеаризованного дифференциального уравнения (7.9), как известно, имеет вид

$$A = \frac{B}{c - a\omega^2}. \quad (7.10)$$

Так как c зависит от амплитуды A , то соотношение (7.10) следует рассматривать как уравнение для определения A . Так, при характеристике (7.6) находим по формуле (3.16)

$$c = \frac{5}{A^2} \int_0^A (\beta_0 q + \beta_2 q^3) q^2 dq = c_0 + \frac{5\beta_2 A^2}{3},$$

и (7.10) приобретает вид, подобный (7.7):

$$A \left(c_0 + \frac{5}{3} \beta_2 A^2 \right) = \frac{B}{a} + A \omega^2.$$

Графическое решение этого уравнения в принципе совпадает с темным путем для уравнения (7.7).

Если в системе имеется трение, то обе ветви кривых сходятся, как показано на рис. 7.2, в. При постепенном возрастании частоты становятся возможными сразу амплитуды при $\omega = \omega_0$ и в случаях постепенного уменьшения частоты, которое начинается при достаточно больших ее значениях, сразу амплитуды происходят при $\omega = \omega_0$.

3. Супергармонические колебания. Для того чтобы отразить в решении супергармонические колебания, вновь воспользуемся методом гармонического баланса и возьмем (для случая симметричной характеристики возмущающей силы)

$$q = A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 3\omega t + \dots + A_n \sin n\omega t. \quad (7.11)$$

В первый член дифференциального уравнения (7.2) подставим (7.11), а во второй член вместо функции

$$F(A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 3\omega t + \dots + A_n \sin n\omega t)$$

подставим в первом члене ее разложение в ряд Фурье

$$F(A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 3\omega t + \dots + A_n \sin n\omega t) \approx b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 3\omega t + \dots + b_s \sin s\omega t, \quad (7.12)$$

коэффициенты которого

$$b_s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 3\omega t + \dots + A_n \sin n\omega t) \sin s\omega t d\omega \quad (s = 1, 2, \dots, s)$$

нелинейно зависят от всех амплитуд $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Таким образом, подстановка (7.11) в дифференциальное уравнение (7.2) приводит к соотношению

$$-A_1 \omega^2 \sin \omega t - 9A_2 \omega^2 \sin 3\omega t - \dots + b_1(A_1, A_2, \dots) \times \\ \times \sin \omega t + b_2(A_1, A_2, \dots) \sin 3\omega t + \dots = H \sin \omega t. \quad (7.14)$$

Для точностного выполнения этого равенства нужно приравнять коэффициенты при каждой из гармоник $\sin \omega t, \sin 3\omega t, \dots, \sin s\omega t$, содержащихся в левой и правой частях (7.14):

$$\begin{aligned} -A_1 \omega^2 + b_1(A_1, A_2, \dots, A_n) &= H, \\ -9A_2 \omega^2 + b_2(A_1, A_2, \dots, A_n) &= 0, \\ &\dots \\ -s^2 A_s \omega^2 + b_s(A_1, A_2, \dots, A_n) &= 0. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Из возможных уравнений (7.15) можно найти значения амплитуд $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Пусть, например, характеристика силы имеет вид (7.6). Ограничиваясь двумя первыми членами сумм (7.12), имеем

$$F(q) \approx c_0(A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 3\omega t) + \beta(A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 3\omega t)^2.$$

Далее, по формулам (7.13) находим

$$\begin{aligned} b_1 &= k_1^2 \left[A_1 + \frac{5}{4} \frac{\beta}{\alpha} (A_1^2 - A_2^2 A_1 + 2A_1 A_2^2) \right], \\ b_2 &= k_1^2 \left[A_2 + \frac{1}{4} \frac{\beta}{\alpha} (-A_1^2 + 6A_1^2 A_2 + 3A_2^2) \right]. \end{aligned}$$

($k_0^2 = c/a$) в уравнении (7.15) принимают вид

$$(k_0^2 - \omega^2) A_1 + \frac{3}{4} \frac{B}{a} (A_1^2 - A_1^2 A_3 + 2A_1^2 A_5) = \frac{B}{a}, \quad (7.16)$$

$$(k_0^2 - 9\omega^2) A_3 + \frac{3}{4} \frac{B}{a} \left(-\frac{1}{2} A_1^2 + 2A_1^2 A_3 + A_3^2 \right) = 0. \quad (7.17)$$

Положив в первом уравнении $\beta = 0$, приближенно найдем выражение для амплитуд основных колебаний:

$$A_1 = \frac{B}{a(k_0^2 - \omega^2)}. \quad (7.18)$$

Сопоставив в последних способах второго уравнения (7.16) только основное слагаемое $-\frac{1}{2} A_1^2$, также приближенно получим амплитуду субгармонических колебаний

$$A_3 = \frac{\beta A_1^2}{4a(k_0^2 - 9\omega^2)},$$

т. е. малую величину порядка β . Если подставить найденные первые приближения в отброшенные члены уравнения (7.16), то получим угловыми значения A_1 и A_3 , причем поправка для A_1 будет иметь порядок β , а поправка для A_3 — порядок β^2 . Этот процесс последовательных приближений можно продолжить и далее.

Важно отметить, что амплитуда субгармонических колебаний A_3 мала сравнительно с амплитудой A_1 основных колебаний (конечно, при условии, что не мала разность $k_0^2 - 9\omega^2$).

4. Субгармонические колебания. Ограничимся случаем симметричной характеристики восстанавливающей силы вида (7.6) и для нахождения амплитуд субгармонических колебаний снова воспользуемся методом гармонического баланса.

Покажем, что основную гармонику с частотой ω вынуждающей силы соответствует субгармоника с частотой $\omega/3$:

$$q = A_1 \sin \omega t + A_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3}. \quad (7.19)$$

Функция $F(A_1 \sin \omega t + A_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3})$ имеет период $6\pi/\omega$, кроме базисной основной периода T . Разложим ее в ряд

Фурье и ограничимся двумя первыми членами, найдем

$$F\left(A_1 \sin \omega t + A_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3}\right) = b_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3} + b_1 \sin \omega t, \quad (7.20)$$

где

$$b_{1/3} = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} F\left(A_1 \sin \omega t + A_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3}\right) \sin \frac{\omega t}{3} d\omega, \quad (7.21)$$

$$b_1 = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} F\left(A_1 \sin \omega t + A_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3}\right) \sin \omega t d\omega.$$

Далее подставим (7.18) и (7.19) в уравнение (7.2); сравним коэффициенты гармоник и субгармоник в правых и левых частях, приходим к двум нелинейным уравнениям.

При характеристике (7.4) эти уравнения имеют вид

$$(k_0^2 - \omega^2) A_1 + \frac{3}{4} \frac{B}{a} (3A_1^2 + 6A_1^2 A_3 - A_3^2) = \frac{B}{a}, \quad (7.22)$$

$$\left(k_0^2 - \frac{\omega^2}{9}\right) A_{1/3} + \frac{3}{4} \frac{B}{a} (A_1^2 A_3 - A_1^2 A_1 + 2A_1^2 A_{1/3}) = 0.$$

Приближенное значение для амплитуд A_1 найдем из первого уравнения (7.22), положив в нем $\beta = 0$:

$$A_1 = \frac{B}{a(k_0^2 - \omega^2)}. \quad (7.23)$$

Далее, предположив, что $A_{1/3} \neq 0$, представим второе уравнение (7.22) в виде

$$A_{1/3}^2 - A_{1/3} A_1 + 2A_1^2 + \frac{4(\omega^2 - \frac{\omega^2}{9})a}{2B} = 0.$$

Отсюда следует выражение амплитуды субгармонических колебаний

$$A_{1/3} = \frac{A_1}{2} \left[1 \pm \sqrt{\frac{16(\omega^2 - \frac{\omega^2}{9})a}{27A_1^2} - 7} \right]. \quad (7.24)$$

Отметим, что при $\beta > 0$ для существования решения необходимо выполнение условия

$$\omega > 3\omega_0 \sqrt{1 + \frac{21}{16} \frac{B}{a} A_1^2}. \quad (7.25)$$

т. е. субгармонические колебания возможны лишь при достаточно больших (относительно основной частоты свободных колебаний) частотах возбуждения. Если $\beta < 0$, знак неравенства в (7.24) должен быть изменен на обратный.

С учетом (7.22) приближенно получим

$$A_{1,2} = \frac{B}{2\omega(k_1^2 - \omega^2)} \left[1 \pm \sqrt{\frac{B(\omega^2 - k_1^2)(\omega^2 - k_2^2)^2 \omega^2}{2B^2\beta} - 7} \right]. \quad (7.25)$$

Исходя из первых приближений (7.22) и (7.25), можно получить с помощью основных Уравнений (7.24) дальнейшее уточнение амплитуд колебаний A_1 и $A_{1,2}$.

На рис. 7.3 показаны зависимости амплитуд колебаний A_1 и $A_{1,2}$ от частоты ω вынуждающей силы.

Таким образом, субгармонические колебания в системах с жесткой (мгновен) характеристикой возникают

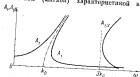


Рис. 7.3

лишь при достаточно больших (достаточно малых) значениях частоты ω вынуждающей силы; однако если субгармонические колебания возникают, то их амплитуды могут значительно превосходить амплитуды основных колебаний, происходящих с частотой ω .

В наших изысканиях мы не учитывали действие сил трения; более подробный анализ показывает, что эти силы не только уменьшают амплитуды субгармонических колебаний, но способны — при их достаточной интенсивности — полностью погасить субгармонические колебания.

3. Способ полного интегрирования для кусочно-линейных систем. В отличие от ранее рассмотренных в этом

параграфе случаев задачи о вынужденных колебаниях систем с кусочно-линейными характеристиками в принципе допускает точное решение, которое соответствует сказанному в § 3, где речь шла о свободных колебаниях. Здесь, при анализе вынужденных колебаний такой путь поочередно решать ряд линейных задач, соответствующих прямым участкам характеристик, расположенным



Рис. 7.4

между точками перелома. Для определения постоянных интегрирования служат условия перепада от нуля в начале, а также условия периодичности.

Проведем применение этого способа на случае вынужденных колебаний системы, показанной на рис. 7.4, а. Это виброударная система (модель Ресса — Херкесса) состоит из груза M , упругого элемента k и одностороннего ограничителя δ , установленного с зазором b . На груз действует гармоническая вынуждающая сила, которая вызывает колебания, достаточно значительные для того, чтобы происходили удары груза об ограничитель.

Отчет перемещений груза будем вести от положения, в котором пружина не деформирована. Начало отсчета времени совместим с моментом непосредственно после первого-либо удара груза об ограничитель. При этом гармоническую вынуждающую силу запишем в виде $M \sin(\omega t + \gamma)$, толкая M в ω направлении, а начальную фазу γ неизвестной. Кусочно-линейная характеристика этой системы состоит из двух полупрямых (рис. 7.4, б).

Примем, что при ударе груза об ограничитель скорость груза мгновенно меняется, следуя соотношению

$$\dot{x}(0) = -R\dot{x}(-0), \quad (7.26)$$

где R — коэффициент восстановления; аргумент (-0) означает момент времени, непосредственно предшествующий удару.

По рассмотрев всех возможных движений, исследуем возможность существования строго периодического режима периода T , равного периоду $2\pi/\omega$ вынуждающей силы. Если до составления и решения уравнений задачи можно ожидать, что движение будет происходить в обоих частях так, как показано на рис. 7.А, а; через равные промежутки времени T происходит удары об ограничитель, сопровождаемые сменой знака скорости.

Рассмотрим один период движения, в начале которого

$$x(0) = -b, \quad (7.27)$$

Кроме того, можно записать следующие условия периодичности:

$$x(T) = x(0), \quad (7.28)$$

$$\dot{x}(T-0) = \dot{x}(-0). \quad (7.29)$$

Условия (7.28), (7.29) вместе с условием (7.27) позволяют найти все постоянные, которые войдут в решение задачи. Исклоним скорости $\dot{x}(-0)$ из (7.29) с помощью соотношения (7.28); тогда получится связь между скоростями в начале периода и в его конце (т. е. непосредственно перед следующим ударом):

$$\dot{x}(0) = -R\dot{x}(T-0). \quad (7.30)$$

Решение основного дифференциального уравнения, интегрируемого для интервала движения между двумя ударами,

$$m\ddot{x} + cx = H \sin(\omega t + \gamma),$$

имеет вид

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \frac{H \sin(\omega t + \gamma)}{\pi(k^2 - \omega^2)}. \quad (7.31)$$

Отсюда следует, что скорости меняются по закону

$$\dot{x} = C_1 k \cos kt - C_2 k \sin kt + \frac{H\omega \cos(\omega t + \gamma)}{\pi(k^2 - \omega^2)}. \quad (7.32)$$

Из условий (7.27), (7.28) и (7.30) находим

$$C_1 + \frac{H \sin \gamma}{\pi(k^2 - \omega^2)} = -b,$$

$$C_1 \sin kT + C_2 \cos kT + \frac{H \sin(\omega T + \gamma)}{\pi(k^2 - \omega^2)} = -b,$$

$$C_1 k + \frac{H\omega \cos \gamma}{\pi(k^2 - \omega^2)} =$$

$$= -R \left[C_1 k \cos kT - C_2 k \sin kT + \frac{H\omega \cos(\omega T + \gamma)}{\pi(k^2 - \omega^2)} \right].$$

В этих трех уравнениях содержится три неизвестных величин: постоянные C_1 и C_2 , а также начальная фаза γ вынуждающей силы. Пусть, например, $b=0$; тогда, учитывая, что $\sin(\omega T + \gamma) = \sin \gamma$, $\cos(\omega T + \gamma) = \cos \gamma$, после решения уравнений найдем

$$\lg \gamma = \frac{(1+R)}{(1-R)} \operatorname{ctg} \frac{kT}{2} \frac{\omega}{k},$$

$$C_1 = -\frac{H \sin \gamma}{\pi(k^2 - \omega^2)} \operatorname{tg} \frac{kT}{2},$$

$$C_2 = -\frac{H \sin \gamma}{\pi(k^2 - \omega^2)}.$$

Таким образом, закон движения, справедливый для интервала времени $0 < t < T$ (на других интервалах времени движение полностью повторяется):

$$x = \frac{H}{\pi(k^2 - \omega^2)} \left[\sin(\omega t + \gamma) - \sin \gamma \cos kt - \right. \\ \left. - \sin \gamma \sin kt \operatorname{tg} \frac{kT}{2} \right].$$

Конечно, приведенное исследование колебаний абразивной системы недостаточно полно. Во-первых, формально возможность режима колебаний с периодом T еще не означает его фактической существования — для этого необходимо, чтобы такой режим был устойчивым. Во-вторых, в подобных системах нередко с изученным режимом возможны периодические режимы с периодом вдвое, втрое и т. д. большими (субгармониками), и следовательно бы такие исследования не существовали и устойчивости. Нижнее же остается в рамках задачи о работе различных абразивных механизмов.

§ 8. Линейные системы с несколькими степенями свободы

1. Общие уравнения. Если на линейную колебательную систему без трения с s степенями свободы действуют внешние силы, заданные заданными функциями времени, то уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (8.1)$$

где $Q_j = Q_j(t)$ — обобщенные внешние силы, соответствующие выбраным обобщенным координатам q_j . Получим общие выражения (4.2) для кинетической и потенциальной энергии, приходя к системе (8.1) и следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=1}^s (c_{jk} \ddot{q}_k + c_{kj} \dot{q}_k) = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (8.2)$$

Если обобщенные координаты выбрать так, что кинетическая энергия представляется квадратичной формой (4.6), то $c_{jk} = 0$ при $j \neq k$, и система уравнений (8.2) упрощается:

$$a_j \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^s c_{jk} \dot{q}_k = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (8.3)$$

К этим уравнениям, каждое из которых содержит по одному обобщенному ускорению, можно прийти с помощью прямого способа, не используя уравнений Лагранжа.

Если при соответствующем выборе обобщенных координат к кинетической форме приваляется потенциальная энергия ($c_{jk} = 0$ при $j \neq k$), то уравнения (8.2) принимают вид

$$\sum_{k=1}^s a_{jk} \ddot{q}_k = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (8.4)$$

Каждое из уравнений (8.4) содержит по одной обобщенной координате; эти уравнения можно получить непосредственно по обратному способу.

Ниже мы остановимся на некоторых частных случаях линейных обобщенных вынуждающих сил $Q_j(t)$ от времени.

2. Действие вынуждающих сил, изменяющихся по гармоническому закону: непосредственное решение. Предположим, что обобщенные вынуждающие силы изменяются по гармоническому закону

$$Q_j = H_j^* \sin(\omega t + \delta_j) \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (8.5)$$

т. е. имеют одинаковые частоты, но различные амплитуды и фазы. Вместо (8.5) можно записать:

$$Q^j = H_j^* \cos \delta_j \sin \omega t + H_j^* \sin \delta_j \cos \omega t. \quad (8.6)$$

Далее, можно разделить задачу на две задачи: одна из них отнесется к случаю действия синусоидальных вынуждающих сил

$$Q_j = H_j \sin \omega t \quad (8.7)$$

(здесь принято обозначение $H_j = H_j^* \cos \delta_j$), а вторая — к случаю действия косинусоидальных вынуждающих сил

$$Q_j = G_j \cos \omega t \quad (8.8)$$

(где $G_j = H_j^* \sin \delta_j$). Эти задачи совершенно идентичны, поэтому ограничимся случаем действия синусоидальных сил (8.7). Тогда уравнения (8.2) запишутся так:

$$\sum_{k=1}^s (c_{jk} \ddot{q}_k + c_{kj} \dot{q}_k) = H_j \sin \omega t \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (8.9)$$

Установившееся движение будем разыскивать в виде

$$q_j = A_j \sin \omega t \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (8.10)$$

В этой задаче видно, что все обобщенные координаты изменяются с одной частотой, равной частоте вынуждающих сил.

Подставим (8.10) в дифференциальные уравнения (8.9), придем к следующей системе алгебраических уравнений для определения амплитуд колебаний A_j :

$$\sum_{k=1}^s (c_{jk} - \omega^2 a_{jk}) A_k = H_j \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (8.11)$$

К такой же системе можно прийти, если в (8.9) вместо правой части $H_j \sin \omega t$ и разыскивать решение в виде $q_j = -A_j e^{i\omega t}$.

Решение системы уравнений (8.11) имеет вид

$$A_j = \frac{\delta_j}{D} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (8.12)$$

Здесь D — определитель, составленный из коэффициентов системы (8.11),

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\omega^2 & c_{12} - a_{12}\omega^2 & \dots & c_{1n} - a_{1n}\omega^2 \\ c_{21} - a_{21}\omega^2 & c_{22} - a_{22}\omega^2 & \dots & c_{2n} - a_{2n}\omega^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} - a_{n1}\omega^2 & c_{n2} - a_{n2}\omega^2 & \dots & c_{nn} - a_{nn}\omega^2 \end{vmatrix}, \quad (8.13)$$

а Δ_j — определитель, который получается из D путем замены j -го столбца правой частью системы (8.11). Совокупность значений Δ_j определяет форму вынужденных колебаний, т. е. конфигурацию системы при ее вынужденном отклонении от состояния равновесия.

Если сравнить полученный определитель D (8.13) с частотным определителем (4.22), то можно заметить, что они совпадают при $\omega = k$. Но в этом случае определитель D обращается в нуль, так как именно на этого условия были найдены собственные частоты $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Однако если $D = 0$, а $\Delta_j \neq 0$, то, как это видно из формулы (8.12), все амплитуды A_j становятся неограниченными, т. е. возникает резонанс. Таким образом, можно сказать, что резонанс наступает при совпадении частоты вынуждающей силы с любой из собственных частот.

Возникает и противоположный случай, когда при определенных значениях ω обращаются в нуль некоторые определители Δ_j (при этом $D \neq 0$). Тогда амплитуды A_j соответствующих координат q_j оказываются равными нулю, что свидетельствует об отсутствии колебаний по этим координатам. Это явление называется *антирезонансом*.

Остановимся подробнее на случае системы с двумя степенями свободы. Из уравнений (8.11) можно получить следующие формулы для амплитуд A_1 и A_2 :

$$A_1 = \frac{H_1(c_{22} - a_{22}\omega^2) - H_2(c_{12} - a_{12}\omega^2)}{(c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - (c_{12} - a_{12}\omega^2)^2},$$

$$A_2 = \frac{H_2(c_{11} - a_{11}\omega^2) - H_1(c_{21} - a_{21}\omega^2)}{(c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - (c_{12} - a_{12}\omega^2)^2}. \quad (8.14)$$

Подождем, однако, что подстановка выборок координат достигнута вынужденно равности $a_{11} = a_{22} = 0$ и, кроме того, задано $H_2 = 0$.

При этих условиях выражения (8.14) принимают вид

$$A_1 = \frac{H_1(c_{22} - a_{22}\omega^2)}{(c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - c_{12}^2},$$

$$A_2 = \frac{H_1 c_{12}}{(c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - c_{12}^2}. \quad (8.15)$$

Условие

$$(c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - c_{12}^2 = 0 \quad (8.16)$$

определяет два резонансных значения частоты возмущающей силы; они равны собственным частотам k_1 и k_2 рассматриваемой системы с двумя степенями свободы.

Условие

$$c_{11} - a_{11}\omega^2 = 0 \quad (8.17)$$

определяет частоту антирезонанса. При этой частоте колебания, соответствующие первой координате, полностью отсутствуют, а наибольшие значения второй координаты согласно (8.15) равно

$$A_2 = -\frac{H_1}{c_{12}}.$$

В этом результате содержится интересная возможность практической борьбы с колебаниями; ее заключается в некоторых областях техники. Допустим, что имеется некоторая система с одной степенью свободы. Возникающая в ней гармоническая вынуждающая сила. Условно систему путем добавления дополнительной массы на упругой связи и подчиняя значения жесткости и массы дополнительной части условию (8.17), можно добиться устранения вибраций основной части системы; в этом случае дополнительная часть системы минимизирует динамическое воздействие колебаний (динамическим вынуждением).

Следует иметь в виду, что такой результат эффективен лишь при строгом соответствии частоты ω возмущающей силы; в противном случае он может оказаться даже вредным. Для устранения этого недостатка обычно вводят в систему динамического гашения силы трения,

которым действует гаситель «в среднем» попутным в достаточно широком диапазоне частот ω .

Пример 8.1. На жесткий груз системы с двумя степенями свободы (рис. 8.1) действует гармоническая вынуждающая сила $M_0 \sin \omega t$. Найти, при каких соотношениях жесткости c_1 пружины первого и коэффициента демпфирования α_1 пружины второго груза, т. е. жесткий груз окажется динамически устойчивым колебаний. Коэффициент жесткости c_2 второй пружины и масса m_2 второго груза заданы.

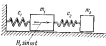


Рис. 8.1

Пружина c_2 и груз m_2 пружин от массового резонанса, составив дифференциальные уравнения движения:

$$M_1 \sin \omega t - c_1 x_1 + c_2(x_2 - x_1) = m_1 \ddot{x}_1, \\ -c_2(x_2 - x_1) = m_2 \ddot{x}_2.$$

Примем для уравнений x форму (8.2)

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 = M_1 \sin \omega t, \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2 x_1 + c_2 x_2 = 0,$$

уставившим:

$$a_{11} = m_1, \quad c_{12} = a_{21} = 0, \quad c_{21} = m_2, \\ c_{11} = c_1 + c_2, \quad c_{12} = c_{21} = -c_2, \quad c_{22} = c_2.$$

Согласно условию (8.17) должно быть

$$c_1 - m_1 \omega^2 = 0,$$

т. е. жесткое соотношение (уравнение динамического равенства) имеет вид

$$\frac{c_1}{m_1} = \omega^2$$

и не зависит от жесткости c_2 и m_2 . На рис. 8.2 показаны зависимости амплитуд A_1 и A_2 в зависимости от частоты ω вынуждающей силы. При построении графиков было принято $M_0 = 10$ Н, $c_1 = c_2 = 10$ Н/см, $m_1 = m_2 = 2000$ кг. При этом собственная частота равен $\omega_1 = 0,015$ с⁻¹, $\omega_2 = 1,015$ с⁻¹, а коэффициент усиления амплитуды частоты равен 3 с⁻¹.

Пример 8.2. Найти амплитуды колебаний сосредоточенных грузов, связанных с деформацией упругой балкой (рис. 8.3, а). Массы грузов одинаковы и равны m , жесткость EJ балки была постоянной. На свободный груз действует вынуждающая сила $M \sin \omega t$.

Дифференциальные уравнения движения систем этого типа удобно составлять с помощью обобщенных координат. Пусть за обобщенные координаты Y_1, Y_2, Y_3 — отклонения грузов от положения

равновесия — вынем

$$Y_1 = -\pi_1 \delta_1 \ddot{y}_1 - \pi_2 \delta_2 \ddot{y}_2 - \pi_3 \delta_3 \ddot{y}_3 + M \sin \omega t \delta_1, \\ Y_2 = -\pi_2 \delta_2 \ddot{y}_1 - \pi_3 \delta_3 \ddot{y}_2 - \pi_4 \delta_4 \ddot{y}_3 + M \sin \omega t \delta_2, \\ Y_3 = -\pi_3 \delta_3 \ddot{y}_1 - \pi_4 \delta_4 \ddot{y}_2 - \pi_5 \delta_5 \ddot{y}_3 + M \sin \omega t \delta_3,$$

где δ_i — коэффициенты влияния (единичные перемещения); π_i

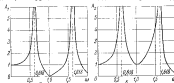


Рис. 8.2

вычислялись по их значениям, приведенным сразу окончательные значения:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{75}{\beta}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{33} = \delta_{31} = \frac{117}{\beta}, \\ \delta_{23} = \frac{263}{\beta}, \quad \delta_{32} = \delta_{31} = \frac{51}{\beta},$$

где $\beta = 9 \cdot 10^6$ Н/м. С учетом этих значений, а также равенств $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1$ дифференциальные уравнения приобретают вид

$$35m\ddot{y}_1 + 117m\ddot{y}_2 + 51m\ddot{y}_3 + \beta y_1 = 117M \sin \omega t, \\ 117m\ddot{y}_1 + 243m\ddot{y}_2 + 117m\ddot{y}_3 + \beta y_2 = 243M \sin \omega t, \\ 51m\ddot{y}_1 + 117m\ddot{y}_2 + 35m\ddot{y}_3 + \beta y_3 = 117M \sin \omega t.$$

Теперь можно составить уравнения (8.11) для определения амплитуд колебаний:

$$(3 - 15m\omega^2)A_1 - 117m\omega^2 A_2 - 51m\omega^2 A_3 = 117M, \\ -117m\omega^2 A_1 + (\beta - 243m\omega^2)A_2 - 117m\omega^2 A_3 = 243M, \\ -51m\omega^2 A_1 - 117m\omega^2 A_2 + (\beta - 75m\omega^2)A_3 = 117M;$$

откуда находим

$$A_1 = A_2 = \frac{M}{\beta} \frac{117}{1 - 389\alpha + 3240\alpha^2}, \\ A_3 = \frac{M}{\beta} \frac{263 - 389m\alpha}{1 - 389\alpha + 3240\alpha^2},$$

где $\alpha = m\omega^2/\beta$. Как видно, амплитуды колебаний зависят от параметра α , характеризующего с изменением частоты возбуж-

дения. При $\alpha_1 = 0,00275$ и $\alpha_2 = 0,0111$ значениям изгибных моментов образуются в нуль, т. е. амплитуды колебаний становятся пространственными (разомкнутые системы, когда частота возмущения совпадает с какой-либо собственной частотой разомкну-

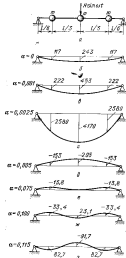


Рис. 8.3

ной системы). На рис. 8.3, б—г показаны формы изогнутой оси балки при $P/l = 1$ и различных значениях параметра α (так как при изменении α коэффициенты A_1 и A_2 изменяются по закону

перевода, кривые построены в различных масштабах). Кривая на рис. 8 показана для $\alpha = 0$ (статическое изгибание). По форме от нее мало отличается кривая на рис. а, относящаяся к пространственной изогнутой системе параметра α . Кривая на рис. в построена для максимальных значений α и является в первой собственной форме. Кривая на рис. г относится к промежуточным значениям α ($0,00275 < \alpha < 0,0111$), так можно заметить, что параметрические значения в промежуток с возмущающей силой (надлежащее разложение разности систем с одной статической свободой). Кривая на рис. д соответствует отрицательному (при $\alpha = 0,005$ значение A_2 обращается в нуль). На рис. ж показана кривая для частоты, немного меньшей, чем вторая собственная частота, а кривая на рис. з — для частоты, близкой к первой второй собственной частоте. Можно заметить, что при дальнейшем возрастании параметра α изогнутая ось в принципе будет такой, как на рис. а.

3. Действие произвольных возмущающих сил; разложение по собственным формам. В случаях, когда возмущающие силы изменяются не по гармоническому закону, найдем образцы переход к нормальным (каноническим) координатам. При этом вместо системы дифференциальных уравнений (8.2) или систем (8.3) и (8.4) получится система независимых дифференциальных уравнений

$$\ddot{\eta}_i + \lambda_i^2 \eta_i = Q_i^* \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (8.15)$$

в которой η_i — нормальные координаты, λ_i — собственные частоты, Q_i^* — приведенные обобщенные силы. После того как образована система (8.15), дальнейшее решение сводится к последовательному колебанию ряда независимых систем с одной статической свободой (см. п. 4 § 3).

Пусть обобщенные координаты первоначально приняты таким образом, что разность систем дифференциальных уравнений запишется в виде (8.3). Для требуемого перехода к системе (8.15) нужно предварительно найти собственные частоты λ_i и коэффициенты собственных форм κ_{ij} . Далее положим

$$q_i = \sum_{j=1}^n \kappa_{ij} \eta_j. \quad (8.16)$$

Тогда (8.3) запишется в виде

$$a_i \sum_{j=1}^n \kappa_{ij} \ddot{\eta}_j + \sum_{j=1}^n c_{ij} \sum_{k=1}^n \kappa_{ik} \eta_k = Q_i. \quad (8.20)$$

Изменив порядок суммирования во втором слагаемом:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} \sum_{k=1}^n \kappa_{ik} \eta_k = \sum_{k=1}^n \eta_k \sum_{i=1}^n c_{ik} \kappa_{ik}.$$

и заметим, что входящая сюда сумма по j согласно (4.65) равна

$$\sum_{j=1}^n c_{j\alpha} x_{j-1} = a_j M_{\alpha}^1 x_{j-1}.$$

Тогда уравнения (8.20) принимают вид

$$a_j \sum_{j=1}^n x_{j1} (\ddot{\eta}_1 + M_{\alpha}^1 \eta_1) = Q_j. \quad (8.21)$$

Умножив каждое из этих равенств на $x_{j\alpha}$ и затем сложив их:

$$\sum_{j=1}^n x_{j\alpha} a_j \sum_{j=1}^n x_{j1} (\ddot{\eta}_1 + k_1 \eta_1) = \sum_{j=1}^n Q_j x_{j\alpha}$$

или

$$\sum_{j=1}^n (\ddot{\eta}_1 + M_{\alpha}^1 \eta_1) \sum_{j=1}^n a_j x_{j\alpha} x_{j1} = \sum_{j=1}^n Q_j x_{j\alpha}. \quad (8.22)$$

Согласно свойству ортогональности собственных функций (4.65) равны нулю все слагаемые в правой части суммы по j , кроме той, в которой индекс i совпадает с индексом α . Поэтому (8.22) можно записать в виде

$$(\ddot{\eta}_\alpha + k_\alpha^2 \eta_\alpha) \sum_{j=1}^n a_j x_{j\alpha}^2 = \sum_{j=1}^n Q_j x_{j\alpha}.$$

Отсюда получим дифференциальные уравнения в нормальных координатах

$$\ddot{\eta}_\alpha + k_\alpha^2 \eta_\alpha = Q_\alpha^1 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n), \quad (8.23)$$

где

$$Q_\alpha^1 = \frac{\sum_{j=1}^n Q_j x_{j\alpha}}{\sum_{j=1}^n a_j x_{j\alpha}^2} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n). \quad (8.24)$$

это приведенные вынуждающие силы.

Если обобщенные координаты были выбраны так, что исходные дифференциальные уравнения записываются в виде (8.5), то аналогично можно прийти к (8.23),

притом

$$Q_\alpha^1 = \frac{k_\alpha^2 \sum_{j=1}^n Q_j x_{j\alpha}}{\sum_{j=1}^n c_j x_{j\alpha}^2}. \quad (8.25)$$

Таким образом, составление уравнений (8.21) должно предполагать определение собственных форм, т. е. коэффициентов $x_{j\alpha}$, и собственных частот k_α ; затем образуются выражения (8.24) или (8.25), и задача сводится к интегрированию нелинейных уравнений (8.23), каждое из которых описывает движение некоторой системы с одной степенью свободы. После интегрирования этих уравнений можно получить выражения для первоначально выбранных обобщенных координат q , с помощью соотношений (8.19).

Пример 8.3. На жесткий груз рассредоточенной равно системы с двумя степенями свободы (рис. 8.1) действует вынуждающая сила

$$Q_1 = M_1(1 - e^{-\alpha t})$$

(M_1 и α — заданные постоянные). Найти движение системы.

Для этой системы при $c_1 = c_2 = c$, $m_1 = m_2 = m$ и $\beta = 4$ было найдено

$$k_1^2 = 0,382 \frac{c}{m}, \quad k_2^2 = 2,618 \frac{c}{m}, \\ x_{11} = 1,618, \quad x_{21} = -0,618.$$

По формуле (8.25) найдем приведенные вынуждающие силы

$$Q_1^1 = \frac{Q_1}{m + m - 1,618^2} = \frac{0,378 M_1}{m} (1 - e^{-\alpha t}), \\ Q_2^1 = \frac{Q_2}{m + m - 0,618^2} = \frac{0,722 M_1}{m} (1 - e^{-\alpha t}).$$

Тогда, образуя оба уравнения (8.23):

$$\ddot{\eta}_1 + 0,382 \frac{c}{m} \eta_1 = \frac{0,378 M_1}{m} (1 - e^{-\alpha t}), \\ \ddot{\eta}_2 + 2,618 \frac{c}{m} \eta_2 = \frac{0,722 M_1}{m} (1 - e^{-\alpha t}).$$

Решение этих уравнений находим с помощью выражения (8.10):

$$\eta_1 = \frac{0,273M}{\varepsilon} \left[1 - \frac{1}{1 + \beta_1^2} e^{-\omega t} - \frac{\beta_1}{1 + \beta_1^2} (\sin k_1 t + \beta_1 \cos k_1 t) \right],$$

$$\eta_2 = \frac{0,222M}{\varepsilon} \left[1 - \frac{1}{1 + \beta_2^2} e^{-\omega t} - \frac{\beta_2}{1 + \beta_2^2} (\sin k_2 t + \beta_2 \cos k_2 t) \right].$$

Здесь $\beta_1 = \alpha/k_1$, $\beta_2 = \alpha/k_2$. Вакансы, согласно (8.10) находим

$$x_1 = \eta_1 + \eta_2 = \frac{M}{\varepsilon} \left[1 - \left(\frac{0,273}{1 + \beta_1^2} + \frac{0,222}{1 + \beta_2^2} \right) e^{-\omega t} - \right. \\ \left. - \frac{0,273}{1 + \beta_1^2} (\sin k_1 t + \beta_1 \cos k_1 t) - \frac{0,222\beta_2}{1 + \beta_2^2} (\sin k_2 t + \beta_2 \cos k_2 t) \right].$$

$$x_2 = \kappa_{11}\eta_1 + \kappa_{12}\eta_2 = \frac{M}{\varepsilon} \left[0,312 - \left(\frac{0,649}{1 + \beta_1^2} - \frac{0,137}{1 + \beta_2^2} \right) e^{-\omega t} - \right. \\ \left. - \frac{0,649}{1 + \beta_1^2} (\sin k_1 t + \beta_1 \cos k_1 t) + \frac{0,137}{1 + \beta_2^2} (\sin k_2 t + \beta_2 \cos k_2 t) \right].$$

4. Действие периодических вынуждающих сил. В случаях, когда действующие на систему вынуждающие силы изменяются по периодическому закону, возможны два пути решения задачи — в зависимости от того, что в данной системе с одной степенью свободы.

Первый путь основан на разложении периодических вынуждающих сил в ряды Фурье. После такого разложения определяются гармонические движения, вызываемые отдельными гармоническими силами (см. выше п. 2 настоящего параграфа), и найденные результаты надбавляются образом складываются.

Второй путь основан на предварительном переходе к нормальным координатам, как это было изложено в п. 3 этого параграфа. Это приводит к ряду задач о колебаниях систем с одной степенью свободы и позволяет получить решение в замкнутой форме, как это было изложено в § 5, п. 5.

Хотя в расчетной практике чаще идут по первому пути (например, при исследовании круглых колебаний валов двигателя внутреннего сгорания), однако иногда предпочтительнее может оказаться второй путь, особенно в тех случаях, когда тригонометрические ряды, в которых разложены вынуждающие силы, медленно сходятся.

Глава III

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 9. Общие понятия

1. Основные дифференциальные уравнения. В рассмотренных выше параграфах о колебаниях действующие силы можно было отнести к одной из трех категорий: пассивные (в частности, восстанавливающие) силы, зависящие только от обобщенных координат q ; диссипативные силы, определяемые обобщенными скоростями $\dot{q}$; вынуждающие силы, являющиеся заданными функциями времени t .

Случаю существуют силы более сложной природы, в частности нестационарные колебательные силы, которые зависят от координат q , а также от времени t (в явном виде):

$$Q_i = Q_i(q, q_1, \dots, q_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (9.1)$$

и причем так, что их невозможно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит только от координат, а другое — только от времени.

Сравнимыми рассмотренным классическим систем с одной степенью свободы, когда при малых отклонениях от положения равновесия обобщенная сила определяется выражением

$$Q = -c\eta, \quad (9.2)$$

причем, в отличие от случаев действия стандартных восстанавливающих сил, параметр $c = c(t)$ является функцией времени.

Дифференциальные уравнения движения

$$a\ddot{\eta} + c(t)\eta = 0 \quad (9.3)$$

содержит переменный коэффициент и описывает параметрические колебания.

Нам мы увидим ниже, свойства движения, описываемого уравнением (9.3), существенно отличаются от свойств свободных колебаний, описываемых дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Важное значение имеют случаи вырождения в рассмотренных случаях периодического параметра, когда

$$\varepsilon(t+T) = \varepsilon(t). \quad (9.4)$$

Соответствующие этим случаям колебания называются параметрически возбуждаемыми или, короче, параметрическими. Решением дифференциального уравнения (9.3) при условии (9.4) мы займемся ниже, но уже здесь отметим, что амплитуды параметрических колебаний — в зависимости от значений постоянных системы — либо остаются ограниченными, либо возрастают во времени. Очевидную опасность представляют колебания с возрастающими амплитудами; это явление называют параметрическим резонансом. По некоторым признакам, о которых мы приведем, с которыми



Рис. 9.1

речь будет сказано ниже, параметрический резонанс существенно отличается от обычного резонанса и в определенном смысле аналог последнему.

2. Параметрические колебания около положения равновесия. Прежде чем обратиться к решению дифференциального уравнения (9.3) и исследованию возможности параметрического резонанса, рассмотрим некоторые простые механические системы, колебания которых являются параметрическими; в этих случаях часто параметрическими называют и сами системы.

В качестве первого примера рассмотрим симметричную относительно горизонтальной оси жесткую балку длиной $2l$ со средней шарнирно неподвижной опорой и двумя упругими опорами на концах. Коэффициенты жесткости упругих опор одинаковы и равны c_0 (рис. 9.1). К балке приложена переменной горизонтальной силой $P(t)$, заданная в виде периодической функции времени. В положении равновесия ось балки горизонтальна. При малых отклонениях балки от положения равновесия (см. штриховую линию

на рисунке) на нее действует момент сил упругости $-c_0 y l^2$ и момент продольной силы $P(t) y l$; полный момент, представляющий собой обобщенную силу в данной задаче,

$$M = -[c_0 l^2 - P(t) l] y l,$$

оказывается функцией координаты y и времени t . Соответствующее дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$-[c_0 l^2 - P(t) l] y l = I \ddot{y}$$

(где I — момент инерции балки относительно оси вращения), или

$$\ddot{y} + \frac{c_0 l^2 - P(t)}{I} y = 0.$$

Оно относится к типу (9.3).

Другим примером может служить маятник с колеблющейся во вертикали точкой подвеса (рис. 9.2, а). Пусть l — длина маятника, m — масса груза, $y = y(t)$ — заданный периодический закон движения точки подвеса. Дифференциальное уравнение малых отклонений колеблющего маятника имеет вид

$$(-m\ddot{y} - m\ddot{y})l = m l^2 \ddot{\varphi}$$

($-m\ddot{y}$ — переменная сила инерции), или

$$\ddot{\varphi} + \frac{g + \ddot{y}(t)}{l} \varphi = 0; \quad (9.5)$$

как видно, эта система также относится к типу параметрических.

В качестве третьего примера рассмотрим вертикальный безмассовый упругий стержень 3 длиной l , показанный на рис. 9.2, б. С нижним концом стержня соединен сосредоточенный груз 4. Верхний конец стержня служит неподвижной опорой 1, а нижний конец стержня служит шарнирной опорой 2 и пренебречь влиянием силы тяжести груза, то коэффициент жесткости балки определяется



Рис. 9.2

формулой теории сопротивляемости материалов

$$\varepsilon = \frac{3EL}{l(\psi - \alpha)^3}$$

где l — расстояние между опорами.

Вуэлю задано периодическое движение силою некоторого среднего напряжения, определяемого расстоянием α . Состояние равновесия соответствует изгибанию груза на вертикали в прямоугольной форме оси стержня.

При возмущении этого состояния груз отклоняется в сторону, ось балки изгибается, и последующие движения груза описываются дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \frac{3EL}{m(l - \varepsilon(x))^3} x = 0, \quad (9.6)$$

которое также относится к неавтономному типу.

Последование решений подобных дифференциальных уравнений позволяет судить об устойчивости состояния равновесия, силою которого происходит колебания. Если параметрически возбужденные колебания постепенно затухают (или по крайней мере не имеют тенденции к возрастанию), то состояние равновесия следует признать устойчивым; если же колебания происходят с возрастающими амплитудами (параметрический резонанс), то состояние равновесия неустойчиво. Поэтому в подобных случаях самым важным является выяснение основной тенденции параметрических колебаний.

3. Параметрические колебания около стационарного режима движения. К необходимости исследовать свойства решений дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами приводит также задача об устойчивости стационарных режимов движения. Обычно дело сводится к следующему.

Допустим, что после решения некоторой задачи о движении механической системы найден режим движения, описываемый функцией $q = q(t)$. Для исследования устойчивости этого режима необходимо предположить, что он каким-либо образом нарушен и возмущенное движение описывается функцией $q + \delta q$, близкой к функции $q(t)$; здесь $\delta q(t)$ — вариация функции $q(t)$, т. е. отклонение системы от стационарного режима движения. Если функция δq с течением времени возрастает, то рассматриваемый режим $q = q(t)$ неустойчив; в случае постоянного затухания функции δq режим $q = q(t)$ устойчив.

Как оказывается, для функции $\delta q(t)$ в ряде случаев можно получить дифференциальное уравнение типа (9.3). Характер решения этого уравнения позволяет сделать заключение об устойчивости режима движения $q = q(t)$.

Понятно, что самым простым примером из области вынужденных колебаний систем с нелинейной восстанавливающей силой (см. гл. II, § 7). Дифференциальное уравнение колебаний такой системы имеет вид

$$m\ddot{q} + F(q) = Q(t), \quad (9.7)$$

причем $F(q)$ и $Q(t)$ — заданные функции координаты и времени. Как мы знаем, решение этого уравнения может быть периодическим и возможно существование нескольких стационарных режимов с различными амплитудами

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t).$$

Тем не менее среди этих режимов физически осуществимы только устойчивые режимы, то только решение задачи о вынужденных колебаниях должно содержать не только возмущенное (точное или приближенное) возмущенное решение, но и анализ на устойчивость.

Для исследования устойчивости одного-либо из найденных режимов, например режима $q_1 = q_1(t)$, предположим, что он каким-либо образом возмущен и, следовательно, движение системы будет описываться суммой $q_1 + \delta q_1$; здесь второе слагаемое, δq_1 , представляет собой возмущенную функцию q_1 .

Об устойчивости стационарного режима $q_1 = q_1(t)$ можно судить по характеру изменения во времени возмущения δq_1 . Если выяснится, что при $t \rightarrow \infty$ возмущение $\delta q_1 \rightarrow 0$ или остается ограниченным, то возмущенное движение будет стремиться к стационарному режиму или останется близким к нему; следовательно, последний устойчив. Если же при $t \rightarrow \infty$ вариация δq_1 неограниченно возрастает, то рассматриваемый стационарный режим неустойчив.

Решение $q_1(t)$ должно удовлетворять дифференциальному уравнению (9.7):

$$m\ddot{q}_1 + F(q_1) = Q(t); \quad (9.8)$$

по тому же дифференциальному уравнению (9.7) должно удовлетворять такая функция $q_1 + \delta q_1$:

$$m\ddot{q}_1 + m\ddot{\delta q}_1 + F(q_1 + \delta q_1) = Q(t).$$

Рассмотрим малые значения δq_1 , мы можем написать

$$F(q_1 + \delta q_1) \approx F(q_1) + F'(q_1)\delta q_1,$$

где штрих обозначает дифференцирование по аргументу q_1 , т. е.

$$a\ddot{q}_1 + a\delta\ddot{q}_1 + F(q_1) + F'(q_1)\delta q_1 = Q(t), \quad (9.9)$$

Вычитая уравнение (9.8) из уравнения (9.9), получим

$$a\delta\ddot{q}_1 + F'(q_1)\delta q_1 = 0. \quad (9.10)$$

Но так как q_1 представляет некоторую известную функцию времени (стационарный режим), то и $F'(q_1)$ также является функцией времени, т. е. дифференциальное уравнение (9.10) есть уравнение типа (9.3).

Пусть, например,

$$F(q) = \mu q^3, \quad Q(t) = H \sin \omega t,$$

и необходимо исследовать устойчивость стационарного режима

$$q_1 = A_1 \sin \omega t,$$

который был найден в § 7 гл. II.

В данном случае

$$F'(q) = 3\mu q^2 = 3\mu A_1^2 \sin^2 \omega t$$

и для вариаций стационарного режима получим дифференциальное уравнение

$$a\delta\ddot{q} + (3\mu A_1^2 \sin^2 \omega t) \delta q = 0, \quad (9.11)$$

написав соответствующее уравнение (9.3).

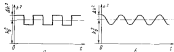


Рис. 9.3

В следующих двух параграфах будут рассмотрены решения дифференциальных уравнений типа (9.3), которые выписем в виде

$$\ddot{q} + K^2(t)q = 0, \quad (9.12)$$

Однако сразу отметим, что интегрирование этого уравне-

ния при произвольной периодической функции $K^2(t)$ весьма сложен. Поэтому ниже мы остановимся только на двух относительно простых случаях, когда изменение параметра следует периодическому кругово-постоянному закону либо закону синуса (в обоих случаях в действительном постоянном слагаемом — см. рис. 9.3).

§ 10. Параметрические колебания по периодическому кругово-постоянному закону

1. Колебания при отсутствии трения. Рассмотрим случай, соответствующий случаю рис. 9.3, а. При этом дифференциальное уравнение (9.12) принимает вид

$$\ddot{q} + K_0^2(1 \pm \mu)q = 0, \quad (10.1)$$

где $\mu = \Delta K^2/K_0^2$.

Ввиду того что в течение каждого полуупериода $T/2 = \pi/\omega_0$ дифференциальное уравнение имеет постоянные коэффициенты, можно воспользоваться способом приращения.

Рассмотрим какой-либо период T изменения коэффициента K^2 и совместим с началом этого периода начало отсчета времени. В первом полуупериоде, когда $0 < t < T/2$, дифференциальное уравнение (10.1) имеет вид

$$\ddot{q}_1 + K_0^2(1 + \mu)q_1 = 0, \quad (10.2)$$

а во втором полуупериоде $T/2 < t < T$ соответственно будет

$$\ddot{q}_2 + K_0^2(1 - \mu)q_2 = 0. \quad (10.3)$$

Дифференциальные уравнения (10.2) и (10.3) с постоянными коэффициентами имеют решения

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 \sin k_1 t + D_1 \cos k_1 t, \\ q_2 &= C_2 \sin k_2 t + D_2 \cos k_2 t, \end{aligned} \quad (10.4)$$

причем $k_1 = k_0\sqrt{1+\mu}$, $k_2 = k_0\sqrt{1-\mu}$. В этих решениях содержится четыре постоянных, C_1 , D_1 , C_2 , D_2 , для определения которых необходимо четыре условия. Два условия отнесем к моменту времени $t = T/2$, общему для обоих полуупериодов; в указанный момент должно быть

$$q_1\left(\frac{T}{2}\right) = q_2\left(\frac{T}{2}\right), \quad \dot{q}_1\left(\frac{T}{2}\right) = \dot{q}_2\left(\frac{T}{2}\right). \quad (10.5)$$

Это дает следующие соотношения:

$$\begin{aligned} C_1 \sin \frac{k_1 T}{2} + D_1 \cos \frac{k_1 T}{2} - C_2 \sin \frac{k_2 T}{2} + D_2 \cos \frac{k_2 T}{2}, \\ k_1 \left(C_1 \cos \frac{k_1 T}{2} - D_1 \sin \frac{k_1 T}{2} \right) = k_2 \left(C_2 \cos \frac{k_2 T}{2} - D_2 \sin \frac{k_2 T}{2} \right), \end{aligned} \quad (10.6)$$

Взяв их еще для соотношения:

$$\lambda q_1(0) = q_2(T), \quad \lambda \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(T), \quad (10.7)$$

в которых λ — некоторое, пока неизвестное число. Соотношениями (10.7) утверждается, что во времени рассматриваемого периода обобщенная координата и обобщенная скорость изменяются в λ раз. Соответственно этому движение в следующем периоде является при умножении в λ раз начальными условиями, т. е. будет повторять движение в рассматриваемом периоде, но в λ раз масштабе.

Если $|\lambda| > 1$, то колебания в каждом следующем периоде будут увеличиваться, а если $|\lambda| < 1$, то они будут постоянно уменьшаться. Таким образом, устойчивость или неустойчивость системы определяется значением модуля λ .

Подставив решения (10.4) в соотношения (10.7), получим

$$\begin{aligned} \lambda D_1 &= C_2 \sin k_2 T + D_2 \cos k_2 T, \\ \lambda C_1 k_1 &= C_2 k_2 \cos k_2 T - D_2 k_2 \sin k_2 T. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Система уравнений (10.8) и (10.6) однородна относительно постоянных C_1, D_1, C_2, D_2 и имеет отличное от нуля решение только в том случае, если равен нулю определитель, составленный из ее коэффициентов:

$$\begin{vmatrix} \sin \frac{k_1 T}{2} & \cos \frac{k_1 T}{2} & -\sin \frac{k_2 T}{2} & -\cos \frac{k_2 T}{2} \\ k_1 \cos \frac{k_1 T}{2} & -k_1 \sin \frac{k_1 T}{2} & -k_2 \cos \frac{k_2 T}{2} & k_2 \sin \frac{k_2 T}{2} \\ 0 & \lambda & -\sin k_2 T & -\cos k_2 T \\ k_1 \lambda & 0 & -k_2 \cos k_2 T & k_2 \sin k_2 T \end{vmatrix} = 0.$$

Развернув определитель, получим следующее квадратное уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda k + 1 = 0, \quad (10.9)$$

в котором для критичности обратимого

$$\begin{aligned} A &= \cos \frac{k_1 T}{2} \cos \frac{k_2 T}{2} - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \sin \frac{k_1 T}{2} \sin \frac{k_2 T}{2} = \\ &= \cos \mu \alpha \sqrt{1-\mu} \cos \mu \alpha \sqrt{1-\mu} - \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\mu}} \sin \mu \alpha \sqrt{1+\mu} \sin \mu \alpha \sqrt{1-\mu}, \end{aligned} \quad (10.10)$$

причем $\alpha = k_2 T / (2\pi)$ есть отношение среднего значения k_2 собственной частоты к частоте пульсации параметра. Корни уравнения (10.9) следующие:

$$\lambda_1 = A - \sqrt{A^2 - 1}, \quad \lambda_2 = A + \sqrt{A^2 - 1}. \quad (10.11)$$

Для того чтобы числа λ_1 и λ_2 были вещественными, правая предпологается по смыслу решаемой задачи, должна быть

$$|A| > 1, \quad (10.12)$$

т. е. либо $A > 1$, либо $A < -1$. Но в обоих этих случаях модуль одного из корней (10.11) больше единицы:

$$\text{если } A > 1, \text{ то } \lambda_2 > 1;$$

$$\text{если } A < -1, \text{ то } |\lambda_1| > 1.$$

Отсюда следует, что если выполнены неравенства (10.12), то колебания будут с каждым новым периодом увеличиваться. Неравенство представляет собой не только условие неустойчивости колебания λ , но одновременно и условие возникновения параметрического резонанса.

Так как значение A зависит от двух постоянных системы α и μ , то их значения полностью определяют устойчивость системы.

На рис. 10.1 представлена построенная с помощью условия (10.12) диаграмма устойчивости, по осям которой отложены значения $\alpha\pi^2$ и $2\mu\pi^2$. В неэкстремальных областях значения параметров α и μ таковы, что условие (10.12) выполняется, т. е. система неустойчива. Заштрихованные области диаграммы соответствуют устойчивым состояниям системы. С помощью такой диаграммы можно сразу судить об устойчивости по данным значениям α и μ без всяких дополнительных вычислений.

Прежде всего обратим внимание на те зоны областей неустойчивости, которые расположены около горизон-
12*

такой оси, т. е. соответствуют малым значениям параметра μ . Как видно, в этих зонах $4\alpha^2 \approx \alpha^2$, т. е.

$$\alpha \approx \frac{n}{2} \quad (\alpha = 1, 2, \dots) \quad (10.13)$$

То же можно найти из (10.10), полагая $\mu = 0$. В самом деле,

$$A = \cos^2 n\alpha - \sin^2 n\alpha = \cos 2n\alpha,$$

т. е. при произвольных значениях α имеем $|A| \leq 1$. Равенство $|A| = 1$, соответствующее комбинационному пара-

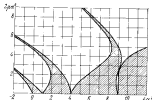


Рис. 10.1

метрического резонанса, возможно при условии, что аргумент $2n\alpha$ удовлетворяет равенству

$$2n\alpha = \alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots),$$

из которого также следует соотношение (10.13).

Таким образом, если выполняются условия (10.13), то параметрический резонанс возникает при сколь угодно малой глубине пульсации. При этом основное значение имеет случай $n=1$, когда $\alpha=1/2$, т. е. когда среднее значение собственной частоты вдвое меньше частоты параметрического возбуждения.

При значительной глубине пульсации и заметном отклонении μ от нуля параметрический резонанс возникает в узких областях значений α , расположенных около значений (10.13); чем больше заданное значение μ , тем шире эти области. По этой причине отстройка от парамет-

рического резонанса труднее, чем от обычного резонанса: параметрический резонанс более опасен, чем обычный, еще и по той причине, что линейное демпфирование (которое мы не учитывали) лишь незначительно суживает области неустойчивости, но неспособно ограничить возрастание амплитуд колебаний в этих областях*).

Пример 10.1. Груз h массой m укреплен на упругой пружине жесткостью k ; коэффициент сопротивления среды равен γ . Приложен к грузу h периодическое внешнее воздействие так, что длительность внешнего воздействия t_0 равна длительности интервала между двумя последовательными воздействиями. Длина деформированной части пружины при обтекании мало отличается от длины l (рис. 10.2). Найти максимальное значение t_0 , при котором возникает параметрический резонанс.

Замечая, что период внешнего воздействия $T=2t_0$, и учитывая жесткость глубины пульсации, найдем условие параметрического резонанса (10.13):

$$\alpha = \frac{1}{2}T(2\alpha) = \alpha/2 \quad (\alpha = 1, 2, \dots).$$

Подставляя сюда $t_0 = \sqrt{m/k}$, $T=2t_0$, найдем

$$t_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Максимальное значение t_0 соответствует $n=1$:

$$t_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

т. е. четыре малых периода свободных колебаний груза.



Рис. 10.2

2. Влияние линейного трения. При наличии вязкого трения вместо дифференциального уравнения (10.1) имеем

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + k_0^2(1 \pm \mu)q = 0, \quad (10.14)$$

в котором по-прежнему $k = \frac{h}{l^3}$, где h — коэффициент жесткости, δ — вязкий коэффициент. Рассуждая, как и в п. 1, найдем решение для обеих полупериодов:

$$q_1 = C_1 e^{-\delta t} \sin k_1^2 t + D_1 e^{-\delta t} \cos k_1^2 t,$$

$$q_2 = C_2 e^{-\delta t} \sin k_2^2 t + D_2 e^{-\delta t} \cos k_2^2 t.$$

* При действии нелинейного вязкого трения амплитуды колебаний оказываются ограниченными.

где

$$k_1^* = \sqrt{k_0^2 - k^2} = \sqrt{(1 + \mu) k_0^2 - k^2},$$

$$k_2^* = \sqrt{k_0^2 - k^2} = \sqrt{(1 - \mu) k_0^2 - k^2}.$$

Условия в момент $t = T/2$ имеют вид

$$q_1\left(\frac{T}{2}\right) = q_2\left(\frac{T}{2}\right), \quad \dot{q}_1\left(\frac{T}{2}\right) = -\dot{q}_2\left(\frac{T}{2}\right),$$

или

$$\begin{aligned} C_1 \sin \frac{k_1^* T}{2} + D_1 \cos \frac{k_1^* T}{2} &= C_2 \sin \frac{k_2^* T}{2} + D_2 \cos \frac{k_2^* T}{2}, \\ C_1 \left(-k_1 \sin \frac{k_1^* T}{2} + k_1^* \cos \frac{k_1^* T}{2} \right) - D_1 \left(k_1 \cos \frac{k_1^* T}{2} + \right. \\ &\quad \left. + k_1^* \sin \frac{k_1^* T}{2} \right) = C_2 \left(-k_2 \sin \frac{k_2^* T}{2} + k_2^* \cos \frac{k_2^* T}{2} \right) - \\ &\quad - D_2 \left(k_2 \cos \frac{k_2^* T}{2} + k_2^* \sin \frac{k_2^* T}{2} \right). \end{aligned} \quad (10.15)$$

Далее составляем два условия типа (10.7):

$$\lambda q_1(0) = q_2(T), \quad \lambda \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(T),$$

т. е.

$$\begin{aligned} \lambda D_1 &= e^{-i\omega T} (C_2 \sin k_2^* T + D_2 \cos k_2^* T), \\ \lambda (C_1 k_1^* - D_1 k) &= e^{-i\omega T} [C_2 (-k_2 \sin k_2^* T + k_2^* \cos k_2^* T) - \\ &\quad - D_2 (k_2 \cos k_2^* T + k_2^* \sin k_2^* T)]. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Четыре уравнения (10.15) и (10.16) образуют систему, однородную относительно постоянных C_1, D_1, C_2, D_2 ; отличие от нуля решения соответствует случаю, когда равен нулю определитель, составленный из коэффициентов системы, ранг которой, придем, аналогично (10.9), к квадратному уравнению

$$\lambda^2 - 2A\lambda + B_1 = 0. \quad (10.17)$$

В каждом конкретном случае по заданным значениям k_0, μ, k, T можно вычислить значения A и B_1 , а затем определить корни λ_1 и λ_2 квадратного уравнения (10.17). Признаком неустойчивости служит действительность кор-

ней и порогом является $|A| > 1$ для наибольшего по модулю корня.

На оставшихся, на первом исследовании корней, заметим, что для их действительности (т. е. неустойчивости системы) необходимо выполнение условия

$$|A_1| > \sqrt{B_1}, \quad (10.18)$$

более жесткого, чем условие $|A| > 1$, полученное выше для случая отсутствия трения. В частности, при $k > 0$ и $\mu \rightarrow 0$ условие (10.18) не выполняется, т. е. параметрический резонанс невозможен. Это означает, что для возникновения параметрического резонанса необходима нектория, несомненно большая, глубина пульсации μ . В целом трение оказывает стабилизирующее действие и приводит к некоторому сужению областей неустойчивости.

§ 11. Параметрическое возбуждение по закону синуса

1. Общие сведения. Этот случай изменения параметра иллюстрирован на рис. 9.3, б. Соответствующее дифференциальное уравнение движения запишем в виде

$$\ddot{q} + k_0^2(1 - \mu \cos \omega t)q = 0. \quad (11.1)$$

Как и в § 10, здесь k_0 — среднее значение собственной частоты, μ — относительная глубина пульсации переменного коэффициента. Дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами (11.1) называется уравнением Матвея. Обычно это уравнение записывают в форме

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + (a - 2\mu \cos 2\tau)q = 0, \quad (11.2)$$

в которой можно перейти, положив в уравнении (11.1)

$$\omega t = 2\tau, \quad k_0^2 = \frac{a\omega^2}{4}, \quad \mu = \frac{2\mu}{a}, \quad (11.3)$$

Решения уравнения (11.2) служат специальными функциями, называемые функциями Матвея, свойства которых подробно изучены. Как и в случае рассмотренного в § 10 параметрического возбуждения, эти решения могут быть или ограниченными, или неограниченно возрастающими. Выделение соответствующих этим случаям областей параметра a и μ приводит к диаграмме устойчивости, кото-

рис. 11а в готовом виде на рис. 11.1 (диаграмма Айнса — Стрета); она сходна с диаграммой устойчивости, изображенной на рис. 10.1. Границы между областями устойчивости и неустойчивости соответствуют периодическим движениям. Диаграмма устойчивости симметрична

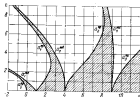


Рис. 11.1

относительно оси a , так как знак ε в уравнении (11.2) не имеет значения.

Если дифференциальные уравнения задачи приведены к форме (11.2), то по данным значениям a и q с помощью диаграммы устойчивости можно сразу сделать заключение об устойчивости или неустойчивости системы. Как и выше, речь может идти либо об устойчивости состояния равновесия (q — отклонение от этого состояния), либо об устойчивости некоторого осредненного движения (в этом случае под q следует понимать среднюю координату).

Для приближенного определения границ между областями устойчивости и неустойчивости в плоскости параметров a и q может быть применен способ гармонического баланса. На границах первой области неустойчивости движение должно быть периодическим, причем период, как мы видели в § 10, вдвое больше периода внешнего параметра. По периодическому движению в уравнении (11.2) решив a , так что указанное движение имеет период 2π и его можно представить в виде ряда

$$q = A_1 \sin \tau + B_1 \cos \tau + A_2 \sin 3\tau + B_2 \cos 3\tau + \dots \quad (11.4)$$

Ограничиваясь первыми двумя членами, подставим их

сумму в уравнение (11.2); приравняем нулю коэффициенты при $\sin \tau$ и $\cos \tau$, получим два однородных уравнения

$$(a - \varepsilon - 1)A_1 = 0, \quad (\varepsilon + 1)B_1 = 0, \quad (11.5)$$

из которых следует уравнения обеих границ:

$$a^{(1)} = 1 + \varepsilon, \quad a^{(2)} = 1 - \varepsilon. \quad (11.6)$$

Эти уравнения можно уточнить, приняв во внимание большое число членов ряда (11.4).

Приведем без вывода более точные уравнения для первых четырех областей неустойчивости, обозначая значения a на границах n -й области неустойчивости через $a_n^{(u)}$ и $a_n^{(s)}$:

$$\begin{aligned} a_0^{(u)} &= -\frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{7}{128} \varepsilon^4 - \dots \\ a_1^{(u)} &= 1 + \varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^2 + \frac{1}{24} \varepsilon^3 - \frac{1}{432} \varepsilon^4 + \dots \\ a_1^{(s)} &= 1 - \varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^2 + \frac{1}{24} \varepsilon^3 - \frac{1}{432} \varepsilon^4 + \dots \\ a_2^{(u)} &= 4 + \frac{5}{12} \varepsilon^2 - \frac{763}{13824} \varepsilon^4 + \dots \end{aligned} \quad (11.7)$$

$$a_2^{(s)} = 4 - \frac{5}{12} \varepsilon^2 + \frac{763}{13824} \varepsilon^4 - \dots$$

$$a_3^{(u)} = 9 + \frac{1}{16} \varepsilon^2 + \frac{1}{24} \varepsilon^3 + \frac{13}{2048} \varepsilon^4 + \dots$$

$$a_3^{(s)} = 9 + \frac{1}{16} \varepsilon^2 - \frac{1}{24} \varepsilon^3 + \frac{13}{2048} \varepsilon^4 + \dots$$

В заключение заметим, что не учитывая здесь влияние трения несомненно суживает границы областей неустойчивости, подобно тому как это было показано в § 10.

3. Примеры.

Пример 1. Найти условия устойчивости вертикального состояния равновесия обобщенного маятника (рис. 11.2), если точка его центра параболится колеблется около среднего положения по закону $q = A \sin \omega t$ с частотой ω и амплитудой A . Длина маятника равна l .

Заметим, что при периодическом вращении маятника неустойчиво, однако, как мы сейчас увидим, маятник любой точки может иметь устойчивость только временно. Составляя дифференциальные уравнения относительного движения, необходимо учесть периодическую силу вращения $-m\omega^2 A \sin \omega t$. Ее можно считать $-m\omega^2 q \sin \omega t$, и уравнение моментов примет вид

$$m l \ddot{\varphi} - m l A \omega^2 q \sin \omega t = m g \varphi,$$

т. е.

$$\ddot{\varphi} + \left(-\frac{g}{l} + \frac{4\omega^2}{l} \sin \alpha \right) \varphi = 0.$$

Для приведения уравнения к виду (11.2) положим

$$2\tau = \alpha l, \quad a = -\frac{4g}{\alpha^2 K}, \quad \varepsilon = -\frac{2g}{l}.$$

Как видно, в данном примере оба параметра a и ε отрицательны. Знак ε вообще роли не играет (об этом уже говорилось выше), в главной особенности рассматриваемой системы является



Рис. 11.2



Рис. 11.3

сериальность значений a . Как видно из диаграммы устойчивости на рис. 11.3, устойчивость возможна и при отрицательных значениях a ; действительно, каждому значению a отвечает некоторая, довольно узкая область значений $\varepsilon < 0$, в пределах которой возможно равновесие устойчиво. Согласно (11.7) эти значения лежат в интервале $a_0^{(1)} \leq a < a_0^{(2)}$, т. е.

$$-\frac{1}{2} a^2 \leq a < 1 - a - \frac{1}{2} a^2$$

(рис. 11.3). При малых амплитудах колебаний A , т. е. малых значениях параметра ε , первое неравенство удовлетворяется при любых отрицательных значениях a и практически остается лишь одно неравенство $a > -\frac{1}{2} a^2$, т. е.

$$|a| < \frac{1}{2} a^2.$$

Полученная сюда неравенства a и ε , являясь условиями устойчивости в виде

$$A\omega > \sqrt{2g}l$$

Это неравенство определяет минимальный уровень энергичности скорости для колебаний точки подвеса, который обеспечивает устойчивость рассматриваемого маятника; как видно, увеличивая скорость дви-

те увеличивать скорость свободного падения тела с высоты, равной длине маятника.

Пример 11.2. Исследовать устойчивость равновесия стационарного движения

$$\varphi = A_i \sin \alpha t \quad (i = 1, 2, 3)$$

в системе с маятниковой неавтономизацией силой $F(t) = \beta \varphi^2$.

Дифференциальное уравнение отклонения δ_2 было составлено выше (см. (2.11)). Запишем его в виде

$$\delta_2'' + (2\alpha A_i^2 \sin^2 \alpha t) \delta_2 = 0,$$

где коэффициент α равен коэффициенту β , разделенному на инерционный коэффициент системы. Для того чтобы привести уравнение к форме (11.2), нужно написать

$$\alpha \varepsilon = \tau, \quad a = \frac{2\alpha A_i^2}{2\alpha^2}, \quad \varepsilon = \frac{2\alpha A_i^2}{2\alpha^2}.$$

Таким образом, в данном случае $a = 1$ и на диаграмме устойчивости изображены пары значений a , ε лежат на дуге, исходящей из начала координат под углом $\arctan \frac{1}{2}$ к оси ε (см. главу на рис. 11.4). Поочередные подстановка значений A_1 , A_2 и A_3 в

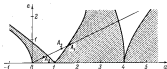


Рис. 11.4

выражения a и ε приводит к расположению точек, соответствующим на рис. 11.4, т. е. точкам A_1 и A_2 соответствуют устойчивым, а точкам A_3 — неустойчивым движениям. Дуги неустойчивости соответствуют $a \leq 1$ отрицательным устойчивости, отделяющим так ретивый на различных частотах резонансной частоты.

Глава IV

УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ
И АВТОКОЛЕБАНИЯ

§ 12. Устойчивость состояний равновесия

1. Вспомогательные замечания. Вопросы устойчивости состояний равновесия мы уже касались в главе I (см. стр. 35—40, 44), но поскольку она была посвящена свободным колебаниям, мы рассматривали только такие системы, в которых отсутствуют приток энергии при их движении отклоняя положение равновесия.

В настоящем параграфе рассматриваются более сложные случаи, относящиеся к автоколебательным системам, при движении которых возможно приток энергии извне. Эти случаи связаны с конкретными ситуациями, которые рассмотрим на свой частный характер можно считать достаточно типичными. В каждой из рассмотренных здесь задач выделяется один соответствующий параметр, от которого зависит устойчивость или неустойчивость соответствующей механической системы, и задача сводится к определению критического значения этого параметра, при котором устойчивость сменяется неустойчивостью. Во всех изучаемых здесь случаях рассматриваются только малые отклонения системы от состояния равновесия, т. е. анализируются линейные задачи, — этого достаточно для того, чтобы судить о тенденции возмущенного движения и тем самым сделать заключение об устойчивости (или неустойчивости) ее малых.

Сначала, в п. 2, на двух примерах обсуждаются вопросы устойчивости систем с одной степенной свободы, связанные с возмущенной неустойчивостью типа диссипации и действом сил отрицательного трения. Эти примеры позволяют выявить особые точки фазовой плос-

кости двух равновесия на уменьшающихся течениях — неустойчивый узел и устойчивый фокус.

В п. 3 рассматривается устойчивость систем с двумя степенями свободы без трения. Первый случай относится к возмущенной неустойчивости типа флаттера, а второй случай — к устойчивости вращающегося тела с сосредоточенно расположенным диском. В этих случаях анализ сводится к анализу знаков вещественных частей корней бикуadrатного характеристического уравнения и потому относительно прост.

Несколько сложнее решается вопрос об устойчивости систем с двумя степенями свободы при наличии трения, который приводит к анализу знаков вещественных частей корней полного уравнения четвертой степени. В п. 4 сначала приводятся используемый в подобных случаях критерий Рауса — Гурвица, а затем рассматривается конкретный пример (задача Циглера).

2. Системы с одной степенной свободой

а) Задача о диссипации.

Рассмотрим жесткую тонкую пластину, удерживаемую одной своей край и шарнирно-опертой другой — правого края. Пластина находится в потоке газа (жидкости), скорость v которого направлена вдоль срединной плоскости пластины в направлении состояния равновесия (рис. 12.1). В этом положении аэродинамические силы равны нулю (если пренебречь весьма малой силой трения потока с поверхностью пластины) и пластина находится в равновесии под действием сил тяжести и реактивной опор. Найдя критическую скорость потока.

При отклонении пластинки возникает аэродинамическое давление, зависящее от угла отклонения φ . Сопоставляя соответствующие аэродинамические установившиеся и аэродинамические им приведем их к статическому давлению p_0 (любое аэродинамическое и лобового силу)

$$X = k_x \frac{\rho v^2}{2} \varphi, \quad Y = k_y \frac{\rho v^2}{2} \varphi, \quad (12.1)$$

здесь k_x, k_y — постоянные аэродинамические коэффициен-



Рис. 12.1

ты, ρ — плотность газа, l — размер пластины вдоль потока (перпендикулярный плоскости рисунка размер пластин равен единице). Точка приложения равнодействующей аэродинамических давлений находится на расстоянии b от оси шарнира, которое приближенно будем считать не зависящим от угла φ . Момент сил, возникающих при отклонении пластины относительно оси шарнира, равен

$$M = -c_0 \varphi^2 + X_1 \varphi + Y_0,$$

где c_0 — коэффициент жесткости упругой опоры. Подставляя сюда (12.1), получим

$$M = -c_0 l^3 \varphi + k_1 \frac{\rho a^3}{2} b \varphi^2 + k_2 \frac{\rho a^3}{2} b \varphi.$$

Обозначим через l момент инерции пластины относительно оси шарнира; тогда дифференциальное уравнение движения будет

$$I \ddot{\varphi} + \left(c_0 l - k_2 \frac{\rho a^3}{2} b \right) \dot{\varphi} = 0$$

(случаев, определяющих момент сил X , опускаю как имеющие второй порядок малости).

Условие устойчивости имеет вид

$$c_0 l - k_2 \frac{\rho a^3}{2} b > 0,$$

а критическое значение скорости равно

$$v_{cr} = \sqrt{\frac{2c_0 l}{k_2 \rho a^3 b}}. \quad (12.2)$$

Отсюда, в частности, можно видеть, что с увеличением коэффициента жесткости упругой опоры критическая скорость увеличивается. Задачи этого типа относятся к теории *аэродинамических*; рассмотренное явление потери устойчивости называется *дивергенцией*, а выражение (12.2) определяет скорость дивергенции. В приведенном решении явное существование скомпенсировано.

б) *«Отрываемое трение»*. Каждый знает, что учитывая наличие зависимости от скорости сил, мы считали эти силы *диссипативными*; будучи направленными противоположно соответствующим скоростям, они способствуют демпфированию колебаний. Однако в некоторых механических системах разнотечные силы, также завися-

щих от скоростей, но совпадающие с ними по направлению. Такие силы оказывают дестабилизирующее действие и способствуют расхождению колебаний, а не их демпфированию; иногда силы этого типа называют силами *отрицательного трения*.

Приведу всего один пример на формальной стороне вопроса и покажу, что кроме восстанавливающих сил действуют силы, линейные зависимости от скорости и совпадающие с ней по направлению. Тогда вместо (2.6) запишем дифференциальное уравнение

$$a \ddot{y} - b \dot{y} + c y = 0 \quad (12.3)$$

($b > 0$). При прежних обозначениях

$$\frac{b}{2a} = \lambda, \quad \frac{c}{a} = \lambda^2, \quad \frac{c}{a} = \lambda^2 - \lambda^2$$

решение дифференциального уравнения (12.3) запишется, подобно (2.9), в форме

$$y = e^{\lambda t} \left(\frac{y_0 - y_0^*}{\lambda_+} \sin \lambda_+ t + y_0 \cos \lambda_+ t \right),$$

где постоянные интегрирования выражены через начальные возмущения. Отсюда видно, что при сколь угодно малых начальных возмущениях y_0 и $\dot{y}_0$ возникнут колебания, амплитуды которых будут возрастать по показательному закону (рис. 12.2, а), т. е. состояние равновесия системы неустойчиво. На рис. 12.2, б показана фазовая диаграмма; в этом случае состояние равновесия соответствует особой точке типа *неустойчивый фокус*. При весьма большом трении (большом критическом) фазовая диаграмма принимает вид, показанный на рис. 12.2, в; начало изображает предельный собой особую точку типа *неустойчивый узел*.

Примером нестационарной системы, в которой при колебаниях может возникнуть сила отрицательного трения, служит система, показанная на рис. 12.3, а. Она состоит из тела I , упруго закрепленного на пружинах 2 , и барабана 3 , который прокатывается в теле I вращаясь с постоянной угловой скоростью. Моменту барабана в таком действии сила сухого трения R , характеризованная которой показана на рис. 12.3, б. В отличие от обычной скомпенсирован, эта характеристика отражает реально наблюдаемое явление зависящее скорости сжатия или расширения

силы трения. Отметим, что в первом квадранте характеристика состоит из двух участков: падающего при $0 < v < v_*$ и возрастающего при $v > v_*$.

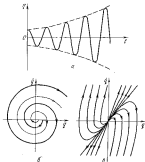


Рис. 12.3



Рис. 12.4

Пусть скорость сходимости при нулевом теле F равна v_0 ; ей соответствует сила трения R_0 . Из уравнения равновесия

$$R_0 - cv_0 = 0$$

можно определить укороченные пружины в равновесном состоянии системы:

$$x_0 = R_0/c. \quad (12.4)$$

Рассмотрим теперь движение тела около этого состояния равновесия в обозначенном через x доопределенное перемещение тела. При этом скорость сходимости перестает быть постоянной величиной и выражается равенством

$$\dot{x} = v_0 - \dot{x},$$

который определяет также уменьшенную силу трения R , отличающуюся от номинального значения R_0 . При малых колебаниях, когда скорость $\dot{x}$ мала по сравнению с v_0 , можно написать

$$R = R_0 + R'_0 \dot{x} \left(R'_0 = \frac{dR}{dv} \Big|_{v_0} \right). \quad (12.5)$$

Дифференциальное уравнение движения тела запишется в виде

$$R - c(x_0 + x) = m\ddot{x},$$

или, с учетом (12.4) и (12.5),

$$m\ddot{x} + R'_0 \dot{x} + cx = 0. \quad (12.6)$$

Отсюда видно, что при $v > v_*$, когда $R'_0 > 0$, колебания будут затухающими; если же $v < v_*$, то $R'_0 < 0$ и уравнение (12.6) принимает вид (12.3). Таким образом, если $v_0 > v_*$, то состояние равновесия устойчиво; если же $v_0 < v_*$, то после любого сколь угодно малого возмущения в системе произойдет самовозбуждение колебаний.

Следует иметь в виду, что наше решение определяет лишь начальную теоретическую возмущенную динамику. С увеличением амплитуд колебаний линеаризованное представление силы трения (12.5) будет становиться все менее точным, и для полного анализа всего последующего процесса необходимо учитывать действительную нелинейность силы трения; об этом см. ниже § 13.

3. Системы с двумя степенями свободы без трения.

Последование устойчивости состояний равновесия малых систем с несколькими степенями свободы также состоит в изучении свойств возмущенного движения, т. е. того движения, которое будет происходить после произвольного сколь угодно малого нарушения состояния равновесия. Названные свойства определяются видом

корней соответствующего характеристического уравнения. Если среда жидкой $\lambda = \alpha + \beta$ имеется хотя бы одна с положительной действительной частью $\alpha > 0$, то соответствующее ему движение будет увеличиваться со временем от состояния равновесия — либо монотонно (если $\beta = 0$), либо в виде нарастающих колебаний (если $\beta \neq 0$). Поэтому исследование устойчивости рассматриваемых ниже систем с двумя степенями свободы сводится к анализу значений действительных частей корней.

а) Задача о флагштоге. В п. 2а была рассмотрена возможность дивергенции пластины в потоке газа, причем принималось, что пластина шарнирно закреплена вдоль одного края, а вдоль другого края она упруго опирается (см. выше рис. 12.4). При упругом опирании обоих краев (рис. 12.4) возникает еще одна опасность возникновения неустойчивости, связанная с неограниченными свойствами рассматриваемой системы с двумя степенями свободы.

Обозначим: $y(t)$ — перемещение центра тяжести пластины, $\varphi(t)$ — угол поворота пластины, c_1 и c_2 — коэффициенты жесткости упругих опор, $m l^2/12$ — момент инерции пластины относительно оси, проходящей через центр тяжести пластины параллельно ее плоскости чертежа, l — длина пластины вдоль потока, b — расстояние от точки приложения подъемной силы

$$Y = k_y \frac{\rho v^2}{2} b y$$

до правого края,

$$R_1 = c_1 \left(y + \frac{\varphi l}{2} \right), \quad R_2 = c_2 \left(y - \frac{\varphi l}{2} \right)$$

— упругие силы реакции.

Дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned} -R_1 - R_2 + Y &= m \ddot{y}, \\ -R_1 \frac{l}{2} + R_2 \frac{l}{2} + Y \left(b - \frac{l}{2} \right) &= \frac{m l^2}{12} \ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражения для Y , R_1 и R_2 , получаем однородную систему

$$\begin{aligned} \ddot{y} + c_{11} \dot{y} + c_{12} \dot{\varphi} &= 0, \\ \ddot{\varphi} + c_{21} \dot{y} + c_{22} \dot{\varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (12.7)$$

с которой

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{c_1 + c_2}{m}, & c_{12} &= \frac{(c_1 - c_2)l}{2m} - \frac{k_y \rho v^2}{2} l, \\ c_{21} &= \frac{b(c_1 - c_2)}{m l}, & c_{22} &= \frac{b(c_1 + c_2)}{m} + \frac{k_y \rho v^2}{m^2} (b - 2l). \end{aligned}$$

Сразу отметим, что неравенство $c_{12} \neq c_{21}$ служит признаком неанергичности системы; иначе мы непосредственно убедились в том, что аэрион рассматриваемой системы может с течением времени убывать (при малых скоростях потока) или возрастать (при достаточно больших скоростях потока). Принимая частное решение системы (12.7) в виде

$$y = A_1 e^{\lambda t}, \quad \varphi = A_2 e^{\lambda t},$$

получаем

$$\begin{aligned} A_1(\lambda^2 + c_{11}) + A_2 c_{12} &= 0, \\ A_1 c_{21} + A_2(\lambda^2 + c_{22}) &= 0; \end{aligned}$$

отсюда следует характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & \lambda^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$\lambda^4 + \lambda^2(c_{11} + c_{22}) + c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 0.$$

Таким образом, корни характеристического уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2,3,4} = & \pm \sqrt{-\frac{c_{11} + c_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2 - (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})}}. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Если разность $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$ отрицательная, то один из корней (соответствующий двум другим плюс) оказывается отрицательным и положительным; отвечающее это-

му кривую динамическое представление собой аperiodический монотонный уход системы от положения равновесия. Следовательно, это положение — неустойчивое.

Если же это равновесие положительное и удовлетворяет неравенству

$$c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > \left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2,$$

то корни (12.8) оказываются комплексными:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \lambda_3 = -\alpha + i\beta, \lambda_4 = -\alpha - i\beta,$$

где α и β — вещественные и мнимые части. Первой паре этих корней соответствует движение

$$y = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = B_1 e^{\alpha t} \sin(\beta t + \gamma_1),$$

$$y = A_3 e^{\lambda_3 t} + A_4 e^{\lambda_4 t} = B_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t + \gamma_2).$$

т. е. колебания с монотонно возрастающими амплитудами. Отсюда ясно, что в рассматриваемой системе состояние равновесия также неустойчиво.

Таким образом, для того чтобы рассматриваемая система после возмущения оставалась в окрестности положений равновесия (что и принимается здесь за признак

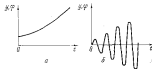


Рис. 12.5

устойчивости), необходимо, чтобы равновесие $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$ удовлетворяла двум неравенствам

$$0 < c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} < \left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2. \quad (12.9)$$

При нарушении первого неравенства возникает дивергенция (рис. 12.5, а), а при нарушении второго — дивер-

генция — колебания с возрастающими амплитудами (рис. 12.5, б); такое положение называется флаттером.

Границам области устойчивости соответствуют значения c_{12} и (12.9). Если подставить в (12.9) выражение c_{12} по формуле для критической скорости вращения, которая служит параметром, определяющим устойчивость:

скорость дивергенции

$$v^2 = \sqrt{\frac{2c_1 c_2 I}{I_1^2 (c_1 (b-1) + c_2 b)}}$$

и скорость флаттера

$$v^2 = 2 \sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2 c_1} \frac{c_1^2 - c_1 c_2 + c_2^2}{c_1 - c_2}}.$$

Отметим, что при малых жесткостях прямой опоры, когда $c_1 < c_1 \left(\frac{d}{b} - 1\right)$, критическая скорость $v_{кр}^{(12)}$ оказывается минималь, т. е. дивергенция возникает.

Если, напротив, жесткость прямой опоры малой жесткости прямой опоры, то минимизм становится выражением критической скорости $v_{кр}^{(12)}$, т. е. возникает флаттер.

Флаттер представляет реальную опасность для многих конструкций, находящихся в потоке жидкости или газа (перед или заостренным оперением самолета, обшивке авиационного аппарата, лопастях турбины и т. д.).

б) Устойчивость вращающегося вала. Рассмотрим систему, состоящую из вращающегося вращающегося безинерционного вала I, с торцевой которого жестко связан диск II, обладающий горизонтальной плоскостью симметрии. Вал с диском вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (рис. 12.6, а).

Введем вращающуюся систему координат, вращающуюся вокруг оси деформированного вала с угловой скоростью ω . Ось x совпадает с осью деформированного вала, ось y направлена параллельно оси симметрии $e = AC$ (A — центр сечения вала, C — центр тяжести диска), а ось z — перпендикулярно осям x и y ; ось z и y — ось симметрии диска I и II соответственно. см. рис. 12.6, б. При таком выборе координатной

системы относительно динамического диска, обусловленного кинематическим эффектом, является поступательным.

Исследуем это относительное движение, обозначим r — радиус-вектор центра тяжести Диска C , x, y, z — декартовы координаты точки C в подвижной координатной системе, ρ — радиус-вектор точки крепления A диска к валу (при этом $\rho + e = r$), c — коэффициент жесткости

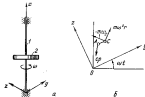


Рис. 12.4

вала (для изображенной схемы $c = 48EI/l^3$, где EI — изгибная жесткость системы вала, l — его длина).

При составлении дифференциальных уравнений относительного движения центра диска C нужно учесть силу упругости вала $-cr$, переносную силу инерции $-\dot{m}\dot{w}$, и кориолисову силу инерции $-\dot{m}\dot{w}$. Сила упругости приложена в точке A , а обе силы инерции — в точке C .

Силу упругости можно записать в виде

$$-cr = -cx + cy = -c[(y - e)] + ikz.$$

Переносная сила инерции равна

$$-\dot{m}\dot{w} = m\omega^2 r = m\omega^2(yj + kz).$$

Для кориолисовой силы инерции последовательно получим:

$$\begin{aligned} -\dot{m}\dot{w} &= 2m(\dot{w} \times \omega) = 2m[(\dot{y}j + \dot{z}k) \times \omega] = \\ &= 2m\omega(\dot{y} - \dot{y}k). \end{aligned}$$

Проекция этих сил на оси подвижной координатной системы даны в следующей таблице:

Сила	Проекция сил	
	на ось y	на ось z
Сила упругости	$-c(y - e)$	$-ckz$
Переносная сила инерции	$m\omega^2 y$	$m\omega^2 z$
Кориолисова сила инерции	$2m\omega \dot{y}$	$-2m\omega \dot{z}$

Соответственно данным таблицей дифференциальные уравнения относительного движения центра диска C имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -c(y - e) + m\omega^2 y + 2m\omega \dot{y}, \\ m\ddot{z} &= -ckz + m\omega^2 z - 2m\omega \dot{z}. \end{aligned}$$

Подставив сюда $k^2 = c/m$ (k — собственная частота поперечных колебаний невращающейся системы), получим при $m \neq 0$

$$\begin{aligned} \ddot{y} - 2\omega \dot{y} + (k^2 - \omega^2)y &= k^2 e, \\ \ddot{z} + 2\omega \dot{z} + (k^2 - \omega^2)z &= 0. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Эта неоднородная система уравнений допускает решение $Y_0 = \frac{e}{1 - \omega^2/k^2}$; $Z_0 = 0$; ему соответствует вращающийся во времени кинематический диск в приращенной плоскости xy . Для того чтобы исследовать устойчивость этого режима, предположим, что он каким-либо образом был нарушен и возникло возмущенное движение, описываемое функциями

$$y = y_0 + Y, \quad z = Z,$$

где $Y(t)$ и $Z(t)$ — малые отклонения от режима, устойчивость которого исследуется. Подставим y, z в (12.10), получим систему уравнений, которая при учете выражений Y_0 и Z_0 приводится к однородному виду

$$\begin{aligned} \ddot{Y} - 2\omega \dot{Y} + (k^2 - \omega^2)Y &= 0, \\ \ddot{Z} + 2\omega \dot{Z} + (k^2 - \omega^2)Z &= 0. \end{aligned}$$

Положим, как и выше

$$Y = A_1 e^{\lambda t}, \quad Z = A_2 e^{\lambda t},$$

имеем однородную систему относительно A_1 и A_2 системы уравнений:

$$A_1 \lambda^3 - 2\omega A_2 \lambda + (\lambda^2 - \omega^2) A_1 = 0,$$

$$A_2 \lambda^3 + 2\omega A_1 \lambda + (\lambda^2 - \omega^2) A_2 = 0.$$

Она имеет отличные от нуля корни только в том случае, когда равен нулю определитель

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \omega^2 + \lambda^2 & -2\omega\lambda \\ 2\omega\lambda & \lambda^2 - \omega^2 + \lambda^2 \end{vmatrix} = 0;$$

в результате получим характеристическое уравнение

$$(\lambda^2 - \omega^2 + \lambda^2)^2 + (2\omega\lambda)^2 = 0.$$

При $k \neq 0$ все корни характеристического уравнения мнимые:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm(k \pm i)\lambda.$$

Это означает, что при $k \neq 0$ система устойчива: после любого внешнего возмущения она будет совершать гармонические колебания с частотами $k + i\omega$ и $k - i\omega$ (нужно отметить, что эти частоты отличаются от собственных частоты колебаний невыращенной системы). Лишь в особом случае, когда $\omega = k$, возникает нулевой (двойной) корень, которому соответствует неустойчивость системы. Впрочем, с приближением угловой скорости ω к значению k само значение k неограниченно возрастает. Угловую скорость $\omega = k$ называют критической скоростью; некоторый диапазон значений угловой скорости, близких к критическому значению, в эксплуатационных условиях запрещается. Важно, что при $\omega > k$ система вновь устойчива!

4. Системы с двумя степенями свободы и трением. В обоих рассмотренных в п. 3 примерах характеристическое уравнение сводилось к квадратным и найти его корни было легко. В более сложных случаях, например для ползущего уравнения четвертой степени, определение корней оказывается гораздо более трудной задачей. Однако для удобства и знания численных частей корней нет необходимости решать характеристические уравнения. Раус и Гурвиц указали условия, которым должны удовлетворять коэффициенты характеристического уравнения, для того чтобы действительные части всех корней были отрицательными; приведем условия Рауса — Гурвица без вывода.

Пусть характеристическое уравнение записано в виде

$$b_0 \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + b_2 \lambda^{n-2} + \dots + b_n = 0;$$

для того, чтобы среди его корней не было ни одного с положительной действительной частью, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$b_0 > 0, \quad b_1 > 0, \quad \left| \frac{b_1}{b_0} \frac{b_2}{b_1} \right| > 0, \dots$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{vmatrix} > 0.$$

В частности, для характеристического уравнения третьей степени условия Рауса — Гурвица имеют вид

$$b_0 > 0, \quad b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad b_3 > 0, \quad (12.11)$$

$$b_1 b_2 - b_0 b_3 > 0,$$

а для уравнения четвертой степени — вид

$$b_0 > 0, \quad b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad b_3 > 0, \quad b_4 > 0, \quad (12.12)$$

$$b_1 b_2 b_3 - b_0 b_2^2 - b_0^2 b_4 > 0.$$

В качестве примера рассмотрим классическую систему типа двойного маятника (рис. 12.7) с вращающимся шарниром в точках 0 и 1. Массу системы будем считать сосредоточенной в точках 1 и 2. В точку 2 на систему действует сосредоточенная сила P , направление которой совпадает с осью стержня 1—2 при любых отклонениях системы. Обозначим: b и c — коэффициенты жесткости и массы шарниров, $m_1 = 2m$ и $m_2 = m$ — массы, сосредоточенные в точках 1 и 2, l — длина каждого из стержней, φ_1 и φ_2 — углы отклонения стержней от положения равновесия, принимаемые за обобщенные координаты. Силы тяжести для уравнения задачи учитывать не будем.



Рис. 12.7

Очевидно, что при вертикальном положении обобщенной системы находится в состоянии равновесия. Требуется выяснить его устойчивость в зависимости от величин сил P и определить критическое значение сил (задача Хиллера).

Существенной особенностью этой системы служит непотенциальность сил P . Поэтому в дифференциальных уравнениях Лагранжа для возмущенного движения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2)$$

потенциальная энергия Π определяется моментами сил упругости в шарнирах θ и I , а обобщенные непотенциальные силы Q_j — силой P и моментами сил трения в шарнирах.

Кинетическая энергия запишется в виде

$$T = \frac{m\dot{\varphi}_1^2}{2} [3\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2],$$

потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{k}{2} [2\varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2].$$

Обобщенные непотенциальные силы равны

$$Q_1 = P(\varphi_1 - \varphi_2) - b(2\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2), \quad Q_2 = b(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2).$$

Тогда запишем уравнения Лагранжа

$$3m\ddot{\varphi}_1 + m\ddot{\varphi}_2 + 2b\dot{\varphi}_1 - b\dot{\varphi}_2 + (2c - P)\varphi_1 + (P - c)\varphi_2 = 0; \quad (12.13)$$

$$m\ddot{\varphi}_1 + m\ddot{\varphi}_2 - b\dot{\varphi}_1 + b\dot{\varphi}_2 - c\varphi_1 + c\varphi_2 = 0.$$

Подставляя сюда

$$\varphi_1 = A_1 e^{\lambda t}, \quad \varphi_2 = A_2 e^{\lambda t},$$

приходим к характеристическому уравнению четвертой степени

$$\lambda^4 \lambda' + \lambda^3 \lambda'' + \lambda_2 \lambda^2 + \lambda_1 \lambda + \lambda_0 = 0, \quad (12.14)$$

в котором

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= 2m\lambda^4, & \lambda_3 &= 7mb\lambda^3, \\ \lambda_2 &= 7m\lambda^2 c - 2mbP\lambda + b^2, & & \\ \lambda_1 &= 2bc, & \lambda_0 &= c^2. \end{aligned} \quad (12.15)$$

В данном случае условия Рауса — Гурвица (12.12) приводят к следующим неравенствам:

$$1) \ b > 0; \quad 2) \ P < \frac{4b}{3b} \frac{c}{1} + \frac{1}{1} \frac{b}{m\lambda^2};$$

$$3) \ P < \frac{4b}{3b} \frac{c}{1} + \frac{1}{1} \frac{b}{m\lambda^2}; \quad 4) \ c^2 > 0.$$

Первое и четвертое неравенства выполняются автоматически, а из двух остальных неравенств более жестким является третье. Оно позволяет найти критическое значение сил

$$P_{кр} = \frac{4b}{3b} \frac{c}{1} + \frac{1}{1} \frac{b}{m\lambda^2}$$

и если $b = 0$, то $P_{кр} = 1,464 \ c/l$.

В заключение отметим, что если бы в данной задаче с самого начала возникло $b = 0$, и определять критическую силу потребовало тому, как это было сделано в п. 3 (из анализа биквадратного уравнения), то для критической силы получился бы иной (меньше) значение

$$P_{кр} = 2,086 \ \frac{c}{l}.$$

Это несоответствие составляет содержание так называемого парадокса Хиллера, на обсуждение которого мы здесь останавливаться не будем.

§ 13. Стационарные режимы и предельные циклы

1. Общие понятия. Для суждения об устойчивости состояния равновесия выше мы пользовались линеаризованными уравнениями, описывающими малые движения в окрестности этих состояний. Такой анализ позволяет узнать начальные тенденции возмущенных движений, но — в случае неустойчивости — не позволяет проследить дальнейшее развитие процесса движения при нарастании отклонения.

Исследование движения «в большом» в принципе невозможно с помощью линеаризованных уравнений: анализом члена уравнений, будущи преобразовать малыми. При малых отклонениях системы от состояния равновесия, начинают играть все более заметную роль при увеличении отклонений; при этом вид нелинейности существенно влияет на развитие процесса с возрастанием вре-

мова. В частности, во многих случаях возрастание амплитуды постепенно приводит к движению стрелки в сторону стационарного режима — режиму автоколебаний. В общих чертах характер этого явления можно понять с помощью качественных соображений, не прибегая к математическому исследованию.

Рассмотрим, например, колебательную систему с трением, сила сопротивления трения описывается полиномиальной функцией скорости $M(\dot{q}) = -b\dot{q} + b_2\dot{q}^2$ (рис. 13.1, а). Дифференциальное уравнение движения (уравнение Релея) имеет вид

$$a\ddot{q} - b\dot{q} + b_2\dot{q}^2 + cq = 0$$

(13.1)

($a > 0$, $b_2 > 0$, $b_1 > 0$, $c > 0$).

При малых отклонениях от состояния равновесия основным членом имеет линейный член силы трения, который в данном случае оказывает дестабилизирующее действие; из-за этого состояние равновесия неустойчиво, и если угодно малые начальные возмущения вызывают постепенно возрастающие колебания (об этом см. также в связи с уравнением (12.3)). Но при этом будет усиливаться демпфирующее влияние нелинейного члена, так что рост амплитуды станет замедляться и движение будет стремиться к режиму автоколебаний, характеризующемуся некоторым значением амплитуды; в целом движение будет развиваться так, как это показано на рис. 13.1, б.

При достаточно больших начальных возмущениях рассматриваемой системы демпфирующее действие нелинейного члена вначале окажется незначительным, т. е. дестабилизирующее действие линейного члена, т. е. колебания

в начале процесса будут возрастать. Однако с увеличением амплитуды относительное влияние нелинейного члена будет также увеличиваться, т. е. движение начнет стремиться к тому же стационарному режиму, который характеризуется балансом противоположных влияний (рис. 13.1, а).

Эти два случая движения удобно иллюстрировать на фазовой плоскости (рис. 13.2, а). Кривая 1 соответствует движению, возникающему после малых начальных возмущений, кривая II — движению, возникающему после значительных возмущений; обе эти кривые описывают переходный процесс. Закрытая кривая А, к которой неограниченно приближаются кривые типа I и II, описывает стационарный режим автоколебаний и является устойчивым предельным циклом. Всеобщие устойчивые предельными циклами являются неограниченно замкнутые фазовые траектории, к которым неограниченно приближаются все рассматриваемые в их окрестности другие фазовые траектории.

Составляющие демпфирующее и дестабилизирующее влияния, мм, в сущности, имеют в виду постепенное изменение энергии системы вследствие работы, совершаемой различными составляющими силой трения. Дестабилизирующее действие совершает положительную работу и увеличивает энергию системы, а демпфирующее действие совершает отрицательную работу, т. е. уменьшает энергию системы. На рис. 13.2, б схематически показаны виды этих процессов, рассчитанные на один период. E_+ — приращение энергии, вызванное действием линейного составляющего силы трения, E_- — абсолютное значение уменьшения энергии, вызванного действием нелинейного составляющего силы трения. Как видно, эти величины, и притом в поданных масштабах, зависят от амплитуды колебаний. При малых амплитудах имеет место пере-

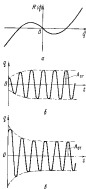


Рис. 13.1

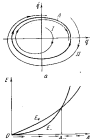


Рис. 13.2

ловство $E_1 > E_*$, т. е. происходит приток энергии в систему и амплитуды возрастают, пока не будет достигнут стационарный режим, характеризующий амплитудой A_* . Если воздействие больших начальных возмущений колебания начнутся с амплитудой, большей чем A_* , то разность $E_1 - E_*$ отрицательна, и колебания уменьшатся, стремясь к тому же стационарному режиму. Возможные траектории движения показаны стрелками под осью абсцисс.

Такими же свойствами обладает и система, описываемая дифференциальными уравнениями Вандер Поля

$$\ddot{q} - \mu(1 - q^2)\dot{q} + q = 0 \quad (13.2)$$

(μ — постоянная). Показано, что после некоторого малого начального возмущения начнутся колебания с малыми амплитудами. Пока колебания малы и выполняется неравенство $q^2 < 1$, второе слагаемое уравнения (13.2) оказывает, по-видимому, стабилизирующее действие, и колебания будут возрастать. Но с их увеличением указанное неравенство станет нарушаться и коэффициент при $\dot{q}$ будет положительным в тех интервалах времени,

в которых $q^2 > 1$. В этих интервалах времени второе слагаемое левой части (13.2) будет оказывать демпфирующее влияние. При дальнейшем возрастании колебаний демпфирующее действие будет увеличиваться и движение системы станет приближаться к стационарному режиму, которому соответствует взаимная компенсация стабилизирующего и демпфирующего влияний. В целом процесс установления будет протекать соответственно рис. 13.1, б и в, а также рис. 13.2, а и б.

Подобные случаи, когда возрастание колебаний прекращается после серии удачи малых начальных возмущений состояния равновесия, называются случаями *малого самовозбуждения*.

Наряду с этим существуют системы с противоположными свойствами. Таковы, например, системы, описываемые дифференциальными уравнениями

$$a\ddot{q} + b_1\dot{q} - b_2q^3 + cq = 0 \quad (13.3)$$

($a > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $c > 0$). Здесь знаки слагаемых левой части противоположны знакам в уравнении (13.1). Поэтому если начальные возмущения малы, то колебания будут затухать (начало координат является устойчивым фокусом), но если начальные возмущения достаточ-

но велики, то амплитуды колебаний будут неограниченно увеличиваться. В этом случае фазовая диаграмма имеет вид, показанный на рис. 13.3, а. Здесь также существует предельный цикл A , однако он неустойчив, так как все остальные фазовые траектории удаляются от

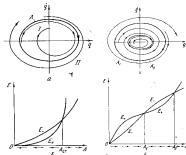


Рис. 13.3

Рис. 13.4

ного — либо внутрь, и к началу координат, либо вовне (в зависимости от расположения начальной изображающей точки). Эти траектории на рис. 13.3, а обозначены цифрами I и II. Вообще неустойчивыми предельными циклами называются такие изолированные замкнутые фазовые траектории, от которых удаляются все расположенные в их окрестности другие фазовые траектории.

Крайне, характеризующие приток энергии E_* , и энергетические потери E_* , показаны на рис. 13.3, б; здесь же стрелками показаны траектории движения при различных амплитудах колебаний. Такая система может служить примером системы с *жестким самовозбуждением*, поскольку возрастание колебания возникает лишь после достаточно больших начальных возмущений.

В более сложных случаях возможно существование нескольких предельных циклов. Так, для системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = -bx + bx^2 - bx^3 - cx^5 + cy = 0 \quad (13.4)$$

($a > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $b_3 > 0$, $c > 0$), фазовая диаграмма имеет вид, показанный на рис. 13.4, а, а энергетическое уравнение дано на рис. 13.4, б.

Во всех рассмотренных случаях можно заметить чередование устойчивых и неустойчивых стационарных состояний: на рис. 13.2, а неустойчивая особая точка окружена устойчивым предельным циклом, на рис. 13.3, а устойчивая особая точка окружена неустойчивым предельным циклом, на рис. 13.4, а неустойчивая особая точка окружена устойчивым циклом A_1 , который в свою очередь располагается внутри неустойчивого предельного цикла A_2 (для последнего случая на рис. 13.4, б показан энергетический график). Можно сказать, что устойчивые состояния равновесия и устойчивые предельные циклы притягивают к себе траектории в их окрестностях, фазовые траектории и по этому существенному принципу называются аттракторами (от английского глагола to attract — притягивать). Циклы, в § 16 будет рассмотрен аттрактор жидкого рода со своим удивительным свойством, что его называют странным аттрактором.

Каждому аттрактору на фазовой плоскости соответствует определенная область притяжения, причем границы между этими областями служат неустойчивыми предельными циклами (иногда также циклами, а также неустойчивые состояния равновесия называются репеллерами — от английского глагола to repel — отталкивать). Эта картина подобна тому, как на земной поверхности границы между бассейнами рек прорезают во ландшафте водоразделы.

При простой структуре фазовой диаграммы, когда существует единственный аттрактор — устойчивое состояние равновесия как на рис. 2.3, или устойчивый предельный цикл как на рис. 13.3 — его областью притяжения служит вся фазовая плоскость. В более сложных случаях стремление возмущенного движения к тому или иному аттрактору зависит от того, в какой из областей притяжения оказалась изображающая точка при начальном возмущении. Там, для системы с двумя предельными циклами (рис. 13.4) часть фазовой плоскости, расположенная внутри неустойчивого предельного цикла A_2 , на-

дляет область притяжения к аттрактору A_1 , а часть фазовой плоскости, расположенную вне предельного цикла A_2 , можно считать областью притяжения к бесконечности.

Наличие предельных циклов относится к автономным системам с одной степенью свободы, но могут быть распространены на более сложные системы путем перехода от фазовой плоскости к фазовому пространству более высокой размерности. В частности, для неавтономных систем с одной степенью свободы получается представление о трехмерном фазовом пространстве, причем координатами изображающей точки служат величины q , $\dot{q}$ и t . Фазовое пространство для автономной системы с двумя степенями свободы представляется четырехмерным и т. д. Конечно, в этих и еще более сложных случаях представления о фазовых диаграммах лишаются простоты и наглядности, которыми обладают эти диаграммы на фазовой плоскости.

Дальнейшее содержание настоящего параграфа посвящено способам определения стационарных режимов; анализ устойчивости (неустойчивости) таких режимов, т. е. выявление аттракторов и репеллеров, рассматривается в следующем параграфе.

2. **Способ автоматного интегрирования для кусочно-линейных систем.** Как мы видели выше, в нелинейных системах с кусочно-линейными характеристиками удобно разбить весь процесс движения на последовательность интервалов, в каждом из которых дифференциальное уравнение линейно и легко решается в замкнутом виде. Тогда задача сводится к последовательному решению нескольких дифференциальных уравнений и приращению найденных решений путем сопоставления начальных координат и скорости на границах интервалов.

В качестве первого примера рассмотрим систему с жестким трением, на которую в моменты приложения толчка подается сопротивление с постоянной скоростью ($\dot{q} = 0$, $\dot{q} > 0$) действует импульсное возмущение S , направленные в сторону движения (см., например, рис. 9.2, б). В промежутках времени между двумя последовательными импульсными движениями системы описывается дифференциальным уравнением (2.6), решение которого примет в форме (2.7). Входящие сюда постоянные определяются условиями в начале рассматриваемого

n -го промежутка $q(\dot{q}) = 0$, $\dot{q}(\dot{q}) = \dot{q}_n^+$:

$$C_1 = \dot{q}_n^+ / k_*, \quad C_2 = 0.$$

Таким образом, для q и $\dot{q}$ имеем

$$\begin{aligned} q &= (\dot{q}_n^+ / k_*) e^{-k_* t} \sin k_* t, \\ \dot{q} &= \dot{q}_n^+ e^{-k_* t} [\cos k_* t - (k_0 / k_*) \sin k_* t]. \end{aligned} \quad (13.5)$$

В последний момент перед приложением очередного $(n+1)$ -го импульса, т. е. при $t = 2\pi / k_*$, обобщенная скорость равна

$$\dot{q}_{n+1}^- = \dot{q}_n^+ e^{-2\pi k_0 / k_*}.$$

Следовательно, непосредственно после приложения очередного импульса

$$\dot{q}_{n+1}^+ = \dot{q}_{n+1}^- + \frac{S}{a} = \dot{q}_n^+ e^{-2\pi k_0 / k_*} + \frac{S}{a}. \quad (13.6)$$

В стационарном режиме, т. е. при движении по предельному циклу, должно быть $\dot{q}_{n+1}^+ = \dot{q}_n^+$; из этого условия периодичности следует выражение для обобщенной скорости сразу после приложения любого из импульсов:

$$\dot{q}^+ = \frac{S}{a(1 - e^{-2\pi k_0 / k_*})}.$$

Соответственно для обобщенной координаты находим

$$q_{\max} \approx \frac{S}{ak_* (1 - e^{-2\pi k_0 / k_*})}.$$

Энергия, рассчитанная в рассмотренной системе за время свободного движения между двумя последовательными импульсами, полностью восполняется благодаря скачку скорости в момент приложения импульса.

Сходными автоколебательными свойствами обладает система, в которой наряду с обобщенной силой внешнего трения действует сила отрицательного кулонова трения. Характеристика трения показана на рис. 13.5, а, так что дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$a\ddot{q} + b\dot{q} - R_0 \operatorname{sign} \dot{q} + cq = 0, \quad (13.7)$$

Здесь, причиной самовозбуждения колебаний служит отрицательная сила кулонова трения. При малых отклонениях системы от состояния равновесия величина указанной силы значительно деформируется влиянием силы внешнего трения и состояние равновесия неустойчиво. Однако при дальнейшем развитии колебаний эта величина становится в устойчивом стационарном режиме автоколебаний (рис. 13.1, б). После большого начального

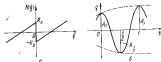


Рис. 13.5

отклонения (рис. 13.1, б) постоянно устанивается тот же стационарный режим.

Рассмотрим какой-либо интервал времени, в котором координата убывает (см. на рис. 13.5, б интервал, отмеченный числами 0 и 1/2); на этом интервале дифференциальное уравнение (13.7) принимает форму

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = -R_0,$$

и его решение при начальных условиях $q_0 = A_0$, $\dot{q}_0 = 0$ имеет вид

$$q = \left(A_0 + \frac{R_0}{c} \right) e^{-k_* t} \left(\cos k_* t + \frac{k_0}{k_*} \sin k_* t \right) - \frac{R_0}{c},$$

Далее находим скорость

$$\dot{q} = - \left(A_0 + \frac{R_0}{c} \right) e^{-k_* t} \frac{k_*^2}{k_*^2} \sin k_* t$$

(обозначения соответствуют принятым в § 2). В точке 1/2 скорость обращается в нуль, и этому моменту соответствует равенство

$$k_* t_1/2 = \pi,$$

причем инерциальность q принимает значения

$$q = A_{112} = -A_{12} e^{-\frac{R_1}{k_0}} + \frac{R_1}{c} \left(1 + e^{-\frac{R_1}{k_0}} \right). \quad (13.8)$$

На следующем интервале времени $1/2 - 1$ скорость отрицательная, и из уравнения (13.7) имеем

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = R_2. \quad (13.9)$$

Для этого интервала времени при сдвиге в точку $1/2$ начало отсчета получим

$$\begin{aligned} q &= \left(A_{112} - \frac{R_1}{c} \right) e^{-\lambda t} \left(\cos k_0 t + \frac{\lambda}{k_0} \sin k_0 t \right) + \frac{R_2}{c}, \\ \dot{q} &= - \left(A_{112} - \frac{R_1}{c} \right) e^{-\lambda t} \frac{k_0^2}{k_0^2} \sin k_0 t. \end{aligned}$$

В состоянии 1, когда $\dot{q}_1 = 0$,

$$k_0 t_1 = \pi,$$

координата q равна

$$q = A_1 = -A_{12} e^{-\frac{R_1}{k_0}} + \frac{R_1}{c} \left(1 + e^{-\frac{R_1}{k_0}} \right).$$

Подставив сюда выражение (13.8), найдем силу между двумя последовательными колеблющимися телами:

$$A_1 = A_{12} e^{-\frac{R_1}{k_0}} + \frac{R_1}{c} \left(1 + e^{-\frac{R_1}{k_0}} \right). \quad (13.10)$$

причем длительность одного цикла (период автоколебаний) составляет $2\pi/k_0$. В стационарном режиме должно быть $A_1 = A_0 = A_{112}$. Отсюда находим

$$A_{12} = \frac{R_1}{c} \frac{(1 - e^{-\lambda R_1/k_0})}{1 - e^{-\lambda R_1/k_0}}. \quad (13.11)$$

При малых затуханиях отношение k_0/k_0 можно принять

$$A_{12} \approx \frac{2R_1 k_0}{\lambda c k_0}.$$

В качестве третьего примера рассмотрим систему, изображенную на рис. 13.6, а. Она состоит из равномерно движущегося воздушного якоря 1, приводящего через пружину 2 в движение груза 3. Между грузом и поверх-

ностью, по которой он скользит, действует сила сухого трения; характеристика трения имеет вид, показанный на рис. 13.6, б, и следовательно ограничивает значение из экспериментов различие между предельной силой трения покоя и силой трения движения.

Введем обозначения: v_0 — скорость воздушного якоря, c — коэффициент жесткости пружины, m — масса груза,

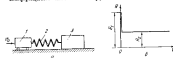


Рис. 13.6

$k = \sqrt{c/m}$, R_1 — предельная сила трения покоя, R_2 — сила трения движения.

Очевидно, возможно такое движение рассматриваемой системы, при котором скорость груза 3 также равна v_0 . При этом пружина 2 сжата постоянной силой P , равной силе трения движения R_2 . Однако, как мы увидим, этот режим может оказаться неустойчивым и при определенных обстоятельствах около него возникнут автоколебания.

Если скорость v_0 мала, то какое-либо случайное возмущение может вывести систему из равновесия для остальных грузов на некоторое короткое время.

Воздушный якорь, продолжая движение вправо, будет сжимать пружину до той пор, пока сила сжатия P не сравняется с силой трения покоя R_1 . После этого произойдет срыв груза, причем сила трения мгновенно уменьшится до значения R_2 . Но сила сжатия пружины в первый момент уменьшится до нуля и будет по-прежнему равна R_1 , и, следовательно, равновесие сил, действующих на груз, нарушится.

Соединим с моментом срыва начало отсчета времени $t = 0$ и заметим, что в этот момент равно нулю как координата x , так и скорость $\dot{x}$:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (13.12)$$

(счет перемещений будем вести от места остановки груза).

Рассмотрим теперь процесс последующего движения. К некоторому моменту времени $t > 0$ длина пружины уменьшится на отрезок $x - x_0$ в соответствии со силой упругости пружины уменьшится до значения

$$P(t) = R_0 - c(x - x_0), \quad (13.13)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение движения груза запишется в виде

$$R_0 - c(x - x_0) - R_2 = m\ddot{x},$$

или

$$\ddot{x} + kx = kx_0 + \frac{R_1 - R_0}{m},$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (13.12), имеет вид

$$x = x_0 + \frac{x_0}{k} \sin kt + \frac{R_1 - R_0}{c} (1 - \cos kt). \quad (13.14)$$

Первое слагаемое правой части выражает равномерное движение со скоростью ведущего звена, а остальные слагаемые — дополнительные колебания груза.

Скорость груза меняется по закону

$$\dot{x} = v_0 - v_0 \cos kt + \frac{k(R_1 - R_0)}{c} \sin kt$$

и в некоторый момент времени может вновь обратиться в нуль. Условие полной остановки груза приводит к уравнению

$$v_0 - v_0 \cos kt_1 + \frac{k(R_1 - R_0)}{c} \sin kt_1 = 0,$$

в котором t_1 — время от момента старта до момента полной остановки. Введен безразмерный параметр

$$\alpha = \frac{k(R_1 - R_0)}{cv_0},$$

Тогда условие остановки принимает вид

$$\alpha \sin kt_1 = \cos kt_1 - 1.$$

Решив это уравнение, найдем

$$\sin kt_1 = -\frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}, \quad \cos kt_1 = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}. \quad (13.15)$$

Модули полученных выражений всегда меньше единицы, так что из (13.15) всегда следует положительное значение t_1 . Получив это значение t_1 , можно по формуле (13.14) определить координату x груза в момент полной остановки, т. е. путь, пройденный грузом за время t_1 :

$$x_1 = v_0 t_1 - \frac{v_0}{k} \sin kt_1 + \frac{R_1 - R_0}{c} (1 - \cos kt_1) = v_0 t_1 + \frac{2\alpha}{k} v_0.$$

С учетом выражений (13.15) найдем по соотношению (13.13) силу сжатия пружины в момент остановки:

$$P(t_1) = 2R_2 - R_1.$$

Отсюда видно, что $P(t_1) < R_1$ (так как $R_2 < R_1$). Следовательно, после остановки груз некоторое время будет оставаться на месте, пока сила сжатия пружины вновь не достигнет значения предельной силы трения покоя. После этого произойдет новый цикл груза и начнется следующий цикл, полностью совпадающий с предыдущим. Таким образом, рассматриваемый процесс представляет собой стационарные автоколебания.

За время, в течение которого груз покоится, сила сжатия постоянно возрастает на величину

$$\Delta P = R_1 - P(t_1) = 2(R_1 - R_2),$$

и соответствующее дополнительное упрочнение пружины составит

$$\Delta l = \frac{\Delta P}{c} = \frac{2(R_1 - R_2)}{c}.$$

Этой же величине равен путь, пройденный ведущим звеном за время остановки груза. Следовательно, длительность состояния покоя груза равна

$$t_2 = \frac{\Delta l}{v_0} = \frac{2(R_1 - R_2)}{cv_0} = \frac{2\alpha}{k}. \quad (13.16)$$

(Тот же результат можно найти из условия $v_0(t_1 + t_2) = -v_0$, выражающего равенство перемещений груза в ведущем звене за один полный цикл рассматриваемого процесса.)

Таким образом, период автоколебаний определяется формулой

$$T = t_1 + t_2.$$

216 ГЛ. IV. ИСТОЧНИКИ КОСЛОУЩИХ РАВНОУВЕЩЕНИЙ

Для нахождения которой сначала нужно найти t_1 из выражений (13.15), а затем t_2 из формулы (13.16).

Чем меньше скорость возмущающего звена, тем более резко выражен процесс автоколебаний. Действительно, при малых значениях k_0 безразмерный параметр α становится весьма большим и из выражения (13.15) следует приближенно

$$\sin k_1 t_1 \rightarrow 0, \quad \cos k_1 t_1 \rightarrow -1, \quad \text{т. е.} \quad t_1 \rightarrow \frac{\pi}{k_1}.$$

Соответственно (13.16) это приводит к следующей формуле для периода автоколебаний:

$$T = \frac{\pi + 2\pi}{k_1}.$$

Здесь ясно видно, что роль второго слагаемого в числителя не возрастает с уменьшением скорости v_0 .

Законы движения при двух различных малых значениях v_0 графически показаны на рис. 13.7, а; на

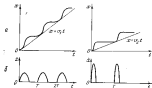


Рис. 13.7

рис. 13.7, б показаны соответствующие законы изменения скорости. С уменьшением скорости период автоколебаний растет.

3. Метод энергетического баланса. Этот метод, который мы изложили при рассмотрении свободных колебаний систем с нелинейным трением (я. 2, § 2) позволяет получить приближенное решение задачи о стационарных автоколебаниях нелинейных систем, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями

$$\ddot{q} + k_0^2 q = f(q, \dot{q}). \quad (13.17)$$

Здесь, как usual, $f(q, \dot{q})$ — функция, состоящая из малых нелинейных членов. Поскольку эти члены малы, естественно принять $k = k_0$ и искать решение в виде

$$q = A \cos(k_0 t - \varphi), \quad (13.18)$$

где A и φ — постоянные. В этой форме существование предположение о том, что частота автоколебаний k равна собственной частоте линейризованной системы. Выражение (13.18) не может строго удовлетворить уравнению (13.17): этому мешает правая часть $f(q, \dot{q})$, которая после подстановки (13.18) принимает вид

$$f_0(k_0 t - \varphi) = f[A \cos(k_0 t - \varphi), -A k_0 \sin(k_0 t - \varphi)] \quad (13.19)$$

и тождественно к нулю не обращается. После умножения на синусирующий коэффициент $\sin$ правая часть будет представлять собой некоторую не уравновешенную силу $\sin$. В соответствии с основным идеей энергетического метода потребуем, чтобы работа этой силы за период $2\pi/k_0$ равнялась нулю. Работа силы $\sin$ на элементарном интервале dq равно $\sin f_0 dq = \sin f_0 d\theta$. При учете соотношений (13.18) и (13.19) условие энергетического баланса запишется в виде

$$-A k_0 \int_0^{2\pi/k_0} f[A \cos(k_0 t - \varphi), -A k_0 \sin(k_0 t - \varphi)] \times \\ \times \sin(k_0 t - \varphi) dt = 0. \quad (13.20)$$

Обозначим

$$k_0 t - \varphi = \psi,$$

$$\Phi(A) = - \int_0^{2\pi} f(A \cos \psi, -A k_0 \sin \psi) \sin \psi d\psi. \quad (13.21)$$

получим условие для определения стационарной амплитуды автоколебаний в виде *)

$$\Phi(A) = 0. \quad (13.22)$$

В качестве примера найдем амплитуду автоколебаний для системы, описываемой дифференциальными урав-

*) Отметим, что выражение (13.21) точно совпадает с выражением (2.42), которое было получено в § 2 методом медленного изменения амплитуды. Согласно этому методу для определения стационарных амплитуд также следует решить уравнение $\Phi(A) = 0$.

поиском (13.7); такая эта задача была только решена способом постоянного интегрирования (приближенным).

В данном случае

$$f(q, \dot{q}) = -\frac{b}{a} \dot{q} + \frac{R_0}{2} \operatorname{sign} \dot{q}$$

и

$$f(A \cos \psi, -Ak_0 \sin \psi) = \frac{Ak_0}{a} \sin \psi + \frac{R_0}{k} \operatorname{sign}(-\sin \psi),$$

т. е.

$$f(A \cos \psi, -Ak_0 \sin \psi) = \begin{cases} \frac{Ak_0}{a} \sin \psi - \frac{R_0}{a} & \text{при } 0 < \psi < \pi, \\ \frac{Ak_0}{a} \sin \psi + \frac{R_0}{a} & \text{при } \pi < \psi < 2\pi. \end{cases}$$

Согласно формуле (13.31) находим

$$\Phi(\psi) = - \left[\int_0^\psi \left(\frac{Ak_0}{a} \sin \psi - \frac{R_0}{a} \right) \sin \psi d\psi + \right. \\ \left. + \int_\pi^\psi \left(\frac{Ak_0}{a} \sin \psi + \frac{R_0}{a} \right) \sin \psi d\psi \right] = -\frac{\pi Ak_0}{a} + \frac{4R_0}{a}, \quad (13.33)$$

Теперь по условию (13.22) находим для амплитуды автоколебаний прежнего выражения (13.11).

4. Метод малого параметра. Как и в методе непосредственной амплитуды, нужно прежде всего выделить из заданной функции $f(q, \dot{q})$ линейную часть и представить основное дифференциальное уравнение в виде

$$\ddot{q} + k_0^2 q = R(q, \dot{q}). \quad (13.24)$$

Для нелинейных систем заменяем функцию

$f(q, \dot{q})$ можно представить в виде $\mu f_0(q, \dot{q})$, где μ — заданно малый параметр. Однако в подобных случаях можно поступить и по-иному — формально ввести в правую часть (13.24) множитель $\mu=1$ и записать уравнение (13.24) в виде

$$\ddot{q} + k_0^2 q = \mu f(q, \dot{q}). \quad (13.25)$$

Тогда в последующих выкладках буква μ будет служить лишь символом малости: тогда сомножители, около ко-

торого она стоит; если в этих выкладках изменить степень буквы μ (т. е. μ^2 , μ^3 и т. д.), то они будут как бы отмечать величины второго, третьего и т. д. порядка малости. Разумеется, что при таком формальном введении параметра μ в окончательных результатах нужно иметь множитель $\mu=1$.

Согласно основной идее рассматриваемого метода, решение уравнения (13.25) ищем в виде ряда по степеням малого параметра μ

$$q(t) = q_0(t) + \mu q_1(t) + \mu^2 q_2(t) + \dots, \quad (13.26)$$

в котором $q_0(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$, ... — пока неизвестные функции. Поскольку частота основного процесса движения, обозначенная выше через k_0 , может не совпадать с собственной частотой линеаризованной системы k_0 , применяется аналогичное разложение

$$k_0^2 = k^2 + \mu \gamma_1 + \mu^2 \gamma_2 + \dots \quad (13.27)$$

где γ_1 , γ_2 — постоянные, также пока неизвестные.

Теперь выражения (13.26) и (13.27) подставляются в обе части основного уравнения (13.25). Складываем полученные равенства: будет пропорциональны различным степеням малого параметра μ , и следовательно, после группировки слагаемых равенство можно привести к

$$D_0 + \mu D_1 + \mu^2 D_2 + \dots = 0. \quad (13.28)$$

Здесь D_0 , D_1 , D_2 , ... — некоторые комплексные выражения, не содержащие малого параметра. Так как соотношение (13.28) должно выполняться при любом значении μ , необходимо, чтобы порознь равнялись нулю D_0 , D_1 , D_2 , ...

При этом получаем систему уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \bar{q}_0 + k_0^2 q_0 &= 0, \\ \bar{q}_1 + k_0^2 q_1 &= P_1(q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0), \\ \bar{q}_2 + k_0^2 q_2 &= P_2(q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0, q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1), \\ &\dots \end{aligned} \quad (13.29)$$

Конкретный вид выражений P_1 , P_2 , ... зависит от того, какая заданная функция $f(q, \dot{q})$; конечно, в разложенные выражения P_1 , P_2 , ... войдут также постоянные γ_1 , γ_2 ...

Далее последовательно, одно за другим, решаются уравнения (13.29), причем известные $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dots$ определяются из условий начертания в резонансных зонах (резонансных) членов, т. е. таких, которые содержат время t или знаки тригонометрических функций; те же условия позволяют также найти и амплитуду автоколебаний.

На остановившись на обосновании выкладок в общем случае, обратимся к задаче об автоколебаниях системы, описываемой уравнением Ван дер Поля (13.2), которое запишем в виде

$$\ddot{q} + q = \mu(1 - q^2)\dot{q}. \quad (13.30)$$

Отметим, что в данном случае $k_0^2 = 1$; поэтому коэффициент при q в левой части уравнения (13.30) можно представить в виде (13.27):

$$1 = k^2 + \mu\gamma_1 + \mu^2\gamma_2 + \dots$$

Ограничившись учетом слагаемых первого порядка малости, подставим в (13.30)

$$1 = k^2 + \mu\gamma_1, \quad q = q_0 + \mu q_1. \quad (13.31)$$

При этом получим

$$\begin{aligned} (q_0 + \mu q_1) + (k^2 + \mu\gamma_1)(q_0 + \mu q_1) = \\ = \mu[1 - (q_0 + \mu q_1)^2](\dot{q}_0 + \mu \dot{q}_1), \end{aligned}$$

или, объединив члены одного порядка малости,

$$(\ddot{q}_0 + k^2 q_0) + \mu(\ddot{q}_1 + k^2 q_1 + \gamma_1 \dot{q}_0 - \dot{q}_0 + \gamma_1 \dot{q}_1^2) + \dots = 0, \quad (13.32)$$

где многоточие обозначает слагаемые второго и высших порядков малости. Из (13.32) получим уравнение нд (13.29):

$$\ddot{q}_0 + k^2 q_0 = 0, \quad (13.33)$$

$$\ddot{q}_1 + k^2 q_1 = -\gamma_1 \dot{q}_0 + \dot{q}_0 - \dot{q}_1^2. \quad (13.34)$$

Будем вести отсчет времени от момента, когда координата q максимальна; поэтому амплитуду автоколебаний обозначим через A . В начальный момент скорости $\dot{q}$ равны нулю, так что можно написать $q(0) = A, \dot{q}(0) = 0$, или,

согласно старому соотношению (13.31),

$$q_0(0) + \mu q_1(0) = A,$$

$$\dot{q}_0(0) + \mu \dot{q}_1(0) = 0.$$

Для того, чтобы эти соотношения удовлетворялись при любых значениях μ , должно быть

$$q_0(0) = A, \quad \dot{q}_0(0) = 0, \quad (13.35)$$

$$q_1(0) = 0, \quad \dot{q}_1(0) = 0. \quad (13.36)$$

Теперь можно написать решение уравнения (13.33), удовлетворяющее начальным условиям (13.35),

$$q_0 = A \cos kt, \quad (13.37)$$

и затем перейти в уравнение (13.34), которое с учетом (13.37) получает вид

$$\ddot{q}_1 + k^2 q_1 = -\gamma_1 A \cos kt - Ak \sin kt + A^3 k \sin kt \cos^2 kt.$$

Сделаем замену $\sin kt \cos^2 kt = \frac{1}{4}(\sin kt + \sin 3kt)$, аналогично найдем

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + k^2 q_1 = \\ = -\gamma_1 A \cos kt - Ak \left(1 - \frac{A^2 k^2}{4}\right) \sin kt + \frac{A^3 k}{4} \sin 3kt. \end{aligned} \quad (13.38)$$

Для того чтобы в решении этого уравнения отсутствовали некие слагаемые, необходимо, чтобы коэффициенты при $\cos kt$ и $\sin kt$ равнялись нулю. Первое условие дает $\gamma_1 = 0$; согласно (13.27) получим, что $k^2 = k_0^2 = 1$, т. е. в данном случае частота автоколебаний совпадает с собственной частотой линейризованной системы. Теперь из второго условия $1 - \frac{A^2 k^2}{4} = 0$ находим амплитуду автоколебаний $A = 2$.

Следует обратить внимание на то, что полученные амплитуды описались не функцией от малого параметра μ , входящего в заданное уравнение (13.30). Однако отсюда не следует, что это движение вообще несущественно для рассматриваемой системы. Значение μ определяет быстроту приближения системы к движению по предельному циклу — тем больше μ , тем быстрее происходит это приближение. Кроме того, значение μ влияет и на подробности движения по предельному циклу.

В самом деле, из (13.38) при начальных условиях (13.36) можно найти

$$q_1 = \frac{A^2}{2\omega_0} (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t).$$

Следовательно, с учетом (13.37), получаем

$$\tau = \tau_0 + \mu q_1 = A \cos \omega t + \frac{\mu A^2}{2\omega_0} (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t),$$

т. е. движение зависит от значения μ .

§ 14. Переходные процессы и устойчивость стационарных режимов

1. Вспутываемые замечания. Для анализа переходных процессов можно быть применены различные методы; в частности, для неустойчивых систем целесообразно использовать способ поэтапного интегрирования, а для нелинейных систем со слабой нелинейностью — энергетический метод или метод медленно меняющейся амплитуды.

Получаемые с помощью указанных методов результаты полезны еще и в том отношении, что они позволяют исследовать устойчивость стационарных режимов.

2. Способ поэтапного интегрирования для неустойчивых систем. Идея способа была показана выше, а особенности применения к задачам исследования переходных процессов можно проследить на примере системы, описываемой дифференциальным уравнением (13.7).

На повторных примерах выкладки, примем в качестве исходного соотношение (13.10), которое связывает две последовательные амплитуды A_n и A_{n+1} .

В § 13 при рассмотрении стационарных режимов амплитуды рассматривались неизменными, однако здесь, при исследовании переходного процесса необходимо учитывать различие между ними.

Введем обозначения

$$\alpha = (e^{-\alpha_0 \Delta t} - 1)^2, \quad \beta = e^{-2\alpha_0 \Delta t}; \quad (14.1)$$

тогда для любой n -й амплитуды можно записать

$$A_n = \beta A_{n-1} + \alpha R_0/c, \quad (14.2)$$

С помощью последнего рекуррентного соотношения можно найти любую амплитуду через предыдущую и, если потребуется, оценить быстроту приближения переходного процесса к стационарному режиму.

Рисунки могут быть существенно упрощены, если, как в выше (см. § 2, п. 2), вместо дискретной совокупности ординат рассматривать непрерывную функцию $A(t)$ (ограниченную). Для такого перехода нужно заменить конечную разность $\Delta A = A_n - A_{n-1}$ выражением

$$\Delta A = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{dA}{dt}.$$

Тогда с помощью (14.2) получим дифференциальное уравнение для кривой огибающей

$$\frac{2\pi}{\omega_0} \frac{dA}{dt} = (\beta - 1) A + \alpha \frac{R_0}{c}.$$

После интегрирования найдем при начальном условии $A = A(0)$ при $t = 0$

$$A = \left[A(0) - \frac{\alpha R_0}{(1-\beta)c} \right] e^{-\frac{\omega_0}{2\pi} (1-\beta)t} + \frac{\alpha R_0}{(1-\beta)c}. \quad (14.3)$$

или, с учетом выражения (13.11),

$$A = [A(0) - A_{cr}] e^{-\alpha_0 \omega_0 \Delta t (1-\beta) t} + A_{cr}.$$

При достаточно малых значениях коэффициентов неустойчивости β/ω_0 можно принять $\alpha \approx 4$, $\beta \approx 1 - 2\alpha\beta/\omega_0$. При этом получим

$$A = [A(0) - A_{cr}] e^{-\mu t} + A_{cr} \quad (14.4)$$

где согласно (13.11)

$$A_{cr} = 2R_0\beta_0/\omega_0 c. \quad (14.5)$$

Для того чтобы убедиться в достаточной высокой точности последних выражений, рассмотрим пример, показав, что $\beta/\omega_0 \approx 0.03$. В таблице представим безразмерные значения первых 15 амплитуд, вычисленных по рекуррентной формуле (14.2) и по приближенному уравнению (14.4) (для того чтобы найти амплитуды A_n , нужно подставить в таблицу число умножить на величину R_0/c). Значения $A(0)$ поставим равным нулю, а значения A_{cr} , соответствующие $\mu \rightarrow \infty$, определялись по выражениям (13.11) и (14.5).

Номер амплитуды n	Значения безразмерной амплитуды A_n/A_0	
	по формуле (13.2)	по рисунку (13.3)
0	0	0
1	3,449	3,433
2	5,953	5,949
3	7,347	7,371
4	8,127	8,939
5	10,093	10,086
6	10,821	10,789
7	11,344	11,320
8	11,725	11,701
9	12,003	11,979
10	12,207	12,182
11	12,366	12,331
12	12,494	12,459
13	12,544	12,548
14	12,602	12,578
15	12,644	12,644
∞	12,728	12,732

3. Метод энергетического баланса. При выводе уравнений стационарных режимов в § 13 мы исходили из того, что сила $A\sin\psi$ совершает за один период работу, равную нулю. Здесь, при исследовании переходных процессов, необходимо учесть, что энергии системы за период накопится, так как работа силы $A\sin\psi$ отлична от нуля; вместо (13.20) имеем

$$-aAk_0 \int_0^{2\pi k_0} [A \cos(k_0 t - \psi) - Ak_0 \sin(k_0 t - \psi)] \times \\ \times \sin(k_0 t - \psi) dt = \Delta\Pi. \quad (14.6)$$

Здесь левая часть представляет собой работу внешней силы за один период, а правая часть — приращение энергии системы за то же время. Это приращение можно определить по выражению

$$\Delta\Pi = \frac{cA^2(T)}{2} - \frac{cA^2(0)}{2} \approx c\Delta A \Delta A.$$

Подставляя это в уравнение энергетического баланса (14.6) и пользуясь формулой (13.21), получим

$$\Delta A = \frac{\Phi(A)}{k_0^2}. \quad (14.7)$$

Будем рассматривать зависимость $A = A(t)$ как непрерывную функцию времени; тогда можно приближенно принять

$$\frac{k_0}{2\pi} \Delta A = \frac{dA}{dt}.$$

Вместо (14.7) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\Phi(A)}{2\pi k_0}. \quad (14.8)$$

совпадающее с ускоренным уравнением (2.41). Интегрируя это дифференциальное уравнение при начальном условии $A = A(0)$ при $t = 0$, найдем уравнение огибающей.

В качестве примера найдем переходный процесс для системы, рассмотренной в п. 2. В данном случае из формулы (13.21) находим

$$\Phi(A) = -\frac{aAk_0}{4}A + \frac{4N}{4}A$$

и дифференциальное уравнение (14.8) приобретает вид

$$\frac{dA}{dt} = \frac{4N_0 - aAk_0 A}{2\pi k_0 A}.$$

Отсюда после интегрирования следует следующий результат (14.5), справедливый для случая малого трения.

4. Метод медленного изменения амплитуд. Для определения переходного процесса по этому методу непосредственно используются вычисления в § 2 ускоренные уравнения (2.41).

В качестве примера рассмотрим уравнение Ван дер Поля (13.30):

$$\dot{\varphi} + \varphi = \mu(1 - \varphi^2)\dot{\varphi}.$$

По первому из уравнений (2.42) находим

$$\Phi(A) = -\mu \int_0^{2\pi} (1 - A^2 \cos^2 \psi) (-A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \\ = \mu A \left(1 - \frac{A^2}{4}\right). \quad (14.9)$$

Теперь составим уравнение (2.41):

$$\dot{A} = \frac{\mu A}{4} \left(1 - \frac{A^2}{4}\right)$$

и интегрируем его при начальном условии $A = A_0$ при $t = 0$:

$$A = 2A_0 \left([4 - A_0^2] e^{-\omega t} + A_0^2 \right)^{-1/2}.$$

Очевидно, как с течением времени амплитуда от начального значения A_0 постепенно приближается к стационарному значению $A = 2$ (см. также стр. 224).

Полученное выражение достаточно полно характеризует переходный процесс и, в частности, темп его приближения к стационарному режиму. Поэтому обычно опускают исследование кинематической фазы φ (впрочем, это сделать совсем не трудно; в рассматриваемой задаче можно найти, что $\varphi = 0$).

5. Метод точечных отображений. Примеры, рассмотренные в пп. 2—4, показывают, что для описания колебательных процессов в системах с одной степенью свободы не обязательно знать закон движения $q = q(t)$; практически достаточно рекуррентное соотношение между последовательными амплитудами (см., например, (14.2)). Как мы видели, для того чтобы связать значения двух последовательных амплитуд, нужно выделить типовой промежуток времени, на концах которого стационарные системы достигают максимума, и скорости равны нулю. Далее изучается движение на этом промежутке времени и определяется амплитуда $\bar{A}$ в конце промежутка через амплитуду A в начале, т. е. образуется соотношение

$$\bar{A} = R(A), \quad (14.10)$$

которое можно рассматривать как функциональную зависимость $\bar{A}$ от A . Для зависимости (14.2) график (14.10) показан на рис. 14.1, а. В данном случае график представляет собой прямую, потому что на типовом промежутке времени движение механической системы описывается линейными дифференциальными уравнениями. В более общем случае график (14.10) изображается криволинейным, как это показано на рис. 14.1, б.

Для того чтобы найти амплитуду стационарного режима колебаний (соответствующего предельного цикла), нужно в (14.10) положить $\bar{A} = A$ и решить уравнение

$$A = R(A). \quad (14.11)$$

Графическое решение этого уравнения показано на рис. 14.1, а. Здесь кроме графика правой части (14.11), соответствующего рис. 14.1, б, проведена биссектриса ко-

ординатного угла, служащая графиком левой части (14.11). Абсциссы $A_{\text{ст}}$ точки пересечения определяют возможные амплитуды стационарного режима.

Такие графики позволяют не только найти амплитуду стационарного режима, но и найти переходный процесс. Для этого используют построения Кошига — Ламбера,

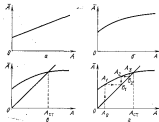


Рис. 14.1

которое состоит в следующем. Заданные первоначально значение амплитуды A_0 нужно отложить на оси абсцисс, а затем построить ломаную $A_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ как это показано на рис. 14.1, в для случая, когда начальное состояние мало ($A_0 < A_{\text{ст}}$). Как видно, эта ломаная в конце концов приходит к точке пересечения графиков — стационарному режиму. Можно убедиться, что если $A_0 > A_{\text{ст}}$, то переходный процесс постепенно приближается к тому же стационарному режиму.

6. Устойчивость стационарных режимов. Каждый из рассмотренных выше способов определения переходных процессов дает непосредственную возможность выяснить устойчивость (неустойчивость) стационарного режима или состояния равновесия.

Примером всего сказанного на системе с нелинейным трением, характеристика которого показана на рис. 13.5, а. Для этой системы стационарная амплитуда определяется выражением (12.11) в виде $A_{\text{ст}} = \alpha R_0 / [\varepsilon(1 - \beta)]$, а по-

резонансный процесс — соотношением (14.2). Для того чтобы проверить устойчивость стационарного режима, напомним, что он некоторым образом нарушен, так что амплитуда колебаний приобрела значение $A_m + \delta A$, где δA — начальное возмущение стационарной амплитуды. Тогда (14.2) можно записать в виде

$$A_m + \delta A = \beta(A_m + \delta A) + \alpha R_0/c,$$

где δA — возмущение последующей амплитуды. В дальнейшем движение амплитуды колебаний будет подчиняться соотношению

$$A_m + \delta A = \beta(A_m + \delta A_{n-1}) + \alpha R_0/c, \quad (14.12)$$

в котором δA_{n-1} и A_m — два последовательных значения возмущения амплитуды. Из (14.12) находим

$$\delta A_n = \beta \delta A_{n-1}.$$

Отсюда видно, что поскольку $\beta < 1$, то $\delta A_n < \delta A_{n-1}$; убываяе возмущение означает, что стационарный режим устойчив.

Если для той же системы решение найдено методом точечных отображений, то об устойчивости стационарного режима можно судить с помощью построения Коенга — Ламбера (см. рис. 14.2) в окрестности абсциссы A_m .



Рис. 14.2



Рис. 14.3

Здесь непосредственно видно, что возмущение данного состояния постепенно приближается к данному из предельного цикла.

Для системы с двумя предельными циклами (см. рис. 13.4, а) построение Коенга — Ламбера в принципе

выглядит, как показано на рис. 14.3. Вид замкнутых отрезков обнаруживает устойчивость первого стационарного режима и неустойчивость второго.

В некоторых случаях имеет смысл изучать не последовательности амплитуд, а последовательности (такие дискретные) максимальных значений скорости, такую, как, например, была найдена выше в виде (13.6). Применительно к этой зависимости возмущенное движение будет описываться соотношением

$$\dot{q}^+ + A_n = (\dot{q}^+ + A_{n-1}) e^{-\alpha \omega_0 \delta A} + S/c,$$

в котором A_{n-1} и A_n — последовательные значения возмущения скорости $\dot{q}^+$. Учитывая найденное выше значение $\dot{q}^+$, из записанного соотношения следует

$$A_n = A_{n-1} e^{-\alpha \omega_0 \delta A},$$

т. е. $A_n < A_{n-1}$ — стационарный режим устойчив.

Если стационарный режим найден энергетическим методом или методом Ван дер Поля из условия $\Phi(A) = 0$ (см. выражение (2.62)), то наряду с этим режимом нужно рассмотреть возмущенный режим, т. е. смещение движения, характеризующее амплитудой $A_m + \delta A$; здесь δA — вариация амплитуды, являющаяся некоторой функцией времени. Характер изменения δA в течение времени позволяет судить об устойчивости исследуемого режима. Поскольку возмущенный режим описывается соотношением (14.8), — точнее, с заменой A на $A_m + \delta A$, — имеем

$$\frac{d}{dt}(A_m + \delta A) = \frac{\Phi(A_m + \delta A)}{2\pi k_0}. \quad (14.13)$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dt}(A_m + \delta A) = \frac{d(\delta A)}{dt},$$

$$\Phi(A_m + \delta A) \approx \Phi(A_m) + \Phi'(A_m) \delta A = \Phi'(A_m) \delta A,$$

поскольку $\Phi(A_m) = 0$.

Таким образом, соотношение (14.13) принимает вид

$$\frac{d(\delta A)}{dt} = \frac{\Phi'(A_m) \delta A}{2\pi k_0}.$$

Отсюда окончательно находим

$$\delta A = \delta A_0 e^{\frac{\Phi'(A_m)}{2\pi k_0} t}.$$

где ΦA_0 — начальное возмущение амплитуды стационарного режима. Если

$$\Phi'(A_0) < 0, \quad (14.14)$$

то возмущения амплитуды будут асимптотически стремиться к нулю, т. е. движение будет приближаться к нарушенному стационарному режиму и последний окажется устойчивым. Если же $\Phi'(A_0) > 0$, то возмущения будут возрастать с течением времени и движение будет все больше отклоняться от исследуемого стационарного режима; в этом случае стационарный режим неустойчив.

Таким образом, соотношение (14.14) представляет собой условие устойчивости стационарного режима.

Так, например, для системы, описываемой уравнением Ван дер Поля (13.30), было найдено выражение $\Phi(A)$ в виде (14.9). Следовательно, $\Phi'(A) = \mu A \left(1 - \frac{3}{4} A^2\right)$; при $A = A_0 = 2$ имеем $\Phi'(2) = -2\mu < 0$, т. е. условие устойчивости (14.14) выполнено — найденный предельный цикл устойчив. Иной результат получится, если дифференциальные уравнения динамики механической системы имеют вид

$$a\ddot{q} - b\dot{q} + A_0 \operatorname{sign} \dot{q} + cq = 0. \quad (14.15)$$

В отличие от условий примера, рассмотренного в начале п. 2 § 13 (см. уравнение (13.5)), в данном случае действующей является сила отрицательного вязкого трения, а сила упругости трения дифференцирует возмещение.

Принимая уравнение (14.15) в виде (2.32), получим

$$f(\dot{q}, \dot{q}) = \frac{b}{a} \dot{q} - \frac{A_0}{a} \operatorname{sign} \dot{q}.$$

Теперь по первой из формул (2.42) находим

$$\Phi(A) = \frac{bA}{a} - \frac{4A_0}{a}.$$

Привлекая этот результат к нулю, определяем амплитуду стационарных автоколебаний:

$$A_0 = \frac{4b}{3a}.$$

Однако это режим неустойчивый, так как производная $\Phi'(A_0)$ не удовлетворяет условию (14.14):

$$\Phi'(A_0) = \frac{4b}{a} > 0.$$

При любом возмущении такого стационарного режима система либо будет стремиться к устойчивому в малом состоянию равновесия ($A \rightarrow 0$), либо неограниченно удалится от стационарного режима ($A \rightarrow \infty$) — в зависимости от знака начального возмущения.

§ 15. Явления синхронизации

1. Вспутательные явления. Везде выше в этой главе обсуждалось явление, происходящее в автономных системах, когда движение происходит под действием сил, зависящих только от самого движения. Определенный интерес представляет свойства движения автоколебательной системы, если на нее действует некоторый заданный вынуждающий сигнал.

Рассматривая ниже в п. 2 случай действия гармонической вынуждающей силы, мы установим, что при достаточной близости периода вынуждающей силы к автоколебаний происходит синхронизация — движение происходит с периодом вынуждающей силы, а автоколебательная составляющая движения оказывается как бы незначительной; следовательно, что синхронизация происходит при сколь угодно малой амплитуде вынуждающей силы. Настоящие явления синхронизации называют захватом частоты.

В п. 3 мы рассмотрим иной важный случай синхронизации, когда вынуждающая сила действует не на автоколебательную систему, а на независимую систему, способную совершать «убегающее» движение.

2. Синхронизация взаимной независимой автоколебательной системы. Рассмотрим случай, когда на взаимно независимую автоколебательную систему с одной степенью свободы действует гармоническая вынуждающая сила, причём частота ω силы близка к собственной частоте ω_0 линейризованной системы. Дифференциальное уравнение задачи имеет вид

$$\ddot{q} + k_0^2 q = f(\dot{q}, \dot{q}) + \frac{P}{a} \sin \omega t. \quad (15.1)$$

Поставим задачу определить условия существования периодического движения с частотой вынуждающей силы ω .

Для того чтобы воспользоваться ранее полученными соотношениями, введём коэффициент расстройки

$$\varepsilon = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1, \quad (15.2)$$

т. е. примем

$$k_0^2 = \omega^2 (1 + \epsilon),$$

считая, что значение ϵ мало по сравнению с единицей.

Тогда можно переписать уравнение (15.1) в виде

$$\ddot{q} + \omega^2 q = f(q, \dot{q}) - \epsilon \omega^2 q + \frac{P}{a} \sin \omega t, \quad (15.3)$$

и, пользуясь основной идеей метода медленно меняющейся амплитуды, вновь будем разыскивать решение в виде (2.34), учитывая прежние условия (2.35). При этом мы примем в соотношениях типа (2.38), но — соответственно правой части уравнения (15.3) — она будет иметь несколько иной вид:

$$\begin{aligned} \dot{A} = & -\frac{1}{\omega} f[A \cos(\omega t - \varphi), -A \omega \sin(\omega t - \varphi)] \sin(\omega t - \varphi) + \\ & + \epsilon \omega A \sin(\omega t - \varphi) \cos(\omega t - \varphi) - \frac{P}{a \omega} \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi), \\ \dot{\varphi} = & \frac{1}{\omega t} f[A \cos(\omega t - \varphi), -A \omega \sin(\omega t - \varphi)] \cos(\omega t - \varphi) - \\ & - \epsilon \omega \cos^2(\omega t - \varphi) + \frac{P}{a A \omega} \sin \omega t \cos(\omega t - \varphi). \end{aligned}$$

Соответственно вместо укороченных уравнений типа (2.41) получим

$$\begin{aligned} \dot{A} = & \frac{\Phi(A)}{2\pi\omega} - \frac{P \cos \varphi}{2a\omega}, \\ \dot{\varphi} = & \frac{\Psi(A)}{2\pi A \omega} - \frac{\epsilon \omega}{2} + \frac{P \sin \varphi}{2a A \omega}. \end{aligned} \quad (15.4)$$

В рассматриваемом случае стационарного режима обе эти производные должны быть равны нулю:

$$\frac{\Phi(A)}{2\pi\omega} - \frac{P \cos \varphi}{2a\omega} = 0, \quad \frac{\Psi(A)}{2\pi A \omega} - \frac{\epsilon \omega}{2} + \frac{P \sin \varphi}{2a A \omega} = 0. \quad (15.5)$$

Наибольший интерес представляет значение амплитуды A . Для его определения исключим фазу φ из уравнений (15.5); тогда получим

$$\Phi^2(A) + [\Psi(A) - \pi A \omega^2 \epsilon]^2 = \left(\frac{\pi P}{a}\right)^2. \quad (15.6)$$

График получаемой отсюда зависимости $A = A(\epsilon)$ иногда называют резонансной кривой.

Вернемся к первому примеру п. 2 § 13, когда на систему действует вынуждающая сила $P \sin \omega t$, частота которой близка к собственной частоте линейризованной си-



Рис. 15.1

стемы. В соответствии с (13.7) (см. также рис. 13.5, а) для этой системы

$$f(q, \dot{q}) = -\frac{b}{a} \dot{q} + \frac{B}{a} \operatorname{sgn} \dot{q},$$

и по формулам (2.42) находим

$$\Phi(A) = -\frac{\pi b \omega}{a} A + \frac{4B\pi}{a},$$

$$\Psi(A) = 0.$$

Следовательно, соотношение (15.6) принимает вид

$$\left(\frac{4B\pi}{a} - \frac{\pi b \omega}{a} A\right)^2 + (\pi A \omega^2 \epsilon)^2 = \left(\frac{\pi P}{a}\right)^2.$$

Удобно ввести безразмерные величины

$$\epsilon_n = \epsilon \frac{\pi \omega}{b}, \quad A_n = A \frac{\pi b \omega}{4B}, \quad P_n = P \frac{\pi}{4B}.$$

Тогда получим

$$[(1 - A_n)^2 + (\epsilon_n A_n)^2 = P_n^2].$$

Отсюда находим

$$A_n = \frac{1 \pm \sqrt{P_n^2 (1 + \epsilon_n)^2 - \epsilon_n^2}}{1 + \epsilon_n^2}.$$

На рис. 15.1 показаны графики зависимостей безразмерной амплитуды A_n от параметра расстройки ϵ_n при

трех значениях безразмерной силы: $P_0 = 0,5; 1; 2$. Запирательной области соответствуют неустойчивые равновесия, тогда синхронизация не осуществляется (само возмущение устойчиво здесь ситуацио).

3. Синхронизация маятника. Рассмотрим маятник с вертикально колеблющейся точкой подвеса (см. рис. 9.2, а), движение которой задано законом

$$y = A \sin \omega t, \quad (15.7)$$

В главе III мы исследовали малые колебания такого маятника около положения равновесия; в частности, отмечалось, что в этой системе нижнее положение равновесия может оказаться неустойчивым, а верхнее — устойчивым.

Здесь мы не будем заниматься изучением малых колебаний, а исследуем возможность непрерывного вращения маятника, поддерживаемого колебаниями оси. Вращение со средней угловой скоростью ω , равной частоте колебаний оси, и представляет явление синхронизации в рассматриваемой системе: коммутирующее воздействие (колебания оси) синхронизирует свой ритм движению системы.

Таким образом, предположимый стационарный синхронизированный режим описывается законом

$$\varphi = \omega t - \alpha, \quad (15.8)$$

где φ — угол отклонения маятника, α — начальный сдвиг фаз.

Обратимся к составлению дифференциального уравнения относительного движения, а затем с помощью этого уравнения выясним, возможен ли режим движения (15.8). В уравнении моментов относительно колеблющейся оси передок момент силы тяжести $-mg l \sin \varphi$ и момент ленточного трения $-b\dot{\varphi}$. Кроме того, в уравнение моментов следует внести также момент притягивающей силы инерции. Эта сила и является причиной синхронизации; она направлена по вертикали, и ее проекция на ось y равна

$$-m\ddot{y} = m A \omega^2 \sin \omega t.$$

Момент притягивающей силы инерции относительно оси маятника составляет $m A \omega^2 l \sin \varphi \sin \omega t$. Таким образом, дифференциальное уравнение относительного движения

маятника запишется в виде

$$m l \ddot{\varphi} = -m g l \sin \varphi - b \dot{\varphi} + m A \omega^2 l \sin \varphi \sin \omega t. \quad (15.9)$$

Для проверки возможности синхронизированного вращения маятника попробуем подставить (15.8) в дифференциальное уравнение (15.9):

$$m l \sin(\omega t - \alpha) (A \omega^2 \sin \omega t - g) = b \omega. \quad (15.10)$$

Так как здесь левая часть переменна, а правая — постоянна, то полученное соотношение тождественно не удовлетворяется. Это означает, что функция (15.8) не является точным решением дифференциального уравнения (15.9), т. е. что равномерное вращение маятника невозможно.

Однако можно принять (15.8) в качестве приближенного решения задачи и, отбросившись от требования о тождественном выполнении равенства (15.9), ограничиться более слабым требованием о выполнении его в среднем. Именно в этом смысле можно видеть применение той же идеи, которая лежит в основе метода медленных переменных амплитуд. Найдем среднее значение левой части соотношения (15.10)

$$\frac{m l \omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega t - \alpha) (A \omega^2 \sin \omega t - g) dt = \frac{m l A \omega^2}{2} \cos \alpha,$$

приравняем его правой части того же соотношения. После этого получим

$$\cos \alpha = \frac{2b}{m l A \omega}. \quad (15.11)$$

Выражение (15.11) позволяет найти сдвиг фаз; но еще более важно, что из этого выражения следует условие синхронизации (закачки фаз)

$$\frac{2b}{m l A \omega} < 1. \quad (15.12)$$

Как видно, чем больше добавлен маятника $m l$ и максимальная скорость $A \omega$ колебаний оси маятника, тем легче осуществляется синхронизация. Важный фактор, который может воспрепятствовать синхронизации, — это трение в системе, характеризующее коэффициентом b ; чем больше трение, тем труднее достигается синхронизация.

§ 16. Странные аттракторы

1. Генераторы стохастичности. До недавнего времени считалось, что единственной причиной случайных колебаний механических систем служат те или иные внешние («случайные») воздействия — случайные вынуждающие силы (см., например, стр. 144—148), случайное климатическое возбуждение, случайные изменения параметров системы в процессе ее движения и т. п. При этом механическая система представляется как некий трансформатор стохастичности, преобразующий случайность на входе в случайность на выходе; получается как бы очевидным, что с увеличением случайности на входе и стремлении к нулю дисперсии внешнего воздействия исчезает случайность и на выходе, а дисперсия на выходе так же стремится к нулю. Соответственно изучение случайных колебаний сводится к сопоставлению связи между вероятностными характеристиками входа с вероятностными характеристиками выхода (см., например, соотношение $(0,86)^{10}$).

Однако совсем недавно выяснилось, что иногда случайные колебания могут происходить в полностью детерминированных механических системах, которые таким образом оказываются уже не трансформаторами, а генераторами стохастичности. Колебания в таких системах непредсказуемы в точном смысле этого слова, но допускают описание с помощью вероятностных характеристик.

Выявление стохастичности в детерминированной системе — поразительный факт, возможность которого трудно согласовать с традиционными представлениями. Тем не менее эта возможность твердо установлена на средствах строгой теории, так и убедительными экспериментами; особенно также, в таких случаях механическая система может описываться генератором стохастичности (отметим, в частности, что генераторы стохастичности — это всегда возможные системы, но, разумеется, не любые). Обнаружение генераторов стохастичности по его значению для науки и практики справедливо undoubtedly открытию регулярных автоколебаний.

¹⁰ Такое трюковое возмущение стохастичности описывается в динамических системах любой природы — неэргодическим, радиостационарным, биологическим, экономическим и т. п.

С выявлением нового понятия несколько расширились представления о таких аттракторах в фазовом пространстве. Прежде считалось, что в фазовом пространстве любой динамической (в частности механической) системы могут существовать аттракторы только двух описанных выше типов — устойчивые особые точки (устойчивый фокус, устойчивый узел) и устойчивые предельные циклы. Теперь установлено, что наряду с ними в некоторых случаях существуют аттракторы особого рода — не точки или линии, а некоторые сплошные во всем фазовом пространстве, и которым приписываются фазовые траектории, находящиеся в окрестности таких зон; эти зоны принято называть *странными аттракторами*.

Фазовые траектории, начинающиеся в области притяжения странного аттрактора, постепенно приближаются к нему, причем изображающая точка, попав в зону странного аттрактора, далее уже не выходит из нее, но вместо монотонного движения, типичного для предельного цикла, совершает в этой зоне хаотическое движение, лишённое свойств монотонности. В понятии странного аттрактора притянуто сочетание свойств неустойчивости и устойчивости. С одной стороны, движение изображающей точки в зоне странного аттрактора неустойчиво, с другой стороны, оно не может уйти, что система в зоне странного аттрактора обладает свойством устойчивости в целом: если после некоторого начального возмущения изображающая точка вышла за пределы странного аттрактора, то она в конце концов вернется в эти пределы (тем более, если изображающая точка после начального возмущения не выйдет за пределы странного аттрактора, то она и далее будет оставаться в этих пределах). Далее мы напомним несколько разбору конкретных примеров.

В п. 2 рассматривается простейший и весьма наглядный пример, когда странный аттрактор обнаруживается на фазовой плоскости; в некотором смысле — это исключительный случай, потому что, как правило, странные аттракторы возможны при условии, что фазовое пространство системы имеет размерность не менее трех.

В п. 3 приводятся примеры странных аттракторов в трехмерном фазовом пространстве (для неавтономных систем с одной степенью свободы).

2. Хаотический осциллятор Неймарка. В § 13 (стр. 209) была рассмотрена предельно упрощенная модель часов — упругая система с вязким трением, автоколебательные свойства которой определяются действием мгновенных импульсов, направленных к системе в моменты ее прохождения через положение равновесия с положительной скоростью. Рассматриваемый здесь аттрактор Неймарка возможен применительно к упругой системе, обладающей противоложными свойствами — ее движение сопровождается действием материальной силы отрицательного вязкого трения и конечных мгновенных импульсов, направленных против движения. Импульсы применяются в моменты, когда система проходит в положение $q = 0$ с достаточной большой положительной скоростью $\dot{q} > v$ (v — заданное значение скорости, знаки $+$ и $-$ и другие обозначения соответствуют сказанному в § 13).

Так как при $\dot{q} < v$ импульсы не применяются, то, после силы упруго-вязкого начального возмущения система равновесна, под действием отрицательного трения будет происходить нарастающее колебание, причем $\dot{q}_{n+1} = -\dot{q}_n e^{-\lambda \Delta t_n}$ (здесь $\lambda > 0$ соответствует дифференциальному уравнению $\dot{q} - 2\lambda \dot{q} + M^2 q = 0$ для системы с отрицательным трением). Разрастание колебаний будет происходить до тех пор, пока в конце некоторого n -го цикла колебаний скорость $\dot{q}_n$ достигнет значения v (или произойдет это раньше). Тогда на систему подействует импульс S , и скорость мгновенно уменьшится до значения

$$\dot{q}_{n+1}^+ = \dot{q}_n^- - S/\alpha,$$

которое окажется начальным для последующего $(n+1)$ -го цикла. В конце $(n+1)$ -го цикла скорость станет равной

$$\dot{q}_{n+2}^- = \dot{q}_{n+1}^+ e^{-\lambda \Delta t_{n+1}}.$$

При достаточно большом значении импульса S этот результат окажется таковым, чем λ , т. е. очень возмущенный описанный выше процесс разрастания колебаний в отсутствие демпфирующих импульсов, который будет происходить до тех пор, пока $\dot{q} < v$. После того как будет вычислено условие $\dot{q} > v$, произойдет новое скачкообразное уменьшение скорости и т. д. В целом можно ожидать, что установится процесс, являющийся хаотическим

движения, когда этапы нарастания амплитуд чередуются с этапами их убывания. Как будет показано на следующем примере, эти предельные значения, не обнаруживаемые в системе обычно, не обладают свойством периодичности.

Отметим, что в рассматриваемой системе возможен стационарный режим движения (предельный цикл), которому соответствует равенство $\dot{q}_{n+1}^+ = \dot{q}_n^+ = \dot{q}_n^-$. Подставляя сюда найденные выше выражения, найдем

$$\dot{q}_n^+ = \frac{S}{e^{\lambda \Delta t_n} (e^{\lambda \Delta t_n} - 1)}.$$

Однако этот предельный цикл неустойчив, в чем можно убедиться, в частности, с помощью построения Коэнга — Ламера. То же построение позволяет обнаружить и странный аттрактор в рассматриваемой системе. Для этой цели будем исходить из точечного преобразования

$$\bar{q} = \begin{cases} \dot{q}^+ e^{-\lambda \Delta t_n} = \frac{S}{v} & \text{при } \dot{q}^- \geq v, \\ \dot{q}^+ e^{-\lambda \Delta t_n} & \text{при } \dot{q}^- < v, \end{cases}$$

которое показано на рис. 16.1, а. Зная предположения, что импульс S достаточно большой и точка C (соответствующая неустойчивому стационарному режиму) расположена выше точки A , т. е. $\dot{q}_n > v$. Отметим, что при малых значениях S точка C может оказаться ниже точки A , но в этом случае странный аттрактор не существует.) На рис. 16.1, б буквой D отмечено произвольное принятое начальное значение скорости $\dot{q}$ и показан первый (возрастающий) шаг лестницы Коэнга — Ламера DE . На рис. 16.1, в показан следующий (убывающий) шаг лестницы Коэнга — Ламера EF , и в общих чертах становится ясным дальнейшее развитие процесса колебаний с последовательным чередованием шагов вверх — вниз, однако подчеркнем, что такое чередование не означает установление периодического процесса и что различия $\dot{q}$ не могут быть меньше ординаты точки B и больше ординаты точки A . Соответственно этому зона странного аттрактора ограничена горизонтальными, вертикальными и диагональными линиями, область его притяжения расположена в промежутке значений $0 < \dot{q} < \dot{q}_n$. Если движение

системы начинается или отрицательной зоной притяжения, когда начальная скорость превосходит значение $\bar{v}_n$, то ступеням лестницы Коши — Ламора будут неограниченно уходить вправо вверх.

Иллюстрируем следующие примеры вычисления для случая, когда $b/b_n = 0,01517$, $v = 2$ м/с, $S/a = 0,31$ м/с.

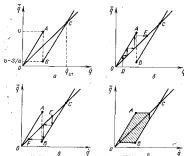


Рис. 10.1

При этих данных координаты точек, лежащих в зоне странного аттрактора, находятся в пределах от 1,70 м/с (уровень нижней границы зоны) до 2 м/с (уровень верхней границы зоны); теми же числами мы определяем неустойчивый предельный цикл, расположенный относительно близко к зоне странного аттрактора, обе ее координаты равны 2,1 м/с. В качестве начального значения скорости $\bar{v}^+$ принято 1,8 м/с. В таблице приводятся результаты вычисления пятидесяти последовательных значений скорости $\bar{v}^+$. Хотя вычисления выполнялись с точностью до десяти знаков после запятой, для экономии

места в таблицу внесены значения $\bar{v}^+$ после округления до трех знаков после запятой. Из-за этого значения при $n = 2, 3, \dots, 7$ выглядят совпадающими со значениями

n	$\bar{v}_n^+$	n	$\bar{v}_n^+$	n	$\bar{v}_n^+$	n	$\bar{v}_n^+$	n	$\bar{v}_n^+$
1	1,700	11	1,907	21	1,987	31	1,997	41	1,998
2	1,936	12	1,924	22	1,976	32	1,988	42	1,910
3	1,930	13	1,930	23	1,963	33	1,977	43	1,791
4	1,912	14	1,923	24	1,960	34	1,962	44	1,680
5	1,882	15	1,896	25	1,935	35	1,922	45	1,568
6	1,860	16	1,882	26	1,918	36	1,908	46	1,455
7	1,836	17	1,865	27	1,908	37	1,900	47	1,340
8	1,809	18	1,843	28	1,889	38	1,892	48	1,224
9	1,786	19	1,814	29	1,868	39	1,862	49	1,106
10	1,979	20	1,967	30	1,935	40	1,890	50	1,287

точными при $n = 26, 37, \dots, 41$. В действительности этого совпадения нет. (Подробнее об этом см. в п. 4.) Углубленное изучение этого аттрактора показывает, что при $t \rightarrow \infty$ маршрут лестницы Коши — Ламора почти полностью заполняет всю минимальную по рас. 16.1, а зону.

Фазовую диаграмму рассматриваемой системы можно представить себе, если иметь в виду изображенную на рис. 13.4, а фазовую диаграмму автоматической системы и заменить здесь линию A_2 (устойчивый предельный цикл) неустойчивой зоной неустойчивой топологии.

Прежде всего отметим, что начало координат на фазовой плоскости — неустойчивый фокус. Главная отличительная особенность фазовой диаграммы — усложненная замкнутая зона, которая и является странным аттрактором. Наконец, существенным элементом фазовой диаграммы является неустойчивый предельный цикл — замкнутая линия, окружающая в некотором поперечном сечении странного аттрактора (см. кривую A_2 на рис. 13.4, а) и окружающая границу области притяжения к странному аттрактору. Фазовые траектории, начинающиеся внутри этой области, но только простираются к странному аттрактору, но, можно сказать, отталкиваются в него. Оказавшись внутри зоны странного аттрактора, изображающая точка не выходит из нее и далее совершает здесь хаотическое движение. Если после достаточно большого размаха начальной изображающая точка оказалась за

пределами заданной области притяжения, то фазовая траектория будет расширяться, все больше удаляясь от границы области.

При малой толщине колесной зоны (и соответственно малых размерах прямоугольника на рис. 16.1, а) свойства системы будут близки к свойствам «обычной» автоколебательной системы, который соответствует рис. 13.4, а.

3. Примеры странных аттракторов в неавтономных системах. На рис. 16.2, а показан смелый, потерявший устойчивость упругий стержень, на который действует в перпендикулярном направлении сила $P \sin \omega t$. Если амплитуда этой силы мала, то стержень будет совершать малые колебания около показанного на рисунке изогнутого положения. В противоположность этому, если амплитуда силы весьма значительна, то установится большие колебания — такие, что в течение одного цикла стержень будет проходить все три положения равновесия: 1) изображенное на рисунке изогнутой линией; 2) положение, симметричное первому (при прогибе стержня вверх); 3) прямое положение, отмеченное на рисунке стрелкой

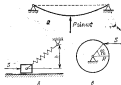


Рис. 16.2

линей. Обнаружено, что в некотором промежуток значений $P_1 < P < P_2$ колебания носят хаотический характер, а в фазовом пространстве системы существует странный аттрактор (при $P > P_2$ колебания вновь приобретают упорядоченный характер). Эти результаты не только были найдены путем вычислений, но получили подтверждение на специальной компьютеризированной установке (см. [33]).

Совершенно так же свойством обладает система, показанная на рис. 16.2, б. Упругий пружина в изображен-

ном на рисунке недеформированном состоянии имеет длину l , большую h , так что система обладает тремя положениями равновесия. Система испытывает действие мгновенных импульсов S , направляемых к грузу с периодом T . Дифференциальное уравнение движения груза вдоль горизонтальной направляющей имеет вид

$$m \ddot{x} + k\dot{x} + c(x - s) \left[\frac{l}{\sqrt{(l-s)^2 + h^2}} - 1 \right] = \sum_{n=1}^{\infty} S\delta(t - nT). \quad (16.4)$$

Здесь, obviously: m — масса груза, x — его координата, отсчитываемая от недеформированного на рис. 16.2, б положения равновесия, k — коэффициент линейного трения между грузом и направляющей, c — коэффициент жесткости пружины, $s = \sqrt{l^2 - h^2}$ — проекция размера l на горизонтальное направление.

Отметим, что при малых отклонениях груза от положения равновесия, когда $x \ll s$, уравнение допускает линейризацию и принимает вид

$$m \ddot{x} + k\dot{x} + \frac{c s^2}{\beta} x = \sum_{n=1}^{\infty} S\delta(t - nT),$$

Подробный анализ движения после решения дифференциального уравнения (16.4) на ЭВМ приводит к следующим заключениям. При малых значениях S происходит малые колебания около показанного на рисунке положения равновесия, затем в некотором диапазоне значений S колебания носят хаотический характер, а при еще больших значениях импульсы вновь устанавливаются периодически колебания, но очень большой амплитуды.

Еще один пример системы, в фазовом пространстве которой возникает странный аттрактор, показан на рис. 16.2, в. Она представляет собой свободно вращающийся на оси машинный ротор, к фиксированной точке которого с заданным периодом T прикладывается горизонтальная мгновенные конечные импульсы S . Пусть непосредственно перед n -м ударом положение угловой точки определяется углом φ_n , а угловая скорость ротора равна ω_n . Вследствие приложенного импульса угловая скорость приобретает мгновенное приращение $(S/R I) \sin \varphi_n$ (I — момент инерции ротора относительно оси вращения) и через

$(n+1)$ -м ударом состояние ротора будет определяться углом φ_{n+1} и угловой скоростью ω_{n+1} :

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega_{n+1}T, \quad \omega_{n+1} = \omega_n + (SR/I)\sin \varphi_n.$$

С помощью этих рекуррентных соотношений можно проследить развитие процесса во времени. Как установлено, в определенном (достаточно узком) диапазоне значений SR/I величина α , образует хаотическую последовательность, причем хаотизация движения не может начаться с низа трения, хотя соответствующий диапазон значений SR/I окажется несколько иным.

4. **Заключительные замечания.** Среди различных способов вычисления странных аттракторов в конкретных динамических системах одним из основных следует считать численное интегрирование соответствующих дифференциальных уравнений. Именно так были получены результаты, приведенные в табл. на с. 240. Там было отмечено, что вычисления проводились с точностью до десятого знака после запятой, но для большей completeness представленной таблицы в нее внесены значения скорости, округленные до третьего знака. При этом особо подчеркивалось, что совпадение некоторых табличных значений скорости (например, при $n=7$ и $n=41$) — лишь кажущееся и восточнее последующие значения скорости (в том же примере начиная с $n=8$ и $n=42$) расходятся уже в третьем знаке. Тем самым обнаруживается некая неузорочивость движения, которую можно трактовать как признак хаотичности и наличие странного аттрактора (разумеется, это признак достаточно убедителен, хотя бы потому, что вычисления были выполнены лишь первого десятилетия шагов процесса).

Допустим теперь, что в процессе вычислений также-то для значений скорости при $n=n_1$ и $n=n_2$ точно совпали. Тогда движение на интервале между шагами n_1 и n_2 представляет собой некий, возможно весьма длительный цикл, который затем будет повториться. Такая повторяемость, называясь бы, свидетельствует об упорядоченности и отсутствии хаоса. Однако после вычисления выполняется с некоторым числом знаков, то раньше или позже совпадение обязательно произойдет. Так, например, при пятизначном вычислении целой части результата и учете десяти знаков после запятой можно получить не более десяти различных результатов, следовательно, совпадение неизбежно произойдет не позже чем через миллиард

шагов. Таким образом, при вычислениях на ЭВМ некое движение рассматриваемого типа формально выглядит как упорядоченный процесс. Нужно предупредить читателя, что к этому выводу следует относиться с осторожностью. С практической точки зрения колебательное движение, амплитуда которого обнаруживается лишь после десятков или сотен миллионов шагов, естественно трактовать как случайный процесс. С теоретической же точки зрения существование цикла вообще остается неизменным из-за ограниченной точности вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Среди многих книг, специально посвященных общим вопросам теории нелинейных колебаний, в первую очередь следует отметить:

1. Вайанген Н. М. Теория колебаний.— 2-е изд.— М.: Наука, 1968.
2. Вилерман Н. Д. Теория нелинейных колебаний.— М.: Высшая школа, 1969.
3. Магурская В. В., Малафеев Н. Н., Мустаев Е. Р., Нарыгин В. П. Основы теории колебаний.— М.: Наука, 1968.
4. Сержанков С. П. Введение в теорию колебаний.— 2-е изд.— М.: Наука, 1964.

Другие вопросы нелинейных колебаний рассмотрены в книгах:

5. Ден Хартог Дж. Н. Механические колебания.— 2-е изд.— М.: Физматгиз, 1960.
6. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле.— М.: Наука, 1967.
7. Кис Н. Тонг. Теория нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1963.
8. Цзе Ф. С., Марс Н. Е., Ханкс Р. Т. Механические колебания.— М.: Машиностроение, 1966.

Проблемы нелинейных колебаний специально рассмотрены в книгах:

9. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— 2-е изд.— М.: Физматгиз, 1966.
10. Васильев М. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963.
11. Путилов В. В. Колебания.— М.: Гостехиздат, 1964 (специальная часть книги относится к проблемам линейных колебаний).

12. Бутенин Н. В., Неймарк И. И., Фурман А. А. Введение в теорию нелинейных колебаний.— 2-е изд.— М.: Наука, 1967.
13. Малафеев Н. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.— М.: Гостехиздат, 1965.
14. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории неавтономных колебаний.— М.: Наука, 1964.

Более кратко изложены этой теме можно найти в книгах:

15. Власовер О. Анализ нелинейных систем (Пер. с англ.— М.: Мир, 1963).
16. Бутенин Н. В. Элементы теории нелинейных колебаний.— Л.: Судпрес, 1962.
17. Каввагас В. Введение в теорию нелинейных систем (Пер. с англ.— М.: Энергоатом, 1962).
18. Теодореско Н. Ф. Асимптотические системы.— 2-е изд.— М.: Наука, 1963.
19. Халас Т. Нелинейные колебания в физических системах.— М.: Мир, 1968.

Вопросы, связанные с параметрическими колебаниями и динамической неустойчивостью колебательных систем, рассмотрены в книгах:

20. Колотин В. И. Динамическая устойчивость упругих систем.— М.: Гостехиздат, 1966.
21. Колотин В. И. Параметрические задачи упругой эргодичности.— М.: Физматгиз, 1964.

Другие современные задачи теории нелинейных колебаний рассмотрены в книгах:

22. Шмадт Г. Параметрические колебания.— М.: Мир, 1974.
23. Власов Н. И. Сжатие и трение в системах.— М.: Наука, 1964.
24. Вулфсон И. Н., Колосовский М. Э. Нелинейные задачи динамики машин.— Л.: Машиностроение, 1968.
25. Галкин Р. Ф., Козомежко В. О. Колебания твердых тел.— М.: Наука, 1970.
26. Колосовский М. Э. Нелинейная теория абстрактных систем.— М.: Наука, 1968.
27. Козомежко В. О. Нелинейные системы с ограниченным возбуждением.— М.: Наука, 1964.

Проблемы случайных колебаний рассмотрены в книгах:

28. Колотин В. И. Случайные колебания упругих систем.— М.: Наука, 1972.

29. Савельев В. А. Случайные колебания.— М.: Машгостроение, 1970.

30. Случайные колебания/Пер. с англ. Под ред. С. Крейгела.— М.: Мир, 1967.

О степенных инвариантах см. [3], а также в кн.::

31. Неймарк Ю. М., Ланда П. С. Статистические и физические колебания.— М.: Наука, 1966.

32. Рабиннович М. Н., Трубицкий Д. И. Вибрации в теории колебаний и волн.— М.: Наука, 1974.

33. Шустер Г. Детерминированный хаос/Пер. с англ.— М.: Мир, 1988.

Общим вопросом теории нелинейных колебаний, а также решением практических аспектов проблемы вибраций рассмотрен тематический справочник:

34. Вибрации в технике/Под ред. Н. Н. Чолпанова.— М.: Машгостроение, 1979.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоколебания 60
— самовозбуждение 215
Автоколебательные системы 17
Автоколебательные системы 10
Амплитуда 24
— комплексная 133
Амплитудно-частотная характеристика 107
Амплитудный спектр 136, 137
Аттракцион 182
Аттрактор 208
— странный 208, 239—244
Аэрогидродинамичность 190
- Балансная система 81
Баланс 86
- Высокий член 109
Вектор собственный 89
Выборочность динамической 163
Выборочность спектра 8
Возбуждение нелинейное 9
Восстановительные силы 5
Внушающие силы 9, 601
Внушаемые колебания 8, 601
- Гамма-функция 47
Гистерезис колебаний динамический 163
Генератор стохастический 235
Гистерезис 54, 162
Гладкие координаты 77, 167
Граничные условия 30
- Движение стохастическое 104, 105
Детерминант когерентности 48
- Детерминированные функции времени 144
Дистрибуция Айнса—Ортенга 194
— устойчивости 179
— фазовая 20
Дивергенция 168
Динамическая жесткость 107
— — комплексная 123
Динамический гистерезис колебаний 163
Диссипативная функция Рунда 41
Диссиплятивные силы 17, 120
Дифференциальное уравнение для отклонений 48
Добротность (системы) 124
- Единичная нормализация 78
— резонанс 79
- Жесткое самовозбуждение 207
Жесткость динамическая комплексная 123
— структуральная 20
- Задача идентификации 145
— обратная 145
— в дисперсии 169
— в фазе 194
— оптимальная 143
— прямая 145
— сигнала 145
— Циглера 169, 208
Закон сохранения энергии 60
Затухание критическое 44
Затухающие колебания 62
Закон сохранения 231
Закон сохранения параметра 38
— собственные матрица 89

Нагнетание колебаний 30
 Напряженность тока 18
 Напряженность реакции 111
 Напряженность перемещения 131
 Напряженность коэффициента 13
 Напряженность Фурье 138
 Нитроглицерин гидроглицерин
 углеводород 55
 Нитроглицерин колебания 41,
 156

Нормальная форма 78
 Квадратичная траектория 49
 Квадратурная характеристика
 33

Коэффициент 34
 Коэффициенты тригонометриче-
 ского 30

Нитроглицерин колебания 3
 Колебания вынужденные 4

— затухающие 42
 — свободные 30
 — неэкспоненциальные 107
 — ступенчатые 145
 — логарифмические 40
 — периодические 32
 — свободные 3
 — субгармонические 148, 154
 — супергармонические 148, 152
 — установившиеся вынужден-
 ные 507

Колебания амплитуды 133
 — диссипативные частоты 133
 — — нелинейность 133
 — свободные сила 132

Колебания обобщенные пере-
 менные 112

Координатные функции 44
 Координаты лямбда 77, 167
 — нормальные 77

Корреляционные функции 146
 Коэффициент наклона для ле-
 жатников 78

— характеристический 158
 — диссипативный 107, 114
 — инерционный 25

— инерционный 24
 — обобщенный частоты 41

— жесткости 34
 — инерции силы 127

— распределения 121
 — собственных форм 87
 — обобщенный линейного
 траектория 142

Кривая эволюции 150
 Кривая Фурье — Гурвица 201
 — Сиддханта 78

Кривизна угла наклона 100

Кривизна кривизны 44
 — значение параметра 26

Кривизна траектории 42

Линейная форма 17
 Логическое обобщение 153

Логарифмический коэффициент 43

Матрица обобщения 33
 — приведенная 23

Матрица коэффициентов 145
 Матрица дифференциала 39

— жесткости 39
 — инерции 39

Матрица перемещения базиса
 59

— малого параметра 218
 — малых колебаний ам-
 плитуды 50, 225

— Рунге 14, 231—235
 — жесткости обобщения 126

— жесткости базиса 43,
 149, 218, 224

Матрица Рунге — Хармониче-
 ского 157

Матрица коэффициентов колебаний
 107

Матрица амплитуды 206

Нормализованные координатные
 силы 171

Нормализованный предельный цикл
 207

— траектория 158, 161
 — форма 158, 161

Нормализованные координаты 72, 167

Область притяжения 208
 Обобщенная сила 28

— сила линейного траектория 40
 Обобщенные амплитуды си-
 лы 15

— жесткости силы 15
 — силы траектория 16

Обобщенный коэффициент жест-
 кости 41

— — жесткости 34

Обратный способ составления
 системы уравнений 74
 Обобщенная система 62
 Ортогональность обобщения
 форм 80

Обобщенный способ составления
 системы уравнений 75

Обобщенная сила 21
 Обобщенный жесткий Ней-
 мана 236

Обобщенные жесткости 104,
 105

Обобщенная жесткость 35
 Обобщенная траектория 130

Обобщенная жесткость 130

Обобщенная жесткость 130

Обобщенная жесткость 130

Обобщенная жесткость 130

Обобщенная жесткость 130

Обобщенная жесткость 130

Обобщенная жесткость 130

Обобщенная жесткость 130

Обобщенная жесткость 130

Обобщенная жесткость 130

Обобщенная жесткость 130

Обобщенная жесткость 130

Обобщенная жесткость 130

Обобщенная жесткость 130

Обобщенная жесткость 130

Обобщенная жесткость 130

Обобщенная жесткость 130

Обобщенная жесткость 130

Обобщенная жесткость 130

Обобщенная жесткость 130

Самостоятельное колебание 131
 — жесткости 217
 — малые 236
 Сиддханта колебания 8
 Сиддханта 49

Сила кривизны траектории 49
 — обобщенная линейного тра-
 ектория 49

— жесткости 158
 — жесткости 158

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

Сила кривизны 62
 Сила кривизны 62

SYNOPSIS

Introduction into the theory of mechanical oscillations (2nd revised edition, Moscow, Nauka, 1989)

by Ya. G. Panovko

About the author

The author of the present book, professor at Leningrad Shipbuilding Institute, corresponding member of Latvian SSR Academy of Sciences, doctor of technical sciences is also member of several USSR Scientific Councils, Soviet National Committee for theoretical and applied mechanics, USSR Academy of Sciences scientific council on problems of general mechanics, Soviet Scientific Methodological Council on teaching theoretical mechanics.

He is a well-known specialist in the field of mechanics, in particular, in the domain of dynamics of elastic systems. Professor Panovko has written numerous books and papers published in the USSR and abroad. For example, two Russian editions of his book *Stability and oscillations of elastic systems* were translated into English and published in USA in 1982 and 1993. (Prof. W. Flügge, Stanford University, said in his foreword to first American edition of the book: "May the book bring many a reader the same enjoyment and intellectual enrichment which it has brought the writer of these lines".

The present book, summarizing author's more than half-a-century's experience in teaching mechanics was written for students of technical colleges trying to deepen their knowledge of mechanical oscillations and for a long time has been a successful aid for them (the first edition in the USSR appeared in 1971, the second one — in 1980, the present, third edition is published in 1990).

Compact exposition of the foundations of the mechanical oscillations theory is based upon general course of theoretical mechanics and illustrated with number of expressive examples.

On a level with clear descriptions of numerical procedures the author reveals physical essence of the considered phenomena both in linear and non-linear systems — in particular, in self-excited systems.

Particular attention is given to analysis of the motions of the systems by means of phase plane. Several examples of strange attractors are given.

One can judge the main features of the book by its contents.

Contents

Chapter 1. Free oscillations

1. Frictionless systems with one degree of freedom.
2. Systems with one degree of freedom in case of friction present.
3. Systems with one degree of freedom in case of non-linear restoring force.
4. Linear systems with several degrees of freedom.

Chapter 2. Forced oscillations

5. Frictionless systems with one degree of freedom.
6. Systems with one degree of freedom in case of friction present.
7. Systems with one degree of freedom in case of non-linear restoring force.
8. Linear systems with several degrees of freedom.

Chapter 3. Parametrical oscillations

9. General notions.
10. Parametrical excitation in form of rectangular sinus.
11. Parametrical excitation in form of sinus.

Chapter 4. Stability of equilibrium and self-excited oscillations

12. Stability of equilibrium.
13. Stationary motions and limit cycles.
14. Transitional processes and stability of stationary motions.
15. Phenomena of synchronization.
16. Strange attractors.

References

The list of references contains 35 items, mainly monographs, giving more detailed exposition of the subject.