

Е. Н. МНЕВ, А. К. ПЕРЦЕВ

ГИДРОУПРУГОСТЬ ОБОЛОЧЕК

УД

405371

Отдел учебников

БИБЛИОТЕКА
ДЛЯ ЧЛЕНОВ
УНИВЕРСИТЕТА



Издательство «Гидротехизмат»

Ленинград

1970

М 73 Мнев Евгений Николаевич, Перцев Андрей Константинович. Гидроупругость оболочек. Л., Судостроение, 1970. 365 стр.

В книге рассматриваются вопросы, связанные с расчетом прочности лобовых оболочек с помощью методов в мнимых оболочках систем «оболочка-жидкость», дифракционные процессы, резонансные явления, сопрягающиеся с жидкостью при динамическом нагружении.

Книга рассчитана на инженеров, научных работников, преподавателей и студентов, занимающихся динамической прочностью судовых конструкций. Она может быть также полезна и специалистам других областей техники, интересующимся динамическим состоянием оболочек — жидкостей в динамике.

3-18-5

66-29

628.6: 629.12

От научного редактора

Характерной особенностью современных методов изучения инженерных проблем является все более и более широкое использование аппарата математической физики. В предлагаемой вниманию читателей монографии Е. Н. Мнев и А. К. Перцев принят именно такой подход к решению задач. Вне всякого сомнения, он оказался весьма плодотворным. По-видимому, только так и можно было четко установить область возможного использования гипотез несжимаемости жидкости в теории длинных волн, расширить представления о присоединенных массах сложных систем, указать на связь теории гидродинамического удара Н. Е. Жуковского с нестационарной задачей распространения волновых возмущений в цилиндрических оболочках.

Представляется весьма убедательным и имеющим большое практическое значение вывод об особых демпфирующих свойствах системы оболочка — жидкость, практически исключающих колебания с определенными частотами.

Едва ли не впервые в достаточно законченном виде в книге излагается дифракционная картина волнового взаимодействия оболочки с окружающей средой при распространении акустических волн произвольного характера.

Естественно, что освещение столь широкого круга вопросов с изложением многих оригинальных результатов, принадлежащих лично авторам, не может не вызвать известной полемики, обсуждение дальнейших путей развития этого важного направления техники. Так, нам кажется отнюдь не безнадежным исследование влияния нерегулярных явлений, нередко возникающих в результате взаимодействия деформируемой преграды с жидкостью.

Не безупречным с позиций математической физики является материал гл. V, где авторы, исследуя потерю устойчивости оболочек, вынуждены исходить из неединственной и неавтономной системы дифференциальных уравнений.

Методом строгого решения подобного рода задач пока не существует. Тем более необходимо было бы проанализировать возможные погрешности принятого способа исследования, указать на границы его практического применения, и уделить большее вни-

мание обсуждению полученных результатов, хотя бы с позиций качественной теории дифференциальных уравнений.

Мы полагаем далее, что при анализе линейных задач, по-видимому, можно было бы шире использовать интегральные преобразования.

Переход к оригиналам от сложного вида изображений и трансформант при этом можно было бы осуществлять методом асимптотически эквивалентных функций.

В заключение нам хотелось бы выразить надежду, что книга вызовет интерес читателей и будет способствовать прогрессу в этой сложной области современной техники.

От авторов

Гидроупругость — область прикладной механики, в которой изучается взаимодействие упругих тел с жидкостью. Раздел гидроупругости, относящийся к исследованию конкретных задач гидродинамики и теории оболочек, назван в книге гидроупругостью оболочек.

Интерес к динамическому взаимодействию оболочек с жидкостью впервые проявился еще в конце прошлого века при исследованиях гидравлического удара в напорном трубопроводе. Однако теория гидроупругости оболочек стала быстро развиваться лишь в последние 15—20 лет в связи с решением широкого круга задач как в кораблестроении, так и в других областях техники (самолестроении, ракетостроении и др.). В начале 50-х годов резко усилился интерес к исследованию динамического взаимодействия между упругими оболочками и слабо сжимаемой жидкостью. Это вызывалось необходимостью повышения ударостойкости корпусов кораблей по отношению к подводным взрывам и возникшей в то время острой потребностью в совершенствовании средств подводной акустики. Другим толчком к интенсификации работ в области гидроупругости послужило развитие ракетной техники. Большое количество жидкого топлива внутри ракеты ставит целый ряд задач, относящихся к этой теории. Цикл работ посвящен проблеме динамического взаимодействия оболочек с жидкостью в связи с изучением сейсмостойкости различных резервуаров для хранения жидкости. Некоторые исследования выполнены в области динамического расчета гидротехнических сооружений.

Обширность уже полученных в настоящее время результатов (они опубликованы в виде многочисленных статей в периодических изданиях в Советском Союзе и за рубежом) и постоянно растущий интерес к задачам динамического взаимодействия оболочек с жидкостью делают своевременным издание монографии, посвященной этой проблеме.

Авторы концентрируют свое внимание лишь на некоторых вопросах гидроупругости оболочек, близкая к их собственным научным интересам. Сюда в первую очередь относятся собственные и вынужденные колебания систем оболочка — жидкость и анализ

устойчивости оболочек, соприкасающихся с жидкостью, при динамическом нагружении, дифракционные процессы.

Авторы стремились изложить прежде всего методы решения задач. Применение этих методов иллюстрируется на различных примерах, позволяющих выявить основные закономерности поведения систем оболочек — жидкость при динамическом нагружении. Большое внимание в книге уделено обоснованию инженерных подходов к расчету оболочек, взаимодействующих с жидкостью, и развитию численных методов решения задач гидроупругости, ориентируемых на возможности современной вычислительной техники.

Известное место в книге отводится результатам собственных исследований авторов, которые были опубликованы в периодической печати и неоднократно докладывались на всесоюзных конференциях по механике. Значительная часть материала книги публикуется впервые.

Между авторами труд распределен следующим образом: § 1—13, 20—24, 30—32 написаны Е. Н. Меньшиком; § 14—19, 25—29 — А. К. Перцевым.

Авторы выражают глубокую благодарность В. А. Родоскину, Л. Н. Селезневу и Ю. С. Яковлеву за ценные замечания, сделанные ими при просмотре рукописи.

Введение

Проблема динамического взаимодействия оболочек с жидкостью стала привлекать к себе внимание ученых еще в конце прошлого века. Одним из первых исследований, где учитывалась деформация цилиндрической оболочки от действия гидродинамических сил, была классическая работа Н. Е. Жуковского «О гидравлическом ударе в водопроводных трубах». Теория гидравлического удара [27] основана на предположении об одномерности движения идеальной слабо сжимаемой жидкости, безинерционности и безвязкости прогибов стенок трубы. Н. Е. Жуковский установил, что в рамках принятых им допущений все возмущения в трубе распространяются с одной и только одной скоростью c , которая может быть существенно меньше скорости звука в жидкости c_0 . Таким образом, было установлено, что система оболочка — жидкость обладает свойствами, не присущими отдельным ее компонентам. Прикладная теория гидравлического удара нашла широкое применение при решении огромного числа важных практических задач. С ее помощью сравнительно просто исследуются процессы распространения волн давления в трубах с переменным сечением и толщиной, в системе коаксиальных труб и пр.

Однако эта теория не может объяснить такие явления, как дисперсия волн давления и деформаций, волнообразное изменение давления в окрестности фронта и ряд других. В последнее время появились работы, в которых делается попытка уточнить прикладную теорию гидроудара либо за счет усложнения уравнений движения стенок трубы [31], либо только за счет учета двумерности течения жидкости [38]. При таком подходе к решению задачи взаимодействия стенок трубы с жидкостью упускается из виду необходимость согласования моделей жидкости и оболочек. Первое уточнение прикладной теории гидравлического удара за счет одновязкого совершенствования уравнений движения стенок трубы и жидкости принадлежит Скаляку [100]. Этому же вопросу посвящена работа [42].

Одной из первых работ (1937 г.) о совместных колебаниях упругого тела с окружающей его жидкостью являлась статья П. К. Иншкова [30]. В этой интересной статье П. К. Иншков рассмотрел

свободные колебания вертикально расположенного круглого стержня, погруженного в бесконечный слой жидкости. Как и большинство последующих исследователей, он полагает, что жидкость идеальна и несжимаема, а объектом стержня при вибрации — потенциальное. Амплитуда колебаний стержня полагалась малой, что позволяло линейтизировать дифференциальные уравнения и граничные условия, причем последние записывались на поверхности недеформированного тела. П. К. Ишков столкнулся с большими вычислительными трудностями при расчете формы колебаний стержня. Не найдя пути для точного решения задачи, он ограничился приближенным определением частот, доступным, что формы колебаний в жидкости и в вакууме совпадают. В последующем было выяснено, что такое совпадение имеет место далеко не всегда. Однако прием, использованный П. К. Ишковым при анализе колебаний стержня в жидкости, широко применяется и на сегодня в задачах гидроупругости оболочек.

С развитием вопросов гидроупругости в начале 50-х годов появилось значительное число работ, посвященных изучению взаимодействия ударных волн с различными погруженными объектами: твердыми телами, пластинками, оболочками. Часть этих исследований, относящихся к дифракции ударной волны на твердых телах и поведению упругих пластин при падении на них ударной волны, обобщена в монографии Б. В. Зимановича и ударной волны, обобщена в монографии Б. В. Зимановича и Ю. С. Яковлева [28]. Что же касается взаимодействия ударных волн с оболочками, то оно освещалось пока лишь в журнальной литературе.

Наибольшее число публикаций посвящено круговой цилиндрической оболочке. Поверхностное воздействие плоской ударной волны на бесконечно длинный цилиндр рассматривалось в работах Кюрьера [86], Миндлина и Блейха [97], Варона [7], Хейланда [91], Пейтона [99]. Существенный вклад в решение этой задачи внесли В. В. Новожилов, а также Ю. В. Горянов, Ю. И. Кадашечев и И. Л. Марюков [22], Л. А. Александрин, М. Н. Лефюляр и др. Воздействие на цилиндрическую оболочку ударной волны, движущейся вдоль ее оси, изучал Кюрьер [87], Мамп-Нахбар [94], Форрестал и Херриш [90], Е. Н. Мивк [42, 44], Л. И. Слезин [66, 67]. Последнее тонкостенное замкнутой формы исследовалось Мамп-Нахбаром [95] и М. Н. Лефюляром.

Вопросы устойчивости оболочек при рассматриваемом типе нагружения изучались А. К. Перцевым и Ю. И. Кадашечевым [48], А. С. Воллашником и М. С. Герштейном [81], Э. И. Григольком, А. Г. Горшковым и Ф. Н. Шкаринком [26].

Следует отметить, что несмотря на значительное число публикаций многие вопросы взаимодействия оболочек с жидкостью еще окончательно не выяснены. Весьма сложная зависимость между гидродинамическими силами и деформациями затрудняет получение строгих решений и заставляет исследователей прибегать

при определении гидродинамических сил к существенной схематизации процесса взаимодействия оболочек с жидкостью. Так, Миндлин и Блейх [97] при решении задачи полагали, что волны, генерируемые оболочкой, подчиняются законам, справедливым для плоских волн. Гипотеза плоского отражения использовалась затем в ряде работ [7, 64, 94 и др.]. Хейланд [91], а в последующем Э. И. Григолок и В. Л. Присекки [24] предположили полностью игнорировать более точных зависимостей, основанных на допущении, что возбуждаемые оболочкой волны являются цилиндрическими. Эта гипотеза также довольно широко используется рядом авторов [18, 25, 26].

Обе гипотезы справедливы в принципе лишь в первый период взаимодействия ударной волны с оболочкой. Вместе с этим без андронных оснований и без оценок погрешностей они используются во многих работах при исследовании взаимодействия среды с оболочкой без ограничений продолжительности изучаемой части переходного процесса.

В поисках упрощения задачи взаимодействия оболочек с жидкостью в отдельных работах исследуется класс движений оболочек, в пределах которого не проявляется сжимаемость жидкости. В частности, обобщено, что к этому классу движений относятся изгибные деформации стальных тонких цилиндрических оболочек при потере ими устойчивости в воде [48].

Границы применимости каждой из гипотез могут быть установлены лишь путем сопоставления с точными решениями, число которых пока еще очень мало.

Значительное внимание уделялось в последние годы изучению установившихся колебаний оболочек, соприкасающихся с жидкостью. Колебания бесконечно длинной цилиндрической оболочки в безграничной акустической среде наиболее подробно рассмотрены Блейхом и Вароном [84]. Они показали, что все частоты колебаний оболочки лежат ниже значений c_0/λ_0 (λ_0 — длина полуволны, c_0 — скорость звука, а из числа в общем случае меньшие числа частот собственных колебаний оболочки в вакууме, соответствующих данному значению λ_0). Авторы работы [84] поставили вопрос о существовании комплексных корней частотного уравнения взамен отсутствующих реальных. Как-либо практических путей для отыскания численных значений комплексных частот Блейх и Варон не нашли. Случай колебаний бесконечно длинной цилиндрической оболочки, при котором взаимодействие сжимаемой жидкостью находится снаружи и внутри оболочки, исследовалось Варбутоном [101].

К работам, посвященным анализу свободных колебаний цилиндрических оболочек в безграничной акустической среде, относятся статья В. В. Болотина [10] и ряд последующих за ней исследований устойчивости оболочек, находящихся в потоке сжимаемого газа.

Выше речь шла лишь о колебаниях систем бесконечной протяженности. Первые публикации исследований совместных колебаний упругих оболочек конечной длины, содержащих жидкость, появились впервые в конце 50-х годов. В 1959 г. Н. Н. Моисеев [45] дал общий анализ проблемы расчета малых свободных колебаний упругого стержня с жидкой полостью внутри. Задача решается в линейной постановке; жидкость считается идеальной и несжимаемой, а ее движение — безвихревым; внешние силы, действующие на балку, консервативны. Относительно заполнения полости каких-либо ограничений не делается: жидкость может заполнить полость и частично, и целиком. Вниманию комментатора на обосновании метода Рунта в схеме применения этого метода для расчета частот и форм колебаний. Н. Н. Моисеев доказал сходимость метода и существование главных колебаний системы конечного размера упругий стержень — жидкость. В расчете свободных колебаний при практическом применении метода предлагается использовать цифровые вычислительные машины. Одно из затруднений в реализации предлагаемого решения Н. Н. Моисеев видит в выборе системы координатных функций. Он считает целесообразным использовать в качестве координатных функций формы собственных колебаний толкостенного стержня в вакууме. Результаты своих исследований колебаний балок с полостями, заполненными жидкостью, Н. Н. Моисеев обобщил в книге [46]. Б. И. Рабинович [55] предложил иное решение задачи о колебаниях толкостенного стержня с жидким заполнителем. В США основная работа, посвященная колебаниям толкостенных балок с жидкостью, принадлежит Майлсу [96].

В работах [45, 96] оболочка трактуется, как балка, подчиняющаяся закону плоских сечений, а в статье [55] — как толкостенный стержень. Пока речь идет о низких, преимущественно балочных формах движения, такое приближение может быть еще оправдано. Более точная постановка задачи требует применения теории оболочек. Первый шаг в этом направлении был сделан в статье Б. И. Бубники и В. Н. Меркулова [13], где рассмотрена задача о параметрических колебаниях цилиндрической оболочки, подкрепленной ребрами жесткости, содержащей идеальную несжимаемую жидкость. Задача о собственных колебаниях получается отсюда как частный случай. Авторы [13] обосновали вариационный метод и получили дифференциальное уравнение задачи. Пренебрегая энергией полного движения жидкости на свободной поверхности по сравнению с полной энергией системы, они принимают для свободной поверхности условие $\varphi = 0$ (φ — потенциал скорости жидкости). Без убедительных обоснований то же условие используется и для неопределенного плоского диска, замещающего силовую внутреннюю полость оболочки. Правда, авторы [13] исключают возможность такого подхода при осесимметричных колебаниях жидкости. При решении дифференциальных урав-

нений ими используется метод Бубнова — Галеркина. В качестве координатных функций выбраны формы собственных колебаний оболочки в вакууме. При полном наполнении цилиндра гидродинамическая задача в рамках принятых допущений не отличается от хорошо изученной задачи о колебаниях бесконечно длинных цилиндрических оболочек с жидким наполнением и с конечной длиной пополюсь деформации в направлении образующей. При неполном наполнении она аппроксимативно сводится к той же задаче, если пользоваться разложением радиального перемещения части оболочки, сопрягающейся с жидкостью, в ряд Фурье.

Метод, основанный на сведениях расчета колебаний шарового сегмента цилиндрической оболочки с жидкостью к расчету бесконечно длинной системы, использовался в трудах [83, 101] и др. Метод расчета собственных колебаний колеблющегося бака, заполненного жидкостью, с учетом несплошности дна и бокового движения на свободной поверхности рассматривался Б. И. Рабиновичем [56], Чу Ван-хуа [88]. Ряд исследований посвящен осесимметричным свободным колебаниям оболочки с жидкостью. Изучены колебания цилиндрической оболочки с жестким и упругим дном [3, 35, 39, 76, 79], сферической оболочки [2, 5, 52, 61, 62, 63, 80], оболочки вращения произвольной формы [1, 36, 77, 78] и др. Обнаружено, что формы собственных колебаний оболочки с жидкостью могут существенно отличаться от форм колебаний оболочки в вакууме. Н. М. Рапопорт [57] рассмотрел некоторые математические аспекты задачи о движении упругого тела произвольной конфигурации с полостями, частично заполненными несжимаемой жидкостью. Прикладная часть его монографии посвящена исследованию движения балок с жидким наполнением. Разные этапы вопроса применительно к оболочкам, частично заполненным жидкостью, нашла отражение в работе [58].

В выполненных исследованиях по динамике систем оболочка — жидкость конечного размера внимание исследователей сосредоточивалось на проблеме малых свободных колебаний и особенно на изучении структуры спектра. Обычно задача расчета колебаний сводится к построению и исследованию бесконечных систем связанных между собой линейных дифференциальных уравнений. До численных результатов доведены сравнительно простые задачи, да и то с помощью современной вычислительной техники. Переходные процессы практически не изучены. Уделяя основное внимание чисто математическим аспектам задачи, многие исследователи часто упускают из поля зрения анализ механической модели. Так, например, в некоторых работах совершенно произвольно либо учитываются, либо не учитываются сжимаемость жидкости и тангенциальные силы внутри оболочки. Инженерные методы расчета колебаний системы оболочка — жидкость развиты еще очень слабо.

В нашей книге освещаются некоторые основные вопросы, относящиеся к расчету свободных и вынужденных аperiodических колебаний различного вида систем оболочка—жидкость и анализу устойчивости оболочек, соприкасающихся с жидкостью при динамическом нагружении.

Первая глава посвящена исследованию форм и частот свободных колебаний системы тонкостенная конструктивно ортотропная оболочка — акустическая среда. В ней приводятся ряд точных решений, а также рассматриваются возможности упрощений задачи, полезных в инженерных расчетах, и даются соответствующие оценки. Результаты главы используются в последующем изложении при расчетах систем на аperiodическую нагрузку.

Во второй главе рассматривается распространение упругих нестационарных осесимметричных волн в полубесконечной системе цилиндрическая оболочка — акустическая среда. Исследуются случаи толстого слоя жидкости и безграничной (в радиальном направлении) среды. Изучается распространение стационарной волны в бесконечно длинной погруженной оболочке. Полученные в главе результаты расширяют и обобщают известные решения о динамической реакции соприкасающихся с жидкостью оболочек на осесимметричную нагрузку. Кроме того, анализ строгих решений для полубесконечной и бесконечной систем позволяет обоснованно подойти к расчету систем конечной длины.

Третья глава содержит исследования поведения упругих оболочек при воздействии на них акустических волн давления, движущихся в направлении, перпендикулярном к оси оболочки. Здесь приводятся в интегральном виде точные решения динемической задачи для сферической и цилиндрической оболочек. Обсуждаются пути получения приближенных аналитических решений. Анализируются напряжения и деформации оболочек при воздействии кратковременных нагрузок.

В четвертой главе исследуются переходные процессы в более сложных линейных системах оболочка—жидкость. В частности, рассматривается поведение оболочек с сосредоточенными массами, оболочек конечного размера и систем оболочек при воздействии динамических нагрузок.

Пятая глава посвящена вопросам устойчивости соприкасающихся с жидкостью цилиндрических оболочек при динамическом нагружении. Задача решается как в линейной, так и в нелинейной постановке. Рассматриваются случаи потери устойчивости оболочек в безграничной среде и оболочек, соприкасающихся со слоем жидкости. Алгоритмы численных приводятся в явном, удобном для использования ЭВМ.

Допущения, используемые в книге, все отделяются от обычно принимаемых при решении задач гидроупругости и в основном они сводятся к следующим:

1) оболочка тонкая. Принимая обычную для технического расчета относительную погрешность $\sim 5\%$, будем считать тонкими такие оболочки, у которых $r_0/A > 20$ (A — толщина оболочки, r_0 — радиус кривизны средней поверхности);

2) поперечный сдвиг и инерция вращения оказывают малое влияние на движение системы, и ими можно пренебречь;

3) к оболочке применима гипотеза прямых нормалей;

4) материал оболочки следует обобщенному закону Гука;

5) жидкость идеальная, а ее движение — безвихревое. Сжимаемость жидкости учитываем в акустическом приближении. Это, в частности, означает возможность динтерпретации граничных условий и отнесение их к недеформированной поверхности оболочки. Такая модель жидкости в книге является акустической средой;

6) кавитация отсутствует. В этом случае на поверхности раздела между жидкостью и упругой оболочкой должно обеспечиваться условие жесткого контакта.

Перечисленные допущения являются общими для всей книги. Помимо них, в ряде случаев используются допущения, носящие более частный характер.

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК, СОПРЯКАЮЩИХСЯ С ЖИДКОСТЬЮ

§ 1. Постановка задачи. Исходные уравнения

Глава посвящена традиционной задаче линейной теории гидроупругости: изучению форм и частот свободных колебаний системы тонкостенная оболочка—жидкость. Знание спектра частот и форм собственных колебаний облегчает расчет динамической реакции оболочки на аperiodическую нагрузку. В других задачах знание характеристик свободных колебаний служит основой для правильной ориентировки. Центральное место в главе отведено исследованию колебаний круглых цилиндрических оболочек, сопрягающихся с цилиндрическим слоем жидкости. Результаты для колебаний оболочек, заполненных жидкостью, и оболочек в безграничной среде получаются отсюда как частный случай. На базе точных решений исследуются возможные упрощения задачи, применяемые в инженерных расчетах.

Рассматриваемые в главе задачи допускают общую математическую формулировку.

Линейные уравнения теории оболочек в перемещениях (без учета инерции вращения)

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= X_1; \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w &= X_2; \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= X_3 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u, v, w — перемещения основной поверхности оболочки¹ от положения, соответствующего действию статически приложенных сил, которое мы будем считать безмоментным; перемещения u положительны, если они направлены в сторону внутренней нормали; L_{ij} — линейные дифференциальные операторы, вид которых

¹ Основная поверхность — предельно малый выделенный координатный слой оболочки. В частном случае основная поверхность может совпадать со срединной.

зависит от типа оболочки и статической нагрузки; X_1, X_2, X_3 — составляющие вектора динамической нагрузки, отнесенные к единице площади основной поверхности.

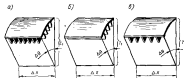


Рис. 1. Замкнутые конструктивно ортотропные оболочки.

К дифференциальным уравнениям в общем случае следует присоединить граничные условия, зависящие от формы оболочки и ее закрепления.

При осесимметричных колебаниях из трех уравнений остаются два

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{13}w &= X_1; \\ L_{31}u + L_{33}w &= X_3. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В главе особое внимание уделяется осесимметричным колебаниям круговых цилиндрических оболочек. Выясним операторы L_{ij} для этого случая. Полюсом, что подкрепление оболочки, выполненной из изотропного материала, состоит из стрингеров и апангоутов. Элементы оболочки приведены на рис. 1. Если подкрепления расположены часто, то их можно рассматривать как ортотропный слой (рис. 2), упругие свойства которого в продольном и поперечном направлениях различны. При исследовании колебаний цилиндрической оболочки будем пользоваться цилиндрическими координатами (x, r, θ) , совместив радиальную ось x с осью оболочки.

Пусть r_0, h — радиус основной поверхности и толщина оболочки; μ — коэффициент Пуассона; k_x, k_θ — коэффициенты поперечности заполнения сечения материалом; F_c, k_r, k_θ — площадь сече-

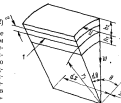


Рис. 2. Слой ортотропного слоя.
1 — основная поверхность.

ния, шаг и высота стержней; F_m, L_m, h_m — площадь сечения, шаг и высота шпангоутов; N_2 — интенсивность нормальных статических усилий, действующих на поперечном сечении оболочки (доказательства при сжатии оболочки). Коэффициенты k_x и k_y могут изменяться в пределах $0 \leq k_x \leq 1$, $0 \leq k_y \leq 1$. Для оболочки, изображенной на рис. 1, б, в пределах толщины стенки $A: k_x = k_y = 1$; в пределах подкрепляющего слоя $k_x = F_y/h_y L_y$, $k_y = 0$. Если подкрепления только кольцевые (рис. 1, а), в пределах толщины стенки $k_x = k_y = 1$, а в пределах подкрепляющего слоя $k_x = 0$, $k_y = F_x/h_x L_x$.

Рассчитав в обычной для теории тонких оболочек последовательности [8] матрицу дифференциальных операторов уравнений (1.2), получим

$$[L] = \begin{pmatrix} -\Gamma_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\Gamma_1}{r_1} \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\Gamma_1}{r_1} \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\Gamma_2}{r_1} + \Gamma_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\frac{2\Gamma_1}{r_1} - N_1 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \int_{-h_1}^{h_1} \frac{E h_y dx}{1 - k_y k_{y0}^2}; \quad \Gamma_2 = \int_{-h_1}^{h_1} \frac{E h_x h_{y0} dx}{1 - k_x k_{x0}^2}; \\ \Gamma_3 &= \int_{-h_1}^{h_1} \frac{E h_y dx}{1 - k_y k_{y0}^2}; \quad \Gamma_4 = \int_{-h_1}^{h_1} \frac{E h_x dx}{1 - k_x k_{x0}^2}; \\ \Gamma_5 &= \int_{-h_2}^{h_2} \frac{E h_x dx}{1 - k_x k_{x0}^2}; \quad \Gamma_6 = \int_{-h_2}^{h_2} \frac{E h_y h_{x0} dx}{1 - k_y k_{y0}^2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В (1.4) интегрирование производится по толщине оболочки ($h_1 + h_2$ — полная толщина оболочки с учетом ортотропного слоя). Координата x отсчитывается от осевой поверхности радиусом r_1 .

Для того чтобы привести матрицу операторов (1.3) к симметричному виду, будем полагать, что радиус осевой поверхности r_1 выбран таким образом, чтобы

$$\Gamma_5 = 0.$$

Рассмотрим частные случаи.

Изотропная оболочка. Основная поверхность совпадает со срединной

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= E h (1 - \mu^2); \quad \Gamma_2 = \mu E h (1 - \mu^2); \quad \Gamma_3 = 0; \\ \Gamma_4 &= E h (1 - \mu^2); \quad \Gamma_5 = E h^3 / 12 (1 - \mu^2); \quad \Gamma_6 = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Если изотропная оболочка опирается на упругое основание с коэффициентом упругости основания k_0 , то коэффициент Γ_4 следует рассчитывать по формуле

$$\Gamma_4 = E h^3 / (1 - \mu^2) + k_0 r_1^2. \quad (1.6)$$

Оболочка подкреплена поперечными ребрами. Основная поверхность совпадает со срединной

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= E h (1 - \mu^2); \quad \Gamma_2 = \mu E h (1 - \mu^2); \quad \Gamma_3 = 0; \\ \Gamma_4 &= \frac{E h}{1 - \mu^2} \left[1 + (1 - \mu^2) \frac{F_{y0}}{h_y} \right]; \quad \Gamma_5 = E h^3 / 12 (1 - \mu^2); \quad \Gamma_6 = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

В частном случае у круговой цилиндрической изотропной оболочки, без учета действия статических сил, дифференциальные операторы L_{ij} полной системы (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2}; \\ L_{12} &= L_{21} = \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s}; \\ L_{22} &= \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \\ L_{33} &= L_{31} = \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{3 - \mu}{2} a^2 r_1 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial s}; \\ L_{34} &= L_{41} = \frac{\mu}{r_1} \frac{\partial}{\partial s} - a^2 r_1 \left(\frac{\partial^3}{\partial x^2} - \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x^2} \right); \\ L_{35} &= a^2 \left(r_1 \nabla^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r_1^2} \right) + \frac{1}{r_1^2}; \\ \left(s = r_1 \theta, \quad a^2 = \frac{h^2}{12 r_1^2}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right). \end{aligned}$$

Переходим к определению членов, стоящих в правой части уравнений движения (1.1). Пусть p^* — избыточное давление в жидкости, вызванное колебанием оболочки. Тогда очевидно, что

$$X_1 = -\sigma^0 \frac{\partial w}{\partial t}, \quad X_2 = -\sigma^0 \frac{\partial w}{\partial t}, \quad X_3 = -\sigma^0 \frac{\partial w}{\partial t} \pm p^*, \quad (1.8)$$

Здесь σ^0 — масса оболочки на единицу площади координатной поверхности, знак плюс перед p^* соответствует давлению на внешнюю поверхность оболочки, минус — давлению на внутреннюю поверхность.

Определяя p^* , будем считать, что при отсутствии колебаний оболочки жидкость неподвижна. В этом случае линеаризация

интеграла Коши [32] приводит к следующей зависимости между потенциалом скорости жидкости φ и давлением p^* :

$$p^* = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1.9)$$

(ρ — массовая плотность жидкости, t — время).

При определении потенциальной функции скорости акустической среды используется волновое уравнение

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.10)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа в пространстве, занятом жидкостью; c_s — акустическая скорость звука в жидкости. Функция φ должна удовлетворять условию непроницаемости оболочки, т. е. на поверхности оболочки должно быть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (1.11)$$

(n — направление внутренней нормали).

В задачах с жидкостью, частично заполняющей сосуд, к наложенным соотношениям следует добавить уравнение волнового движения свободной поверхности. Если ось x направлена внутрь жидкости и перпендикулярна свободной поверхности, то соответствующее граничное условие для φ на свободной поверхности будет

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - g \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (1.12)$$

(g — ускорение силы тяжести).

В тех случаях когда жидкость занимает бесконечную область, необходимо учитывать условия для φ на бесконечности, как это обычно делается в задачах гидродинамики при решении волнового уравнения в неограниченной области. Эти условия состоят в том, чтобы в отдаленных точках жидкость находилась в состоянии покоя. Кроме того, необходимо учитывать, что в безграничной среде возмущение волнового типа распространяется наружу от источников.

Приведенные в этом параграфе соотношения составляют достаточно общую формулировку задачи исследования взаимодействия оболочек с идеальной жидкостью в линейном приближении в процессе их свободных колебаний.

§ 2. Колебания бесконечно длинной осесимметричной цилиндрической системы (общий случай)

Сначала рассмотрим колебания бесконечно длинных круглых цилиндрических оболочек, соприкасающихся со слоем жидкости. Положим, что объем, занимаемый жидкостью, имеет форму полости между двумя концентрическими круговыми цилиндрами (рис. 3.

а, б). Одна стенка полости образована тонкостенной оболочкой другой — абсолютно жесткой.

Пусть λ_x — длина волны колебаний в направлении толерной оси x ; n — число волн в кольцевом направлении; r_2 — радиус жесткой цилиндрической стенки ($r_2 \geq r_1$); $|\Delta r| = |r_2 - r_1|$ —

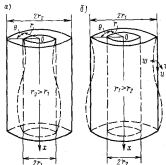


Рис. 3. Замкнутая цилиндрическая система оболочка — жидкость.

толщина слоя жидкости; $\alpha = \pi/\lambda_x$ — волновое число; Ω — частота собственных колебаний; $\beta = \sqrt{1 - \Omega^2/c_s^2}$ — параметр; $i = \sqrt{-1}$, $\bar{\beta} = i\beta$.

Движение оболочки описывается системой (1.1), правые части которой определяются согласно (1.8). Избыточное давление p^* выражается через функцию φ , которая в цилиндрической системе координат характеризуется волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (2.1)$$

Условия непроницаемости оболочки и жесткой стенки

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r=r_2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (2.2)$$

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r=r_1} = 0. \quad (2.3)$$

Уравнения (1.1) будут удовлетворены, если положить

$$\begin{aligned} m &= m^0 \cos \alpha \cos \varphi \sin \Omega t; \\ v &= v^0 \sin \alpha \sin \varphi \sin \Omega t; \\ w &= w^0 \sin \alpha \cos \varphi \sin \Omega t, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где m^0 , v^0 , w^0 — некоторые константы. Следуя методу Фурье, потенциал φ представим выражением

$$\varphi = TR \sin \alpha \cos \varphi, \quad (2.5)$$

где $T(t)$ и $R(r)$ — функции, подлежащие определению. Используя условие непроницаемости оболочки (2.2), найдем

$$T = -\frac{\Omega w^0}{TR'_{r=a}} \cos \Omega t. \quad (2.6)$$

Штрихом обозначено дифференцирование по r . Подстановка (2.5) в (2.1) с учетом (2.6) дает

$$r^2 R'' + rR' - (m^2 \varphi^2 r^2 + n^2) R = 0. \quad (2.7)$$

Интеграл уравнения (2.7) выражается через бесселевы функции n -го порядка

$$R = \begin{cases} C_1 I_n(\alpha r \beta) + C_2 K_n(\alpha r \beta) & (\Omega < c_{\text{ср}}); \\ D_1 J_n(\alpha r \beta) + D_2 Y_n(\alpha r \beta) & (\Omega > c_{\text{ср}}), \end{cases} \quad (2.8)$$

где I_n , K_n — бесселевы функции чисто мнимого аргумента; J_n , Y_n — бесселевы функции вещественного аргумента.

Если $\Omega = c_{\text{ср}}$, имеет место вырождение в степенные функции

$$R = C_1 r^n + \frac{C_2}{r^n}. \quad (2.9)$$

Используя условие (2.3), найдем

$$\varphi(r, r, \Omega) = -m^0 \Omega \cos \Omega t \sin \alpha \cos \varphi \Phi_{\text{ср}}, \quad (2.10)$$

где

$$\Phi_{\text{ср}} = \begin{cases} \frac{I'_n(\alpha \beta) K_n(\alpha \beta) - K'_n(\alpha \beta) I_n(\alpha \beta)}{I'_n(\alpha \beta) K'_n(\alpha \beta) - I'_n(\alpha \beta) K(\alpha \beta)} & (\Omega < c_{\text{ср}}); \\ \frac{Y'_n(\alpha \beta) J_n(\alpha \beta) - J'_n(\alpha \beta) Y_n(\alpha \beta)}{Y'_n(\alpha \beta) J'_n(\alpha \beta) - Y'_n(\alpha \beta) J_n(\alpha \beta)} & (\Omega > c_{\text{ср}}); \\ -\frac{r^{n+2}}{m^0} \frac{(1 - (r/a)^{2n})}{[1 - (r/a)^{2n}]} & (\Omega = c_{\text{ср}}), \end{cases} \quad (2.11)$$

Подстановка (2.10) в (1.9) дает

$$[p^*]_{r=a} = -m^0 \Omega^2 \sin \Omega t \sin \alpha \cos \varphi \Phi_{\text{ср}}^2, \quad (2.12)$$

где обозначено

$$\Phi_{\text{ср}}^2 = [\Phi_{\text{ср}}]_{r=a}. \quad (2.13)$$

Формула (2.12) может быть также представлена в виде

$$[p^*]_{r=a} = \rho \Phi_{\text{ср}}^2 \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (2.14)$$

Возвратимся к уравнениям колебаний оболочки (1.1). Подставляя в них (1.8) и (2.14), получим:

$$L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = -m^0 \frac{\partial u}{\partial t};$$

$$L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = -m^0 \frac{\partial v}{\partial t};$$

$$L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w = -(\pi^0 + \pi_{\text{ср}}) \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (2.15)$$

Величина

$$\pi_{\text{ср}} = -\rho \Phi_{\text{ср}}^2 \sin \Omega t, \quad (2.16)$$

характеризующая инерционное противодействие среды колебанию оболочки в пределах данного тона, изменяется в последующем присоединенной массой жидкости.

Из выражения для $\Phi_{\text{ср}}$ (2.11) видно, что функции $\pi_{\text{ср}}$ имеют бесчисленное множество полюсов. Это свидетельствует о наличии бесконечных дискретных множеств частот Ω , соответствующих каждой комбинации α и φ , при которых слой акустической среды ведет себя подобно дисперсионному газу колебаний. Оболочка, сопрягающаяся с жидкостью, не может совершать колебания с этими частотами. Важным для приложения является то, что при осесимметричных колебаниях оболочки ($\alpha = 0$) точка $\Omega = c_{\text{ср}}$ является полюсом: при $\Omega \rightarrow c_{\text{ср}}$ ($\pi \rightarrow 0$) присоединенная масса $\pi_{\text{ср}}$ стремится к бесконечности. Случай $\Omega \rightarrow c_{\text{ср}}$ интересен еще и тем, что при $\pi > 0$ величина $|\pi_{\text{ср}}|_{\Omega=c_{\text{ср}}}$ не зависит от длины полуоси в направлении образующей оболочки и в точности совпадает со значением $\pi_{\text{ср}}$, полученным в предположении о бесконечности жидкости (см. § 3).

Метод расчета частот Ω с использованием уравнений, аналогичных по структуре системе (2.15), был рассмотрен Н. В. Болотиным [10]. Иначе этот вопрос решен в работе [84]. В обоих случаях задача сводится к решению трансцендентного характеристического уравнения

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\left[\left(\frac{r^0}{a^0} \right)_i + \left(\frac{r^0}{a^0} \right)_i + 1 \right] (\Omega_i^2 - \Omega^2)} = \frac{m^0}{\pi_{\text{ср}} \Omega^2}, \quad (2.17)$$

где $\Omega_{nj} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\right)_{\rho_j}, \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\right)_{\rho_j} (j = 1, 2, 3)$ — частота и характеристика форм собственных колебаний оболочки в вакууме [82] с заданными значениями κ и λ . При фиксированных κ и λ оболочка в вакууме имеет три частоты собственных колебаний ($j = 1, 2, 3$). Частотное же уравнение (2.17), описывающее колебание оболочки, сопрягающейся с цилиндрическим слоем сжимаемой жидкости конечной толщины, ограниченным жесткой стенкой, имеет бесчисленное множество корней. Так как величина $m_{\text{ж}}$ сложным образом зависит от Ω , то вычисление частот Ω должно вестись либо последовательными приближениями, либо графическим способом.

При $\epsilon_0 = 0$ формула (2.16) дает известное решение для колебаний трубы, наполненной жидкостью [101].

$$\lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} m_{\text{ж}} = \begin{cases} -\frac{\rho_1}{\omega_1 \beta} \frac{K_{0-1}(\omega_1 \beta)}{J_0(\omega_1 \beta)} - \lambda & (\Omega < c_{\text{ж}} \omega), \\ -\frac{\rho_1}{\omega_1 \beta} \frac{J_{0-1}(\omega_1 \beta)}{J_0(\omega_1 \beta)} - \mu & (\Omega > c_{\text{ж}} \omega), \end{cases} \quad (2.18)$$

С другой стороны,

$$\lim_{\epsilon_0 \rightarrow \infty} m_{\text{ж}} = -\frac{\rho_1}{\omega_1 \beta} \frac{K_{0-1}(\omega_1 \beta)}{K_0(\omega_1 \beta)} - \lambda \quad (\Omega < c_{\text{ж}} \omega), \quad (2.19)$$

что совпадает с известным результатом для случая колебания оболочки в безграничной акустической среде [101]. Можно показать, что при $\Omega > c_{\text{ж}} \omega$ и $\epsilon_0 \rightarrow \infty$ потенциал ψ , вычисленный по формуле (2.10), включает не только расходящиеся, но и сходящиеся волны, отраженные от удаленной в бесконечность жесткой цилиндрической стенки. Поэтому при $\Omega > c_{\text{ж}} \omega$ полученное решение не может быть использовано для исследования установившихся колебаний оболочки в безграничной среде. В безграничной среде при $\Omega > c_{\text{ж}} \omega$ в решение для ψ следует оставить лишь расходящиеся волны, что в итоге дает следующее выражение для присоединенной массы жидкости:

$$\lim_{\epsilon_0 \rightarrow \infty} m_{\text{ж}} = -\frac{\rho_1}{\kappa - \omega_1 \beta} \frac{H_{0-1}^{(2)}(\omega_1 \beta)}{H_0^{(2)}(\omega_1 \beta)} \quad (\Omega > c_{\text{ж}} \omega), \quad (2.20)$$

где $H_n^{(2)}$ — вторая функция Ханкеля. Анализ выражений (2.19) и (2.20) показывает, что если среда, окружающая оболочку, безгранична, то величина $m_{\text{ж}}$ действительна лишь при $\Omega < c_{\text{ж}} \omega$. В противном случае $m_{\text{ж}}$ становится комплексной. Отсюда следует, что все действительные частоты колебаний круговой ци-

линдрической оболочки в безграничной акустической среде лежат ниже значения $c_{\text{ж}} \omega$. Сопоставления о числе действительных частот для этого случая можно получить из графического анализа уравнения (2.17).

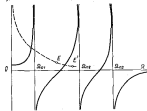


Рис. 4. К определению Ω при $\lambda \neq 0$.

На рис. 4 сплошными линиями изображен типичный график значений левой части уравнения (2.17) как функции Ω . На графике видны вертикальные асимптоты $\Omega = \Omega_{n1}, \Omega = \Omega_{n2}, \Omega = \Omega_{n3}$. Правая часть уравнения показана пунктирной линией. Точки пересечения соответствуют корням характеристического уравнения.

Так как правая часть имеет реальные значения лишь при $\Omega < c_{\text{ж}} \omega$, то пунктирная кривая обрывается в точке E, соответствующей $\Omega = c_{\text{ж}} \omega$. График показывает, что число действительных частот Ω равно числу корней Ω_n в вакууме, меньших по величине, чем $c_{\text{ж}} \omega$, или больше этого значения на единицу. Последнему случаю соответствует точка E' на рис. 4. Если все корни Ω_n больше $c_{\text{ж}} \omega$, то действительных частот может и не быть. Такой вариант возможен лишь при колебании оболочки в среде с низкой скоростью звука (см. [60]). Рисунок 5 соответствует $\kappa = 0$. Конечная точка E лежит на оси Ω , в результате чего при $\kappa = 0$ имеется

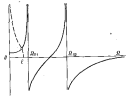


Рис. 5. К определению Ω при $\lambda = 0$.

Рисунок 6 соответствует $\kappa = 0$. Конечная точка E лежит на оси Ω , в результате чего при $\kappa = 0$ имеется

должен бы иметь реальный корень характеристического уравнения во всех случаях, даже если $\Omega_{\text{ст}} > c_0 \omega_0$.

Анализируя рис. 4 и 5, можно видеть, что низший корень уравнения (2.17) всегда меньше частоты $\Omega_{\text{ст}}$, следующий корень лежит между $\Omega_{\text{ст}}$ и $\Omega_{\text{об}}$, а высший корень должен находиться между $\Omega_{\text{ст}}$ и $\Omega_{\text{об}}$. Низкая частота колебаний оболочки в безграничной акустической среде не может лежать выше наименьшей частоты $\Omega_{\text{ст}}$ в пустоте.

Как правило, одно, а для большинства комбинаций ω и λ даже два значения

$$\left[\left(\frac{c_0^2}{\omega^2} \right)_{\text{ст}} + \left(\frac{c_0^2}{\omega^2} \right)_{\text{об}} + 1 \right]$$

малы по сравнению с единицей. Это указывает на то, что радиальные смещения таких колебаний незначительны, связь движущей оболочки и среды незначительна, и частоты колебаний очень близки к частотам $\Omega_{\text{ст}}$ в пустоте. Частота преимущественно внешнего колебания оболочки в этом случае может быть определена из упрощенного характеристического уравнения

$$\frac{1}{\Omega_{\text{ст}}^2 - \Omega^2} - \frac{\omega^2}{\alpha_{\text{об}}^2} \frac{1}{\Omega^2} = 0. \quad (2.21)$$

Вычисления частот значительно облегчаются, когда допустимо использовать гипотезу несжимаемости жидкости. В этом случае можно положить $c_0 = \infty$. Скорость звука c_0 входит только в параметр β . При $c_0 = \infty$ параметр β оказывается равным единице

$$\beta = 1 \quad (a)$$

вместо значения, зависящего от Ω ,

$$\beta = \sqrt{1 - \Omega^2 / c_0^2 \omega^2}. \quad (b)$$

Из сравнения (a) и (b) видно, что сжимаемостью можно пренебречь в том случае, если

$$(\Omega / c_0 \omega)^2 \ll 1. \quad (2.22)$$

Дополнительная возможность не учитывать сжимаемость жидкости для форм с $n \geq 1$ открывается при рассмотрении коэффициента, стоящего перед функцией $R(\nu)$ в уравнении (2.7),

$$\omega^2 r^2 - \frac{\alpha^2 r^2}{c_0^2} + n^2. \quad (b)$$

При $c_0 \sim \infty$ этот коэффициент равен величине

$$\omega^2 r^2 + n^2. \quad (v)$$

Из сопоставления выражений (b) и (v) видно, что жидкость ведет себя как несжимаемая среда при условии

$$\Omega^2 r_m^2 / c_0^2 (\omega^2 r_m^2 + n^2) \ll 1, \quad (2.23)$$

где r_m — наибольший из двух радиусов r_2 и r_1 . При осесимметричных колебаниях ($n = 0$) и колебании в безграничной среде условия (2.23) и (2.22) совпадают.

Учет влияния цилиндрического слоя несжимаемой жидкости на колебания бесконечно длинной цилиндрической оболочки сводится просто к вычислению не зависящих от частоты Ω присоединенных масс $m_{\text{пр}}$, входящих в третье уравнение системы (2.15). Конечно, возможность такого подхода следует каждый раз проверять, исходя из условия (2.23).

При использовании модели «несжимаемая жидкость» внешняя частота собственных колебаний системы оболочка—жидкость с фиксированными волновыми числами ω и n определяется формулой

$$\Omega = \frac{\Omega_{\text{ст}}}{\sqrt{1 + \alpha_{\text{об}}^2 m_{\text{пр}}^2}}, \quad (2.24)$$

вытекающей из уравнения (2.21).

В исследовании поведения оболочки под действием кратковременных нагрузок интерес представляет задача расчета реакции жидкости на аperiodическое радиальное перемещение оболочки

$$w = w^0(t) \cos n\theta \sin \alpha x,$$

где $w^0(t)$ — заданная функция времени. И здесь возможен упрощенный подход с использованием предположения о несжимаемости жидкости. Для этого необходимо только, чтобы спектр перемещения $w^0(t)$

$$G(\Omega) = \int_0^\infty w^0(t) e^{-i\Omega t} dt$$

концентрировался на значениях Ω , удовлетворяющих неравенству (2.23). К категории «медленных» изгибных движений, при которых может быть использована модель «несжимаемая жидкость», относятся, в частности, колебательные движения, связанные с потерей устойчивости оболочки в воде при их динамическом нагружении (см. гл. V).

§ 3. К расчету присоединенной массы жидкости при колебании системы безграничной пружинности

Сложность выражений (2.11) делает их неудобными для практического использования в расчетах. Кроме того, они малоприменимы для общего анализа степени влияния параметров возмущения и геометрических характеристик слоя жидкости

$(r_1, \Delta r)$ на величины присоединенных масс. Имея в виду последние приложения, приведем очень простые аппроксимации для присоединенной массы $m_{\text{пр}}$. Первая возможность упрощения выражения для функции $\Phi_{\text{пр}}^0$, выходящей в $m_{\text{пр}}$, получается в случае, когда радиальный размер цилиндрического слоя жидкости $|\Delta r|$ мал по сравнению с радиусом оболочки r_1

$$|\Delta r|/r_1 \ll 1, \quad (3.1)$$

Оценим, что динамическая реакция толстого (в смысле неравенства (3.1)) слоя на отклонения оболочки мало отличается от реакции плоского слоя жидкости. Но в последнем случае функция $R(r)$, входящая в выражение (2.5) для Φ , должна удовлетворять уравнению

$$R'' - \left(\omega^2 r^2 + \frac{\pi^2}{r^2} \right) R = 0, \quad (3.2)$$

При использовании решения уравнения (3.2) формула для $\Phi_{\text{пр}}^0$ получается в виде

$$\Phi_{\text{пр}}^0 = \frac{1}{\sqrt{-\pi^2/r_1^2 + \omega^2 r^2} \operatorname{th}(\Delta r \sqrt{-\pi^2/r_1^2 + \omega^2 r^2})} \cdot \frac{\Omega^2 < \Omega_0^2 \left(\omega^2 + \frac{\pi^2}{r_1^2} \right);}{\sqrt{-\pi^2/r_1^2 + \omega^2 r^2} \operatorname{th}(\Delta r \sqrt{-\pi^2/r_1^2 + \omega^2 r^2})} \cdot \frac{\Omega^2 > \Omega_0^2 \left(\omega^2 + \frac{\pi^2}{r_1^2} \right);}{\quad} \quad (3.3)$$

В случае использования модели несжимаемой жидкости

$$\Phi_{\text{пр}}^0 = - \frac{1}{\sqrt{\pi^2/r_1^2 + \omega^2} \operatorname{th}(\Delta r \sqrt{\pi^2/r_1^2 + \omega^2})}. \quad (3.4)$$

Выразим в (3.4) подкоренное выражение через длины полуосей колебаний в окружном и осевом направлениях $\lambda_\theta = \pi r_1/\omega$ и $\lambda_r = \pi/\omega$. В результате этой замены получим следующую формулу для присоединенной массы несжимаемой жидкости:

$$m_{\text{пр}} = \frac{\rho}{\pi \sqrt{1/\lambda_\theta^2 + 1/\lambda_r^2} \operatorname{th}(\pi |\Delta r| \sqrt{1/\lambda_\theta^2 + 1/\lambda_r^2})}. \quad (3.5)$$

Рассмотрим несколько частных случаев:

а) пусть $\lambda_\theta^2 \gg \lambda_r^2$. Пренебрегая отношением $\lambda_r^2/\lambda_\theta^2$ по сравнению с единицей, найдем

$$m_{\text{пр}} = \frac{\rho \lambda_\theta}{\pi \operatorname{th}(\pi |\Delta r|/\lambda_\theta)}. \quad (3.6)$$

Как видно, при выполнении условия $\lambda_\theta^2/\lambda_r^2 \ll 1$ податливость жидкости по отношению к перемещению оболочки определяется прежде всего ее перетеканием в продольном направлении ($m_{\text{пр}}$ не зависит от λ_θ);

б) положим, что $\lambda_\theta^2 \ll \lambda_r^2$. Такое соотношение, например, имеет место при изгибном колебании оболочки, связанном с потерей ее устойчивости от одностороннего сжатия. Пренебрежимо малой по сравнению с $\lambda_\theta^2/\lambda_r^2$ дает

$$m_{\text{пр}} = \frac{\rho \lambda_\theta}{\pi \operatorname{th}(\pi |\Delta r|/\lambda_\theta)} \quad (3.7)$$

или, что то же самое,

$$m_{\text{пр}} = \frac{\rho r_1 \operatorname{sign} \Delta r}{\pi \operatorname{th}(\pi r_1/\lambda_r - 1)}. \quad (3.8)$$

В рассматриваемом случае податливость жидкости по отношению к перемещению оболочки определяется прежде всего ее перетеканием в кольцевом направлении ($m_{\text{пр}}$ не зависит от λ_r). Таким образом, если имеет место соотношение $\lambda_\theta^2 \ll \lambda_r^2$, то при расчете реакции жидкости на перемещение оболочки можно не учитывать растекание жидкости в продольном направлении. Это аналогично гипотезе плоских сечений, широко используемой при расчете нормальной гидродинамической нагрузки, действующей на тела большого удлинения при их движении в несжимаемой среде;

в) разложим (3.5) по степеням параметра $\eta = \Delta r^2 \pi^2 (1/\lambda_\theta^2 + 1/\lambda_r^2)$. Получим

$$m_{\text{пр}} = \frac{\rho}{\pi^2 |\Delta r| (1/\lambda_\theta^2 + 1/\lambda_r^2)} \left[1 + \frac{1}{3} \eta - 0(\eta^2) \right], \quad (3.9)$$

где через $0(\eta^2)$ обозначена функция, стремящаяся к нулю, как η^2 при $\eta \rightarrow 0$.

Пусть $\eta \ll 1$. Пренебрегая в (3.9) величиной η по сравнению с единицей найдем

$$m_{\text{пр}} = \frac{\rho}{\pi^2 |\Delta r| (1/\lambda_\theta^2 + 1/\lambda_r^2)}. \quad (3.10)$$

Легко видеть, что при выполнении условия $\eta \ll 1$ имеет место соотношение

$$\frac{1}{m_{\text{пр}}} = \frac{1}{m_{\text{пр}}^0} + \frac{1}{m_{\text{пр}}^1}, \quad (3.11)$$

где $m_{\text{пр}}^0 = \rho \lambda_\theta^2/\pi^2 |\Delta r|$ — присоединенная масса без учета перетекания жидкости в кольцевом направлении; $m_{\text{пр}}^1 = \rho \lambda_r^2/\pi^2 |\Delta r|$ — присоединенная масса без учета перетекания жидкости в осевом

направлении. При построении следующей аппроксимации выражения для присоединенной массы следует с самого начала предположить об отсутствии перетекания жидкости и направлении оси x в неискривляемой жидкости, не накладывая никаких ограничений на величину $|\Delta r|$.

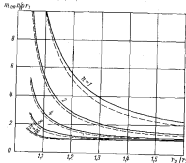


Рис. 6. К расчету m_0 при $k_2 \neq 0$.

— точное решение; --- приближенное решение.

Такой подход сводит пространственную задачу расчета потенциала скоростей к плоской (в плоскости r, θ). Вместо уравнения (2.7) получим

$$r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0.$$

Выражение для Φ_{0n}^0 приобретает вид

$$\Phi_{0n}^0 = -\frac{r_1 (r_2/r_1)^{2n+1}}{n[(r_2/r_1)^{2n}-1]}. \quad (3.12)$$

В итоге получаем следующую точную формулу для присоединенной массы неискривляемой жидкости при плоском движении системы:

$$m_0 = \frac{\rho_0 \pi r_1 \Delta r [(r_2/r_1)^{2n+1} + 1]}{n[(r_2/r_1)^{2n}-1]}. \quad (3.13)$$

Вниманию привлекает тот факт, что при плоских колебаниях как оболочки, заполненной жидкостью, так и оболочки в безгра-

ничной неискривляемой среде формула (3.13) дает одно и то же выражение для присоединенной массы

$$m_0 = \rho_0 \pi n. \quad (3.14)$$

$$(r_2 = 0, \infty)$$

На рис. 6 сравниваются результаты двух расчетов присоединенной массы неискривляемой жидкости m_0 при $r_2 > r_1$: по формуле (3.13) и по приближенной формуле (3.8).

На ось ординат отложены безразмерные величины $m_0/(\rho_0 \pi r_1)$, характеризующие степень увеличения присоединенной массы за счет ограничения толщины слоя жидкости твердой стенкой по сравнению с присоединенной массой в безграничной среде. Как видно, погрешность приближенного решения уменьшается с ростом числа n .



Рис. 7. Область колебаний r_2/r_1 ; $n \neq 0$ (затененой), в пределах которой оболочка существует жесткой стенкой.

Аналогичный результат получается и в системах с $r_2 < r_1$. Влияние жесткой стенки на величину m_0 падает с ростом числа волн n и увеличением отношения r_2/r_1 . Выражение (3.13) позволяет дать ответ на вопрос, при каких значениях отношения r_2/r_1 жесткие стенки практически не оказывают влияния на величину присоединенной массы неискривляемой жидкости m_0 . Допустим обычную для инженерных расчетов погрешность в 5%, будем считать, что жесткие стенки не оказывают влияния на присоединенную массу в том случае, если величина $m_0/(\rho_0 \pi r_1)$ не превосходит значения 1,05. Область значений комбинаций r_2/r_1 и n ($n \neq 0$), в пределах которой оболочка, погруженная в неискривляемую жидкость, «чувствует» близость жесткой стенки, показана на рис. 7.

§ 4. Осесимметричные колебания бесконечно длинной системы

Дифференциальные уравнения свободных осесимметричных колебаний оболочки с учетом ее динамического взаимодействия с жидкостью в цилиндрическом слое имеют вид

$$L_{11}\ddot{x} + L_{12}\ddot{y} = -\pi r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}; \quad L_{22}\ddot{x} + L_{23}\ddot{y} = -(\pi r^2 + \pi m_0) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}. \quad (4.1)$$

Матрица дифференциальных операторов L определяется выражением (1.3). Присоединенная масса $m_{\text{пр}}$, соответствующая полюсовому числу $\omega = \lambda/\lambda_0$,

$$m_{\text{пр}} = -\rho \Phi_{\omega\omega}^* \operatorname{sign} \Delta \epsilon, \quad (4.2)$$

где

$$\Phi_{\omega\omega}^* = \begin{cases} \frac{1}{\omega\beta} \frac{K_1(\omega\alpha\beta) J_2(\omega\alpha\beta) + K_2(\omega\alpha\beta) J_1(\omega\alpha\beta)}{K_1(\omega\alpha\beta) J_1(\omega\alpha\beta) - K_2(\omega\alpha\beta) J_2(\omega\alpha\beta)} & \Omega < c_{\text{пр}}, \\ \frac{i}{\omega\beta} \frac{J_1(\omega\alpha\beta) Y_2(\omega\alpha\beta) - Y_1(\omega\alpha\beta) J_2(\omega\alpha\beta)}{J_1(\omega\alpha\beta) Y_1(\omega\alpha\beta) - Y_1(\omega\alpha\beta) J_2(\omega\alpha\beta)} & \Omega > c_{\text{пр}}, \end{cases} \quad (4.3)$$

С целью упрощения последующих выкладок введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{\omega}{c}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{l}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{l}, \quad \bar{r} = \frac{r}{l}, \quad \bar{l} = \frac{cl}{l}, \quad \bar{\omega} = \omega l, \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{c}, \\ \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{cl}, \quad \bar{m}_{\text{пр}} = \frac{m_{\text{пр}}}{\rho l}, \quad \bar{m}^2 = \frac{m^2}{\rho l}, \quad \bar{c}_s = \frac{c_s}{c}, \quad \bar{c}_2 = \frac{c_2}{c}, \\ \bar{c}_3 &= \frac{c_3}{c}; \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\Gamma_1 l^2}{A_0 l^2}, \quad k_2 = \frac{c_2 (2\Gamma_2 - N_1 r_1)}{A_0 l^2}, \quad k_3 = \frac{\Gamma_1 l}{V_1 r_1}, \quad k_4 = \frac{c_2 \Gamma_3}{l A_0}, \\ k_5 &= \frac{\Gamma_4}{A_0}, \end{aligned}$$

где l — характерный линейный размер системы;

c — характерная скорость распространения возмущений;

$$A_0 = \Gamma_4 - \frac{\Gamma_3^2}{\Gamma_1}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{A_0}{\rho_0^2}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{V_1}{c^2}}. \quad (4.5)$$

В частном случае неподкрепленной электроной оболочки

$$\begin{aligned} \bar{m}^2 &= \frac{\rho^2 k}{\rho l}, \quad k_2 = -\frac{N_1 l^2}{\Gamma_2 (1 - \mu^2) \rho}, \quad k_3 = -\frac{N_1 r_1^2}{2 \epsilon b}, \quad k_4 = \frac{\mu}{c_1}, \\ k_5 &= \frac{r_1 \mu}{1 - \mu^2}, \quad k_6 = \frac{1}{1 - \mu^2}, \quad A_0 = \epsilon b, \end{aligned}$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\epsilon b}{\rho_0^2}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\rho^2 (1 - \mu^2)}}. \quad (4.6)$$

Здесь ρ^2 — массовая плотность материала оболочки. Величина c_1 является скоростью распространения продольных волн в оболочке. Физический смысл величинам c_2 выясняется ниже.

Изучая приведенный перечень безразмерных величин, нетрудно заметить, что переход от размерных величин к безразмерным осуществляется по единому правилу, применяющемуся в теории подобия и размерностей. Это правило заключается в следующем. Из физических величин, определяющих процесс, выделяется несколько величин с независимой размерностью (размерность величины называется независимой, если она не может быть получена в результате комбинаций размерностей других величин). Число величин с независимой размерностью равняется числу используемых основных единиц измерений. В нашем случае в число величин с независимой размерностью включены ρ , l и c . Переход от размерных физических величин $\bar{z}_i$ к безразмерным $\bar{z}_i$ производится в соответствии с правилом

$$\bar{z}_i = \frac{z_i}{\rho^{s_1} l^{s_2} c^{s_3}}. \quad (4)$$

Показатели степени s_1 , s_2 , s_3 подбираются так, чтобы размерность комплекса $\rho^{s_1} l^{s_2} c^{s_3} \bar{z}_i$ совпадала с размерностью величины $\bar{z}_i$. С целью упрощения записи ввиду в последующем при переходе к безразмерным параметрам и уравнениям мы не будем делать различия $\bar{z}$ и z написанием размерных и безразмерных величин $\bar{z}$ и z и $\bar{z}$ и z , $\bar{r}$ и r , $\bar{\omega}$ и ω , $\bar{c}$ и c , $\bar{c}_1$ и c_1 , $\bar{c}_2$ и c_2 , $\bar{c}_3$ и c_3 и т. д., опуская черточку над буквой. Чтобы не было недоразумений, следует иметь в виду, что переход к безразмерной форме записи всегда можно трактовать просто как переход к такой системе единиц измерения (относительной системе), в которой определяющие величины с независимой размерностью (в нашем случае параметры ρ , l и c) принимаются в качестве основных единиц измерения ($\rho = 1$, $l = 1$, $c = 1$), а численные значения всех остальных величин выражаются в частях от собственных комплексов, составленных из определяющих величин (в соответствии с формулой (4)). Так, например, c_2 в относительной системе — скорость звука в среде, выраженная в частях характерной скорости c ; μ — радиальное смещение оболочки, выраженное в частях b ; ρ — давление, выраженное в частях комплекса ρc^2 , и т. д. Для выяснения численных значений величин в размерной системе следует вновь обратиться к формуле (4).

Пологая, что основная поверхность в оболочке выбрана так, что $\Gamma_3 = 0$, приведем уравнения (4.1) к безразмерному виду

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} + k_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} &= -\frac{1}{\bar{c}_1^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}}; \\ -k_4 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + k_5 \bar{u} + k_1 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} - k_3 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} &= -\frac{1}{\bar{c}_1^2} (\bar{m}^2 + \bar{m}_{\text{пр}}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Представим функцию $m_{\text{эк}}$ в виде

$$m_{\text{эк}} = \frac{1}{\omega\beta(\omega\beta)}. \quad (4.8)$$

Тогда

$$f(\omega\beta) = \begin{cases} -\text{sign } \Delta r \frac{K_1(\omega\beta\beta) I_1(\omega\beta\beta) - K_2(\omega\beta\beta) I_2(\omega\beta\beta)}{K_1(\omega\beta\beta) I_2(\omega\beta\beta) + K_2(\omega\beta\beta) I_1(\omega\beta\beta)} & \Omega < c_0\omega; \\ -\text{sign } \Delta r \frac{J_1(\omega\beta\beta) Y_1(\omega\beta\beta) - J_2(\omega\beta\beta) Y_2(\omega\beta\beta)}{J_1(\omega\beta\beta) Y_2(\omega\beta\beta) + J_2(\omega\beta\beta) Y_1(\omega\beta\beta)} & \Omega > c_0\omega. \end{cases} \quad (4.9)$$

$$f(\omega\beta) = \begin{cases} -\text{sign } \Delta r \frac{K_1(\omega\beta\beta) I_1(\omega\beta\beta) - K_2(\omega\beta\beta) I_2(\omega\beta\beta)}{K_1(\omega\beta\beta) I_2(\omega\beta\beta) + K_2(\omega\beta\beta) I_1(\omega\beta\beta)} & \Omega < c_0\omega; \\ -\text{sign } \Delta r \frac{J_1(\omega\beta\beta) Y_1(\omega\beta\beta) - J_2(\omega\beta\beta) Y_2(\omega\beta\beta)}{J_1(\omega\beta\beta) Y_2(\omega\beta\beta) + J_2(\omega\beta\beta) Y_1(\omega\beta\beta)} & \Omega > c_0\omega. \end{cases} \quad (4.10)$$

В частных случаях

при $r_2 \rightarrow 0$

$$f(\omega\beta) = \begin{cases} \frac{I_1(\omega\beta\beta)}{I_2(\omega\beta\beta)} & \Omega < c_0\omega; \\ \frac{Y_1(\omega\beta\beta)}{Y_2(\omega\beta\beta)} & \Omega > c_0\omega. \end{cases} \quad (4.11)$$

при $r_2 \rightarrow \infty$

$$\lim_{r_2 \rightarrow \infty} f(\omega\beta) = \frac{K_2(\omega\beta\beta)}{K_1(\omega\beta\beta)}. \quad (4.12)$$

Помимо точных формул (4.9)–(4.12) полезно иметь в виду ряд простых эмпирических выражений (4.9). Первая из них связана с предположением о малости числа ω ($\omega \ll 1$). При $\omega \rightarrow 0$ имеет место асимптотическое равенство

$$f(\omega\beta) \sim \omega\beta \frac{|\Delta r|}{l} \left(1 + \frac{\Delta r}{2r_1} \right). \quad (4.13)$$

Формуле (4.13) можно придать очень простой вид, если принять в качестве характерного линейного размера системы l величину

$$H = |\Delta r| \left(1 + \frac{\Delta r}{2r_1} \right) = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_1}. \quad (4.14)$$

Величина H , определенная соотношением (4.14), измеряется в последующем приведенной толщине слоя жидкости. Подставляя (4.14) в (4.13), найдем

$$f(\omega\beta) \sim \omega\beta \quad (\omega \rightarrow 0). \quad (4.15)$$

Далее, заменив реакцию цилиндрического слоя жидкости реакцией плоского слоя (§ 3) и учитывая полученное при этом выражение для $f(\omega\beta)$ так, чтобы оно имело одинаковую асимптотику (при $\omega \rightarrow 0$) с точной формулой (4.9), будем иметь

$$f(\omega\beta) \sim \left(1 + \frac{\Delta r}{2r_1} \right) \text{th} \frac{\omega\beta}{\Delta r}. \quad (4.16)$$

Результаты расчета по формулам (4.9) и (4.16) практически совпадают в широком диапазоне значений $\omega\beta$ и отношений $\Delta r/r_1$: при $\Delta r/r_1 = 0,5$ с точностью в 5% — до значений $\omega\beta \sim 1,5$, при $\Delta r/r_1 = 0,2$ — до значений $\omega\beta \sim 2,0$.

Системе (4.7) удовлетворяют решения для α и ω в виде не только стоячих, но и прогрессивных синусоидальных волн

$$\alpha = \alpha^0 \cos(\omega t - \Omega t);$$

$$\omega = \omega^0 \sin(\omega t - \Omega t). \quad (4.17)$$

Фазовая скорость (безразмерная) определяется формулой

$$c_0 = \frac{\Omega}{\omega}. \quad (4.18)$$

Подстановка (4.17) в (4.7) дает

$$(\omega^2 - \Omega^2/c_0^2)\alpha^2 + k_0\omega\omega^2 = 0;$$

$$k_0\omega\omega^2 + [k_1 + k_2\omega^4 + k_3\omega^6 - (\alpha^2 + m_{\text{эк}})\Omega^2/c_0^2]\omega^2 = 0. \quad (4.19)$$

Характеристическое уравнение системы (4.19) при учете выражений (4.4) для параметров k_2 , k_3 и k_0 легко приводится к виду

$$\frac{\omega^2 + \alpha_{\text{эк}}}{1 + k_1\omega^4 + k_2\omega^6} - \frac{c_1^2}{\Omega^2} = \frac{(k_2 - 1)c_1^2}{(\Omega^2 - \omega^2/c_0^2)(1 + k_1\omega^4 + k_2\omega^6)}. \quad (4.20)$$

Иначе уравнение (4.20) можно записать в форме соотношений между c_0 и ω

$$\frac{\omega^2(\alpha^2 + m_{\text{эк}})}{1 + k_1\omega^4 + k_2\omega^6} = \frac{c_1^2}{c_0^2} + \frac{(k_2 - 1)c_1^2}{(c_0^2 - c_1^2)(1 + k_1\omega^4 + k_2\omega^6)}. \quad (4.21)$$

При использовании в последующем спектра частот системы оболочка — жидкость, уравнения (4.20) отпадают необходимость в определении частот собственных колебаний оболочки в пустоте. В отличие от случая колебаний оболочки в безграничной акустической среде для вакуума, уравнения (4.20), (4.21) имеют бесчисленное множество действительных корней, представление о которых можно получить при графическом рассмотрении уравнений (4.20), (4.21).

На рис. 8 сплошными линиями изображен типичный график значений правой части уравнения (4.21) как функции c_0 . Левая часть уравнения показана пунктирными линиями: прямая — при колебании в пустоте, кривой с разрывами — при колебании в акустической среде. Точка пересечения соответствует корням характеристического уравнения: I и II — в первом случае; I , 2 , 3 , 4 , 5 — во втором. Построение сделано при $\varepsilon \sim \varepsilon_0$ для одного

значения ω . На рисунке видны вертикальные асимптоты, соответствующие полюсам функции Π_{ω} (тонкие линии). По мере роста числа n асимптоты сближаются, и число корней характеристического уравнения в фиксированном интервале значений c_0 растет. Однако если выполняется обычное условие $c_2 > c_0$, то при любом $\omega > 0$ существует только один тип колебаний, в котором фазовые скорости c_0 меньше скорости звука в жидкости c_2 , а круговые частоты удовлетворяют неравенству $\Omega < c_0\omega$. Правая часть уравнения (4.21) при $c_0 = c_2$ терпит разрыв, в окрестности которого группируются колебания с преимущественно продоль-

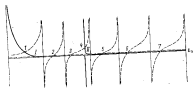


Рис. 8. К решению частотного уравнения.

ными смещенными оболочками. В связи с этим в акустической среде фазовые скорости продольных колебаний практически не зависят от числа n и имеют значение $c_0 \approx c_2$. Из построения видно, что каждому значению ω соответствуют лишь простые корни характеристического уравнения.

В исследуемой системе отсутствуют свободные осесимметричные волны, распространяющиеся вдоль оболочки с фазовой скоростью $c_0 = c_2$. Это следует из того, что при любых ω функция Π_{ω} имеет в точке $c_0 = c_2$ полюс. Случай $c_0 < c_2$ ($\Omega < c_0\omega$) соответствует колебаниям с преимущественно радиальными смещениями оболочек. В исследуемых системах этот тип колебаний представляет наибольший практический интерес с точки зрения прочности оболочек. В связи с этим он именуется в последующем основным. В пределах основного типа колебаний радиальность обусловлена прежде всего ее перпендикулярностью к продольному направлению как в жидкости среды. Если $c_0^2 < c_2^2$, следовательно, $\beta \approx 1$, то, несомненно, среды при анализе колебаний как мы уже знаем, сжимаемостью среды при анализе колебаний вообще можно пренебречь. С другой стороны, при $c_0 > c_2$ давление жидкости связано в основном с ее сжимаемостью. В качестве примера на рис. 9 приводятся графики зависимости отношения

$\Omega/c_0\omega = c_2/c_0$ от числа n для стальной трубы, заполненной водой ($\nu_1 = 0$, $\nu_2/h = 200$, $\lambda_1 = 3,67 \cdot 10^{-3}$, $\mu^0 = 7,85 \cdot 10^{-11}$). Для сравнения на том же рисунке приведены кривые $\Omega/c_0\omega$, рассчитанные для случая колебания оболочек в пустоте (пузырчатые кривые).

Рассмотрим вопрос о степени влияния продольных сил инерции оболочек на фазовые скорости и частоты колебаний основного типа ($c_0 < c_2$). С этой целью сравним точное решение с приближенным, не учитывая продольные силы инерции. Для того чтобы получить соотношения между Ω и ω и между c_0 и ω без учета продольных сил инерции, положим в уравнениях (4.20) и (4.21) $c_2 = \infty$. Эта подстановка дает

$$\frac{\omega^2 \cdot \Pi_{\omega}}{\Gamma + \lambda_0 \omega^2 + k_0 \omega^2} = \frac{c_2^2}{\Omega^2} \quad (4.22)$$

$$\frac{\omega^2 (\mu^0 + \Pi_{\omega})}{\Gamma + \lambda_0 \omega^2 + k_0 \omega^2} = \frac{c_2^2}{c_0^2} \quad (4.23)$$

Пусть

$$c_{00} = c_{00}(\omega) \quad (a)$$

есть, решение уравнения (4.23), соответствующее основному типу колебаний. Пусть, кроме того,

$$c_{\omega}(\omega) = c_{00}(\omega) + \Delta c_{\omega}(\omega) \quad (b)$$

является точным решением уравнения (4.21) (Δc_{ω} — поправка к c_{00} на учет продольных сил инерции оболочки). Для оценки приближенного значения (a) разложим обе части уравнения (4.21) в окрестности c_{00} в ряд по степеням поправки Δc_{ω} . Затем, оставив лишь линейные члены в разложении, т. е. обрывая ряд на членах, содержащих первую степень поправки Δc_{ω} , найдем

$$\frac{\Delta c_{\omega}}{c_{00}} \approx \frac{(k_0 - 1)(c_2^2 - c_0^2)}{-c_{00}^2 \left[\frac{d\Pi_{\omega}}{dc_0} \right]_{c_0=c_{00}}} = \frac{2(1 - k_0 \mu^0 + \lambda_0 \mu^0) - 2c_{00}^2 (k_0 - 1)}{c_{00}^2 - c_2^2} \quad (b)$$

Несложно проверить, что в общем виде весьма сложно, так как величина Π_{ω} является трансцендентной функцией параметра c_{00} . При получении оценки отношения $\Delta c_{\omega}/c_{00}$ ограничимся случаем больших длин полутолщины λ_0 (малых ω). При этом имеется в виду следующее обстоятельство. Известно, что в вакууме продольные силы инерции практически не оказывают влияния на поперечные осесимметричные колебания круговой цилиндрической изотропной оболочки только лишь при $\lambda_0 < \nu_2$. С увели-

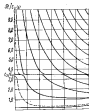


Рис. 9. Зависимость $\Omega/c_0\omega$ от n для стальной оболочки с водой.

чением длины λ_c влияние продольных сил инерции на частоты колебаний и фазовые скорости усиливается и при больших значениях отношения λ_0/r_1 становится весьма существенным. Контакт оболочки с жидкостью в пределах основного типа ослабляет влияние продольных сил инерции на величины Ω и c_{ϕ} . Поэтому практически важным является вопрос о степени влияния этих сил на колебания оболочки в жидкости лишь при малых ω . Подстановка (4.15) в $\beta = \sqrt{1 - c_{\phi}^2/c_1^2}$ в (4.8) дает

$$m_{\omega} \sim \frac{1}{\omega^2 (1 - c_{\phi}^2/c_1^2)} \quad (\omega \rightarrow 0). \quad (4.24)$$

Имея в виду асимптотическое равенство (4.24), из (4.23) получим

$$c_{\omega} \sim c_{\phi} c_1 \sqrt{c_0^2 + c_1^2}. \quad (4.25)$$

Выражение (4.25) для фазовой скорости c_{ϕ} при малых числах ω в точности совпадает с хорошо известным выражением для скорости распространения волн давления в трубе с жидкостью и рамках прикладной теории гидраэластического удара Н. Е. Жуковского.

Для модели «несжимаемая жидкость»

$$c_{\omega} \sim c_1 = \sqrt{\frac{\lambda_0 H}{\rho r_1^2}}. \quad (4.26)$$

Отсюда видно, что величина $c_1 = \sqrt{\lambda_0 H / \rho r_1^2}$ является фазовой скоростью распространения возмущений с $\omega \ll 1$, соответствующих основному типу колебаний при условии, что $c_{\phi} \rightarrow \infty$. В последующем величина

$$c = c_{\phi} c_1 \sqrt{c_0^2 + c_1^2} \quad (4.27)$$

принимается в качестве характерной скорости в исследуемой системе. Выбор характерной скорости c в соответствии с (4.27) и характерного размера l в соответствии с (4.14) упрощает многие выкладки, связанные с анализом свободных и, особенно, вынужденных осесимметричных колебаний. Учитывая (4.27), получим из (4.25)

$$c_{\omega} \sim 1 \quad (\omega \rightarrow 0). \quad (4.28)$$

Подстановка (4.24) и (4.28) в (4) при $\omega \ll 1$ после отбрасывания малых величин дает

$$\frac{\Delta c_{\omega}}{c_{\omega}} \approx \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} \frac{c_1^2}{c_0^2 + c_1^2} \frac{1}{1 - c_1^2/c_0^2}. \quad (4.29)$$

Конечно, то же выражение получится и для относительной поправки к частоте $\Delta \Omega / \Omega$. Анализ оценки (4.29) показывает, что учет продольных сил инерции оболочки при ее колебании в плот-

ной жидкости, в отличие от случая колебаний оболочки в вакууме, не приводит к уточнению характеристик колебания основного типа, рассчитанных в рамках прикладной моментной теории оболочки. Это позволяет во всех случаях при анализе спектра колебаний основного типа использовать уравнение (4.22) вместо точного. В дальнейшем рассматриваются осесимметричные колебания лишь основного типа.

§ 5. Длинные волны

Запишем уравнения (4.22) иначе

$$\Omega^2 = \frac{c_1^2 (1 + k_1 \omega^4 + k_2 \omega^6)}{(\omega^2 + c_{\omega}^2)}. \quad (5.1)$$

Если $\omega < 1$, то из (5.1) легко получить выражение для квадрата частоты Ω^2 в виде разложения его по степеням малого параметра ω^2

$$\Omega^2 = a_0 \omega^2 + a_1 \omega^4 + a_2 \omega^6 + \dots \quad (5.2)$$

Для определения коэффициентов a_i следует подставить (5.2) в (5.1), разложить правую часть уравнения (5.1) в ряд по степеням ω^2 и, наконец, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ω в обеих частях уравнения. Если при вычислениях λ_{ω} использовать аппроксимацию (4.16), то в результате только что указанных вычислений получим

$$\Omega^2 = \omega^2 - \left[\frac{4}{3(r_0/r_1 + 1)} + \pi^2 - c_1^2 k_2 \right] \frac{\omega^4}{c_1^2} + O(\omega^6), \quad (5.3)$$

где через $O(\omega^6)$ обозначена функция, стремящаяся к нулю как ω^6 при $\omega \rightarrow 0$.

Возводя разложение (5.3) в степень $1/2$, найдем безразмерную частоту колебаний оболочки, сопоставляющейся с цилиндрическим слоем несжимаемой жидкости,

$$\Omega = \omega - \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3(r_0/r_1 + 1)} + \pi^2 - c_1^2 k_2 \right] \frac{\omega^3}{c_1^2} + O(\omega^5). \quad (5.4)$$

Разложение Ω в ряд по степеням ω для случая колебания трубы, полностью заполненной жидкостью, имеет вид

$$\Omega = \omega - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + \pi^2 - c_1^2 k_2 \right] \frac{\omega^3}{c_1^2} + O(\omega^5). \quad (5.5)$$

Из разложений (5.4) и (5.5) следует, что в первом приближении (т. е. с точностью до члена первого порядка малости) частоты собственных колебаний не зависят от инерционности оболочки в радиальном направлении (от π^2), ее изгибной жесткости (k_2), осевой статической силы и асимметрии и размещения материала

по толщине оболочки (k_2). Параметры m^2 и k_2 входят в коэффициент при ω^2 , а параметр k_1 , характеризующий изгибную жесткость оболочки, впервые входит лишь в коэффициент при ω^4 .

Этот результат позволяет выделять особый класс волн — длинные волны — и рассматривать наряду с общей теорией осесимметричных волн в системе кругового цилиндрической оболочки — акустическая среда низкого приближение этой теории — теорию длинных волн. Данными назовем волны, для которых можно пренебречь величиной ω^2 по сравнению с единицей. Величины коэффициентов, стоящих перед слагаемыми в разложениях (5.4) и (5.5), имеют порядок единицы. Поэтому в бесконечной системе параметр частоты Ω для длинных волн определяется равенством

$$\Omega = \omega,$$

а их скорости распространения (фазовые скорости)

$$c_0 = c_0^0 / \sqrt{\varepsilon_0^2 + 1}$$

не зависят от k_2 . Характеристики длинных вол (Ω , c_0) не зависят от дисперсионных свойств оболочки, ее изгибной жесткости и величины статических нагрузок.

Мы изучали упрощенный динамический модель оболочки, к которому приводит теория длинных волн. Теперь обратимся к гидродинамической задаче и рассмотрим, как отражается условие

$$\omega^2 \ll 1, \quad (5.6)$$

при котором волны могут считаться длинными, на движениях жидкости. Составим выражение для потенциала скорости жидкости, соответствующее переменной оболочке по форме (4.17),

$$\varphi = \omega^2 \Omega \Phi_{00} \cos(\omega x - \Omega t), \quad (5.7)$$

тогда

$$\Phi_{00} = \frac{1}{\omega^2} \frac{K_1(\omega r_0) I_2(\omega r) + K_2(\omega r) I_1(\omega r_0)}{K_1(\omega r_0) I_1(\omega r) - K_2(\omega r) I_2(\omega r_0)}. \quad (5.8)$$

Частные случаи

1. Труба, наполненная жидкостью ($\nu_2 = 0$, характерный линейный размер $H = r_0/2$ и, следовательно, в принятой нами относительной системе единиц измерения $r_1 = 2$),

$$\Phi_{00} = \frac{1}{\omega^2} \frac{I_2(\omega r)}{I_1(2\omega)}. \quad (5.9)$$

2. Цилиндрический слой жидкости заменен плоским с учетом поправки, использованной в (4.16),

$$\Phi_{00} = -\frac{2}{\omega^2} \frac{r_1}{(r_1 + r_0)} \frac{r_0 \omega^2 (r_1 - r_0)}{2h(\omega r_0)(r_1 + r_0)} \operatorname{sign} \Delta r. \quad (5.10)$$

Используя выражение (5.7), найдем:

— осевая составляющая скорости жидкости

$$v_z = -\omega^2 \Omega \Phi_{00} \sin(\omega x - \Omega t); \quad (5.11)$$

— радиальная составляющая скорости жидкости

$$v_r = \omega^2 \Omega \frac{\partial \Phi_{00}}{\partial r} \cos(\omega x - \Omega t); \quad (5.12)$$

— давление в жидкости, вызванное колебанием оболочки,

$$p^* = -\omega^4 \Omega^2 \Phi_{00} \sin(\omega x - \Omega t). \quad (5.13)$$

Теперь воспользуемся разложением функций Ω , Ω^2 и $\omega^2 \Omega \Phi_{00}$ в ряды по степеням ω . Разложения в ряды Ω и Ω^2 даны формулами (5.3)–(5.5).

Разложение $\omega^2 \Omega \Phi_{00}$ имеет вид:

для трубы, наполненной жидкостью,

$$\omega^2 \Omega \Phi_{00} = 1 + \left(\frac{r_1^2}{4} - \frac{1}{2} \right) \frac{\omega^2}{c_1^2} + O(\omega^4); \quad (5.14)$$

для случая, когда цилиндрический слой заменен плоским с учетом поправки, использованной в формуле (4.16),

$$\omega^2 \Omega \Phi_{00} = - \left\{ 1 + \left[\frac{(r_1 - r_0)^2}{2} - \frac{r_1^2}{2(r_1 + r_0)^2} \right] \frac{\omega^2}{c_1^2} + O(\omega^4) \right\} \operatorname{sign} \Delta r. \quad (5.15)$$

Пренебрегая всюду в рядах членами, содержащими ω^2 , по сравнению с единицей, получим из (5.11)–(5.13) следующие выражения:

$$v_z = -\frac{1}{1 - 1/c_1^2} \omega^2 \sin \omega(x - t) \operatorname{sign} \Delta r;$$

$$v_r = 0; \quad (5.16)$$

$$p^* = \frac{1}{1 - 1/c_1^2} \omega^4 \sin \omega(x - t) \operatorname{sign} \Delta r.$$

Отсюда следует, что в рамках теории длинных волн (при $\omega^2 \ll 1$) радиальная компонента скорости v_r равна нулю, а осевая составляющая v_z и давление p^* не зависят от радиальной координаты r .

Если воспользоваться выражениями (4.17), (4.27) и (4.5), то из (5.16) получим после перехода к размерным величинам

$$\omega = \frac{r^* c_1^2}{A_2}; \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x}.$$

Первая из этих формул выражает обычную связь между статически приложенной осесимметричной нагрузкой и радиальным

перемещением круговой цилиндрической безмоментной оболочки, которая — линейный вариант уравнения движения жидкости в форме Эйлера.

Результаты, полученные в этом параграфе на основании предположения о малости величины ω^2 по сравнению с единицей, сопоставляя с исходными предположениями прикладной теории гидравлического удара. Вместе с этим, изложенный выше подход к выводу соотношений, характеризующих свободные колебания системы оболочка — акустическая среда в пределах теории длинных волн, позволяет ответить на вопрос, когда прикладная теория гидравлического удара дает достаточно точные результаты. Этот подход заставляет от необходимости делать ряд проволочных допущений относительно динамических свойств системы (об однородности потока жидкости, безмоментности и безынерционности оболочки, отсутствия продольных статических сил) при построении приближенных методов расчета колебаний. Единственным условием, достаточным для обоснования соотношений излагаемой здесь теории, является возможность пренебречь величиной

$$\omega^2 = \frac{\rho^2 \Delta r^2 (1 + \Delta r/2r)^2}{12}$$

по сравнению с единицей.

Если в разложении функции $\omega^2 \Phi_{\omega}^2$ (формулы (5.14) и (5.15)) сохранить член с ω^2 , то легко обнаружить, что радиальная компонента скорости u , окажется линейно изменяющейся по толщине. Это означает, что при вычислении частоты по формулам (5.4) и (5.5) с использованием первых двух членов рядов будет учитываться в первом приближении трехмерность движения жидкости. Оправдано с этим учетом в том же приближении инерционность оболочки. Так, например, в формуле (5.4) член

$$\frac{3\omega^2}{2(r_2/r_1 + 1)^2 r_1^2} \quad (a)$$

учитывает влияние трехмерности движения жидкости, а член

$$\frac{\rho^2 \omega^2}{2r_1^2} \quad (b)$$

учитывает влияние инерционности оболочки на частоту Ω .

Обычно коэффициенты при ω^2 в (a) и (b) имеют единичный порядок. В связи с этим вряд ли можно согласиться с тем, кто без предварительного анализа учитывает инерционность оболочки, пренебрегая радиальной составляющей ускорения жидкости (как это сделано, например, в [31]), либо постулат поборот. Еще это сделано, например, в [31]), либо постулат поборот. Еще менее обоснован учет изгибной жесткости (k_2 входит впервые в коэффициент при ω^2) в предположении об однородности течения. Необходимость учета осевой статической силы N_1 (входит в k_2) следует решать каждый раз особо, исходя из величины этой силы.

§ 6. Системы конечного размера

Задача расчета спектра колебаний системы оболочка — жидкость ограниченного размера значительно сложнее задач, рассмотренных в предыдущих параграфах.

Формы колебаний бесконечно длинных оболочек в жидкости легко угадываются — они выражаются синусоидами. Соотношения между амплитудными значениями смещений u^0, v^0, w^0 ($u^0/w^0, v^0/w^0$) в пределах каждого типа колебаний находятся, естественно, на решении всего лишь двух алгебраических уравнений. Частоты колебаний бесконечно длинных оболочек при применении модели несжимаемой жидкости определяются элементарно; в случае необходимости учета сжимаемости среды — путем решения соответствующего трансцендентного уравнения.

При расчете систем конечного размера уже не удается получить столь обобщаемые результаты. Замена точных решений приходится довольствоваться приближенными, основанными, как правило, на применении вариационных методов. Способы вычисления форм и частот колебаний систем конечного размера обычно предполагают использование ЭВМ, так как трудность надежной аппроксимации форм приводит к необходимости учета большого числа членов в соответствующих рядах. Но даже и в случае применения ЭВМ приходится резко ограничивать число координатных функций из-за недостаточного объема оперативной памяти и быстрого действия вычислительных машин.

Серьезные затруднения появляются при построении физически обоснованных механических моделей оболочек с жидкостью. Вопросы о порогностях, связанных с введением тех или иных упрощений в механическую модель, требуют специальных сложных исследований, которые практически отсутствуют в современной литературе, если не считать отдельных сравнительных расчетов. Возникает необходимость согласования моделей жидкости и оболочки. Уточнение, а следовательно, и усиление уравнений теории оболочек, которые должны быть положены в основу исследования, вне зависимости от строгости решения гидродинамической задачи, оправданы столь же мало, как и противоположная постановка вопроса. К сожалению, это не всегда учитывается в работах, посвященных анализу колебаний оболочек с жидкостью.

В какой-то мере для правильной ориентировки в обосновании моделей оболочки с жидкостью могут служить результаты, полученные при исследовании колебаний бесконечно длинных цилиндрических систем.

Так, мы видели, что при колебаниях бесконечных систем существует, как правило, один тип колебания (основной), дающий доминирующий вклад в радиальные смещения оболочки. Типичные силы инерции практически не оказывают влияния на характеристики колебания основного типа. С другой стороны,

сами тангенциальные колебания оболочки с плотной жидкостью, до-индикому, можно рассчитывать в предположении, что контакт с жидкостью полностью устраняет нормальные смещения оболочки.

В пределах основного типа колебаний податливость жидкости по отношению к смещению оболочки обусловлена прежде всего ее перетеканием как несжимаемой среды. Однако в общем случае при рассмотрении колебаний основного типа нельзя полностью исключить влияние сжимаемости плотной жидкости на давление оболочки. В наибольшей степени сжимаемость проявляется при осесимметричных колебаниях системы. Возможность применения модели «несжимаемая жидкость» при исследовании бесконечных ограниченных по радиусу цилиндрических систем должна каждый раз проверяться по условию (2.22). Однако это может быть сделано лишь после расчета параметров свободных колебаний.

Во второй главе будет показано, что в пределах не слишком высоких форм неравенство (2.22) можно заменять более удобной в практическом отношении оценкой

$$\frac{c}{\dot{a}} \ll 1, \quad (a)$$

где c — скорость распространения волн давления и деформации оболочки в рамках прикладной теории гидроудара (скорость гидроудара).

При отсутствии иных возможностей на оценку (a) следует ориентироваться и при обосновании модели жидкости, адекватной в составе осесимметричной системы ограниченного размера. Правда, в последнем случае величину c следует рассматривать как некоторую среднюю скорость гидроудара, так как параметры системы (радиус сечения оболочки, толщина слоя жидкости, толщина оболочки) могут быть переменными.

Сначала рассмотрим осесимметричные колебания круговой цилиндрической оболочки конечной длины, сопрягающейся со слоем жидкости. Колебания оболочки и безграничным слоем жидкости в сосуде с жидкостью получаются отсюда как частный случай.

Впервые этот вопрос исследовался, по-видимому, в [39]. В дальнейшем осесимметричные свободные колебания цилиндрической оболочки с жестким дном, заполненной плотной жидкостью, у нас изучались в работах [80], [76], [13] и др., сферической оболочки — в [2, 5, 52, 61, 62, 63, 80]. В последнее время появились исследования осесимметричных вибраторов оболочки вращения («жидкостях») произвольного контура [1, 36, 77, 78]. Применительно к сосудам с цилиндрической и сферической полостями гидродинамическую задачу удается решить точно. В общем же случае для описания перемещений части жидкости приходится

пользоваться теми или иными аппроксимациями. Во всех работах, посвященных колебаниям оболочек с плотной жидкостью, жидкость считается несжимаемой.

Принимая также гипотезу несжимаемости жидкости, мы, естественно, ограничим анализ спектра частот режимами основного типа колебаний.

Осевые силы инерции оболочки учитывать не будем, пользуясь полученным ранее выводом о практическом отсутствии влияния этих сил на колебание системы в пределах основного типа.

Выпишем дифференциальные уравнения задачи и граничные условия. При учете осевых сил инерции оболочки ($\partial^2 w / \partial t^2 = 0$) уравнение осесимметричных колебаний оболочки, сопрягающейся с жидкостью, принимает вид

$$Lw = -\frac{\rho_0^2}{A_0} \ddot{w} - \rho \frac{r_1^2}{A_0} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_{r=r_1}, \text{sign } \Delta r, \quad (6.1)$$

Здесь точкой обозначает дифференцирование по t ; L — дифференциальный оператор, вид которого зависит от типа оболочки и характера статической нагрузки. При $\Gamma_0 = 0$ (см. § 1) в случае конструктивно ортотропной оболочки оператор

$$L = 1 + \frac{r_1^2}{A_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{r_1^2}{A_0} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_{r_1} - N_0 \frac{\partial}{\partial x},$$

а при изотропной оболочке

$$L = 1 + \frac{r_1^2}{12(1-\mu^2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Потенциал скорости несжимаемой жидкости φ должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (6.2)$$

в граничных условиях, вытекающих из требований непроницаемости оболочки и жесткой цилиндрической стенки (2.2) и (2.3). Для того чтобы сформулировать условия на остальных участках граничной области, заполненной жидкостью, и на концах оболочки, следует рассмотреть более конкретную ситуацию. Положим, например, что жидкость ограничена с одной стороны ($x = 0$) свободной поверхностью, с другой ($x = l$) — плоским неподвижным дном. Концы оболочки шарнирно открыты: нижний — на дном, верхний — на жесткую в своей плоскости диафрагму, не препятствующую продольным смещениям оболочки. Верхний конец оболочки соединяет со свободной поверхностью жидкости (рис. 10, а-д). Такой вариант системы позволяет сравнительно просто осуществить экспериментальную проверку приближенных теор-

таических решений. В последующем будет рассмотрен случай, когда оболочка лишь на части своей длины соприкасается с жидкостью.

Примем для нормального смещения точек на границе полости, заполненной жидкостью, общее обозначение w (как и для радиального смещения оболочки). Пусть S_2 — поверхность дна ($x = l_2$), S_3 — смываемая поверхность жесткой цилиндрической стенки

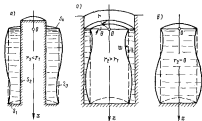


Рис. 10. К расчету колебаний систем оболочка—жидкость конечного размера.

($r = r_0$), S_2 , S_3 — смываемая поверхность оболочки ($r = r_2$) и свободная поверхность жидкости ($x = 0$) при отсутствии колебаний системы.

Уравнение волнового движения свободной поверхности запишем в виде

$$dw - [\psi]_{x=0} = 0. \quad (6.3)$$

На S_2 и S_3 функция ψ должна удовлетворять условиям

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{x=l_2} = 0 \quad \text{на } S_2; \quad (6.4)$$

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \right]_{r=r_2} = -w \quad \text{на } S_3. \quad (6.5)$$

Рассмотрим схему решения задачи расчета формы и частот колебаний, основанную на применении метода Бубнова — Галеркина [39, 40]. Перейдя к безразмерной форме запишем (относительной системе единиц измерения $c = 1$, $H = 1$ и $\rho = 1$, см. § 4), будем

искать решение для w и ψ при свободных колебаниях системы оболочка—жидкость в виде

$$w = qf; \quad (6.6)$$

$$\psi = \varphi\psi, \quad (6.7)$$

где q — функция времени; f и ψ — функции координат.

При переходе к относительной системе единиц измерения характерный размер $l = H$ связывается с геометрией системы формулой (4.14), характерная скорость c принимается равной c_1 (4.26).

Разделение переменных в (6.1) и (6.3) приводит к уравнению

$$\Delta f + \Omega^2 \varphi f_{x=0} = 0 \quad \text{на } S_2; \quad (6.9)$$

$$\ddot{q} + \Omega^2 q = 0. \quad (6.10)$$

Функция ψ должна удовлетворять уравнению

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (6.11)$$

и граничным условиям

$$\partial \psi / \partial x = 0 \quad \text{на } S_2; \quad (6.12)$$

$$\partial \psi / \partial r = 0 \quad \text{на } S_3; \quad (6.13)$$

$$\partial \psi / \partial r = -f \quad \text{на } S_2; \quad (6.14)$$

$$\partial \psi / \partial x = f \quad \text{на } S_3. \quad (6.15)$$

Пользуясь методом разложения, будем искать решение для ψ в виде суммы функций

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3, \quad (6.16)$$

каждая из которых удовлетворяет уравнению (6.11).

Пусть ψ_1 удовлетворяет условиям для ψ на S_2 и S_3 и в среднем на S_1

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right]_{x=0} r dr = 0. \quad (6.17)$$

Выражение (6.17) соответствует отсутствию расхода жидкости через сечение $x = l_1$.

Функцию ψ_2 определим таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial r} = 0 \quad \text{на } S_2, S_3 \text{ и } S_1; \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + f \quad \text{на } S_3. \quad (6.19)$$

Функция ψ_2 дополняет приближенное решение $\psi_1 + \psi_2$ до точного (6.16). Следовательно, ψ_2 должна удовлетворять условиям

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial n} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial n} \text{ на } S_1; \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial n} = 0 \text{ на } S_2, S_3 \text{ и } S_4. \quad (6.21)$$

Форму собственных колебаний оболочки представим выражением

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \omega_k x, \quad (6.22)$$

где $\omega_k = k\pi/l_1$, a_k ($k = 1, 2, \dots$) — характеристики формы колебания оболочки, подлежащие определению.

Примем ψ_1 в виде

$$\psi_1 = - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[\sin \omega_k r \Phi_{\omega_k r} - \text{sign } \Delta r (-1)^{k+1} \frac{x}{\omega_k} \right], \quad (6.23)$$

где

$$\Phi_{\omega_k r} = \frac{1}{\omega_k} \frac{K_1(\omega_k r_2) I_0(\omega_k r) + K_2(\omega_k r) I_1(\omega_k r_2)}{K_1(\omega_k r_2) I_1(\omega_k r_2) - K_2(\omega_k r_2) I_0(\omega_k r_2)}. \quad (6.24)$$

Для сосуда, заполненного жидкостью ($r_2 = 2$, $r_1 = 0$, см. § 5), выражение (6.24) принимает вид

$$\Phi_{\omega_k r} = \frac{1}{\omega_k} \frac{I_2(\omega_k r)}{I_1(\omega_k 2)}. \quad (6.25)$$

При составлении выражения (6.23) использовано решение для ψ , полученное ранее применительно к системе бесконечной протяженности. Это решение дополнено членом (второй член в скобке), подобранным так, чтобы строго удовлетворялось условие (6.17). При этом $\lim_{x \rightarrow 0} \psi_1 = 0$.

Функции ψ_2 и ψ_3 удобно представить разложениями в ряд по формам собственных колебаний жидкости в сосудах длиной l_1 , ограниченным жесткими коаксиальными цилиндрическими стенками ($r = r_1$, $r = r_2$) и жестким днищем (при $x = l_1$ для ψ_2 и при $x = 0$ для ψ_3)

$$\psi_2 = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \beta_j(x, r); \quad (6.26)$$

$$\psi_3 = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \mathcal{C}_j(x, r). \quad (6.27)$$

где

$$\beta_j = -\frac{1}{\lambda_j} \frac{\text{ch } \lambda_j (x - l_2)}{\text{sh } \lambda_j l_1} \tilde{\xi}_j(r); \quad (6.28)$$

$$\mathcal{C}_j = \frac{1}{\lambda_j} \frac{\text{ch } \lambda_j x}{\text{sh } \lambda_j l_1} \tilde{\xi}_j(r) \quad (6.29)$$

формы собственных колебаний жидкости; b_j , c_j — коэффициенты, подлежащие определению.

В (6.28) и (6.29) $\tilde{\xi}_j(r)$ — нормированные собственные функции краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \tilde{\xi}_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\xi}_j}{\partial r} + \lambda_j^2 \tilde{\xi}_j = 0, \quad \left[\frac{\partial \tilde{\xi}_j}{\partial r} \right]_{r=r_1, r_2} = 0, \quad (6.30)$$

иногда вкл

$$\tilde{\xi}_j = \kappa_j H_j, \quad (6.31)$$

где

$$H_j = \gamma_j J_{\kappa_j}(\lambda_j r) + Y_{\kappa_j}(\lambda_j r), \quad (6.32)$$

κ_j — нормирующий множитель;

J_{κ_j} , Y_{κ_j} — бесселевы функции первого и второго рода.

Постоянные числа λ_j ($j = 1, 2, \dots$) и соответствующие им значения γ_j ($j = 1, 2, \dots$) определяются из уравнений

$$\gamma_j = -\frac{Y_1(\lambda_j r_2)}{J_1(\lambda_j r_2)} = -\frac{Y_1(\lambda_j r_1)}{J_1(\lambda_j r_1)}, \quad (6.33)$$

вытекающих из граничных условий краевой задачи (6.30). Множитель κ_j в (6.31) определяется условием нормировки

$$\iint_S \kappa_j^2 H_j^2 dS = 1,$$

где S — область, ограниченная окружностями $r = r_1$ и $r = r_2$. Можно показать, что

$$\kappa_j^2 = \frac{2}{\pi} \frac{\text{sign } \Delta r}{\lambda_j^2 (J_1^2(\lambda_j r_2) - J_1^2(\lambda_j r_1))}.$$

Для цилиндрического бака, заполненного жидкостью ($r_2 = 2$, $r_1 = 0$),

$$\tilde{\xi}_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{J_{\kappa_j}(r)}{J_{\kappa_j}(2\kappa_j)}, \quad (6.34)$$

где числа λ_j являются корнями уравнения

$$J_{\kappa_j}(2\kappa_j) = 0. \quad (6.35)$$

Коэффициенты c_j в выражении для ψ_3 найдем, используя граничное условие (6.20)

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \tilde{\xi}_j = - \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right]_{r=0}, \quad (6.36)$$

Отсюда, воспользовавшись решением (6.23) для ψ_1 , найдем

$$c_j = - \sum_{k=1}^{\infty} a_k a_k (-1)^{k-1} \iint_S \Phi_{jk} \bar{\psi}_k dS. \quad (6.37)$$

Форму колебаний свободной поверхности жидкости $f(r)$ при совмещенных колебаниях жидкости и оболочки выразим через коэффициенты a_k и b_j по (6.19), используя (6.23) и (6.26),

$$f(r) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \bar{\psi}_j - \sum_{k=1}^{\infty} a_k a_k \Phi_{kk} + \text{sign } \Delta r \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{a_k}{a_k}. \quad (6.38)$$

Теперь, после того как выражения для функций ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 получены (с точностью до множителей a_k и b_j), подставим сумму (6.16) и ряды (6.22) и (6.38) соответственно в уравнения (6.8) и (6.9). Записав эти уравнения коротко в виде $M(f) = 0$ и $N(f) = 0$, потребуем, чтобы они удовлетворялись приближенно, в смысле метода Вульфов — Галеркина

$$\iint_{S_1} M(f) \sin \alpha_k x dS_1 = 0; \quad (6.39)$$

$$\iint_{S_1} N(f) \bar{\psi}_j dS_1 = 0. \quad (6.40)$$

Отсюда получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_k ($k = 1, 2, \dots$) и b_j ($j = 1, 2, \dots$), в которую войдут квадраты частоты Ω^2 входят в качестве параметра.

Таким образом, применение метода Вульфов — Галеркина сводит задачу расчета форм и частот собственных колебаний системы оболочка — несжимаемая жидкость конечного размера к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Обычно при исследовании колебаний оболочек, соприкасающихся с жидкостью, волновое движение жидкости на свободной поверхности не учитывается, как не имеющее существенного значения [4, 78, 79 и др.]. В этом случае условие (6.3) заменится требованием

$$[\varphi]_{z=0} = 0. \quad (6.41)$$

Если заметить, помимо этого, точное граничное условие для φ на дне осредненным

$$\iint_{S_1} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dS_1 = 0, \quad (6.42)$$

то выражение (6.23) можно принять в качестве решения для φ . В этом случае интегрирование в (6.39) приводит к значительно более простой системе. Результаты исследования [40] показали,

что осреднение граничных условий для φ на дне и использование формулы (6.23) в качестве приближенного решения для φ изменением точного не может заметным образом отразиться на значениях частот Ω и характеристич. форм колебаний a_k , особенно при условии, что $l_1 \gg H$ (l_1 — длина оболочки; H — приведенная толщина кольцевого слоя). Аналогичный подход к решению задачи о вынужденных колебаниях сосуда с жидкостью практически не влияет на переходный процесс даже в сравнительно коротких оболочках, о чем свидетельствуют результаты сравнительных расчетов, приведенных в § 21.

Применив матричную форму записи, получим

$$(A - \lambda C) a = 0, \quad (6.43)$$

где A и C — симметрические квадратные матрицы с элементами

$$a_{kk} = \delta_{kk} (m^2 + \pi_{kk}) + \frac{2(-1)^{k+1}}{a_{kk}}; \quad (6.44)$$

$$c_{kk} = \delta_{kk} (1 + k_{20}^2 + k_{30}^2); \quad (6.45)$$

$$(k = 1, 2, \dots; s = 1, 2, \dots)$$

δ_{kk} — символ Кронекера, т. е. $\delta_{kk} = 1$, если $k = s$; $\delta_{kk} = 0$, если $k \neq s$; a_{kk} определяется выражением (4.8), в котором следует положить $\alpha = a_k$, $\beta = 1$; $\lambda = 1/\Omega^2$ — характеристическое число матрицы $C^{-1}A$; a — столбцовая матрица, элементами которой являются характеристич. форм колебаний a_k .

Если искать приближенное решение для f в виде конечной суммы $f = \sum_{j=1}^N a_j \sin \alpha_j x$, то задача расчета форм и частот колебаний сводится к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений, получающейся в результате усечения системы (6.43),

$$(A - \lambda C) a = 0, \quad (6.46)$$

где $A = [a_{kk}]^N$, $C = [c_{kk}]^N$ — квадратные и $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ — столбцовая матрица.

Если матрицы A и B в (6.46) определены, то вычисление характеристических чисел λ и собственных векторов матрицы для ЭВМ составляет стандартную задачу.

Таким образом, решение системы (6.46) позволяет ответить на вопрос о собственных частотах и формах колебаний оболочки, т. е. определять параметры Ω_j ($j = 1, 2, \dots, N$) и функции

$$f_j(x) = \sum_{k=1}^N a_k \sin \alpha_k x.$$

Мы рассмотрели случай, когда область, заключенная жидкостью, замыкается снизу абсолютно жестким дном. Правиль-

пнально не отличается от рассмотренного метода построения решения для системы, в которой внутренняя полость оболочки с жидкостью ограничена снизу упругим дном — эластичным, либо жестко закрепленным, что граничные условия для φ можно перенести на плоскость $x = l_2$. Особенно прост случай, когда дна можно аппроксимировать безинерционной мембраной на упругом основании. Рассмотрим этот вариант¹.

Уравнение движения дна (в относительной системе единиц координат)

$$k_0 w + [\varphi]_{x=l_2} = 0, \quad (6.47)$$

где k_0 — коэффициент жесткости виндировского основания.

Граничные условия для φ на S_1

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{x=0} = 0. \quad (6.48)$$

Уравнение (6.47) совершенно аналогично уравнению колебания свободной поверхности (6.3). Уравнение для формы колебания дна приводится к виду

$$k_0 f - \Omega^2 [\varphi]_{x=l_2} = 0. \quad (6.49)$$

Дополним функцию φ_0 (6.27) членом $\xi_0 \varphi_0 x$

$$\varphi_0 = \sum_{j=1}^{\infty} c_j C_j(x, t) + \xi_0 \varphi_0 x, \quad (6.50)$$

где $\xi_0 = 1/2V\bar{n}$.

Далее выразим форму колебаний свободной поверхности жидкости и дна бака через явные коэффициенты a_k , b_j и c_j .

На S_1

$$S_1: f = \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right]_{x=0} = \\ = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \xi_j - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[\frac{J_0(2\alpha_k)}{J_1(2\alpha_k)} - \frac{(-1)^{k+1}}{\alpha_k} \right] + \xi_0 \varphi_0 \quad (6.51)$$

на

$$S_1: f = \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right]_{x=l_2} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \xi_j + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{J_0(2\alpha_k)}{J_1(2\alpha_k)}. \quad (6.52)$$

Теперь, учитывая новые выражения для φ_0 и f на S_1 и S_2 , используем, чтобы не только уравнения (6.8) и (6.9), но и (6.49) удовлетворялись приближенно в смысле метода Бубнова—Галер-

¹ Вязкость упругости дна на колебания бака с жидкостью учитывались в работах [35, 76, 79].

кина. Таким образом, в рассматриваемом случае к системе (6.39), (6.40) (с соответствующими изменениями) мы должны добавить систему линейных алгебраических уравнений

$$\int_{S_1} F(j) \xi_j dS_1 = 0 \quad (j = 0, 1, \dots), \quad (6.53)$$

где через $F(j)$ обозначена левая часть уравнения (6.49).

В последующем (§ 22) мы вернемся к системе уравнений, учитывающей упругость дна, а связи с задачей о расчете переходных процессов в сосудах с жидкостью.

Переходя к более общему случаю, положим, что упругая оболочка с шарнирно-подвижными опорами занимает лишь часть длины одной из цилиндрических стенок, ограничивающих кольцевой слой жидкости (рис. 11). Снизу кольцевая полость закрыта тонкой эластичной пленкой, не стесняющей колебания системы, но препятствующей истеканию жидкости из полости. Пусть l_2 — высота столба жидкости на участке $x > l_2$; l_0 — высота столба жидкости в интервале $x < 0$. Граничные условия для функции φ отнесем к сечениям, совпадающим с кромками оболочки $x = 0, l_1$. Средина с самого начала условия при $x \sim l_1$, снижим давление в этом сечении $-p \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ со средним осевым ускорением возмущенного потока

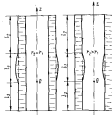


Рис. 11. К расчету колебаний оболочки, отрывающейся со слоя жидкости.

$$\rho l_2 (v_1)_{x=l_2} = -p \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{sign } \Delta r \, dr \, d\theta. \quad (a)$$

Интегрируя (a) от нуля до t при нулевых начальных условиях, получим

$$l_2 (v_1)_{x=l_2} = - \int_0^t \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{sign } \Delta r \, dr \, d\theta. \quad (b)$$

Средняя осевая скорость возмущенного движения жидкости в сечении $x = l_2$ связана с потенциалом скорости, кроме того, соотношением

$$|v_{z,l_2=0}| = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{l_1}^{l_2} |\partial \psi / \partial z|_{z=0} r dr d\theta}{\pi (r_2^2 - r_1^2)} \operatorname{sign} \Delta r. \quad (6)$$

Переходя к безразмерной форме задачи и используя выражение (6.7), получим из (5) и (6) следующее среднее граничное условие для функции ψ в сечении $x = l_2$:

$$\int_{l_1}^{l_2} (l_2 |\partial \psi / \partial z|_{z=l_2} - |\psi|_{z=l_2}) r dr = 0. \quad (6.54)$$

Рассуждая по аналогии с предыдущим, найдем граничные условия для ψ в сечении $x = 0$

$$\int_{l_1}^{l_2} (l_2 |\partial \psi / \partial z|_{z=0} - |\psi|_{z=0}) r dr = 0. \quad (6.55)$$

Если представить форму колебания оболочки f , как и прежде, рядом (6.22), то решение для ψ по аналогии с (6.23) можно записать так

$$\psi = - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[\sin \alpha_k z \Phi_{\alpha_k r} - \frac{\operatorname{sign} \Delta r}{\alpha_k} (\delta_1 x + \delta_2) \right], \quad (6.56)$$

где

$$\delta_1 = \frac{(-1)^{k+1} l_2}{l_1 + l_2 + l_3} - \frac{l_2}{l_1 + l_2 + l_3};$$

$$\delta_2 = \frac{(-1)^{k+1} l_1 l_2}{l_1 + l_2 + l_3} \cdot \frac{l_2 + l_2 l_2}{l_2 + l_2 - l_2}. \quad (6.57)$$

Частота колебаний Ω и характеристики формы a_k по-прежнему определяются решением системы (6.43), где в разбавленном случае следует положить

$$a_{0k} = \delta_{0k} (m^2 + \alpha_{0k}^2) + 2\delta_{0k} \alpha_{0k} \alpha_k. \quad (6.58)$$

Здесь

$$\delta_0 = \frac{l_1 l_2}{l_1 (l_1 + l_2 + l_3) - l_2} (-1)^{k+1} + \frac{l_2 + l_2 l_2}{l_1 (l_1 + l_2 + l_3) +} +$$

$$+ \frac{l_2 l_2}{l_1 (l_1 + l_2 + l_3)} [(-1)^{k+1} + (-1)^{k+1}]. \quad (6.59)$$

Проследим сходимость решения уравнений (6.46) на примере расчета частот и форм колебаний системы изотропная оболочка —

неспинная жидкость, изображенной на рис. 10, б. Жидкость с одной стороны по давлению системы ограничена свободной поверхностью ($l_2 = 0$), с другой — твердым дном ($l_2 = \infty$). Исходные данные: $l_1/r_2 = 4$, $r_2/r_1 = \frac{13}{9}$, $r_2/k = 30$, $\rho/\rho_0 = 0.674$.

В табл. 1 приведены значения a_k и Ω_k , соответствующие первому тону колебаний и рассчитанные последовательно при $N = 1$; 2; 4; 6; 8; 10. Характеристики форм колебаний a_k нормированы так, что $a_1 = 1$.

Таблица 1

N	1	2	4	6	8	10
a_k	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
a_2	—	-0,3807	-0,3888	-0,3920	-0,3936	-0,3944
a_3	—	—	-0,2494	0,2517	0,2528	0,2534
a_4	—	—	-0,1823	0,1846	-0,1854	-0,1859
a_5	—	—	—	0,1486	0,1453	0,1457
a_6	—	—	—	-0,1157	-0,1177	-0,1180
a_7	—	—	—	—	0,0968	0,0969
a_8	—	—	—	—	-0,0798	-0,0799
a_9	—	—	—	—	—	0,0657
a_{10}	—	—	—	—	—	-0,0625
Ω	0,2440	0,2310	0,2220	0,2185	0,2168	0,2165

На рис. 12 даны графики последовательных приближений формы колебания первого тона

$$\bar{f}_N(s) = \kappa f_N(s).$$

Здесь κ — нормирующий множитель; $s \sim \kappa/l_1$; $f_N(s) = - \sum_{k=1}^N a_k \sin \alpha_k z$. Множитель κ определен из условия

$$\int_0^1 \bar{f}_N(s) ds = 1.$$

Отсюда

$$\kappa = \sqrt{2 / \sum_{k=1}^N a_k^2}.$$

Анализ данных табл. 1 и кривых форм колебаний на рис. 12 свидетельствует о быстрой сходимости системы (6.46) по частоте и относительно слабой сходимости по форме колебаний. Приведенные результаты указывают на значительное различие в формах осесимметричных колебаний шарнирно-опертой оболочки и ва-

куме и в жидкости, заполняющей ограниченный объем. Формы и кинематика — простые синусоиды, вся оболочка в пределах низких форм находится в состоянии, слабо отличающемся от безмассового. В рассмотренном примере форма колебаний состоит из плавно меняющейся основной части и краевого эффекта, локализующегося вблизи конца $x = l_1$, где движение жидкости в продольном направлении ограничено жестким дном. В более общем случае, когда упругая оболочка занимает лишь часть длины одной из цилиндрических стенок, ограничивающих кольцевой слой

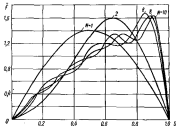


Рис. 12. Формы колебаний нулевого тона, соответствующие различным числам N .

жидкости (рис. 11), возмущения типа краевого эффекта возникают на обоих концах оболочки. Вне непосредственной близости к концам оболочка находится в состоянии, близком к безмассовому.

Выше мы полагали, что цилиндрическая шарирно-опертая оболочка совпадает с жидкостью по всей своей длине. Рассмотрим простой метод вычисления элементов матриц A и C в (6.46) для случая осесимметричных колебаний замкнутой среды на жестком дне цилиндрической оболочки, лишь частично заполненной жидкостью.

Положим, что верхний конец оболочки имеет шарирное опарение. Силы гравитационного происхождения не учитываем. Пусть l_2 — высота столба жидкости в сосуде; l_1 — длина оболочки. Начиная отсчет вдоль полярной оси x совмещим с дном. Мысленно продолжим бак с жидкостью, зеркально отобразив его в область отрицательных значений x (рис. 13). Колебание вновь полученной системы, включающей бак с жидкостью и их отобра-

жение, будет, естественно, симметричным относительно плоскости $x = 0$. Воспользуемся безразмерной формой записи (5.4), выписав уравнение и граничные условия задачи

$$\begin{aligned} (1 + k_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \bar{\omega} + k_2 \bar{\omega} - [q]_{x=0} = \\ = 2Y\delta(x); \end{aligned} \quad (6.50)$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial r} = 0; \quad (6.51)$$

$$[\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}]_{x=0} = [q]_{x=0} = 0; \quad (6.52)$$

$$[\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}]_{x=0} = -u; \quad (6.53)$$

$$[u]_{x=0} = 0; \quad [\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}]_{x=0} = 0; \quad (6.54)$$

$$[u]_{x=0} = [\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}]_{x=0} = 0. \quad (6.55)$$

Здесь $Y = Y(t)$ — интенсивность переменной во времени сил, действующей со стороны дна на колеблющуюся оболочку, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

При построении решения задачи используем метод интегральных преобразований Фурье с конечными пределами [69]. По построению функции $\bar{\omega}$ и q удовлетворяют условиям четности $\bar{\omega}(x) = \bar{\omega}(-x)$, $q(x) = -q(-x)$. Для четных функций $f(x)$, у которых область изменения независимой переменной x есть $(-a, a)$, преобразование Фурье с конечными пределами $x = -a, a$

$$f^{(2)}$$

и формулу обращения можно записать следующим образом:

$$f^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a f(x) \cos \frac{(2x-1)\pi}{2a} dx; \quad (6.56)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(2)} \cos \frac{(2x-1)\pi n}{2a}. \quad (6.57)$$

Обозначим

$$\alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{2a}, \quad \beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2a}. \quad (6.58)$$

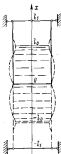


Рис. 13. К расчету колебаний оболочки с жидкостью. Оболочка закреплена в сечении $x = 0$.

Принимая во внимание граничные условия для оболочки (6.64) и используя преобразование (6.66) в интервале $(-l_1, l_1)$, получим

$$(1 + k_1 \alpha_0^4 + k_2 \alpha_0^2) \psi_0^{(1)} + \pi^2 \psi_0^{(1)} - [\psi_0^{(1)}]_{r=0} = \frac{2Y}{l_1}. \quad (6.69)$$

Уравнение (6.61) и граничные условия (6.63) преобразуются в интервале $(-l_2, l_2)$

$$-\frac{d^2 \psi_m^{(1)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_m^{(1)}}{dr} - \beta_m^2 \psi_m^{(1)} = 0; \quad (6.70)$$

$$\left[\frac{d\psi_m^{(1)}}{dr} \right]_{r=0} = -\alpha_m^2 \psi_m^{(1)}. \quad (6.71)$$

Так как

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^{(1)} \cos \alpha_m r, \quad (6.72)$$

то условия (6.71) можно записать в виде

$$\left[\frac{d\omega}{dr} \right]_{r=0} = -\sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^{(1)} \alpha_m, \quad (6.73)$$

где

$$\alpha_m = \frac{1}{l_2} \int_{-l_2}^{l_2} \cos \alpha_m r \cos \beta_m r dr. \quad (6.74)$$

Решая уравнение (6.70) и используя граничное условие (6.73) и условие ограниченности решения при $r \rightarrow 0$, найдем

$$\psi_m^{(1)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{(1)} \frac{\alpha_m}{\beta_m} \frac{J_2(\beta_m)}{J_1(\beta_m)}. \quad (6.75)$$

Переходя от изображения (6.75) к оригиналу для ψ , получим

$$\psi(r, \omega) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^{(1)}}{\alpha_n} d_{1n} - \frac{\cos \beta_n r}{\beta_n} \frac{J_2(\beta_n)}{J_1(\beta_n)}. \quad (6.76)$$

Из выражения (6.76) следует, что

$$[\psi_0^{(1)}]_{r=0} = - \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{(1)} d_{1n}. \quad (6.77)$$

где

$$d_{1n} = \frac{l_2}{l_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m d_{1m}}{\beta_m} \frac{J_2(\beta_m)}{J_1(\beta_m)}. \quad (6.78)$$

При свободных колебаниях системы по одной из главных форм трансформанта Фурье $\omega_n^{(1)}$ и Y являются гармоническими функциями времени

$$\omega_n^{(1)} = a_n \sin \Omega t, \quad Y = Y_0 \sin \Omega t. \quad (6.79)$$

После подстановки (6.77) и (6.79) в (6.69) получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно характеристик форм колебаний a_n

$$(1 + k_1 \alpha_n^4 + k_2 \alpha_n^2) a_n - \Omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} (\pi^2 \delta_{nm} + k_{nm}) a_m = \frac{2Y_0}{l_1}, \quad (6.80)$$

к которой для полноты следует добавить уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0, \quad (6.81)$$

вытекающее из условия (6.65). Для приближенного решения бесконечной системы (6.80) и (6.81) воспользуемся усеченной системой, состоящей из N уравнений. Исключая из (6.80) Y_0 и воспользовавшись уравнением (6.81), получим

$$(A - \Omega^2 C) a = 0, \quad (6.82)$$

где, как и раньше, $A = \|a_{nm}\|$, $C = \|c_{nm}\|$ — квадратные и $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ — столбцовая матрица; $\lambda = 1/\Omega^2$,

$$a_{nn} = \pi^2 (1 + \delta_{nn}) + (k_{nn} - k_{N+1, n} - k_{n, N+1} + k_{N+1, N+1});$$

$$c_{nn} = (1 + k_1 \alpha_n^4 + k_2 \alpha_n^2) \delta_{nn} + 1 + k_1 \alpha_{N+1}^4 + k_2 \alpha_{N+1}^2. \quad (6.83)$$

Соотношения (6.83) дают искомые выражения для элементов матриц A и C .

В случае жесткой оболочки, полностью зашпильной жидкостью, элементы (6.83) преобразуются к виду

$$a_{nn} = \delta_{nn} \left[\pi^2 + \frac{1}{\alpha_n} \frac{J_2(2\alpha_n)}{J_1(2\alpha_n)} \right] + \pi^2 + \frac{1}{\alpha_{N+1}} \frac{J_2(2\alpha_{N+1})}{J_1(2\alpha_{N+1})}, \quad (6.84)$$

$$c_{nn} = \delta_{nn} (1 + k_1 \alpha_n^4 + k_2 \alpha_n^2) + (1 + k_1 \alpha_{N+1}^4 + k_2 \alpha_{N+1}^2). \quad (6.85)$$

Приведем некоторые результаты расчета на ЭВМ форм колебаний доработанной оболочки, зашпильной жидкостью.

$$(k_1 = 1,466 \text{ кг/см}^2, \quad \pi^2 = 5,6 \text{ кг/см}^2, \quad k_2 = 0).$$

Порядок матриц A и C равен $N = 18$.

На рис. 14 показаны формы колебаний

$$f_N = \sum_{n=1}^N a_n \cos \alpha_n x \quad (a)$$

для оболочки с параметрами $l_2/r_1 = \pi/2$ и $r_1/h = 20, 50, 200$. Условие нормировки

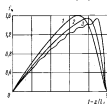


Рис. 14. Формы колебаний оболочки с жидкостью (первый тон, $N=16$). Оболочка закреплена в обоих $x=0$, $x=l_2$: $r_1/h = 20$; 2 — $r_1/h = 50$; 3 — $r_1/h = 200$.

в случае оболочки малой толщины. О том, как ухудшается сходимость ряда (a) по мере уменьшения отношения r_1/h , можно в какой-то мере судить по амплитудам последних из удерживаемых в ряду гармоник (при $\alpha_1 = 1$).

r_1/h	200	50	20
$ a_{16} $	$1,486 \cdot 10^{-4}$	$2,133 \cdot 10^{-2}$	$5,583 \cdot 10^{-4}$

Пока речь шла лишь об осесимметричных колебаниях систем конечного размера. Свободные колебания цилиндрических оболочек с жидким наполнением, при которых радиальные деформации пропорциональны $\sin n\theta$ или $\cos n\theta$, где n — целое число, большее или равное единице, рассматривались рядом авторов. Случай $n=1$, соответствующий балочным колебаниям баки с жидкостью, подробно исследован в [45, 55, 56]. Случай $n \geq 2$ рассматривался в [13, 56 и др.]. Особенно прост в расчетном отношении

$$\int_0^1 f_N(x) dx = 1.$$

Здесь $x = \pi l_2$;

a_n ($n=1, 2, \dots, 16$) — элементы собственного вектора матрицы $C^{-1}A$, соответствующие первому тону колебаний

$$a_{16} = - \sum_{n=1}^{15} a_n.$$

Наличие ядро выраженного колебательного участка у кривой $f(x)$ при $r_1/h = 200$ свидетельствует об очень медленной сходимости ряда

$$f_N(x) = \sum a_n \cos \alpha_n x$$

практически важный вариант, когда при $n \geq 2$ длинная цилиндрическая шарнирно-опертая оболочка, имеющая жесткое днище, полностью заполнена жидкостью. Эксперименты, результаты которых приведены в [93], показали, что у полностью заполненных оболочек формы радиального смещения при колебаниях практически совпадают с формами смещения при колебании оболочек в пустоте, т. е. выражаются синусоидами

$$\sin n\pi x \cos n\theta. \quad (6.86)$$

Что же касается частоты, соответствующей форме (6.86), то она с достаточной точностью определяется формулой (2.24)

$$\Omega = \frac{\Omega_0}{\sqrt{1 + \alpha_n m^2}},$$

выведенный выше для бесконечно длинных оболочек. В данном случае под Ω_0 следует понимать известную частоту преимущественно изгибного колебания оболочки в пустоте по форме (6.86), а под

$$m_{\text{eff}} = \frac{R^2}{m_1} \left(\frac{J_{n-1}(\alpha_n r_1)}{J_n(\alpha_n r_1)} - 1 \right)$$

— присоединенную массу при колебании бесконечно длинной оболочки, заполненной несжимаемой жидкостью.

§ 7. Расчет осесимметричных колебаний систем конечного размера на основе теории длинных волн

Возвращаясь к расчету осесимметричных колебаний цилиндрических систем, видим, что формы колебаний круглых цилиндрических оболочек, соприкасающихся со слоем жидкости, состоят из плавного монотонного основного члена и краевого эффекта, локализованного вблизи концов. Для достаточно точного учета краевого эффекта при расчете форм собственных колебаний приходится удерживать в системе (6.46) или (6.82) весьма значительное число уравнений. Вместе с этим из физических соображений можно предположить, что в системах с тонкими и достаточно длинными оболочками неучет краевого эффекта не должен практически отразиться на основном деформированном состоянии оболочки и на общих характеристиках колебательной системы: частоте и форме или непосредственной близости от концов. В связи с этим возникает идея построить приближенное решение задачи расчета собственных колебаний системы ограниченной длины на базе теории длинных волн, рассмотренной в § 5. Конечно, такой подход может быть использован лишь при исследовании низших тонов

колебаний, когда среднее расстояние между узловыми линиями формы колебания λ_y значительно больше приведенной толщины слоя жидкости

$$H = \frac{|\tilde{r}_2^2 - \tilde{r}_1^2|}{2\epsilon_1},$$

то есть, когда имеет место условие

$$|\pi H / \lambda_y|^2 \ll 1. \quad (7.1)$$

Мы видели, что в пределах теории длинных волн оболочка должна рассматриваться не только как безмоментная ($k_1 = 0$), но и как безмассовая ($m^2 = 0$), а движение жидкости — одномерным. Статические силы не оказывают влияния на длинноволновые колебания ($k_2 = 0$). Опуская в уравнении для форм колебаний (6.8) члены, содержащие m^2 , k_1 и k_2 и полагая движение жидкости независимым от координаты r , получим

$$f = \Omega^2 \varphi \operatorname{sign} \Delta r. \quad (7.2)$$

Форму колебаний f представим рядом Фурье $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \omega_k x$.

Рассматривая общий случай, позволим, что упругая оболочка занимает лишь часть длины одной из цилиндрических стенок, ограничивающих кольцевой слой жидкости (рис. 11). Формулу для φ получим из выражения (6.56), упростив его за счет предположения об одновременности движений жидкости. В итоге найдем:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\omega^2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{\sin kx}{k^2} + \frac{k_1 x + \delta_1}{k} \omega \right) \operatorname{sign} \Delta r,$$

где $\omega = \pi/l_1$ (l_1 — длина оболочки).

Из выражений (6.54) и (6.55) следует, что в рамках теории длинных волн точные граничные условия при $x = 0$ и $x = l_1$ для функций φ принимают вид

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad l_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \varphi; \\ \text{при } x = l_1 \quad l_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\varphi. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Перейдем от координаты x к координате $s = x/l_1$. В результате перехода получим

$$\varphi(s) = \frac{1}{\omega^2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(-\frac{\sin k\pi s}{k^2} + \frac{k_1 s + \delta_1/l_1}{k} \omega \right) \operatorname{sign} \Delta r. \quad (7.4)$$

Заменяя коэффициенты ряда (7.4) a_k интегралами

$$a_k = 2 \int_0^1 f(y) \sin k\pi y dy, \quad (8)$$

где f — форма колебания оболочки. Подставляя (7.4) в (7.2) с учетом (а) и (6.57), после перестановки порядка интегрирования и суммирования получим

$$f(s) = \frac{\pi^2}{\omega^2} \int_0^1 f(y) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin k\pi s \sin k\pi y}{k^2} + \frac{\pi}{k} (-1)^{k+1} (\tilde{l}_2 s + \frac{l_2^2 k}{l_1}) \sin k\pi y + \frac{\pi}{k} (-1)^{k+1} (\tilde{l}_2 y + \frac{l_2^2 k}{l_1}) \sin k\pi s \right] dy, \quad (7.5)$$

где $\tilde{l}_i = l_i/(l_1 + l_2 + l_3)$ ($i = 1, 2, 3$).

Суммируя ряд, стоящий под знаком интеграла в (7.5), найдем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi s \sin k\pi y}{k^2} &= -\frac{\pi^2}{4} (s-y) + \frac{\pi^2}{4} (s+y) - \frac{\pi^2}{2} sy \\ &\quad \left(\begin{array}{l} 0 < s+y < 2 \\ -2 < s-y < 2 \end{array} \right); \\ \sum_{k=1}^{\infty} \pi \left(\tilde{l}_2 s + \frac{l_2^2 k}{l_1} \right) \frac{\sin k\pi y}{k} (-1)^{k+1} &= \frac{\pi^2}{2} \left(\tilde{l}_2 s + \frac{l_2^2 k}{l_1} \right) y \\ &\quad (-1 < y < 1); \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \pi \left(-\tilde{l}_2 s + \frac{l_2^2 k}{l_1} + \tilde{l}_2 \right) \frac{\sin k\pi y}{k} &= \frac{\pi^2}{2} \left(-\tilde{l}_2 s + \frac{l_2^2 k}{l_1} + \tilde{l}_2 \right) (1-y) \\ &\quad (0 < y < 2). \end{aligned}$$

Объединяя результаты суммирования, сведем уравнение (7.5) к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$f(s) - \lambda \int_0^1 K(s, y) f(y) dy = 0, \quad (7.7)$$

где

$$\lambda = \frac{\pi^2 l_2}{\omega^2}. \quad (7.8)$$

Ядро уравнения (7.7) имеет вид

$$K(s, y) = \begin{cases} ay + bs + cy + d & s \leq y; \\ ay + by + cs + d & s > y. \end{cases} \quad (7.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a &= -\bar{f}_2; \quad b = -\bar{f}_1 + \bar{f}_2; \\ c &= -\bar{f}_2; \quad d = \bar{f}_2 \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Как видно, ядро (7.9) симметрично, так как $K(s, y) = K(y, s)$. Известно, что фундаментальными функциями ядра (7.9) являются тригонометрические функции [54]. Таким образом, задача све-

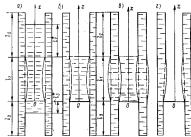


Рис. 15. Варианты систем оболочка-жидкость, исследуемые методом теории длинных волн.

дена к хорошо изученному классу уравнений Фредгольма. Полученные результаты обобщаются и на случай, когда жидкость находится в кольцевом слое вне оболочки и когда заполняет ее изнутри (рис. 15, а). Пусть ρ и ρ^* — массовые плотности жидкостей, находящихся соответственно вне и внутри оболочки; $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ — длины отдельных участков снаружи оболочки, заполненных жидкостью; $\bar{l}_1', \bar{l}_2', \bar{l}_3'$ — то же, но внутренней полости

$$(\bar{l}_1' = \bar{l}_3'); \quad \bar{l}_i = \frac{\bar{l}_i}{\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \bar{l}_i' = \frac{\bar{l}_i'}{\bar{l}_1' + \bar{l}_2' + \bar{l}_3'} \quad (i = 1,$$

2, 3); r_1 — радиус оболочки; r_2 — радиус внешней стенки. Жидкими деформируемыми на рис. 15, а показаны недеформируемые участки стенок. Силу полости закрыты эластичными пленками, не способными к колебаниям системы. Прием в качестве характерного размера l приведенную толщину слоя жидкости вне оболочки

$$H = \frac{|\bar{l}_2' - \bar{l}_1'|}{2r_1},$$

а качестве характерной скорости c — скорость распространения длинных волн в системе без учета внутреннего заполнения оболочки жидкостью (§ 4)

$$c = \sqrt{A_2 H^2 / \rho r_1}.$$

Можно легко показать, что в этом случае задача расчета колебаний системы снова сводится к решению интегрального уравнения (7.7) с ядром (7.9), в котором следует положить

$$\begin{aligned} a &= -\bar{f}_1 - \bar{f}_3 \Lambda; \\ b &= \bar{f}_1 + \bar{f}_2 + (\bar{f}_1' + \bar{f}_2') \Lambda; \\ c &= -\bar{f}_2 - \bar{f}_3 \Lambda; \\ d &= \bar{f}_2 (1 + \bar{l}_2 \bar{l}_1') + \Lambda \bar{f}_2' (1 + \bar{l}_2' \bar{l}_1'). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Здесь

$$\Lambda = \frac{2\rho^* H}{\rho r_1}.$$

Отдельно рассмотрим вариант системы, в которой жидкость внутри оболочки ограничена снизу в сечении $x = 0$ жестким непроницаемым дном ($\bar{l}_3' = \infty$), а сверху при $x = \bar{l}_1$ имеет свободную поверхность ($\bar{l}_3 = 0$) (рис. 15, б).

В этом случае $\bar{l}_3' \sim 1$; $\bar{l}_1' = 0$; $\bar{l}_2' = 0$. Измененные для этого варианта системы коэффициенты ядра интегрального уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} a &= -\bar{f}_2; \quad b = \bar{f}_1 + \bar{f}_2; \quad c = -\bar{f}_2 - \Lambda; \\ d &= \bar{f}_2 (1 + \bar{f}_2 \bar{l}_2) + \Lambda. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Вернемся к решению уравнения (7.7). Дифференцируя (7.7), предварительно разбив интервал интегрирования на части (0, y) и ($s, 1$), получим

$$f'(s) - \lambda \int_0^s (ay + c) f(y) dy - \lambda \int_s^1 (ay + b) f(y) dy. \quad (7.13)$$

Продифференцировав еще раз уравнение (7.7), найдем

$$f'' + \lambda(b - c)f = 0. \quad (7.14)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по x . Таким образом, решение (7.7) следует искать среди решений дифференциального уравнения (7.14), в виде

$$f(x) = A \cos \chi x + B \sin \chi x, \quad (7.15)$$

где

$$\chi = \sqrt{\lambda(b - c)} = \sqrt{\lambda(1 + A)}. \quad (7.16)$$

Постоянные A и B в формуле (7.15) не могут быть произвольными, и мы должны наложить на них ограничения согласно исходному уравнению (7.7). Обозначим

$$\lambda \int_0^1 g f(y) dy = C, \quad \lambda \int_0^1 f(y) dy = D.$$

Из интегрального уравнения (7.7), в котором $K(x, y)$ заменяю по формуле (7.9), получим, полагая $s = 0$ и $s = 1$,

$$f(0) = cC + dD, \quad f(1) = (a + b)C + (c + d)D \quad (7.17)$$

и аналогично из (7.13)

$$f'(0) = -aC + bD; \quad f'(1) = -cC + dD. \quad (7.18)$$

Исключая C и D из четырех уравнений (7.17) и (7.18), получим граничные условия для неизвестной функции $f(x)$

$$\begin{aligned} bf(0) - cf(1) - d f'(0) + (c + d)f'(1) &= 0; \\ af(0) - af(1) - c f'(0) + (c + b)f'(1) &= 0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Итак, решениями интегрального уравнения (7.7) будут те из решений (7.15) дифференциального уравнения (7.14), которые удовлетворяют граничным условиям (7.19). Подставляя в эти граничные условия решение (7.15), получим два линейных однородных уравнения относительно A и B

$$\begin{aligned} A[1b - c \cos \chi - (c + d) \chi \sin \chi] + \\ + B[(c + d) \chi \cos \chi - c \sin \chi - d \chi] &= 0; \\ A[a - a \cos \chi - (a + b) \chi \sin \chi] + \\ + B[(a + b) \chi \cos \chi - a \sin \chi - c \chi] &= 0, \end{aligned} \quad (7.20)$$

которые будут иметь ненулевые решения только в том случае, если определитель системы (7.20) равен нулю; равенство нулю этого определителя дает трансцендентное характеристическое уравнение для χ , а значит, и для λ . Только для значений λ , яв-

ляющихся корнями этого трансцендентного уравнения, однородное интегральное уравнение (7.7) разрешимо. Другими словами, эти значения параметра λ представляют спектр интегрального уравнения (7.7).

Дальнейшие выкладки приведем для варианта системы, показанного на рис. 15, б. Решение, которое при этом будет получено, можно, конечно, использовать для не заводимой акустической оболочки $\Lambda = 0$, а также когда вся жидкость расположена в области $x < r_1$. В последнем случае следует принять в качестве характерного размера величину $r_1/2$ и положить $\Lambda = 0$. Для системы, приведенной на рис. 15, б, коэффициенты ядра уравнения (7.7) определяются соотношениями (7.12). Трансцендентное характеристическое уравнение имеет вид

$$m_1 \chi + m_2 \chi \cos \chi + m_3 \chi^2 \sin \chi + m_4 \sin \chi = 0, \quad (7.21)$$

где

$$m_1 = 2\bar{I}_2 c; \quad m_2 = \bar{I}_2 + \bar{I}_2 + \bar{I}_2 \Lambda + 2\bar{I}_2 \Lambda + \Lambda^2;$$

$$m_3 = -\frac{\bar{I}_2^2}{\bar{I}_1} (1 + \Lambda) + \bar{I}_2 \Lambda; \quad m_4 = \bar{I}_1 (1 + \Lambda). \quad (7.22)$$

Если положить $\Lambda = 1$, то, обозначив через χ_i ($i = 1, 2, \dots$) корни уравнения (7.21), получим решение (7.15), удовлетворяющее граничным условиям (7.19),

$$f_i(x) = \cos \chi_i x + B_i \sin \chi_i x, \quad (7.23)$$

где

$$B_i = \frac{\bar{I}_2(1 - \cos \chi_i) + \bar{I}_2 \chi_i \sin \chi_i}{\bar{I}_2 \chi_i \cos \chi_i + \bar{I}_1 \sin \chi_i + (\bar{I}_2 + \Lambda) \chi_i}. \quad (7.24)$$

Если потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^1 f_i(x) dx = 1, \quad (a)$$

то

$$f_i(x) = \kappa_i (\cos \chi_i x + B_i \sin \chi_i x), \quad (7.25)$$

где

$$\kappa_i = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(1 + B_i^2) + \frac{1}{4\chi_i} \sin 2\chi_i (1 - B_i^2) + \frac{B_i}{\chi_i} \sin^2 \chi_i}}.$$

Имея в виду (7.8) и (7.16), найдем выражение для частоты Ω_i в относительной системе единиц измерения

$$\Omega_i = \frac{\chi_i}{\bar{I}_1} \sqrt{\frac{1}{1 + \Lambda}}. \quad (7.26)$$

Переходя к размерной форме записи, получим

$$\Omega_j = \frac{c}{l_1} \lambda_j \sqrt{\frac{1}{1+\Lambda}}.$$

Рассмотрим пример расчета характеристик колебаний системы, изображенной на рис. 15, б, при исходных данных: $l_1 = 15$, $r_1 = 2$, $\Lambda \approx 0,5$, $\bar{l}_1 \approx 0,194$, $\bar{l}_2 \approx 0,508$, $\bar{l}_3 = 0,268$. Используя формулы (7.22), найдем

$$m_1 = 0,151, m_2 = 1,769, m_3 = -0,723, m_4 = 0,330.$$

Характеристическое уравнение

$$0,151\chi + 1,769\chi \cos \chi - 0,723\chi^2 \sin \chi + 0,330 \sin \chi = 0.$$

Первые корни уравнения: $\chi_1 = 1,102$, $\chi_2 = 3,339$, $\chi_3 = 6,494$. Формы собственных колебаний, удовлетворяющие условию (а),

$$f_1(s) \approx 0,962 \cos 1,102s + 0,446 \sin 1,102s,$$

$$f_2(s) \approx 1,372 \cos 3,339s + 0,073 \sin 3,339s,$$

$$f_3(s) \approx 1,300 \cos 6,494s + 0,114 \sin 6,494s.$$

Безразмерная частота

$$\Omega_1 = 0,0599, \Omega_2 = 0,1815, \Omega_3 = 0,3531.$$

Графики форм колебаний для первых трех тонов приведены на рис. 16. Для того чтобы убедиться, что теория длинных волн дана в только что рассмотренном примере удовлетворительные результаты, проверим условие применимости этой теории (7.1). Минимальная длина волны соответствует третьему из рассмотренных тонов колебания

$$\lambda_{\text{мин}} = l_2 \pi / \chi_3.$$

Приведенная толщина внешнего слоя жидкости — $H = 1$; внутреннего — $H^* = r_0/2 = 1$. Находим

$$(\pi H / \lambda_3)^2 \approx (\chi_3 / l_0)^2 = 0,196 \ll 1;$$

$$(\pi H^* / \lambda_3)^2 \approx (\chi_3 / l_0)^2 = 0,196 \ll 1.$$

Таким образом, условие (7.1) выполняется в расчете как по внешнему, так и по внутреннему слою жидкости. Теперь вернемся к примеру, уже рассмотренному в предыдущем параграфе (стр. 53), и используем в расчете форм и частот колебаний аппарата

теории длинных волн. Имеем $\Lambda = 0$, $\bar{l}_1 = \bar{l}_2 = 0$, $\bar{l}_3 = 1$, $m_1 = \pi / l_1 = 0,427$. Рассчитаем $m_1 = m_3 = m_4 = 0$, $m_2 = 1$. Характеристическое уравнение

$$\cos \chi = 0. \quad (a)$$

Корни уравнения (а): $\chi_j = \pi (2j-1)/2$ ($j = 1, 2, \dots$). Нормированные фундаментальные функции интегрального уравнения (7.7) (формы собственных колебаний)

$$f_j(s) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi(2j-1)s}{2}$$

$$(j = 1, 2, \dots).$$

Фундаментальные числа λ_j

$$\lambda_j = \frac{\chi_j^2}{1+\Lambda} = \frac{\pi^2(2j-1)^2}{4}$$

$$(j = 1, 2, \dots).$$

Безразмерная частота

$$\Omega_j = \frac{c}{\pi} \sqrt{\lambda_j} = \frac{\pi}{2} j^2$$

$$(j = 1, 2, \dots).$$

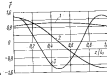


Рис. 16. Формы колебаний оболочки, сопоставляющиеся со слоями жидкости, рассчитанные по теории длинных волн.

1 — 1-й тон; 2 — 2-й тон; 3 — 3-й тон.

В рассматриваемом примере $\alpha \approx 0,427$. Следовательно, $\Omega_1 = 0,2135$, $\Omega_2 = 0,6405$, $\Omega_3 = 1,0675$.

Итак, по схеме Бубнова — Галеркина ($N = 10$) с использованием «точных» уравнений $\Omega_1 = 0,2165$; в рамках теории длинных волн — $\Omega_2 = 0,2135$.

На рис. 17 приведено сравнение форм колебаний, рассчитанных этими способами. Как видно, частоты собственных колебаний и формы их непосредственной близости к концу оболочки $x = l_2$ почти совпадают. Это подтверждает возможность использования теории длинных волн для расчета колебаний системы оболочка — жидкость ограниченного размера в пределах низших тонов. Вместе с тем это совпадение дает косвенную информацию о сложности метода Бубнова — Галеркина применительно к последующей задаче.

Принадлежность несложно построить решение в рамках теории длинных волн и для случая, когда не только внутренняя, но и внешняя стенки системы на участке длиной l_1 образованы из тонких упругих оболочек (рис. 15, б). Остановившись на этом варианте системы, отметим, что из (1) величины, отнесенные к внутренней оболочке ($w^{(1)}$, $A_0^{(1)}$), индексом (2) — к внешней ($w^{(2)}$, $A_0^{(2)}$), звездочкой — к внутреннему слою жидкости (φ^* , H^* , q^*) и без звездочки — к внешнему (φ , H , q).

В рамках теории длинных волн уравнения движения систем оболочек принимают вид

$$\begin{aligned}\omega^{(1)} &= \frac{\partial^2 \varphi}{A_0^{(1)}} \varphi + \frac{\partial^2 \varphi^*}{A_0^{(1)}} \varphi^*; \\ \omega^{(2)} &= \frac{\partial^2 \varphi}{A_0^{(2)}} \varphi.\end{aligned}\quad (7.27)$$

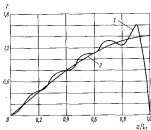


Рис. 17. Сравнение форм колебаний.
1 — метод Бубнова-Галеркина ($M=10$); 2 — теория длинных волн.

Если представить радиальные перемещения $\omega^{(1)}(s, t)$ и $\omega^{(2)}(s, t)$ в виде разложений по $\sin kx$

$$\begin{aligned}\omega^{(1)}(s, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(1)}(t) \sin kx; \\ \omega^{(2)}(s, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(2)}(t) \sin kx,\end{aligned}$$

то при одномерном течении жидкости выражения для потенциалов φ и φ^* приводятся к виду

$$\begin{aligned}\varphi(s, t) &= \frac{H}{\pi^2 H} \sum_{k=1}^{\infty} [\delta_k^{(1)}(t) - \delta_k^{(2)}(t)] \left(\frac{\sin kx}{k} + \frac{\partial x + \partial_0 \partial_1}{k} \pi \right); \\ \varphi^*(s, t) &= -\frac{H}{\pi^2 H^2} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(2)} \left(\frac{\sin kx}{k} + \frac{(-1)^{k+1} s}{k} \pi \right),\end{aligned}\quad (7.28)$$

где

$$H = \frac{[c_1^2 - c_2^2]}{2\alpha_1}, \quad H^* = \frac{c_1}{2},$$

как и прежде в качестве характерной скорости с приемом величину

$$c_0 = \sqrt{A_0^{(1)} H / \rho r^2}.$$

Применяя к (7.27) процедуру, которой мы уже пользовались при построении интегрального представления функции φ (в процессе вывода уравнения (7.7)), найдем

$$\varphi(s, t) = \frac{H}{\pi} \int_0^1 K_1(s, y) [\omega^{(1)}(y, t) - \omega^{(2)}(y, t)] dy, \quad (7.29)$$

$$\varphi^*(s, t) = -\frac{H}{\pi^2} \int_0^1 K_2(s, y) \omega^{(2)}(y, t) dy.$$

Здесь

$$K_1(s, y) = \begin{cases} asy + bs + c_1y + d_1 & s \leq y; \\ asy + c_1s + by + d_1 & s > y; \end{cases} \quad (a)$$

$$K_2(s, y) = \begin{cases} -y + 1 & s \leq y; \\ -s + 1 & s > y. \end{cases}$$

Коэффициенты

$$a = -\bar{l}_1, \quad d = d_1 + \Lambda;$$

$$b = (1 - \bar{l}_2), \quad c_1 = -\bar{l}_1;$$

$$c = c_2 - \Lambda; \quad d_1 = \bar{l}_2 \left(\frac{l_1 + l_2}{l_1} \right).$$

Подставим (7.29) в (7.27)

$$\begin{aligned}\omega^{(1)}(s, t) &= \frac{\partial^2 \varphi}{A_0^{(1)} H} \int_0^1 K_1 [\omega^{(1)} - \omega^{(2)}] dy - \\ &\quad - \frac{\partial^2 \varphi^*}{A_0^{(1)} H^2} \int_0^1 K_2 \omega^{(2)} dy,\end{aligned}\quad (7.30)$$

$$\omega^{(2)}(s, t) = \frac{\partial^2 \varphi}{A_0^{(2)} H} \int_0^1 K_1 [\omega^{(1)} - \omega^{(2)}] dy. \quad (7.31)$$

После перехода к безразмерной форме и разделения переменных получим систему двух однородных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= \lambda \int_0^1 K_1(x, y) (f^{(0)}(y) - f^{(1)}(y)) dy + \\ &+ \lambda \Lambda \int_0^1 K_2(x, y) f^{(0)}(y) dy, \\ f^{(1)}(x) &= \lambda \frac{1}{\alpha} \int_0^1 K_1(x, y) (f^{(0)}(y) - f^{(1)}(y)) dy, \end{aligned} \quad (7.32)$$

где

$$\lambda = \frac{x^2 \omega^2}{a^2}, \quad \alpha = \frac{A^2 \bar{v}_1^2}{A_0^2 \bar{v}_2^2}, \quad \Lambda = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Дифференцируя дважды по x выражение (7.32), получим

$$\begin{aligned} f^{(0\prime\prime)} + \lambda(b-c) f^{(1)} - \lambda(b-c) f^{(0)} &= 0; \\ \alpha f^{(0\prime\prime)} - \lambda(b-c) f^{(1)} + \lambda(b-c) f^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Решение дифференциальных уравнений (7.32) имеет вид

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= B_1 \cos \beta_1 x + B_2 \sin \beta_1 x + \\ &+ M_1 \cos \beta_2 x + M_2 \sin \beta_2 x; \\ f^{(1)}(x) &= \left[1 + \Lambda - \frac{\beta_1^2 (1 + \Lambda + 1/\alpha)}{2} \right] (B_1 \cos \beta_1 x + B_2 \sin \beta_1 x) + \\ &+ \left[1 + \Lambda - \frac{\beta_2^2 (1 + \Lambda + 1/\alpha)}{2} \right] (M_1 \cos \beta_2 x + M_2 \sin \beta_2 x), \end{aligned} \quad (7.34)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_{1,2} &= \sqrt{\frac{\lambda}{2} (1 + \Lambda + 1/\alpha)}, \\ \beta_{1,2} &= \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\Lambda}{\alpha^2 (1 + \Lambda + 1/\alpha)^2}}}. \end{aligned}$$

Легко показать, что при $\Lambda \geq 0$ имеет место неравенство

$$0 \leq \frac{4\Lambda}{\alpha^2 (1 + \Lambda + 1/\alpha)^2} < 1.$$

обеспечивающее вещественность значений β_i ($i = 1, 2$). Положим для сокращения записей:

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^1 y f^{(0)}(y) dy &= C_1; \quad \lambda \int_0^1 f^{(1)}(y) dy = D_1; \\ \lambda \int_0^1 y f^{(1)}(y) dy &= C_2; \quad \lambda \int_0^1 f^{(0)}(y) dy = D_2. \end{aligned}$$

Из интегральных уравнений (7.32), в которых $K_1(x, y)$ и $K_2(x, y)$ известно по формулам (2), получим, полагая $x = 0$ и $x = 1$,

$$\begin{aligned} f^{(0)}(0) &= cC_1 + dD_1 - c_1C_2 - d_1D_2; \\ f^{(1)}(1) &= (a+b)C_1 + (c+d)D_1 - (a+d)C_2 - (c_1+d_1)D_2; \\ \alpha f^{(0)}(0) &= -c_1C_1 - d_1D_1 + c_2C_2 + d_2D_2; \\ \alpha f^{(1)}(1) &= -(a+b)C_1 - (c_1+d_1)D_1 + (a+d)C_2 + (c_1+d_1)D_2; \\ f^{(0\prime\prime)}(0) &= aC_1 + bD_1 - aC_2 - bD_2; \\ f^{(1\prime\prime)}(1) &= aC_1 + cD_1 - aC_2 - cD_2; \\ \alpha f^{(0\prime\prime)}(0) &= -aC_1 - bD_1 + aC_2 + bD_2; \\ \alpha f^{(1\prime\prime)}(1) &= -aC_1 - cD_1 + aC_2 + cD_2. \end{aligned}$$

Исключая C_1 , C_2 , D_1 и D_2 из этих уравнений, получим граничные условия для неизвестных функций $f^{(0)}(x)$ и $f^{(1)}(x)$

$$\begin{aligned} F_{11} f^{(0)}(0) + F_{12} f^{(0\prime\prime)}(0) + F_{13} f^{(1)}(1) + F_{14} f^{(1\prime\prime)}(1) + \\ + F_{15} f^{(1\prime)}(1) + F_{16} f^{(0\prime\prime)}(0) = 0, \\ F_{21} f^{(0)}(0) + F_{22} f^{(0\prime\prime)}(0) + F_{23} f^{(1)}(1) + F_{24} f^{(1\prime\prime)}(1) + \\ + F_{25} f^{(1\prime)}(1) + F_{26} f^{(0\prime\prime)}(0) = 0, \\ f^{(0\prime\prime)}(0) + \alpha f^{(1\prime\prime)}(1) = 0; \quad f^{(0)}(1) + \alpha f^{(1)}(1) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_{11} &= -2\bar{l}_1; \quad F_{12} = -2\alpha(\bar{l}_2 + \Lambda); \quad F_{13} = -\Lambda\bar{l}_2; \\ F_{14} &= -\Lambda \frac{\bar{l}_2(\bar{l}_2 + \bar{l}_1)}{\bar{l}_1}; \\ F_{15} &= -2\bar{l}_1; \quad F_{16} = -\alpha[2\bar{l}_2(1 + \Lambda) + \Lambda\bar{l}_2^2/\bar{l}_1]; \\ F_{21} &= -2\bar{l}_1; \quad F_{22} = -2\alpha(2 + \Lambda); \quad F_{23} = -\bar{l}_1\Lambda; \\ F_{24} &= \bar{l}_2\Lambda; \quad F_{25} = -2\bar{l}_1; \\ F_{26} &= \alpha[\bar{l}_2^2/\bar{l}_1 + (\bar{l}_2 - \bar{l}_1)(1 + \Lambda) - \Lambda]. \end{aligned}$$

Порядок последующего расчета не отличается от уже рассмотренного выше применительно к вариату системы, включающей лишь одну упругую оболочку.

Получим условие ортогональности собственных функций системы (7.32), важное для последующих приложений.

Пусть $k_1 \neq k_2$ — фундаментальные числа уравнений (7.32); $f_1^{(1)}$, $f_1^{(2)}$ и $f_2^{(1)}$, $f_2^{(2)}$ — соответствующие им собственные функции.

Введем обозначение

$$Kf = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy.$$

Имеем из (7.32)

$$f_1^{(1)} = k_1 K f_1^{(1)} - k_2 K f_1^{(2)} + k_2 A K f_2^{(1)};$$

$$f_1^{(2)} = -\frac{k_1}{\alpha} K f_1^{(1)} + \frac{k_2}{\alpha} K f_1^{(2)}; \quad (a)$$

$$f_2^{(1)} = k_2 K f_2^{(1)} - k_1 K f_2^{(2)} + k_1 A K f_1^{(1)};$$

$$f_2^{(2)} = -\frac{k_2}{\alpha} K f_2^{(1)} + \frac{k_1}{\alpha} K f_2^{(2)}. \quad (b)$$

Уравнения (a) умножим скалярно соответственно на $f_1^{(2)}$ и $\alpha f_2^{(2)}$ и сложим

$$(f_1^{(1)}, f_1^{(2)}) + \alpha (f_1^{(2)}, f_2^{(2)}) = k_1 [(f_1^{(1)}, K f_1^{(1)}) - (f_1^{(2)}, K f_1^{(2)}) + \\ + \Lambda (f_2^{(1)}, K f_2^{(1)}) - (f_2^{(2)}, K f_2^{(2)}) + (f_1^{(1)}, K f_2^{(2)})]. \quad (a)$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ — знак скалярного произведения.

Из уравнений (b) найдем

$$K f_1^{(1)} = \frac{f_1^{(1)} + f_1^{(2)} \alpha}{k_2 \Lambda}, \quad K f_1^{(2)} - K f_2^{(2)} = -\frac{f_2^{(2)} \alpha}{k_1}. \quad (r)$$

Подстановка (r) в (a) дает

$$(f_1^{(1)}, f_1^{(2)}) + \alpha (f_1^{(2)}, f_2^{(2)}) = \frac{k_1}{\Lambda} [(f_1^{(1)}, f_1^{(1)}) + \alpha (f_2^{(2)}, f_2^{(2)})],$$

но $k_1 \neq k_2$ и, следовательно, необходимо, чтобы

$$(f_1^{(1)}, f_1^{(1)}) + \alpha (f_2^{(2)}, f_2^{(2)}) = 0.$$

Таким образом, условие ортогональности функций f_n и f_m имеет вид

$$\int_0^1 (f_n^{(1)} f_m^{(1)} + \alpha f_n^{(2)} f_m^{(2)}) dx = 0. \quad (7.35)$$

В заключение параграфа рассмотрим применение теории дающих волн к расчету свободных колебаний систем, включающих оболочку вращения, слабо отличающуюся от цилиндрической (рис. 15,в). Уравнения теории дающих волн в данном случае уже не могут быть получены в результате упрощения общих соотношений, приведенных в § 6, так как последние составлены применительно к цилиндрическим системам. Здесь мы используем прием, который применяется, в частности, при исследовании приливных волн в воде переменной глубины [32].

Пусть $S(x)$ — текущая площадь сечения слоя жидкости; S_0 , r_{10} — площадь сечения слоя жидкости и радиус оболочки при $x = 0$; $S \sim S/S_0$; u — скорость движения жидкости в направлении оси x ; w — радиальное перемещение оболочки; p^* — давление, вызванное колебанием системы; f_0 — форма колебания давления на участке $0 \leq x \leq 1$, где $x = x/l$; $l = (r_0^2 - r_{10}^2)/2r_{10}$ — характерный линейный размер; $c = \sqrt{\frac{\Delta p^*}{\rho^* l_0}}$ — характерная скорость; $r_1/r_{10} = \tilde{r}$.

Воспользуемся следующими соотношениями: линеаризованным уравнением одномерного движения идеальной жидкости в форме Эйлера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x}; \quad (a)$$

линеаризованным уравнением сплошности

$$\frac{\Delta S u_0}{\Delta x} = -2\pi r_1 \frac{\partial w}{\partial t}; \quad (b)$$

соотношением упругости

$$w = \frac{p^* r_1^2}{A_0}. \quad (c)$$

Объединяя (a), (b) и (c), получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial p^*}{\partial x} \right) = \frac{2\pi r_1^2}{A_0} \rho \frac{\partial p^*}{\partial t}. \quad (7.36)$$

Рассуждая так же, как при выводе условий (6.50) и (6.51), получим граничные условия для давления

$$p^* - l_0 \partial p^* / \partial x = 0 \quad \text{при } x = 0; \\ p^* + l_0 \partial p^* / \partial x = 0 \quad \text{при } x = 1. \quad (7.37)$$

После перехода к безразмерной форме и разделения переменных в (7.36) задача расчета свободных колебаний системы сводится к решению однородного уравнения

$$(Sf_{\alpha}') + \lambda^2 f_{\alpha} = 0 \quad (7.38)$$

при граничных условиях

$$f_{\alpha}(0) - \frac{t_{\alpha}}{t_0} f_{\alpha}(0) = 0,$$

$$f_{\alpha}(1) + \frac{t_{\alpha}}{t_0} f_{\alpha}(1) = 0. \quad (7.39)$$

В (7.38)

$$\lambda = \alpha^2 \Omega^2 / \omega^2 \quad (\alpha = \lambda / l_0).$$

Из выражения (а) видно, что форма радиальной перемещения оболочки $f(\lambda)$ связана с $f_{\alpha}(\lambda)$ соотношением

$$f(\lambda) = \kappa^2 f_{\alpha},$$

где κ — коэффициент пропорциональности.

Уравнение (7.38) в точности совпадает с уравнением продольных и крутильных колебаний стержней первого сечения. Однако граничные условия (7.39) необычны для задачи колебаний стержней. Покажем, что и в этом случае собственные функции f_{α} ортогональны между собой с весом r^2 . Предположим, что нам дано некоторое бесконечное семейство пар собственных значений и собственных функций, удовлетворяющих уравнению (7.38) и граничным условиям (7.39). Они представляются в виде

$$\lambda_1 f_{\alpha 1}, \lambda_2 f_{\alpha 2}, \dots, \lambda_n f_{\alpha n}.$$

Подставляя две различные пары, отвечающие соответственно индексам m и n , в уравнение (7.38), найдем

$$(Sf_{\alpha m}') - \lambda_m r^2 f_{\alpha m} = 0; \quad (a)$$

$$(Sf_{\alpha n}') - \lambda_n r^2 f_{\alpha n} = 0. \quad (б)$$

Умножив уравнения (а) и (б) соответственно на $f_{\alpha n}$ и $f_{\alpha m}$ и интегрируя по λ от нуля до единицы, получим

$$\int_0^1 (Sf_{\alpha m}') f_{\alpha n} d\lambda = \lambda_m \int_0^1 r^2 f_{\alpha m} f_{\alpha n} d\lambda; \quad (в)$$

$$\int_0^1 (Sf_{\alpha n}') f_{\alpha m} d\lambda = \lambda_n \int_0^1 r^2 f_{\alpha n} f_{\alpha m} d\lambda. \quad (г)$$

Вычитая уравнение (г) из (в), находим

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^1 r^2 f_{\alpha m} f_{\alpha n} d\lambda = \int_0^1 [(Sf_{\alpha m}') f_{\alpha n} - (Sf_{\alpha n}') f_{\alpha m}] d\lambda. \quad (д)$$

Интегрируя правую часть по частям, получаем

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^1 r^2 f_{\alpha m} f_{\alpha n} d\lambda = (Sf_{\alpha m} f_{\alpha n} - Sf_{\alpha n} f_{\alpha m}) \Big|_0^1. \quad (е)$$

При выполнении граничных условий (7.39) правая часть уравнения (е) обращается в нуль. Таким образом, функции $f_{\alpha m}(\lambda)$ и $f_{\alpha n}(\lambda)$ ортогональны между собой с весом r^2

$$\int_0^1 r^2 f_{\alpha m} f_{\alpha n} d\lambda = 0. \quad (7.40)$$

Обычный путь приближенного расчета собственных функций и собственных значений краевой задачи (7.38), (7.39) состоит в том, что искомое решение представляется в виде разложения по функциям, удовлетворяющим граничным условиям (7.39), и далее применяется метод Бубнова—Галеркина. В качестве координатных функций можно взять уже изученные нами формы собственных колебаний цилиндрической системы оболочка—жидкость, удовлетворяющей тем же граничным условиям (7.39). Применение метода Бубнова—Галеркина сводит задачу расчета форм и частот собственных колебаний к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Глава II

ДИНАМИЧЕСКАЯ РЕАКЦИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА АПЕРИОДИЧЕСКУЮ НАГРУЗКУ

§ 6. Постановка задачи. Исходные уравнения

В главе изучается распространение упругих нестационарных осесимметричных волн в полубесконечной системе цилиндрической оболочки—жидкость. Жидкость может находиться как внутри оболочки, так и вне ее. Исследуются случаи тонкого слоя жидкости, ограниченного жесткой стенкой, и безграничной акустической среды. Отдельно рассматривается вопрос о возможности существования стационарных волн в бесконечной цилиндрической системе. Полученные в главе результаты расширяют и обобщают известные решения о динамической реакции соприкасающихся с жидкостью оболочек на осесимметричную нагрузку. Кроме того, анализ строгих решений для полубесконечной системы позволяет обоснованно перейти к расчету систем ограниченной длины.

Сначала рассмотрим вынуждаемые колебания полубесконечной осесимметричной цилиндрической системы оболочка — сжимаемая жидкость.¹ Жидкость либо заполняет внутреннюю полость оболочки, либо находится в цилиндрическом слое между оболочкой и абсолютно жесткой стенкой (рис. 18). Концы оболочки, совпадающей со свободной поверхностью жидкости, имеют шарнирно-подвижную опору. Источник колебания — переменное во времени давление, равномерно распределенное по свободной поверхности жидкости. Оболочка нагружена от переменных во времени осевых сил. Давление начинает действовать на свободную поверхность в момент времени $t = 0$ и в последующем изменяется по закону $p^*(t)$. Начальные условия нулевые. Прогнбы оболочки и возмущения жидкости будем считать достаточно малыми, чтобы можно было рассматривать всю задачу в линейной постановке. Решение строится в предположении о возможности пренебречь

в данной задаче силами инерции вращения и поперечным сдвигом. Законность такого подхода должна быть, конечно, опенена исходя из анализа полученных решений. Оставим без изменения обозначения, введенные в первой главе.

В линейной системе суммарное давление на оболочку равно давлению на недеформированную оболочку, сложившему с дополнительным давлением p^* , вызванным колебанием оболочки в жидкости. Первая составляющая — $p^0 (c_0 t - x) \operatorname{sign} \Delta r$ плоская волна, распространяющаяся без искажений вдоль системы. Дополнительное давление p^* связано с потенциалом скорости возмущенного движения интегралом Коши

$$p^* = -\rho [\dot{\psi}]_{r=r_0}.$$

Объединяя уравнения осесимметричных колебаний оболочки (1.2) и волновое уравнение для жидкости (2.1), получим с учетом действия внешнего давления p^0 следующие зависимости:

$$L_{11}u + L_{22}w = -p^0 u;$$

$$L_{22}u + L_{33}w = -p^0 w - \operatorname{sign} \Delta r [\dot{\psi}]_{r=r_0} + p^0 (c_0 t - x) \operatorname{sign} \Delta r;$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{1}{c_0^2} \ddot{\psi}. \quad (8.1)$$

Граничные условия:
для оболочки

$$[\omega]_{x=0} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=0} = \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0} = 0, \quad (8.2)$$

для жидкости

$$\left[\frac{\partial \tau}{\partial r} \right]_{r=r_0} = [\psi]_{r=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \right]_{r=r_0} = -\dot{\omega}. \quad (8.3)$$

Начальные условия при $t = 0$

$$u = \dot{u} = w = \dot{w} = \psi = \dot{\psi} = 0. \quad (8.4)$$

Уравнения (8.1) и условия (8.2)—(8.4) являются исходными в задаче о распространении нестационарных упругих волн в полу-

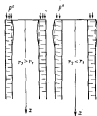


Рис. 18. К расчету стационарных волн в полубесконечной осесимметричной системе оболочка — акустическая среда.

¹ Этот вопрос рассматривался в [42].

бесконечной системе оболочка—акустическая среда. С целью упрощения последующих выкладок сведем уравнение задан и граничные условия к безразмерному виду, воспользовавшись относительной системой координат, положив $\xi = 1$, $l \sim N = 1$, $p = 1$ (§ 4). Первые два уравнения в системе (8.1) при переходе к безразмерной форме принимают вид:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + k_2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{i}{c_2^2} \ddot{u} = 0, \quad (8.5)$$

$$-k_4 \frac{\partial u}{\partial \xi} + k_2 u + k_3 \frac{\partial w}{\partial \xi} - k_3 \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{i}{c_1^2} (m^2 w + [q]_{\xi=1} \text{sign } \Delta r) = \frac{p^2 k_3 (1-\kappa)}{c_1^2} \text{sign } \Delta r, \quad (8.6)$$

Форма записи третьего уравнения в (8.1), граничных и начальных условий задачи не изменится, если для безразмерных величин сохранить те же обозначения, что и для соответствующих размерных.

Расшифровка обозначений $k_2, \dots, c_1, \tau$ приведена в § 4.

§ 3. Интегральное представление импульсной реакции системы

Сначала найдем реакцию системы на давление, изменяющееся по закону $\delta(t)$, имея в виду, что при расчете линейной системы на произвольную нагрузку может быть использован принцип наложения. $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, которую следует интерпретировать как символ предельного перехода, когда нагрузка $p^2(t)$ сначала действует в течение отрезка времени t , который затем сокращается, при этом волный импульс нагрузки остается постоянным и равным единице. При действии на свободную поверхность импульса $\delta(t)$ оболочка (в недеформированном состоянии) загружается подложкой симметричной нагрузкой интенсивностью $c_0 \delta(c_0 t - x)$, распределенной вдоль линии $x = c_0 t$.

Продифференцируем (8.5) по x

$$-\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} + k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{i}{c_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial t} = 0. \quad (9.1)$$

Далее, полагая, что все функции и их производные, входящие в уравнения задачи, обращаются в нуль при больших значениях аргумента x , получим после применения синус-преобразования функции к уравнениям (8.6), (9.1), волновому уравнению, граничным и начальным условиям

$$-u^2 u'' + k_2 u^2 u' - \frac{i}{c_2^2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial \xi^2} = 0, \quad (9.2)$$

$$-k_4 u'' + (k_2 + k_2 u^2 + k_2 u^2) u' + \frac{c_0^2}{c_1^2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \frac{i}{c_1^2} \left[\frac{\partial u^2}{\partial t} \right]_{\xi=1} \text{sign } \Delta r = \frac{i}{c_1^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} c_0 \sin c_0 t \text{sign } \Delta r; \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial^2 u^2}{\partial \xi^2} + \frac{i}{c_2^2} \frac{\partial u^2}{\partial \xi} - \omega^2 u^2 - \frac{i}{c_2^2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} = 0; \quad (9.4)$$

$$\left[\frac{\partial u^2}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} = 0; \quad (9.5)$$

$$\left[\frac{\partial u^2}{\partial t} \right]_{\xi=1} = -\frac{\partial u^2}{\partial t}; \quad (9.6)$$

$$u^2 = \frac{\partial u^2}{\partial t} = u^2 = \frac{\partial u^2}{\partial t} = u^2 = \frac{\partial u^2}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0, \quad (9.7)$$

где

$$(u^2, u', u'', u''') = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, u' \right) \sin \alpha x dx; \quad (9.8)$$

$\omega = \pi/k_2$.

Только что написанные уравнения описывают колебания линейной системы с фиксированной вдоль оси x формой $\sin \alpha x$ под действием периодической силы, изменяющейся с частотой (безразмерной) c_0 . В общем случае результирующим перемещением такой системы является суперпозиция простых гармонических движений с частотами собственных колебаний $\Omega(\omega)$ и частотой вынужденных колебаний c_0 . Однако исследуемая неоднородная задача обладает неслучайным свойством: ее частное решение — чисто вынужденные колебания оболочки с частотой c_0 — тождественно равно нулю.

В самом деле, как было показано ранее, при колебаниях с частотой $\Omega = c_0$ (см. § 2) присоединения масса системы обращается в бесконечность. Слой жидкости ведет себя по отношению к оболочке подобно динамическому гасителю колебаний. Следовательно, амплитуды таких колебаний должны равняться нулю.

Таким образом, при изменении возмущающей силы по закону $\sin c_0 t$ в системе оболочка—акустическая среда с фиксированной вдоль оси x формой $\sin \alpha x$ могут возбуждаться лишь простые гармонические движения с частотами собственных колебаний системы Ω , соответствующими данному числу α . Более того, никакое стационарное возмущение не может распространиться вдоль такой оболочки (при ее осесимметричном колебании в жидкости) со скоростью звука в акустической среде c_0 . Это обстоятельство было давно подтверждено экспериментально при исследова-

нии гидравлического удара в трубах, однако вплоть до последнего времени упускалось из вида некоторыми авторами при построении теоретических решений [90, 94].

Применив преобразование Лапласа, получим после отображения (9.2)–(9.7) на плоскость комплексной переменной z

$$-\omega^2 u^{PL} + k_2 u^2 w^{PL} - \frac{1}{c_1^2} z^2 u^{PL} = 0, \quad (9.9)$$

$$-k_2 u^{PL} + \left(k_3 + k_1 \omega^2 + k_2 \omega^2 + \frac{m_0 \omega^2}{c_1^2} \right) w^{PL} + \frac{1}{c_1^2} \{ \varphi^{PL} \}_{r=r_0} \operatorname{sign} \Delta r = \\ = \frac{1}{c_1^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{c_2^2 \omega}{z^2 + c_2^2 \omega^2} \operatorname{sign} \Delta r; \quad (9.10)$$

$$\frac{\partial \varphi^{PL}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^{PL}}{\partial r} - \left(\omega^2 + \frac{v^2}{c_0^2} \right) \varphi^{PL} = 0; \quad (9.11)$$

$$\left[\frac{\partial \varphi^{PL}}{\partial r} \right]_{r=r_0} = -\Delta w^{PL}; \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r=r_0} = 0, \quad (9.12)$$

Где

$$(u^{PL}, w^{PL}, \varphi^{PL}) = \int_0^{\infty} (u^P, w^P, \varphi^P) e^{-it} dt. \quad (9.13)$$

Решение краевой задачи (9.11), (9.12) дает

$$\{ \varphi^{PL} \}_{r=r_0} = \pi \omega_0 w^{PL} \operatorname{sign} \Delta r. \quad (9.14)$$

Функция ω_0 определяется выражением (4.8), в котором при вычислении β следует заменить Ω величиной $i\omega$,

$$\omega_0 = \frac{1}{\omega \beta(\omega)}; \quad \beta = \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{c_2^2 \omega^2}}. \quad (9.15)$$

Используя формулу (9.14), исключим φ^{PL} из (9.10). В результате из трех уравнений (9.9)–(9.11) сохраняются лишь два:

$$(\omega^2 + v^2/c_0^2) u^{PL} - k_2 u^2 w^{PL} = 0;$$

$$-k_2 u^{PL} + \left[k_3 + k_1 \omega^2 + k_2 \omega^2 + \frac{1}{c_1^2} (\pi^2 + \omega_0^2) \right] w^{PL} = \\ = \frac{1}{c_1^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{c_2^2 \omega}{z^2 + c_2^2 \omega^2} \operatorname{sign} \Delta r. \quad (9.16)$$

Применив формулу обращения, найдем

$$u^P = -\frac{\operatorname{sign} \Delta r}{2\pi i} \int_{-c_2^2 \omega^2 - i0}^{c_2^2 \omega^2 + i0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{c_2^2 \omega (z^2 + c_2^2 \omega^2) e^{i\sqrt{z} s}}{c_1^2 (z^2 + c_2^2 \omega^2) D(z)} dz; \quad (9.17)$$

$$w^P = \frac{\operatorname{sign} \Delta r}{2\pi i} \int_{-c_2^2 \omega^2 - i0}^{c_2^2 \omega^2 + i0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\pi}{z} \frac{c_2^2 \omega^2 e^{i\sqrt{z} s}}{c_1^2 (z^2 + c_2^2 \omega^2) D(z)} dz, \quad (9.18)$$

где определитель системы (9.16)

$$D(z) = \begin{vmatrix} \omega^2 + \frac{v^2}{c_0^2} & -k_2 \omega^2 \\ -k_2 & k_3 + k_1 \omega^2 + k_2 \omega^2 + \frac{v^2}{c_1^2} (\pi^2 + \omega_0^2) \end{vmatrix}. \quad (9.19)$$

Наметим путь вычисления интегралов (9.17) и (9.18). Так как определители однородной системы (4.19) и системы (9.16) одинаковы, то подынтегральные функции в (9.17) и (9.18) должны иметь простые полюсы в точках $z = \pm i\Omega_0$, соответствующие каждому значению частоты свободных колебаний Ω_0 при данном ω . Комплексные интегралы (9.17) и (9.18) не имеют никаких других особенностей, кроме только что указанных полюсов. Может показаться, что подынтегральные функции обладают особенностью в точках $z = \pm i\omega c_2$. Действительно, $z = \pm i\omega c_2$ — точки ветвления радикала

$$\beta = \sqrt{1 + z^2/\omega^2 c_2^2}. \quad (a)$$

Однако функция $D(z)$, содержащая этот радикал (β входит в ω_0), в окрестности этих точек остается однозначной. Обойдя по замкнутому контуру одной из этих точек будет менять знак у выражения (a), однако это не меняет функцию $D(z)$. Легко проверить, что точки $z = \pm i\omega c_2$ не являются а полюсами (исчеты подынтегральной функции в них равны нулю). Последнее обстоятельство еще раз указывает на невозможность распространения возмущений в системе облучка — акустическая среда со скоростью, равной скорости звука в среде.

Таким образом устанавливается: 1) функции, стоящие под знаками интегралов в (9.17) и (9.18), регулярны и однозначны во всей плоскости комплексного переменного, за исключением изолированных полюсов, расположенных на мнимой оси ($z = \pm i\Omega_0$); 2) число полюсов бесконечно; 3) все полюсы простые. Следовательно, функции, стоящие под знаками интегралов в (9.17) и (9.18), — мероморфные [68, стр. 270]. Чтобы вычислить интегралы от мероморфных функций, рассмотрим интегралы, взятые по замкнутому

контур, состоящему из прямой, находящейся на расстоянии z слева от минной оси, и части окружности (дуги) слева от прямой) с центром в начале координат. Радиус ее R выбран таким образом, чтобы не встретить полюсов подынтегрального выражения. Можно показать, что интегралы по дуге окружности стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$, что позволяет при вычислении интегралов использовать вторую обобщенную теорему разложения [38]. Этот путь приводит к решению в форме бесконечного ряда, каждый член которого равен сумме подынтегральной функции в одном из полюсов. Группируя члены ряда в слагаемые, соответствующие парам корней $i\Omega_j$ и $-i\Omega_j$, получим выражение для перемещений, описываемых интегралами (9.17) и (9.18) в виде суперпозиции простых гармонических движений системы с частотами собственных колебаний Ω_j .

$$u^F = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{c_1^2} \frac{\text{sign } \Delta r}{c_1^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\omega^2 - \Omega_j^2) \sin \Omega_j t}{(1 - \Omega_j^2/\omega^2 c_1^2) [\partial \Omega / \partial \omega]_{\omega=\Omega_j}}; \quad (9.20)$$

$$u^F = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\text{sign } \Delta r)}{c_1^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \Omega_j t}{(1 - \Omega_j^2/\omega^2 c_1^2) [\partial \Omega / \partial \omega]_{\omega=\Omega_j}}. \quad (9.21)$$

Применяя формулу обращения для синус-преобразования Фурье, найдем следующие интегральные представления для импульсной реакции системы: радиального смещения u_R и относительной продольной деформации u_s^*

$$u_R(x, t) = \frac{4i \text{sign } \Delta r}{\pi c_1^2} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(1 - \Omega_j^2/\omega^2 c_1^2) \sin \Omega_j t \sin \omega x d\omega}{(1 - \Omega_j^2/\omega^2 c_1^2) [\partial \Omega / \partial \omega]_{\omega=\Omega_j}}; \quad (9.22)$$

$$u_s^*(x, t) = -\frac{2i}{\pi c_1^2} \text{sign } \Delta r \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \Omega_j t \sin \omega x d\omega}{(1 - \Omega_j^2/\omega^2 c_1^2) [\partial \Omega / \partial \omega]_{\omega=\Omega_j}}. \quad (9.23)$$

Один член ряда (9.22) или (9.23) описывает систему волн, распространяющуюся с дисперсией в положительном направлении оси x . Каждая такая система соответствует infinite одномерному типу колебаний (одной кривой в плоскости ω , $\Omega/\omega c_1$ — см. рис. 9). Фазовые скорости первой (основной) системы волн ($j=1$), принадлежащей к основному типу колебаний, меньше скорости звука в безграничной акустической среде c_s . Фазовые скорости последующих систем ($j > 1$) принимают скорость c_s и тем больше, чем больше j и меньше ω . Таким образом, результирующее перемещение складывается из бесконечного множества систем волн, распространяющихся с разными скоростями вдоль оси x . Каждая система

волн по мере движения непрерывно деформируется из-за присущего волновому явлению, которое мы рассматриваем, свойства дисперсии. Физически очевидно, что при разбеге радиальных перемещений, вызванных подвижной радиальной нагрузкой, практические значения имеют лишь колебания основного типа, при которых, как мы уже знаем (§ 4), податливость жидкости обусловлена прежде всего ее перетеканием в продольном направлении (а не сжимаемостью). Вклад основной системы волн $u_{s1}(x, t)$ в величину импульсной реакции найдем, удерживая в (9.22) первый член ряда.

$$u_{s1}(x, t) = \frac{4i \text{sign } \Delta r}{\pi c_1^2} \int_0^{\infty} \frac{\omega (1 - \Omega_1^2/\omega^2 c_1^2) \sin \Omega_1 t \sin \omega x d\omega}{(1 - \Omega_1^2/\omega^2 c_1^2) [\partial \Omega / \partial \omega]_{\omega=\Omega_1}}. \quad (9.24)$$

Продольные деформации $u_s^*(x, t)$ в пределах основной системы описываются первым членом ряда в (9.23). Совокупность остальных систем волн (сумма членов рядов (9.22) и (9.23) с $j > 1$) соответствует преимущественно продольным колебаниям оболочки, фазовые скорости которых группируются в малой окрестности $c_{\omega} \sim c_s$ (см. рис. 9). Для этих колебаний скорость c_s является групповой при всех ω . При продольных колебаниях с $c_{\omega} \sim c_s$ радиальное смещение u равно нулю, что видно из выражения (9.22). Если $c_{\omega} = c_s$, то числители подынтегральных выражений в (9.22) обращаются в нуль.

Выражение (9.24) легко упростить, если воспользоваться ранее полученным выводом о практической независимости движения системы в пределах основного типа колебаний от продольных сил инерции оболочки. Решение без учета продольных сил инерции получим, формально полагив в выражении (9.24) $c_s = \infty$. Определитель системы (9.16) $D(s)$ при $c_s = \infty$ принимает вид

$$D(s) = \omega^3 \left[1 + k_1 \omega^4 + k_2 \omega^6 + \frac{1}{c_1^2} (m_{\omega\omega} + m^2) \omega^8 \right]. \quad (9.25)$$

Дифференцируя (9.25) по s и используя выражение (9.15), найдем

$$\left[\frac{\partial D}{\partial s} \right]_{s=\omega} = -\frac{2i\omega s^2}{c_1^2} \left[\left(\frac{t}{\omega^2} + \frac{\partial}{\partial \omega} \right) \frac{\Omega_1^2 \omega^2}{2g_0^2} + m_{\omega\omega} + m^2 \right]_{\omega=\Omega_1}. \quad (9)$$

При $c_s = \infty$ Ω_1^2 и $m_{\omega\omega}$ связаны зависимостью (4.22)

$$\Omega_1^2 = \frac{c_1^2 (1 + k_1 \omega^4 + k_2 \omega^6)}{m_{\omega\omega} + m^2}. \quad (9)$$

Если воспользоваться соотношениями (а) и (б), то выражение (9.24) легко привести к виду

$$\omega_k(x, t) = \frac{2}{\pi} \operatorname{sign} \Delta r \int_0^{\pi} A(\omega) \sin \Omega t \sin \omega x d\omega, \quad (9.26)$$

где

$$A(\omega) = \frac{\Omega}{\tilde{c}_0^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2 c_0^2}\right) \left\{ \frac{\tilde{c}_0^2 \rho_0^2 \omega^2 (1 + k_1 \omega^4 + k_2 \omega^2)}{2 \tilde{c}_0^2 (\omega_0^2 + \omega^2)^2} \left[\frac{J}{\omega \tilde{c}_0} + \frac{dJ}{d(\omega \tilde{c}_0)} \right] + 1 \right\} (1 + k_1 \omega^4 + k_2 \omega^2)} \quad (9.27)$$

Здесь индекс 1 при Ω и ω_0 . При этом имеется в виду, что все последующее рассмотрение относится лишь к основной системе волн. Формула (9.26) дает в безразмерной форме интегральные представления реакции системы на единичный импульс давления $\delta(t)$. Для того чтобы перейти к размерной форме записи, следует умножить (9.26) на размерный комплекс J/c_0 , в котором J — импульсный импульс давления; c_0 — характерная скорость (§ 4) и ρ — массовая плотность жидкости, вычисленные в соответствующей системе единиц измерения.

Теперь получим решение в безразмерной форме для полного давления $p_k(x, t)$, соответствующего реакции $\omega_k(x, t)$. Прямых к интегралу Коши для избыточного давления $p^+ = -[\psi]_{\infty, \infty}$ синус-преобразование Фурье, найдем

$$p^{+F} = -[\psi^F]_{\infty, \infty},$$

где

$$p^{+F} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} p^+ \sin \omega x d\omega.$$

Пусть p^{+FL} — преобразование Лапласа для функции p^{+F} . Тогда

$$p^{+FL} = -s[\psi^F]_{\infty, \infty}. \quad (а)$$

Подстановка в (а) значения $s[\psi^F]_{\infty, \infty}$ из (9.9) и (9.10) при $c_2 = \infty$ дает

$$p^{+FL} = \left[\tilde{c}_0^2 (1 + k_1 \omega^4 + k_2 \omega^2) \omega^2 + \omega^2 s^2 \omega^2 \right] \operatorname{sign} \Delta r - \\ - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tilde{c}_0^2}{s^2 + \tilde{c}_0^2 \omega^2}.$$

откуда

$$p_k^+ = \operatorname{sign} \Delta r \left\{ \int_0^{\pi} \left[\tilde{c}_0^2 (1 + k_1 \omega^4 + k_2 \omega^2) \omega^2 + \omega^2 s^2 \omega^2 \right] \sin \omega x d\omega - \right. \\ \left. - c_0^2 (c_0^2 - s^2) \right\}. \quad (б)$$

Если учесть, что

$$\omega^2 = \frac{2}{\pi} \operatorname{sign} \Delta r A(\omega) \sin \Omega t,$$

то из (б) можно получить следующее выражение для полного давления в пределах основной системы волн:

$$p_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} A(\omega) \left[\tilde{c}_0^2 (1 + k_1 \omega^4 + k_2 \omega^2) - \omega^2 \Omega^2 \right] \sin \Omega t \sin \omega x d\omega, \quad (9.28)$$

Формулы (9.26) и (9.28) дают искомое решение задачи об импульсной реакции системы в пределах основной системы волн. Стремись, естественно, исследовать характер движений выражаемыми вышеуказанными соотношениями, мы сталкиваемся, как и почти во всех задачах такого типа, с тем, что относительно просто получить интегральные представления для решения, но не всегда легко подробно изучить его свойства. Причина этого состоит в том, что решения даются в виде интегралов, у которых подынтегральная функция имеет колебательный характер, и для представляющих интерес областей изменения независимых переменных меняются очень сильно даже при малых интервалах изменения переменных интегрирования. Эти движения, как это будет видно из последующего, в действительности носят сложный характер и, следовательно, мыло сказать, что их математическое описание представляет некоторые трудности. Природу решений, представленных формулами (9.26) и (9.28), можно разъяснить разложением подынтегрального выражения в степенные ряды и почленным интегрированием последних. Такой прием использовался например при изучении нестационарных волн на поверхности тяжелой жидкости [70]. Однако получаемые в результате этого ряды практически пригодны только для малых значений t . Во многих отношениях нецелесообразно находить асимптотические представления движения, пригодные в данном случае при больших t , для которых степенные ряды оказываются малоприменимыми в силу большой ско-

§ 10. Гидродинамическая аналогия

Для ориентации в характере движения, представленного интегралами (9.26) и (9.28), и в возможных трудностях, связанных с вычислением этих интегралов, а также при выборе асимптотического метода полезно иметь в виду некоторую аналогию между задачей о распространении осесимметрических волн в системе цилиндрическая оболочка—жидкость и задачей о плоских поверхностных волнах на воде конечной глубины. Плоские безвихревые движения идеальной жидкости, происходящие под действием силы тяжести, характеризуются полем массовых скоростей

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi, \quad (a)$$

где потенциал φ является решением уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (b)$$

удовлетворяющим условиям: на неподвижных границах

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0; \quad (a)$$

на свободной поверхности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{g} \ddot{\varphi} \quad (r)$$

($\vec{v}$ — скорость; ось x лежит в плоскости свободной поверхности, ось y — направлена вниз; n — нормаль к неподвижной границе).

Теперь покажем, что при аппроксимации кольцевого слоя жидкостью плоским (§ 3) уравнения осесимметричных колебаний системы безмассовой и безвращающейся цилиндрической оболочки — несжимаемая жидкость, происходящих под действием сил упругости оболочки, аналогичны только что написанным. Движение жидкости в этой системе снова подчиняется уравнению Лапласа (b), в котором функция φ удовлетворяет на твердой стенке кольцевой полости условию (a). Уравнение свободных колебаний безмассовой ($\lambda_1 = 0$) и безвращающейся ($\mu^2 = 0$) оболочки имеет вид

$$\omega = -\frac{\rho_0^2}{A_0} \left(\ddot{\varphi} \right)_{r=r_0}, \quad (d)$$

Продифференцируем (d) по t . Затем, используя условие непроницаемости упругой оболочки

$$\dot{\omega} = -\left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r=r_0},$$

получим при $t = t_0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\rho_0^2}{A_0} \ddot{\varphi}, \quad (e)$$

что с точностью до множителя при $\ddot{\varphi}$ совпадает с граничным условием (r). Можно добиться полного совпадения в математической формулировке задачи, если перейти в уравнениях и граничных условиях к безразмерной форме записи. Аналогия в системах неизбежно приводит к аналогии в реакции систем на возмущения подобного типа. В теории волн на воде рассматривается случай возбуждения поверхностных волн в призматическом канале прямоугольного сечения поршнем. В частности, изучен вариант, при котором воздействие поршня на воду носит импульсный характер. Такой тип возмущения особенно близок к рассуждаемому. Решение для этого случая может быть использовано для ориентации в нашей задаче. Решения для других типов нестационарного воздействия на воду приведены, в частности, в [32, 69, 70, 71] и др. 1.

Аналогия между волнами в оболочке, соприкасающейся с жидкостью, и гравитационными — на поверхности воды ограничивается рамками безмассовости и безвращающихся оболочек, взаимодействующих с несжимаемой жидкостью, и следовательно, отличия в характере волнообразования на воде, с одной стороны, и в оболочке, с другой стороны, будут увеличиваться по мере уменьшения длины волн и увеличения толщины оболочки.

§ 11. Асимптотическое представление импульсной реакции

При выборе асимптотического метода будем руководствоваться соображениями, вытекающими из аналогии между задачами о волнах в оболочке, соприкасающейся с жидкостью, и гравитационных волнах. В решении последней задачи широко распространение получил метод стационарной фазы (МСФ) [69, 71]. Как известно, асимптотическое представление интегралов, полученное этим методом, отражает все основные характерные стороны решения задачи о гравитационных волнах и оно достаточно точно даже для сравнительно малых значений безразмерного времени t [69, 71]. Имея в виду математическую и физическую аналогию между двумя задачами, можно возлагать, что МСФ позволит получить аналитическое решение задачи о волнах в оболочке с достаточной степенью точности, по крайней мере, при больших значениях безразмерного времени t ($t \gg 1$). Используем МСФ для асимптотического представления импульсной реакции ω_2 . С этой целью представим (9.26) в виде двух интегралов

$$\omega_2 = J_1 - J_2,$$

$$J_1(x, t) = \frac{1}{x} \int_0^x A(\omega) \cos(\omega x - \Omega t) d\omega;$$

$$J_2(x, t) = \frac{1}{x} \int_0^x A(\omega) \cos(\omega x + \Omega t) d\omega. \quad (11.1)$$

Здесь и в последующем для сокращения записи принимается, что $\text{sign } \Delta t = 1$. Фазовые функции в J_1 и J_2 стационарны при значениях ω , удовлетворяющих соответственно равенствам

$$d\Omega/d\omega = x/t; \quad (11.2)$$

$$d\Omega/d\omega = -x/t. \quad (11.3)$$

На рис. 19 приведен типовой график зависимости групповой скорости основного типа колебаний $d\Omega/d\omega$ от числа ω , построенный для случая, когда в качестве характерной скорости c принято значение (см. § 4)

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}}.$$

Как видно, групповая скорость в интервале $(0, \omega_1)$ уменьшается от значения, равного единице, до $(d\Omega/d\omega)_{\min} > 0$; затем

при $\omega > \omega_1$ она растет, асимптотически стремясь к значению $d\Omega/d\omega = c_0$. Следовательно, интеграл J_2 при $x/t > 0$ и интеграл J_1 вне интервала $(d\Omega/d\omega)_{\min} < x/t < c_0$ не имеют стационарных точек. Вместе с тем при $1 < x/t < c_0$ интеграл J_1 имеет одну, а при $(d\Omega/d\omega)_{\min} < x/t < 1$ — две такие точки. При асимптотических оценках интегралов (11.1) учитываются лишь вклады окрестностей стационарных точек, в которых имеет место равенство (11.2). Вклады S_i в интеграл J_1 окрестностей стационарных точек ω_i при $d^2\Omega/d\omega^2 \neq 0$ рассчитываются по стандартным формулам второго приближения [69]

$$S_1 = \frac{A(\omega_1)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{t}{2} \left| \frac{d^2\Omega(\omega_1)}{d\omega^2} \right| \right)^{-1/2} \cos \left[\omega_1 x - \Omega(\omega_1) + \frac{\pi}{4} \right]; \quad (11.4a)$$

$$S_2 = \frac{A(\omega_2)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{t}{2} \left| \frac{d^2\Omega(\omega_2)}{d\omega^2} \right| \right)^{-1/2} \cos \left[\omega_2 x - \Omega(\omega_2) - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (11.4b)$$

где ω_1 — меньший и ω_2 — больший корни уравнения (11.2); S_1 — вклад в J_1 окрестности точки ω_1 ; S_2 — вклад в J_1 окрестности точки ω_2 . Суммируя вклады, получим

$$\omega_0 = S_1 + S_2 + O(1/t), \quad (11.5)$$

где через $O(1/t)$ обозначается функция, стремящаяся к нулю как $1/t$ при $t \rightarrow \infty$. Точность формул (11.4) растет с ростом отношения $|d^2\Omega/d\omega^2| : |d^2\Omega/d\omega^2|$. При уменьшении величины $|d^2\Omega/d\omega^2|$ приближенные значения вкладов S_i , рассчитанные по формулам (11.4), бесконечно увеличиваются, что противоречит смыслу решаемой задачи. Поэтому формулы (11.4) непригодны в окрестности точек $\omega = 0$, $\omega = \omega_1$ и $\omega = \infty$, где групповая скорость стационарна. В случае когда $d^2\Omega/d\omega^2 = 0$, но $d^3\Omega/d\omega^3 \neq 0$, обычно используют асимптотические формулы третьего приближения, которые для $\omega_0 < 0$ и $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2$ можно записать в виде соответствующий [69]:

$$\text{при } \omega_0 = 0$$

$$S_1 = \frac{0.636 A(\omega_0)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{t}{2} \left| \frac{d^3\Omega(\omega_0)}{d\omega^3} \right| \right)^{-1/3}; \quad (11.6a)$$

$$\text{при } \omega_0 = \omega_1 = \omega_2$$

$$S_1 = S_2 = \frac{0.823 A(\omega_0)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{t}{2} \left| \frac{d^3\Omega(\omega_0)}{d\omega^3} \right| \right)^{-1/3} \cos(\omega_0 x - \Omega t). \quad (11.6b)$$

При использовании выражений (11.6) ошибка в величине ω_0 имеет порядок $(1/t)^{2/3}$. Фазовая функция интеграла J_1 стационарна при $\omega = 0$ и $\omega = \omega_1$ соответственно в точках $x = t$ и $x = x_1 = t(d\Omega/d\omega)_{\min}$. Поэтому формулы (11.6) пригодны для расчета импульсной реакции системы лишь в этих точках и не дают никакой информации о поведении системы по мере удаления от них.

Нижне приведенные формулы, годные для приближенного вычисления интеграла J_1 не только в сечениях $x = t$ и $x = x_1$, но и в пределах прилегающих к ним малых участков. Сначала остановимся на асимптотической оценке интеграла J_2 в окрестности $x = x_1$. С этой целью заменим (внутри этой окрестности) фазовую функцию $\varphi(\omega) = \omega x - \Omega t$ первыми членами ряда Тейлора

$$\varphi(\omega) \approx (\omega_1 + \Delta\omega)x - \left[\Omega(\omega_1) + \frac{d\Omega(\omega_1)}{d\omega} \Delta\omega + \frac{d^2\Omega(\omega_1)}{d\omega^2} \frac{\Delta\omega^2}{2} \right] t \quad (a)$$

зная, что то же самое,

$$\varphi(\omega) \approx \omega_2 x - \Omega(\omega_2)t - t \left(\frac{\Delta\omega \Delta x}{t} + \frac{1}{6} \frac{d^3\Omega}{d\omega^3} \Delta\omega^3 \right), \quad (b)$$

где $\Delta x = x_1 - x$, а групповая скорость $d\Omega/d\omega$ заменена в соответствии с (11.2). В (b) отсутствует член с $d^2\Omega/d\omega^2$, равный нулю

в силу стационарности групповой скорости в точке ω_1 , а члены четвертого и более высоких порядков отброшены вследствие малости существенного участка области интегрирования. По этой же причине можно заменить медленно меняющийся множитель $A(\omega)$ его значением в ω_1 . В результате после перехода в (11.1) к переменной $\Delta\omega = \omega - \omega_1$ получим

$$J_1(x, t) \approx \frac{A(\omega_1)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\cos[\omega_1 x - \Omega(\omega_1)t] \times \right. \\ \times \cos t \left[\frac{\Delta\omega \Delta x}{t} + \frac{1}{6} \frac{d^2\Omega(\omega_1)}{d\omega^2} \Delta\omega^3 \right] + \sin[\omega_1 x - \Omega(\omega_1)t] \times \\ \times \sin t \left[\frac{\Delta\omega \Delta x}{t} + \frac{1}{6} \frac{d^2\Omega(\omega_1)}{d\omega^2} \Delta\omega^3 \right] d\Delta\omega. \quad (11.6)$$

Существенной областью интегрирования в (11.6) является малая окрестность стационарной точки, заключенная внутри интервала $(-\omega_1, \infty)$. Поэтому при достаточно большом t можно произвольно расширить область интегрирования без заметного изменения значения интеграла (11.6), заменив, в частности, нижний предел $(-\omega_1)$ бесконечным $(-\infty)$. В итоге найдем

$$J_1 \approx \frac{A(\omega_1)}{\pi} \cos[\omega_1 x - \Omega(\omega_1)t] \int_{-\infty}^{\infty} \cos t \left[\frac{\Delta\omega \Delta x}{t} + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \frac{d^2\Omega(\omega_1)}{d\omega^2} \Delta\omega^3 \right] d(\Delta\omega).$$

Произведя замену переменной по формуле

$$v = \Delta\omega \left[\frac{t}{2} \frac{d^2\Omega(\omega_1)}{d\omega^2} \right]$$

и учитывая известное представление функций Эйри в интегралом

$$v(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos \left(zv + \frac{v^3}{3} \right) dv,$$

окончательно получим следующую асимптотическую формулу для интеграла J_1 :

$$J_1 \sim S_1 + S_2, \quad (11.7)$$

где

$$S_1 = S_2 = \frac{A(\omega_1) v(z)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{t}{2} \left| \frac{d^2\Omega(\omega_1)}{d\omega^2} \right| \right)^{-1/3} \cos[\omega_1 x - \Omega(\omega_1)t]. \quad (11.8)$$

Переменная z определяется соотношением

$$z = \pm \frac{x_1 - x}{\left(\frac{t}{2} \left| \frac{d^2\Omega(\omega_1)}{d\omega^2} \right| \right)^{1/3}} = \pm \frac{t \left(\frac{d\Omega}{d\omega} \right)_{\omega_1} - x}{\left(\frac{t}{2} \left| \frac{d^2\Omega(\omega_1)}{d\omega^2} \right| \right)^{1/3}}. \quad (11.9)$$

Нетрудно видеть, что формула (11.7) асимптотически справедлива при $|x - x_1|/t^{1/3} \rightarrow 0$.

В формуле (11.9) знак плюс соответствует случаю $d^2\Omega/d\omega^2 > 0$. В исследуемом процессе производная $d^2\Omega(\omega_1)/d\omega^2$ положительная. Поэтому в формуле (11.9) следует сохранить лишь знак плюс. Аналогичные выражения получаются для аклада S_2 и интеграл J_2 при значениях x , лежащих в окрестности $x \sim l$.

$$S_1 = \frac{A(\omega_1) v(z)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{t}{2} \left| \frac{d^2\Omega(\omega_1)}{d\omega^2} \right| \right)^{-1/3}. \quad (11.10)$$

Здесь

$$z = - \frac{l - x}{\left(\frac{t}{2} \left| \frac{d^2\Omega(\omega_1)}{d\omega^2} \right| \right)^{1/3}}. \quad (11.11)$$

Если положить (см. § 4)

$$\varepsilon = \frac{c\omega_1}{\sqrt{c_1^2 + c^2}},$$

то из формулы (9.27) найдем

$$A(\omega) = \frac{1}{c_1^2}. \quad (11.12)$$

Выражение для производной $d^2\Omega(\omega)/d\omega^2$ получим, воспользовавшись разложением параметра частоты Ω в ряд по степеням ω в окрестности точки $\omega = 0$ (§ 5).

Для оболочки, соприкасающейся с цилиндрическим тонким слоем жидкости,

$$\frac{d^2\Omega(\omega)}{d\omega^2} = - \frac{3}{c_1^2} \left[\frac{4}{3(1/2)(r_1 + 1)^2} + \omega^2 - c_1^2 k_1 \right]; \quad (11.13)$$

для тонкостенной трубы, заполненной жидкостью,

$$\frac{d^2\Omega(\omega)}{d\omega^2} = - \frac{3}{c_1^2} \left(\frac{1}{2} + \omega^2 - c_1^2 k_1 \right). \quad (11.14)$$

При $z = 0$ формулы (11.8) и (11.9) совпадают с формулами (11.6a) и (11.6b), если $v(0) = 0.629$. Вполне естественно, что точность формул (11.8) и (11.10) уменьшается по мере удаления

от сечений $x = t \approx x - x_1$. Выражения (11.8) и (11.10) удобны тем, что расчет по ним сводится к использованию табулированной функции Эри $\text{Ei}(x)$ [14, 73].

Подготовим сказанное.

1. При больших t импульсная реакция w_2 рассчитывается по стандартной формуле метода стационарной фазы

$$w_2(x, t) \sim S_1 + S_2.$$

2. При вычислении вклада S_2 в окрестности $x = t$ следует использовать формулу (11.10), внутри интервала $(x_1 < x < 1)$ вне непосредственной близости к его концам — формулу (11.4а), в окрестности $x = x_1$ — формулу (11.8); при вычислении вклада S_2 в окрестности $x = x_2$ — формулу (11.8), при $x > x_2$ вне непосредственной близости к концу $x = x_1$ — формулу (11.4б).

В качестве примера рассчитаем импульсную реакцию погруженной в воду оболочки из алюминиевого сплава. Расчет проводим один раз в фиксированный момент времени $t = 27$, другой — в фиксированной точке $x = 27$.

Исходные данные: $r_1/b = 287$; $r_1/r_2 = 1,09$; $\mu = 1,02 \cdot 10^{-4}$ кг/см $\times$ сек 2 /см 2 ; $\rho = 2,75 \cdot 10^{-4}$ кг/см 3 /см 2 ; $E = 7,2 \cdot 10^9$ кг/см 2 ; $\mu = 0,3$; $c_0 = 1,55 \cdot 10^4$ см/сек.

Рассчитываем:

$$H = \Delta r(1 + \Delta r/2r) = \frac{r_1}{2} \left[\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 1 \right] = 0,0938 r_1;$$

$$r_1/H = 10,65;$$

$$c_1 = \sqrt{EAH/\rho r_1^2} = 1,52 \cdot 10^4 \text{ см/сек};$$

$$c = \frac{c_1}{\sqrt{1 - \mu}} = 1,51 \cdot 10^4 \text{ см/сек}$$

(в относительной системе единиц измерения $c_1 = 1,005$, $c_0 = 10,3$);

$$k_1 = \frac{r_1^2 \rho}{12(1 - \mu) H^2} = 0,0143, \quad k_2 = 0;$$

$$m^2 = \frac{\rho^2 c_0}{\rho^2} = 0,1;$$

$$\frac{d\Omega(\omega)}{d\omega} = -\frac{3}{c_1^2} \left[\frac{4}{3(r_1/r_2 + 1)^2} + m^2 - c_1^2 k_2 \right] = -1,14.$$

В пределах данных, принятых в примере, $1/c_1^2 \ll 1$. С другой стороны, диапазон значений ω , соответствующих основному вкладу в w_2 , ограничен относительно малыми величинами (это будет видно из результатов расчета), при которых отношение $(\Omega/\omega)^2$ имеет порядок единицы. Это обстоятельство позволяет

при построении основной части кривой $w_2(x, t)$ принять $\beta = 1$ и пользоваться приближенным выражением для функции $f(\omega f)$ (4.16) вместо точного (4.9). Выражение для $A(\omega)$ (9.27) преобразуется под

$$A(\omega) = \frac{\Omega}{c_1^2 \omega (1 + k_1 \omega^2)}. \quad (11.15)$$

Функция Ω рассчитывается в ходе решения трансцендентного характеристического уравнения (4.22), в котором для вычисления зависимости $w_{\text{ст}}(\omega)$ (4.8) при стояком слое жидкости следует воспользоваться аппроксимацией (4.16). Производные функции $\frac{d\Omega(\omega)}{d\omega}$, $\frac{d^2\Omega(\omega)}{d\omega^2}$ и $\frac{d^3\Omega(\omega)}{d\omega^3}$ определяются при последовательном дифференцировании (численном) функции $\Omega(\omega)$.

Находим

$$\frac{c_1}{c} = \left(\frac{d\Omega}{d\omega} \right)_{\omega=1} = 0,53; \quad \omega_1 = 1,625, \quad \frac{d^2\Omega(\omega_1)}{d\omega^2} = 0,75.$$

На рис. 20 приведены эпюры $w_2(x/t)$, рассчитанные описанным выше способом для фиксированного момента времени $t = 27$,

кривая 1 — $w_2(x/t) \sim S_1 \{f\text{-ла (11.8)}\} + S_2 \{f\text{-ла (11.8)}\}$;

кривая 2 — $w_2(x/t) \sim S_1 \{f\text{-ла (11.4а)}\} + S_2 \{f\text{-ла (11.4б)}\}$;

кривая 3 — $w_2(x/t) \sim S_1 \{f\text{-ла (11.10)}\} + S_2 \{f\text{-ла (11.4б)}\}$;

кривая 4 — $w_2(x/t) \sim S_2 \{f\text{-ла (11.4б)}\}$.

Примечательным в результатах выполненного расчета является практически совпадение кривых 1 и 2, 2 и 3, а также 3 и 4 в относительно широком диапазоне изменения координаты x/t . Это совпадение наблюдается в области, удаленной от сечений $x/t = - (d\Omega/d\omega)_{\omega=1} = 0,53$ и $x/t = 1$, в которой, как известно, хорошо действуют стандартные формулы второго приближения (11.4). Таким образом, при больших t асимптотические формулы (11.8) и (11.10) отражают достаточно полно решение задачи не только в точках, где групповая скорость стационарна, но и в широких интервалах изменения x/t , приближаясь к этим точкам. Наличие участков совпадения позволяет начертить одну непрерывную кривую для импульсной реакции системы. На рис. 20 приведен участок кривой $w_2(x/t)$ лишь для $x/t \in [0; 1,4]$. Между тем, система волн $w_2(x/t)$ простирается влево вплоть до окрестности сечений $x/t = c_0 \approx 10,3$. По мере приближения к сечению $x/t = c_0$ волны непрерывно уменьшаются по высоте и длине, асимптотически стремясь к нулю. При расчете наиболее продвинувшихся вперед частей волнового профиля уже нельзя пользоваться упрощениями, связанными с предположением об уменьшении значений ω , так как при $x/t \rightarrow c_0$ число ω стремится

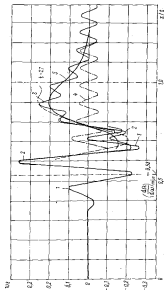


Рис. 26. Кривая $u_0(x/l)$, рассчитанная МСФ в фиксированной точке времени $t = 27$.

к бесконечности. По мере роста x/l мы должны будем при расчете u_0 сначала отказаться от приближенных формул (1.15) и (4.16) в пользу точных (9.27) и (4.9), одновременно учитывая фактические значения β . Затем покажется необходимость в учете влияния инерции вращения и поперечного сдвига на колебание оболочки, и, наконец, в окрестности $x/l \approx c_0$ расчет движения оболочки должен проводиться в рамках трехмерной теории упругости. Однако фактическое исследование части профиля волны с большими x значениями и вряд ли имеет практическое значение, так как, во-первых, колебательный участок волнового профиля, соответствующий наибольшей деформации оболочки (участок, изображаемый на рис. 20), включает лишь малую относительно малых величин α , во-вторых, если действие импульса конечно, хотя и мало, то интерференция волн приводит к резкому уменьшению к без того малых амплитуд высокочастотной составляющей колебания.

Кривая $u_0(x/l)$, рассчитанная в фиксированном сечении $x = \sim 27$, приведена на рис. 21. Пунктиром условно показана высокочастотная часть кривой. Обратимся к анализу полученных результатов. Как и следовало ожидать, импульсная реакция u_0 представляет собой сложную систему волн, перемещающуюся с дисперсией в положительном направлении оси x . В фиксированный момент времени t система волн u_0 непрерывно покрывает область, заключенную между окрестностями $x = x_1 = t(d\Omega/d\omega)_{\min}$ и $x = x_2 = t$. Наибольшую радиальную деформацию оболочка испытывает в интервале $(d\Omega/d\omega)_{\min} < x/l < 1$ (основной интервал). Перемещения u_0 по мере удаления от основного интервала постепенно уменьшаются. Амплитуды и длины волн при $x/l > 1$ медленно стремятся к нулю по мере приближения к окрестности $x = c_0 l$. При $x/l < (d\Omega/d\omega)_{\min}$ возмущение u_0 практически затухает на участке, непосредственно примыкающем к сечению $x/l = (d\Omega/d\omega)_{\min}$. В пределах основного интервала подынтегральная функция в (9.26) имеет две стационарные точки: α_2 и α_0 (см. рис. 19). Точке α_2 соответствует низкочастотная составляющая перемещения S_1 (кривая 5 на рис. 20), точке α_0 — высокочастотная составляющая (отклонение относительно кривой 5 на том же рисунке). Благодаря малости двух составляющих на фронт резкого роста радиальной деформации накладываются коротковолновые колебания, перемещающиеся относительно фронта.

В пределах основного интервала высокочастотная составляющая профиля волны постоянно отстает от низкочастотной. Показать это можно, доказав, что при данных значениях $x/l \in [1, (d\Omega/d\omega)_{\min}]$ фазовая скорость, соответствующая стационарной точке α_2 , больше фазовой скорости, соответствующей стационарной точке α_0 , или, что то же самое,

$$\Omega(\alpha_2)/\alpha_2 > \Omega(\alpha_0)/\alpha_0.$$

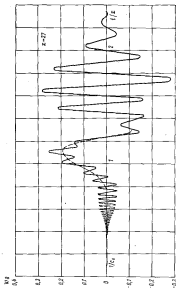


Рис. 21. Кривые $u(x, t)$, рассчитанные по формуле (11.16) в фиксированной точке $x = 27$.

Обратимся к графику групповой скорости $d\Omega/d\omega$. Параметр частоты $\Omega(\omega_0)$ численно равен площади F_1 , ограниченной кривой $d\Omega/d\omega$, осью $d\Omega/d\omega = 0$ и прямой $\alpha = 0$ и $\omega = \omega_0$ (рис. 22, а); параметр частоты $\Omega(\omega_0)$ равен площади F_2 , ограниченной той же кривой, осью $d\Omega/d\omega = 0$ и прямой $\alpha = 0$ и $\omega = \omega_0$ (рис. 22, б).

Как видно, $F_2/\omega_0 > F_1/\omega_0$ и, следовательно,

$$c_g(\omega_0) > c_g(\omega_0), \quad (11.16)$$

что и требовалось показать.

В фиксированной точке x (см. рис. 21) возмущение u_0 начинает действовать в момент $t = x/c_g$. Первоначально изменение u_0 по

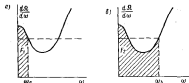


Рис. 22. К исследуемому профилю волны в пределах основного интервала.

времени носит характер высокочастотных колебаний с постепенно возрастающими амплитудами и периодами. Затем в окрестности $t = x$ величина u_0 резко растет за счет появления наряду с высокочастотной еще и низкочастотной составляющей. Область наибольших радиальных деформаций ограничена моментами времени $t = x$ и $t = x + \Delta t$. При $t > x + \Delta t$ колебание оболочки в сечении x быстро затухает. Рассматривая рис. 21, видно, что фронт резкого роста радиального смещения оболочки находится в окрестности точки $x = t$, перемещающейся в положительном направлении оси x с безразмерной скоростью $c_g = 1$. Переходя к размерным величинам, находим, что фазовая скорость точки фронта волны с абсциссой $x = t$ равна

$$c_g = c = \frac{c_0}{\sqrt{1 + c_0^2}}. \quad (а)$$

Это выражение совпадает с полученным в рамках прикладной теории гидроудара для скорости распространения волны давления в трубе с жидкостью. В прикладной теории гидроудара скорость распространения возмущений (а) является инвариантом для

данной конкретной системы. Фактически же со скоростью c перемещается лишь одна точка профиля низкочастотной составляющей фронта резкого роста перемещения, а именно, точка, в которой радиус кривизны поверхности волны деформации в сечении $0 = \text{const}$ равен бесконечности.

Рассуждая аналогично тому, как это было сделано при выводе неравенства (11.16), легко заключить, что скорость c является максимальной для участка волнового профиля в пределах основного интервала. Таким образом, скорость c , которая ввиду малости прилагалась в качестве характерной скорости системы, является важной динамической характеристикой осесимметричной цилиндрической системы оболочка—жидкостная среда.

Полученные результаты соответствуют действию на систему мгновенного импульса. Практически же приходится иметь дело с импульсами конечной продолжительности. В этом случае интерференция волн приводит к резкому уменьшению амплитуд высокочастотных колебаний. В связи с этим особый интерес представляет исследование низкочастотной составляющей, которая менее чувствительна к малым изменениям продолжительности действия импульса. Асимптотические формулы для амплитуде волновых ее характеристик легко получить из соотношения (11.10), которое по смыслу своего вывода хорошо описывает фронт резкого роста низкочастотной составляющей перемещения S_1 .

Анализ решения показывает, что закон изменения низкочастотной составляющей безразмерного перемещения S_1 в районе фронта резкого роста величина ω_0 (в окрестности $x = t$) относительно слабо зависит от конкретных свойств системы. Безразмерная длина основного интервала $1 \leq x/t \leq (d\Omega/d\omega)_{\text{max}}$ в пределах которого оболочка подвергается существенной радиальной деформации, не зависит от t , но меняется в широком диапазоне при изменении параметров системы. Уменьшение приведенной толщины H , увеличение толщины оболочки, плотности ρ^0 и модуля E ведут к сокращению протяженности интервала II, $(d\Omega/d\omega)_{\text{max}}$. Характер волнообразования в окрестности $x/t = (d\Omega/d\omega)_{\text{max}}$ в основном определяется азимутальной жесткостью (k_1) , отношением H/r_0 и мало связан с неришечными свойствами оболочки (с величиной ρ^0/r_0).

Рассмотрим влияние сжимаемости жидкости на реакцию ω_0 . Мы видим, что импульсная реакция представляет собой суперпозицию простых гармонических движений. Сжимаемость практически не оказывает влияния на гармонические составляющие, для которых величина

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{c_0^2}{c^2}}$$

мало отличается от единицы или, что то же самое, фазовые скорости которых характеризуются соотношением

$$\frac{c_0}{c} \ll 1.$$

Но в пределах основного интервала выполняется неравенство $c_0 \ll c$. Поэтому условие применимости модели несжимаемой жидкости при расчете ω_0 в пределах основного интервала, где радиальные смещения имеют ощутимое значение, можно записать в виде

$$\frac{c_0}{c} \ll 1 \quad (11.17)$$

или в относительной системе единиц измерения

$$1/c_0^2 \ll 1.$$

Использование модели несжимаемой жидкости позволяет существенно сократить расчеты, особенно при построении кривых $d\Omega/d\omega$ и вычислениях $A(\omega)$. При $1/c_0^2 = 0$ выражение для $A(\omega)$ (9.27) просто приводит к виду

$$A(\omega) = \frac{Q}{\omega(1 + k_1 \omega^2 + k_2 \omega^4)}. \quad (11.18)$$

Рассматриваемая в главе теория нестационарных волн в системе оболочка—жидкостная среда отличается от прикладной теории гидравлического удара учетом ряда дополнительных факторов: трехмерности динамики жидкости, атермичности и изгибной жесткости оболочки и, наконец, осевой статической нагрузки. Для того чтобы получить представление о том, что даст учет перечисленных факторов, построим решение для импульсной реакции ω_0 в рамках упрощений, лежащих в основе прикладной теории гидроудара.

В теории гидроудара

$$c_0 = c = 1,$$

С другой стороны,

$$c_0 = \Omega/\omega,$$

откуда

$$\Omega = \omega. \quad (a)$$

Учитывая (a), получим из (9.26)

$$\omega_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \omega t \sin \omega x \, d\omega, \quad (б)$$

или

$$\frac{2}{x} \int_0^x \sin \omega t \sin \omega x \, d\omega = \delta(t - x), \quad (11.19)$$

где δ — дельта-функция Дирака.

Таким образом, в рамках гипотез прикладной теории гидроудара выражение для импульсной реакции имеет вид

$$\omega_0 = \frac{\delta(t - x)}{c^2}.$$

Результат получился физически неправдоподобным. Это позволяет заключить, что прикладная теория гидроудара совершенно непригодна для расчета динамической реакции системы оболочка — акустическая среда на мгновенный импульс давления.

§ 12. Динамическая реакция системы на другие типы нагрузок

Поскольку исходная система уравнений (8.1) и граничные условия (8.2), (8.3) линейны, справедлив принцип наложения. Это позволяет использовать для вычисления реакции системы на давление, пропорционально меняющееся во времени, интеграл Дюамеля

$$w(x, t) = \int_0^t p^0(a) w_0(x, t-a) da, \quad (12.1)$$

где

$$w_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} A(\omega) \sin \omega x \sin \Omega t d\omega$$

реакция системы на единичный импульс $\delta(t)$.

Таким образом,

$$w(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^t A(\omega) p^0(a) \sin \omega x \sin \Omega(t-a) d\omega da. \quad (12.2)$$

А. Динамическая реакция на медленно меняющуюся нагрузку. Амплитуда нагрузки

В случае медленно меняющейся нагрузки по гармоническому закону $e^{-i\Omega t}$ движение исследуемой линейной системы при больших x представляет прогрессивную светосигнальную волну, распространяющуюся вдоль оси системы. Длина этой волны (число ω) такая же, как и при свободных колебаниях системы с той же частотой ω . Этот результат можно получить из (12.2), например, методом, использованным Стоксом при исследовании волны на воде, создаваемой периодическим импульсом [71], хотя он и так достаточно очевиден. Отсюда, в частности, следует, что в случае нагружения системы по произвольному закону $p^0 = p^0(t)$ спектр перемещения оболочки

$$G_w(\Omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) e^{-i\Omega t} dt \quad (12.3)$$

группируется (во всяком случае при больших x) практически на тех же частотах, что и спектр нагрузки,

$$G_p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p^0(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (12.4)$$

Положим теперь, что спектр нагрузки $p^0(t)$ группируется на таких частотах ω , что в системе оболочка — акустическая среда возбуждаются лишь длинные волны (§ 5), для которых выполняется условие

$$\omega^2 \ll 1, \quad (a)$$

и, следовательно,

$$\Omega \approx \omega. \quad (b)$$

Из выражений (a) и (b) видно, что ширина спектра длинных волн удовлетворяет неравенству (в относительной системе единиц измерения)

$$\Omega_{\max}^2 \ll 1 \quad (12.5)$$

или (в размерном виде)

$$\frac{\Omega_{\max}^2 H^2}{c^2} \ll 1. \quad (12.5a)$$

Следовательно, ширина спектра нагрузки $\omega_{\max}$, возбуждающей в системе лишь длинные волны, должна удовлетворять условию

$$\frac{\omega_{\max}^2 H^2}{c^2} \ll 1. \quad (12.6)$$

Назовем нагрузку, соответствующую неравенству (12.6), медленно меняющейся. Получим выражение для динамической реакции системы на медленно меняющуюся нагрузку. Очевидно, что в этом случае мы можем правомерно заменить параметр частоты Ω в выражении (12.2) числом ω и пренебречь степенями ω выше первой по сравнению с единицей. После замены найдем

$$w(x, t) = \frac{2}{\pi c^2} \int_0^t p^0(a) \sin \omega x \sin \omega(t-a) d\omega da,$$

что при учете выражения (11.19) дает

$$w(x, t) = \frac{1}{c^2} \int_0^t \delta(x-t+a) p_0(a) da \quad (12.7)$$

и окончательно

$$w(x, t) = \frac{p^0(t-x)}{c^2}.$$

Переходя к размерной форме (см. § 4) записи, найдем

$$w(x, t) = \frac{p^0(t-x)}{\lambda_n}. \quad (12.8)$$

Отсюда видно, что в случае медленно меняющейся нагрузки динамическая реакция оболочки представляет собой волну, перепадающую без искажения с постоянной скоростью

$$c = \frac{6\alpha_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$$

вдоль осей системы. Этот результат совпадает с решением, полученным в рамках прикладной теории гидравлического удара в трубах. В то же время он свободен от допущений об одномерности потока, безинерционности и безмоментности оболочки, лежащих в основе этой теории. Практически единственным условием, использованным при выводе формулы (12.8), было условие медленной изменчивости нагрузки, при котором в системе возбуждаются лишь длинные волны. Таким образом, установлено, что хорошо разработанная теория гидравлического удара применима для расчета динамической реакции системы лишь в том случае, когда имеет место неравенство (12.6). Следовательно, при выполнении условия (12.6), накладываемого на нагрузку, в системе возбуждаются лишь длинные волны.

Для практического анализа нагрузки уточним понятие «ширины спектра» $\nu_{\max}$. Известно, что спектр (12.4) кратковременной и импульсной нагрузки безграничен. В связи с этим за ширину спектра при решении практических задач целесообразно принимать полосу частот, внутри которой концентрируется подавляющая часть «энергии» импульса нагрузки. В табл. 2 приведены

Таблица

Импульс	График	Уравнение	Ширина спектра
Прямоугольный		—	$5,07/t_0$
Треугольный		—	$5,26/t_0$
Косинусоидальный		$\cos \pi \frac{t}{t_0}$	$4,58/t_0$

эквивалентные из [75] значения ширины спектра типовых форм импульсов продолжительности действия t_0 , когда относительная доля полной энергии импульса, приходящаяся на полосу частот $0 - \nu_{\max}$, составляет 90% [75, стр. 731].

Как видно, ширина спектра обратно пропорциональна продолжительности действия нагрузки t_0 .

$$\nu_{\max} = k/t_0 \quad (12.9)$$

В рассмотренных в табл. 2 примерах $k \approx 5$. Подстановка (12.9) в (12.6) дает

$$k^2 H^2 \nu_{\max}^2 \ll 1. \quad (12.10)$$

Таким образом, волновой процесс в системе оболочка—жидкость в целом будет относительно свободным от искажений, если время действия нагрузки во много раз превышает время, необходимое для распространения волны со скоростью c на расстояние, равное приведенной толщине кольцевого слоя H . Неравенство (12.10) связывает понятие медленно меняющейся нагрузки с параметрами системы

$$H = \frac{|c_2^2 - c_1^2|}{2c_1} \quad \text{и} \quad c = \left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{c_1^2}{\lambda_0^2} \right)^{-1/2}$$

Как видно, уменьшение толщины слоя жидкости $|\Delta r|$ для увеличения жесткости оболочки A_0 [см. (4.5)] или (4.6) при прочих равных условиях ведет к усилению неравенства (12.10). Чем меньше $|\Delta r|$ и чем больше A_0 , тем с большим основанием можно считать данную кратковременную нагрузку медленно меняющейся. Таким образом, с увеличением $|\Delta r|$ и ростом A_0 ослабляется диспергирующие свойства системы и увеличивается точность решений, построенных в рамках теории длинных волн.

Определение ширины спектра, которым мы только что пользовались, при всей своей простоте и практическом удобстве, к сожалению, еще не дает исчерпывающей характеристики нагрузки в смысле ее изменчивости. В самом деле, спектр а его обычном понимании определяет некоторым образом поведение нагрузки $p^0(t)$ на протяжении всего времени t_0 . Между тем, строго говоря, существенно охарактеризовать поведение $p^0(t)$ в некоторой малой окрестности Δ текущего момента t ($t - \Delta/2, t + \Delta/2$). Поэтому более правильно при анализе нагрузки пользоваться функцией [14]

$$G(v, t) = \int_{t-\frac{\Delta}{2}}^{t+\frac{\Delta}{2}} p^0(u) e^{-i v u} du$$

которая называется мгновенным спектром нагрузки $p^*(\omega)$ и зависит не только от частоты, но и от выбранного момента времени t . Величина Δ характеризует сравнительно малую окрестность текущего момента t , но вместе с тем такую, чтобы за время Δ произведение ωt изменилось на несколько периодов. Ширина мгновенного спектра нагрузки резко увеличивается в окрестности особых точек: при разрывах функции $p^*(t)$ и ее производной, например в момент «включения» и «выключения» нагрузки, или в точках излома кривой давления. В связи с этим профиль волн давления и деформации оболочки всегда подвергается искажению в окрестности этих точек. Глубина зоны влияния точек излома эпюры давления (с точки зрения искажения волн) уменьшается по мере уменьшения толщины слоя жидкости и увеличения толщины оболочки.

Б. Переходная проводимость системы и динамическая реакция на нагрузку, меняющуюся по линейному закону

При практическом анализе искажений, вносимых системой в профиль волны деформации, целесообразно сначала построить решение для переходной проводимости системы $\omega_p(x, t)$. Переходная проводимость — динамическая реакция системы на единичную ступенчатую функцию

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Основные закономерности в искажении волн легко проследить при решении этой более простой задачи. Обратимся к общему выражению (12.2). Пусть $p^*(t) = \sigma(t)$. Формула (12.2) преобразуется к виду

$$\omega_0(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t B(\omega) \sin \omega x d\omega - \frac{2}{\pi} \int_t^\infty B(\omega) \sin \omega x \cos \Omega t d\omega, \quad (12.11)$$

где $B(\omega) = A(\omega)/\Omega$ — коэффициент.

Сначала ограничимся анализом системы с $\epsilon_1^2 \ll 1$. В этом случае жидкость ведет себя, как несжимаемая среда ($c_0 = \infty$). Пусть, кроме того, $k_2 = 0$. Имеем

$$B(\omega) = \frac{1}{\omega(1 + k_0 \omega^2)}.$$

Первый интеграл в (12.11) легко берётся

$$\frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\sin \omega x d\omega}{\omega(1 + k_0 \omega^2)} = 1 - e^{-\sqrt{k_0} x}, \quad (12.12)$$

$$\gamma = \sqrt{1/4k_1}.$$

Этот член выражает крайевой эффект при шарнирном опирании. Он имеет в точности такой же вид, как и при статическом нагружении оболочки.

Второй интеграл

$$J = \frac{2}{\pi} \int_t^\infty B(\omega) \sin \omega x \cos \Omega t d\omega \quad (12.13)$$

представим в виде двух интегралов

$$J = J_1 + J_2,$$

где

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_t^\infty B(\omega) \sin(\omega x - \Omega t) d\omega; \quad (12.14)$$

$$J_2 = \frac{1}{\pi} \int_t^\infty B(\omega) \sin(\omega x + \Omega t) d\omega.$$

Фазовая функция в J_2 при $t > 0$ не имеет стационарных точек. Вместе с тем функция $B(\omega)$, входящая в J_2 , терпит бесконечный разрыв при $\omega = 0$. Это дает право положить $\Omega = \omega$, $B(\omega) = 1/\omega$. В результате найдем

$$J_2 \sim \frac{1}{\pi} \int_t^\infty \frac{\sin \omega(x+t) d\omega}{\omega} = \frac{1}{2}. \quad (12.15)$$

Фазовая функция в J_1 имеет две стационарные точки: ω_0 и ω_1 (см. рис. 19). Кроме того, подынтегральная функция имеет сильную особенность при $\omega = 0$. Следовательно, при вычислении J_1 асимптотическими методами придется учитывать вклады в J_2 не только от окрестностей стационарных точек ω_0 и ω_1 , но и окрестности $\omega = 0$. Асимптотические формулы для этого случая оказываются весьма громоздкими и мы не будем их приводить. Полное указание по их составлению можно потерпеть, например, из книги Вакманна [14].

На рис. 23 и 24 приведены кривые переходной проводимости ω_p , рассчитанные в фазированный момент времени: для системы с $k_1 = \omega^6 = 0$ при $t = 8$ и $t = 27$ (рис. 23); для системы с $k_1 = 0,0143 \times \omega^6 = 0,1$ при $t = 27$ (рис. 24). Мы видим, что максимальное радиальное перемещение оболочки получает в районе фронта волны деформации. Амплитуда наложенных колебаний при увеличении t почти не изменяется и составляет примерно 30% перемещения, которое имела бы оболочка при отсутствии искажения волн деформации. Как и следовало ожидать, наибольшее искажение профиля волн деформации испытывает в интервале, соответствующем разрыву кривой нагрузки, т. е. в окрестности

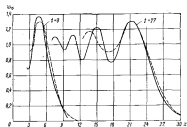


Рис. 23. Кривые переходной проводимости $\omega_0(x)$, рассчитанные в фиксированные моменты времени ($t=9$, $t=27$) для системы с $k_2 = \omega^2 = 0$.

— — — — — общее асимптотическое решение; - - - - формула (12.50).

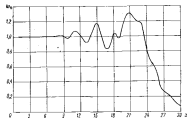


Рис. 24. Переходная проводимость $\omega_0(x)$, рассчитанная в фиксированный момент времени $t=27$ для системы с $k_2 = 0,0143$ и $\omega^2 = 0,1$.

$x = ct$. При $k_2 = 0,0143$, т. е. при учете изгибной жесткости оболочки (рис. 24), все искажения концентрируются в пределах основного интервала $(d\Omega/d\omega)_{\min} < x/t < 1$.

Вычисления переходной проводимости ω_0 можно существенно упростить, если ограничиться анализом профиля волны в районе фронта резкого нарастания перемещения и прилегающего к нему небольшого колебательного участка. Именно эта часть профиля волны радиального смещения оболочки подвергается наибольшим искажениям и представляет в связи с этим основной интерес. При выводе формулы, пригодной в данном случае для расчета $\omega_0(x, t)$ в окрестности $x = t$, будем исходить из общей зависимости (12.1), которая при $\rho^2(x) = 1$ принимает вид

$$\omega_0(x, t) = \int_0^t \omega_0(x, t) dt. \quad (12.16)$$

Представим (12.16) в виде

$$\omega_0(x, t) = C(x) + \int_0^t \omega_0(x, t) dt,$$

где

$$C(x) = \int_0^x \omega_0(x, t) dt.$$

Имея в виду (11.10), (11.11) и (11.46), получим при $t \approx x$

$$\omega_0(x, t) \sim \frac{1}{V\pi} \left[\frac{x}{2} \left| \frac{\partial \Omega(\omega)}{\partial \omega^2} \right| \right]^{-1/2} \sigma(x) + A(\omega_0) \left(\frac{x}{2} \left| \frac{\partial^2 \Omega(\omega_0)}{\partial \omega^4} \right| \right)^{-1/2} \cos \left[x(\omega_0 - \Omega_0) + \Delta x \Omega_0 - \frac{\pi}{4} \right], \quad (12.17)$$

где

$$\Delta x = t - x, \quad x = - \frac{\Delta x}{\left(\frac{x}{2} \left| \frac{\partial^2 \Omega(\omega)}{\partial \omega^4} \right| \right)^{1/2}};$$

ω_0 — большее из двух значений фаз, в которых фазовая функция $\omega x - \Omega t$ стационарна при данном x/t . Подстановка (12.17) в (12.16) дает

$$\omega_0(x, t) = C(x) - \frac{1}{c_0^2 V\pi} \int_0^t \sigma(x) dx + \frac{B(\omega_0)}{V\pi} \left(\frac{x}{2} \left| \frac{\partial^2 \Omega(\omega_0)}{\partial \omega^4} \right| \right)^{-1/2} \sin \left(\omega_0 x - \Omega_0 t - \frac{\pi}{4} \right). \quad (12.18)$$

Определим функцию $C(x)$ из условия, что низкочастотная составляющая перемещения в (12.18) $C(x) = \frac{1}{c_1 \sqrt{x}} \int_0^x v(z) dz$ должна равняться нулю при достаточно больших отрицательных значениях $t-x$. Это приводит к зависимости

$$C(x) = \frac{1}{c_1 \sqrt{x}} \int_0^x v(z) dz = \frac{0,5972}{c_1 \sqrt{x}}$$

и, следовательно,

$$\omega_0(x, t) = \frac{1}{c_1 \sqrt{x}} \left[0,5972 - \int_0^x v(z) dz \right] + \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \left(\frac{x}{2} \left| \frac{\partial^2 \Omega(\omega_0)}{\partial \omega^2} \right| \right)^{-1/2} \sin \left(\omega_0 x - \Omega_0 t - \frac{\pi}{4} \right). \quad (12.19)$$

Второй член в правой части (12.19) соответствует высокочастотной составляющей колебаний в пределах фронта резкого роста радиальных деформаций оболочки. Учет его, как видно, не составляет затруднений. Однако для высокочастотной составляющей перемещения в (12.19) обычно оказывается весьма малой (рис. 24). Отбрасывая ее, получим практическую формулу для расчета переходной проводимости $\omega_0(x, t)$

$$\omega_0(x, t) = \frac{W_0(z)}{c_1}, \quad (12.20)$$

где

$$W_0(z) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[0,5972 - \int_0^x v(z) dz \right];$$

$$z = - \left(\frac{x}{2} \left| \frac{\partial^2 \Omega(\omega_0)}{\partial \omega^2} \right| \right)^{1/2}.$$

Производная $|d^2 \Omega(\omega)/d\omega^2|$ определяется выражением (11.13) или (11.14). В пределах точности формулы оболочки ведет себя в интервале наибольшего искажения профиля волн как безмоментная. Очевидно, одна табулированная функции — интеграл от функции Эбри — позволяет рассчитать переходную проводимость $\omega_0(x, t)$ в интервале наибольшего искажения профиля волн

деформации. Подробная таблица функции $\int_0^x v(z) dz$ приведена в [14]. Значения $W_0(z)$ показаны в табл. 3 и на рис. 25. Мы снова видим, что максимальные амплитуды вложенных колебаний $\omega_0(x, t)$ при $c_1 = 1$ (несжимаемая жидкость) составляют при-

z	$W_0(z)$	z	$W_0(z)$	z	$W_0(z)$
4,0	0,0005	-1,2	0,920	-5,2	1,13
3,0	0,0034	-1,4	1,020	-5,4	1,15
2,4	0,0165	-1,6	1,110	-5,6	1,16
2,2	0,0145	-1,8	1,220	-5,8	1,13
2,0	0,0094	-2,0	1,340	-6,0	1,07
1,8	0,0085	-2,2	1,280	-6,2	1,000
1,6	0,0093	-2,4	1,380	-6,4	0,955
1,4	0,0045	-2,6	1,250	-6,6	0,890
1,2	0,072	-2,8	1,210	-6,8	0,875
1,0	0,096	-3,0	1,150	-7,0	0,807
0,8	0,126	-3,2	1,060	-7,2	0,948
0,6	0,163	-3,4	0,975	-7,4	1,01
0,4	0,309	-3,6	0,900	-7,6	1,04
0,2	0,394	-3,8	0,845	-7,8	1,12
0,0	0,336	-4,0	0,820	-8,0	1,13
-0,2	0,420	-4,2	0,820	-8,2	1,10
-0,4	0,506	-4,4	0,835	-8,4	1,040
-0,6	0,603	-4,6	0,915	-8,6	0,972
-0,8	0,705	-4,8	0,990	-8,8	0,920
-1,0	0,812	-5,0	1,060	-9,0	0,867

мерно 30% установившегося значения $\omega_0 = 1$. На рис. 23 при-
ведем сравнение решения (12.20) с полным при $k_1 = k_2 = 0$
и $x_2/H = 10,65$ для $t = 8$ и $t = 27$. При больших t оба решения
в пределах фронта нарастания давления практически совпадают.
По мере роста отклонения $(t-x)/t$ совпадение ухудшается. Это
связано с нарушением условий, принятых при выводе прибли-
женной формулы (12.20).

Теперь получим выражение для динамической реакции си-
стемы $\omega_0(x, t)$ на нагрузку, меняющуюся по логарифмическому

$$P_0(t) = \begin{cases} t & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (12.21)$$

Реакция системы на нагрузку $P_0(t)$ есть интеграл от переход-
ной проводимости системы $\omega_0(x, t)$

$$\omega_0(x, t) = \int \omega_0(x, t) dt. \quad (12.22)$$

Если подставить в (12.22) $w_e(x, t)$ из (12.20), то, рассуждая подобно тому, как это уже делалось при выводе формулы (12.20), найдем

$$w_a(x, t) = -\frac{W_a(z)}{c_1} \left(\frac{x}{z} \left| \frac{dQ(z)}{dz} \right| \right)^{1/2}, \quad (12.23)$$

где

$$W_a(z) = 0,2902 + \int_0^z W_0(z) dz; \quad z = - \left(\frac{x}{z} \left| \frac{dQ(z)}{dz} \right| \right)^{1/2}.$$

График функции $W_a(z)$ приведен на рис. 26. Графики $W_e(z)$ и $W_a(z)$ позволяют без особого труда чисто графически, поль-

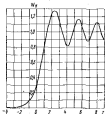


Рис. 25. График зависимости $W_0(z)$.

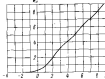


Рис. 26. График зависимости $W_a(z)$.

зуясь принципом наложения решений, рассчитать искажения волны деформации, вызванных кратковременной нагрузкой $p^0(t)$, являющейся либо аппроксимированная ломаной кривой, состоящей из прямолинейных участков.

§ 13. Реакция цилиндрической оболочки, погруженной в безграничную акустическую среду, на волну давления, распространяющуюся в направлении образующей (стационарное решение)

В связи с невозможностью распространения стационарных осесимметричных волн в погруженной в безграничную акустическую среду оболочке со скоростью, равной акустической скорости звука в среде c_0 (§ 9), вопрос о стационарном решении может возникнуть лишь в том случае, когда нагрузка перемещается вдоль системы со скоростью c_0 , отличной от c_0 . Такой случай имеет место, в част-

ности, когда направление перемещения волны давления составляет с осью оболочки некоторый угол α . Если $\alpha > 0$, то, как видно на рис. 27, $c_0 > c_0/c_0 = M > 1$). В обратном движении M является числом Маха.

Рассматривая решение для стационарной осесимметричной волны в круговой цилиндрической оболочке, погруженной в безграничную акустическую среду, будем полагать, что оболочка простирается от $x = -\infty$ до $x = \infty$ и что нагрузка без искажения перемещается с постоянной скоростью c_0 бесконечно долгое время. Реакцию бесконечно длинной, погруженной в безграничную

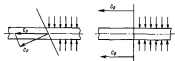


Рис. 27. К расчету реакции оболочки, погруженной в безграничную акустическую среду, на волну давления, распространяющуюся в направлении образующей с $M > 1$.

среду цилиндрической оболочки на волну, распространяющуюся в предельном направлении, изучали Херриер [87], Мани-Нахбар [94], Форрестал и Херман [90]. При учете взаимодействия оболочки со средой авторы [87, 94] принимают гипотезу плоского отражения, в пределах которой дополнительное давление в среде, вызванное деформацией оболочки, определяется зависимостью

$$p^* = -p_0 \epsilon. \quad (13.1)$$

В работе [90] изложен гипотеза плоского отражения выдвигается допущение об отсутствии движения жидкости в осевом направлении, т. е. принимается, что волны (за этот раз цилиндрические) отходят от оболочки независимо от осевой координаты. Последующий анализ [42, 43] показал, что гипотеза плоского отражения и допущение об отсутствии движения жидкости в осевом направлении слишком грубы для того, чтобы их можно было надежно использовать при анализе продольных волн в погруженной цилиндрической оболочке. Мы уже видели, что в цилиндрической оболочке, соприкасающейся с жидкостью, при $M = 1$ не могут возбуждаться стационарные волны. Между тем, основная часть работы [94] и работа [90] посвящены анализу стационарных волн именно при $M = 1$. Показано отметить, что авторы этих работ получали решения отдельно для интервалов $x > c_0 t$ и $x < c_0 t$. При определении постоянных интегрирования они

Используем условия совместности деформации на фронте волны нагрузки и условия на бесконечности, заданные из интуитивных соображений, причем в [94] явнее, чем в [90]. Относительно последствий произвола в назначении условий на бесконечности можно судить хотя бы по тому, что это привело Мани-Нахбара [94] к решению, которое, как мы увидим, отличается от точного и в котором диапазон чисел M даже в заказе. Приведем во внимание уязвимые места работ [94, 90], рассмотрим решение для

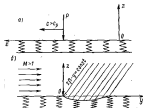


Рис. 28. К расчету стационарной волны в пластине, соприкасающейся с жидким полупространством и покоящейся на упругом микроэвском основании.

сверхзвуковой ($M > 1$) стационарной волны, используя точную линейную теорию взаимодействия оболочки с акустической средой. Затем исследуем возможные упрощения.

Найдем реакцию системы на нагрузку, равномерно распределенную вдоль линии $x = c_0 t$

$$p^0 = \delta(c_0 t - x), \quad (13.2)$$

где δ — дельта-функция Дирака.

Так как исследуемая система линейна, то при расчете реакции на другую нагрузку, в частности, на нагрузку в виде ступенчатой функции, может быть использован принцип наложения.

Преследуя методические цели, сначала получим решение для сверхзвуковой стационарной волны в изотропной пластине толщиной h и массовой плотностью ρ^0 , покоящейся на упругом микроэвском основании с коэффициентом упругости основания k_0 и соприкасающейся с жидким полупространством $z > 0$ (рис. 28, а). Давление в падающей волне изменяется по закону (13.2).

Воспользуемся относительной системой единиц измерения (§ 4), выбрав в ней в качестве основных единиц скорость движения нагрузки c_0 ($c = c_0 = 1$), линейную величину — радиус оболочки круглой цилиндрической оболочки, жесткость которой по отношению к равномерно распределенному давлению равна k_0 ($l = r_1 = -\sqrt{E k_0} = 1$), и массовую плотность жидкости ($\rho = 1$).

Объединяя уравнение колебания пластины и волновое уравнение для жидкости, получим

$$c_1^2 \left(1 + k_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w + m^2 w + [q]_{z=0} = \delta(t - x), \quad (13.3)$$

$$c_2^2 \nabla^2 \varphi - \dot{\varphi} = 0.$$

Здесь обозначения такие же, как и в § 4.

Условие непроницаемости пластины

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=0} = -\dot{w}. \quad (13.4)$$

С целью получения стационарного решения введем новую независимую переменную

$$y = t - x. \quad (13.5)$$

Подстановка (13.5) в (13.3) и (13.4) дает

$$\left(1 + k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + m^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w + \frac{1}{c_1^2} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_{y=0} = \frac{\delta(y)}{c_1^2};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \quad (13.6)$$

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=0} = -\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Далее, полагая, что все функции и их производные, входящие в уравнения, обращаются в нуль при больших по абсолютной величине значениях y , получим после применения преобразования Фурье к (13.6)

$$\left(1 + k_1 \omega^2 - \frac{m^2 \omega^2}{c_1^2} \right) w^0 + \frac{i\omega}{c_1^2} [w^0]_{z=0} = \frac{1}{c_1^2 \sqrt{2\pi}}; \quad (13.7)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^0}{\partial z^2} + \omega^2 \bar{\beta} \varphi^0 = 0; \quad (13.8)$$

$$\left[\frac{\partial \varphi^0}{\partial z} \right]_{z=0} = i\omega w^0, \quad (13.9)$$

где

$$\bar{\beta} = \sqrt{M^2 - 1}; \quad (w^0, \varphi^0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (w, \varphi) e^{i\omega y} dy.$$

Общий интеграл уравнения (13.8) будет

$$\varphi^* = C_1 \exp(-i\omega \beta x) + C_2 \exp(i\omega \beta x). \quad (13.10)$$

При переходе от изображения φ^* к оригиналу легко убедиться, что выражение для потенциала скорости φ может быть записано в виде

$$\varphi(y, z) = f_1(\beta z + y) + f_2(\beta z - y). \quad (13.11)$$

Для того чтобы выбрать вид потенциальной функции (13.11), заметим, что возмущения от деформированной пластины распространяются вдоль характеристик $z = y/\beta + C$, т. е. вдоль линий $\beta z - y = \text{const}$ (рис. 28, б). Возмущения не могут распространяться вдоль линий $\beta z + y = \text{const}$, ибо для части пространства над пластиной ($z > 0$) это означало бы, что возмущения распространяются против потока (в обратном направлении), что при сверхзвуковых скоростях движения нагрузки ($M \gg 1$) невозможно. Следовательно, поток возмущения зависит в данном случае только от переменной $\beta z - y$, поэтому и потенциал скорости потока возмущения также должен зависеть только от $\beta z - y$. Таким образом, в (13.10) следует положить $C_2 = 0$. Используя условие непроницаемости пластины (13.9), найдем

$$\varphi^* = \frac{u^*}{\beta} e^{-i\omega \beta y}. \quad (13.12)$$

Получим выражение для дополнительного давления в жидкости, вызванного деформацией пластины. Имеем

$$p^* = \frac{\rho c_p^2}{\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega [\varphi^*]_{\omega=0} e^{-i\omega \beta y} d\omega. \quad (13.13)$$

После подстановки (13.12) в (13.13) получим

$$p^* = -\frac{\rho c_p^2}{V M^2 - 1} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (13.14)$$

Формула (13.14) — это широко используемая в аэродинамике сверхзвуковых скоростей формула Акерета. Если перейти в (13.14) от переменной y к t , то выражение для p^* приобретет вид

$$p^* = -\frac{\rho c_p^2}{V M^2 - 1} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (13.15)$$

Сравним (13.15) с формулой (13.1), выражающей собой закон плоского отражения. Как видно, результаты расчета p^* по формулам Акерета и (13.1) совпадают лишь при $M \rightarrow \infty$.

Используя (13.7) и (13.12) и применяя формулу обращения для преобразования Фурье, найдем выражение для прогиба под действием силы интенсивностью $\delta(y)$

$$w_\delta(y) = \frac{1}{c_p^2 \beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega \beta y} d\omega}{1 - \beta^2 \omega^2 / c_p^2 - \omega_0^2 / c_p^2}. \quad (13.16)$$

Интеграл берется здесь в смысле главного значения. Выражение для прогиба под действием нагрузки в виде единичной ступенчатой функции

$$\delta(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y \geq 0; \\ 0 & \text{при } y < 0 \end{cases}$$

(переходная проводимость) определится в результате интегрирования выражения w_δ в пределах от $y = -\infty$ до текущего значения y

$$w_\delta = \int_{-\infty}^y w_\delta dy. \quad (13.17)$$

Теперь получим решение для стационарной волны в погруженной ортотропной оболочке с радиусом сечения r_0 . Выпишем исходные уравнения и граничные условия задачи, используя относительную систему единиц измерения ($c = c_p = 1$, $l = r_0 = 1$, $\rho = 1$, см. § 4):

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial w}{\partial x^2} + \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial w}{\partial t \partial t} = 0;$$

$$-k_4 \frac{\partial w}{\partial x} + k_2 w + k_1 \frac{\partial w}{\partial x^2} - k_2 \frac{\partial w}{\partial x^2} + \frac{1}{c_1^2} (\omega^2 w + i\psi_0 - \omega_0) = \frac{\delta(t - \tau)}{c_1^2}; \quad (13.18)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{1}{c_1} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - M^2 \psi = 0;$$

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right]_{t=0} = -\frac{\partial w}{\partial t}. \quad (13.19)$$

Расшифровка обозначений $c_{1,2}$, $k_{1,2,3,4}$ приведена в § 4. Воспользуемся заменой переменных (13.5). Полагая, как и в случае пластины, что все функции и их производные, входящие в уравнения (13.18), обращаются в нуль при больших по абсолютной

большие значения $y = t - x$, получим после применения преобразования Фурье

$$(1 - 1/c_2^2) \alpha'' + k_2 \alpha'' = 0; \quad (13.20)$$

$$k_2 \alpha'' + \left[k_3 + k_1 \alpha^2 + \left(k_2 - \frac{\alpha^2}{c_1^2} \right) \omega^2 \right] \alpha'' - \frac{i\omega}{c_1^2} [\Psi']_{r=1} = \\ = \frac{1}{c_1^2 \sqrt{2\pi}}; \quad (13.21)$$

$$\frac{d^2 \Psi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} + \omega^2 \Psi = 0; \quad (13.22)$$

$$\left[\frac{d\Psi}{dr} \right]_{r=1} = i\omega \alpha''; \quad (13.23)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по y . Общий интеграл уравнения (13.22) можно записать в виде

$$\Psi = C_1 H_0^{(1)}(\omega \bar{r}) + C_2 H_0^{(2)}(\omega \bar{r}), \quad (13.24)$$

где $H_0^{(1)}$ и $H_0^{(2)}$ — первая и вторая функции Ханкеля, которые определяются формулами

$$H_0^{(1)}(Z) = J_0(Z) + iN_0(Z); \quad H_0^{(2)}(Z) = J_0(Z) - iN_0(Z), \quad (13.25)$$

где J_n и N_n — цилиндрические функции нулевого и второго рода. Для $H_0^{(1)}(Z)$ и $H_0^{(2)}(Z)$ имеют место разложения

$$H_0^{(1)}(Z) = \sqrt{2/\pi Z} e^{i(Z - \theta_0)} + O\left(Z^{-\frac{3}{2}}\right), \\ H_0^{(2)}(Z) = \sqrt{2/\pi Z} e^{-i(Z - \theta_0)} + O\left(Z^{-\frac{3}{2}}\right). \quad (13.26)$$

Здесь $\theta_0 = \pi/2 - \pi/4$. Если принять во внимание асимптотические представления (13.26), то нетрудно прийти к выводу, что функции $H_0^{(1)}(\omega \bar{r})$ соответствует распространение возмущений против потока, функции $H_0^{(2)}(\omega \bar{r})$ — по потоку. Таким образом, в рассматриваемой пространственной задаче функции $H_0^{(1)}(\omega \bar{r})$ и $H_0^{(2)}(\omega \bar{r})$ являются аналогами соответственно функций $\exp(-i\omega \bar{r})$ и $\exp(i\omega \bar{r})$ в плоской задаче. Но при сверхзвуковом течении жидкости (относительно координаты y) возмущения не могут распространиться против потока. Поэтому

$$\Psi = C_1 H_0^{(1)}(\omega \bar{r}). \quad (13.27)$$

Исключив из (13.27) постоянную C_1 с помощью условия (13.23), найдем

$$\Psi = -\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \frac{H_0^{(1)}(\omega \bar{r})}{H_0^{(1)}(\omega \bar{r})}. \quad (13.28)$$

Далее, используя (13.20), (13.21), (13.28) и применяя формулу обращения для преобразования Фурье, получим выражение для относительной деформации α' и прогиба оболочки под действием силы интенсивностью $\delta(y)$

$$\alpha'_0(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-k_2 e^{-i\omega y} dy}{\Delta [k_3 + k_1 \alpha^2 + (k_2 - \alpha^2/c_1^2) \omega^2 - \alpha \omega^2/c_1^2] - k_2 k_4}; \quad (13.29)$$

$$\alpha_0(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_2 e^{-i\omega y} dy}{\Delta [k_3 + k_1 \alpha^2 + (k_2 - \alpha^2/c_1^2) \omega^2 - \alpha \omega^2/c_1^2] - k_2 k_4}. \quad (13.30)$$

В интегральные представления (13.29) и (13.30) введены обозначения

$$\Delta = 1 - \frac{1}{c_2^2}; \quad \mu_{00} = \frac{1}{\omega \bar{r}} \frac{H_0^{(1)}(\omega \bar{r})}{H_0^{(1)}(\omega \bar{r})}. \quad (13.31)$$

Если учесть, что $k_2 = \mu$, то из (13.29) и (13.30) следует, что между меридиональными и кольцевыми деформациями $\epsilon_1 = \alpha'$ и $\epsilon_2 = -\alpha''/c_1$ в стационарной волне устанавливается однозначное соотношение

$$\epsilon_1 = -\frac{\mu c_1}{1 - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \epsilon_2.$$

При $c_1 = c_2$ отсутствует взаимодействие оболочки с окружающей средой: $\mu(y) = 0$. Кроме того, в этом случае $\mu_0 = \delta(y)/k_2 c_1^2$, откуда следует, что при $c_1 = c_2$ закон изгиба нагрузки в падающей волне и закон изменения относительной деформации $\epsilon_1(y)$ совпадают между собой.

Иследуем профиль волны радиального смещения оболочки $\alpha(y)$. Строгое решение задачи возможно лишь численными методами. Здесь мы ограничимся рассмотрением приближенных решений, основанных на применении двух асимптотических представлений для функции μ_{00} . Первое из них получим из разложения (13.26)

$$\mu_{00} \sim i/\omega \bar{r} \quad (\omega \bar{r} \rightarrow \infty). \quad (13.32)$$

Второе, более точное, имеет вид

$$\mu_{00} \sim 2/(1 - 2i\omega \bar{r}) \quad (\omega \bar{r} \rightarrow \infty). \quad (13.33)$$

Из сопоставления выражений (13.16) и (13.30) видно, что использование представления (13.32) равносильно применению в задаче о взаимодействии оболочки с жидкостью формулы Акерета (13.14), полученной в соответствии с полной линейной теорией для двухмерного течения. Таким образом, аппроксимация (13.32) сводит пространственную задачу взаимодействия оболочки со средой к плоской. Более строгое, чем (13.32), представление (13.33) учитывает в первом приближении трехмерность течения жидкости. Напомним, что Мэн-Нахбар [94] принимал течение жидкости, возмущенное колебанием оболочки, всего лишь одномерным. Отделив вещественную часть от мнимой, запишем функцию $\omega_{\text{вн}}$ в виде

$$\omega_{\text{вн}} = \alpha + i\gamma.$$

Здесь

$$\alpha = \frac{1}{e\beta} \frac{J_2 V_2 + N_2 V_1}{J_2^2 + N_2^2}, \quad \gamma = \frac{1}{e\beta} \frac{J_2 V_2 - J_2 N_2}{J_2^2 + N_2^2}. \quad (13.34)$$

Функция α характеризует инерционное противодействие жидкости колебанию оболочки, γ — демпфирование. При использовании асимптотического представления (13.32) получим

$$\alpha = 0, \quad \gamma = 1/e\beta; \quad (13.35)$$

при использовании (13.33)

$$\alpha = 2/(1 + 4e^2\beta^2), \quad \gamma = 4e\beta/(1 + 4e^2\beta^2). \quad (13.36)$$

На рис. 29 приведены графики функций α и γ , рассчитанные по точным и приближенным формулам. Точность аппроксимаций (13.35) и (13.36) увеличивается по мере роста числа M и уменьшения длины волны, составляющих профиль смещения $w(y)$ (роста параметра ω). Из сопоставления этих графиков видно, что формулы (13.36) существенно лучше отражают фактическую картину взаимодействия оболочки с жидкостью, чем формулы (13.35), соответствующие теории Акерета.

В рамках строгой линейной теории $\text{Re } \omega_{\text{вн}} = \alpha \rightarrow \infty$ при $M \rightarrow 1$ и, следовательно, при этом $\omega_{\text{вн}}(y) \rightarrow 0$ равномерно по y . Таким образом, мы снова приходим к уже известному результату: по мере приближения скорости c_p к c_s стационарная волна радиальной деформации в оболочке исчезает.

При расчете профиля волны радиального смещения $w(y)$ положим, что оболочка изотропна и что на нее не действует продольная статическая сила N_1 . В этом случае параметры k_1 ($s = 1, 2, \dots, 5$) принимают значение

$$k_1 = \frac{N^2}{12(1-\mu^2)J_1^2}, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = \mu, \quad k_4 = \frac{\mu}{1-\mu^2}, \quad k_5 = \frac{1}{1-\mu^2}.$$

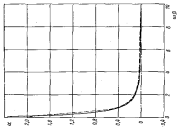
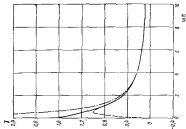


Рис. 29. Графики функций α и γ .
— — — — — точный расчет; - - - - - аппроксимация (13.36).

Перепишем выражение для функции $w_3(y)$ (13.30)

$$w_3(y) = \frac{1}{c_1^2 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iay} da}{G(a)}. \quad (13.37)$$

Вид функции $G(a)$ зависит от принятой в расчете модели взаимодействия оболочки с жидкостью. Вначале учтем взаимодействие в рамках теории Ахерста. Для этого случая имеем

$$G(a) = \Delta_1 + k_1 a^2 - \pi^2 \omega^2 / c_1^2 - i\omega / c_1^2 \beta, \quad (13.38)$$

где
$$\Delta_1 = (\Delta - \mu^2)(1 - \mu^2) \Delta. \quad (13.39)$$

Положим, что все нули ω_n многочлена $G(a)$ различны. При выполнении этого условия (что всегда легко проверить) интегральное представление функции $w_3(y)$ приводится к виду

$$w_3(y) = \frac{1}{k_1 c_1^2 2\pi} \sum_{n=1}^4 \frac{1}{(dG/da)_{a=a_n}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iay} da}{a - a_n}. \quad (13.40)$$

В общем случае нули a_n являются комплексными числами. Пусть

$$a_n = -\text{Re } a_n; \quad b_n = -\text{Im } a_n.$$

Тогда, имея в виду, что оригиналом для трансформанты Фурье

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i + \delta}$$

является функция

$$e^{-2\pi i + \pi y} \sigma(y)$$

(σ — единичная ступенчатая функция), и используя (13.40), получим

$$w_3(y) = \frac{1}{k_1 c_1^2} \sum_{n=1}^4 \frac{1}{(dG/da)_{a=a_n}} \exp(-b_n y + i a_n y) \sigma(b_n y). \quad (13.41)$$

Самой затруднительной частью вычислений w_3 является определение нулей a_n .

Расчет существенно упрощается, если пренебречь величиной комплексных $k_1 c_1^2 \Delta_1 / \pi^2$ и $k_1 c_1^2 / \pi^2 \beta^2$ по сравнению с единицей. Действительно, в этом случае координат четвертой степени $G(a)$ можно представить произведением двух квадратичных трехчленов

$$G(a) = \left(a^2 + \frac{i\omega}{\pi^2 \beta} - \frac{c_1^2 \Delta_1}{\pi^2} \right) \left(a^2 - \frac{i\omega}{\pi^2 \beta} - \frac{\pi^2}{k_1 c_1^2} \right). \quad (13.42)$$

нулей которых определяются элементарно. Приближительно к задаче расчета колебаний в воде стальных оболочек с $r_1/h = 100$ имеем следующие оценки порядка:

$$k_1 c_1^2 \Delta_1 / \pi^2 \sim 10^{-3} \Delta_1 / M; \quad k_1 c_1^2 / \pi^2 \beta^2 \sim 10^{-4} / M^2 (M^2 - 1). \quad (13.43)$$

Отсюда видно, что приближенный метод определения нулей a_n применением для значений M , лежащих вне окрестностей $M = 1$ и $M = M_2 = c_1/c_0$. Точность метода растет с ростом числа M (исключая окрестность точки $M = M_2$). В рамках приближенного метода получим

$$a_{1,2} = \mp \sqrt{\frac{c_1^2 \Delta_1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2 \beta^2}} \sigma \left(c_1^2 \Delta_1 - \frac{1}{4\pi^2 \beta^2} \right);$$

$$b_{1,2} = \frac{1}{2\pi \beta} \mp \sqrt{\frac{1}{4\pi^2 \beta^2} - \frac{c_1^2 \Delta_1}{\pi^2}} \sigma \left(\frac{1}{4\pi^2 \beta^2} - c_1^2 \Delta_1 \right); \quad (13.44)$$

$$a_{3,4} = \mp a_0, \quad b_{3,4} = -b_0 \quad (a_0 = \sqrt{\pi^2 / k_1 c_1^2}, \quad b_0 = 1/2\pi \beta).$$

[При колебаниях стальных оболочек в воде условие $c_1^2 \Delta_1 > 1/4\pi^2 \beta^2$ реализуется лишь в небольшом интервале скоростей движения нагрузки (при $r_1/h = 100$ — в интервале $M_2 < M < 1.13M_2$). Во всем остальном сверхзвуковом диапазоне скоростей c_r выполняется условие $c_1^2 \Delta_1 < 1/4\pi^2 \beta^2$.

В последующих выкладках ограничимся рассмотрением лишь этого практически наиболее интересного случая.

После некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(\frac{dG}{da} \right)_{a=a_1}} &= - \frac{1}{[c_1^2 + (b_0 + b_1)^2] (b_1 - b_0)}; \\ \frac{1}{\left(\frac{dG}{da} \right)_{a=a_2}} &= - \frac{1}{[c_1^2 + (b_0 + b_1)^2] (b_0 - b_1)}; \\ \frac{1}{\left(\frac{dG}{da} \right)_{a=a_3}} &= \frac{b_0 - b_1 - b_2}{2b_0 [c_1^2 + (b_0 + b_1)^2] (b_2 - b_1)} + \\ &+ \frac{b_0 - b_2 - b_1}{2b_0 [c_1^2 + (b_0 + b_1)^2] (b_1 - b_2)}; \\ \frac{1}{\left(\frac{dG}{da} \right)_{a=a_4}} &= \frac{b_0 + b_2 + b_1}{2b_0 [c_1^2 + (b_0 + b_1)^2] (b_2 - b_1)} + \\ &+ \frac{b_0 + b_2 + b_1}{2b_0 [c_1^2 + (b_0 + b_1)^2] (b_1 - b_2)}. \end{aligned} \quad (13.45)$$

Оценки (в задаче расчета колебаний стальных оболочек с $\epsilon_1/h \rightarrow \infty$ 100 в воде)

$$a_0^2 \sim 10^6 M \quad (b_0 + b_1 z)^2 \sim 10^2/(M^2 - 1)$$

позволяют отбросить, как малые, а (13.45) члены $(b_0 + b_1 z)^2$. Если, кроме того, положить, на основании оценки (13.43), что

$$a_0 = \sqrt{\sigma^2/h_1^2 \epsilon_1^2}$$

то при $\Delta_1 > 0$ [$\sigma^2(\epsilon_1 \sqrt{1 - \mu^2}, c_0)$] получим следующие выражение для профиля волны:

$$w(y) = \sigma(y) \frac{e^{-\Delta_1 y} - e^{-\Delta_2 y}}{\sigma^2(h_1 - b_1)} + \sigma(-y) \frac{e^{\Delta_1 y} \sin \alpha y}{\sigma^2 \Delta_1}. \quad (13.46)$$

Первый член в правой части этого соотношения, описывающий волну за нагрузкой ($y > 0$), соответствует решению задачи при $k_1 = 0$, т. е. для безмоментной оболочки; второй — волна вперед нагрузки — уточняет решение, полученное по безмоментной теории за счет учета изгибной жесткости. Реакция оболочки на участке перед нагрузкой представляет собой затухающие колебания, обладающие высокой частотой. За нагрузкой радиальное смещение резко растет, затем, достигнув экстремального значения, медленно уменьшается до нуля. Напряженное состояние на этом участке можно считать безмоментным.

Переходим к расчету переходной функции системы в рамках теории Акерета. Обозначим отношение динамического перемещения $w(y)$ при изменении давления в падающей волне по закону $p^* = \sigma(y)$ к безмоментному статическому $w_0 = 1/\epsilon_1^2$ буквой W

$$W = w_0 \tilde{w}.$$

Интегрируя (13.46) от $-\infty$ до y , получим

$$W = \frac{\epsilon_1^2}{\sigma^2} \left\{ \sigma(-y) \left[\frac{b_1 \Delta_1 \alpha_0 - \Delta_2 \exp(\Delta_2 y)}{\Delta_0 (\Delta_0^2 + \Delta_1^2)} + \sigma(y) \left[\frac{b_1 \exp(-\Delta_1 y) - \Delta_2 \exp(-\Delta_2 y)}{b_1 \Delta_1 (b_1 - b_1)} - \frac{1}{\Delta_0^2 + \Delta_1^2} + \frac{\sigma^2}{\Delta_1 \epsilon_1^2} \right] \right\}. \quad (13.47)$$

При решении задачи в рамках безмоментной теории (при $\Delta_1 > 0$)

$$W = \sigma(y) \left\{ \frac{[b_1 \exp(-\Delta_2 y) - \Delta_2 \exp(-\Delta_1 y)] \epsilon_1^2}{\sigma^2 b_1 \Delta_1 (b_1 - b_1)} + \frac{1}{\Delta_1} \right\}. \quad (13.48)$$

Таким образом, за фронтом волны оболочка остается практически в безмоментном состоянии. Высокочастотные изгибные колебания вперед фронта волны нагрузки имеют несравненно малые амплитуды. При $y \rightarrow -\infty$ колебания быстро затухают. При $y \rightarrow \infty$ функция $W(y)$ стремится монотонно к значению $1/\Delta_1$. Этот вывод строго следует из (13.47) и приблизительно, с точностью до малой величины $\epsilon_1^2/\sigma^2(a_0^2 + b_0^2)$, — из (13.48). Различие объясняется неточностью формулы (13.47). Если скорость движения нагрузки такова, что $\Delta_1 < 0$ ($\epsilon_1 \sqrt{1 - \mu^2} < c_0 < c_1$), то без-



Рис. 30. Зависимость величины $1/\Delta_1$ от числа M .

моментная часть решения, которая раньше определялась формулой (13.46), изменяется и приобретает вид

$$W = -\sigma(-y) \frac{\epsilon_1^2 \exp(-\Delta_2 y)}{\sigma^2 \Delta_1 (b_1 - b_1)} - \sigma(y) \left[\frac{\epsilon_1^2 \exp(-\Delta_2 y)}{\sigma^2 \Delta_1 (b_1 - b_1)} + \frac{1}{\Delta_1} \right]. \quad (13.49)$$

Выражение (13.49) описывает монотонно изменяющееся в пределах от $y = -\infty$ до $y = \infty$ смещение. Направление этого смещения произвольно относительно действия нагрузки. При учете взаимодействия между оболочкой и жидкостью в рамках теории Акерета величину $1/\Delta_1$ можно рассматривать как коэффициент динамичности нагрузки $p^* = p_0 f(z, t - x)$. На рис. 30 показана зависимость величины $1/\Delta_1$ от числа M при $\mu = 0.3$; $E = 2.05 \cdot 10^6$ кг/см²; $\rho^* = 8 \cdot 10^{-8}$ кг/сек²/см²; $c_0 = 1.5 \cdot 10^3$ см/сек. Можно видеть, что число $M^* = \frac{1}{c_0} \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$ является критическим: по мере приближения к нему перемещения $w(y)$ при $y \rightarrow \infty$ неограниченно растут.

В диапазоне малых сверхзвуковых скоростей величина $1/\Delta_1$ мало отличается от единицы. Это указывает на то, что при этих скоростях продольные силы инерции слабо влияют на движение

оболочки. При $M^* < M < M_*$ продольные силы инерции оказывают столь сильное влияние на поведение оболочки, что оболочка получает радиальное смещение в сторону, противоположную действию внешней нагрузки. При $M \rightarrow \infty$ величина $1/\delta_1$ стремится к значению $1-\mu^2$, что соответствует отсутствию смещения оболочки в продольном направлении. Здесь уместно отметить, что все эти обстоятельства упускает из виду Мавв-Нахбар. В его работе [94] отношение $\omega_0(\infty)/\omega_0$ для нагрузки $p^0 = p_0 \delta(x-t-x)$ не определяется в ходе решения задачи, а просто принимается равным единице.

Теперь укажем взаимодействие между оболочкой и жидкостью в рамках более строгой теории, основанной на применении асимптотического представления функции $\omega_{\text{жидк}}$, даваемого формулой (13.33). Ограничимся анализом реакции оболочки лишь в пределах безмоментной теории, имея в виду что высокочастотная составляющая смещения $\omega(\infty)$ определяется достаточно строго в рамках теории Акерета. При использовании представления (13.33) формулу для $G(\omega)$ можно записать в виде

$$G(\omega) = \frac{2\pi \rho^0 \omega^2 / c_1^2 - \omega^2 (2 + \alpha^2) / c_1^2 - 3\beta \omega + \delta_1}{1 - 2\alpha \beta}. \quad (13.50)$$

Выражение для $\omega_0(\omega)$, соответствующее функции (13.50), в общем случае весьма громоздко. Если ограничиться практически важным случаем, когда реализуются условия

$$\mu^2 \left| \frac{1}{2} - \alpha \beta \right| \ll 1; \quad \frac{\alpha^2}{2} \ll 1; \quad \delta_1 \approx 1,$$

то после интегрирования в (13.37) получим относительно простые формулы для $\omega_0(\omega)$, а затем и для $W = \omega_0(\omega) \delta_1^2$

$$\omega_0(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{\delta_1 (1 - \beta \alpha^2 \omega^2)} \times \\ \times \left[e^{-\alpha \omega} \left(\beta \cos \delta_0 \omega + \frac{1 - 3\beta \alpha_0}{2\alpha_0} \sin \delta_0 \omega \right) - \beta e^{-\delta_0 \omega} \right]; \quad (13.51)$$

$$W = \frac{\sigma(\omega)}{\delta_1 (1 - \beta \alpha^2 \omega^2)} \left[e^{-\alpha \omega} \left(\frac{\alpha_0}{\delta_0} \sin \delta_0 \omega - \cos \delta_0 \omega \right) + \right. \\ \left. + 1 - \mu^2 \beta^2 \delta_1^2 (1 - e^{-\delta_0 \omega}) \right], \quad (13.52)$$

где введены обозначения

$$\alpha_0 = c \beta^2 / 2; \quad \delta_0 = c_1 \sqrt{\Delta_0 / 2 - c \beta^2 / 4}; \quad \delta = 1 / \alpha \beta. \quad (13.53)$$

При учете изерционности оболочки в радиальном направлении точное решение задачи для функции W (при вещественном δ_0) имеет вид

$$W = \frac{\sigma(\omega)}{\delta_1} \left[e^{-\alpha \omega} \left(\frac{\alpha_0}{\delta_0} \sin \delta_0 \omega - \cos \delta_0 \omega \right) + 1 \right]. \quad (13.54)$$

Сопоставление решений (13.52) и (13.54) показывает, что изерционность оболочки в радиальном направлении (при колебании в плотной жидкости) влияет на профиль волны деформации лишь в малой окрестности фронта нагрузки. На рис. 31 приведено сравнение радиальной деформации стальной оболочки в воде ($E = 2,05 \cdot 10^6$ ед./см²; $\mu = 0,3$; $\rho = 8 \cdot 10^{-4}$ ед./см³; $c_0 = 1,5 \cdot 10^3$ см/сек; $r_0/k = 100$), соответствующей нагрузке $p^0 = \sigma_0 \delta(x-t-x)$, рассчитанной один раз в рамках теории Акерета, другой — с использованием аппроксимации (13.33). Расчет произведен для $M = \sqrt{2}$ и $M = 3$. Можно видеть, что коэффициенты жесткости нагрузки $p^0 = \sigma(\omega) \delta_1^2$ при учете пространственного течения жидкости оказываются более высокими, чем при использовании формулы Акерета.

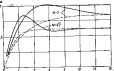


Рис. 31. Профиль волны радиальной деформации стальной оболочки в воде при $M = \sqrt{2}$ и $M = 3$.
— акеретовская (13.52);
--- теория Акерета.

§ 14. Воздействие на цилиндрическую оболочку ударной волны, движущейся вдоль оси со скоростью звука в среде

В предыдущем параграфе было установлено, что при движении ударной волны со скоростью звука в жидкости вдоль оси бесконечно длинной цилиндрической оболочки, окруженной безграничной акустической средой, амплитуда стационарного решения задачи тождественно равна нулю. Поэтому, чтобы изучить деформацию оболочки при таком случае нагрузки, необходимо перейти от модели бесконечной системы к полубесконечной и шести в рассмотрении начальные и граничные условия. Простейшие варианты постановки такой задачи показаны на рис. 32. На рис. 32, а нагрузка в виде ступенчатой волны давления движется симметрично направо и влево от сечения $x = 0$ со скоростью c_0 , а на рис. 32, б показана антисимметричная нагрузка.

Граничные условия для оболочки и жидкости в плоскости $x = 0$ для симметричной задачи имеют вид

$$[u]_{x=0} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=0} = \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{x=0} = 0, \quad (14.1)$$

Физически эти условия означают, что у оболочки в сечении $x = 0$ продольное перемещение отсутствует, а угол поворота и перерезывающая сила равны нулю. Жидкость через плоскость $x = 0$ протекать не может.

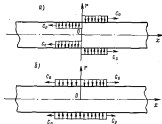


Рис. 32. Выходы постановки задачи с начальными и граничными условиями.

Для обратной симметричной задачи граничные условия будут следующими:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=0} = [u]_{x=0} = \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0} = [w]_{x=0} = 0. \quad (14.2)$$

В этом случае в сечении $x = 0$ равны нулю продольные напряжения, нормальное перемещение и изгибющий момент. В жидкости в плоскости $x = 0$ равно нулю дополнительное давление, создаваемое деформацией оболочки.

Отметим, что к такой же расчетной схеме сводится задача, показанная на рис. 33. Здесь полубесконечная оболочка, свободно опирающаяся на подвижные опоры, погружена в жидкое полупространство $x \geq 0$. На поверхность жидкости действует давление

$$p^*(t) = p_0 e^{i\omega t}.$$

Силы гравитационного происхождения при этом, естественно, не учитываются.

Приступим к решению сформулированной задачи³. Выпишем исходные уравнения и граничные условия, используя относительную систему единиц измерения, в которой за основные единицы приняты скорость звука в среде ($c = c_0 = 1$), радиус поперечного сечения оболочки ($l = r_0 = 1$) и массовая плотность жидкости ($\rho = 1$).

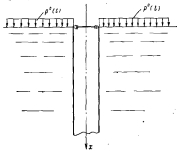


Рис. 33. Выход расчетной схемы.

Уравнения движения оболочки, которую полагаем ортотропной, имеют вид

$$-\frac{\partial u}{\partial x^2} - k_3 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{c_1^2} \ddot{u} = 0; \quad (14.3)$$

$$-k_4 \frac{\partial u}{\partial x} + k_5 w + k_3 \frac{\partial w}{\partial x^2} - k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{c_1^2} (m^2 \ddot{w} + [\dot{\psi}]_{x=0}) = \frac{1}{c_1^2} \sigma(x-t). \quad (14.4)$$

Значения коэффициентов k_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) указаны на стр. 30. Напомним, что здесь c_1 — скорость звука в материале, m^2 — масса единицы поверхности,

$$c_1^2 = m^2 c_0^2.$$

³ Решение получено В. Л. Добычинским и А. К. Перельман при участии А. В. Воронковой.

Амплитуда нагрузки принята равной единице ($p_m = 1$).
Граничные условия для оболочки возьмем в форме (14.2), т. е. будем решать обратную симметричную задачу. Движение жидкости подчиняется волновому уравнению, которое выведем с учетом осевой симметрии задачи

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \bar{\varphi} = 0. \quad (14.5)$$

Граничные условия для потенциала φ следующие:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r=1} = -\dot{u}_x, \quad (14.6)$$

$$|\varphi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (14.7)$$

Учтем также граничное условие (14.2). Начальные условия примем нулевыми.

Положив, что все функции и их производные, входящие в решение задачи, образуются в нуль при больших значениях x , перейдем к уравнению (14.3) косинус-, а к уравнению (14.4) к (14.5) — синус-преобразованиям Фурье. В результате этой операции получим

$$\omega^2 \bar{u}^s - k_2 \omega \bar{u}^s + \frac{1}{c_2^2} \bar{u}^s = 0; \quad (14.8)$$

$$-k_4 \omega \bar{u}^s + (k_3 + k_1 \omega^2 + k_2 \omega^2) \bar{u}^s + \frac{\pi^2}{c_1^2} \bar{u}^s + \frac{1}{c_1^2} [\bar{\psi}^s]_{r=1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos \omega x}{c_2^2}; \quad (14.9)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}^s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\psi}^s}{\partial r} - \omega^2 \bar{\psi}^s - \bar{\psi}^s = 0. \quad (14.10)$$

Здесь

$$u^s = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} u \cos \omega x dx; \quad (14.11)$$

$$(\omega^s, \varphi^s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (\omega, \varphi) \sin \omega x dx. \quad (14.12)$$

Граничное условие (14.6) примет вид

$$\left[\frac{\partial \bar{\psi}^s}{\partial r} \right]_{r=1} = -\dot{u}^s. \quad (14.13)$$

Применим далее к уравнениям (14.8), (14.9), (14.10) и (14.13) преобразование Лапласа по времени

$$(s^2 + c_2^2 \omega^2) \bar{u}^{sL} - k_2 c_2 \omega \bar{u}^{sL} = 0; \quad (14.14)$$

$$-k_4 \omega \bar{u}^{sL} + \left(k_3 + k_1 \omega^2 + k_2 \omega^2 + \frac{\pi^2 \rho}{c_1^2} \right) \bar{u}^{sL} + \frac{1}{c_1^2} [\bar{\psi}^{sL}]_{r=1} = \frac{1}{c_1^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{s(\bar{s}^2 + \omega^2)}; \quad (14.15)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}^{sL}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\psi}^{sL}}{\partial r} - (\omega^2 + s^2) \bar{\psi}^{sL} = 0; \quad (14.16)$$

$$\left[\frac{\partial \bar{\psi}^{sL}}{\partial r} \right]_{r=1} = -s \bar{u}^{sL}. \quad (14.17)$$

Здесь

$$f^L(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (14.18)$$

Решение уравнения (14.16) записывается в виде

$$\bar{\psi}^{sL} = C_1 I_0(\omega \bar{r}) + C_2 K_0(\omega \bar{r}), \quad (14.19)$$

где

$$\bar{r} = \sqrt{1 + \frac{r^2}{c_2^2}}; \quad (14.20)$$

I_0, K_0 — цилиндрические функции нулевого аргумента первого и второго рода нулевого порядка.

Для выполнения условия (14.7) необходимо положить $C_2 = 0$, ибо $I_0(\omega \bar{r}) \rightarrow \infty$. Тогда, используя граничное условие (14.17), получим

$$\bar{\psi}^{sL} = \frac{s K_1(\omega \bar{r}) \omega \bar{r}^L}{\omega \bar{r} K_1(\omega \bar{r})}; \quad (14.21)$$

$$[\bar{\psi}^{sL}]_{r=1} = s \omega \bar{u}^{sL}, \quad (14.22)$$

где

$$s \omega = \frac{K_0(\omega \bar{r})}{\omega \bar{r} K_1(\omega \bar{r})}. \quad (14.23)$$

Подставляя теперь (14.22) в (14.15) и решая систему уравнений (14.14) и (14.15), приходим к следующим результатам:

$$\omega^{PI} = \frac{k_2 \beta^2 \omega}{s^2 + c_1^2 \omega^2} \omega^{PI}; \quad (14.24)$$

$$\omega^{PI} = \frac{1}{c_1^2} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{\omega (s^2 + c_1^2 \omega^2)}{s (s^2 + c_1^2 \omega^2) D(s)}, \quad (14.25)$$

где

$$D(s) = \frac{1}{c_1^2} s^3 (\alpha^2 + m_\omega) (s^2 + c_1^2 \omega^2) + (k_3 + k_1 \alpha^2 + k_2 \omega^2) (s^2 + c_1^2 \omega^2) - k_2 k_3 c_1^2 \omega^2. \quad (14.26)$$

Отметим, что если не учитывать продольных сил вквара, то вместо (14.24), (14.25) и (14.26) будем иметь

$$\omega^{PI} = \frac{k_2}{\omega} \omega^{PI}; \quad (14.27)$$

$$\omega^{PI} = \frac{1}{c_1^2} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{\omega}{s (s^2 + c_1^2 \omega^2) D(s)}; \quad (14.28)$$

$$D(s) = 1 + k_1 \alpha^2 + k_2 \omega^2 + \frac{1}{c_1^2} s^3 (m^2 + m_\omega). \quad (14.29)$$

Использование указанного допущения существенно упрощает все расчеты и практически не влияет на точность определения функции $\omega(x, t)$, которая представляет наибольший практический интерес¹. В дальнейшем мы сравним определение именно этой функции ω для сокращения объема выкладок приведем только упрощенное решение.

Используя формулу обращения преобразования Лапласа, будем иметь

$$\omega^P = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega^{PI} e^{st} ds, \quad (14.30)$$

Рассмотрим особенности подынтегральной функции. Прежде всего укажем, что точки $s = \pm i\omega$ являются точками ветвления, ибо при $\beta = \sqrt{1 + \frac{s^2}{\omega^2}} = 0$ разветвляются функции $K_0(\omega\beta)$ и $K_1(\omega\beta)$. Кроме того, в точках $s = 0$ и $s = \pm i\Omega_1$ подынтеграль-

¹ Преобразование продольных сил вквара неустойчиво лишь при $c_1 = c_2$, когда в обобщенных координатах возникают резонансы Якоби [66, 67].

ная функция имеет простые полюсы. Величина Ω_1 есть корень уравнения

$$D(s) = 0, \quad (14.31)$$

которое удобно привести к виду

$$\frac{c_1^2}{\omega^2} = \frac{\alpha^2 + m_\omega}{1 + k_1 \alpha^2 + k_2 \omega^2}, \quad (14.32)$$

где

$$m_\omega = [m_\omega]_{s=0} = \frac{K_0(\omega\beta_0)}{\omega\beta_0 K_1(\omega\beta_0)}, \quad (14.33)$$

$$\beta_0 = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}. \quad (14.34)$$

Уравнение (14.32) является трансцендентным относительно Ω_1 . Поэтому приходится его корни находить графически. Характер

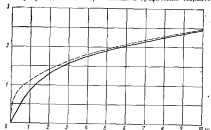


Рис. 34. График функции $\Omega_1(\omega)$ при условии $\alpha^2 = 0,28$, $c_1^2 = 0,97$, $k_2 = 0$, $k_1 = 0,92 \cdot 10^{-3}$.

— связанная жесткость; --- независимая жесткость.

функции $\Omega_1(\omega)$ показан на рис. 34. Отметим, что при любых значениях параметра ω имеет место неравенство

$$\Omega_1 < \omega, \quad (14.35)$$

а при стремлении ω к нулю

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\Omega_1}{\omega} = 1. \quad (14.36)$$

Необходимо указать, что величина Ω_2 есть не что иное, как частота собственных колебаний оболочки по форме $w(x) = \sin \alpha x$.

При вычислении интеграла (14.30) используем контур C , показанный на рис. 35, внутри которого функция w^{PL} мероморфна. Следовательно, по теореме Коши будем иметь

$$\int_C w^{PL} e^{st} ds = -2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{res} [w^{PL} e^{st}]_{s=\Omega_k}, \quad (14.37)$$

где символ res означает вычет функции в k -м полюсе.

Интеграл по замкнутому контуру C разбивается на интегралы по прямым и дугам окружностей: по дуге окружности радиусом R , проведенной из точки $s=0$, по дугам окружностей радиусом r вокруг точек $s=\pm i\alpha$, по прямой AB , и по берегам разрывов I, II, III, IV .

При $R \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$ интегралы по дугам стремятся к нулю. Тогда вместо (14.30) получим

$$w^P = \sum_{k=1}^N \operatorname{res} [w^{PL} e^{st}]_{s=\Omega_k} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma + \Pi + III + IV} w^{PL} e^{st} ds. \quad (14.38)$$

Так как все полюсы подынтегральной функции простые, то вычеты можно найти по формуле

$$\operatorname{res} [w^{PL} e^{st}]_{s=\Omega_k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{c_1^2} \frac{e^{st}}{B'(\Omega_k)}, \quad (14.39)$$

$$B(s) = s(s^2 + \alpha^2) D(s), \quad (14.40)$$

Производная функции $B(s)$ равна

$$B'(s) = (s^2 + \alpha^2) D'(s) + 2s D(s) + 2s^2 (s^2 + \alpha^2) \left[\frac{1}{c_1^2} (\alpha^2 + m_\alpha) + \frac{s^2}{2c_1^2} \left(\alpha_0^2 - \frac{1}{\omega^2 \beta^2} \right) \right]. \quad (14.41)$$

Теперь нетрудно найти вычеты

$$\operatorname{res} [w^{PL} e^{st}]_{s=\Omega_k} = \frac{1}{c_1^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\alpha (1 + \lambda_2 \alpha^2 + \lambda_2 \alpha^2 \beta^2)}; \quad (14.42)$$

$$\operatorname{res} [w^{PL} e^{st}]_{s=i\alpha_1} + \operatorname{res} [w^{PL} e^{st}]_{s=-i\alpha_1} = -\frac{1}{c_1^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha \cos \Omega_1 t}{\Omega_1^2 (\omega^2 - \Omega_1^2) B'(\Omega_1)}, \quad (14.43)$$

где

$$B'(\Omega_1) = \frac{1}{c_1^2} (\alpha^2 + m_\alpha) - \frac{1}{2c_1^2} \Omega_1^2 \left(m_\alpha - \frac{1}{\omega^2 \beta_1^2} \right). \quad (14.44)$$

Здесь

$$\beta_1 = \sqrt{1 - \frac{\Omega_1^2}{\omega^2}}; \quad m_\alpha = \frac{K_2(\omega \beta_1)}{\omega \beta_1 K_1(\omega \beta_1)}. \quad (14.45)$$

Перейдем к вычислению интегралов по берегам разрывов. При этом следует иметь в виду, что функция m_α имеет разные значения на берегах разрывов. На мнимой оси $s = \pm i\alpha$. Функция β на берегах разрывов принимает два значения:

$$\beta = \pm \beta_k, \quad \text{где } \beta_k = \sqrt{\frac{s^2}{\omega^2} - 1}, \quad (14.46)$$

причем на берегах I и III в формуле (14.46) надо взять знак плюс, а на берегах II и IV — минус.

Тогда на берегах I и III

$$m_\alpha = -\frac{K_2(\omega \beta_k)}{\omega \beta_k K_1(\omega \beta_k)}, \quad (14.47)$$

а на берегах II и IV

$$m_\alpha = -\frac{K_2(-\omega \beta_k)}{\omega \beta_k K_1(-\omega \beta_k)}. \quad (14.48)$$

$$\begin{aligned} K_n(z) &= -\frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi}{2} i} H_n^{(1)}(iz); \\ H_n^{(1)}(z) &= J_n(z) + iN_n(z); \\ J_n(-z) &= J_n(z); \\ J_n(-iz) &= -J_n(iz); \\ N_n(-z) &= N_n(z) + 2iJ_n(z); \\ N_n(-iz) &= -N_n(iz) - 2iJ_n(iz), \end{aligned} \quad (14.49)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} m_n(\omega\beta_n) &= A_1(\omega\beta_n) + iA_2(\omega\beta_n); \\ m_n(-\omega\beta_n) &= A_1(\omega\beta_n) - iA_2(\omega\beta_n), \end{aligned} \quad (14.50)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{J_n(\omega\beta_n) J_1(\omega\beta_n) + N_n(\omega\beta_n) N_1(\omega\beta_n)}{\omega\beta_n [J_1^2(\omega\beta_n) + N_1^2(\omega\beta_n)]}; \\ A_2 &= \frac{J_n(\omega\beta_n) N_1(\omega\beta_n) - J_1(\omega\beta_n) N_n(\omega\beta_n)}{\omega\beta_n [J_1^2(\omega\beta_n) + N_1^2(\omega\beta_n)]}. \end{aligned} \quad (14.51)$$

Теперь интеграл по берегам всех разрезов можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} w_0^2 &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4} w^{F_1} e^{-w} ds = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w}{c_1^2} \left[\int_0^{\infty} R_2(\omega, y) e^{i\pi y} dy + \right. \\ &+ \int_0^{\infty} R_3(\omega, y) e^{i\pi y} dy + \int_0^{\infty} R_1(\omega, y) e^{-i\pi y} dy + \\ &\left. + \int_0^{\infty} R_4(\omega, y) e^{-i\pi y} dy \right] = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w}{c_1^2} \int_0^{\infty} [R_2(\omega, y) - R_1(\omega, y) \times \\ &\times (e^{i\pi y} + e^{-i\pi y})] dy, \end{aligned} \quad (14.52)$$

где

$$\begin{aligned} R_{1,2}(\omega, y) &= \\ &= \frac{1}{y(\omega^2 - y^2) \left[\left(1 + k_1 \omega^2 + k_2 \omega^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} y^2 - \frac{1}{c_1^2} y^2 A_1(\omega\beta_n) \pm iA_2(\omega\beta_n) \right) \right]}. \end{aligned} \quad (14.53)$$

После несложных преобразований формула (14.52) примет вид

$$w_0^2 = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{w}{c_1^2} \int_0^{\infty} \Phi(\omega, y) \cos \pi y dy. \quad (14.54)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi(\omega, y) &= \\ &= \frac{y A_1(\omega\beta_n)}{(\omega^2 - y^2) \left[\left(1 + k_1 \omega^2 + k_2 \omega^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} y^2 - \frac{1}{c_1^2} y^2 A_1(\omega\beta_n) \right)^2 + \frac{1}{c_1^2} y^4 A_2^2(\omega\beta_n) \right]}. \end{aligned} \quad (14.55)$$

Суммируя полученные результаты, находим

$$\begin{aligned} w^F(\omega, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w}{c_1^2} \left[F_1(\omega) - F_2(\omega) \cos \Omega_2 t - \right. \\ &\left. - \frac{2}{\pi} \omega \int_0^{\infty} \Phi(\omega, y) \cos \pi y dy \right], \end{aligned} \quad (14.56)$$

где

$$F_1(\omega) = \frac{1}{\omega (1 + k_1 \omega^2 + k_2 \omega^2)}; \quad (14.57)$$

$$F_2(\omega) = \frac{\omega}{\omega_1^2 (\omega^2 - \omega_1^2) \delta^2(\Omega_2)}. \quad (14.58)$$

Применяя далее формулу обращения преобразования Фурье, получим искомый результат

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \frac{1}{c_1^2} \left[\int_0^{\infty} F_1(\omega) \sin \omega x d\omega - \int_0^{\infty} F_2(\omega) \cos \Omega_2 t \sin \omega x d\omega - \right. \\ &\left. - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \omega F_3(\omega) \sin \omega x d\omega \right], \end{aligned} \quad (14.59)$$

где

$$F_3(\omega) = \int_0^{\infty} \Phi(\omega, y) \cos \pi y dy. \quad (14.60)$$

Формула (14.59) весьма сложна для вычислений, поэтому численные результаты можно получить только с помощью ЭВМ. Последовательность операций, например, может быть такой. Для заданного момента времени t вычисляется функция $F_2(\omega)$. При этом следует иметь в виду, что при $y \rightarrow \infty$ подынтегральная функция в (14.60) стремится к бесконечности; следовательно,

интеграл является несобственным. Можно показать, что этот интеграл сходящийся. При вычислениях его следует разбить на два

$$F_2(\omega) = \int_0^{+\infty} \Phi(\omega, y) \cos \omega y dy + \int_{-\infty}^0 \Phi(\omega, y) \cos \omega y dy.$$

Первый интеграл при использовании асимптотического значения функции $\Phi(\omega, y)$, когда $y \rightarrow \infty$, берется точно. Второй рассчитывается численно.

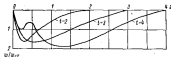


Рис. 36. График функции $w(x)$ при $t = 2, 3, 4$.

После того как функция $F_2(\omega)$ найдена, для нескольких заданных значений x , вычисляются интегралы, входящие в формулу (14.59).

Отметим, что интеграл

$$\int_0^{\infty} F_2(\omega) \cos \Omega_1 t \sin \omega x d\omega$$

также несобственный, но сходящийся. Поэтому и здесь приходится разбивать область интегрирования на два участка: от нуля до x и от x до ∞ .

В результате вычислений по нескольким точкам строится кривая прогиба $w(x)$ для заданного момента времени t .

Рассмотрим данные числового примера, выполняемого для стальной изотропной оболочки с параметрами $\Omega_1^2 \approx 12,2$, $\pi^2 = 0,08$.

График функции $w(x)$ для нескольких моментов времени приведен на рис. 36. Величина динамического прогиба отнесена к статическому прогибу безмоментной оболочки при единичной нагрузке

$$\omega_{ст} = \frac{1}{c_1^2} = \frac{1}{\pi^2 c_2^2}. \quad (14.61)$$

Как видно из графиков, динамический прогиб возникает сразу же за фронтом нагрузки (напомним, что единица времени равна $\frac{L_0}{c_0}$, а единица длины L_0 , поэтому координата фронта нагрузки

находится в точке $x = t$). Максимальная величина динамического прогиба составляет около 180% статического. Таким образом, эффект динамического приложения нагрузки весьма значителен.

Рассмотрим теперь возможные пути получения приближенных решений.

Введем допущение о нежимаемости жидкости. В этом случае ее движение будет описываться уже не волновым уравнением, а уравнением Лапласа. Решение для потенциала ϕ сохранит свой вид, но функция ψ станет равной единице. Тогда выражение (14.29) для функции $D(s)$ можно представить так:

$$D(s) = (s^2 + \Omega_1^2) (1 + k_1 s^2 + k_2 s^4) \frac{1}{\Omega_1^2}, \quad (14.62)$$

то

$$\Omega_1^2 = \frac{c_1^2 (1 + k_1 \omega^2 + k_2 \omega^4)}{\omega^2 + \omega_0^2}; \quad (14.63)$$

$$\omega_0 = \frac{K_2(\omega)}{\alpha K_1(\omega)}. \quad (14.64)$$

С учетом (14.62) формула (14.28) примет вид

$$\omega^{\omega^2} = \frac{1}{c_1^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \Omega_1^2}{s (s^2 + \alpha^2) (s^2 + \Omega_1^2) (1 + k_1 \omega^2 + k_2 \omega^4)}. \quad (14.65)$$

Выясним, как влияет сжимаемость жидкости на частоты собственных колебаний оболочки. Функция $\Omega_1^2(\omega)$, рассчитанная по формуле (14.63) для стальной изотропной оболочки с относительной толщиной $\frac{h}{c_1} \sim \frac{1}{100}$ ($\mu^2 = 0,08$; $c_2^2 \sim 12,2$), показана на рис. 34 пунктиром. Сравнивая эту кривую с аналогичной кривой для сжимаемой жидкости, видно, что сжимаемость оказывает существенное влияние на частоты колебаний оболочки только при малых значениях параметра α , т. е. при длинных волнах (напомним, что длина волны $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$).

Вернемся к формуле (14.65). Нетрудно видеть, что функция ω^{ω^2} является дробно-рациональной и имеет простые полюсы в точках $s = 0$, $s = \pm i\alpha$ и $s = \pm i\Omega_1$. Применяя для определения остатка теорему вычетов, получим

$$\omega^{\omega^2} = \frac{1}{c_1^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + k_1 \omega^2 + k_2 \omega^4} \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{\Omega_1 \cos \omega t}{\omega (\omega^2 - \Omega_1^2)} - \frac{\omega \cos \Omega_1 t}{\omega^2 - \Omega_1^2} \right]. \quad (14.66)$$

В дальнейшем будем полагать оболочку изотропной ($k_1 = 0$). Применяя к формуле (14.66) обратное преобразование Фурье, будем иметь

$$w(x, t) = \frac{1}{c_2} \left[1 - e^{-\alpha x} \cos \pi x + \int_0^{\pi} \frac{(\Omega_0 \cos \omega t - \omega^2 \cos \Omega_1 t) \sin \omega x d\omega}{\alpha(1 + k_2 \omega^2)(\omega^2 - \Omega_0^2)} \right], \quad (14.67)$$

где

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{4k_2}}.$$

Формула (14.67) существенно проще решения (14.59) для сжимаемой жидкости, ибо в нее не входят двойные интегралы. Однако и в данном случае приходится прибегать к численному интегрированию. Последняя операция усложняется тем, что интеграл, входящий в формулу (14.67), неособенный, так как подынтегральная функция терпит разрыв в точке $\omega = \Omega_0$.

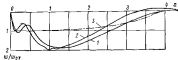


Рис. 37. Нормированный прогиб оболочки $w(x)$ в момент времени $t = 4$.
1 — сжимаемая среда; 2 — несжимаемая среда; 3 — плоское отражение.

Интересно сравнить поведение оболочки в несжимаемой и в сжимаемой жидкости. На рис. 37 приведены соответствующие графики функций $w(x)$ в момент времени $t = 4$. Как видно из рисунка, обе эпюры весьма близки между собой. Это свидетельствует о том, что основную роль в процессе взаимодействия среды и оболочки играет перетекание жидкости в осевом направлении, а сжимаемость среды имеет второстепенное значение. Конечно, такая картина присуща только рассматриваемой обратно симметричной задаче, в которой жидкость свободно перетекает через плоскость $x = 0$ слева направо (рис. 32, б). В симметричной задаче (рис. 32, а) переток жидкости через указанную плоскость нет, поэтому деформация оболочки должна вызывать более сильные растяжения среды.

Покажем теперь, к каким результатам приводит использование гипотезы плоского отражения, примененной к рассматриваемой задаче Мани-Нахбаром [94]. Согласно этой гипотезе, дополнительное давление, возникающее в жидкости при деформации оболочки,

$$p'' = -\dot{w}. \quad (14.68)$$

Тогда, полагая для упрощения выкладок, что оболочка изотропна и безмоментна ($k_1 = k_2 = 0$), вместо зависимости (14.28) будем иметь

$$\omega^{rc} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\pi^2} \frac{\omega}{x(x^2 + \omega^2) \left(x^2 + \frac{1}{\pi^2} + \frac{c_2^2}{\omega^2} \right)}. \quad (14.69)$$

Применив формулу обращения преобразования Фурье, получим

$$w^c = \frac{1}{\pi^2 \left(x^2 + \frac{1}{\pi^2} + \frac{c_2^2}{\omega^2} \right)} e^{-\alpha x}. \quad (14.70)$$

Переход к оригиналу не вызывает затруднений и приводит к следующей зависимости:

$$w(t_2) = \frac{1}{c_2} \left(1 + A_1 e^{-\alpha t_2} - A_2 e^{-\alpha t_2} \right) \cdot \alpha(t_2), \quad (14.71)$$

где

$$t_2 = t - x;$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2\pi^2} \left[1 \pm \sqrt{1 - 4\pi^2 c_2^2} \right];$$

$$A_1 = \frac{\alpha_1 \pi^2}{\sqrt{1 - 4\pi^2 c_2^2}}, \quad A_2 = \frac{\alpha_2 \pi^2}{\sqrt{1 - 4\pi^2 c_2^2}} \quad (14.72)$$

(предполагается, что $\alpha_1^2 c_2^2 < 1/4$).

Как видим, введение гипотезы плоского отражения привело к стационарному решению, зависящему только от параметра t_2 . Как было показано в § 13, при строгой постановке задачи стационарное решение равно нулю. Таким образом, гипотеза плоского отражения приводит к физически неверному результату. Все же представляет интерес сравнить расчеты по формуле (14.71) с точным решением. Как видно из графиков на рис. 37, гипотеза плоского отражения существенно занижает величину динамических прогибов оболочки. Это вполне естественно, ибо указанная гипотеза занижает гидродинамические силы, возникающие при деформации оболочки.

Необходимо отметить, что в работе Форрестона и Хермана [199] для оценки гидродинамических сил применена гипотеза цилиндрических волн¹.

Полученное ими решение также является стационарным и обладает теми же принципиальными недостатками, что и решение Мази-Нахбара. Поэтому на нем мы останавливаться не будем.

¹ В основе этой гипотезы лежит предположение о том, что скорость течения жидкости в основном направлена радиально наружу, т. е. $\partial p / \partial r \approx 0$.

Глава III

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ОБОЛОЧКАМИ СФЕРИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

§ 15. Вводные замечания и постановка задачи

Переходные процессы, возникающие в оболочках при взаимодействии с ними ударной волны, начали изучать в начале 50-х годов. С тех пор в литературе опубликовано несколько десятков статей на эту тему. Во всех работах жидкость полагалась акустической средой и ее движение описывалось полным уравнением. Для оболочек большинство авторов использовало такие линейные уравнения. В последнее время появился ряд работ, в которых применены геометрически нелинейные уравнения оболочек, что позволило изучить процесс потери устойчивости. В данной главе взаимодействие ударной волны с оболочками исследуется в линейной постановке. Нелинейным задачам посвящена пятая глава.

К настоящему времени удалось изучить взаимодействие ударной волны со сферической и круговой цилиндрической оболочками. В предыдущей главе мы уже рассмотрели случай движения ударной волны вдоль оси цилиндра. Здесь исследуется другой случай, когда фронт плоской волны параллелен оси цилиндра, а также взаимодействие ударной волны со сферой.

При действии ударной волны на оболочку любой формы нагрузка будет складываться из давления в прямой волне и дополнительного давления, вызванного взаимодействием волны и оболочки.

Давление в прямой волне является заданным. Для определения дополнительного давления необходимо решить волновое уравнение для потенциала скоростей в жидкости, вызванных наличием оболочки,

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (15.1)$$

Давление и скорость частиц выражаются через потенциал по формулам

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad (15.2)$$

где v_n — компонента скорости по направлению n .

На поверхности оболочки нормальные компоненты скорости жидкости и оболочки должны быть равны, так как предполагается безотрывное обтекание. Отсюда вытекает первое граничное условие для потенциала

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right]_{r=r_0} + [v_{\text{нн}}]_{r=r_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (15.3)$$

Здесь $v_{\text{нн}}$ — нормальная к оболочке составляющая скорости частиц в прямой волне;

φ — нормальное перемещение оболочки;

r_0 — значение радиуса-вектора r на поверхности оболочки.

Если оболочка окружена безграничной средой, то вызванные ею возмущения в жидкости должны затухать по мере удаления от оболочки. Поэтому потенциал дополнительного давления необходимо подчинять следующему условию:

$$[\varphi]_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (15.4)$$

Дополнительное давление на поверхности оболочки будет

$$[p_2]_{r=r_0} = -\rho \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]_{r=r_0}. \quad (15.5)$$

Уравнение (15.1) является линейным. Поэтому при его исследовании можно пользоваться принципом суперпозиции. Для анализа физической природы процесса взаимодействия ударной волны с оболочкой целесообразно разбить потенциал φ и дополнительное давление p_2 на две составляющие

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2; \quad (15.6)$$

$$p_2 = p_1 + p_2. \quad (15.7)$$

Пусть потенциал φ_1 описывает движение жидкости при обтекании ударной волной абсолютно жесткой и неподвижной в пространстве оболочки. Тогда на поверхности такого тела должно выполняться следующее граничное условие:

$$\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right]_{r=r_0} + [v_{\text{нн}}]_{r=r_0} = 0. \quad (15.8)$$

Дополнительное давление в жидкости будет

$$p_1 = -\rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}. \quad (15.9)$$

Нагрузка на поверхность тела будет состоять из давления в прямой волне и дополнительного давления:

$$p^0 = [p_2]_{r=r_0} = -\rho \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\right]_{r=r_0}, \quad (15.10)$$

где p_1 — давление в прямой волне.

Условимся называть это суммарное давление дифракционным, ибо оно есть результат дифракции ударной волны около тела. Часто применяется также термин — нагрузка первой категории [28].

Исследование процесса дифракции ударных волн на телах различной формы и определение сил первой категории является чисто гидродинамической задачей. Эта проблема подробно рассмотрена в монографиях А. А. Харкенича [74] и Б. В. Замишавель, Ю. С. Яковлева [28], поэтому мы коснемся их в минимальном объеме.

Давление, возникающее в жидкости при деформации и движении оболочки, будет описываться потенциалом φ_2 , граничным условием для которого на поверхности оболочки служит равенство

$$\left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right]_{r=r_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = 0. \quad (15.11)$$

Давление на оболочку, равное

$$p^* = -\rho \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\right]_{r=r_0}, \quad (15.12)$$

обычно называют давлением излучения. Используется также термин — нагрузка второй категории [28].

Давление излучения может быть найдено только путем совместного решения уравнений движения оболочки и волнового уравнения. В этом и заключается основная трудность исследования резонансных процессов в конструкциях, сопряженных с жидкостью.

Следует отметить, что разделение нагрузки на две составляющие не является обязательным и в некоторых задачах не дает особых преимуществ. Однако в большинстве случаев указанный прием существенно упрощает решение, ибо позволяет заранее найти дифракционное давление на твердом теле и в дальнейшем считать его заданным. При этом задача сводится к решению системы уравнений типа

$$\ddot{u} + L_1(u, v, w) = 0;$$

$$\ddot{v} + L_2(u, v, w) = 0;$$

$$\ddot{w} + L_3(u, v, w) = \frac{1}{m^0} \left\{ p^* - \rho \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\right]_{r=r_0} \right\}; \quad (15.13)$$

$$V^0 \varphi_2 = \frac{1}{\rho} \ddot{u},$$

где

u, v, w — компоненты перемещения точек средней поверхности оболочки;

$L_i(u, v, w)$ ($i = 1, 2, 3$) — дифференциальные операторы по координатам, фиксирующим положение точки на поверхности оболочки;

m^0 — масса единицы поверхности.

Для потенциала давления излучения φ_2 должны быть выполнены граничные условия (15.4) и (15.11). Постановка граничных условий для функций u и v и вытекает из характера закрепления краев оболочки на опорах.

Следует отметить, что если материал оболочки идеально упругий, а перемещения и деформации малы, то операторы L_1 являются линейными.

Такая постановка задачи обычно используется при изучении напряженного состояния оболочки. Если же необходимо исследовать процесс потери устойчивости или учесть нелинейные и разрывные пластические деформации, то операторы L_1 станут нелинейными.

Даже в линейном случае решение системы (15.13) для оболочки произвольной формы весьма затруднительно. Пока удалось получить достаточно строгие результаты только для замкнутой сферической оболочки и бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки. При этом оказался эффективным метод Фурье, когда решение ищется в виде бесконечных рядов¹

$$\begin{aligned} w(\theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) f_n(\theta); \\ \varphi_n(r, \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{nn}(r, t) f_n(\theta). \end{aligned} \quad (15.14)$$

Здесь $f_n(\theta)$ — заданные функции координаты θ , определяющей положение точки на поверхности оболочки (в общем случае таких координат две), удовлетворяющие либо граничным условиям, либо условиям периодичности;

$w_n(t)$ — искомые функции времени;

$\varphi_{nn}(r, t)$ — искомые функции времени и координаты r , определяющей положение точки в пространстве, заданном жидкостью.

Дифракционное давление также представляется в виде ряда

$$p^0(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^0(t) f_n(\theta). \quad (15.15)$$

Для указанных выше частных случаев формы оболочки система (15.13) разделяется на бесконечное число систем уравнений относительно неизвестных w_n и φ_{nn} .

Такие системы решаются существенно проще исходной системы уравнений.

После того как функции w_n , φ_{nn} найдены, общее решение находится простым суммированием.

¹ Здесь описана форма решения только для функции w . В аналогичной форме представляется и функция v .

Естественно, что использование бесконечных рядов не является единственным методом решения задачи.

Так, например, Пейтон [99] применил при изучении взаимодействия ударной волны с цилиндрической оболочкой интеграл Фурье. Возможны и другие методы исследования, в частности классическое интегрирование системы (15.13). Однако в настоящее время наиболее полные и законченные результаты получены именно методом несаного разделения переменных с применением бесконечных рядов.

В данной главе взаимодействие ударной волны со сферической и цилиндрической оболочками изучается также с помощью рядов. Задача исследуется в линейной постановке. Приведены как точные, так и приближенные решения. Методы получения последних могут быть полезны при рассмотрении ряда других задач.

Изложение материала целесообразно начать со сферической оболочки, для которой решение существенно проще, чем для цилиндра.

§ 16. Взаимодействие ударной волны со сферической оболочкой. Точное решение

Исследования взаимодействия акустической ударной волны со сферой были начаты А. А. Харниченко [74], который изучил дифракцию волны около жесткого неподвижного шара и определил давление, возникающее в среде при деформации поверхности сферы по некоторому заданному закону.

Позднее Мити-Назбер [95] и М. Н. Лефонова рассмотрели взаимодействие плоской ударной волны с тонкостенной сферической оболочкой и нашли точное решение задачи. Более простое, но приближенное решение получил Э. Г. Платонов [50]. Воздействие на оболочку ударной волны со сферическими фронтами изучал О. К. Федоров.

Основные вопросы взаимодействия ударных волн с жесткими шаром изложены в книге Б. В. Замышлева и Ю. С. Яковлева [28]. В настоящем и следующем параграфах рассматриваются переломные процессы, возник-

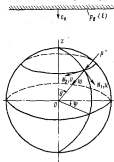


Рис. 38. Сфера сферической оболочки.

находясь в толстой стеной замкнутой упругой изотропной сферической оболочке в случае воздействия на нее плоской ударной волны, распространяющейся в безграничной акустической среде. При этом используются некоторые результаты, полученные упомянутыми выше авторами.

Задачу целесообразно решать в сферических координатах, начало которых поставим в центр оболочки, а ось oz направим перпендикулярно фронту волны (рис. 38). Относительно этой оси задача симметрична, поэтому деформации оболочки от угла φ не зависят. В силу этой же причины будут тождественно равны модулю перемещения оболочки u , направленные по касательной к координатным линиям $\theta = \text{const}$.

Выпишем основные уравнения задачи. С целью упрощения выкладки используем безмоментную теорию оболочки, согласно которой имеем [15]

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (N_1 \sin \theta) - N_2 \operatorname{ctg} \theta = \rho^0 h r_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (16.1)$$

$$N_1 + N_2 = \rho^0 h r_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - r_2 p(\theta, t).$$

Здесь N_1 и N_2 — нормальные усилия, приходящиеся на единицу длины сечения по параллели и меридианам; положительными считаются растягивающие усилия;

h , r_1 — толщина и радиус средней поверхности сферы;

ρ^0 — плотность материала;

u , v — тангенциальное и нормальное перемещение точек срединной поверхности;

$p(\theta, t)$ — внешнее нормальное давление (положительные направления всех величин показаны на рис. 38).

Выразим усилия через перемещения по формулам [15]

$$N_1 = \frac{E h}{(1-\mu^2)} \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + \mu \operatorname{ctg} \theta u - (1+\mu) w \right]; \quad (16.2)$$

$$N_2 = \frac{E h}{(1-\mu^2)} \left[u \operatorname{ctg} \theta + \mu \frac{\partial u}{\partial \theta} - (1+\mu) w \right] \quad (16.3)$$

(E и μ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона).

Подставим эти зависимости в уравнение (16.1) и запишем уравнения движения оболочки в перемещениях. При этом в качестве основных единиц измерения примем радиус оболочки r_1 , плотность жидкости ρ и скорость звука в жидкости c_s . Тогда уравнения движения примут вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} - (\mu + \operatorname{ctg}^2 \theta) u - (1+\mu) w = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (16.4)$$

$$(1+\mu) \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + u \operatorname{ctg} \theta \right) - 2(1+\mu) w = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho c_s^2} p(\theta, t).$$

Здесь перемещения отнесены к радиусу, нагрузка — к величине ρc_s^2 , время — к отношению r_1/c_s ; безразмерные значения скорости звука в материале и массы единицы поверхности равны

$$c_s = \sqrt{\frac{E}{\rho c_s^2 (1-\mu^2)}}, \quad \rho^0 = \frac{\rho^0}{\rho c_s^2}.$$

Внешнее давление на оболочку складывается из дифракционного давления, действующего на неподвижную твердую сферу, и давления излучения, вызванного деформацией и перемещением оболочки в пространстве,

$$p(\theta, t) = p^0(\theta, t) + p^1(\theta, t). \quad (16.5)$$

В свою очередь, дифракционное давление состоит из давления в прямой волне и дополнительного давления, появившегося от наличия в жидкости сферы,

$$p^0(\theta, t) = [p^0]_{r=1} + [p^1]_{r=1}. \quad (16.6)$$

Давление в прямой волне считаем заданным. Дополнительное давление и давление излучения находится по формулам

$$[p^1]_{r=1} = - \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right]_{r=1}, \quad p^1 = - \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right]_{r=1}, \quad (16.7)$$

Потенциал скорости частиц жидкости φ подчиняется волновому уравнению, которое в сферических координатах с учетом осевой симметрии задан имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (16.8)$$

(величина потенциала отнесена к $r_1 c_s$, координата r — к радиусу r_1 , $\rho = 1$).

Граничные условия для потенциалов φ_1 и φ_2 на поверхности оболочки следующие:

$$\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right]_{r=1} = - [v_w]_{r=1}; \quad (16.9)$$

$$\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right]_{r=1} = - \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (16.10)$$

где v_w — радиальная скорость частиц жидкости в прямой ударной волне.

На большом удалении от оболочки все возмущения, вызванные наличием сферы, должны затухать, поэтому при $r \rightarrow \infty$ необходимо, чтобы

$$\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow 0. \quad (16.11)$$

Начальные условия задачи примем нулевыми. Отсчет времени будем проводить с момента соприкосновения ударной волны с оболочкой.

Решение задачи начнем с определения внешних сил. Применяя к волновому уравнению преобразование Лапласа по времени, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial t^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi^L}{\partial t} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi^L}{\partial \theta} \right) - s^2 \varphi^L = 0, \quad (16.12)$$

где

$$\varphi^L(s) = \int_0^\infty \varphi(t) e^{-st} dt. \quad (16.13)$$

Решение уравнения (16.12) будем искать методом Фурье

$$\varphi^L = f_1(\theta) f_2(r, s). \quad (16.14)$$

Подставляя (16.14) в (16.12), приходим к двум уравнениям

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{df_1}{d\theta} \right) + \nu(\nu+1) f_1 = 0; \quad (16.15)$$

$$\frac{d^2 f_2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df_2}{dr} - \left[s^2 + \frac{\nu(\nu+1)}{r^2} \right] f_2 = 0, \quad (16.16)$$

где $\nu = \cos \alpha$.

Обозначив $\cos \theta = x$, приведем (16.15) к виду

$$(1-x^2) \frac{d^2 f_1}{dx^2} - 2x \frac{df_1}{dx} + \nu(\nu+1) f_1 = 0. \quad (16.17)$$

Это есть уравнение Лежандра [23], решением которого являются функции Лежандра с индексом ν . Функции $f_2(r, s)$ должны быть периодической с периодом 2π . Этому условию удовлетворяют функции Лежандра при $\nu = n$. Такие функции называются полиномами Лежандра. Итак, мы получали

$$f_1(\theta) = P_n(x) = P_n(\cos \theta) \quad (16.18)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Уравнение (16.16) при $\nu = n$ имеет следующее решение [23]:

$$f_2(r, s) = C_1 \frac{1}{\sqrt{r}} I_{n+1/2}(r, s) + C_2 \frac{1}{\sqrt{r}} K_{n+1/2}(r, s), \quad (16.19)$$

где $I_{n+1/2}(r, s)$, $K_{n+1/2}(r, s)$ — цилиндрические функции мнимого аргумента с индексом, равным половине нечетного целого числа.

Так как $I_{n+1/2}(r, s) \rightarrow \infty$, то для выполнения условия (16.11) следует положить $C_1 = 0$. Тогда решение уравнения (16.12) можно записать в виде

$$\varphi^L = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{1}{\sqrt{r}} K_{n+1/2}(r, s) P_n(\cos \theta). \quad (16.20)$$

Дальнейшее решение для потенциалов φ_1 и φ_2 удобно проводить раздельно. Начнем с определения потенциала дифракционной волны. Представим радиальную скорость на поверхности сферы, выходящую прямой ударной волной, в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра

$$[v_n]_{r=1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(s) P_n(\cos \theta). \quad (16.21)$$

Коэффициенты этого ряда равны

$$b_n(s) = -\frac{2n+1}{2} \int_0^\pi [v_n]_{r=1} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (16.22)$$

Подставим формулу (16.21) в граничное условие (16.9) и применим к нему преобразование Лапласа. В результате получим

$$\left[\frac{\partial \varphi^L}{\partial r} \right]_{r=1} = - \sum_{n=0}^{\infty} b_n^L(s) P_n(\cos \theta), \quad (16.23)$$

где

$$b_n^L(s) = -\frac{2n+1}{2} \int_0^\pi [v_n]_{r=1} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (16.24)$$

Теперь подставим в соотношение (16.23) зависимость (16.20) и найдем произвольные постоянные C_n . Учитывая далее известное соотношение для цилиндрических функций

$$s K_{n+1/2}(s) + \left(n + \frac{1}{2} \right) K_{n+1/2}(s) = -s K_{n-1/2}(s), \quad (16.25)$$

придем к следующей формуле для изображения потенциала скорости излучения:

$$\varphi_1^L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^L(s) K_{n+1/2}(s) P_n(\cos \theta)}{\sqrt{r} K_{n+1/2}(s) \left[n + 1 + s \frac{K_{n-1/2}(s)}{K_{n+1/2}(s)} \right]}. \quad (16.26)$$

Дополнительное давление на поверхности сферы, записанное в изображениях, будет

$$[p_1]_{r=1} = -\alpha [\varphi_1]_{r=1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha b_n^1(s) P_n(\cos \theta)}{n+1 + s \frac{K_{n+1/2}(s)}{K_{n+3/2}(s)}}. \quad (16.27)$$

Если использовать для цилиндрических функций следующую зависимость [23]:

$$K_{n+1/2}(s) = \left(\frac{\pi}{2s}\right)^{1/2} e^{-s} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k! (n-k)! (2s)^k}, \quad (16.28)$$

то формулу (16.27) можно преобразовать и записать в более удобной форме

$$[p_1]_{r=1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \alpha b_n^1(s) \frac{f_n(s)}{F_n(s)} P_n(\cos \theta), \quad (16.29)$$

где $f_n(s)$ и $F_n(s)$ — полиномы Стокса, первые пять из которых выражаются формулами [74]:

$$\begin{aligned} f_0 &= 1; & F_0 &= s+1; \\ f_1 &= 1 + \frac{1}{s}; & F_1 &= s+2 + \frac{2}{s}; \\ f_2 &= 1 + \frac{3}{s} + \frac{3}{s^2}; & F_2 &= s+4 + \frac{9}{s} + \frac{9}{s^2}; \\ f_3 &= 1 + \frac{6}{s} + \frac{15}{s^2} + \frac{15}{s^3}; & F_3 &= s+7 + \frac{27}{s} + \frac{60}{s^2} + \frac{60}{s^3}; \\ f_4 &= 1 + \frac{10}{s} + \frac{45}{s^2} + \frac{105}{s^3} + \frac{105}{s^4}; & F_4 &= s+11 + \frac{66}{s} + \frac{390}{s^2} + \frac{525}{s^3} + \frac{505}{s^4}. \end{aligned} \quad (16.30)$$

Представим теперь давление на поверхности сферы, вызванное действием прямой ударной волны, в виде ряда

$$[p_s]_{r=1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) P_n(\cos \theta), \quad (16.31)$$

где

$$a_n(t) = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} [p_s]_{r=1} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (16.32)$$

Применив к (16.31) преобразование Лапласа, получим

$$[p_s^1]_{r=1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^1(s) P_n(\cos \theta). \quad (16.33)$$

Здесь

$$a_n^1(s) = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} [p_s^1]_{r=1} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (16.34)$$

Сложив формулы (16.29) и (16.33), будем иметь

$$p^1(\theta, s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^1(s) P_n(\cos \theta), \quad (16.35)$$

где

$$p_n^1(s) = a_n^1(s) - \alpha b_n^1(s) \frac{f_n(s)}{F_n(s)}. \quad (16.36)$$

Переходя к оригиналам, получим следующую формулу для давления на поверхности жесткой и неподвижной сферы:

$$p^0(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^0(t) P_n(\cos \theta). \quad (16.37)$$

Определим величину дифракционного давления при воздействии на сферу плоской единичной волны ступенчатого профиля. В этом случае давление в падающей волне на поверхности сферы равно

$$[p_s]_{r=1} = \sigma(t-1+\cos \theta). \quad (16.38)$$

В плоской волне между давлением и скоростью частиц жидкости в направлении распространения волны существует зависимость $p = \sigma$.

Следовательно, радиальные составляющие скорости частиц в падающей волне на поверхности сферы будут описываться формулой¹

$$[v_{sr}]_{r=1} = -\cos \theta \sigma(t-1+\cos \theta). \quad (16.39)$$

Применив к зависимостям (16.38) и (16.39) преобразование Лапласа, будем иметь

$$[p_s^1]_{r=1} = \frac{1}{s} e^{-s} (1-\cos \theta), \quad [v_{sr}^1]_{r=1} = -\frac{1}{s} \cos \theta e^{-s} (1-\cos \theta). \quad (16.40)$$

В этом случае интегралы

$$a_n^1(s) = \frac{2n+1}{2} \frac{e^{-s}}{s} \int_0^{\pi} e^{s \cos \theta} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta,$$

$$b_n^1(s) = -\frac{2n+1}{2} \frac{e^{-s}}{s} \int_0^{\pi} e^{s \cos \theta} P_n(\cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta$$

¹ Радиальные составляющие скорости частиц жидкости соотносятся с амплитудой нормальной к оболочке.

вычисляются без особого труда при любом n . Подставляя полученные значения функций σ_n^L и δ_n^L в формулу (16.35), приходим к следующей весьма простой форме записи для коэффициентов ряда (16.35):

$$\rho_n^L(t) = \frac{(2n+1)e^{-t}}{\Phi_n(t)}, \quad (16.41)$$

где

$$\Phi_n(t) = z^n F_n(z).$$

Нетрудно убедиться в том, что функция (16.41) является дробно-рациональной, причем ее числитель имеет степень, на единицу меньшую, чем знаменатель, а все корни знаменателя простые.

Оригинал такой функции может быть найден с помощью широко известной формулы [34]

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(z_k)}{B'(z_k)} e^{z_k t}, \quad (16.42)$$

в которой $A(z)$ и $B(z)$ — числитель и знаменатель изображения функции $\Psi(t)$;

z_k — корни знаменателя;

m — число корней.

Применив зависимость (16.42), будем иметь

$$\rho_n^L(t) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(2n+1)z_k^{-1}}{\Phi_n'(z_k)} e^{z_k t}. \quad (16.43)$$

Корни полинома $\Phi_n(z)$ имеют следующие значения:

$$n=0; \quad z_1 = -1;$$

$$n=1; \quad z_{1,2} = -1 \pm i;$$

$$n=2; \quad z_1 = -1,78; \quad z_{2,3} = -1,11 \pm 1,95i;$$

$$n=3; \quad z_{1,2} = -1,20 \pm 2,90i; \quad z_{3,4} = -2,30 \pm 0,89i;$$

$$n=4; \quad z_1 = -3,05; \quad z_{2,3} = -1,28 \pm 3,86i;$$

$$z_{4,5} = -2,70 \pm 1,77i.$$

Вставим формулы для нескольких первых коэффициентов ряда дифракционного давления

$$\rho_0^L(t) = 1 - e^{-t}; \quad (16.44)$$

$$\rho_1^L(t) = 3e^{-t} \sin t; \quad (16.45)$$

$$\rho_2^L(t) = 5 [0,370 \sin 1,95t + 0,418 \cos 1,95t] e^{-1,11t} - 0,418 e^{-1,78t}; \quad (16.46)$$

$$\rho_3^L(t) = 7 [0,376 \cos 2,90t e^{-1,20t} - (0,376 \cos 0,89t - 0,660 \sin 0,89t) e^{-2,30t}]; \quad (16.47)$$

$$\rho_4^L(t) = 9 [0,232 \cos 3,86t - 0,450 \sin 3,86t] e^{-1,28t} + (0,250 \cos 1,77t + 1,92 \sin 1,77t) e^{-2,70t}. \quad (16.48)$$

Характер изменения функций $\rho_n^L(t)$ показан на рис. 39, а. Отметим, что с течением времени нулевая функция $\rho_0^L(t)$, равная среднему давлению на сфере, стремится к единице. Остальные функции $\rho_n^L(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремятся к нулю. Следовательно, в процессе дифракции давление на поверхности сферы должно выравниваться и стать равным давлению в прямой ударной волне. Для получения записи давления в какой-либо точке сферы надо суммировать ряд (16.37). На рис. 39, б приведены графики, характеризующие изменение давления в процессе дифракции в трех точках сферы: $\theta = 0, \pi/2$ и π .

Укажем, что волнообразный характер записи давления является следствием не физики процесса, а лишь недостаточной точности расчета, для которого в ряду (16.37) удерживалось только пять членов. Все же графики позволяют выявить общую картину распределения давления по сфере и установить, что уже к моменту времени $t \approx 3$ дифракционный процесс практически заканчивается. Следует отметить, что определение дифракционного давления путем вычисления коэффициентов $\rho_n^L(t)$ и суммирования ряда (16.37) является сложным и трудоемким делом. Поэтому в следующем параграфе будут получены простые и удобные зависимости, позволяющие приблизительно найти указанное давление без суммирования ряда.

Перейдем далее к определению дополнительного давления, вызванного деформацией и движением оболочки в пространстве. Потенциал давления излучения выражается формулой (16.20), в которой надо найти лишь произвольную постоянную C_0 . Для этого представим нормальный прогиб оболочки в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра

$$w(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) P_n(\cos \theta) \quad (16.49)$$

и вставим это выражение в граничное условие (16.10). Применяя затем к этому условию преобразование Лапласа, получим

$$\left[\frac{\partial w}{\partial r} \right]_{r=0} = - \sum_{n=0}^{\infty} w_n^L(s) P_n(\cos \theta). \quad (16.50)$$

* Расчеты выполнены Э. Г. Пастуховым.

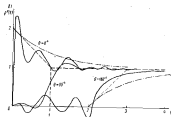
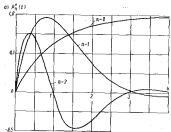


Рис. 28. Дифракционное движение на сфере: а — функции $\rho_n^0(\theta)$; б — линии давления в точках $\theta = 0, 90$ и 180° .

— — — члены ряда (16.51); — — — по формуле (17.13); — — — по формуле (17.16).

Подставляя сюда выражение для потенциала (16.20), найдем произвольную постоянную C_n , после чего тем же путем, что и при определении потенциала дифракционного давления, приддем к следующей формуле:

$$\Psi_n^+ = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\omega_n^2(s) K_{n+1/2}(s) P_n(\cos \theta)}{V s K_{n+1/2}(s) \left[n+1+s \frac{K_{n-1/2}(s)}{K_{n+1/2}(s)} \right]}. \quad (16.51)$$

Дополнительное давление на поверхности оболочки, зависящее от изображений, будет

$$\begin{aligned} p^{+0} &= -s[\Psi_n^+]_{r=R} = - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^2 \omega_n^2(s) P_n(\cos \theta)}{n+1+s \frac{K_{n-1/2}(s)}{K_{n+1/2}(s)}} = \\ &= - \sum_{s=0}^{\infty} s^2 \omega_n^2(s) \frac{J_n(s)}{P_n(s)} P_n(\cos \theta). \end{aligned} \quad (16.52)$$

Обозначим

$$\rho_n^{+L}(s) = s^2 \omega_n^2(s) m_n(s); \quad (16.53)$$

$$m_n(s) = \frac{J_n(s)}{P_n(s)} = \frac{s^2 J_n(s)}{\Phi_n(s)}. \quad (16.54)$$

Так как при нулевых начальных данных для функций $\omega_n(t)$ величина $s^2 \omega_n^2(s)$ есть изображение ускорения движения $\ddot{\omega}_n(t)$, то оригинал выражения (16.53) можно найти с помощью теоремы умножения операционного исчисления (теорема свертывания)

$$\rho_n^{+L}(t) = \int_0^t \ddot{\omega}_n(\tau) \Psi_n(t-\tau) d\tau, \quad (16.55)$$

где

$$\Psi_n(t) \leftrightarrow m_n(s).$$

Дополнительное давление на поверхности оболочки будет описываться следующим рядом:

$$p^+(\theta, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^{+L}(t) P_n(\cos \theta). \quad (16.56)$$

Определение функций $\Psi_n(t)$ не встречает принципиальных трудностей, ибо их изображение есть дробно-рациональная функция, знаменатель только простые полюсы. Поэтому

$$\Psi_n(t) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\Phi_n'(t_k)}{\Phi_n(t_k)} e^{t_k t}. \quad (16.57)$$

Приведем выражения для нескольких первых функций $\psi_n(t)$

$$\psi_0(t) = e^{-t}; \quad (16.58)$$

$$\psi_1(t) = e^{-t} \cos t; \quad (16.59)$$

$$\psi_2(t) = 0,196e^{-1,29t} + (0,805 \cos 1,95t + 0,123 \sin 1,95t) e^{-1,29t}. \quad (16.60)$$

Характер изменения этих функций во времени показан на рис. 40.

Нетрудно показать, что все эти функции начинаются от единицы, в их производная при $t = 0$ равна -1 . Действительно, применив теорему операционного исчисления о предельных значениях функций, будем иметь

$$\lim_{t \rightarrow 0} \psi_n(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \psi_n(s) = 1;$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{\psi}_n(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \psi_n(s) - \psi_n(0)] = -1.$$



Рис. 40. Единичные силы сжатия $\psi_n(t)$ для сфер.

— точное решение; — — — приближения (17.32); - - - — приближения (17.34).

С течением времени все функции стремятся к нулю

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_n(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \psi_n(s) = 0.$$

Выясним, каков физический смысл функции $\psi_n(t)$. Предположим, что оболочка начала внезапно, скачком, двигаться с единичной скоростью по n -й форме ряда (16.49)

$$w(\theta, t) = w_n(t) P_n(\cos \theta); \quad (16.61)$$

$$w_n(0) = 0. \quad (16.62)$$

Тогда $w_n^1 = \frac{1}{s}$. Подставляя это значение в формулу (16.53), будем иметь

$$p_n^{+1}(s) = w_n(s).$$

Следовательно,

$$p_n^+(t) = \psi_n(t).$$

Итак, дополнительное давление при движении оболочки с единичной скоростью будет описываться формулой

$$p^+(\theta, t) = -\psi_n(t) P_n(\cos \theta). \quad (16.63)$$

Таким образом, функция $\psi_n(t)$ есть амплитуда давления, действующего на оболочку при движении ее с единичной скоростью по n -й форме прогиба. Условимся называть данную характеристику единичной функцией сопротивления.

Отметим, что в соответствии с теоремой о предельных значениях функций

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \psi_n(\tau) d\tau = \lim_{s \rightarrow 0} w_n(s) = \frac{1}{s+1}. \quad (16.64)$$

Нетрудно показать, что эта величина равна присоединенной массе при движении оболочки в несжимаемой жидкости. Действительно, переход от сжимаемой к несжимаемой жидкости, движение которой описывается уравнением Лапласа, можно осуществить, положив в формуле (16.64) $s \rightarrow 0$,

$$m_n = \lim_{s \rightarrow 0} w_n(s) = \frac{1}{n+1}.$$

Тогда давление излучения при движении оболочки по закону (16.61) будет

$$p^-(\theta, t) = -\frac{1}{n+1} \dot{w}_n(t) P_n(\cos \theta).$$

Таким образом, сопротивление жидкости в данном случае пропорционально ускорению движения оболочки. Коэффициент пропорциональности и носит название присоединенной массы.

Покажем далее, что через единичные функции сопротивления выражается не только давление излучения, но и дифракционное давление. Воспользуемся при отсложении оригинала выражения (16.36) интегралом Дюамеля [34]. Тогда будем иметь

$$p_n^+(t) = w_n(t) - b_n(t) + \int_0^t b_n(\tau) \dot{\psi}_n(t-\tau) d\tau; \quad (16.65)$$

здесь учтено, что $\psi_n(0) = 1$.

Следовательно, зная единичные функции сопротивления, всегда можно найти как дифракционное давление, так и давление излучения.

Следует указать, что установленные выше свойства функций $f_n(\theta)$ присущи не только сферической оболочке, но и справедливы для оболочек других форм.

Имея все необходимые формулы для внешних сил, перейдем к исследованию деформаций оболочки. Будем искать решение уравнений (16.4) в виде рядов по полиномам Лежандра

$$w(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) P_n(\cos \theta); \quad (16.66)$$

$$u(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) P_n^1(\cos \theta),$$

где

$$P_n^1(\cos \theta) = -\frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}$$

полином Лежандра первого порядка ($P_n(\cos \theta)$ — есть полином нулевого порядка).

Полиномы $P_n(\cos \theta)$ и $P_n^1(\cos \theta)$ являются периодическими функциями с периодом 2π и обеспечивают симметрию (для w) или антисимметрию (для u) деформов относительно диаметральной плоскости, перпендикулярной фронту волны. Отметим также, что полиномы Лежандра являются формами собственных колебаний оболочки как в вакууме, так и в жидкости.

Подставляя выражения (16.66), (16.67) и (16.56) в уравнения (16.4), получим

$$\ddot{w}_n + c_1^2 [n(n+1) - (1-\mu)] w_n - c_2^2 (1+\mu) w_n = 0; \quad n \geq 1; \quad (16.67)$$

$$\ddot{w}_n - c_1^2 (1+\mu) [n(n+1) - 2n_0] w_n = \frac{1}{\rho_0} [\rho_0^2 - \rho_1^2]; \quad n \geq 0.$$

$$(16.68)$$

Применив к (16.67), (16.68) преобразование Лапласа, будем иметь

$$[c_1^2 [n(n+1) - (1-\mu)] + s^2] w_n^L - c_2^2 (1+\mu) w_n^L = 0; \quad (16.69)$$

$$-c_2^2 (1+\mu) [n(n+1) - 2n_0] w_n^L + \left[2c_1^2 (1+\mu) + \right.$$

$$\left. + \left[1 + \frac{1}{\rho_0} \frac{s^2 f_n(s)}{\Phi_n(s)} \right] s^2 \right] w_n^L = \frac{1}{\rho_0} \rho_0^L(s). \quad (16.70)$$

Решение этой системы уравнений приводит к следующему выражению для изображений искомых функций:

$$w_n^L = \frac{1}{s^2} \frac{(2n+1) b_1 s^{n-1}}{(s^2 + b_2) \left[2b_1 a_n + \left(b_2 + \frac{1}{\rho_0} s^2 f_n \right) s^2 \right] - b_1 b_2 a_n}; \quad (16.71)$$

$$w_n^L = \frac{1}{s^2} \frac{(2n+1) (s^2 + b_2) s^{n-1}}{(s^2 + b_2) \left[2b_1 a_n + \left(b_2 + \frac{1}{\rho_0} s^2 f_n \right) s^2 \right] - b_1 b_2 a_n}; \quad (16.72)$$

где

$$b_1 = c_1^2 (1+\mu), \quad b_2 = c_1^2 [n(n+1) - (1-\mu)],$$

$$b_3 = c_1^2 (1+\mu) (n+1) \mu.$$

Функции w_n^L и u_n^L являются дробно-рациональными. Степень их числителя меньше, чем знаменателя, а корни последнего простые (кроме случая $n=1$). Поэтому оригиналы функций могут быть найдены с помощью формулы (16.62).

Следует, однако, отметить, что при больших значениях n вычислительная работа довольно трудоемка, так как степень знаменателя при $n \geq 1$ равна $n+5$. Корни таких полиномов могут отыскиваться только приближенными методами.

Приведем некоторые частные результаты. Для случая $n=0$ будем иметь

$$w_0^L = \frac{1}{s^2 \left[s^2 + \left(1 + \frac{1}{\rho_0} \right) s^2 + 2b_1 s + 2b_1 \right]}. \quad (16.73)$$

Можно показать, что уравнение

$$s^4 + \left(1 + \frac{1}{\rho_0} \right) s^3 + 2b_1 s^2 + 2b_1 = 0 \quad (16.74)$$

имеет один действительный и два комплексных сопряженных корня.

Обозначим их

$$s_1 = -\alpha, \quad s_{2,3} = -\beta \pm i\gamma. \quad (16.75)$$

Отыскание оригинала функции (16.73) не вызывает особых затруднений и приводит к следующей зависимости:

$$w_0(t) = \frac{1}{2\pi c_1^2 (1+\mu)} [1 - Ae^{-\alpha t} + e^{-\beta t} (B \sin \gamma t + C \cos \gamma t)]. \quad (16.76)$$

где

$$A = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha - \beta^2 + \gamma^2}, \quad B = \frac{\alpha(\beta - \alpha)\beta - \gamma^2}{\gamma(\alpha - \beta^2 + \gamma^2)},$$

$$C = \frac{\alpha(2\beta - \alpha)}{\alpha - \beta^2 + \gamma^2}. \quad (16.77)$$

Заметим, что так как величины α и β всегда положительны, то при $t \rightarrow \infty$ пробой оболочки стремится к значению

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi^2 \epsilon_2^2 (1 + \mu)}, \quad (16.78)$$

которое представляет собой величину статического обжатия сферы при действии равномерной нагрузки $p^0 = 1$.

Характер функции $\omega_0(t)$ для погруженной в воду стальной оболочки с относительной толщиной $h/r_0 = 1/100$ и $1/200$ ($\epsilon_2^2 = 12,2$, $\mu^0 = 0,08$ и $0,04$) показан на рис. 41. Как видно из графиков, максимальные динамические прогибы незначительно превышают асимптотическое значение, причем при уменьшении относительной толщины оболочки прогибы увеличиваются.

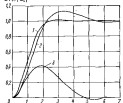


Рис. 41. Зависимость равномерного обжатия сферической оболочки $w(t)$.

$1 - \mu^0 = 0,08$ — единичная статическая нагрузка;
 $2 - \mu^0 = 0,04$ — рекомендованный запас $3 \sim 2$.

Укажем, что величина

$$N_0 = -\pi^2 \epsilon_2^2 (1 + \mu) \omega_0 \quad (16.79)$$

представляет собой среднее усилие в оболочке. Таким образом, определение нулевой гармонической прогиба (равномерного обжатия) имеет существенное значение для оценки напряженного состояния в сфере.

Перейдем к исследованию случая $n = 1$, когда формой нормального прогиба является $\cos \theta$, а тангенциального — $\sin \theta$. В этом случае оболочка движется в пространстве, почти не изменяя сферической формы, во при этом средняя ее поверхность деформируется. При $n \approx 1$

$$f_2 = 1 + \frac{1}{\epsilon}, \quad \Phi_1 = s^2 + 2s + 2, \quad \delta_1 = \delta_2, \quad \delta_2 = 2\delta_1.$$

Тогда формулы (16.71) и (16.72) примут вид

$$\omega_1^L = \frac{3\delta_1}{\pi^2 \epsilon_2^2 \left[s^4 + \left(2 + \frac{1}{\pi^2}\right) s^3 + \left(2 + \frac{1}{\pi^2} + 3\delta_1\right) s^2 + \left(6 + \frac{1}{\pi^2}\right) \delta_1 s + \left(6 + \frac{1}{\pi^2}\right) \delta_1 \right]}; \quad (16.80)$$

$$\omega_1^L = \frac{3(\delta_1 + s^2)}{\pi^2 \epsilon_2^2 \left[s^4 + \left(2 + \frac{1}{\pi^2}\right) s^3 + \left(2 + \frac{1}{\pi^2} + 3\delta_1\right) s^2 + \left(6 + \frac{1}{\pi^2}\right) \delta_1 s + \left(6 + \frac{1}{\pi^2}\right) \delta_1 \right]}. \quad (16.81)$$

Обозначим через α_i ($i = 1, 2, 3, 4$) корни уравнения

$$s^4 + \left(2 + \frac{1}{\pi^2}\right) s^3 + \left(2 + \frac{1}{\pi^2} + 3\delta_1\right) s^2 + \left(6 + \frac{1}{\pi^2}\right) \delta_1 s + \left(6 + \frac{1}{\pi^2}\right) \delta_1 = 0. \quad (16.82)$$

Оригиналы функций (16.80) и (16.81) можно найти, например, разложив их на простейшие дроби. В результате этой операции в перехода к оригиналам получим

$$\omega_1(t) = \frac{3}{\pi^2} \left[\frac{\pi^2}{6\pi^2 + 1} (t - 1) + \sum_{i=1}^4 A_i e^{\alpha_i t} \right]; \quad (16.83)$$

$$\omega_1(t) = \frac{3}{\pi^2} \left[\frac{\pi^2}{6\pi^2 + 1} (t - 1) + \sum_{i=1}^4 B_i e^{\alpha_i t} \right]. \quad (16.84)$$

где

$$A_i = \frac{\delta_1}{\alpha_i^3 \prod_{j=1}^4 (\alpha_i - \alpha_j)}; \quad B_i = \frac{\delta_1 + \alpha_i^2}{\alpha_i^3 \prod_{j=1}^4 (\alpha_i - \alpha_j)} \quad (i \neq j). \quad (16.85)$$

Следует отметить, что величина

$$N_1 = \pi^2 \epsilon_2^2 (1 + \mu) (\alpha_0 - \alpha_1) \quad (16.86)$$

характеризует усилие, возникающее в сфере в точке $\theta = 0$. С учетом формул (16.80) и (16.81) для этой функции находим

$$N_1(t) = -3\epsilon_2^2 (1 + \mu) \sum_{i=1}^4 C_i e^{\alpha_i t}, \quad (16.87)$$

где

$$C_i = \frac{1}{\prod_{j=1}^4 (\alpha_i - \alpha_j)} \quad (i \neq j).$$

В зависимости от величины δ_1 и π^2 уравнение (16.82) может иметь либо два действительных отрицательных корня и пару комплексных сопряженных корней, либо два пары комплексных сопряженных корней. Вещная часть комплексных корней

всегда отрицательная. Поэтому из формулы (16.84) видно, что скорость движения оболочки при $t \rightarrow \infty$ стремится к пределу

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{w}_1(t) = \frac{3}{1 + 6\mu^2}. \quad (16.88)$$

Для оболочки нулевой плавучести $\mu^2 = 1/2$, тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{w}_1(t) = 1,$$

т. е. скорость движения сферы становится равной скорости частиц жидкости и ударной волне (напомним, что для единичной ступенчатой волны $\alpha_0 = 1$). Этот результат справедлив и для тела произвольной формы [28].

Рассмотрим теперь движение оболочки в предположении нерастяжимости ее срединной поверхности. При $\mu = 1$ уравнения (16.67), (16.68) примут вид

$$\ddot{w}_1 + \dot{c}_1^2(1 + \mu)(w_1 - w_2) = 0, \quad (16.89)$$

$$\ddot{w}_2 - 2\dot{c}_2^2(1 + \mu)(w_1 - w_2) = \frac{1}{\rho^2}(\rho_1^2 - \rho_2^2).$$

Умножим первое уравнение на два и сложим со вторым. В результате получим

$$\ddot{w}_1 + 2\dot{w}_1 = \frac{1}{\rho^2}(\rho_1^2 - \rho_2^2). \quad (16.90)$$

Из формулы (16.86) вытекает, что для нерастяжимой оболочки должно соблюдаться условие $w_2 = w_1$. Тогда вместо (16.90) будем иметь¹

$$3\ddot{w}_1 = \frac{1}{\rho^2}(\rho_1^2 - \rho_2^2). \quad (16.91)$$

Применим к (16.91) преобразование Лапласа и учтем, что согласно формулам (16.40) и (16.53)

$$\rho_1^2 = \frac{3}{2^2 + 2t + 2}; \quad \rho_2^2 = \frac{(t+1)^2 + 1}{t^2 + 2t + 2},$$

придем к следующей зависимости:

$$w_1^* = \frac{1}{\alpha^3} \frac{1}{s^2} \left[s^2 + \left(2 + \frac{1}{2\alpha^2} \right) s + 2 + \frac{1}{2\alpha^2} \right]. \quad (16.92)$$

Корни полинома в квадратной скобке равны

$$s_{1,2} = \alpha_{1,2} = - \left(1 + \frac{1}{6\alpha^2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{6\alpha^2} \right)^2 - 1}. \quad (16.93)$$

¹ Напомним, что положив $w_2 = w_1$ в уравнениях (16.89) можно, ибо для нерастяжимой оболочки $c_2 = \infty$, и мы приходим к неопределенности вида $0 \cdot \infty$.

Если $\mu^2 < 1/2$, то корни действительные и оригинал функции удобно записать в виде

$$w_1(t) = \frac{3}{1 + 6\mu^2} [t - 1 + B_1 e^{\alpha_1 t} + B_2 e^{\alpha_2 t}], \quad (16.94)$$

где

$$B_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad B_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)}. \quad (16.95)$$

При $\mu^2 > 1/2$ корни комплексные сопряженные. Обозначим их

$$s_{1,2} = -\beta \pm i\gamma,$$

будем иметь

$$w_1(t) = \frac{3}{1 + 6\mu^2} [t - 1 + e^{-\beta t} (B_3 \sin \gamma t + \cos \gamma t)], \quad (16.96)$$

где

$$B_3 = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\gamma(\beta^2 + \gamma^2)}. \quad (16.97)$$

В частности, движение сферы нулевой плавучести ($\mu^2 = 1/2$) описывается следующими зависимостями:

$$w_1^0(t) = t - 1 + e^{-1.2t} (\cos 0.867t + 0.578 \sin 0.867t); \quad (16.98)$$

$$w_2^0(t) = t - 1 + e^{-1.2t} (\cos 0.867t + 1.73 \sin 0.867t); \quad (16.99)$$

$$\dot{w}_2^0(t) = 3.46 e^{-1.2t} \sin 0.867t \quad (16.100)$$

(знак 0 у функций означает, что рассматривается абсолютно жесткая конструкция нулевой плавучести).

Приведем теперь результаты нескольких числовых примеров. На рис. 42 показаны графики нормального перемещения, скорости и ускорения стальной оболочки с относительной толщиной $h/r_1 = 1/100$ ($\mu^2 = 0.08$; $\dot{c}_2^2 = 12.2$) при движении ее по форме $\mu = 1$. Расчеты выполнены как для упругой, так и для абсолютно жесткой оболочки. Из графиков следует, что растяжимость срединной поверхности существенно влияет только на ускорения оболочки. Скорость движения с учетом и без учета растяжимости срединной поверхности почти одинакова, а перемещения практически совпадают.

На рис. 43 показаны усилии $N_2(t)$ и $N_1(t)$ для оболочки с теми же характеристиками. Графики свидетельствуют о том, что при движении оболочки по форме $\mu = 1$ происходит довольно существенная деформация срединной поверхности. Так, в частности, максимальная величина усилия N_1 составляет около 30% максимальной срединной усилии N_2 .

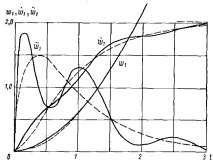


Рис. 42. Параметры движения сферы по формуле $\alpha = 1$ ($\pi^2 = 0,08$; $c_0^2 = 12,2$).
 — ускорен оболочки; --- скорость оболочки.

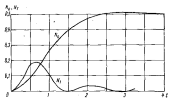


Рис. 43. Ускория $N_0(t)$ и $N_1(t)$ в точке $\theta = 0$ ($\pi^2 = 0,08$; $c_0^2 = 12,2$).

Интересно выяснить, как влияет вес сферы на параметры ее движения. На рис. 44 даны эволюции перемещений, скоростей и ускорений оболочки нулевой пластичности ($\pi^2 = 1/3$) и сравнительно легкой оболочки ($\pi^2 = 0,08$). Нетрудно заметить, что уменьшение веса конструкции примерно в четыре раза привело к удвоению максимальных значений скорости и ускорения. Тяжелая оболочка двигателя, наоборот, медленнее, чем тело нулевой пластичности.

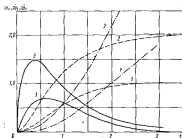


Рис. 44. Параметры движения оболочки жесткой сферы нулевой 1 и сравнительно легкой 2 пластичности.

— ускорения; --- скорости; - - - перемещения.

Во всех предшествующих исследованиях мы предполагали, что на сферу воздействует единичная ступенчатая волна давления. Не представляет особого труда распространить все полученные результаты на другие типы нагрузки. Для этого можно воспользоваться интегралом Дюамеля, одна из форм записи которого имеет следующий вид [74]:

$$F(t) = \rho(t)F_0(t) + \int_0^t F_0(\tau) \cdot \rho(t - \tau) d\tau. \quad (16.104)$$

Здесь $F(t)$ — искомая функция процесса для нагрузки вида $\rho(t)$;

$F_0(t)$ — та же функция при единичной ступенчатой нагрузке (так называемая переходная функция процесса).

Пусть, например, на оболочку действует экспоненциальная волна давления

$$p_0(t) = p_0 e^{-\lambda t}. \quad (16.102)$$

Тогда интеграл Дюамеля примет такую форму:

$$F(\lambda, t) = p_0 F_0(t) - \frac{p_0}{\lambda} e^{-\lambda t} \int_0^t F_0(\tau) e^{\lambda \tau} d\tau. \quad (16.103)$$

Приведем несколько примеров использования этой формулы. Подставляя в нее выражение (16.76), получим зависимость для равномерного сжатия сферы при действии на нее экспоненциальной волны

$$w_0(\lambda, t) = \frac{p_0}{2\pi\lambda^2(1+\mu)} [A_0 e^{-\lambda t} + B_1 e^{-\mu t} + e^{-\lambda t} (C_1 \sin \gamma t + D_1 \cos \gamma t)], \quad (16.104)$$

где

$$A_1 = 1 - \frac{A}{1-\mu\lambda} - \frac{B\lambda\gamma - C(1-\mu\lambda)}{(1-\mu\lambda)^2 + \gamma^2\lambda^2};$$

$$B_1 = \frac{A\lambda\lambda}{1-\mu\lambda}; \quad (16.105)$$

$$C_1 = B - \frac{(1-\mu\lambda)B + C\lambda}{(1-\mu\lambda)^2 + \gamma^2\lambda^2};$$

$$D_1 = C - \frac{(1-\mu\lambda)C - B\lambda}{(1-\mu\lambda)^2 + \gamma^2\lambda^2}.$$

[коэффициенты A, B, C вычисляются по формулам (16.77)].

Характер изменения функции $w_0(\lambda, t)$ для стальной оболочки с относительной толщиной $\Delta r_0 = 1/100$ при $\lambda = 1,0$ показан на рис. 41.

Движение абсолютно жесткой сферы нулевой пластичности при экспоненциальной нагрузке описывается следующими формулами:

$$w_0^0(\lambda, t) = p_0 \lambda - \frac{p_0 \lambda}{1-3\lambda+3\mu} [3\lambda^2 e^{-\lambda t} - e^{-1,5t} \times \\ \times \{3(\lambda-1) \cos 0,867t + 1,73(\lambda-1) \sin 0,867t\}]; \quad (16.106)$$

$$w_0^0(\lambda, t) = \frac{p_0 \lambda}{1-3\lambda+3\mu} [3\lambda^2 e^{-\lambda t} - e^{-1,5t} \times \\ \times \{3\lambda \cos 0,867t + (5,20\lambda - 3,46) \sin 0,867t\}]; \quad (16.107)$$

$$w_0^0(\lambda, t) = \frac{p_0 \lambda}{1-3\lambda+3\mu} [-3e^{-\lambda t} + e^{-1,5t} \times \\ \times \{3 \cos 0,867t + 5,20(\lambda-1) \sin 0,867t\}]. \quad (16.108)$$

Нетрудно видеть, что перемещение сферы с течением времени стремится к некоторому пределу

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w_0^0(\lambda, t) = p_0 \lambda. \quad (16.109)$$

равному выделу давления в ударной волне. Данный результат есть частный случай общей закономерности, справедливой как для

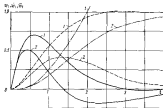


Рис. 45. Параметры движения абсолютно жесткой сферы нулевой пластичности при ступенчатой t и экспоненциальной волнах 2 (обозначены время те же, что и на рис. 44).

абсолютно жестких, так и для упругих тел произвольной формы [47], [165], [281]. Для иллюстрации влияния интенсивности сжатия давления на фронт ударной волны на движение тела на рис. 45 показаны графики перемещения, скорости и ускорения сферы при $\lambda = 1,0$ и $\lambda = \infty$. Отметим, что уменьшение параметра λ сравнительно слабо сказывается на максимальной величине ускорения и значительно сильнее влияет на максимальную скорость движения сферы.

§ 17. Приближенные методы определения гидродинамических сил. Особенности напряженного состояния в сферической оболочке

Для того чтобы с максимальной полнотой изучить поведение оболочки при действии на нее ударной волны, необходимо удерживать в рамках, описывающих решение задачи, довольно много членов. В то же время даже для сферической оболочки точное решение удается довести до сравнительно простых расчетных формул лишь для нескольких первых членов ряда. Для оболочек иной формы точное решение будет еще более сложным и малопригодным для практических целей. Поэтому возникает настоятельная

необходимость в получении простых приближенных решений, в основу которых должна быть положена упрощенная схема оценки гидродинамических сил. Анализ приближенных методов расчета этих сил, оценка их погрешности и выбор наиболее рациональных и удобных для практического использования зависимостей удобнее всего выполнять на примере сферы, так как для нее имеют наиболее простые точные соотношения. В дальнейшем некоторые из приближенных зависимостей будут использованы нами при решении ряда других задач.

В литературе известно довольно много различных упрощенных подходов к оценке гидродинамических сил. По своему характеру они могут быть подразделены на физические и математические. Конечно, такое деление весьма условно, ибо физическая гипотеза всегда может быть облечена в математическую форму, а математическому выражению нередко удается найти физическое обоснование. Однако такая классификация существенно упрощает анализ различных подходов к оценке гидродинамических сил.

Основными физическими гипотезами, применяемыми в процессе определения гидродинамических сил, являются гипотеза плоского отражения, допущение о несжимаемости жидкости и так называемая «поршневая» теория.

Согласно гипотезе плоского отражения любой элемент оболочки генерирует в жидкости плоские волны. Такие волны описываются уравнением вида¹

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi}{\partial t^2}, \quad (17.1)$$

где x — координата в направлении движения волны.

Едиличные функции сопротивления при движении произвольной оболочки по любой форме прогиба тождественно равны единице $\phi_n(t) = 1$, а давление излучения выражается формулой

$$p^*(x, y, t) = -\dot{\phi}(x, y, t), \quad (17.2)$$

где x, y — координаты на поверхности оболочки.

Нетрудно убедиться в том, что дифракционное давление в данном приближении будет

$$p^*(x, y, t) = [p_n]_{t=0} + [v_n]_{t=0}, \quad (17.3)$$

где $[p_n]_{t=0}$ — давление в прямой волне на поверхности оболочки;

$[v_n]_{t=0}$ — нормальная к поверхности оболочки скорость частиц жидкости в прямой волне.

¹ В этом параграфе все зависимости выписываются в безразмерном виде. За отсчетные единицы измерения приняты: скорость звука в жидкости $c_0 = 1$, плотность жидкости $\rho = 1$ и характерный размер оболочки $r_0 = 1$.

В частности, для сферы в случае падения на нее единичной ударной волны получим

$$p^*(\theta, t) = (1 + \cos \theta) \sigma(t_1), \quad (17.4)$$

где

$$t_1 = t - 1 + \cos \theta. \quad (17.5)$$

Легко заметить, что эта формула не описывает процесс постепенного выравнивания давления по поверхности сферы и мало пригодна для практических целей. Таким образом, дифракционные явления с помощью типотезы плоского отражения изучать нельзя.

Математически придем к типотезе плоского отражения, если устремим в формуле (16.54) $s \rightarrow \infty$,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} m_s(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f_s(s)}{F_s(s)} = \frac{1}{3}. \quad (17.6)$$

Положив при любых s

$$m_s(s) = \frac{1}{3}$$

и учитывая, что $m_s(s)$ есть изображение функции $\phi_n(t)$, находим $\phi_n(t) = 1$.

Отсюда нетрудно получить в соотношениях (17.2), (17.3), (17.4). Так как большим значениям s соответствуют малые значения переменной t , то гипотеза плоского отражения справедлива в начальный период взаимодействия ударной волны с оболочкой.

Определение гидродинамических сил по гипотезе плоского отражения весьма сильно упрощает исследование взаимодействия ударных волн с оболочками. В частности, для сферы зависимости (16.71) и (16.72) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0} &= \frac{1}{\omega^2} \frac{b_1(\omega_0^2 + \omega^2)}{(\omega^2 + b_2)\left(\omega^2 + \frac{1}{\omega^2}\omega + 2b_1\right) - b_1b_2}; \\ \frac{1}{\omega_0} &= \frac{1}{\omega^2} \frac{(\omega^2 + b_2)(\omega_0^2 + \omega^2)}{(\omega^2 + b_2)\left(\omega^2 + \frac{1}{\omega^2}\omega + 2b_1\right) - b_1b_2}. \end{aligned} \quad (17.7)$$

Переход к оригиналам не представляет особого труда, ибо для любого ω знаменатель полученных формул имеет степень не выше четвертой. Однако использовать гипотезу плоского отражения следует с большой осторожностью, так как заранее трудно оценить несомненную ее погрешность. Если сравнить точное значение единичных сил сопротивления $\phi_n(t)$ для сферы (см. рис. 40) со значением $\phi_n = 1$, то нетрудно убедиться в том, что гипотеза

ского отражения справедлива тем меньший промежуток времени, чем выше номер гармоники n , причем погрешность не более 10% для $n = 0$ имеет место при $t \leq 0,1$. Каюсь бы, что использованная гипотеза плоского отражения вообще не имеет практического смысла, так как обычно нас интересует поведение оболочки в более поздние моменты времени. Однако это не совсем так. Расчеты показывают, что при определении таких величин, как равномерное обжатие сферы, ускорение и скорость ее перемещения в целом, гипотеза плоского отражения дает погрешность порядка 10%. Это объясняется тем, что гипотеза плоского отражения сильно занижает давление излучения, но занижает величину дифракционного давления. Ошибки взаимно компенсируются и уменьшают погрешность окончательного результата. Таким образом, для грубой оценки указанных величин применение гипотезы плоского отражения всегда допустимо. Однако детальное изучение процесса взаимодействия оболочки с ударной волной на основе этой гипотезы вряд ли целесообразно.

При использовании схемы несжимаемой жидкости ее движение описывается уравнением Лаласа

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (17.5)$$

Давление излучения становится пропорциональным ускорению движения оболочки. Коэффициент пропорциональности имеет название присоединенной массы жидкости. В частности для сферы, как уже показано выше, имеем

$$p_0^+(t) = \frac{1}{\pi + 1} \ddot{w}_0. \quad (17.9)$$

К этому результату мы придём, устремив в формуле (16.54) $s \rightarrow 0$. Следовательно, зависимость (17.9) должна быть справедлива, а противонаправленная гипотеза плоского отражения, при больших значениях времени t .

В несжимаемой жидкости $c_0 = \infty$, поэтому дифракционные процессы выпадают из рассмотрения. Ударная волна мгновенно схватывает оболочку, и давление по ее поверхности будет везде одинаковым (при ступенчатом профиле волны). Конечно, при этом оболочка передевается в пространстве не будет, а ее деформация, в частном случае сферы, станет равномерной. Для того чтобы приблизить картину взаимодействия ударной волны с оболочкой к действительности, иногда поступают так: силы первой категории определяют с учетом сжимаемости жидкости, а силы второй категории учитывают с помощью присоединенных масс. Ниже будет показано, что такой прием иногда дает вполне приемлемые результаты.

Следует указать, что схема несжимаемой жидкости дает хорошие результаты при изучении сравнительно медленных движений

оболочек, в частности процесса потери устойчивости. В начальный момент взаимодействия она может давать заметную погрешность.

Перейдем теперь к рассмотрению «поршневой» теории. Частный случай этой теории — гипотеза цилиндрического отражения была предложена Хейвудом [91]. Затем ее в различных вариантах развивали О. К. Федоров и В. Л. Присенин. В последнее время ряд работ по обоснованию и использованию поршневой теории был выполнен под руководством Э. И. Григориюка [24–26]. Суть этой теории состоит в следующем. Возьмем на оболочке произвольной формы элемент поверхности бесконечно малого размера и выделим в жидкости канал, стенки которого перпендикулярны границам элемента. Будем теперь предполагать, что стенки канала непроницаемы для жидкости. Тогда при движении элемента оболочки или при отражении от него ударных волн жидкость будет двигаться только вдоль оси канала. В этом случае на каждый элемент поверхности оболочки будут действовать такие же гидродинамические силы, как и на поршень, движущийся в канале переменной сеченья. Частными случаями поршневой теории являются гипотезы цилиндрического и сферического отражения. Эти гипотезы предполагают, что каждый элемент оболочки указанной формы тегируется при своем движении волны, подчиняющийся законам распространения цилиндрических или сферических волн.

Рассмотрим более подробно применение поршневой теории к сфере. Согласно допущениям в ее основу допущения движение жидкости в тангенциальном направлении отсутствует, следовательно, в уравнении (16.5) надо положить $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$. Тогда волновое уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (17.10)$$

Применяя преобразование Лаласа, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi^L}{\partial r} = s^2 \varphi^L = 0, \quad (17.11)$$

Решением этого уравнения является следующая функция:

$$\varphi^L = C \frac{e^{-rs}}{rs}. \quad (17.12)$$

Определив произвольную постоянную C из граничного условия (16.9), будем иметь

$$\varphi^L = \frac{r}{rs + 1} \left[\frac{\partial w}{\partial t} \right]_{r=1}. \quad (17.13)$$

Теперь нетрудно найти дифракционное давление. В пространстве изображений можем записать

$$p^0(\theta, z) = [p_n^1]_{n=1} - z [\Phi_1^1]_{n=1} = [p_n^1]_{n=1} - \frac{z}{s+1} [p_n^1]_{n=1}. \quad (17.14)$$

Предположим, что на сферу действует единичная ступенчатая волна. Тогда, принимая во внимание зависимость (16.40), получим

$$p^0(\theta, z) = (1 + e^{-i z} \cos \theta) \sigma(t_1), \quad (17.15)$$

где t_1 находится согласно (17.5).

Эта формула весьма удобна для вычислений, так как в нее не входит ряды. Заметим, что при малых и больших значениях времени она является точной. Действительно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p^0(\theta, z) = 1,$$

что совпадает с точным результатом.

Чтобы доказать справедливость нашего утверждения при малых t , рассмотрим зависимость (16.35). При больших z функции $m_n(z)$ можно представить в следующем виде:

$$m_n(z) = \frac{1}{f_n(z)} = \frac{1}{s+1+O\left(\frac{1}{z}\right)}. \quad (17.16)$$

Подставив это выражение в (16.35) и переходя к оригиналам, получим формулу (17.15), что и доказывает ее точность при $t \rightarrow 0$.

Представляет большой интерес сравнить расчеты по формуле (17.15) с полученной ранее суммой пяти членов точного решения. Соответствующие графики, показанные на рис. 39, б, свидетельствуют об удовлетворительном совпадении результатов. Таким образом, порешенная теория может быть использована при научных дифракционных расчетах.

Следует отметить, что некоторые авторы получили близкие к формуле (17.15) зависимости, исходя из других соображений.

Так, О. К. Федоров применял разложение функции $m_n(z)$ в степенной ряд

$$m_n(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{z} + \dots \quad (17.17)$$

Тогда вместо (17.15) будем иметь

$$p^0(\theta, z) = [1 + (1 - t_1) \cos \theta] \sigma(t_1). \quad (17.18)$$

Естественно, что для соблюдения правильного предельного перехода при $t \rightarrow \infty$ в этой формуле при $t_1 > 1$ надо полагать $p^0(\theta, z) = 1$. Результаты расчета по данной зависимости показаны на рис. 39, б.

В книге Б. В. Замышляева и Ю. С. Яковлева [28] для определения дифракционного давления на телах различной формы предложена следующая зависимость:

$$p^0(\theta, z) = [1 + \psi_2(t_1) \cos \theta] \sigma(t_1), \quad (17.19)$$

где $\psi_2(t)$ — единичная функция сопротивлений при поступательном движении твердого тела.

Напомним, что для сферы

$$\psi_2(t) = e^{-t} \cos t.$$

Не останавливаясь на физическом обосновании формулы (17.19), которое подробно изложено в книге [28], отметим, что она дает несколько более близкие к точному решению результаты, чем порешенная теория.

Перейдем теперь к определению давления излучения. Используя формулу (17.16) так же, как и при исследовании дифракционного давления, приходим к зависимости

$$p^1(\theta, z) = - \int_0^t \ddot{w}(\theta, \eta) e^{-(t-\eta)} d\eta. \quad (17.20)$$

Если для функции $m_n(z)$ использовать выражение (17.17), то можно получить еще более простую формулу

$$p^1(\theta, z) = -\dot{w}(\theta, z) - \ddot{w}(\theta, z). \quad (17.21)$$

Она справедлива при $t \ll 1$.

Удобство формул типа (17.20) и (17.21) заключается в том, что в них не входят ряды. Это позволяет изучать деформации оболочек, применяя такие методы, как метод сеток, метод конечных разностей и др. Однако как сама порешенная теория, так и эти формулы имеют весьма существенные недостатки. Прежде всего отметим, что согласно порешенной теории все единичные функции сопротивлений при движении оболочки по любой форме равны нулевой функции

$$\psi_n(t) = \psi_0(t) = e^{-t}. \quad (17.22)$$

В действительности же, чем выше номер n , тем больше $\psi_n(t)$ отличается от $\psi_0(t)$.

Отсюда следует, что пригодность формул (17.20) и (17.21) будет тем существеннее, чем больше вклад высших членов ряда (16.66) в общую деформацию оболочки. Иными словами, если оболочка деформируется плавно, то порешенная теория не должна приводить к большим ошибкам. Если же на оболочке образуются резкие вмятины, также, как, например, при потере устойчивости, то порешенная теория малоприменима.

Укажем также, что согласно формулам (17.20) и (17.21) давление излучения в любой точке оболочки зависит только от характера движения этой точки. В действительности дело обстоит иначе. Давление определяется не только тем, как движется данная точка, но и формой прогиба оболочки в целом. Покажем это на примере. Пусть сфера деформируется по форме

$$w(\theta, t) = \omega_0(t) P_n(\cos \theta) \quad (17.23)$$

с постоянным ускорением $\ddot{\omega}_0 = a$. Тогда давление излучения в точке $\theta = 0$, согласно точной зависимости (16.55), будет

$$p^*(0, t) = -a \int_0^t \dot{\omega}_0(\tau) d\tau. \quad (17.24)$$

Так как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \dot{\omega}_0(\tau) d\tau = \frac{1}{n+1}, \quad (17.25)$$

то при больших значениях t давление излучения

$$p^*(0, \infty) = -\frac{a}{n+1}. \quad (17.26)$$

В то же время по формуле (17.20) имеем

$$p^*(0, \infty) = -a. \quad (17.27)$$

Следовательно, поршневая теория замещает сопротивление жидкости движению оболочки, причем тем больше, тем выше номер формы движения.

Приведенный пример заставляет относиться к формулам поршневой теории с известной осторожностью. Границу ее применимости по времени заранее установить невозможно, ибо она зависит от характера деформаций оболочки. Поэтому точность основанных на поршневой теории решений будет в большинстве случаев сомнительной.

Таким образом, хотя рассмотренные физические гипотезы и дают возможность получить в некоторых случаях полезные результаты, все же ни одна из них не пригодна для надежного определения гидродинамических сил при любом процессе в произвольный момент времени. Это заставляет нас обратиться к иным методам исследования.

Весьма удобным путем приближенной оценки гидродинамических сил является аппроксимация единичных сил сопротивления $\Phi_n(t)$. Если задать эти силы в виде каких-либо элементарных функций, то дальнейшее определение гидродинамических сил уже не будет представлять особого труда.

Простейший подход к аппроксимации единичных сил сопротивления заключается в том, чтобы подобрать приближенные зависимости исходя из следующих условий:

$$\Phi_n(0) = \Phi_n^*(0);$$

$$\Phi_n(\infty) = \Phi_n^*(\infty);$$

$$\int_0^t \Phi_n(\tau) d\tau = \int_0^t \Phi_n^*(\tau) d\tau \quad (17.28)$$

(звездочкой отмечено приближенное значение функций).

Как было показано выше на примере сферы, начальные значения функций $\Phi_n(t)$ всегда равны единице, а при $t \rightarrow \infty$ они стремятся к нулю. Найдя интеграл

$$\int_0^\infty \Phi_n(t) dt = m_n, \quad (17.29)$$

равный присоединенной массе жидкости при движении оболочки по соответствующей форме прогиба в несжимаемой среде, сравнительно просто. В предыдущем параграфе было показано, что для этого можно воспользоваться предельными теоремами операционного исчисления. Условиям (17.28) удовлетворяют, в частности, следующие простейшие функции:

$$\Phi_n^*(t) = \left(1 - \frac{t}{\frac{m_n}{\sigma_0}}\right) [1 - \sigma(t - 2m_n)], \quad (17.30)$$

$$\Phi_n^*(t) = e^{-\frac{t}{\frac{m_n}{\sigma_0}}}. \quad (17.31)$$

где m_n — присоединенная масса жидкости при движении оболочки по n -й форме.

Напомним, что для сферической оболочки

$$m_n = \frac{1}{n+1}.$$

следовательно для случая $n = 0$ формула (17.31) является точной.

Качество аппроксимации формулами (17.30) и (17.31) точных зависимостей для функций $\Phi_n(t)$ видно из графиков рис. 40. Отмечая удовлетворительное в целом соответствие, укажем, что ошибка в величине гидродинамических сил $\rho_0^2(t)$ и $\rho_0^2(t)$ будет, как правило, меньше, ибо функции $\Phi_n(t)$ входят в формулы для указанных сил под знаком интеграла.

Формулы (17.30) и (17.31) позволяют получить достаточно простое выражение для дифференциального давления и для давления излучения. Покажем это на примере сферической оболочки.

Подставляя (17.30) в формулы (16.65) и (16.55), будем иметь

$$p_a^0(t) = a_a(t) - b_a(t) + \frac{\pi+1}{2} \left[\int_0^t b_a(\tau) d\tau - \sigma \left(t - \frac{2}{\pi+1} \right) \times \right. \\ \left. \times \int_0^{t-\frac{2}{\pi+1}} b_a(\tau) d\tau \right]; \quad (17.32)$$

$$p_a^1(t) = a_a \omega_a + \beta_a \dot{\omega}_a + \gamma_a \ddot{\omega}_a \quad (17.33)$$

где

$$a_a = -\frac{\pi+1}{2} \left[1 - \sigma \left(t - \frac{2}{\pi+1} \right) \right]; \quad \beta_a = 1 - \sigma \left(t - \frac{2}{\pi+1} \right); \\ \gamma_a = \frac{1}{\pi+1} \sigma \left(t - \frac{2}{\pi+1} \right).$$

Расчет гидродинамических сил по этим соотношениям не представляет большого труда. Следует особо отметить простоту и ясность физического смысла формулы (17.33). Согласно этой зависимости давление оболочки по любой форме профиля как бы разбивается на два периода. Первый из них длится от начала процесса до момента времени

$$t_a = \frac{2}{\pi+1}, \quad (17.34)$$

второй — от t_a до ∞ . В первый период сопротивление жидкости пропорционально перемещению оболочки и скорости ее движения. Сопротивление жидкости играет здесь существенную роль. Во втором периоде движения сопротивление жидкости, который идет себя, как несжимаемая среда, пропорционально ускорению оболочки. Таким образом, с помощью формулы (17.30) как бы перебрасывается мостик между физическими гипотезами плоского отражения и несжимаемости жидкости. Необходимо отметить, что впервые формула типа (17.33) была предложена Ю. С. Яковлевым [81] для оценки давления, возникающего в жидкости при движении поршня в абсолютно жидкой среде. Аналогичные соотношения широко использовались также при изучении деформаций пластин, соприкасающихся с акустической средой [28].

Если теперь подставим в формулы (16.65) и (16.55) выражение (17.31), то получим

$$p_a^0(t) = a_a(t) - b_a(t) + (\pi+1) e^{-\pi+1+t} \int_0^t b_a(\tau) e^{(\pi+1)\tau} d\tau; \quad (17.35)$$

$$p_a^1(t) = e^{-\pi+1+t} \int_0^t \omega_a(\tau) e^{(\pi+1)\tau} d\tau. \quad (17.36)$$

Эти зависимости также достаточно просты и удобны для вычислений.

Необходимо отметить, что для сферы точные зависимости для дробных сил $p_a^0(t)$ при малых π проще и удобнее приближенных формул (17.32) и (17.35). При увеличении π преимущество переходит к приближенным зависимостям. Для оболочки иной формы приближенные соотношения будут всегда существенно проще точных. Следует, однако, подчеркнуть, что наибольшее упрощения в задаче вносит использование зависимости (17.33) или (17.36) для движения излучения. С помощью указанных формул уравнения движения оболочки переходят из интегро-дифференциальных в дифференциальные, что существенно облегчает получение решения.

Для иллюстрации погрешности приближенных зависимостей (17.32) и (17.35) рассчитаем значения силы $p_a^0(t)$ в случае действия на сферу единичной ступенчатой волны. Используя формулы (16.22) и (16.32), получим:

при $0 \leq t \leq 2$

$$a_1(t) = \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{2} t^2 \right);$$

$$b_1(t) = -\frac{1}{2} (3t - 3t^2 + t^3); \quad (17.37)$$

при $t > 2$

$$a_1 = 0, \quad b_1 = -1.$$

Применя зависимость (17.32), будем иметь

$$p_1^0(t) = \begin{cases} 3t - 3t^2 + t^3 - \frac{1}{8} t^4 & \text{при } 0 \leq t \leq 1; \\ \frac{11}{8} - \frac{t}{2} & \text{при } 1 < t \leq 2; \\ \frac{27}{8} - \frac{9}{2} t + 3t^2 + \frac{1}{8} t^4 & \text{при } 2 < t \leq 3; \\ 0 & \text{при } t > 3 \end{cases} \quad (17.38)$$

По формуле (17.35) находим

$$p_1^0(t) = \begin{cases} \frac{15}{8} (1 - e^{-\pi}) - \frac{3}{4} t & \text{при } 0 \leq t \leq 2; \\ \frac{3}{8} e^{-\pi+1+t} - \frac{15}{8} e^{-\pi} & \text{при } t > 2. \end{cases} \quad (17.39)$$

Результаты расчета по формулам (17.38) и (17.39), а также точное значение функции $p_a^0(t)$ показаны на рис. 46. Отметим, что погрешность приближенных формул составляет около 5%, что вполне достаточно для технических расчетов. Примерно такая же погрешность имеет место и для других сил $p_a^0(t)$. Ошибка в оценке

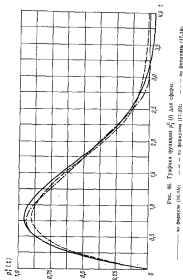


Рис. 46. Графики функций $\rho_1^2(t)$ для сферы.
 — по формуле (17.41); — — — по формуле (17.42); — · — по формуле (17.43).

параметров движения оболочки и в характеристиках ее напряженного состояния будет еще меньше, ибо напряженность сил первой и второй категорий имеет разный знак и частично взаимно компенсируется. Таким образом, зависимости типа (17.30) или (17.34) я основанные на них формулы для гидродинамических сил первой и второй категорий можно с успехом использовать для решения широкого круга инженерных задач. Однако в отдельных случаях может потребоваться более высокая точность результатов. Поэтому рассмотрим некоторые математические методы, позволяющие найти гидродинамические силы с более высокой степенью точности.

Один из таких методов заключается в разложении единичных сил сопротивления в степенные ряды. Суть данного приема, который предложил Е. Я. Вороненков [21], заключается в следующем. Представим единичную функцию сопротивления в виде ряда Тейлора¹

$$\psi_n(t) = \psi_n(0) + \psi_n'(0) \frac{t}{1!} + \psi_n''(0) \frac{t^2}{2!} + \dots \quad (17.40)$$

Для определения производных воспользуемся теоремами о дифференцировании оригинала и о предельных его значениях [34]. Тогда получим

$$\psi_n^{(k)}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{k+1} \left[\psi_n^*(s) - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\psi_n^{(m)}(0)}{s^{m+1}} \right]. \quad (17.41)$$

Эту формулу можно использовать как рекуррентную и с ее помощью найти значение любой производной $\psi_n^{(k)}(0)$. При этом предоставляется возможность применять асимптотические зависимости для функций $\psi_n^*(s)$ при больших s , что в некоторых случаях существенно упрощает вычисления.

Для примера определим с помощью разложения в степенной ряд единичную функцию сопротивления при поступательном движении абсолютно жесткой сферы. Напомним, что для этого случая

$$\psi_1^*(s) = \pi_1(s) = \frac{s+1}{s^3+2s+2}.$$

Используя формулы (17.40) и (17.41), получим²

$$\psi_1(t) = 1 - t + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{6} + \dots \quad (17.42)$$

Графики этой функции с учетом двух, трех и четырех членов показаны на рис. 47. Отметим, что в последнем случае удалось достигнуть хорошего совпадения с точным решением вплоть до

¹ Предполагается, что функция $\psi_n(t)$ дифференцируема k раз при $t \rightarrow +0$.

² Производная $\psi_1'(0) = 0$, потому квадратный член в (17.42) отсутствует.

$\Gamma = 0,8$, что достаточно, например, для определения максимальных ускорений сферы.

Рассмотренный пример показывает, что данный прием полезен и удобен в том случае, когда нас интересуют какие-либо кратковременные процессы. Если же требуется изучать длительные процессы, то разложение функции сопротивления в степенной ряд вряд ли будет полезно, так как для получения необходимой точности в формуле (17.40) потребуется удерживать слишком много членов. Поэтому для приближенной оценки гидродинамических

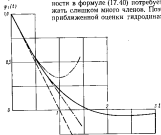


Рис. 47. Аппроксимация функции $\psi(\xi)$ для сферы степенными рядами.

— точная зависимость; — для члена ряда; — три члена ряда; — четыре члена ряда.

сил целесообразнее использовать метод аппроксимации исходных функций асимптотически эквивалентными зависимостями, предложенный и обоснованный Ю. С. Яковлевым и В. Л. Лобозовым. Согласно этому методу аппроксимируется не сама функция $\psi_n(\xi)$, как это мы делали выше, а ее изображение $\psi_n^*(s) = M_n(s)$. Приближенная зависимость $M_n(s)$ выбирается так, чтобы выполнялись следующие условия:¹

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{M_n^*(s)}{M_n(s)} = 1; \quad (17.43)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{M_n^*(s)}{M_n(s)} = 1. \quad (17.44)$$

Иными словами, аппроксимация должна быть асимптотически эквивалентна точной зависимости как при $s \rightarrow 0$, так и при $s \rightarrow \infty$. В функцию $M_n^*(s)$ надо внести свободные параметры, с помощью которых можно добиться наилучшего совпадения функций $M_n^*(s)$ и $M_n(s)$ во всем интервале изменения аргумента. Аппроксимация производится при действительных значениях параметра $s = x$.

Если на вещественной оси удалось достигнуть хорошего соответствия аппроксимируемой и аппроксимирующей функций, то на основании принципа аналитического продолжения можно утверждать, что совпадение будет иметь место во всей правой полуплоскости $\text{Re } s \geq \sigma$, а том числе и на контуре интегрирования интеграла Меллина. Следовательно, при переходе к оригиналам мы должны получить функцию, близкую к точному решению. Конечно, аппроксимацию следует выбирать так, чтобы вычисление оригинала не вызвало особых затруднений.

Используем данный прием при определении единичных сил сопротивления сферы. Напомним, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} M_n(s) = \frac{1}{n+1}, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} M_n(s) = \frac{1}{2}. \quad (17.45)$$

Выберем аппроксимирующую функцию в виде²

$$M_n^*(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + as + (b+1)^2}}. \quad (17.46)$$

Нетрудно видеть, что зависимость (17.46) удовлетворяет условиям (17.43) и (17.44). Для случая $n = 0$ при $a = 2$ выражение (17.46) переходит в точное решение

$$M_0(s) = \frac{1}{s+1}.$$

При $n \geq 1$ удается получить погрешность аппроксимации при любом n не более 3%, если положить $a = 1,5$ (рис. 48). Оригинал функции (17.46) находится по таблицам³

$$\psi_n^* = e^{-\sqrt{a} \xi} J_n(\xi \sqrt{a+1}) / \sqrt{a+1}. \quad (17.47)$$

Сравнение приближенных и точных зависимостей для единичных функций сопротивления при $n = 1, 2$ (рис. 49) свидетельствует о том, что хотя погрешность в оригиналах и несколько возросла, все же путем аппроксимации изображения удается весьма просто получить вполне приемлемые результаты. Особо отметим, что формула (17.47) пригодна при любых значениях n , а то время как точное решение получить тем сложнее, тем выше номер n .

¹ Идея такой аппроксимации принадлежит Ю. А. Федоровичу, примененную ее для построения функции $\psi_n(\xi)$ для цилиндра [32].

² См., например, В. А. Данилкин, А. П. Прудников, Сравнение со спектральным методом, М., изд-во «Высшая школа», 1965.

³ Предполагается, что при $\text{Re } s \geq \sigma$ функция $M_n^*(s)$ аналитическая и однозначная.

Продолжим теперь начатое в § 16 исследование напряженного состояния, возникающего в сферической оболочке от воздействия ударной волны. При этом будем использовать для гидродинами-

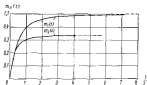


Рис. 48. Асимптотическая функция $m_n(t)$ при $n = 1$.
— — — асимптотика; — — — числительное значение функции при $n = 1$.

ческих сил приближенные зависимости (17.35) и (17.36)¹. Подставляя формулу (17.36) в уравнения (16.67) и (16.68), будем иметь

$$\ddot{u}_n + c_0^2 [n(n+1) - (1-\mu)] u_n - c_0^2 (1+\mu) u_n = 0, \quad n \geq 1; \quad (17.48)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_0 &= c_0^2 (1+\mu) [n(n+1) u_n - 2u_0] + \\ &+ \frac{1}{\pi^2} e^{-(n+1)t} \int_0^t \ddot{u}_n(\tau) e^{(n+1)\tau} d\tau = \frac{1}{\pi^2} \rho_n^0(t), \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (17.49)$$

Продифференцируем уравнение (17.49) по времени и сложим с исходным уравнением, умноженным на $(n+1)$. В результате получим

$$\begin{aligned} \ddot{u}_n + d_1 \dot{u}_n + d_2 \ddot{u}_{n-1} + d_3 \dot{u}_{n-1} - d_4 \dot{u}_n - d_5 u_n = \\ = \frac{1}{\pi^2} [\rho_n^0(t) + (n+1) \rho_n^0(t)], \end{aligned} \quad (17.50)$$

где

$$d_1 = n+1 + \frac{1}{\pi^2 c_0^2}; \quad d_2 = 2c_0^2(1+\mu),$$

$$d_3 = 2c_0^2(1+\mu)(1+n); \quad d_4 = c_0^2(1+\mu)(1+n)\pi,$$

$$d_5 = c_0^2(1+\mu) \cdot (n+1)^2 \pi. \quad (17.51)$$

¹ Правильное число разностей принадлежит Э. Г. Плэтскому [30], все расчеты выполнены А. Я. Рукляйной.

Получение аналитического решения системы уравнений (17.48), (17.50) не встречает принципиальных трудностей. Однако расчетные формулы оказываются довольно громоздкими. Значительно проще решать данные уравнения численно с помощью ЭВМ. Приведем некоторые результаты таких расчетов.

Все расчеты вначале выполнялись для ступенчатой ударной волны. Составляющие дифракционного давления $\rho_n^0(t)$ вычислялись по формуле (17.35). Входящие в эту зависимость функции



Рис. 49. Точные и приближенные графики функций $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ для сферы.

— — — точные значения; - - - приближенные значения.

$\alpha_n(t)$ и $\beta_n(t)$ выражаются формулами (16.22) и (16.32) и в случае единичной ступенчатой волны будут равны:
при $0 \leq t \leq 2$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} t;$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{2} \left(t - \frac{t^2}{2} \right);$$

$$\alpha_2 = \frac{5}{2} \left(t - \frac{3}{2} t^2 + \frac{t^3}{2} \right);$$

$$\alpha_3 = \frac{7}{2} \left(t - 3t^2 + \frac{5}{2} t^3 - \frac{5}{8} t^4 \right);$$

$$\alpha_4 = \frac{9}{2} \left(t - 5t^2 + \frac{15}{2} t^3 - \frac{35}{8} t^4 + \frac{7}{6} t^5 \right); \quad (17.52)$$

$$\begin{aligned}
 b_0 &= -\frac{1}{2} \left(t - \frac{t^2}{2} \right); \\
 b_1 &= -\frac{3}{2} \left(t - t^2 + \frac{t^3}{2} \right); \\
 b_2 &= -\frac{5}{2} \left(t - 2t + \frac{3}{2} t^2 - \frac{3}{8} t^3 \right); \\
 b_3 &= -\frac{7}{2} \left(t - \frac{7}{2} t^2 + \frac{9}{2} t^3 - \frac{5}{2} t^4 + \frac{1}{2} t^5 \right); \\
 b_4 &= -\frac{9}{2} \left(t - \frac{11}{2} t^2 + \frac{65}{6} t^3 - 10 t^4 + \frac{35}{3} t^5 - \frac{35}{48} t^6 \right), \quad (17.53)
 \end{aligned}$$

при $t > 2$

$$a_n = 1; \quad a_n = 0 \quad (n \geq 1); \quad b_1 = -1, \quad b_n = 0 \quad (n \neq 1).$$

В процессе решения в ряде точек на поверхности оболочки вычислялись следующие функции:

$$w(\theta, t) = \sum_{n=0}^N w_n(t) P_n(\cos \theta); \quad (17.54)$$

$$\begin{aligned}
 N_1(\theta, t) &= \pi^2 c_0^2 \sum_{n=0}^N \{ [n(n+1)a_n - (1-\mu)w_n] P_n(\cos \theta) + \\
 &+ (1-\mu) \operatorname{ctg} \theta \cdot a_n \cdot P_n^1(\cos \theta) \}; \quad (17.55)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_2(\theta, t) &= \pi^2 c_0^2 \sum_{n=0}^N \{ [\mu n(n+1)a_n - (1-\mu)w_n] \times \\
 &\times P_n(\cos \theta) - (1-\mu) \operatorname{ctg} \theta a_n P_n^1(\cos \theta) \}. \quad (17.56)
 \end{aligned}$$

В рядах удерживались пять членов ($N = 4$).¹ Полученные данные распространялись с помощью интеграла Дюамеля в форме (16.103) на ударную волну экспоненциального вида с единичной амплитудой

$$p_0 = e^{-\epsilon t/\lambda}. \quad (17.57)$$

Для расчетного примера была выбрана стальная оболочка с относительной толщиной $h/r_1 = 1/100$ ($\mu = 0,0515$, $c_0^2 = 12,2$). Обратимся к анализу характера деформаций и напряжений в сферической оболочке. На рис. 50 показаны эпюры нормального прогиба $w(\theta)$ и усилий $N_1(\theta)$, $N_2(\theta)$ в диаметральной плоскости, перпендикулярной фронту волны, в моменты времени $t = 0,5$;

¹ Вопрос о необходимом числе членов в рядах в работе [50] не исследовался, поэтому приведенные выше данные следует рассматривать скорее как качественные, чем количественные.

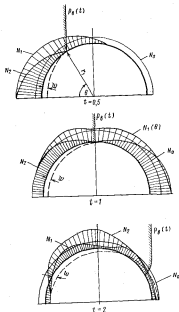


Рис. 50. Эпюры усилий и прогиба в процессе нагружения оболочки.

1,0; 2,0, при нагрузке, соответствующей постоянной экспоненциального затухания $\lambda = 20$. Из графиков видно, что в начале процесса нормальный прогиб появляется на оболочке за фронтом ударной волны. В более поздние моменты времени ясно видно смещение оболочки в целом в направлении движения ударной волны. Волны напряжений, распространяющиеся со скоростью $c_2 > c_1$, быстро обгоняют фронт нагрузки и к моменту $t = 1$ охватывают

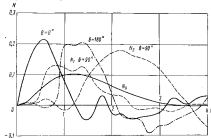


Рис. 50. Графики усилий в оболочке при $\lambda = 0,333$ (при $\theta = 0$ и $180^\circ N_2 = N_1$).

всю оболочку. В дальнейшем напряженное состояние имеет сложный колебательный характер, причем усилия N_2 и N_1 могут быть и растягивающими.

На рис. 51 и 52 показаны эпюры усилий $N_2(t)$ и $N_1(t)$ в точках $\theta = 0, 90$ и 180° в случае быстро и медленно изменяющейся нагрузки ($\lambda = 0,333$ и $\lambda = 20$). Там же нанесена эпюра среднего усилия $N_{ср}$, соответствующего равномерному обжатю сферы,

$$N_{ср} = -\pi^2 c_2^2 (1 + \mu) \omega_0$$

Из графиков ясно видно, как волны напряжений постоянно распространяются по срединной поверхности сферы². При быстро уменьшающейся нагрузке ($\lambda = 0,333$) наибольшие усилия возникают в точке $\theta = 0$. При медленно изменяющейся нагрузке ($\lambda = 20$) максимальным становится усилие N_2 в точке $\theta = 90^\circ$, причем возникает оно в сравнительно поздние моменты времени

² Наибольшие усилия в начале процесса в точках $\theta = 90$ и 180° есть следствие неопределенности расчета.

($t \approx 3$). Необходимо особо отметить, что при любой нагрузке усилия во всех точках оболочки весьма сильно отличаются от среднего усилия $N_{ср}$. Поэтому оценка напряженного состояния сферы лишь по величине среднего усилия может привести к существенным ошибкам.

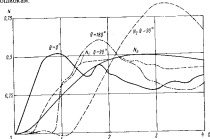


Рис. 52. Графики усилий в оболочке при $\lambda = 20$.

§ 10. Постановка и точное решение задачи о взаимодействии ударной волны с бесконечно длинной цилиндрической оболочкой

Переходные процессы, возникающие в бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочке при воздействии на нее плоской ударной волны с фронтом, параллельным образующей цилиндра, рассматривались в большом числе работ. По-видимому, первым попытка решить данную задачу Каррьер [85]; однако, насколько можно судить по ссылкам на работу [85] (в СССР ее нет), он получил лишь формальное решение в виде интегралов на комплексной плоскости. Мандлин и Блейх [87], а позднее Барон [7] использовали при определении гидродинамических сил гипотезу плоского отражения и нашли простые решения, в принципе справедливые только для начального периода взаимодействия. В дальнейшем Хейвуд [91], а затем Э. И. Григорьев и Л. В. Присекин [24] предложили применить для оценки гидродинамических сил гипотезу цилиндрических волн. Основные на этой гипотезе решения применяются в несколько большем интервале времени, чем решения Мандлина, Блейха и Барона. Все же и гипотеза цилиндрических

волна не может правильно описать весь процесс взаимодействия ударной волны с оболочкой, ибо она, как и теория плоского отражения, не учитывает возможности протекания жидкости в тангенциальном направлении.

Точное решение рассматриваемой задачи в виде интегралов Меллина получил В. В. Новикова. Совместно с группой сотрудников им были получены и некоторые численные результаты для нулевой и первой форм движения оболочки. Однако для практического использования точное решение оказалось слишком сложным. Существенного упрощения задачи путем разделения гидродинамических сил на две категории и наделения ряда аппроксимаций удалось добиться Ю. В. Горюнову, Н. Л. Миронову и Ю. И. Кадашевичу [22], а также Д. А. Александрину и М. Н. Лефеновой. Отметим, что напряженное состояние цилиндрической оболочки исследовалось приближенными методами в работах Э. Г. Платонова [50], А. К. Первня, В. А. Родосского [59]. Параметры движения цилиндра как твердого тела изучал Ю. А. Федорович [72].

Оригинальный подход к задаче предложен Пейтон [99]. В отличие от остальных авторов, он искал решение не в виде рядов, а в форме интеграла Фурье. Однако довести решение до удобных расчетных формул Пейтону удалось лишь для малых значений времени.

Следует указать, что закономерности взаимодействия ударной волны с абсолютно твердым цилиндром рассмотрены в монографии Б. В. Замчалова и Ю. С. Яковлева [28]. В данной книге основное внимание уделяется изучению процесса деформации упругой оболочки. В настоящем параграфе приведем точное решение задачи, представленное в форме интегралов на комплексной плоскости. Так как эти интегралы весьма сложны для вычислений, то в следующем параграфе изложим приближенные пути решения и рассмотрим результаты расчетных примеров. При этом использованы некоторые результаты упомянутых выше авторов.

Будем решать задачу в цилиндрической системе координат, ось которой совпадает с осью оболочки. Так как параметры ударной волны вдоль образующей цилиндра постоянны, то задача становится плоской и все функции, описывающие движение оболочки и жидкости, будут зависеть только от угловой координаты θ , радиальной координаты r и времени t . Выпишем уравнения движения оболочки и жидкости. Воспользуемся технической теорией тонких оболочек, для плоского случая деформации будем иметь [115]

$$\frac{1}{r_1} \frac{\partial N}{\partial \theta} = \rho^0 h \frac{\partial v}{\partial t};$$

$$\frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r_1} N = \rho^0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p(\theta, t). \quad (18.1)$$

Здесь h, r_1 — толщина и радиус срединной поверхности оболочки;

N — поперечное усилие, отнесенное к единице длины сечения;

M — поперечный изгибающий момент;

v, w — тангенциальное и нормальное перемещения точек срединной поверхности оболочки;

ρ^0 — плотность материала;

$p(\theta, t)$ — внешняя нагрузка.

Положительные направления всех величин показаны на рис. 53. Усилие и момент выражаются через перемещения по следующим формулам:

$$N = \frac{Eh}{(1-\nu^2)r_1} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right); \quad (18.2)$$

$$M = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)r_1^2} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right), \quad (18.3)$$

где E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Так как в дальнейшем нас будут интересовать прежде всего усиление N и нормальный прогиб w , то исключим из системы уравнений (18.1) момент M и перемещение v . Для этого проинтегрируем первое уравнение этой системы по углу θ и выразим производную $\frac{\partial v}{\partial \theta}$ с помощью зависимости (18.2) через N и w .

Вытягивая затем из полученного уравнения второе уравнение системы (18.1) и исключив момент с помощью формулы (18.3), приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + c_0^2 \left(N - \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} \right) - \rho^0 h c_0^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = -c_0^2 p(\theta, t); \quad (18.4)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_0^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{\rho^0 h} N = \frac{1}{\rho^0 h} p(\theta, t).$$

Уравнения (18.4) записаны в безразмерном виде, причём поперечному за основную единицу измерения приняты радиус оболочки r_1 , плотность жидкости ρ и скорость звука в жидкости c_0 . Таким образом, перемещение отнесено к радиусу, нагрузка —

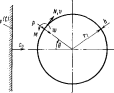


Рис. 53. Силы цилиндрической оболочки.

к произведению ρa^2 , условие — к величине ρr_0^2 , время измеряется в единицах $\frac{1}{c_0}$, коэффициенты имеют следующие значения:

$$\rho^0 = \frac{\rho^* h}{r^2}, \quad c_0^2 = \frac{E}{(1-\nu^2) \rho^0 c_0^2}, \quad h_0^* = \frac{a^2}{12 r_0^2}. \quad (18.5)$$

Нагрузка на оболочку состоит из дифракционного давления, возникающего при взаимодействии ударной волны на жесткий неподвижный цилиндр, и давления излучения, вызванного деформацией и движением оболочки,

$$p(\theta, t) = p^0(\theta, t) + p^*(\theta, t). \quad (18.6)$$

Дифракционное и излучаемое давления находятся по формулам

$$p^0(\theta, t) = [p_0]_{n=1} - \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right]_{n=1}, \quad (18.7)$$

$$p^*(\theta, t) = - \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right]_{n=1}, \quad (18.8)$$

где p_0 — давление в прямой ударной волне.

Потенциал скорости частиц жидкости описывается волновым уравнением, которое в цилиндрических координатах при плоском движении имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (18.9)$$

(потенциал φ отнесен к величине $r_0 c_0$, координаты r — к радиусу r_0).

На поверхности оболочки необходимо выполнить следующие граничные условия:

для потенциала φ_1

$$\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right]_{n=1} = -[v_n]_{n=1}; \quad (18.10)$$

для потенциала φ_2

$$\left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right]_{n=1} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (18.11)$$

При $t \rightarrow \infty$ должно выполняться условие затухания

$$\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow 0. \quad (18.12)$$

Начальные условия примем для всех функций нулевыми.

Решение задачи начнем с определения внешнего поля. Прежде всего найдем выражение для потенциала φ . Применим к уравнению (18.9) преобразование Лапласа по времени, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^L}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial \theta^2} - s^2 \varphi^L = 0. \quad (18.13)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$\varphi^L = f_1(\theta) f_2(r, s). \quad (18.14)$$

Подставляя (18.14) в уравнение (18.13), приходим к двум уравнениям

$$\frac{d^2 f_1}{d\theta^2} + \nu^2 f_1 = 0; \quad (18.15)$$

$$r^2 \frac{d^2 f_2}{dr^2} + r \frac{df_2}{dr} - (s^2 r^2 + \nu^2) f_2 = 0, \quad (18.16)$$

где $\nu = \text{const}$.

Решение первого из этих уравнений имеет вид

$$f_1(\theta) = C_1 \cos \nu \theta + C_2 \sin \nu \theta, \quad (18.17)$$

Так как по физике процесса функция $f_1(\theta)$ должна быть четной и иметь период 2π , то следует положить $C_2 = 0$, $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Тогда

$$f_1(\theta) = C_1 \cos n\theta. \quad (18.18)$$

Решение уравнения (18.16) при $\nu = n$ записывается в следующей форме [23]:

$$f_2(r, s) = C_3 I_n(rs) + C_4 K_n(rs), \quad (18.19)$$

где I_n и K_n — цилиндрические функции мнимого аргумента.

Для удовлетворения условию затухания (18.12) необходимо принять $C_4 = 0$. В итоге приходим к следующей формуле для изображения потенциала:

$$\varphi^L = \sum_{n=0}^{\infty} C_n K_n(rs) \cos n\theta \quad (18.20)$$

(C_n — произвольная постоянная).

Найдем потенциал дифракционного давления. Для этого представим радиальную составляющую скорости в падающей волне на поверхности цилиндра в виде ряда

$$[v_n]_{n=1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t) \cos n\theta, \quad (18.21)$$

где

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [v_n]_{n=1} d\theta, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi [v_n]_{n=1} \cos n\theta d\theta.$$

Применим к граничному условию (18.10) преобразование Лапласа, с учетом зависимости (18.21) будем иметь

$$\left[\frac{\partial \varphi^L}{\partial r} \right]_{n=1} = - \sum_{n=0}^{\infty} b_n^L \cos n\theta. \quad (18.22)$$

Подставив сюда выражение для потенциала (18.20), найдем произвольную постоянную C_n , после чего придем к следующей формуле:

$$\varphi_n^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^1 K_n(z)}{K_n(z) \left[n + z \frac{K_{n-1}(z)}{K_n(z)} \right]} \cos n\theta, \quad (18.23)$$

Давление на поверхности цилиндра в пространстве изображения будет

$$[p^1]_{r=1} = -z [\varphi^1]_{r=1} = - \sum_{n=0}^{\infty} z b_n^1(z) \pi_n(z) \cos n\theta. \quad (18.24)$$

Здесь

$$\pi_n(z) = \frac{1}{n + z \frac{K_{n-1}(z)}{K_n(z)}} = - \frac{K_n(z)}{z K_n'(z)}. \quad (18.25)$$

С целью определения дифракционного давления представим нагрузку на цилиндр от действия прямой ударной волны в виде ряда

$$[p_s]_{r=1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cos n\theta, \quad (18.26)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [p_s]_{r=1} d\theta; \quad a_{n0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [p_s]_{r=1} \cos n\theta d\theta. \quad (18.27)$$

Применив к (18.26) преобразование Лапласа, получим

$$[p_s^1]_{r=1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^1(s) \cos n\theta. \quad (18.28)$$

Суммируя теперь формулы (18.24) и (18.28), найдем зависимость для изображения дифракционного давления

$$p^{dL} = [p_s^1]_{r=1} + [p^1]_{r=1} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{dL} \cos n\theta, \quad (18.29)$$

где

$$p_n^{dL}(s) = a_n^1(s) - z b_n^1(s) \pi_n(s). \quad (18.30)$$

В области действительной переменной результирующее давление

$$p^d(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^d(t) \cos n\theta. \quad (18.31)$$

Оригинал функции (18.30) можно найти с помощью интеграла Меллана

$$p_n^d(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} p_n^{dL}(s) e^{st} ds. \quad (18.32)$$

Определим дифракционное давление в случае воздействия на цилиндр плоской единичной ступенчатой волны. Давление и радиальная скорость жидкости на поверхности цилиндра при такой волне будут

$$[p_s]_{r=0} = \sigma(t-1+\cos\theta), \quad (18.33)$$

$$[v_n]_{r=1} = -\cos\theta \sigma(t-1+\cos\theta).$$

Изображения данных функций имеют вид

$$[p_s^1]_{r=1} = \frac{1}{s} e^{-(1-\cos\theta)s},$$

$$[v_n^1]_{r=1} = -\cos\theta \frac{1}{s} e^{-(1-\cos\theta)s}. \quad (18.34)$$

Подставляя эти зависимости в формулы (18.22) и (18.27), получим изображения коэффициентов соответствующих рядов [23]

$$a_n^1 = \frac{e^{-s}}{ns} \int_0^\pi e^{s \cos\theta} d\theta = \frac{e^{-s}}{s} I_n(s);$$

$$a_{n0}^1 = \frac{2e^{-s}}{ns} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{s \cos\theta} \cos n\theta d\theta = \frac{2e^{-s}}{s} I_n(s); \quad (18.35)$$

$$b_n^1 = -\frac{e^{-s}}{ns} \int_0^\pi e^{s \cos\theta} \cos\theta d\theta = -\frac{e^{-s}}{s} I_1(s) = -\frac{e^{-s}}{s} I_n'(s);$$

$$\begin{aligned} b_{n0}^1 &= -\frac{2e^{-s}}{ns} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{s \cos\theta} \cos\theta \cos n\theta d\theta = \\ &= -\frac{e^{-s}}{s} [I_{n+1}(s) + I_{n-1}(s)] = -\frac{2e^{-s}}{s} I_n'(s). \end{aligned} \quad (18.36)$$

Если теперь учесть известное из теории цилиндрических функций соотношение [23]

$$I_n(s) K_n'(s) - K_n(s) I_n'(s) = -\frac{1}{s}, \quad (18.37)$$

то формулу (18.30) можно привести к следующему, внешне весьма простому виду:

$$p_n^{dL} = -\frac{e^{-s}}{s^2 K_n'(s)}, \quad p_{n0}^{dL} = -\frac{2e^{-s}}{s^2 K_n'(s)}. \quad (18.38)$$

Прежде всего выясним асимптотическое поведение функций $\rho_n^L(t)$. Так как при $x \rightarrow \infty$ $K_n'(x) \approx -\sqrt{\frac{n}{2x}} e^{-x}$, то в случае $t \rightarrow 0$

$$\rho_n^L(t) \approx \frac{2^{n/2}}{x} \sqrt{t}, \quad \rho_n^R(t) \approx \frac{2^{n/2}}{x} \sqrt{t}. \quad (18.39)$$

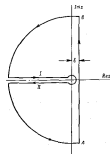


Рис. 54. Контур интегрирования.

Учитывая, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} K_n(s) = -\frac{1}{s},$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} K_n'(s) = -\frac{2^{n-1}n}{s^{n+1}},$$

при больших значениях времени будем иметь

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_n^L(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_n^R(t) = 0. \quad (18.40)$$

Отсюда следует, что в пределе дифракционное давление в любой точке цилиндра становится равным давлению в прямой волне.

Перейдем к вычислению функций $\rho_n^L(t)$ при любых значениях времени. Для этого используем интеграл Меллина

$$\rho_n^L(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \rho_n^L(s) e^{st} ds, \quad (18.41)$$

Так как подынтегральная функция при $s = 0$ разветвляется, то при вычислении интеграла (18.41) целесообразно ввести вспомогательный контур интегрирования, показанный на рис. 54. Внутри этого контура подынтегральная функция однозначна и мероморфна, т. е. не имеет других особенностей, кроме полюсов. Следовательно, по теореме Коши, интеграл по замкнутому контуру C равен сумме вычетов в полюсах, умноженной на $2\pi i$.

$$\int_C \rho_n^L(s) e^{st} ds = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res} [\rho_n^L(s_k) e^{st}]. \quad (18.42)$$

Интеграл по контуру C разбивается на интегралы по дугам радиуса R и r , проведенным из точки $s = 0$, по прямой AB и по ветвям разреза I и II . При $R \rightarrow \infty$ на дуге C_R имеем

$\rho_n^L(s) \rightarrow 0$, поэтому согласно лемме Жордана интеграл по дуге C_R стремится к нулю. Тогда можно записать

$$\rho_n^L(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \rho_n^L(s) e^{st} ds = \sum_{k=1}^N \text{res} [\rho_n^L(s_k) e^{st}] - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \rho_n^L(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C \rho_n^L(s) e^{st} ds. \quad (18.43)$$

При $n = 0$ будем иметь

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_C \rho_0^L(s) e^{st} ds = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{st}}{s} ds = -1. \quad (18.44)$$

В остальных случаях ($n \geq 1$) интеграл по дуге C_r равен нулю. Для определения вычетов необходимо знать корни уравнения

$$K_n(s) = 0. \quad (18.45)$$

Таблица 4

n	$s_{n,1}$	$s_{n,2}$	$s_{n,3}$	$s_{n,4}$
1	$-0,644 \pm i 0,500$			
2	$-0,834 \pm i 1,434$			
3	$-0,969 \pm i 2,372$	$-1,951 \pm i 0,451$		
4	$-1,050 \pm i 3,31$	$-2,49 \pm i 1,348$		
5	$-1,152 \pm i 4,26$	$-2,85 \pm i 2,22$	$-3,23 \pm i 0,468$	
6	$-1,235 \pm i 5,24$	$-3,15 \pm i 3,10$	$-3,81 \pm i 1,337$	
7	$-1,306 \pm i 6,20$	$-3,35 \pm i 4,02$	$-4,34 \pm i 2,18$	$-4,58 \pm i 0,458$

Значения корней при $n = 1+7$ приведены в табл. 4¹. Так как все корни простые, то вычеты подынтегральной функции можно найти по формуле

$$\text{res} [\rho_n^L(s_k) e^{st}] = -\frac{2e^{st} - 1}{[K_n'(s)]_{s=s_k}}, \quad (18.46)$$

которая приведет к следующему результату:

$$\text{res} [\rho_n^L(s_k) e^{st}] = \frac{2e^{(t-1)s_k}}{s_k K_{n-1}(s_k) - (s^2 - n + s_k^2) K_n(s_k)}. \quad (18.47)$$

¹ Значения корней при $n = 1+5$ получены Р. Скаллем и М. В. Фридрихсом, остальные К. В. Горюновым.

При $n = 0$ уравнение (18.45) корней не имеет и, следовательно, вычетов отсутствуют. Переходя к вычислению интеграла по разрезу, необходимо иметь в виду, что на верхнем берегу $z \sim ze^{i\alpha}$, а на нижнем $z \sim ze^{-i\alpha}$. Встав функции $K_n(z)$, запишем по разным берегам разреза, связывая следующими соотношениями обхода [23]:

$$K_n(ze^{i\alpha}) = (-1)^n K_n(z) \mp i\pi I_n(z). \quad (18.48)$$

С учетом этой формулы интеграл по разрезу можно привести к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} p_n^R(z) e^{i\alpha} dz = \\ & = -\Delta \int_0^\pi \frac{[w_n^+(z) - w_{n-1}^+(z)] e^{-(i-1)x} dx}{x [(w_n^+(z) + w_{n-1}^+(z))^2 + x^2 (w_n^-(z) - w_{n-1}^-(z))^2]}, \quad (18.49) \end{aligned}$$

где $\Delta = 1$ при $n \sim 0$; $\Delta = 2$ при $n \geq 1$.

Суммируя полученные результаты, приведем окончательные формулы для гармоник дифракционного давления

$$p_n^R(t) = 1 - \int_0^\pi \frac{J_1(x) e^{-(i-1)x} dx}{x^2 [K_1^2(x) + x^2 I_1^2(x)]}, \quad (18.50)$$

$$\begin{aligned} p_n^R(t) &= 2 \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{e^{(i-1)x}}{x K_{n-1}(z) - (n^2 - n - 1) K_n(z)} \right]_{z=0}^+ + \\ &+ 2 \int_0^\pi \frac{[w_n^+(z) - w_{n-1}^+(z)] e^{-(i-1)x} dx}{x [(w_n^+(z) + w_{n-1}^+(z))^2 + x^2 (w_n^-(z) - w_{n-1}^-(z))^2]}. \quad (18.51) \end{aligned}$$

Характер изменения функций $p_n^R(t)$ ясен из графиков на рис. 55. Там же пунктиром показаны результаты расчета по асимптотическим формулам (18.39). Заметим, что эти зависимости полезны для контроля весьма громоздких вычислений по формулам (18.50) и (18.51) при малых t .

Вычисляя гармоники $p_n^R(t)$ и суммируя ряд (18.51), можно найти дифракционное давление в каждой точке цилиндра. На рис. 56 показаны соответствующие кривые давления в трех точках цилиндра ($\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ и π), рассчитанные Ю. В. Горюновым с учетом семи членов ряда. Хотя такого числа членов явно недостаточно для получения удовлетворительной точности расчета, все же приведенные данные позволяют судить об общей картине дифракции ударной волны около цилиндра. Сравняв процесс дифракции на сфере и цилиндре, нетрудно заметить, что выравнивание давле-

ний в последнем случае происходит значительно медленнее. Это объясняется тем, что обтекание сферы пространственное, а цилиндра — плоское.

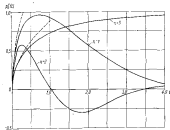


Рис. 55. Функции $p_n^R(t)$ для цилиндрической оболочки.

Перейдем теперь к определению дополнительного давления, возникающего в жидкости при движении и деформации оболочки. Представим нормальный поток оболочки в виде ряда Фурье

$$w(\theta, t) = \sum_{n=0}^\infty w_n(t) \cos n\theta. \quad (18.52)$$

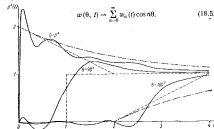


Рис. 56. Кривые дифракционного давления ($\theta = 0, 90$ и 180°).

— по (18.51); --- по (18.49); ... по (18.46).

Подставив эту формулу в граничное условие (18.11) и применяя к нему преобразование Лапласа, получим

$$\left[\frac{\partial \psi_n^L}{\partial r} \right]_{r=1} = - \sum_{n=0}^{\infty} s \omega_n^L(s) \cos n\theta. \quad (18.53)$$

Определив с помощью данной зависимости произвольную постоянную C_n в формуле (18.29), приходим к следующему выражению для потенциала движения излучения:

$$\psi_n^L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s \omega_n^L K_n(s)}{K_n(s) \left[1 + s \frac{K_{n-1}(s)}{K_n(s)} \right]} \cos n\theta. \quad (18.54)$$

Давление на поверхности цилиндра, записанное в изображениях, будет

$$p^{1/2} = -s \left[\psi_n^L \right]_{r=1} = - \sum_{n=0}^{\infty} s^2 \omega_n^L m_n \cos n\theta, \quad (18.55)$$

где функция m_n выражается формулой (18.25).

Найдем оригинал функции

$$p_n^{1/2}(s) = s^2 \omega_n^L(s) m_n(s). \quad (18.56)$$

Так как при нулевых начальных данных для функции $\omega_n(t)$ имеет место следующее соответствие:

$$s^2 \omega_n^L(s) \rightarrow \ddot{\omega}_n(t),$$

то, применив теорему свертывания, получим

$$p_n^{1/2}(t) = \int_0^t \ddot{\omega}_n(t) \psi_n(t - \tau) d\tau. \quad (18.57)$$

Здесь $\psi_n(t)$ — оригинал функции $m_n(s)$, который может быть найден с помощью интеграла Меллина

$$\psi_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} m_n(s) e^{st} ds. \quad (18.58)$$

Напомним, что по физическому смыслу $\psi_n(t)$ есть сила, действующая на оболочку при движении ее со соответствующей формой гребня с единичной скоростью. Рассмотрим асимптотические свойства функции $\psi_n(t)$. При $t \rightarrow 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{\psi}_n(t) = \lim_{t \rightarrow 0} m_n(s) = 1; \quad (18.59)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ddot{\psi}_n(t) = \lim_{t \rightarrow 0} s [m_n(s) - \psi_n(+0)] = -0,5.$$

При $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_n(t) = \lim_{s \rightarrow 0} m_n(s) = 0. \quad (18.60)$$

Отметим также, что интеграл

$$\int_0^\infty \dot{\psi}_n(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} m_n(s) = \frac{1}{n}. \quad (18.61)$$

равен присоединенной массе при движении оболочки в несжимаемой жидкости. Укажем, что для случая $n = 0$ присоединенная масса равна бесконечности. Физически это означает, что бесконечно длинная цилиндрическая оболочка в безграничной жидкой среде по форме $n = 0$ двигаться не может. Определение функций $\psi_n(t)$ для цилиндра значительно сложнее, чем для сферы. Эта задача была решена авторами работы [22]. При вычислении интеграла (18.58) следует воспользоваться контуром интегрирования, показанным на рис. 54. Так же, как и при нахождении гармоник дифракционного давления, интеграл (18.58) равен сумме вычетов в полюсах плюс интеграл по берегам разреза. Интеграл по дуге C , всегда равен нулю.

Вычеты в полюсах находятся по формуле

$$\text{res} [m_n(s) e^{st}]_{s=s_k} = \left[\frac{d}{ds} \frac{K_n(s) e^{st}}{[s K_n(s) + s K_{n-1}(s)]} \right]_{s=s_k} = \frac{s_k e^{s_k t}}{s_k^2 + s_k^2}. \quad (18.62)$$

Координаты полюсов s_k приведены в табл. 4.

Интеграл по берегам разреза вычисляется с учетом соотношения (18.48). Не приводя промежуточных выкладок, запишем окончательный результат

$$\psi_n(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt} dx}{x^2 [K_n^2(x) + s K_n^2(x)]}; \quad (18.63)$$

$$\psi_n(t) = - \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{s_k^2 + s_k^2} e^{s_k t} +$$

$$+ (-1)^n \int_0^\infty \frac{e^{-xt} dx}{[s K_n(x) + s K_{n-1}(x)]^2 + s^2 [s K_n(x) - s K_{n-1}(x)]^2}. \quad (18.64)$$

Вид функций $\psi_n(t)$ показан на рис. 57. Характер их изменения такой же, как и у аналогичных функций для сферы, но затухают они значительно медленнее.

Как уже указывалось в § 16, дифракционное давление можно выразить через единичные функции сопротивления $\psi_n(t)$. Действи-

тельно, применяя к формуле (18.30) теорему свертывания двух функций и учитывая начальное значение $\psi_n(0) = 1$, будем иметь

$$\rho_n^R(t) = a_n(t) - b_n(t) + \int_0^t b_n(\tau) \psi_n(t-\tau) d\tau. \quad (18.65)$$

Получив все необходимые зависимости для гидродинамических сил, перейдем к решению уравнений движения оболочки (18.4).

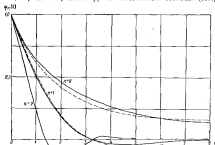


Рис. 57. Функции $\psi_n(t)$ для цилиндра.
— точное решение; ---- приближенная зависимость.

В качестве внешней нагрузки примем единичную ступенчатую ударную волну. Будем искать решение системы уравнений в виде:

$$N(0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} N_n(t) \cos n\theta, \quad (18.66)$$

$$w(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) \cos n\theta.$$

Подставляя эти зависимости в уравнение (18.4), получим:

$$\begin{aligned} N_n + c_2^2(n^2 + 1)N_n - n^2 c_2^2 k_1^2 n^2(n^2 - 1)w_n = \\ = -c_2^2[\rho_n^R(t) - \rho_n^+(t)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{w}_n + c_2^2 k_2^2 n^2(n^2 - 1)w_n - \frac{1}{m^2}N_n = -\frac{1}{m^2}[\rho_n^R(t) - \rho_n^+(t)]; \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (18.67)$$

Применив к этим уравнениям преобразование Лапласа по времени. В результате этой операции, учитывая формулу (18.56), приходим к следующей системе обыкновенных уравнений:

$$\begin{aligned} [s^2 + c_2^2(n+1)]N_n^L - [n^2 c_2^2 k_1^2 n^2(n^2 - 1) + c_2^2 m_1(s)s]w_n^L = \\ = -c_2^2 \rho_n^R(s), \\ -\frac{1}{m^2}N_n^L + \left[\left(1 + \frac{m_1(s)}{m^2}\right)s^2 + c_2^2 k_2^2 n^2(n^2 - 1) \right]w_n^L = \\ = \frac{1}{m^2}\rho_n^R(s), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (18.68)$$

Решение этой системы уравнений найти несложно. Используя для функций $\rho_n^R(s)$ формулу (18.38), а для функции $m_1(s)$ зависимость (18.55), будем иметь

$$w_0^L = -\frac{1}{n^2 c_2^2} N_0^L = -\frac{e^{-s}}{s^2 [m_1(s) + n^2(s^2 + c_2^2)K_1(s)]}; \quad (18.69)$$

$$N_{n>1}^L = -\frac{2n^2 c_2^2 (s^2 - b_1)s^{-2}}{s^2 [n^2(s^2 + b_2 s^2 + b_3)K_n(s) - s(s^2 + c_2^2)K_n(s)]}; \quad (18.70)$$

$$w_{n>1}^L = \frac{2(s^2 + c_2^2)s^{-2}}{s^2 [n^2(s^2 + b_2 s^2 + b_3)K_n(s) - s(s^2 + c_2^2)K_n(s)]}. \quad (18.71)$$

где

$$\begin{aligned} b_1 = c_2^2 k_1^2 n^2(n^2 - 1); \\ b_2 = c_2^2 [n^2 + 1 + k_1^2 n^2(n^2 - 1)]; \\ b_3 = c_2^2 k_2^2 n^2(n^2 - 1)^2. \end{aligned} \quad (18.72)$$

Оригиналы искоемых функций можно найти с помощью интеграла Меллина

$$N_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} N_n^L(s) e^{st} ds, \quad (18.73)$$

$$w_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} w_n^L(s) e^{st} ds. \quad (18.74)$$

При вычислении этих интегралов следует воспользоваться теми же приемами, которые применялись выше для нахождения функций $\rho_n^R(t)$ и $\psi_n(t)$. И в данном случае в формулы для $N_n(t)$ и $w_n(t)$ будет входить сумма вычетов в полюсах плюс интеграл по разрезу.

Следует указать, что для нахождения вычетов необходимо определить корни знаменателя в формулах (18.69)–(18.71), что вы-

ляется достаточно сложной операцией. Подчеркнем, что для каждой конкретной оболочки корня надо описывать законы. Не менее трудно вычислять интеграл по разрезу. Поэтому для получения численных данных мы будем пользоваться не формулами (18.73) и (18.74), а приближенными методами решения задачи, которые изложены в следующем параграфе.

§ 19. Основные закономерности взаимодействия ударной волны с цилиндрической оболочкой

В данном параграфе взаимодействие ударной волны с цилиндрической оболочкой исследуется приближенными методами. Некоторые из этих методов уже рассматривались выше (§ 17). Здесь остановимся лишь на тех из них, которые либо дают наиболее высокую точность, либо приводят к наиболее простым результатам.

Один из приближенных методов решения рассматриваемой задачи заключается в аппроксимации гидродинамических сил $p_a^0(t)$ и $\varphi_a(t)$. Точные выражения для этих сил приведены в предыдущем параграфе. С помощью данных формул можно построить графики и аппроксимировать их какими-либо удобными для дальнейшего преобразования зависимостями. При использовании для аппроксимации экспоненциальных и тригонометрических функций обычно удается свести решение задачи для каждой формы движения оболочки к обыкновенному дифференциальному уравнению. Данный прием целесообразно применять для простых форм движения, ибо для них удается получить сравнительно простые аппроксимации. С ростом номера формы движения усложняется вид функций $P_a^0(t)$ и $\varphi_a(t)$, и подбор приближенных зависимостей становится очень трудоемким, а дальнейшее решение — громоздким.

Наиболее важными формами движения оболочки являются нулевая и первая. Для этих форм можно рекомендовать следующие приближенные зависимости для гидродинамических сил:¹

$$p_a^0(t) = i - 0,382e^{-0,484t} - 0,391e^{-1,104t} - 0,327e^{-4,5t}, \quad (19.1)$$

$$p_a^1(t) = 2,97 \left(\cos \frac{t}{8} e^{-0,648t} - e^{-1,752t} \right) + 0,60 (e^{-1,5t} - e^{-3,6t}); \quad (19.2)$$

$$\varphi_a(t) = 0,15 + 0,85e^{-t,39t}, \quad (19.3)$$

$$\varphi_1(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2}. \quad (19.4)$$

¹ Формулы (19.1)–(19.4) получены Ю. В. Горяжковым [22] и Ю. А. Федоренком [22].

По своей структуре эти формулы напоминают точные выражения для аналогичных функций сферы, хотя и являются более сложными.

Отметим, что погрешность формул (19.1), (19.2) не превышает 1–2%. Об удовлетворительной точности зависимостей (19.3), (19.4) можно судить по графикам на рис. 57. Следует указать, что формулу (19.3) можно применять при $t \leq 8$. Остальные зависимости ограничены по времени их вычислениями.

Применение соотношений (19.1)–(19.4) позволяет сравнительно просто получить искомые решения. Как будет показано ниже, при $\lambda = 0$ задача сводится к решению обыкновенного уравнения третьего порядка. При $\lambda = 1$ уравнение, описывающее движение упругой оболочки, будет иметь четвертый порядок [72]. Если растяжимость срединной поверхности оболочки не учитывать, то порядок уравнения движения будет второй.

Обратим внимание на то, что с помощью изложенного выше метода можно получить весьма близкие к точному решению результаты. Для этого надо обеспечить лишь хорошее качество аппроксимации функций $p_a^0(t)$ и $\varphi_a(t)$. К недостаткам метода относится довольно большая громоздкость окончательного решения (см. например, [72]), которая быстро возрастает с увеличением номера формы движения. Существенно более простые зависимости можно получить путем аппроксимации изображений искомых функций m_0^2 и N_0^2 . Основные особенности этого метода были изложены в § 17. Напомним лишь, что погрешности решения при переходе от изображений к оригиналам может увеличиваться. Следовательно, точность аппроксимации изображений должна быть достаточно высокой. Это затрудняет применение данного метода при больших значениях номера формы движения. На рациональных приемах исследования движения оболочки по высоким формам мы остановимся несколько ниже. А сейчас перейдем к изучению движения цилиндрической оболочки по нулевой и первой формам.

Напомним, что равномерное обжатие цилиндра по форме $\lambda = 0$ характеризует среднее ускорение λ , как увидим далее, является определяющим для оценки напряженного состояния. С целью получения наиболее простых формул воспользуемся методом аппроксимации изображения искомой функции асимптотически эквивалентной зависимостью. В случае воздействия на цилиндрическую оболочку единичной ступенчатой волны изображение функции $N_0^2(\lambda)$ определяется формулой (18.66). Запишем эту формулу в следующем виде:

$$N_0^2 = - \frac{\lambda^2 c_0^2}{\lambda^2 c_0^2 + \omega^2 (\lambda^2 + c_0^2)} K_1(\lambda) I_0(\lambda). \quad (19.5)$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \alpha N_0^L = -1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha N_0^L = 0, \quad (19.6)$$

Аппроксимируем правую часть формулы (19.6) дробно-рациональной функцией, удовлетворяющей условиям (19.6),

$$\alpha N_0^L = -\frac{a^2}{ax^2 + bx + c}, \quad (19.7)$$

Коэффициенты a и b подберем таким образом, чтобы обеспечить на вещественной оси наилучшее совпадение формулы (19.7)

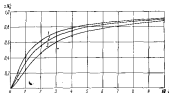


Рис. 58. Функция αN_0^L в зависимости от x .

$$1 - \frac{h}{r_1} = \frac{1}{30}; \quad 2 - \frac{h}{r_1} = \frac{1}{100}; \quad 3 - \frac{h}{r_1} = \frac{1}{300}.$$

— — — точное решение; ● — аппроксимация.

с точным решением. Как видно из графиков рис. 58, удовлетворительных результатов можно добиться в том случае, если положить

$$a = 1 + \frac{0.56}{\alpha^2}, \quad b = 0.82\alpha^2 + \frac{0.40}{\alpha^2}. \quad (19.8)$$

Дальнейшее решение не вызывает затруднений. Если $4\alpha^2 > b^2$, то уравнение

$$s^4 + \frac{b}{a}s + \frac{a^2}{a} = 0$$

имеет комплексные сопряженные корни. Тогда для средних усилий в цилиндрической оболочке будем иметь следующую формулу:

$$N_0(t) = -1 + e^{-\beta t} \left(\frac{a}{\beta} \sin \beta t + \cos \beta t \right), \quad (19.9)$$

где

$$\alpha = \frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{1}{2a} \sqrt{4\alpha^2 - b^2},$$

На рис. 59 показаны графики функции $N_0(t)$ для стальной оболочки с относительной толщиной $h/r_1 = 1/50; 1/100$ и $1/200$ ($\alpha^2 = 32.2; 0.16; 0.08; 0.04$). Как видно из графиков, максимальное значение сжимающего усилия близко к единице, причем имеется некоторая тенденция увеличения $N_{\max}$ при уменьшении толщины оболочки. Обратим внимание на тот факт, что при уменьшении относительной толщины оболочки скорость

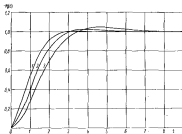


Рис. 59. Среднее усилие $N_0(t)$ при различной относительной толщине цилиндрической оболочки.

$$1 - \frac{h}{r_1} = \frac{1}{30}; \quad 2 - \frac{h}{r_1} = \frac{1}{100}; \quad 3 - \frac{h}{r_1} = \frac{1}{300}.$$

возрастания усилия $N_0(t)$ снижается. Причина этого явления заключается в том, что чем тоньше оболочка, тем большую роль играют гидродинамические силы второй категории по сравнению с силами инерции и упругости.

Следует иметь в виду, что напряжения связаны с усилием формулой

$$\sigma_0 = \frac{1}{A} N_0.$$

Следовательно, максимальные напряжения в оболочке при действии на нее единичной ударной волны примерно обратно пропорциональны толщине оболочки. Нетрудно получить зависимость для средних усилий в оболочке и при других видах внешней нагрузки. Так, например, если на оболочку действует экспоненциальное ударное поле

$$p_0(t) = p_0 e^{-\lambda t}, \quad (19.10)$$

то, воспользовавшись формулой [16, 103], будем иметь

$$N_0(\lambda, t) = p_0 [1 - A_0 e^{-i\lambda t} + e^{-i\omega t} (B_1 \sin \lambda t + A_1 \cos \lambda t)], \quad (19.11)$$

где

$$A_1 = 1 - \frac{1 - 2\alpha\lambda}{(1 - \alpha\lambda)^2 + \beta^2\lambda^2};$$

$$B_1 = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha + \lambda(\beta^2 - \alpha^2)}{\beta[(1 - \alpha\lambda)^2 + \beta^2\lambda^2]}. \quad (19.12)$$

На рис. 60 показаны графики функции $N_0(\lambda, t)$ для стальной оболочки с относительной толщиной $h/r_0 = 1/100$ ($\beta_0^2 = 12,2$,

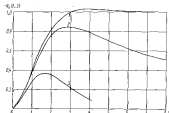


Рис. 60. Среднее ускорение $N_0(\lambda, t)$ при различной величине затухающей нагрузки в ударной волне.
1 — $\lambda = \infty$; 2 — $\lambda = 5$; 3 — $\lambda = 1,0$.

$\alpha^2 = 0,08$) при $\lambda = 1, 10, \infty$. Отметим, что величина постоянной экспоненциального затухания нагрузки начинает существенно скапливаться на максимальных значениях сжимающего усилия в том случае, если $\lambda \ll 10$.

Перейдем теперь к изучению движения цилиндрической оболочки по форме $\kappa = 1$. Данная задача была подробно исследована Ю. А. Федоровичем [72], который применял для приближенного решения гидродинамических сил формулы (19.2) и (19.4). Мы воспользуемся методом аппроксимации изображением псевдофункции, что позволяет получить более простые формулы.

Для упрощения выкладок будем полагать, что оболочка является абсолютно жесткой. Тогда уравнение движения цилиндра при падении на него единичной ступенчатой волны запишется так:

$$\ddot{w}_1 = \frac{1}{2\pi\alpha} [p_1^+(t) - p_1^-(t)]. \quad (19.13)$$

Применив к этому уравнению преобразование Лапласа, будем иметь

$$s^2 w_1^+ = \frac{1}{2\pi\alpha} [p_1^{+0} - p_1^{+1}]. \quad (19.14)$$

Учитывая, что

$$p_1^{+0} = -\frac{2\alpha^{-4}}{s^2 K_1(s)}; \quad p_1^{+1} = \frac{s^2 K_1(s)}{K_1'(s)} w_1^+, \quad (19.15)$$

получим

$$s^2 w_1^+ = \frac{1}{\alpha^5} \left[\frac{1}{s^2 K_1(s)} + \left(1 + \frac{1}{2\pi\alpha s} \right) s^2 K_1(s) \right] w_1^+. \quad (19.16)$$

Асимптотическое поведение этой функции характеризуется следующими пределами:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 w_1^+ = \frac{2}{2\pi\alpha^5 + 1}, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 w_1^+ = 0. \quad (19.17)$$

Будем аппроксимировать правую часть формулы (19.16) дробно-рациональной функцией, удовлетворяющей условиям (19.17). При этом ограничимся случаем нулевой пластичности оболочки ($\alpha^2 = 1/2$). Тогда аппроксимацию можно представить в виде

$$s^2 w_1^+ = \frac{b}{s^2 + a s^2 + b}. \quad (19.18)$$

Расчеты показывают, что достаточно хорошего совпадения этой формулы с точным решением (на вещественной оси) можно добиться при $a = b = 5$. Тогда после перехода к оригиналам получим следующие формулы, характеризующие движение цилиндра нулевой пластичности:

$$w_1(t) = t - 1 + 1,17e^{-1,38t} - 0,17e^{-3,62t}; \quad (19.19)$$

$$\dot{w}_1(t) = 1 + 0,615e^{-1,38t} - 1,615e^{-3,62t}; \quad (19.20)$$

$$\ddot{w}_1(t) = 2,23(e^{-1,38t} - e^{-3,62t}). \quad (19.21)$$

Характер изменения этих функций показан на рис. 61. Сравнимая параметры движения цилиндра и сферы нулевой пластичности (рис. 44), видно, что они довольно близки между собой. Отметим лишь, что в начале процесса цилиндр движется немного быстрее сферы, что связано в основном несколько большим дифракционным давлением.

Распространим теперь полученные результаты на ударную волну экспоненциального вида. Используя интеграл Дюамеля, будем иметь

$$\omega_1(\lambda, t) = p_0 \lambda - \frac{p_0 \lambda}{1 - \frac{p_0 \lambda}{3k} + \frac{3k}{3k}} \times \\ \times [5\lambda^2 e^{-t/\lambda} - 1,616(3,62\lambda - 1)e^{-1,38t} + 0,616(1,38\lambda - 1)e^{-0,69t}]; \quad (19.22)$$

$$\omega_2(\lambda, t) = \frac{p_0 \lambda}{1 - \frac{p_0 \lambda}{3k} + \frac{3k}{3k}} [5\lambda e^{-t/\lambda} - 2,23(3,62\lambda - 1) \times \\ \times e^{-1,38t} + 2,23(1,38\lambda - 1)e^{-0,69t}]; \quad (19.23)$$

$$\ddot{\omega}_2(\lambda, t) = \frac{p_0 \lambda}{1 - \frac{p_0 \lambda}{3k} + \frac{3k}{3k}} [-5e^{-t/\lambda} + 3,08(3,62\lambda - 1)e^{-1,38t} - \\ - 8,08(1,38\lambda - 1)e^{-0,69t}]. \quad (19.24)$$

На рис. 61 показаны графики скоростей и ускорений цилиндра нулевой плавучести при $\lambda = 1, 10$, со. Обратим внимание на то

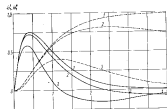


Рис. 61. Параметры движения жесткого цилиндра нулевой плавучести.

— ускорение; — — — скорость.
1 — $\lambda = 1$; 2 — $\lambda = 10$; 3 — $\lambda = 1,0$.

обстоятельство, что экспоненциальный спад нагрузки заметно снижает максимальные ускорения цилиндра лишь при $\lambda = 1$. Уменьшение параметра λ заметно сказывается на максимальной скорости цилиндра уже при $\lambda = 10$.

Перейдем теперь к более глубокому изучению параметров движения и характеристик напряженного состояния цилиндрической оболочки. Для этого надо удерживать в рамках, описывающих

решение задачи, довольно много членов. Как уже указывалось ранее, чем больше номер гармоник движения λ , тем сложнее выполнить аппроксимацию гидродинамических сил $R_n^0(\dot{\theta})$ и $\Phi_n(\dot{\theta})$ либо изображений искомыми функциями ω_n^0 и M_n^0 . Поэтому применение рассмотренных выше методов решения задачи становится нецелесообразным. Кроме того, следует иметь в виду, что достаточно полную информацию о поведении оболочки при учете большого числа членов в рядах можно получить при использовании ЭВМ. Поэтому все расчетные зависимости должны быть удобны для программирования. Для машинного счета целесообразнее задавать такой путь решения. Единичные функции сопротивления задаются такой функцией, структура которой одинакова для любого λ . Через зависимость, структура которой одинакова для любого λ . Через эти функции выражаются складываемые дифференциального давления $R_n^0(\dot{\theta})$. В общем случае уравнения движения оболочки будут интегро-дифференциальными. Их решение можно получать численно. Если возможно сведения интегро-дифференциальных уравнений к обыкновенным дифференциальным, то объем вычислений существенно сократится. В § 17 было показано, что единичные функции сопротивления $\Phi_n(\dot{\theta})$ можно задать в форме (17.30) либо (17.31). Применительно к цилиндрической оболочке эти формулы примут вид

$$\Phi_n^0(\dot{\theta}) = \left(1 - \frac{n}{2}\right) \left[1 - \sigma \left(1 - \frac{2}{n}\right)\right]; \quad (19.25)$$

$$\Phi_n^0(\dot{\theta}) = e^{-n\dot{\theta}}. \quad (19.26)$$

Воспользуемся аппроксимацией единичных функций сопротивления (19.25). Тогда формула (18.65), описывающая гармоники давления, запишется так:

$$p_n^0(t) = a_n(t) - b_n(t) + \frac{n}{2} \left[\int_0^t b_n(\tau) d\tau - \right. \\ \left. - \sigma \left(1 - \frac{2}{n}\right) \int_0^{t-2/n} b_n(\tau) d\tau \right]. \quad (19.27)$$

В случае единичной ступенчатой волны коэффициенты $a_n(t)$ и $b_n(t)$ выражаются формулами:
при $0 \leq t \leq 2$

$$a_n = \frac{\theta_n}{n}; \quad a_{n+1} = \frac{2}{2n} \sin n\theta_n; \quad (19.28)$$

$$b_n = -\frac{1}{2} \sin \theta_n; \quad b_1 = -\frac{1}{2} \left(\theta_1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta_1\right);$$

$$b_{n+2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{n+1} \sin(n+1)\theta_n + \frac{1}{n-1} \sin(n-1)\theta_n \right], \quad (19.29)$$

$$\theta_n = \arccos(1 - f); \quad (19.30)$$

при $f > 2$

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_{n \geq 1} = 0, \quad \delta_1 = -1, \quad \delta_{n \geq 2} = 0.$$

Расчеты показывают, что при $n \geq 1$ погрешность формулы (19.27) не превышает 5%. В то же время объем вычислений по сравнению с точным решением во много раз сокращается.

Подставляя зависимость (19.25) в формулу (18.57) и дважды интегрируя по частям, приходим к следующему выражению для гармоник давления:

$$p_n^+(t) = \alpha_n \ddot{u}_x + \beta_n \ddot{u}_y + \gamma_n \ddot{u}_z. \quad (19.31)$$

ГД

$$\alpha_n = -\frac{\pi}{2} \left[1 - \sigma \left(f - \frac{2}{n} \right) \right]; \quad (19.32)$$

$$\beta_n = 1 - \sigma \left(f - \frac{2}{n} \right);$$

$$\gamma_n = \frac{1}{n} \sigma \left(f - \frac{2}{n} \right).$$

Нетрудно заметить, что формулы (19.27) и (19.31) при $n = 0$ эквивалентны гипотезе плоского отражения. В этом случае они дают небольшую погрешность. Так как именно эта форма деформации является определяющей для напряженного состояния оболочки, то при $n = 0$ будем пользоваться более точными зависимостями (19.1) и (19.3).

Приступим к изучению напряженного состояния и процесса деформирования цилиндрической оболочки.

Подставляя формулу (19.31) в уравнения (18.67), приведем их к виду ($n \geq 1$)

$$\begin{aligned} N_n + c_1^2(n^2 + 1)N_n - c_1^2[\pi^2 c_2^2 n^2(n^2 - 1) + \alpha_n]u_n - \\ - c_2^2 \beta_n \ddot{u}_x - c_2^2 \gamma_n \ddot{u}_z = -c_2^2 \rho_n^0(f); \quad (19.33) \\ (\pi^2 + \gamma_n)\ddot{u}_x + \beta_n \ddot{u}_y + [\pi^2 c_2^2 n^2(n^2 - 1) + \alpha_n]u_n - N_n = \rho_n^0(f); \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Движение оболочки по форме $n = 0$ с учетом зависимости (19.3) будет описываться уравнением

$$\ddot{u}_0 + c_2^2 \ddot{u}_0 + \frac{1}{\pi^2} \int_0^t \ddot{u}_0(\tau) [0,15 + 0,85e^{-0,30(t-\tau)}] d\tau = \frac{1}{\pi^2} \rho_0^0(f). \quad (19.34)$$

Продифференцировав зависимость (19.34) по времени и прибавив к полученному результату исходное уравнение, умноженное на 0,59, получим

$$\begin{aligned} \ddot{u}_0 + \left(0,59 + \frac{1}{\pi^2} \right) \ddot{u}_0 + \left(c_2^2 + \frac{0,127}{\pi^2} \right) \ddot{u}_0 + 0,59 c_2^2 \ddot{u}_0 = \\ = \frac{1}{\pi^2} \left[0,59 \rho_0^0(f) + \frac{d}{dt} \rho_0^0(f) \right]. \quad (19.35) \end{aligned}$$

Уравнение (19.35) и система уравнений (19.33), (19.34) решались численно методом Рунге-Кутты на ЭВМ.¹ Вначале расчеты выполнялись для нагрузки в виде единичной ступенчатой волны. При этом для функции $\rho_n^0(f)$ использовалась формула (19.1), а для функции $\rho_n^0(f)$ — формула (19.27). В процессе расчетов для ряда значений угла θ вычислялись функции

$$\omega(\theta, t) = \sum_{n=0}^N \omega_n(t) \cos n\theta;$$

$$N(\theta, t) = \sum_{n=0}^N N_n(t) \cos n\theta; \quad (19.36)$$

$$M(\theta, t) = \sum_{n=0}^N (\pi^2 - 1) \omega_n(t) \cos n\theta.$$

Полученные результаты для единичной ступенчатой нагрузки с помощью интеграла Дюамеля распространялись на ударную волну с экспоненциальным спадом давления (19.10). Вычисления проводились при последовательном увеличении числа членов в рядах. При этом было установлено, что для получения максимальных значений функций с точностью не ниже 5% вполне достаточно десяти членов ряда.

Обратимся к анализу полученных данных. Для расчетного примера была выбрана стальная оболочка с относительной толщиной $h/r_0 = 1/120$ ($c_2^2 = 12,2$; $\pi^2 = 0,062$).

На рис. 62 показана эволюция усилий $N(t)$ в любой точке оболочки ($\theta = 0$) при воздействии на нее единичной ступенчатой волны. Там же нанесено значение среднего усилия $N_0(t)$, вызванного равномерным обжатием оболочки.

Прежде всего отметим, что изменение сжимающих усилий во времени носит колебательный характер. Эти колебания происходят около средних усилий с периодом, равным $T_0 = 2\pi/c_2$.

¹ Составление программы и обработка полученных результатов выполнены А. Я. Рукавицын.

что связано с пробегом упругой волны сжатия по контуру оболочки. Следует указать, что отклонение функции $N(t)$ от среднего значения сравнительно невелико. Необходимо также иметь в виду,

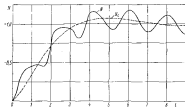


Рис. 62. Увелич. в лобовой точке оболочки при воздействии единичной ступенчатой волны.

что изгибные напряжения по сравнению с деформацией малы. Поэтому для приближенной оценки напряжений в оболочке при воздействии на нее единичной ступенчатой нагрузки достаточно определить

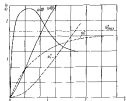


Рис. 63. Скорость движения и поперечное смещение лобовой точки оболочки при воздействии единичной ступенчатой волны.

—— скорость оболочки; — — — абсолютная жесткость оболочки.

На рис. 63 показаны скорость движения и перемещение лобовой точки оболочки при той же нагрузке. По сравнению со скоростью движения цилиндра как твердого тела эта скорость существенно больше. Таким образом, расчет скоростей и ускорений движения оболочки в предположении

ее абсолютной жесткости дает лишь интегральную характеристику процесса в среднем. В отдельных же точках оболочки скорости и ускорения могут значительно отличаться от средних.

Перейдем к анализу картины деформации оболочки в процессе набегания на нее ударной волны. На рис. 64 показаны эволюции

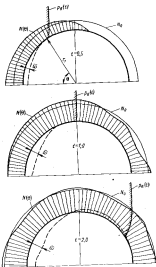


Рис. 64. Эволюция распух и прогиба в процессе взаимодействия с ударной волной ($k=1$).

поперечного усилия N (θ) и нормального прогиба w (θ) в моменты времени $t \sim 0,5; 1,0$ и $2,0$. Нагрузка на оболочку экспоненциальная ($\lambda = 1$). Из рисунка видно, как волна сжатия, распространяющаяся в оболочке со скоростью c_d , постепенно обгоняет фронт нагрузки. Обгон происходит в точке с координатой

$$\theta_1 = \arcsin \frac{1}{c_d}. \quad (19.37)$$

Время прихода волны напряжений в точку, соответствующую углу $\theta > \theta_1$, определяется по формуле

$$t = 1 + \frac{1}{c_d} (\theta - \theta_1) \sim \cos \theta_1. \quad (19.38)$$

Графики также показывают, что нормальный прогиб, в отличие от ценных напряжений, начинает заметно развиваться лишь после того, как фронт волны пройдет рассматриваемую точку.

Следует отметить, что напряженное состояние весьма быстро становится достаточно близким к равномерному. Так, например, при $t = 1$, когда фронт волны достигает середины оболочки, поперечные усилия отличаются от средней величины N_0 не более чем на $+15, -35\%$. В момент полного обтекания оболочки ударной волной ($t = 2$) неравномерность в поперечных усилиях не превосходит $\pm 10\%$. Нормальные прогибы, напротив, распределяются по контуру оболочки неравномерно, причем наибольшая их величина находится со стороны прихода нагрузки.

Обратимся теперь к рис. 66, на котором показано изменение поперечных усилий во времени в точках $\theta = 0, 90$ и 180° . Поставленная экспоненциальная спада принята в расчетах равной $\lambda = 0,25; 1,0$ и 10 . Из графиков следует, что во максимальной величине и импульсу усилия распределяются по контуру оболочки тем равномернее, чем медленнее спад нагрузки за ее фронтом. Так, например, при $\lambda = 0,25$ разброс в максимальных значениях поперечного усилия в различных точках оболочки составляет 60% , при $\lambda = 1 - 18\%$, а при $\lambda = 10$ — всего лишь 5% . Отметим, что при интенсивном спаде нагрузки за фронтом наиболее напряженной точкой является тыльная ($\theta = 180^\circ$). Это объясняется тем, что в момент времени

$$t = t - \cos \theta_1 + \frac{\pi - \theta_1}{c_d}$$

в указанную точку приходят и суммируются волны сжатия с двух сторон. Через некоторое время эти волны пройдут и в любую точку, но их величина значительно уменьшится за счет спада нагрузки. При медленном спаде нагрузки максимальные усилия возникают после того, как волны напряжений несколько раз пробегут по контуру оболочки, что приводит к выравниванию напряжений.

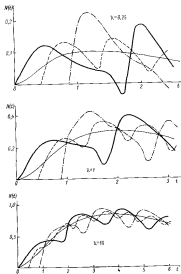


Рис. 66. Эволюция усилий в толкательной оболочке при различных нагрузках.

— $\theta = 0^\circ$; --- $\theta = 90^\circ$; - · - $\theta = 180^\circ$.

Следует особо подчеркнуть, что даже при сравнительно быстром изменении нагрузки шнаны напряжения в цилиндрической оболочке мало отличаются от средних. Это обстоятельство позволяет при $\lambda \gg 1$ ограничиться для грубой оценки напряжений определением лишь средних напряжений, для чего можно воспользоваться формулой (19.11).

Напомним, что при воздействии ударной волны на сферическую оболочку шнаны напряжения во всех ее точках отличаются от средних значительно больше, чем у цилиндра. Это объясняется прежде всего тем, что сферическая оболочка, в отличие от цилиндрической, не может нагнаться без растяжения срединной поверхности. Поэтому роль высших гармоник в формировании напряженного состояния сферы более существенна, чем для цилиндра.

В заключение приведем некоторые зависимости, позволяющие определить дифракционное давление и давление излучения без суммирования рядов. Правда, эти соотношения справедливы, вообще говоря, только в небольшом промежутке времени, однако при решении отдельных частных вопросов они могут быть полезны.

Вспользуемся асимптотическим выражением для цилиндрических функций при больших значениях аргумента [23]:

$$K_n(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + \frac{4n^2 - 1}{8x} + \dots \right]. \quad (19.39)$$

Тогда для функций

$$m_n(s) = \frac{1}{\pi + s} \frac{K_{n+1}(s)}{K_n(s)}$$

путем деления одной цилиндрической функции на другую можно получить следующую зависимость:

$$m_n(s) \approx \frac{1}{s + 0.5 - 0\left(\frac{1}{s}\right)}. \quad (19.40)$$

Используем эту формулу для определения дифракционного давления. Подставим (19.40) в формулу (18.24), получим следующее выражение для изображения дифракционного давления:

$$p^{dl}(\theta, t) = [p_n^L]_{n=1}^{\infty} - [p_n^L]_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s + 0.5}. \quad (19.41)$$

Положив, что на цилиндр действует единичная ударная волна ступенчатого профиля и применяя во внимание формулу (18.34), будем иметь

$$p^{dl}(\theta, t) = \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s + 0.5} \cos \theta \right] e^{-(1 - \cos \theta)t}. \quad (19.42)$$

Оригинал этого выражения находится без труда. В итоге получим следующую весьма простую формулу для дифракционного давления:

$$p^d(\theta, t) = \left[1 + e^{-t} \cos \theta \right] \sigma(t), \quad (19.43)$$

где

$$t_1 = t - 1 + \cos \theta. \quad (19.44)$$

Заметим, что при $t \rightarrow 0$ данная зависимость в соответствии с исходными предположениями стремится к точному решению. Сопоставление расчетов по формуле (19.43) с частичной суммой ряда (18.31), в котором удерживались семь членов, показывает, что и при больших значениях времени она дает удовлетворительные результаты (рис. 56). Нетрудно дать физическое объяснение этому обстоятельству. Дело заключается в том, что при больших значениях t основной вклад в сумму ряда (18.31) дают гармонические с малым номером n , а для них формула (19.40) не так уж далека от точного решения. В этом можно убедиться, сравнив оригинал функции (19.40)

$$\psi(t) = e^{-t}$$

с единичной функцией сопротивления $\Phi_0(t)$ и $\Phi_1(t)$ (рис. 57).

Следует указать, что формула для дифракционного давления, действующего на неподвижный жесткий цилиндр, была впервые получена Ю. А. Федоровичем. При ее выводе Ю. А. Федорович исходил из иных предположек и рекомендовал брать показатель экспоненциальной функции в формуле (19.43) равным 0,71. Нетрудно убедиться в том, что в этом случае формула (19.43) будет несколько лучше совпадать с точным решением при больших t , но перестанет быть точной при малых t , во это большое практическое значение не имеет, так как погрешность будет мала.

Асимптотическое поведение функций $m_n(s)$ при $s \rightarrow \infty$ можно описать не только формулой (19.40), но и следующей зависимостью:

$$m_n(s) \approx \frac{1}{s} - \frac{1}{2s^2} + 0\left(\frac{1}{s^3}\right). \quad (19.45)$$

Тогда для дифракционного давления вместо формулы (19.43) получим такое выражение:¹

$$p^d(\theta, t) = \left[1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) \cos \theta \right] \sigma(t_1). \quad (19.46)$$

Данная формула пригодна для расчетов при $t_1 \leq 2$. При $t_1 > 2$ следует принять $p^d(\theta, t) = 1$. Эпюры результирующего давления, вычисленные по формуле (19.46), также показаны на рис. 56.

¹ Формула (19.46) принадлежит О. К. Федоровичу.

Зависимости (19.40) и (19.45) можно применить и при определении давления излучения. Не приводя промежуточных выкладок, которые являются достаточно очевидными, запишем окончательные результаты. Применив формулу (19.40), будем иметь

$$p^+(0, t) = -e^{-\sigma t} \int_0^t \ddot{w}(0, \tau) e^{\sigma \tau} d\tau. \quad (19.47)$$

В случае использования выражения (19.45) приходим к следующей формуле:

$$p^+(0, t) = \frac{1}{2} \dot{w}(0, t) - \dot{w}(0, t) \quad (\text{при } t \ll 2). \quad (19.48)$$

Отметим, что формулы (19.47) и (19.48) аналогичны зависимостям (17.20) и (17.21) для сферы. Следовательно, им присущи недостатки, которые подробно разбирались в § 17 на примере сферы. Напомним еще раз, что надежные результаты формулы (19.47) и (19.48) дают только при малых t . При плавкой деформации оболочки границы их применимости расширяются, при резком изменении профилей — сужаются. Заранее предсказать область их пригодности невозможно. Несмотря на это, в отдельных случаях данные зависимости могут быть полезны.

Глава IV

БОЛЕЕ СЛОЖНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ГИДРОУПРУГОСТИ ОБОЛОЧЕК

§ 20. Постановка задачи

В двух предыдущих главах нестационарные задачи гидроупругости рассматривались на основе относительно простых математических моделей процесса. Решающим обстоятельством при этом была простота конфигурации областей, в которых задавались операторы соответствующих краевых задач (области, обладающие цилиндрической или сферической симметрией). Это позволило в конечном итоге свести задачу расчета движущей оболочки, сопрягающейся с жидкостью, к решению независимых друг от друга систем двух или даже одного обыкновенного дифференциального уравнения.

В данной главе изучается более общий случай, когда вынужденное движение оболочек, сопрягающихся с жидкостью, описывается бесконечной системой взаимосвязанных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

К интегрированию таких уравнений сводится, как правило, решение задачи расчета колебаний системы оболочки—жидкость конечного размера и оболочек, несущих на себе какое-либо дополнительные элементы типа ребер жесткости, грузов и пр. Система уравнений движения обычно составляется на основе либо уравнений Лагранжа второго рода, либо метода Бубнова—Галеркина. Подтая, что для наиболее важной части решения достаточно сохранить конечное число уравнений, мы ограничимся рассмотрением усеченных систем. Посредством, позволяющих при усечении бесконечных систем, очень трудно оценить строго. Что же касается практических оценок, то их обычно удается получить, поскольку устойчивость решения системы по отношению к числу оставленных в системе уравнений.

В матричной форме систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений можно записать следующим образом:

$$A\ddot{Q} + B\dot{Q} + CQ = F, \quad (20.1)$$

где A, B, C — соответственно квадратные матрицы инерции, затухания и восстановления; Q — столбец обобщенных координат, определяющих движение оболочки; F — столбец заданных возмущающих функций. Точкой обозначено дифференцирование по времени t . В общем случае же матрица затухания, не матрица восстановления, не даже матрица инерции не являются симметрическими и, кроме того, элементы этих матриц зависят от времени. Для консервативных систем (систем конечного размера без учета затухания) уравнение (20.1) приводится к виду

$$A\ddot{Q} + CQ = F, \quad (20.2)$$

где A и C — симметрические матрицы с постоянными элементами. Наиболее естественный способ решения систем (20.1) или (20.2), включающая большое число обыкновенных дифференциальных уравнений, — численное решение на ЭВМ с помощью методов конечных разностей (методы Эйлера, Рунге—Кутты и т. д.). Такой подход оказывается особенно полезным в задачах о неустойчивающемся движении, где желательно определить первое максимальное значение смещения, напряжения и пр.

Для последующего численного категорирования на ЭВМ уравнение (20.1) при помощи введения вспомогательных неизвестных функций приводится к эквивалентной канонической системе уравнений первого порядка. Если в качестве вспомогательных неизвестных взять элементы матрицы-столбца $P = A\dot{Q}$, то уравнение (20.1) преобразуется к виду

$$\begin{bmatrix} \dot{Q} \\ \dot{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A^{-1} \\ -C & -BA^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}, \quad (20.3)$$

где A^{-1} — матрица, обратная матрице A . В настоящее время существует ряд стандартных программ для обращения матриц на ЭВМ.

Иногда в качестве вспомогательных неизвестных принимают обобщенные скорости

$$P = \dot{Q}.$$

Эквивалентной системой первого порядка будет тогда

$$\begin{bmatrix} \dot{Q} \\ \dot{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ A^{-1}F \end{bmatrix}, \quad (20.4)$$

где E — единичная матрица.

Рассмотрим несколько задач, решение которых сводится к интегрированию систем (20.1) либо (20.2).

Сосуд в виде тонкостенной ортотропной цилиндрической оболочки конечной длины полностью или частично заполнен жидкостью. Жидкость ограничена снизу жестким дном, сверху — свободной поверхностью.

Давление на деформируемую оболочку изменяется по закону $p^0(x, y)$. Исследование реакции сосуда на осесимметричную нагрузку ограничим рамками основного типа колебаний, вносящего доминирующий вклад в радиальное смещение оболочки (§ 4). Положим, что параметры системы таковы, что в пределах основного типа колебаний можно использовать гипотезу несжимаемости жидкости. Возможность такого подхода должна быть согласована с условием (11.17). Инерционность стенок сосуда в основном направлении учитывать не будем, пользуясь полученным в первой главе выводом, что она практически не влияет на радиальные колебания цилиндрической оболочки с жидкостью. Не будем принимать во внимание и силы гравитационного происхождения, как не имеющие существенного значения.

Рассматриваемая система является консервативной. Поэтому уравнение ее движения приводится к виду (20.2). При расчете элементов матриц инерции A , восстановления C и возмущений F воспользуемся методом канонического преобразования Фурье с конечными пределами. Для случая, когда сосуд заполнен жидкостью полностью по верхнюю кромку, воспользуемся, кроме того, и методом Бубнова—Галеркина.¹ Как и в § 6, положим, что в первом случае (см. рис. 13) верхний конец оболочки имеет шарнирно-подвижную опору, а нижний — зашпечен вдоль кромки дном; во втором случае (рис. 10, в) будем считать, что оба конца имеют шарнирное опирание. Такой выбор граничных условий продиктован соображениями простоты расчета.

Используя относительную систему единиц, взвешивая, примем в качестве основных единиц приведенную толщину слоя жидкости ($1 = H = r_0/2 \rightarrow 1$), массовую плотность жидкости ($\rho = 1$) и скорость распространения волны давления в рамках прикладной теории гидравлического удара, которая в последующем для сокращения зависит именуется просто скоростью гидроудара ($c = c_1 = 1$) — см. § 4.

¹ Метод канонического преобразования Фурье с конечными пределами и метод Бубнова—Галеркина уже рассмотрены в § 6 применительно к задаче расчета свободных колебаний оболочки с жидкостью. Понятию автора системы колебаний здесь не оставалось места из-за некоторых деталей этих методов, отсюда читатель к ознакомлению параграфу.

Сначала построим решение для динамической реакции полностью замкнутого сосуда, используя метод Бубнова—Галеркина. Применяя обозначения, приведенные в § 4 и 6, запишем уравнение в граничных условиях задачи

$$\left(1 + k_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \psi + \pi^2 \omega = \rho^0(x, t); \quad (21.1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0; \quad (21.2)$$

$$|\psi|_{x=0} = 0; \quad (21.3)$$

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial r}\right]_{r=0} = -\omega(x, t); \quad (21.4)$$

$$|\omega|_{x=0}, i_1 = \left[\frac{\partial \omega}{\partial x}\right]_{x=0}, i_1 = 0. \quad (21.5)$$

Неоднородная краевая задача (21.1)–(21.5) отличается от соответствующей однородной задачи, рассмотренной в § 6, наличием члена $\rho^0(x, t)$ в правой части уравнения (21.4), $\rho^0 > 0$, если давление на оболочку направлено внутрь сосуда.

Потребуем, чтобы граничное условие для ψ при $x = l_1$ удовлетворялось лишь в среднем, т. е. чтобы выполнялось равенство (см. § 6)

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}\right]_{x=l_1} r dr = 0. \quad (21.6)$$

Смещение $\omega(x, t)$ представим разложением

$$\omega = \sum_{k=1}^N q_k(t) \sin \alpha_k x, \quad (21.7)$$

где $q_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) — функции времени, подлежащие определению, $\alpha_k = k\pi/l_1$ — волновое число. Потенциал $\psi = -\varphi(x, r, t)$, соответствующий смещению (21.7), запишем в виде (см. § 6)

$$\varphi = - \sum_{k=1}^N q_k \left[\frac{\sin \alpha_k x}{\alpha_k} \frac{I_0(\alpha_k r)}{I_1(2\alpha_k)} + (-1)^{k+1} \frac{x}{\alpha_k} \right]. \quad (21.8)$$

Это выражение удовлетворяет уравнению (21.2) и граничным условиям (21.3), (21.4), (21.6). Теперь оставим ряды (21.7) и (21.8) и уравнение (21.1). Запишем его коротко в виде $M(q) - \rho^0 = 0$, потребуем, чтобы оно удовлетворялось в смысле метода Бубнова—Галеркина

$$\int_0^1 \int_0^1 [M(q) - \rho^0] \sin \alpha_s x dx dr = 0 \quad (s = 1, \dots, N).$$

Отсюда получим систему N неканонических неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (20.2) с симметрическими матрицами инерции A и восстановления C . Элементы матрицы A

$$a_{jk} = \delta_{jk} \left[\pi^2 + \frac{1}{\alpha_k} \frac{I_0(2\alpha_k)}{I_1(2\alpha_k)} \right] + \frac{2(-1)^{k+1}}{\alpha_k \alpha_j}, \quad (21.9)$$

Элементы матрицы C

$$c_{jk} = \delta_{jk} (1 + k_1 \alpha_k^2 + k_2 \alpha_k^2), \quad (21.10)$$

Элементы матрицы F

$$F_s = \frac{2}{l_1} \int_0^1 \rho^0(x, t) \sin \alpha_s x dx. \quad (21.11)$$

В (21.9) и (21.10) δ_{jk} — символ Кронекера, т. е. $\delta_{jk} \sim 1$ при $s = k$, $\delta_{jk} = 0$ при $s \neq k$.

Каноническая система первого порядка, эквивалентная системе (20.2),

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= A^{-1}P, \\ P &= -CQ + F. \end{aligned} \quad (21.12)$$

В качестве примера решения системы (21.12) с элементами матриц (21.9), (21.10) и (21.11) рассмотрим радиальное движение дюралюминиевой изотропной оболочки, заполненной водой ($k_1 = -1,4667/r_0^2$, $\pi^2 = 5,664/r_0$, $k_2 = 0$), при действии на сосуд в течение времени t_0 возмущенной постоянной осевой перегрузки ω_0 . Направление перегрузки совпадает с отрицательным направлением оси x (см. рис. 10, а). Давление $\rho^0(x, t)$, соответствующее этому варианту загрузки сосуда, линейно возрастает с глубиной и равно нулю на свободной поверхности жидкости ($x = 0$). Начальные условия — нулевые. Влияние осевой перегрузки на движение оболочки можно проследить, задаваясь давлением $\rho^0(x, t)$ в виде

$$\rho^0(x, t) = \sigma (I_0 - t) \sigma(\alpha_1 x), \quad (21.13)$$

где σ — единичная ступенчатая функция. В этом случае безразмерная величина $\omega(x, t) = \sum_{k=1}^N q_k(t) \sin \alpha_k x$, являющаяся решением задачи, оказывается равной отношению динамического радиального смещения к статическому смещению безмассовой оболочки под действием наибольшего давления (давления ρ_0 при $t=0$). Поэтому при задании давления выражением (21.13) максимальные по времени значения функции $\omega(x, t)$ $|\omega_m(x)|$ можно трактовать как коэффициент динамичности нагрузок, зависящий от абсциссы x .

Элементы столбца возмущающих функций F , соответствующие нагрузке (21.13), имеют вид

$$F_n = \frac{2}{\pi n} (-1)^{n+1} \sigma (t_n - t) \sigma(t). \quad (21.14)$$

Приведем отдельные результаты вычислений, выполненных на ЭВМ. При интегрировании уравнений (21.12) с нулевыми началь-

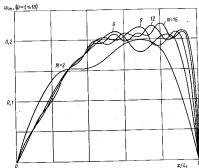


Рис. 65. Зависимость W от t ($0 \leq t \leq 10$), рассчитанная при различных значениях N для деформированной оболочки с жест $(r_1/h = 200, l_0/r_1 = \pi)$.

ным условиям использовалась стандартная программа метода Рунге—Кутты.

На рис. 66 показаны зависимости $W_n(x/l_0)$ в интервале $0 \leq t \leq 10$ для $N = 3, 6, 9, 12$ и 15 при $l_0/r_1 = \pi$ и $r_1/h = 200$, свидетельствующие об относительно слабой сходимости приближенного решения $W_n(x)$ с точным по мере роста числа уравнений в системе (20.2). Значительно лучше ряд (21.7) сходится по наибольшей величине коэффициента динамичности $W = \max W_n$ (глобальный коэффициент динамичности), что можно видеть из табл. 5, рассчитанной для интервала времени $0 \leq t \leq 50$.

Дальнейшее расширение интервала t по сравнению с (0, 50) не влияет на величину W . Сходимость ряда (21.7) улучшается по мере

Таблица 5

N	3	6	9	15
W	0,2468	0,2574	0,2627	0,2639

уменьшения относительной длины оболочки l_0/r_1 и, особенно, увеличения относительной толщины h/r_1 .

В табл. 6 показана зависимость глобального коэффициента динамичности W ($N = 18$) от отношения продолжительности действия нагрузки t_n к периоду колебания первого тона T , рассчитанному в рамках теории динамных волн ($T = 4l_0$). В разбираемом примере $T' = 8\lambda$. Помимо варианта $r_1/h = 200$ рассмотрен случай $r_1/h = 100$.

Таблица 6

t_n/T	1/8	1/4	1/2	3/4	1	
$\frac{r_1}{h} = 200$	0,263	0,526	0,738	1,415	2,065	2,069
$\frac{r_1}{h} = 100$	0,232	0,467	0,717	1,360	1,949	2,069

Изучая табл. 6, легко заметить, что величину W с точностью, до нескольких процентов можно аппроксимировать формулой

$$W = \begin{cases} 2 \sin(\pi t_n/T) & \text{при } t_n < T/2, \\ 2 & \text{при } t_n \geq T/2. \end{cases}$$

совпадающей с выражением для коэффициента динамичности нагрузки $\sigma(t_n - t)$, действующей на дискретную систему с одной степенью свободы.

На рис. 67 показан вид функций $W_n(x)/W$ при различных значениях t_n/T . Расчеты выполнены для оболочки с отношением размеров $l_0/r_1 = \pi$ и $r_1/h = 200$. Как видно, характер изменения наибольшего нагружения оболочки по длине резко меняется с изменением времени действия нагрузки и интервале $0 < t_n < T/2$. При $t_n > T/2$ функция $W_n(x)/W$ растет почти линейно с увеличением заглубления сечения x . Чем меньше t_n (по сравнению с $T/2$), тем равномернее по длине нагружается оболочка. На рис. 68, а и б, показаны формы радикального сжатия оболочки $w(x)$.

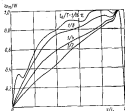


Рис. 67. Зависимость w_0/W от t , рассчитанная при различных предположениях жесткости деформируемой нагрузки l_1 для деформационной оболочки с радиусом $(r_1/h = 200, l_1/r_1 = \pi)$.



Рис. 68. Формы радиального смещения деформационной оболочки с радиусом $r_1/h = 200, l_1/r_1 = \pi/2$, соответствующие различным моментам времени t ($l_1 = 0,5$): а — внешний контур оболочки шарнирно опирается; б — внешний контур оболочки закреплён.

рассчитанные для различных моментов времени t . Рис. 68, а соответствует $l_1 = 0,5$, рис. 69, а — $l_1 = \infty$.

Теперь составим уравнения движения оболочки с жидкостью, применяя метод интегральных преобразований Фурье с конеч-

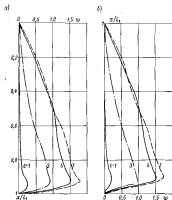


Рис. 69. Формы радиального смещения деформационной оболочки с радиусом $r_1/h = 200, l_1/r_1 = \pi/2$, соответствующие различным моментам времени t ($l_1 = \infty$): а — внешний контур оболочки шарнирно опирается; б — внешний контур оболочки закреплён.

ными пределами. Пусть l_2 — высота столба жидкости в баке; l_1 — длина оболочки. Начало отсчета вдоль полярной оси x совмещим с движением. Поступая по аналогии с приемом, уже использованным нами при построении метода расчета свободных колебаний (см. § 6), продолжим мысленно бак с жидкостью, отобразив его в область отрицательных значений x (см. рис. 13). Воспользуемся относительной системой единиц измерения ($c = c_1 = 1$,

$I = H = r_1/2 = 1$, $\rho = 1$), выпишем уравнения и граничные условия задачи

$$(1 + k_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \varphi + \pi^2 \varphi - [\varphi]_{x=0} = \\ = 2Y\delta(x) + p^0(x, t); \quad (21.15)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0; \quad (21.16)$$

$$[\varphi]_{x=0} = [\varphi]_{x=1}, \quad -\varphi = 0; \quad (21.17)$$

$$[\partial \varphi / \partial r]_{x=0} = -\dot{\varphi}(x, t); \quad (21.18)$$

$$[\varphi]_{x=1}, -\varphi = [\partial^2 \varphi / \partial x^2]_{x=1}, -\varphi = 0; \quad (21.19)$$

$$[\varphi]_{x=0} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{x=0} = 0, \quad (21.20)$$

где $Y = Y(t)$ — интенсивность переменной во времени радиальной силы, действующей со стороны дна на колеблющуюся оболочку, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Давление $p^0(x, t)$ — четная функция переменной x .

Неоднородная краевая задача (21.15)–(21.20) отличается от соответствующей однородной задачи (6.60)–(6.65) наличием члена $p^0(x, t)$ в правой части уравнения (21.15); $p^0 > 0$, если давление на оболочку направлено внутрь сосуда. Процедура, связанная с применением преобразования Фурье к расчету свободных колебаний заполненных цилиндрических оболочек, подробно рассмотрена в § 6. Применяя ее без изменения к неоднородной задаче (21.15)–(21.20), получим систему N уравнений типа (20.2) с симметричными матрицами инерции A и восстановления C .

Элементы матрицы A

$$a_{nn} = \pi^2(1 + \delta_{nn}) + k_{nn} - k_{n+1, n} - k_{n, n+1} + k_{n+1, n+1}. \quad (21.21)$$

Элементы матрицы C

$$c_{nn} = (1 + k_2 \alpha_n^4 + k_2 \alpha_n^2) \delta_{nn} + 1 + k_2 \alpha_{n+1}^4 + k_2 \alpha_{n+1}^2. \quad (21.22)$$

Элементы матрицы F

$$F_n = \frac{2}{r_1} \left[\int_0^1 p^0(x, t) \cos \alpha_n x dx - \int_0^1 p^0(x, t) \cos \alpha_{n+1} x dx \right]. \quad (21.23)$$

В (21.21)–(21.23) k_{nn} — величины, определяемые формулой (6.78); $\alpha_n = (2n - 1)\pi/2I_1$; δ_{nn} — символ Кронекера. Отметим, что в отличие от первого решения, рассмотренного в этом параграфе, здесь граничные условия для φ на донце удовлетворяются точно,

В случае изотропной оболочки, полностью заполненной жидкостью, элементы (21.21) и (21.22) приводятся к виду

$$a_{nn} = \delta_{nn} \left[\pi^2 + \frac{1}{\alpha_n} \frac{I_2(2\alpha_n)}{I_1(2\alpha_n)} \right] + \pi^2 + \frac{1}{\alpha_{n+1}} \frac{I_2(2\alpha_{n+1})}{I_1(2\alpha_{n+1})}; \quad (21.24)$$

$$c_{nn} = \delta_{nn} (1 + k_2 \alpha_n^4 + k_2 \alpha_n^2) + 1 + k_2 \alpha_{n+1}^4 + k_2 \alpha_{n+1}^2. \quad (21.25)$$

Если мгновенно приложенная и действующая в течение времени t_0 нагрузка на стенку цилиндра линейно возрастает с глубиной

$$p^0(x, t) = \sigma(t_0 - t) \sigma(t(1 - x/I_1)),$$

то

$$F_n = \frac{8}{2\pi^2} \left[\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2N+1)^2} \right] \sigma(t_0 - t) \sigma(t). \quad (21.26)$$

Приведем некоторые результаты интегрирования на ЭВМ системы (21.12), в которой элементы матриц вычислялись по формулам (21.24), (21.25) и (21.26) применительно к дюралюминиевой оболочке с водой ($k_1 = 1,466k^2/r_1^2$, $\pi^2 = 5,6h/r_1$, $k_2 = 0$). На рис. 68, б и 69, б показаны формы радиального смещения оболочки

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{N+1} q_n(t) \cos \alpha_n x \quad (N=18), \quad (21.27)$$

рассчитанные для различных моментов времени t .

Рис. 68, б соответствует $t_0 = 0,5$, рис. 69, б — $t_0 = \infty$. Параметр оболочки $r_1/k = 200$, $I_1/r_1 = \pi/2$. В (21.27) $q_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots, N$) — решения системы (20.2), $q_{N+1}(t) = -\sum_{n=1}^N q_n(t)$.

Сопоставление кривых рис. 68, а, б с кривыми рис. 69, а, б, соответствующим одним и тем же исходным данным, свидетельствует о практическом совпадении результатов расчета вынужденных колебаний системы, полученных в рамках различных подходов к решению задачи. Некоторое отличие в кривых $\varphi(x, t)$ наблюдается лишь в зоне крайнего эффекта, примыкающего к донцу сосуда. Если учесть, что в одном случае принималось, что внутренний торс оболочки имеет шарнирное опирание, а в другом — защемление, то из приведенного сравнения напрашивается вывод, что замена точного граничного условия для φ на донце (условие его воспроизводимости) приближенным (21.6) не может оказать заметного влияния на точность решения задачи.

В заключение приведем результаты расчета колебаний сосуда со стенкой повышенной толщины ($r_1/k = 50$, $I_1/r_1 = \pi/2$, $N = 18$). Увеличение толщины стенки улучшает сходимость ряда (21.27). Длительность действия нагрузки $t_0 = 0,5$. Амплитуды высших

гармоник в этой задаче (начиная с $n = 16$) оказываются меньше на 3 порядка амплитуды первой (основной) гармоники. Результаты расчета для ряда фиксированных значений τ показаны на рис. 70.

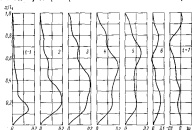


Рис. 70. Формы радиального смещения циллиндрической оболочки с полостью ($r_0/l_0 = 10$, $l_0/r_0 = \pi/2$), соответствующие различным моментам времени τ . Продолжительность действия нагрузки $t_0 = 0.5$.

§ 22. Влияние упругости дна на колебание цилиндрического сосуда с жидкостью

Условно только что полученное решение учетом упругости сферического дна. Будем считать дно жестким настолько, что при определении потенциала скоростей граничные условия на нем для φ можно перенести на плоскость $x = 0$ (см. рис. 13). Иди этим путем Ю. Г. Балакирев [61] рассмотрел осесимметричные свободные колебания полостей сферической оболочки, служащей дном для цилиндрической полости с абсолютно жесткими стенками, заполненной жидкостью на глубину l_0 . Автор исследования [61] обнаружил, что глубина жидкости оказывает влияние лишь на колебание первого тона. Частота второго и более высоких тонов практически не зависит от глубины жидкости. Если принять, что жесткость дна (на жестком подпору) таково, что отсутствует возможность обniżения его кромок, то, как показал Балакирев, частота колебаний первого тона может рассчитываться по формуле

$$\Omega = \sqrt{\frac{2\Gamma h_0}{l_0 R^2 (1-\nu)}} \quad (22.1)$$

(h_0 , R — толщина и радиус кривизны дна).

Легко видеть, что тот же результат можно получить, заменив полую сферическую оболочку невесомым жестким поршнем на пружине с жесткостью $\frac{2E h_0 \pi r_0^2}{R^2 (1-\nu)}$.

К этому же выводу можно прийти, если ориентироваться на работу Р. Е. Лампера [35], который рассмотрел осесимметричные колебания наполненного бака с дном в виде разогнутой сферической безмембранной оболочки.

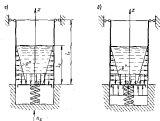


Рис. 71. К расчету влияния упругости дна на колебание оболочки с жидкостью.

Желая учесть лишь практически важную часть решения при исследовании влияния упругости подложного дна на колебание цилиндрического сосуда с жидкостью, мы с самого начала будем полагать, что полость сосуда замыкается снизу невесомым подпружиненным поршнем (рис. 71).

Пусть $w_0 = w_0(t)$ — закон движения поршня ($w_0 > 0$ при смещении поршня внутрь полости). Составляющая потенциала скорости жидкости, соответствующая движению дна,

$$\Delta \varphi = -w_0 \frac{\partial}{\partial x} (1 - x/l_0) = -w_0 \frac{2}{l_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_n x}{\beta_n^2} \quad (22.2)$$

где

$$\beta_n = \frac{2n-1}{2l_0} \pi.$$

Суммируя (22.2) и (5.76), получим полный потенциал скорости возмущенного колебания оболочки движения жидкости

$$q = - \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{q}_k \frac{\cos \beta_{kx}}{\beta_k} - \frac{I_2}{I_1} \frac{(\ddot{q}_M)}{(2\beta_k)} - \ddot{\omega}_0 \frac{2}{I_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_{kx}}{\beta_k^2}, \quad (22.3)$$

где

$$q_k = \ddot{\omega}_0^{(k)}.$$

Используя (22.3), получим вместо (5.77)

$$[\psi_1^{(k)}]_{x=2} = - \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{q}_k k_{k0} - \ddot{\omega}_0 \frac{2}{I_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{k0}}{\beta_k^2}, \quad (22.4)$$

С учетом (22.4) уравнение вынужденного движения цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью (21.15), после применения к нему интегрального преобразования Фурье (5.66) с конечными пределами $-1 \leq x \leq 1$ приводится к системе обыкновенных неоднородных линейных дифференциальных уравнений

$$(1 + k_1 \alpha_k^4 + k_2 \alpha_k^2) \ddot{q}_k + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n k_{kn} + \ddot{\omega}_0 \frac{2}{I_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{kn}}{\beta_n^2} = - \frac{2\gamma}{I_1} + \frac{2}{I_1} \int_0^1 p^0(x, t) \cos \alpha_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (22.5)$$

Уравнение движения невесомого жесткого поршня в относительной системе единиц измерения ($c_1 = 1$, $\rho = 1$, $r_2/2 = 1$) получим, приравняв силу упругости пружины суммарной силе давления на поршень,

$$k_3 \delta \omega_0 = \int_0^1 p^0(r, t) r dr + \int_0^1 |\dot{q}|_{x=0} r dr, \quad (22.6)$$

где

$$k_3 = \frac{2}{1-\mu} \frac{b_0}{\delta} \frac{r_1^2}{R^2}. \quad (22.7)$$

$p^0(r, t)$ — давление на длине без учета деформации оболочек, составляющих сосуд; $p^0 > 0$, если оно направлено внутрь полости. Подстановка (22.3) в (22.6) приводит к уравнению

$$\frac{4b_0}{I_0} \ddot{\omega}_0 + 4\pi \ddot{\omega}_0 + \frac{2}{I_0} \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{q}_k \frac{d_{k0}}{\beta_k^2} = \frac{1}{I_1} \int_0^1 p^0(r, t) r dr, \quad (22.8)$$

Переходя от бесконечной системы уравнений (22.5), (22.8) к усеченной и устранив из нее величины $\ddot{U}$ с помощью процедуры, рассмотренной в § 6 в связи с применением метода интегрального преобразования Фурье с конечными пределами к расчету свободных колебаний оболочки с жидкостью, мы снова приходим к системе (20.2) с симметрическими матрицами инерции A и восстановления C порядка N .

Элементы матрицы A

$$a_{m, n} = m^2 (1 + \delta_{mn}) + (k_{mn} - k_{nm} - k_{nm} + k_{nm})$$

$$a_{m, N} = - \frac{2}{I_0} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\beta_n^2} (d_{mn} - d_{Nm}); \quad (22.9)$$

$$a_{N, N} = - \frac{2}{I_0} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\beta_n^2} (d_{nn} - d_{Nn})$$

$$a_{NN} = 4\pi.$$

Элементы матрицы C

$$c_{m, n} = (1 + k_1 \alpha_m^4 + k_2 \alpha_n^2) \delta_{mn} + 1 + k_1 \alpha_m^4 + k_2 \alpha_n^2; \quad (22.10)$$

$$c_{m, N} = 0;$$

$$c_{N, N} = \delta_{NN} k_3 \frac{4\pi}{I_0}.$$

Элементы матрицы F

$$F_k = \frac{2}{I_1} \left[\int_0^1 p^0(x, t) \cos \alpha_k x dx - \int_0^1 p^0(x, t) \cos \alpha_N x dx \right]; \quad (22.11)$$

$$F_N = \frac{4\pi}{I_0} \int_0^1 p^0(r, t) r dr.$$

Радиальное смещение оболочки

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{N-1} q_k \cos \alpha_k x - \cos \alpha_N x \sum_{k=1}^{N-1} q_k. \quad (22.12)$$

Смещение дна

$$\omega_0(t) = q_N(t). \quad (22.13)$$

В случае изотропной оболочки, разгруженной от осевой статической силы и полностью заполненной жидкостью, элементы (22.9) и (22.10) приводятся к виду

$$\begin{aligned} a_{\alpha N} &= \delta_{\alpha N} \left[\pi^2 + \frac{1}{\alpha_N} \frac{I_0(2\alpha_N)}{I_1(2\alpha_N)} \right] + \pi^2 + \frac{1}{\alpha_N} \frac{I_0(2\alpha_N)}{I_1(2\alpha_N)}; \\ a_{\alpha N} &= \frac{2}{I_1} \left(\frac{1}{\alpha_N^2} - \frac{1}{\alpha_N} \right); \\ a_{\alpha N} &= \frac{2}{I_1} \left(\frac{1}{\alpha_N^2} - \frac{1}{\alpha_N} \right); \\ a_{NN} &= 4\pi; \end{aligned} \quad (22.14)$$

$$\begin{aligned} c_{\alpha N} &= \delta_{\alpha N} (1 + k_0 \alpha_N^4) + 1 + k_0 \alpha_N^4; \\ c_{\alpha N} &= 0; \\ c_{NN} &= \delta_{NN} k_0 \frac{4\pi}{I_1}. \end{aligned} \quad (22.15)$$

Если мгновенно приложенная и действующая в течение времени t_0 нагрузка на стенку цилиндра линейно возрастает (по абсолютной величине) с глубиной

$$p^0(x, t) = -\sigma(t_0 - t) \sigma(t) (1 - x/I_2) \quad (a)$$

и, кроме того, давление на днище

$$p^0(r, t) = -\sigma(t_0 - t) \sigma(t), \quad (b)$$

то

$$F_{\alpha N} = -\frac{8}{\pi^2} \left[\frac{1}{(2\alpha - 1)^2} - \frac{1}{(2\alpha - 1)^2} \right] \sigma(t_0 - t) \sigma(t); \quad (22.16)$$

$$F_N = -\frac{4\pi}{I_1} \sigma(t_0 - t) \sigma(t). \quad (22.17)$$

Варианты нагружения (а), (б) соответствуют передаче осевой нагрузки на сосуд с жидкостью через его стенки (рис. 71, а). Если мгновенно приложенная и действующая в течение времени t_0 нагрузка передается на сосуд с жидкостью через днище (рис. 71, б), то в рамках принятых допущений

$$p^0(r, t) = 0, \quad p^0(x, t) = -\sigma(t_0 - t) \sigma(t) (1 - x/I_2). \quad (a)$$

Выражение (22.16) остается без изменений. Вместо (22.17) следует положить

$$F_N = 0.$$

Рассмотрим отдельные результаты расчета переходных процессов в дюралюминиевой оболочке с водой ($k_1 = 1.466E^0/I_1^2$, $\pi^2 \approx 5.66/I_1$, $k_2 = 0$, $I_2 = I_1$), учитывающего упругость сферического пологого дна. Нагружение осуществляется по схеме, изображенной на рис. 71. Закон изменения давления на жесткую стенку и днище соответствует вариантам (а), (б); $N = 18$.

Параметры оболочки: $r_1/h = 200$, $I_1/r_1 = \pi/2$. На рис. 72 показаны графики переходных процессов $w(t)$ в сечении оболочки с абсциссой $x = I_1/10$, рассчитанные при различных значениях параметра

$$k_0 = \frac{2}{1-\mu} \frac{h_0}{h} \frac{r_1^2}{R^2} \quad (0 \leq k_0 \leq 10, \quad I_2 = 10). \quad \text{Как видно, упругость дна оказывает существенное влияние на динамику системы, особенно в области малых величин } k_0. \text{ На рис. 73 проверена зависимость глобального коэффициента динамичности нагрузки на оболочку } W \text{ (см. § 21) от величин } k_0.$$

Рис. 72. Графики переходных $w(t)$, $\dot{w}$ при различных значениях k_0 .

1 — $k_0 = 0$; 2 — $k_0 = 2$; 3 — $k_0 = 1$; 4 — $k_0 = 0.75$; 5 — $k_0 = 0.5$; 6 — $k_0 = 0.25$; 7 — статическое смещение.

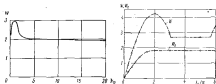


Рис. 73. Зависимость W от k_0 , рассчитанная для дюралюминиевой оболочки с водой ($r_1/h = 200$, $I_2/r_1 = \pi/2$).

Рис. 74. Зависимость W и W_0 от t_0 для дюралюминиевой оболочки с водой ($r_1/h = 200$, $I_2/r_1 = \pi/2$, $k_0 = 1$).

чами k_0 . Расчеты произведены при $t \in (0; 35)$, $t_0 = 35$. В окрестности $k_0 = 1$ коэффициент динамичности нагрузки превышает примерно на 50% значение W , соответствующее использованному в расчете модели: обесконечно жесткое днище.

Характер зависимости коэффициентов динамичности нагрузки на оболочку $\bar{W}$ и на длину $\bar{W}_0$ от величины t/t_0 при $k_0 = 1$ показан на рис. 74 ($0 \leq t/t_0 \leq 36$). Функция $\bar{W}(t/t_0)$ имеет участки возрастания и убывания, $\bar{W}_0(t/t_0) \sim$ монотонно возрастающая функция времени. В некоторых диапазонах изменения продолжительности действия нагрузки t/t_0 величина $\bar{W}$ сохраняет постоянное значение.

$\bar{W}_0(t/t_0) \sim \bar{W}(t/t_0)$

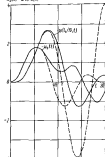


Рис. 74. Графики для определения коэффициентов динамичности нагрузки на оболочку с жесткой (при $k_0 = 1$) и на длину (при $k_0 = 1$)

по концам оболочки длиной l_0 . Один конец трубы открыт, другой — связан с несжимаемой упруго деформируемой на неподвижном основании поршнем (рис. 75). Положим, что параметры оболочки таковы, что выполняется условие (12.17)

$$\bar{c}_1 \ll \bar{c}_2$$

Это позволяет при исследовании деформации оболочки и давления, действующего на нее и поршень, считать жидкость несжимаемой.

Пусть $p^*(t)$ — давление в трубе, рассчитанное в предположении о недеформируемости оболочки и недеформируемости поршня. Так как жидкость в трубе несжимаема, то величина $p^*(t)$ равна давлению на входе в нее, которое мы будем считать неизменным по сечению.

При расчете дополнительного давления в жидкости p^* (x, t, t_0), вызванного движением оболочки и поршня, мы обязаны учесть и изменение давления на входе, связанное с инерционным противодействием внешней среды затеканию жидкости в трубу. В рамках гипотезы о несжимаемости жидкости это можно сделать, увеличив в расчете длину жесткой части трубы (по сравнению с фактической) на величину $\Delta l = \frac{8}{3\pi} r_1$. Такой результат был получен в акустике при рассмотрении колебания поршня в твердой стенке [33]. Отно-

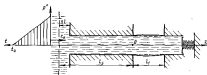


Рис. 75. К расчету затекания волны давления в затеканную жидкостью трубу с упругой стенкой.

сительную систему единиц измерения выберем ту же, что и в предыдущих параграфах ($c = c_1 = 1$, $l = H = r_1/2 = 1$, $\rho = 1$).

Смещение оболочки w представим разложением

$$w = \sum_{k=1}^{N-1} q_k(t) \sin \alpha_k x, \quad (23.1)$$

где $q_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, N-1$) — функции времени, подлежащие определению, $\alpha_k = k\pi/l_1$ — волновое число.

Пусть $q_N(t)$ — закон движения поршня. Смещение $w(x, t)$ и $q_N(t)$ положительны, если они направлены внутрь трубы. Пользуясь приемом, рассмотренным в § 6 применительно к анализу колебаний оболочки, занимающей лишь часть длины одной из цилиндрических стенок, ограничивающих кольцевой слой жидкости (см. рис. 11), запишем потенциал скорости жидкости в интервале $0 \leq x \leq l_1$, соответствующий смещению оболочки по закону (23.1) при неподвижном поршне ($l_2 = \infty$), в виде

$$q_1 = - \sum_{k=1}^{N-1} \dot{q}_k \left\{ \frac{\sin \alpha_k x}{\alpha_k} \frac{l_0}{l_1} \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_k} \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^{j+k} + l_0 + l_1 \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^{j+k} \right\} \quad (23.2)$$

$x \in (0, l_1)$

Функция φ_1 удовлетворяет уравнению Лапласа, условию непроницаемости упругой оболочки и, кроме того, граничным условиям

$$\int_0^2 [\partial \varphi / \partial x]_{x=0} r dr = 0; \quad \int_0^2 [I_2 \partial \varphi / \partial x]_{x=0} - [\varphi]_{x=0} r dr = 0.$$

Составляющая потенциала скорости жидкости, соответствующая движению воронки,

$$\Delta \varphi = -\dot{q}_N (x + l_1). \quad (23.3)$$

Суммируя (23.2) и (23.3), получим полный потенциал скорости возмущенного движения жидкости в интервале $0 \leq x \leq l_1$

$$\varphi = - \sum_{k=1}^{N-1} \dot{q}_k \left\{ \frac{\sin \omega_k x}{\omega_k} \frac{I_2(2\omega_k)}{I_1(2\omega_k)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega_k} [x(-1)^{k+1} + l_2 + l_3(-1)^{k+1}] \right\} - \dot{q}_N (x + l_1) \quad (23.4)$$

$x \in (0, l_1)$.

Если считать движение жидкости в трубе вне интервала $0 < x < l_1$ одномерным, то движение воронки будет следовать закону

$$l \ddot{q}_N + k_N \dot{q}_N = [\dot{q}_1]_{x=l_1} + [\dot{q}_2]_{x=l_1-l_2} - p^s(t), \quad (23.5)$$

где k_N — жесткость упругой связи воронки, приходящаяся на единицу его поверхности; l — полная длина трубы с учетом значения Δl (рис. 76). Теперь подставим ряды (23.1) в (23.4) в уравнение движения оболочки

$$\left(1 + k_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w + \pi r^2 w - [\dot{q}_1]_{x=0} = -p^s(t). \quad (23.6)$$

Применяя метод Бубнова — Галеркина, получим систему, включающую $N-1$ линейных дифференциальных уравнений, которую следует дополнить уравнением (23.5). В матричной форме полная система уравнений приводится к виду (20.2).

Элементы матрицы A

$$a_{k, k+N} = \delta_{kk} \left[\pi^2 + \frac{1}{\omega_k} \frac{I_2(2\omega_k)}{I_1(2\omega_k)} \right] + \frac{2}{\omega_k \omega_k} \{ (-1)^{k+1} + \frac{l_2}{l_1} [x(-1)^{k+1} + (-1)^{k+1} + (-1)^{k+1} + 1] \}; \\ a_{k, N} = \frac{2}{\omega_k} \{ (-1)^{k+1} + \frac{l_2}{l_1} [1 + (-1)^{k+1}] \}; \quad (23.7) \\ a_{k, N}^s = \frac{2}{\omega_k} \{ (-1)^{k+1} + \frac{l_2}{l_1} [1 + (-1)^{k+1}] \}; \\ a_{N, N} = 2/l_1.$$

Элементы матрицы C

$$c_{kk} = \delta_{kk} (1 + k_1 \omega_k^4 + k_2 \omega_k^2); \quad (23.8)$$

$$c_{kk} = \delta_{kk} 2k_2 \omega_k^2.$$

Элементы матрицы F

$$F_{k, N} = - \frac{2}{l_1} \int_0^{l_1} p^s(t) \sin \omega_k x dx = - \frac{4}{\pi k} \sigma [(-1)^{k+1}] p^s(t); \quad (23.9)$$

$$F_{N, N} = - \frac{2}{l_1} p^s(t).$$

В качестве примера рассчитаем изменение полного давления p на стенку оболочки в сечении $x = l_1$, полагая, что поршень, замыкающий трубу, исподнимается. Пусть давление в падающей волне меняется по закону треугольника

$$p^s(t) = \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \sigma (t_0 - t) \sigma(t). \quad (23.10)$$

Так как по условию $q_N = 0$, то из системы N дифференциальных уравнений второго порядка (20.2) остаются лишь $N-1$ уравнений. При этом $N-1=18$. При изменении давления $p^s(t)$ по закону (23.10) элементы матрицы-столба возмущающих функций приобретают вид

$$F_k = - \frac{4}{\pi k} \sigma [(-1)^{k+1}] \sigma (t_0 - t) \sigma(t) \left(1 - \frac{t}{t_0}\right). \quad (23.11)$$

Дополнительное давление на стенку оболочки $[p^s]_{x=l_1}$ (в рамках используемой нами относительной системы единиц измерения) определяется соотношением

$$[p^s]_{x=l_1} = -[\dot{q}_1]_{x=0}. \quad (23.12)$$

Учитывая выражение для потенциала скорости (23.2) и суммируя (23.10) с (23.11), получим при $x \in (0, l_1)$

$$p(x, t) = \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \sigma (t_0 - t) \sigma(t) + \\ + \sum_{k=1}^{N-1} \dot{q}_k \left\{ \frac{\sin \omega_k x}{\omega_k} \frac{I_2(2\omega_k)}{I_1(2\omega_k)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega_k} [x(-1)^{k+1} + l_2 + l_3(-1)^{k+1}] \right\}. \quad (23.13)$$

В сечении $x = l_1$ (независимо от t)

$$p(l_1, t) = \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \sigma (t_0 - t) \sigma(t) + \\ + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2}{\omega_k} [l_2 + l_3(-1)^{k+1} + l_2]. \quad (23.14)$$

Столбец ускорений $\ddot{q}_k$ ($k = 1, 2, \dots, N-1$) определяется выражением

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_{N-1} \end{bmatrix} = -A^{-1}B \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \end{bmatrix} + A^{-1}F, \quad (23.15)$$

где $q_1, q_2, \dots, q_{N-1}$ — решения уравнений (20.2).

При расчете давления p (I_2 , б) положим (как и в примерах, рассмотренных в предыдущих параграфах главы), что $k_2 = 1,465A^2/r_1^2 \rho^2 = 5,6h/r_1$ и $k_2 = 0$. Пример $r_1/h = 100$, $N-1 = 18$. Приведем некоторые результаты решения задачи по БМ.

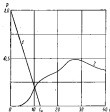


Рис. 77. Давление в падающей волне (I) и соответствующее ему полное давление в сегментах $x = I_1$ (II) при $I_2/I_1 = 5$.

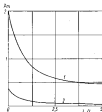


Рис. 78. Зависимость p_m от I_2/I_1 .
 $I = I_2 = 4h$; $II = I_2 = 1$.

На рис. 77 приведены результаты вычислений полного давления p (I_2 , б) при продолжительности действия нагрузки $I_0 = 4\pi$ и $I_2/I_1 = 5$. Для сопоставления там же приведен график изменения давления в падающей волне $p^0 = (1 - t/4\pi)$ и ($4\pi - t$) и б).

Мы видим, что за счет упругой вставки волна давления резко искажается. При задании давления выражением (23.10) максимальное по времени значение функции p (I_2 , б) — p_m (I_2) характеризует степень изменения наибольшего давления в волне при прохождении ее через участок, занятый вставкой.

На рис. 78 показаны зависимости $p_m = p_m(I_2/I_1)$ для продолжительностей действия нагрузки $I_0 = 4\pi$ и $I_0 = 1$. Как видно, уве-

личение отношения I_2/I_1 и уменьшение безразмерного параметра I_0 может привести к существенному уменьшению давления в трубопроводе с упругой вставкой. Так как величина I_0 пропорциональна скорости гидроудара, то при фиксированных «размерных» времени действия нагрузки, величинах h и r_1 ее можно сократить лишь за счет применения для вставки материала с малой величиной модуля упругости E .

§ 24. Система оболочек, соприкасающихся со слоем жидкости, при динамическом нагружении

Положим, что осесимметричная система конечного размера включает несколько изолированных оболочек, соприкасающихся с жидкостью. В общем случае жидкость находится как внутри,

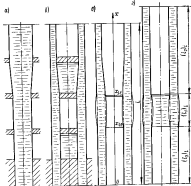


Рис. 79. К расчету систем оболочек: а, б — варианты систем оболочек; в — парциальная система; г — приведенная парциальная система.

так и в слое снаружи оболочек (рис. 79, а, б). Полости с жидкостью внутри оболочек могут иметь жесткие неподвижные перегородки в плоскостях $x = \text{const}$. Возможен вариант коаксимального распо-

ложения оболочек. Источник колебаний — заданное переменное давление на жесткие оболочки p^0 (выбывающее над статическим).

При расчете радиальных колебаний оболочек применимы общие допущения, сформулированные во введении. Однако в рамках этих допущений задача остается еще очень сложной и плохо поддающейся решению даже при использовании современной вычислительной техники. В вакууме колебания оболочек могут изучаться независимо друг от друга. Иное дело, когда речь идет о вибрации системы оболочек, сопряженных с жидкостью. Жидкость в кольцевом слое (кольцевом зазоре) или внутри оболочек (при отсутствии неподвижных перегородок) связывает всеобщие колебания всей системы. В этих условиях не могут быть оправданы попытки локального рассмотрения динамической реакции оболочки какого-либо одного отсека. Другое затруднение связано с нецилиндричностью системы. Если принять, что в пределах участка, занятого одной оболочкой (парой коаксиальных оболочек), исследуемая система еще может рассматриваться с некоторыми ограничениями как цилиндрическая или близкая к цилиндрической (см. § 7), то в целом к исследуемой системе такое допущение неприменимо.

Один из возможных подходов к построению методики решения задачи состоит:

— в расчленении (каким-либо подходящим образом) исходной системы на конечное число простых парциальных систем (подсистем), колебания которых сравнительно легко поддаются анализу;

— в последующем исследовании движения каждой парциальной системы с учетом влияния на нее других, соседних подсистем.

Можно, например, разделить исходную систему на ряд последовательно расположенных простых участков плоскостями $x = x_i$. Однако при таком выборе подсистем возникает задача учета очень сложных условий на границах между участками. Более удачным подход, при котором каждая парциальная система выделяется из исходной в результате затвердевания всех оболочек, за исключением одной или двух коаксиальных (оболочек одного отсека). Вариант подсистемы, построенной таким образом, показан на рис. 79, а. Жесткими линиями обведены участки затвердевшей конструкции. Как видно, при таком подходе расчленяется не только лишь конструкция; что касается жидкости в кольцевом слое, либо во внутренней полости, то она целиком входит в каждую из подсистем. Это избавляет от необходимости рассматривать граничные условия для жидкости в местах сочленения различных участков.

Если движение каждой подсистемы определить как результат суммарного воздействия на нее внешнего и внутреннего колебаний системы поля давления и дополнительного поля давления, вызванного движением других парциальных систем, а затем все парциальные движения сложить, то в итоге получится искомое движение исходной системы.

Ориентируясь на то, что наметенный общий подход к построению решения задачи, наложим три ограничения на изучаемый класс систем:

1. Нагрузка на оболочки относится к категории медленно меняющейся (см. § 12). Это означает, что основной вклад в радиальные смещения оболочек вносят давления волн. Таким образом, полагая, что нагрузка является медленно меняющейся, мы автоматически получаем право использовать при расчете реакции исследуемой системы теорию длинных волн.

2. Параметры системы таковы, что жидкость можно считать несжимаемой.

3. Движение жидкости в парциальных системах вне участков, занятых упругими оболочками, одномерное, что согласуется с теорией длинных волн.

В рамках этих допущений парциальные системы сводятся к одной из расчетных схем, рассмотренных в § 7.

При построении системы уравнений движения будем ориентироваться на общий случай, когда связь между колебаниями оболочек осуществляется через кольцевой слой жидкости.

Сохраним обозначения, использованные в § 4 и 7; одновременно с этим сделаем ряд дополнений и уточнений. Примем, что у любой величины, характеризующей колебание одной подсистемы в пределах одного тона: формы $f_{\alpha}^{(1)}, f_{\alpha}^{(2)}$, частоты колебаний Ω_{α} , дополнительного давления $p_{\alpha}^d(x, \theta)$, вызванного деформацией системы, временного множителя $X_{\alpha}(t)$ в разложении радиального перемещения оболочек по формам собственных колебаний — первый индекс указывает на номер парциальной системы, второй — на номер тона. Отсутствие второго индекса явным свидетельствует о том, что величина относится к подсистеме в целом: $w_i^{(1)}(x, \theta)$, $w_i^{(2)}(x, \theta)$.

Цифры (1) и (2) сверху указывают на принадлежность физической величины соответственно внутренней и внешней оболочкам в коаксиальной системе. Если подсистема включает лишь одну упругую оболочку, то верхний индекс опускается. Таким же индексацию используем и в обозначениях физических параметров, характеризующих i -ую подсистему: $A_{\alpha i}^{(1)}, A_{\alpha i}^{(2)}$ — параметры упругости конструктивно ортогональных оболочек; $(l_{\alpha i})_1$ — длина оболочек;

$H_i = [(r_{\alpha i})^2 - (r_{\alpha i})^2] / [2(r_{\alpha i})]$ — приведенная толщина слоя жидкости

$$c_i = \sqrt{\frac{A_{\alpha i}^{(1)}}{\rho(r_{\alpha i})}}, \quad \alpha_i = \pi H_i / (l_{\alpha i})_1,$$

$$A_i = \frac{3\rho^* H_i}{r(r_{\alpha i})}, \quad \alpha_i = \frac{A_i^{(2)}(r_{\alpha i})^2}{A_i^{(1)}(r_{\alpha i})^2}.$$

λ_i — собственное число интегрального уравнения подсистемы;

ρ^* — плотность жидкости в области $r < (r_{\alpha i})_1$.

Если парциальная система включает оболочку, отличающуюся от цилиндрической (§ 7), то

$$H_1 = \{r_2\}^2 - \{r_0\}^2 / 2 \{r_2\};$$

$$c_1 = \sqrt{A_0^2 H_1 / \rho \{r_2\}}.$$

Пусть $S(x)$ — текущая площадь поперечного сечения кольцевого слоя; L — длина его дуги; $p_1(x, t)$ — давление в кольцевом слое жидкости (избыточное над статическим) при отсутствии перемещения оболочек только i -й парциальной системы (т. е. в случае, если бы оболочки i -й подсистемы были абсолютно жесткими).

Давление $p_1(x, t)$ можно рассматривать как результат суммирования поля давления в слое жидкости, не возмущенного колебанием системы, и дополнительного поля давления, связанного с движением всех парциальных систем, за исключением i -й системы. Не уменьшая общности, будем отсчитывать смещения z от положения основных поверхностей оболочек, соответствующего деформации под действием статических сил. Как обычно, смещение z положительно, если оно направлено внутрь оболочек. Совместим начало отсчета с плоскостью, совпадающей с нижней границей кольцевого слоя. Обозначим через x_0, x_1 абсциссы сечений, совпадающих соответственно с нижним и верхним кодами упругих оболочек i -й парциальной системы (рис. 79, в). Пронумеруем парциальные системы в порядке расположения упругих оболочек по высоте (начиная снизу).

Решение задачи начнем с приведения парциальных систем к расчетным схемам, рассмотренным в § 7. С этой целью заменим жидкость в областях $x < x_0$ и $x > x_1$ эквивалентными по инерционности (по отношению к колебаниям оболочек i -й подсистемы) цилиндрическими слоями с площадями сечений соответственно $S(x_0)$ и $S(x_1)$ и длинами l_0 и l_1 (рис. 79, в). Пусть $\{v_2\}_{c_1}$ — скорость движения жидкости в сечении x_{c_1} . Текущее значение скорости жидкости в канале с недеформируемыми стенками

$$v_2 = \{v_2\}_{c_1} \frac{S(x_0)}{S(x)}.$$

Кинетическая энергия жидкости в пространстве $x > x_0$

$$T_{11} = \int_{x_0}^L \frac{\rho v_2^2 S(x)}{2} dx. \quad (a)$$

Кинетическая энергия слоя жидкости длиной l_1 и площадью поперечного сечения $S(x_1)$ при $v_2 = \{v_2\}_{c_1}$

$$T_{11} = \frac{\rho \{v_2\}_{c_1}^2 S(x_1) l_1}{2}. \quad (b)$$

Приравняв (a) к (b), получим

$$\{v_2\}_{c_1} = \int_{x_0}^L \{S(x_1)/S(x)\} dx. \quad (24.1)$$

Рассуждая аналогично, найдем

$$\{v_0\}_{c_1} = \int_{x_1}^{x_0} \{S(x_0)/S(x)\} dx. \quad (24.2)$$

На рис. 79, в и г приведен пример исходной и приведенной парциальных систем.

Получим выражение для давления $p_1(x, t)$ при $x \in (x_0, x_1)$.

Пусть N_s — число парциальных систем; N_j — число тонов колебаний, удерживаемых в j -й парциальной системе. Подольсь принципам наложения, который в данном случае применим ввиду линейности системы, найдем

$$p_1(x, t) = p^0(x, t) + \sum_{j=1}^{N_s \cdot N_j} p_{1j}^+(x_{1j}, t) P_j^+(x) (1 - \delta_{ij}), \quad (24.3)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; $P_j^+(x)$ — функция влияния.

Первый член в правой части выражения (24.3) представляет собой поле давления в зазоре при $x \in (x_0, x_1)$, не возмущенное колебанием системы, а сумма — дополнительное поле давления в том же интервале x , вызванное колебанием оболочек всех парциальных систем, за исключением i -й.

Определим функцию влияния $P^+(x)$. С этой целью преобразуем сложную по конфигурации область E_1 , заполненную жидкостью, в цилиндрический слой E_2 с поперечным сечением S_2 и продольной осью z . Координаты x и z свяжем преобразованием

$$z(x) = \int \{S_2/S(x)\} dx. \quad (24.4)$$

Преобразование преобразования (24.4) ясно из вывода выражений (24.1) и (24.2): при наличии жестких боковых стенок скорости и ускорения жидкости в E_1 и E_2 связаны соотношениями

$$v_2 = \tilde{v}_2 \frac{S_2}{S(x)}; \quad \dot{v}_2 = \tilde{\dot{v}}_2 \frac{S_2}{S(x)},$$

где $\tilde{v}_2$ — коэффициент пропорциональности. Если $k = 1$, то в областях E_1 и E_2 в пределах участков, заключенных между соответствующими, в смысле (24.4), сечениями, оказываются равными кинетические энергии жидкости и падения избыточного давления. Это означает, что при равенстве избыточного давления в одной паре соответствующих сечений автоматически обеспечивается равенство избыточного давления во всех остальных соответствующих сечениях. Следовательно,

$$P_j^+(x) = P_j^+(z). \quad (24.5)$$

Функции $\Pi_i^j(x)$ линейны и легко составляются. Пусть L_2 — полная протяженность области E_2 в направлении оси x . Имеем

$$L_2 = \int_0^L [S_0/S(x)] dx.$$

Исходя из линейности функции $\Pi_i^j(x)$ и учитывая (24.5), найдем

$$\Pi_i^i(x) = \frac{L_2 - x(x)}{L_2 - x(x_0)} \text{ при } i > j;$$

$$\Pi_i^j(x) = \frac{x(x)}{x(x_0)} \text{ при } i < j. \quad (24.6)$$

Введем координату

$$s_i = \frac{x - x_0}{(L_2)}$$

и, кроме того, обозначим

$$\bar{\Pi}_i^j(s_i) = \Pi_i^j(s_i) s_i + x_0. \quad (24.7)$$

После этого перепишем (24.3) в виде

$$p_i(s_i, t) = p^*(s_i, t) + \sum_{j=1}^{N_2} p_{ij}^*(s_i, t) \bar{\Pi}_j^i(s_i) (1 - \delta_{ij}). \quad (24.8)$$

Черточку над Π в последующем будем опускать.

Теперь составим уравнения вынужденных колебаний оболочек i -й парциальной системы над действием давления $p_i(s_i, t)$. Если в правую часть уравнений (7.30) внести давление $p_i(s_i, t)$, то получим систему двух интегро-дифференциальных уравнений вынужденных колебаний оболочек i -й парциальной системы в следующем виде:

$$\begin{aligned} \omega_i^{(1)}(s_i, t) = & - \frac{(r_1)^2 \rho (r_0)^{m_1}}{A_0^{(1)} H_1} \int_0^1 K_1(s_0) [\bar{\omega}_i^{(1)}(y, t) - \bar{\omega}_i^{(1)}(y, t)] dy - \\ & - \frac{(r_1)^2 \rho (r_0)^{m_1}}{A_0^{(1)} H_1} \int_0^1 K_2(s_0) \bar{\omega}_i^{(1)}(y, t) dy + \frac{p_i(s_i, t)}{A_0^{(1)}} (r_1)^2; \\ \omega_i^{(2)}(s_i, t) = & \frac{(r_2)^2 \rho (r_0)^{m_2}}{A_0^{(2)} H_2} \int_0^1 K_1(s_0) [\bar{\omega}_i^{(2)}(y, t) - \bar{\omega}_i^{(2)}(y, t)] dy - \\ & - \frac{p_i(s_i, t)}{A_0^{(2)}} (r_2)^2. \end{aligned} \quad (24.9)$$

Далее перейдем к безразмерной форме записи (относительной системе единиц измерения), приняв за единицу характерную скорость c , характерный линейный размер l и массовую плотность жидкости ρ в слое. Получим

$$\omega_i^{(1)}(s_i, t) = - \frac{s^2}{\omega_{c1}^2} \int_0^1 K_1(\bar{\omega}_i^{(1)} - \bar{\omega}_i^{(1)}) dy -$$

$$- \frac{s^2 H_1}{\omega_{c1}^2} \int_0^1 K_2 \bar{\omega}_i^{(1)} dy + \frac{p_i H_1}{c^2};$$

$$\omega_i^{(2)}(s_i, t) = - \frac{s^2}{\omega_{c2}^2} \int_0^1 K_1(\bar{\omega}_i^{(2)} - \bar{\omega}_i^{(2)}) dy - \frac{p_i H_2}{c^2 \alpha_i}. \quad (24.10)$$

В качестве l и c можно, в частности, принять параметры H_1 и α_1 одной из подсистем.

Ищем решение (24.10) в виде рядов

$$\omega_i^{(1)}(s_i, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_{ik}(t) f_{ik}^{(1)}(s_i);$$

$$\omega_i^{(2)}(s_i, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_{ik}(t) f_{ik}^{(2)}(s_i), \quad (24.11)$$

где $f_{ik}^{(1)}(s_i)$ и $f_{ik}^{(2)}(s_i)$ — собственные функции соответствующей уравнениям (24.10) однородной системы

$$f_{ik}^{(1)}(s_i) = \lambda_k \int_0^1 K_1(f_{ik}^{(1)} - f_{ik}^{(1)}) dy + \lambda_k \lambda_c \int_0^1 K_2 f_{ik}^{(1)} dy;$$

$$f_{ik}^{(2)}(s_i) = - \frac{\lambda_k}{\alpha_i} \int_0^1 K_1(f_{ik}^{(2)} - f_{ik}^{(2)}) dy, \quad (24.12)$$

где

$$\lambda_k = \frac{\pi^2 \omega_{c1}^2}{\omega_{c1}^2}. \quad (24.13)$$

Решение уравнений этого типа рассматривалось в § 7. Подставляя (24.11) в (24.10), получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} f_{ik}^{(1)} X_{ik} = & - \frac{s^2}{\omega_{c1}^2} \sum_{k=1}^{\infty} X_{ik} \int_0^1 K_1(f_{ik}^{(1)} - f_{ik}^{(1)}) dy - \\ & + \lambda_c \int_0^1 K_2 f_{ik}^{(1)} dy + \frac{p_i H_1}{c^2}; \end{aligned} \quad (24.14)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ik}^{(2)} X_{ik} = - \frac{s^2}{\omega_{c2}^2 \alpha_i} \sum_{k=1}^{\infty} X_{ik} \int_0^1 K_1(f_{ik}^{(2)} - f_{ik}^{(2)}) dy - \frac{p_i H_2}{c^2 \alpha_i}.$$

Используя уравнения (24.12), приведем систему (24.14) к виду

$$\sum_{k=1}^N \tilde{f}_{ik}^{(1)} (X_{ik} + \tilde{X}_{ik}/\Omega_{ik}^2) = \rho_i H_i / c_i^2; \quad (24.15)$$

$$\sum_{k=1}^N \tilde{f}_{ik}^{(2)} (X_{ik} + \tilde{X}_{ik}/\Omega_{ik}^2) = -\rho_i H_i / c_i^2 \alpha_i. \quad (24.16)$$

Умножим обе части уравнения (24.15) на $f_{ik}^{(1)}(s_i)$ и уравнения (24.16) на $\alpha_i f_{ik}^{(2)}(s_i)$. После интегрирования в пределах $0 \leq s_i \leq 1$ получим

$$\sum_{k=1}^N (X_{ik} + \tilde{X}_{ik}/\Omega_{ik}^2) \int_0^1 f_{ik}^{(1)} f_{ik}^{(1)} ds_i = (H_i/c_i^2) \int_0^1 \rho_i f_{ik}^{(1)} ds_i; \quad (24.17)$$

$$\sum_{k=1}^N (X_{ik} + \tilde{X}_{ik}/\Omega_{ik}^2) \int_0^1 \alpha_i f_{ik}^{(2)} f_{ik}^{(2)} ds_i = -H_i/c_i^2 \int_0^1 \rho_i f_{ik}^{(2)} ds_i. \quad (24.18)$$

Используя условие ортогональности (7.35), приведем уравнения (24.17) и (24.18) к виду

$$X_{ik} \Omega_{ik}^2 + X_{ik} - (H_i/\Delta_{ik} c_i^2) \int_0^1 \rho_i (f_{ik}^{(1)} - f_{ik}^{(2)}) ds_i, \quad (24.19)$$

где

$$\Delta_{ik} = \int_0^1 (f_{ik}^{(1)2} + \alpha_i f_{ik}^{(2)2}) ds_i. \quad (24.20)$$

Таким образом, задача о вынужденных колебаниях частичной системы приводится к решению бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (24.19). В соответствии с исходными предположениями мы обязаны удерживать в системе (24.19) лишь несколько (N_j) первых уравнений, описывающих колебание подсистемы в пределах длинных волн. Преобразуем правую часть уравнений (24.19). Подстановка (24.8) в (24.19) дает

$$\begin{aligned} \frac{X_{ik}}{\Omega_{ik}^2} + X_{ik} = \frac{H_i}{\Delta_{ik} c_i^2} \left[\sum_{l=1}^{N_j} \sum_{m=1}^{N_j} \rho_{ik}^*(m, t) \int_0^1 \Pi_l^j(s_i) (f_{ik}^{(1)} - f_{ik}^{(2)}) ds_i + \right. \\ \left. + \int_0^1 \rho^*(s_i, t) (f_{ik}^{(1)} - f_{ik}^{(2)}) ds_i \right] \end{aligned} \quad (24.21)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N_j; m = 1 \text{ при } i > j, m = 0 \text{ при } i < j).$$

Сложим давление $\rho_{ik}^*(m, t)$ с параметрами движения j -й частичной системы. Положим, что любая j -я подсистема включает

лишь цилиндрические оболочки. Используя формулу (1.9) в соотношении (7.29), найдем после перехода к безразмерной форме

$$\rho_{ik}^*(s_i, t) = -\frac{H_i^2}{\omega_j^2 H_j^2} \int_0^1 K_1(\omega_j^{(1)} - \omega_j^{(2)}) dy. \quad (4)$$

Используя подстановку

$$\omega_j^{(1)} = X_{jk}(t) f_{jk}^{(1)}(s_j); \quad \omega_j^{(2)} = X_{jk}(t) f_{jk}^{(2)}(s_j), \quad (5)$$

получим

$$\rho_{ik}^*(s_i, t) = -\frac{H_i^2}{\omega_j^2 H_j^2} X_{jk} \int_0^1 K_1(f_{jk}^{(1)} - f_{jk}^{(2)}) dy. \quad (6)$$

Сравнивая (6) с первым уравнением (24.12), найдем

$$\rho_{ik}^*(s_i, t) = -\frac{X_{jk}}{\omega_j^2 H_j^2} \left[f_{jk}^{(1)}(s_j) - \lambda_j \Lambda_j \int_0^1 K_2 f_{jk}^{(1)}(y) dy \right]. \quad (7)$$

Формула (7) связывает ρ_{ik}^* с перемещением j -й частичной системы в пределах n -го тона.

Таким образом,

$$\rho_{ik}^*(m, t) = n_j^{(m)2} X_{jk}. \quad (24.22)$$

Имея в виду, что

$$\int_0^1 K_2(1, y) f_{jk}^{(1)}(y) dy = 0,$$

получим

$$n_j^{(1)} = -\frac{c_j^2}{\omega_j^2 H_j^2} f_{jk}^{(1)}(1). \quad (24.23)$$

Коэффициент $n_j^{(2)}$ определяется выражением

$$n_j^{(2)} = -\frac{c_j^2}{\omega_j^2 H_j^2} \left[f_{jk}^{(2)}(0) - \lambda_{jk} \Lambda_j \int_0^1 K_2(0, y) f_{jk}^{(2)}(y) dy \right], \quad (24.23a)$$

Объединяя (24.21) и (24.22), приведем выражение для перемещения X_{ik} к виду

$$X_{ik} = \sum_{l=1}^{N_j} \sum_{m=1}^{N_j} \gamma_{ik}^{(lm)} X_{jk} + F_{ik}, \quad (24.24)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{ik}^{(lm)} = \frac{c_{ik}^{(m)2} H_i}{\Delta_{ik} c_i^2} \int_0^1 \Pi_l^j(s_i) (f_{ik}^{(1)} - f_{ik}^{(2)}) ds_i; \\ \gamma_{ik}^{(00)} = -\Delta_{ik}/\Omega_{ik}^2; \end{aligned} \quad (24.25)$$

$$F_{ik} = \frac{H_i}{\Delta_{ik} c_i^2} \int_0^1 \rho^*(s_i, t) (f_{ik}^{(1)} - f_{ik}^{(2)}) ds_i.$$

В (24.25) $m = 1$ при $i > j$, $m = 0$ при $i < j$.

Метод, использованный при выводе уравнения движения (24.24), основан на предположении, что исходная система на участках расположения упругих оболочек является цилиндрической. Однако это не обязательно. Для приведения уравнения движения парциальных систем к виду (24.24) приемлемо достаточно, чтобы исследуемая система была линейной. Предположение о цилиндричности подсистемы понадобилось нам лишь для того, чтобы воспользоваться полученными ранее для таких систем интегральными уравнениями. Отличие нецилиндрических систем от цилиндрических будет отражаться лишь в выражениях для коэффициентов $\tilde{r}_{ik}^h$ и членов F_{ik} .

Рассмотрим случай, когда парциальная система включает одну упругую оболочку, слабо отличающуюся от цилиндрической. Жесткость находится лишь в кольцевом зазоре (§ 7). Используя энергетические методы, приведем уравнение движения подсистемы к виду

$$\tilde{X}_{ik}/\Omega_{ik}^2 + X_{ik} = Q_{ik}/C_{ik}, \quad (24.26)$$

где $Q_{ik} = Q_{ik}(\dot{t})$ — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате X_{ik} ; C_{ik} — обобщенная жесткость — квазиупругий коэффициент в выражении для потенциальной энергии деформации оболочки

$$P_{ik} = \frac{1}{2} C_{ik} X_{ik}^2. \quad (a)$$

Имеем

$$Q_{ik} = (l_k)_i \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho_i f_{ik}(r_{1i}) d\theta ds_i = 2\pi (r_{1i})_i (l_k)_i \int_0^1 \rho_i f_{ik} \tilde{r}_i ds_i, \quad (6)$$

где $(r_{1i})_i$ — радиус сечения оболочки при $s_i = 0$, $\tilde{r}_i = (r_{1i})_i / (r_{1i})_i$.

Выразим потенциальную энергию деформации оболочки через работу внешних сил давления p_{ik}

$$P_{ik} = \frac{A_{ik}}{(r_{1i})_i^2} w_{ik} \quad (b)$$

на перемещении

$$w_{ik} = X_{ik} f_{ik}. \quad (r)$$

Получим

$$P_{ik} = \frac{(l_k)_i}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho_i w_{ik}(r_{1i}) d\theta ds_i = \pi (l_k)_i \frac{A_{ik} \tilde{r}_{ik}^2}{(r_{1i})_i^2} \int_0^1 \frac{\tilde{r}_{ik}^2 ds_i}{\tilde{r}_i}. \quad (a)$$

Используя (a), (6) и (d), получим после приведения уравнения (24.26) к безразмерной форме

$$\frac{\tilde{X}_{ik}}{\Omega_{ik}^2} + X_{ik} = \frac{H_i}{A_{ik} \tilde{r}_i} \int_0^1 \rho_i f_{ik} \tilde{r}_i ds_i, \quad (24.27)$$

где в отличие от выражения (24.20)

$$A_{ik} = \int_0^1 \frac{\tilde{r}_{ik}^2}{\tilde{r}_i} ds_i. \quad (24.28)$$

Уравнение (24.27) совпадает по форме с дифференциальным уравнением (24.19). Так как последующие выкладки не зависят от ограничений, связанных с нецелостностью оболочек, то мы снова идем к уравнениям типа (24.24), в которых следует только положить

$$\tilde{r}_{ik}^{\pm} = \frac{H_i}{A_{ik} \tilde{r}_i} \rho_i^{\pm} \int_0^1 \rho_i f_{ik} \tilde{r}_i ds_i; \quad \tilde{r}_{ik}^h = -\delta_{ik} / \Omega_{ik}; \quad (24.29)$$

$$F_{ik} = -\frac{H_i}{A_{ik} \tilde{r}_i} \int_0^1 \rho^h(r_{1i}, t) f_{ik} \tilde{r}_i ds_i. \quad (24.30)$$

Теперь снизим давление $\rho_{ik}^{\pm}(m, t)$ с параметрами движения парциальной системы, имеющей нецелостность только что рассмотренного тела. В рамках принятой постановки задачи жесткость считается несжимаемой, а ее движение потенциальным. При этих условиях дополнительное давление ρ_{ik}^h , соответствующее колебаниям с фиксированной формой f_{ik} , зависит лишь от мгновенных ускорения $\tilde{X}_{ik}$. Эту связь легко установить, рассматривая свободные колебания j -й парциальной системы с формой f_{jk} .

Положим

$$X_{jk} = X_{jk}^0 \sin \Omega_{jk} t. \quad (a)$$

Тогда

$$\tilde{X}_{jk} f_{jk} = -\Omega_{jk}^2 X_{jk} f_{jk}. \quad (6)$$

При наличии жесткости лишь с одной стороны оболочки ($r > r_1$) соотношение между ρ_{jk}^h и $w_{jk} = X_{jk} f_{jk}$ приводится к виду

$$X_{jk} f_{jk} = -\frac{H_j}{c_j} \rho_{jk}^h. \quad (b)$$

Подставляя $X_{jk} f_{jk}$ из (6) в (b), найдем

$$\rho_{jk}^h(r_{1j}, t) = \rho_{jk}^{(0)} \tilde{X}_{jk}. \quad (24.31)$$

$$a_{jn}^{(1)} = -\frac{c_j^2}{\Omega_{jn}^2 N_j} f_{jn}(s_j), \quad (24.32)$$

откуда

$$a_{jn}^{(1)} = -\frac{c_j^2}{\Omega_{jn}^2 N_j} \begin{cases} f_{jn}(1) & \text{при } n=1; \\ f_{jn}(0) & \text{при } n=0. \end{cases} \quad (24.33)$$

Как видно, цилиндричность оболочки проявляется лишь в том, что в выражениях для коэффициентов γ_{jn}^k , Δ_{jn} и возмущающих функций F_{jn} появляются под знаком интегралов множители $\bar{r}_j(s_j)$, характеризующие геометрию оболочки.

Объединяя воедино уравнения вынужденных колебаний (24.24), составленные для всех тонов колебаний, всех парциальных систем, входящих в общую систему. Получим

$$X_{ik} = \sum_{j=1}^{N_c} \sum_{n=1}^{N_j} \gamma_{jn}^{ik} \bar{X}_{jn} + F_{ik} \quad (24.34)$$

$$(k=1, 2, \dots, N_c, \quad i=1, 2, \dots, N_k).$$

Уравнения (24.34) — замкнутая система линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, описывающая динамическую реакцию совокупности оболочек, сопряженных со слоем жидкости, на нагрузку заданного типа.

Пронумеруем какие-либо подходящим образом координаты X_{ik} и возмущающие функции F_{ik} в общей последовательности для всей системы

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_N; \quad F_1, F_2, \dots, F_N,$$

где N — общее число удерживаемых гармоник всех парциальных систем. В этом случае уравнения (24.34) можно записать в обычной для консервативных систем матричной форме (20.2)

$$A\dot{Q} + CQ = F,$$

где $C = E$ (E — единичная матрица); A — матрица инерции;

Q — столбец координат;

F — столбец заданных возмущающих функций ($F_1, F_2, F_3, \dots, F_N$).

Более подробно рассмотрим вариант, когда общая система оболочка — жидкость включает лишь цилиндрические парциальные системы с одной упругой оболочкой. Основной вариант такой подсистемы изображен на рис. 15, б. В § 7 приведены формулы для расчета форм и параметров частоты колебаний систем этого типа. Положим, что все оболочки системы имеют одинаковый радиус сечения r_1

$$(r_1)_1 = (r_1)_2 = \dots = r_1$$

и, кроме того,

$$(r_2)_1 = (r_2)_2 = \dots = r_2$$

В этом случае сумма

$$(b_2)_1 + (b_2)_2 + (b_2)_3$$

не зависит от номера i и, кроме того,

$$H_1 = H_2 = \dots = H.$$

Обозначим

$$\bar{\theta}_{ik} = \frac{\theta_{ik}}{\theta_{1k} + \theta_{2k} + \theta_{3k}},$$

откуда

$$\bar{\theta}_{1k} + \bar{\theta}_{2k} + \bar{\theta}_{3k} = 1.$$

Функция влияния $\prod_1^j(s_k)$ при $s_k \in (0, 1)$ приобретает вид

$$\prod_1^j(s_k) = \alpha_k^j + \beta_k^j s_k, \quad (24.35)$$

где

$$\alpha_k^j = \begin{cases} \frac{(\bar{\theta}_{1k} + \bar{\theta}_{2k})}{(\bar{\theta}_{1k})} & \text{при } i > j \\ \frac{(\bar{\theta}_{1k})}{(\bar{\theta}_{1k})} & \text{при } i < j \end{cases} \quad \beta_k^j = \begin{cases} -\frac{(\bar{\theta}_{1k})}{(\bar{\theta}_{1k})} & \text{при } i > j \\ \frac{(\bar{\theta}_{1k})}{(\bar{\theta}_{1k})} & \text{при } i < j. \end{cases} \quad (24.36)$$

Формы собственных колебаний f_{ik} определяются выражением (7.23), которое запишем в тензор, введя нормирующий множитель κ_k

$$f_{ik}(s_k) = \kappa_k (\cos \chi_{ik} s_k + B_{ik} \sin \chi_{ik} s_k). \quad (24.37)$$

Здесь χ_{ik} — корни характеристического уравнения (7.21), составленные для i -й парциальной системы; B_{ik} рассчитываются по формуле (7.24) после замены индекса i на ik . Используя (24.13) и (7.16), свяжем $\bar{\Omega}_{ik}^2$ с величинами χ_{ik}

$$\bar{\Omega}_{ik}^2 = \frac{\omega_{ik}^2}{\pi^2} \frac{\chi_{ik}^2}{1 + \Lambda_{ik}}. \quad (24.38)$$

Несколько слов о выборе нормирующего множителя κ_k .

При $\chi_{ik} = 1$ собственные функции нормируются так, что $f_{ik}(0) = 1$. В этом случае координата $X_{ik}(t)$ описывает реальное смещение оболочки i -й парциальной системы в сечении $s_k = 0$ (в пределах k -го тона). Результирующее смещение этого сечения

$$w_1(0, t) = \sum_{k=1}^{N_c} X_{ik}(t). \quad (24.39)$$

При

$$\kappa_k = \frac{1}{\cos \chi_{ik} + B_{ik} \sin \chi_{ik}} \quad (24.40)$$

координаты $X_{ik}(t)$ описывают перемещение другого конца оболочки ($x_1 = 1$)

$$x_{ik}(1, t) = \sum_{k=1}^{N_1} X_{ik}(t). \quad (24.41)$$

Если, наконец, выбрать нормирующий множитель так, чтобы нормы функций f_{ik} равнялись единице

$$\int_0^1 f_{ik}^2 dx = 1, \quad (24.42)$$

то

$$K_{ik} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(1 + B_{ik}^2) + \frac{1}{4\alpha_{ik}} \sin 2\chi_{ik}(1 - B_{ik}^2) + \frac{B_{ik}}{\chi_{ik}} \sin^2 \chi_{ik}}}. \quad (24.43)$$

В этом случае потенциальная энергия деформации основной поверхности цилиндрической оболочки $\Pi_1(t)$, выраженная через координаты $X_{ik}(t)$, не зависит от вида форм f_{ik}

$$\Pi_1(t) = \sum_{k=1}^{N_1} \Pi_{1k} = \frac{S_0 \Delta_0}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{N_1} X_{1k}^2(t), \quad (24.44)$$

где S_0 — площадь срединной поверхности цилиндрической оболочки.

Подставляя в (24.25) $H_1 = 1$, выражение (24.35) в $f_{ik}^0 = f_{ik}$ из (24.37), получим

$$f_{ik}^{(j)} = \frac{\alpha_{ik}^{(j)0}}{\alpha_i^j} \frac{\alpha_i^j \alpha_{ik} + \beta_i^j \chi_{ik}}{\Delta_{ik}} \quad \left(\begin{array}{l} m=1 \text{ при } i > j \\ m=0 \text{ при } i < j \end{array} \right); \quad (24.45)$$

($j=1$)

$$f_{ik}^{(k)} = -\Delta_{ik} S_{ik}^2,$$

где

$$a_{ik} = x_{ik} \frac{\sin \chi_{ik} + B_{ik}(1 - \cos \chi_{ik})}{\chi_{ik}};$$

$$b_{ik} = x_{ik} \frac{\chi_{ik} \sin \chi_{ik} + \cos \chi_{ik} - 1 + B_{ik}(\sin \chi_{ik} - \chi_{ik} \cos \chi_{ik})}{\chi_{ik}^2}; \quad (24.46)$$

$$\Delta_{ik} = x_{ik} \left[\frac{1}{2}(1 + B_{ik}) + \frac{1}{4} \frac{\sin 2\chi_{ik}}{\chi_{ik}} (1 - B_{ik}^2) + \frac{B_{ik}}{\chi_{ik}} \sin^2 \chi_{ik} \right]. \quad (24.47)$$

При выполнении условия (24.42)

$$\Delta_{ik} = 1.$$

Наконец, преобразуем выражения (24.23) и (24.23а) для $n_{ik}^{(m)}(m=0,1)$. Из (24.23) найдем

$$n_{ik}^{(1)} = -\frac{\partial^2 f_{ik}}{\partial x_{ik}^2} \langle \cos \chi_{ik} + B_{ik} \sin \chi_{ik} \rangle. \quad (24.48)$$

Функция $K_1(0, y)$ в (24.23а) определяется соотношением

$$K_1(0, y) = 1 - y.$$

Обозначим

$$\lambda_{ik} \int_0^1 y f_{ik}(y) dy = C; \quad \lambda_{ik} \int_0^1 f_{ik}(y) dy = D.$$

Постоянные C и D связаны соотношением (7.18)

$$f_{ik}(0) = aC + bD; \quad f_{ik}(1) = aC + cD,$$

где

$$a = -(\bar{q}_1)_i; \quad b = (\bar{q}_1)_i + (\bar{q}_2)_i; \quad c = -(\bar{q}_2)_i + A_i.$$

Обозначим

$$v_{ik} = \lambda_{ik} A_i \int_0^1 (1-y) f_{ik}(y) dy = A_i (C + D).$$

Тогда

$$n_{ik}^{(0)} = -\frac{\partial}{\partial x_{ik}} [f_{ik}(0) - v_{ik}]. \quad (24.48a)$$

Решая (7.18), найдем

$$v_{ik} = -\frac{A_i \chi_{ik}}{(1 + A_i (\bar{q}_1)_i)} x_{ik} \{ (\sin \chi_{ik} - B_{ik} \cos \chi_{ik} + B_{ik}) (\bar{q}_1)_i - (1 + A_i) B_{ik} \}. \quad (24.49)$$

Уточним выражение для возмущающих функций F_{ik} . Положим, что кольцевая полость с жидкостью снизу при $x=0$ закрыта эластичной пленкой, не стесняющей колебания системы. Источник колебаний — заданное переменное давление $p^0(t)$, действующее на свободную поверхность либо в сечении $x=0$, либо в сечении $x=L$ (L — полная длина кольцевого слоя).

В том и другом случае выражение для давления $p^0(x, t)$ приводится к виду

$$p^0(x, t) = p^0(t) \{ \alpha_0^p + \beta_0^p \}, \quad (24.50)$$

где в первом случае

$$\alpha_0^p = (\bar{q}_1)_i + (\bar{q}_2)_i; \quad \beta_0^p = -(\bar{q}_2)_i;$$

во втором

$$\alpha_0^p = (\bar{q}_2)_i; \quad \beta_0^p = \bar{q}_1.$$

Подставляя в (24.25) $H_i = 1$, выражение (24.50) и $f_{ik}^{(i)} = f_{ik}$ из (24.37), получим

$$F_{ik} = p^i(\delta) \gamma_{ik}^i, \quad (24.51)$$

где

$$\gamma_{ik}^i = \frac{p^i(\delta)}{c_i^2} \frac{a_i^i f_{ik}^i + b_i^i f_{ik}^i}{\Delta_{ik}}.$$

Практически интересен вариант системы, в которой кольцевая полость снизу при $x = 0$ закрыта жестким днищем, а источником возмущений является давление на свободную поверхность $x = L$.

В этом случае формулы для коэффициентов γ_{ik}^i и функций F_{ik} получаются на столько же рассмотренных, если везде в них положить $(b_k)_{i=1} = \infty$. Подстановка

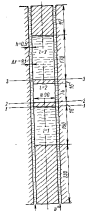


Рис. 80. К примеру расчета кольцевой системы оболочек. Неизменная модель.

$(b_k)_{i=1} = \infty$ в выражении для $a_i^i, b_i^i, c_i^i, p_i^i$ дает

$$a_i^i = (b_i + b_k)(b_k)_i; \quad b_i^i = -(b_k)_i(b_k)_i \quad \text{при } i > j; \quad (24.52)$$

$$a_i^i = 1; \quad b_i^i = 0 \quad \text{при } i < j; \quad (24.53)$$

$$a_0^i = 1; \quad b_0^i = 0.$$

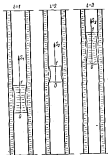


Рис. 81. Картины расчета кольцевой системы оболочек. Параллельные системы.

Полученные результаты легко распространяются на случай, когда вся жидкость размещена внутри оболочек (при $r < r_2$), лишенных перегородок. Для этого при вычислении γ_{ik}^i и F_{ik} следует положить $H = r_2/2, \lambda = 0$, а в выражении (24.51), кроме того, поставить справа знак минус.

Рассмотрим динамическую реакцию системы оболочек на кратковременный импульс давления, приложенный к жидкости в кольцевом слое в сечении $x = 0$. В качестве исходной для расчета выберем конструкцию, изображенную на рис. 80. Там же приведены ее основные размеры (в мм). Конструкция имеет три цилиндрических отсека ($i = 1, 2, 3$) с упругими стенками из алюминиевого сплава $E = 7,2 \cdot 10^4 \text{ тс/см}^2$. Отсек первый ($i = 1$), третий ($i = 3$) и кольцевая полость заполнены водой $\rho_1^i \sim \rho_2^i = \rho = 1,02 \times 10^{-3} \text{ тс/см}^3$. Средний отсек ($i = 2$) — пустой. Свободная поверхность воды внутри отсеков находится в окрестности верхних концов оболочек ($x_1 = 1, x_2 \sim 1$). Защищенные участки конструкции — неподвижные и абсолютно жесткие. Импульс давления $p^i(\delta)$ имеет форму равнобедренного треугольника.

В соответствии с схемой расчета расценим исходную систему на три параллельные ($N_s = 3$), каждая из которых включает лишь одну упругую оболочку (рис. 81).

Рассчитаем:

$$H_i \quad (i=1, 2, 3) = l = (r_2^2 - r_1^2)/2r_1 = (5,42^2 - 4,5^2)/2 \cdot 4,5 = 1 \text{ см};$$

$$c_i \quad (i=1, 2, 3) = c = \sqrt{E \Delta H_i / \rho r_i^2} =$$

$$= \sqrt{7,2 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 1 / 1,02 \cdot 10^{-3} \cdot 4,5^2} = 4,15 \cdot 10^4 \text{ см/сек};$$

$$\Lambda_1 = 0,445; \quad \Lambda_2 = 0; \quad \Lambda_3 = 0,465;$$

$$(\bar{b}_1)_k = 0,194; \quad (\bar{b}_2)_k = 0,508; \quad (\bar{b}_3)_k = 0,298;$$

$$(\bar{b}_1)_k = 0,096; \quad (\bar{b}_2)_k = 0,392; \quad (\bar{b}_3)_k = 0,512;$$

$$(\bar{b}_1)_k = 0,320; \quad (\bar{b}_2)_k = 0,151; \quad (\bar{b}_3)_k = 0,629.$$

Характеристические уравнения

$$i = 1 - 0,508 x_1 + 1,451 x_2 \cos x_1 -$$

$$- 1,425 x_2^2 \sin x_1 + 0,291 \sin x_1 = 0;$$

$$i = 2 - 0,904 x_1 \cos x_1 - 2,091 x_2 \sin x_1 + 0,096 \sin x_1 = 0;$$

$$i = 3 - 0,151 x_2 + 1,769 x_2 \cos x_2 -$$

$$- 0,723 x_2^2 \sin x_2 + 0,330 \sin x_2 = 0.$$

Корни характеристических уравнений (ограничиваясь учетом лишь первых двух гармоник в пределах каждой из парциальных систем, т. е. полное число удерживаемых гармоник $N = 6$)

$$\chi_{11} = 1,10160; \quad \chi_{21} = 0,84541; \quad \chi_{31} = 1,28667;$$

$$\chi_{12} = 3,33882; \quad \chi_{22} = 3,27349; \quad \chi_{32} = 3,69404.$$

Квадраты безразмерной частоты (24.38)

$$\Omega_{11}^2 = 0,0036; \quad \Omega_{21}^2 = 0,00756; \quad \Omega_{31}^2 = 0,00382;$$

$$\Omega_{12}^2 = 0,03305; \quad \Omega_{22}^2 = 0,19459; \quad \Omega_{32}^2 = 0,03146.$$

Коэффициенты B_{ik} в формуле (24.37)

$$B_{11} = 0,46382; \quad B_{21} = 0,29053; \quad B_{31} = 0,20068;$$

$$B_{12} = 0,05388; \quad B_{22} = 0,05724; \quad B_{32} = 0,03109.$$

Нормирующие множители (при нормировке f_{ik} на условия $f_{ik}(1) = 1, f_{ik}(0) = 1, f_{ik}'(0) = 1$)

$$\kappa_{11} = 1,15487; \quad \kappa_{21} = 1; \quad \kappa_{31} = 1;$$

$$\kappa_{12} = 1,00891; \quad \kappa_{22} = 1; \quad \kappa_{32} = 1.$$

Далее, используя (24.35), (24.36), (24.45), (24.47), (24.48) и (24.48a), рассчитываем $a_j^i, b_j^i, a_{2j}^i, b_{2j}^i, \Delta_{2j}^i, \eta_{2j}^{(n)}$.

Пусть $Q = (X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}, X_{31}, X_{32})$ — столбец исходных координат. Соответствующая ему матрица инерции A и матрица столбцов возмущающих функций F с элементами, вычисляемыми по формулам (24.45) и (24.51), имеют вид

$$A = \frac{1}{\gamma_{12}^2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$F = p^i(t) \begin{pmatrix} 0,50350 & -0,04520 & 0,43038 & 0,03352 & 0,30614 & 0,02306 \end{pmatrix}.$$

Матрица A не является симметрической. Однако можно показать, что в результате умножения слева на специально подобран-

ную диагональную матрицу M матрица A преобразуется к симметрическому виду. В частности, этому требованию удовлетворяет матрица M с элементами:

$$m_{11} = 2,26895; \quad m_{22} = 0,84583; \quad m_{33} = 0,81038;$$

$$m_{12} = 0,40394; \quad m_{13} = 1,35709; \quad m_{23} = 1.$$

Таким образом, в целом при умножении слева на матрицу M уравнение (20.2) преобразуется в уравнение с симметрическими матрицами A и C .

Уточним закон изменения давления $p^i(t)$. Пусть безразмерная величина импульса давления равна единице

$$J = \int_0^{t_0} p^i(t) dt = 1,$$

где t_0 — продолжительность действия нагрузки. Форма импульса — равнобедренный треугольник

$$p^i(t) = \begin{cases} 4t/t_0^2 & \text{при } 0 < t \leq t_0/2, \\ 4(t_0 - t)/t_0^2 & \text{при } t_0/2 < t < t_0, \\ 0 & \text{при } t > t_0. \end{cases}$$

Максимальное значение безразмерного давления в импульсе

$$p_m = 2/t_0.$$

Значения t_0 выберем так, чтобы они не превышали периода основного тона колебаний системы T_1 . Так как в разбираемом случае матрица C в (20.2) является единичной, то квадрат частоты основного тона Ω_1^2 равен величине, обратной наибольшему характеристическому числу матрицы A .

Используя ЭВМ, находим

$$\Omega_1 = 0,04465; \quad T_1 = 2\pi/\Omega_1 = 140.$$

Отдельные результаты расчета, произведенные на ЭВМ, показаны на рис. 82, 83, 84. На рис. 82 изображены кривые изменения радиальной деформации оболочек в сечениях $I-I$ (рис. 80) по времени в зависимости от величины t_0 . Так как в сечении $I-I$ оболочка соприкасается с жидкостью лишь со стороны кольцевого зазора, то, следовательно, кривые $w_1(t)$, рассчитанные в относительной системе единиц измерения, описывают не только смещение, но одновременно с этим и изменение параметра полного избыточного давления в зазоре в этом сечении $p_2(t)$. Это утверждение справедливо с точностью до погрешности теории длинных

воли. При действии импульсов давления малой продолжительности (ориентировочно при $t < 0,25 T_0 = 35$) радиальные деформации оболочки и давление в зазоре слабо зависят от продолжительности

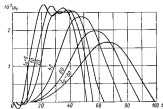


Рис. 82. График $\omega_1(t)$, рассчитанный при $N = 6$ для различных значений t_0 .

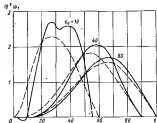


Рис. 83. Сравнение графиков $\omega_1(t)$.

——— рассчитанные при $N = 6$; — — — — — рассчитанные при $N = 3$.

импульса и, следовательно, от максимального значения в нем. Это позволяет в практических расчетах заменить импульс конечной продолжительности (при $t < 0,25 T_0$) мгновенным импульсом, удерживая при этом в каждой парциальной системе две или даже

одну гармонику. Зависимость реакции системы на импульс давления от его продолжительности усиливается по мере роста t_0 .

На рис. 83 сопоставлены результаты расчета $\omega_1(t)$, выполненного один раз при удержании в каждой парциальной системе по одной гармонике ($\omega_1(t) = -X_{11}(t)$, $N = 3$), другой — при $N = 6$ ($\omega_1(t) = X_{11} + X_{13}$). С увеличением t_0 различие между кривыми для систем с $N = 3$ и $N = 6$ уменьшается. По мере роста t_0 от $t_0 = 10$ до $t_0 = 80$ ошибка в максимальном значении $\omega_1(\omega_{1m})$, связанная с переходом от системы с $N = 6$ к системе с $N = 3$, падает с 20 до 10%.

Характер зависимости коэффициента динамичности нагрузки $K_d = \omega_{1m}/p_0 = p_m/p_0$ от t_0 вытекает из рис. 84. Расчет произведен при $N = 6$ и $N = 3$.

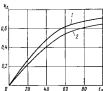


Рис. 84. Коэффициент динамичности нагрузки в зазоре треугольного импульса продолжительностью t_0 .
— $N = 6$; — — — $N = 3$.

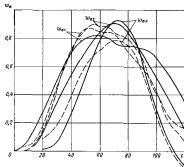


Рис. 85. Первая гармоника системы $\omega_1(t)$.
——— $N = 3$; — — — — — $N = 6$.



Рис. 86. Зависимость ω_0/J от t_0
 — расчет; $\times$ — эксперимент;
 1 — $N = 3$; 2 — $N = 6$.

антругоной формы (ω_0/J). Как видно, результаты экспериментов согласуются с теоретическим решением не только качественно, но и количественно.

§ 25. Воздействие ударной волны на оболочки, связанные с дополнительными массами

В третьей главе при исследовании взаимодействия ударной волны со сферической и цилиндрической оболочками, погруженными в неограниченную акустическую среду, удалось получить сравнительно простые результаты, представив некое решение в виде рядов по формам собственных колебаний оболочки. Отыскание этих форм не представляло труда, ибо в рассмотренных случаях формы колебаний оболочки и жидкости и в неограниченной жидкости совпали. Использование форм собственных колебаний весьма удобно, ибо позволяет свести решение задачи к исследованию движения оболочки по каждой из форм отдельно, независимо от всех остальных. Общее движение оболочки находится простым суммированием перемещений по всем формам собственных колебаний.

К сожалению, как об этом упоминалось ранее, далеко не всегда легко отыскать формы собственных колебаний оболочки. Так, например, иногда требуется изучить движение оболочки, к которой прикреплен какой-нибудь дополнительный элемент, обладающий жесткостью и массой. В общем случае найти формы собственных колебаний в жидкости такой системы очень сложно. Значительно проще искать решение задачи, представляя перемещение оболочки в виде ряда по формам собственных колебаний оболочки без дополнительных элементов. Для этих форм уже известны гидродинамические силы, что существенно облегчает решение.

Движение конструкции будет описываться бесконечной системой уравнений относительно обобщенных координат — амплитуд прогиба по заданным формам. Вследствие наличия на оболочке дополнительного элемента эта система будет неразделяющейся, т. е. в каждом уравнении будут входить все неизвестные. В некоторых случаях уравнения будут представлять в неканонической форме.

В практических расчетах систему уравнений движения приходится упрощать, оставляя в ней конечное число неизвестных и уравнений. Следует указать, что, удерживая в рядах большое число членов, мы приходим к системе уравнений весьма высокого порядка. Решение такой системы возможно лишь с помощью ЭВМ, однако принципиальных трудностей при этом не возникает.

В ряде случаев жесткость оболочки может быть велика по сравнению с жесткостью элементов, крепящих к ней дополнительные массы. Это обстоятельство позволяет пренебречь деформацией оболочки. Тогда конструкция может быть сведена к системе с конечным числом степеней свободы. Анализ движения такой системы при взаимодействии на нее ударной волны не представляет особых трудностей.

В данном параграфе мы рассмотрим несколько примеров, поясняющих основные особенности взаимодействия ударной волны с системами оболочки — масса. При этом упущено будет полягать оболочку абсолютно жесткой, а затем упругой.

Начнем с простейшего случая. Пусть в центре сферической оболочки на двух пружинах с жесткостью C закреплен груз, имеющий массу M . На сферу воздействует плоская единичная ступенчатая волна. Будем предполагать, что оболочка подкреплена большим числом ребер жесткости к ее деформацией можно пренебречь. Такую конструкцию можно рассматривать как систему с двумя степенями свободы.¹ Выберем в качестве обобщенных координат перемещения оболочки w и груза x . Тогда уравнения движения системы оболочка — груз запишутся так:

$$\ddot{x} + \omega_1^2(x - w) = 0, \quad (25.1)$$

$$\ddot{w} + \omega_2^2(w - x) = -\frac{1}{r_0^3}(p_0^+ - p_0^-).$$

Уравнения (25.1) представлены в безразмерном виде. В них координаты w и x отнесены к радиусу сферы r_0 , а коэффициенты равны

$$\omega_1^2 = \frac{p_0^+}{\rho_0^+}, \quad \omega_2^2 = \frac{2C}{\rho_0^+ M}, \quad (25.2)$$

$$\omega_3^2 = \frac{C}{2\pi r_0^2 \rho_0^+}.$$

¹ Аналогичная задача для цилиндра рассматривалась Ю. А. Федоровичем [72].

Здесь ρ и ρ^0 — плотность жидкости и материала оболочки; h — толщина оболочки. Дифференцирование произведено по безразмерному параметру, в котором время отнесено к величине $\frac{r_0}{c_0}$.

Заметим, что ω_1 есть частота собственных колебаний груза при неподвижной оболочке; ω_2 — частота колебаний оболочки при неподвижном грузе (без учета влияния жидкости). Функции $\rho_1^L(t)$ и $\rho_2^L(t)$ есть коэффициенты рядов для дифракционного давления и давления излучения при форме движения $n = 1$. Формулы для этих функций получены в § 16.

Применим к системе уравнений (25.1) преобразование Лапласа по времени. Полагая начальные условия для функций $w(t)$ и $x(t)$ нулевыми, будем иметь

$$\begin{aligned} (s^2 + \omega_1^2) x^L - \omega_1^2 w^L &= 0; \\ -\omega_2^2 x^L + (\beta^2 + \omega_2^2) w^L &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} (\rho_1^L - \rho_2^L). \end{aligned} \quad (25.3)$$

Напомним, что в § 16 были получены следующие зависимости:

$$\rho_1^L = \frac{3}{s^2 + 2s + 2}; \quad \rho_2^L = \frac{s^2(s+1)w^L}{s^2 + 2s + 2}. \quad (25.4)$$

Подставляя их в уравнения (25.3) и решая данную систему, получим

$$\begin{aligned} x^L &= \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{\omega_1^2}{s^2(s^2 + bs^2 + cs^2 + ds + d)}; \\ w^L &= \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{\omega_2^2 + \beta^2}{s^2(s^2 + bs^2 + cs^2 + ds + d)}, \end{aligned} \quad (25.5)$$

где

$$b = 2 + \frac{1}{2\pi\sigma^2}; \quad c = 2 + \frac{1}{2\pi\sigma^2} + \omega_1^2 + \omega_2^2;$$

$$d = 2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{\omega_1^2}{2\pi\sigma^2}.$$

Обычно уравнение

$$s^4 + bs^3 + cs^2 + ds + d = 0 \quad (25.6)$$

имеет либо два отрицательных действительных корня и пару комплексных сопряженных корней, либо две пары комплексных сопряженных корней. Если корни указанного уравнения равны $s_1 = -\alpha_1$, $s_2 = -\alpha_2$, $s_{3,4} = -\beta \pm i\gamma$, то, разлагая функцию

или (25.5) на простейшие дроби и переходя к оригиналам, будем иметь

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\omega_1^2}{\sigma^2} \left[\frac{2\pi\sigma^2}{6\pi\sigma^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2} (t-1) + \right. \\ &\quad \left. + A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t} + e^{-\beta t} (A_3 \sin \gamma t + A_4 \cos \gamma t) \right]; \\ w(t) &= \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{2\pi\sigma^2\omega_2^2}{6\pi\sigma^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2} (t-1) + \right. \\ &\quad \left. + B_1 e^{-\alpha_1 t} + B_2 e^{-\alpha_2 t} + e^{-\beta t} (B_3 \sin \gamma t + B_4 \cos \gamma t) \right], \end{aligned} \quad (25.7)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{\omega_1^2(\alpha_1 - \alpha_2)} \frac{1}{[(\beta - \alpha_1)^2 + \gamma^2]}; \\ A_2 &= -\frac{1}{\omega_1^2(\alpha_1 - \alpha_2)} \frac{1}{[(\beta - \alpha_2)^2 + \gamma^2]}; \\ A_3 &= \frac{1}{A_4} [(\beta^2 - \gamma^2) (\alpha_1 - \beta) (\alpha_2 - \beta) - \gamma^4] + \\ &\quad + 2\beta\gamma^2(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\beta); \\ A_4 &= \frac{1}{A_3} [2\beta\gamma^2(\alpha_1 - \beta)(\alpha_2 - \beta) - \gamma^4] - \\ &\quad - \gamma(\beta^2 - \gamma^2)(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\beta); \\ A_5 &= \gamma[(\beta^2 - \gamma^2)^2 + 4\beta^2\gamma^2] [(\alpha_1 - \beta)^2 + \gamma^2] \times \\ &\quad \times [(\alpha_2 - \beta)^2 + \gamma^2]; \\ B_1 &= \frac{\omega_2^2 + \alpha_1^2}{\omega_2^2(\alpha_1 - \alpha_2)} \frac{1}{[(\beta - \alpha_1)^2 + \gamma^2]}; \\ B_2 &= \frac{\omega_2^2 + \alpha_2^2}{\omega_2^2(\alpha_1 - \alpha_2)} \frac{1}{[(\beta - \alpha_2)^2 + \gamma^2]}; \\ B_3 &= \frac{1}{A_4} [(\beta^2 + \gamma^2)^2 (\omega_1^2 + \beta^2 - \gamma^2) + 4\beta^2\gamma^2] \times \\ &\quad \times [(\alpha_1 - \beta) (\alpha_2 - \beta) - \gamma^2] + 2\omega_1\beta\gamma^2(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\beta); \\ B_4 &= \frac{\gamma}{A_3} [(\beta^2 + \gamma^2)^2 (\omega_1^2 + \beta^2 - \gamma^2) + 4\beta^2\gamma^2] \times \\ &\quad \times (\alpha_1 + \alpha_2 - 2\beta) - 2\omega_1\gamma^2 [(\alpha_1 - \beta) (\alpha_2 - \beta) - \gamma^2]. \end{aligned} \quad (25.8)$$

При комплексных сопряженных корнях $\alpha_{1,2} = -\beta_1 \pm i\gamma_1$; $\alpha_{3,4} = -\beta_3 \pm i\gamma_3$ аналогичным путем приходим к следующим зависимостям:

$$x(t) = \frac{\omega_0^2}{\pi^2} \left[\frac{3\omega_0^2}{6\omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2} (t-1) + \right. \\ \left. + e^{-\beta_1 t} (A_1 \sin \gamma_1 t + A_2 \cos \gamma_1 t) + \right. \\ \left. + e^{-\beta_3 t} (A_3 \sin \gamma_3 t + A_4 \cos \gamma_3 t) \right]; \quad (25.9)$$

$$w(t) = \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{3\omega_0^2}{6\omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2} (t-1) + \right. \\ \left. + e^{-\beta_1 t} (B_1 \sin \gamma_1 t + B_2 \cos \gamma_1 t) + \right. \\ \left. + e^{-\beta_3 t} (B_3 \sin \gamma_3 t + B_4 \cos \gamma_3 t) \right].$$

где

$$A_1 = \frac{1}{A_0} [(\beta_1^2 - \gamma_1^2) [(\beta_1 - \beta_3)^2 - (\gamma_1^2 - \gamma_3^2)] + \\ + 4\beta_1 \gamma_1 (\beta_1 - \beta_3)]; \\ A_2 = \frac{2\beta_1}{A_0} [(\beta_1 - \beta_3)^2 - (\gamma_1^2 - \gamma_3^2) \beta_1 - \\ - (\beta_1 - \beta_3) (\beta_1^2 - \gamma_1^2)]; \\ A_3 = \frac{1}{A_0} [(\beta_3^2 - \gamma_3^2) [(\beta_1 - \beta_3) - (\gamma_1^2 - \gamma_3^2)] + \\ + 4\beta_3 \gamma_3 (\beta_1 - \beta_3)]; \\ A_4 = \frac{2\beta_3}{A_0} [(\beta_1 - \beta_3)^2 - (\gamma_1^2 - \gamma_3^2) \beta_3 + \\ + (\beta_3 - \beta_1) (\beta_3^2 - \gamma_3^2)]; \\ A_5 = \gamma_1 [(\beta_1 - \gamma_1)^2 + 4\beta_1 \gamma_1] \times \\ \times [(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\gamma_1 - \gamma_3)^2] [(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\gamma_1 + \gamma_3)^2]; \\ A_6 = \gamma_1 [(\beta_1 - \gamma_1) + 4\beta_1 \gamma_1] \times \\ \times [(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\gamma_1 - \gamma_3)^2] [(\beta_1 - \beta_3)^2 + (\gamma_1 + \gamma_3)^2]; \\ B_1 = \frac{1}{A_0} [(\omega_1^2 + \beta_1 - \gamma_1) (\beta_1 - \gamma_1) + 4\beta_1 \gamma_1] \times \\ \times [(\beta_1 - \beta_3)^2 - (\gamma_1^2 - \gamma_3^2)] - 4\beta_1 \gamma_1 \omega_1^2 (\beta_1 - \beta_3);$$

$$B_2 = \frac{2\beta_1}{A_0} [(\omega_1^2 + \beta_1 - \gamma_1) (\beta_1 - \gamma_1) + 4\beta_1 \gamma_1] (\beta_1 - \beta_3) + \\ + \beta_1 \omega_1^2 [(\beta_1 - \beta_3)^2 - (\gamma_1^2 - \gamma_3^2)]; \\ B_3 = \frac{1}{A_0} [(\omega_1^2 + \beta_1 - \gamma_1) (\beta_1 - \gamma_1) + 4\beta_1 \gamma_1] \times \\ \times [(\beta_1 - \beta_3)^2 - (\gamma_1^2 - \gamma_3^2)] - 4\beta_1 \gamma_1 \omega_1^2 (\beta_1 - \beta_3); \\ B_4 = \frac{2\beta_3}{A_0} [(\omega_1^2 + \beta_1 - \gamma_1) (\beta_1 - \gamma_1) + 4\beta_1 \gamma_1] (\beta_1 - \beta_3) + \\ + \beta_3 \omega_1^2 [(\beta_1 - \beta_3)^2 - (\gamma_1^2 - \gamma_3^2)].$$

Приведем теперь результаты нескольких числовых проверок. Для расчета была выбрана конструкция нулевой плавучести, у которой масса груза и оболочки равны ($\pi^2 = 1/6$, $\omega_1^2 = \omega_2^2$). Жесткость крепления груза задирывалась.

На рис. 87, а показаны графики скорости и ускорения оболочки и груза при $\omega_1^2 \sim 1$. Там же для сравнения приведены аналогичные функции для абсолютно жесткой сферы нулевой плавучести. Как видно из рисунка, максимальные скорости и ускорения как оболочки, так и груза больше, чем у твердого тела. Из-за наличия в системе упругой связи процесс носит четко выраженный колебательный характер.

На рис. 87, б показаны графики ускорения груза при различных жесткостях упругой связи ($\omega_1^2 = 0,1; 1,0; 10$ и ∞). Из графика следует, что при $\omega_1^2 \sim 0,1$ удается существенно снизить ускорения груза по сравнению с ускорениями твердого тела ($\omega_1^2 = \infty$). При частоте колебаний $\omega_1^2 = 1+10$ ускорения груза значительно превышают ускорения твердого тела. Последующее увеличение жесткости крепления груза, а следовательно, и частоты колебаний приводит к постепенному уменьшению ускорений.

Отметим еще одно важное обстоятельство. На основании первого уравнения системы (25.1) имеем соотношение

$$\omega = x = \frac{1}{\omega_1^2} \ddot{x}. \quad (25.11)$$

Так как при уменьшении частоты колебаний максимальные ускорения снижаются сравнительно медленно, то относительные смещения груза и оболочки всегда при этом усиливаются. Так, в частности, в рассматриваемом выше примере максимальные ускорения груза составляют $\ddot{x}_{\max} = 0,88$ при $\omega_1^2 = 1$ и $\ddot{x}_{\max} = 0,37$ при $\omega_1^2 = 0,1$. Нетрудно подсчитать, что относительные перемещения во втором случае примерно в четыре раза больше, чем в первом.

Порежем теперь к изучению движения упругих оболочек с дополнительными массами. Особенности таких задач рассмотрим

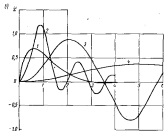
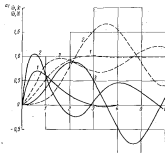


Рис. 87. Параметры движения системы оболочка—груз: а — ускорения и скорости движения оболочки 2 и груза 3 ($\kappa_2^2 = 1$), а также абсолютно жесткой конструкции 1 того же типа;

— — — ускорения; — — — скорости;

б — ускорения груза при различной жесткости его закрепления.

1 — $\kappa_1^2 = \infty$; 2 — $\kappa_1^2 = 10$; 3 — $\kappa_1^2 = 5$; 4 — $\kappa_1^2 = 0,1$.

на следующем примере. Пусть к бесконечно длинной цилиндрической оболочке прикреплен бесконечно длинный линейный груз; погонная масса которого равна M . К оболочке груз крепится либо жестко, либо на упругой связи с погонной жесткостью C .

На оболочку сбоку воздействует ударная волна с плоским фронтом. Так как изучаемая задача является плоской, то вместо оболочки можно исследовать движение кольца с точечной массой M . В предположении несжимаемости жидкости близкую задачу изучал Ю. Б. Борисов [12]. Здесь мы не будем вводить такого допущения и рассмотрим задачу в более общей постановке, учитывая сжимаемость жидкости в акустическом приближении.

Уравнения движения конструкции получим с помощью уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = F_i, \quad (25.12)$$

где T — кинетическая энергия конструкции;
 Π — потенциальная энергия ее деформации;
 F_i — i -я обобщенная сила;
 q_i — i -я обобщенная координата.

Будем полагать, что сосредоточенная масса закреплена на кольце в точке с координатой $\theta \sim \theta_0$. Тогда для того чтобы учесть несимметричный характер деформации оболочки относительно плоскости $\theta = 0$, зададим перемещения в следующем виде:

$$v = v_0 + \sum_{n=1}^N (v_n \sin n\theta + v_{-n} \cos n\theta), \quad (25.13)$$

$$w = w_0 + \sum_{n=1}^N (\omega_n \cos n\theta + \omega_{-n} \sin n\theta). \quad (25.14)$$

При достаточно большом числе членов в рядах с помощью этих зависимостей можно описать любую форму прогиба кольца.

Заметим, что если масса закреплена в точке $\theta_0 = 0$, то конструкция будет деформироваться симметрично относительно диаметральной плоскости, перпендикулярной фронту ударной волны, и в формулах (25.13), (25.14) надо положить $v_{-n} = w_{-n} = 0$.

Обозначим перемещения груза в нормальном и тангенциальном направлениях $\dot{u}_n$ и $\dot{u}_t$. Если груз закреплён на оболочке жестко, то

$$\dot{u}_r = v_0 + \sum_{n=1}^N (d_n v_n + g_n v_{-n}), \quad (25.15)$$

$$\dot{u}_t = w_0 + \sum_{n=1}^N (g_n \omega_n + d_n \omega_{-n}), \quad (25.16)$$

где $d_n = \sin n\theta_0$, $g_n = \cos n\theta_0$.

¹ Можно воспользоваться в уравнении (25.1), а реакцию груза на оболочку рассмотреть для сферическую скалу.

Определим кинетическую и потенциальную энергию системы. Кинетическая энергия оболочки

$$T_0 = \frac{1}{2} \pi^2 \int_0^{2\pi} (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) r_1 d\theta, \quad (25.17)$$

где m^0 — масса единицы поверхности.

Подставляя в (25.17) выражения для перемещений (25.13), (25.14), будем иметь

$$T_0 = \frac{1}{2} \pi r_1 m^0 \left[2\dot{v}_{00}^2 + 2\dot{w}_0^2 + \sum_{n=1}^N (\dot{v}_n^2 + \dot{v}_{-n}^2 + \dot{w}_n^2 + \dot{w}_{-n}^2) \right]. \quad (25.18)$$

Кинетическая энергия груза находится по формуле

$$T_1 = \frac{1}{2} M (\dot{v}_0^2 + \dot{w}_0^2). \quad (25.19)$$

При жестком закреплении груза получим

$$T_1 = \frac{1}{2} M \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [(d_i \dot{v}_i + g_i \dot{w}_{-i})(d_j \dot{v}_j + g_j \dot{w}_{-j}) + (g_i \dot{w}_i + d_i \dot{v}_{-i})(g_j \dot{w}_j + d_j \dot{v}_{-j})] \quad (25.20)$$

$$(d_0 = 0, \quad g_0 = 1).$$

Общая кинетическая энергия всей конструкции

$$T = T_0 + T_1. \quad (25.21)$$

Для плоского случая деформации потенциальная энергия оболочки может быть вычислена по формуле

$$U_0 = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right)^2 + k_1^* \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right)^2 \right] r_1 d\theta, \quad (25.22)$$

где $k_1^* = k^2/12r_1^2$;

h — толщина оболочки.

С учетом формул для перемещений (25.13), (25.14) находим

$$U_0 = \frac{\pi E h r_1}{2(1-\mu^2)} \left[2w_0^2 + \sum_{n=1}^N [(\alpha_n - \alpha_{-n})^2 + (\alpha_{-n} + \alpha_n)^2 + k_1^* (v^2 - 1)^2 (\alpha_n^2 + \alpha_{-n}^2)] \right]. \quad (25.23)$$

При упругом прикреплении груза к оболочке потенциальная энергия деформации связи будет

$$U_1 = \frac{1}{2} C_n \left[\sum_{n=0}^N (g_n w_n + d_n v_{-n}) - w_0 \right]^2 + \frac{1}{2} C_\tau \left[\sum_{n=0}^N (d_n v_n + g_n w_{-n}) - v_0 \right]^2, \quad (25.24)$$

где C_n — жесткость упругой связи при деформации ее по нормали к поверхности оболочки;

C_τ — жесткость упругой связи при деформации ее в тангенциальном направлении.

Найдем теперь обобщенные силы. Согласно общему правилу

$$P_1 = \frac{\partial A}{\partial q_1}, \quad (25.25)$$

где A — работа внешних сил, определяемая в данном случае по формуле

$$A = \int_0^{2\pi} p(\theta, t) w_0 d\theta \quad (25.26)$$

(p — внешнее нормальное давление).

Как обычно, внешнюю нагрузку представим в виде суммы дифракционного давления и давления излучения:

$$p(\theta, t) = p^0(\theta, t) + p^1(\theta, t). \quad (25.27)$$

Будем предполагать, что на конструкцию воздействует единичная ступенчатая волна. Тогда

$$p^0(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^0(t) \cos n\theta. \quad (25.28)$$

Формулы для функций $p_n^0(t)$ получены в § 18.

Учитывая форму нормального изгиба оболочки, давление излучения представим в виде

$$p^1(\theta, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} p_n^1(t) \cos n\theta - \sum_{n=1}^{\infty} p_{-n}^1(t) \sin n\theta, \quad (25.29)$$

где

$$p_n^+(t) = \int_0^t \ddot{w}_n(\tau) \psi_n(t-\tau) d\tau; \quad (25.30)$$

$$p_{-n}^+(t) = \int_0^t \ddot{w}_{-n}(\tau) \psi_n(t-\tau) d\tau.$$

Отметим, что функции $\psi_n(t)$ для обеих форм движения совпадают, так как по сути дела эти формы одинаковы и лишь сдвинуты относительно друг друга по углу θ на четверть периода. Формулы для функций $\psi_n(t)$ приведены в § 18.

Примем в качестве обобщенных координат параметры $\varphi_n, \varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \dots$. Тогда обобщенные силы будут выражаться формулами при $q_1 = \varphi_n$

$$F_0 = 2\pi (p_0^+ - p_0^-);$$

при $q_1 = \varphi_{n+1}$

$$F_{n+1} = \pi (p_n^+ - p_{n+1}^-); \quad (25.31)$$

при $q_1 = \varphi_{n+2}$

$$F_{n+2} = -\pi p_{n+1}^+;$$

при $q_1 = \varphi_n, q_2 = \varphi_{n+1}$

$$F_2 = 0.$$

Теперь мы имеем все необходимые исходные данные для получения уравнений движения.

Рассмотрим случай жесткого закрепления груза на оболочке. Подставляя в уравнения Лагранжа' (25.12) выражения для кинетической и потенциальной энергии и обобщенных сил и воспользовавшись относительной системой единиц измерения, в которой за основные единицы взяты радиус оболочки r_0 , плотность ρ и скорость звука в жидкости c_0 , получим следующую систему уравнений:

$$\ddot{\varphi}_0 + \pi^* \sum_{n=1}^{\infty} (d_n \ddot{\varphi}_n + g_n \ddot{\varphi}_{n+1}) = 0;$$

$$\ddot{\varphi}_n + 2\pi^* a_n \sum_{l=0}^{\infty} (d_l \ddot{\varphi}_l + g_l \ddot{\varphi}_{l+1}) + c_0^2 n (\varphi_n - \varphi_0) = 0, \\ n \geq 1;$$

$$\ddot{\varphi}_{n+1} + 2\pi^* b_n \sum_{l=0}^{\infty} (d_l \ddot{\varphi}_l + g_l \ddot{\varphi}_{l+1}) + c_0^2 n (\varphi_{n+1} + \varphi_{n+2}) = 0, \\ n \geq 1;$$

$$\ddot{\varphi}_0 + \pi^* \sum_{n=1}^{\infty} (g_n \ddot{\varphi}_n + d_n \ddot{\varphi}_{n+1}) + c_0^2 \varphi_0 = \frac{1}{\pi^*} (p_0^+ - p_0^-); \quad (25.32)$$

$$\ddot{\varphi}_n + 2\pi^* b_n \sum_{l=0}^{\infty} (g_l \ddot{\varphi}_l + d_l \ddot{\varphi}_{l+1}) + c_0^2 [1 + k_1^* (n^2 - 1)^2] \varphi_n - \\ - c_0^2 \varphi_{n+1} = \frac{1}{\pi^*} (p_n^+ - p_{n+1}^-), \quad n \geq 1;$$

$$\ddot{\varphi}_{n+1} + 2\pi^* a_n \sum_{l=0}^{\infty} (g_l \ddot{\varphi}_l + d_l \ddot{\varphi}_{l+1}) + \\ + c_0^2 [1 + k_1^* (n^2 - 1)^2] \varphi_{n+1} + c_0^2 \varphi_{n+2} = \\ = -\frac{1}{\pi^*} p_{n+1}^-, \quad n \geq 1.$$

Здесь $\pi^* = M/2\pi m^*$ — отношение массы груза к массе всего кольца.

Система уравнений (25.30) записана в неканоническом виде и в принципе является интегро-дифференциальной, ибо дополнительное давление выражается формулами (25.30). Естественно, что решение такой системы уравнений вызывает серьезные трудности. Имен в виду изложить, в основном, методическую сторону решения подобных задач, ограничимся в дальнейшем рассмотрением случая, когда груз закреплен в точке $\theta_n = 0$. Тогда движение оболочки будет симметрично относительно диаметральной плоскости, перпендикулярной фронту волны, поэтому $\varphi_{n+1} = \varphi_{n+2} = 0$; $g_n = 1$. Уравнения движения оболочки с грузом при этом упрощаются и принимают вид

$$\ddot{\varphi}_n + c_0^2 n^2 \varphi_n - c_0^2 \varphi_{n-1} = 0, \quad n \geq 1;$$

$$\ddot{\varphi}_0 + \pi^* \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\varphi}_n + c_0^2 \varphi_0 = \frac{1}{\pi^*} (p_0^+ - p_0^-); \quad (25.33)$$

$$\ddot{\varphi}_n + 2\pi^* \sum_{l=1}^{\infty} \ddot{\varphi}_l + c_0^2 [1 + k_1^* (n^2 - 1)^2] \varphi_n - c_0^2 \varphi_{n-1} = \\ = \frac{1}{\pi^*} (p_n^+ - p_{n-1}^-), \quad n \geq 1.$$

Воспользуемся для функций $\varphi_n(t)$, с помощью которых находится гидродинамические силы, простейшей аппроксимацией, рекомендованной в § 19,

$$\varphi_n(t) = \left(1 + \frac{q}{2} t\right) \left[1 - \sigma \left(t - \frac{2}{n}\right)\right]. \quad (25.34)$$

Это позволяет взять интеграл в формуле (25.30) и представить гармоника дополнительного давления следующей зависимостью:

$$p_n^+ = \alpha_n \varphi_n + \beta_n \varphi_{n-1} + \gamma_n \varphi_{n-2}, \quad (25.35)$$

где

$$\alpha_n = -0.5n \left[1 - \sigma \left(t - \frac{2}{n}\right)\right]; \\ \beta_n = 1 - \sigma \left(t - \frac{2}{n}\right); \\ \gamma_n = \frac{1}{n} \sigma \left(t - \frac{2}{n}\right). \quad (25.36)$$

Подставляя (25.36) и (25.33), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Введем еще одно допущение. Положим в уравнениях (25.33) $\ddot{u}_0 = 0$, т. е. не будем учитывать тангенциальные силы инерции в оболочке. Тогда

$$u_0 = \frac{1}{s} u_1. \quad (25.37)$$

С учетом этого соотношения окончательный вид уравнений движения будет

$$\begin{aligned} \ddot{u}_0 + \pi^* \sum_{j=0}^N \ddot{u}_j + \frac{1}{\pi^*} \ddot{u}_0 + c_0^2 u_0 &= \frac{1}{\pi^*} p_0^0(t); \\ \ddot{u}_0 + 2\pi^* \sum_{j=0}^N \ddot{u}_j + \frac{1}{\pi^*} (\alpha_0 u_0 + \beta_0 \dot{u}_0 + \gamma_0 \ddot{u}_0) + \\ &+ c_0^2 k_1^* (\pi^2 - 1)^2 u_0 = -\frac{1}{\pi^*} p_0^0(t), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (25.38)$$

Предположим, что на оболочку воздействует единичная ступенчатая волна. Тогда, учитывая выбор выражения для функций $\phi_n(t)$, гармоника результирующего давления можно рассчитать по формулам (19.27)–(19.29). Приступим к решению системы уравнений (25.38). Прежде всего запишем ее в матричной форме (20.3)

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= A^{-1}P; \\ \dot{P} &= -CQ - B^{-1}P + F, \end{aligned} \quad (25.39)$$

Здесь $Q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ — столбец обобщенных координат, причем для того чтобы сохранить обычную форму записи матриц, номера функций $u_n(t)$ увеличены на единицу, т. е. нулевая функция $u_0(t)$ обозначается q_1 , первая функция $u_1(t)$ обозначается q_2 и т. д.; $P = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ — столбец скоростей.

Элементы матрицы инерции A , затухания B и возмущения C в разбираемом примере имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2\pi^* + 2\delta_{11}; \\ a_{nn} &= 2\pi^* + \delta_{nn} \left(1 + \frac{\pi^2}{s^2}\right), \quad n \neq 1, \\ b_{1n} &= 2\delta_{1n} \frac{\Delta}{\pi^*}; \\ b_{nn} &= \delta_{nn} \frac{\beta_0}{\pi^*}, \quad n \neq 1; \\ c_{11} &= 2\delta_{11} c_0^2; \\ c_{1n} &= \delta_{1n} \left[\frac{\alpha_0}{\pi^*} + c_0^2 k_1^* (s^2 - 2s)^2 \right], \quad n \neq 1. \end{aligned} \quad (25.40)$$

$$\begin{aligned} \alpha_n &= -0.5(s-1) \left[1 - \sigma \left(t - \frac{2\Delta}{s-1} \right) \right]; \\ \beta_n &= 1 - \sigma \left(t - \frac{2\Delta}{s-1} \right); \\ \gamma_n &= \frac{1}{s-1} \sigma \left(t - \frac{2\Delta}{s-1} \right); \\ \delta_{nn} &= \begin{cases} 1 & \text{при } s = \pi; \\ 0 & \text{при } s \neq \pi; \end{cases} \\ \Delta &= \begin{cases} 1 & \text{для сжимаемой жидкости;} \\ 0 & \text{для несжимаемой жидкости.} \end{cases} \end{aligned} \quad (25.41)$$

Столбец заданных возмущающих функций находится по формулам

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{2}{\sigma^0} [a_1(t) - b_1(t)], \\ F_{i+1} &= \frac{1}{\sigma^0} \left[a_i(t) - b_i(t) - \right. \\ &\left. - \frac{s-1}{2} \left[\int_0^t b_i(\tau) d\tau - \sigma \left(t - \frac{2}{s-1} \right) \int_0^{t-\frac{2}{s-1}} b_i(\tau) d\tau \right] \right]. \end{aligned} \quad (25.42)$$

Формулы для функций a_n и b_n приведены в (19.28) и (19.29). Необходимо только заменить в них π на $s-1$.

Для расчетного примера была выбрана стальная оболочка с относительной толщиной $h/r_1 = 0.01$ ($\pi^2 = 0.08$, $c_0^2 = 12.2$). Масса груза принималась равной $\pi^* = 0.01$; 0.5; 1.0; 2.0; 5.26. В последнем случае оболочка с грузом имела нулевую плавучесть. Система уравнений (25.39) решалась численно на ЭВМ. Число гармоник в ряду (25.14) было принято равным одиннадцати; шаг интегрирования — $\Delta t = 0.02$. В ходе расчетов определялись прогибы оболочки в точках $u_i = \frac{n}{18} i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, 18$), а также скорость и ускорение груза.

Обратимся к анализу результатов расчета. На рис. 88 показаны формы прогиба оболочки в момент времени $t = 1$, соответствующие различным значениям π^* . Графики свидетельствуют о том, что даже небольшой груз существенно искажает характер деформации оболочки. Вследствие действия сил инерции груз движется значительно медленнее соседних участков оболочки. Поэтому перемещение груза тем меньше, чем больше его масса. Влияние массы на скорость и ускорение груза $\dot{u}_1$, $\ddot{u}_1$ иллюстрирует рис. 89 и 90. Интересно сравнить ускорение, возникающее на прикрепленном к уязвотой оболочке грузе, с ускорениями

абсолютно жесткого цилиндра того же веса. На рис. 91 и 92 приведены соответствующие графики для сравнительно легкого ($m^* = 0,5$) и тяжелого ($m^* = 5,25$) грузов. Нетрудно видеть, что ускорения легкого груза существенно превосходят по максимальной величине ускорения жесткого тела. В случае большой массы груза имеет место обратная картина.

Соотношение между максимальными ускорениями груза на упругой оболочке $\omega_{\max}$ и жесткого цилиндра того же веса $\omega_{\max}^0$ показано на рис. 93. Как следует из рисунка, при весе груза,



Рис. 88. Значения нормального прогиба оболочки в момент времени $t = 1$ при различной массе груза.
1 — $m^* = 0$; 2 — $m^* = 0,1$; 3 — $m^* = 0,5$; 4 — $m^* = 5,25$.

равном двум и более весам оболочки, его максимальные ускорения составляют около половины максимальных ускорений твердого тела. При уменьшении массы груза, начиная от $m^* = 1$ (масса груза равна массе оболочки), наблюдается резкое увеличение ускорений груза. Укажем, что для оболочки без груза максимальные ускорения в точке $0 = 0$ превосходят ускорения жесткого цилиндра того же веса в данном примере в 9,5 раза.

В рассматриваемом нами интервале времени ($0 \leq t \leq 2$) скорость движения груза также значительно отличается от скорости жесткого цилиндра (см. рис. 91 и 92).

Выясним теперь, как влияет сжимаемость жидкости на параметры движения оболочки с грузом. На рис. 94 показаны графики ускорения, скорости и перемещения груза с массой $m^* = 0,5$ в сжимаемой и несжимаемой жидкости. В последнем случае деформационное давление на жесткий неподвижный цилиндр сохранялось таким же, как и в предшествующем расчете, но для всех гармоник $n \geq 1$ дополнительное давление, вызванное деформацией

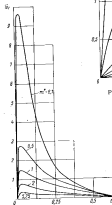


Рис. 89. Ускорения движущего груза.

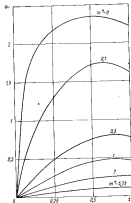


Рис. 90. Скорости движущего груза.

Рис. 90. Скорость и ускорение груза с массой $m^* = 0,25$.
— скорость;
--- ускорение;
--- абсолютное ускорение.



Рис. 91. Скорость и ускорение груза с массой $m^* = 0,5$.
— скорость;
--- ускорение;
--- абсолютное ускорение.

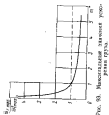


Рис. 92. Скорость и ускорение груза с массой $m^* = 1,0$.
— скорость;
--- ускорение;
--- абсолютное ускорение.

щей и движением оболочки, учитывалось с помощью коэффициента присоединенной массы. Как следует из рис. 94, в рассмотренный нами начальный период времени движение конструкции в несжимаемой жидкости происходит медленнее, чем в сжимаемой. Нетрудно объяснить природу этого явления. В первый момент взаимодействия конструкции с ударной волной сопротивление сжимаемой жидкости пропорционально скорости перемещения оболочки, а сопротивление несжимаемой жидкости —

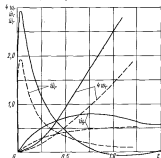


Рис. 94. Графики скорости и ускорения груза в сжимаемой и несжимаемой жидкостях.

ускорению. Но скорость движения конструкции вначале мала, а ускорения велики. Следовательно, несжимаемая жидкость будет оказывать движению конструкции большее сопротивление, чем сжимаемая. По этой причине оболочка в несжимаемой жидкости в начале процесса движется медленнее. С течением времени сжимаемость жидкости перестанет играть существенную роль и параметры движения оболочки в сжимаемой и в несжимаемой жидкости будут достигать близких.

Случай упругого закрепления груза, исследованный Ю. А. Федоровичем, будет отличаться от рассмотренного выше лишь тем, что уравнения типа (26.32) запишутся сразу в канонической форме, т. е. в каждое уравнение будет входить вторая производная лишь от одной неизвестной. Это несколько упрощает решение задачи.

УСТОЙЧИВОСТЬ СОПРИКАСАЮЩИХСЯ С ЖИДКОСТЬЮ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

§ 26. Основные особенности и методы исследования процесса потери устойчивости оболочек в динамике

В предыдущих главах при исследовании поведения оболочек при динамических нагрузках не учитывалась возможность потери ими устойчивости. В то же время в инженерной практике нередки случаи, когда оболочки получают повреждения или разрушаются именно по этой причине.

Как известно, при статическом анализе устойчивости главной проблемой является определение так называемой критической нагрузки, при которой начальная форма прогиба оболочки перестает быть устойчивой и оболочка переходит в новое состояние равновесия, характеризующееся обычно появлением на ее поверхности большого числа выгины.

Ничего обстоит дело в динамических процессах. При кратковременном действии нагрузки переход конструкции в неустойчивое состояние сам по себе не представляет опасности, ибо вследствие наличия сил инерции оболочка за время действия нагрузки может не успеть перейти в изгибную форму равновесия и получить остаточные выгины. Поэтому главной задачей динамического анализа является проверка технической устойчивости оболочки, заключающаяся в том, чтобы установить, не перейдут ли выгибы прогиба в течение переходного процесса в некоторой опасной величине.

Для оценки несущей способности оболочек в динамике необходимо установить величину безопасной и разрушающей нагрузки.

Условием называть безопасной ту максимальную нагрузку (или импульс нагрузки), после воздействия которой оболочка не получает остаточных деформаций. Если предположить, что материал конструкции является идеально упруго-пластическим, то движение оболочки можно изучать, считая ее упругой, а для определения безопасной нагрузки применить условия возникновения текучести Мизеса либо Сен-Венана. Напомним, что для

оболочки, напряженное состояние в которой предполагается плоским, условие текучести Мизеса имеет вид

$$\sigma_1 = \sigma_r, \quad (26.1)$$

$$\text{где } \sigma_1 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$$

σ_1, σ_2 — главные нормальные напряжения;

σ_r — предел текучести при одностороннем растяжении (сжатии).

Согласно критерию Сен-Венана материал оболочки перейдет в пластическое состояние, если будет выполнено одно из следующих равенств:

$$|\sigma_1| = \sigma_r; |\sigma_2| = \sigma_r; |\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_r. \quad (26.2)$$

Для определения разрушающей нагрузки необходимо исследовать движение оболочки с учетом появления и развития пластических деформаций. Эта задача выходит за рамки данной книги.

В момент возникновения пластических деформаций изгибы оболочки могут быть значительными (порядка толщины и более), поэтому для исследования процесса потери устойчивости в принципе надо пользоваться нелинейными уравнениями. Так как обычно на поверхности оболочки образуются небольшие по размерам выгины, то вполне допустимо применение теории пологих оболочек. Следует также указать, что в общем случае в уравнениях движения надо удерживать не только нормальные, но и тангенциальные силы инерции, ибо без учета последних нельзя описать волны растяжения — сжатия, возникающие в срединной поверхности оболочки при ударных нагрузках.

В данной главе процесс потери устойчивости будет изучаться на примере круговой цилиндрической оболочки. Поэтому выпишем необходимые для дальнейшего анализа зависимости для оболочки указанной формы.

Уравнения движений круговой цилиндрической оболочки имеют следующий вид [17]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial S}{\partial \theta} &= \rho^* h \frac{\partial a}{\partial t}; \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial N_1}{\partial \theta} &= \rho^* h \frac{\partial v}{\partial t}; \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{2}{r_1} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2 M_3}{\partial \theta^2} + N_1 (\kappa_1 + \kappa_2) + \\ &+ S (\chi + \chi^2) + N_2 \left(\frac{1}{r_1} + \kappa_2 + \kappa_3^2 \right) = \\ &= \rho^* h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(\chi, \theta, t). \end{aligned} \quad (26.3)$$

Здесь N_1, N_2, S, M_1, M_2, H — усилия и моменты, отнесенные к единице длины сечения и приложенные к срединной поверхности (рис. 96);

u, v, w — компоненты перемещения точек срединной поверхности в продольном, поперечном и радиальном направлениях;

κ_1, κ_2, χ — изменение кривизмы и кручение (нулик сверху относится к начальным значениям величин);

r_1, h — радиус и толщина оболочки;

ρ^0 — плотность материала;

$p(x, \theta, t)$ — внешняя нормальная нагрузка;
 x, θ — продольная и угловая координаты.

Усилия выражаются через относительные деформации срединной поверхности по формулам:

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\epsilon_1 + \mu\epsilon_2);$$

$$N_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\epsilon_2 + \mu\epsilon_1);$$

$$S = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \gamma.$$

Моменты зависят от изменений кривизмы и кручения

$$M_1 = D(\kappa_1 + \mu\kappa_2);$$

$$M_2 = D(\kappa_2 + \mu\kappa_1);$$

$$H = D(1-\mu)\chi;$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

В свою очередь относительные деформации, изменения кривизмы и кручение — есть функции перемещений срединной поверхности оболочки

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2;$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{r_1} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w - w_0}{r_1} + \frac{1}{2r_1^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{2r_1^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2;$$

$$\gamma = \frac{1}{r_1} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{r_1} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \theta};$$

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2}; \quad \kappa_2 = -\frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial \theta^2};$$

$$\chi = -\frac{1}{r_1} \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x \partial \theta};$$

$$M_1^0 = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}; \quad M_2^0 = -\frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2}; \quad S^0 = -\frac{1}{r_1} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta};$$

w_0 — начальная погрешность оболочки.

Зависимости (26.3) — (26.7) образуют замкнутую систему из 15 уравнений, в которую входит столько же неизвестных. В общем случае целесообразно принять за основные независимые перемещения u, v и w , а остальные неизвестные из уравнений движения (26.3) исключить. Тогда приходим к нелинейной системе из трех уравнений с тремя неизвестными.

Если волновой картиной распространения напряжений в срединной поверхности оболочки пренебречь, то итерационные члены в первых двух уравнениях системы (26.3) следует отбросить. В этом случае задачу можно несколько упростить и свести к двум уравнениям. Введем в рассмотрение функцию напряжений Φ , связавшую с усилиями следующими соотношениями:

$$N_1 = \frac{h}{r_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad N_2 = h \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}; \quad S = -\frac{h}{r_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x \partial \theta}. \quad (26.8)$$

Нетрудно убедиться в том, что при подстановке зависимостей (26.8) в первые два уравнения системы (26.3) они удовлетворяются тождественно, а третье уравнение может быть приведено к виду

$$\rho^0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{h} D \nabla^4 (w - w_0) - \frac{1}{r_1} L(w, \Phi) - \frac{1}{r_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - p(x, \theta, t) = 0, \quad (26.9)$$

где

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x \partial \theta};$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2}{r_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r_1^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4}.$$

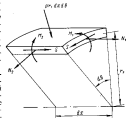


Рис. 96. Усилия и моменты, действующие на элемент оболочки.

Если теперь путем дифференцирования исключить из уравнений (26.6) тангенциальные перемещения u и v , а затем выразить относительные деформации по формулам (26.4) и (26.8) через функцию Φ , то приходим к следующему уравнению, которое называется уравнением сплошности или совместности деформаций:

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \Phi = -\frac{1}{2\gamma} [L(w, \bar{w}) - L(w_0, \bar{w}_0)] - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} (w - w_0). \quad (26.10)$$

Таким образом, для исследования устойчивости оболочки надо решить систему уравнений (26.9) и (26.10) относительно двух неизвестных w и Φ при соответствующих граничных и начальных условиях.

Отметим, что указанные уравнения впервые были получены для анализа статической устойчивости оболочек в нелинейной постановке. В дальнейшем уравнения были дополнены инерционным членом и стали применяться в динамических задачах.

Точное решение уравнений (26.9) и (26.10) удается получить в очень редких случаях. Поэтому большинство задач как в статической, так и в динамической постановке исследуется приближенными методами. Наиболее широко применяются либо метод сеток, либо метод Бубнова—Галеркина. Обоснование правомерности использования последнего метода в нелинейных задачах теории оболочек дано в работах И. И. Ворovichа [19, 20]. Кратко остановимся на особенностях применения метода Бубнова—Галеркина к уравнениям (26.9), (26.10).

На основании экспериментальных данных и соображений физического характера нормальный прогиб оболочки аппроксимируется конечной суммой линейно независимых функций

$$w(x, \theta, t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) f_i(x, \theta), \quad (26.11)$$

где $q_i(t)$ — неизвестные функции времени; $f_i(x, \theta)$ — заданные функции координат, удовлетворяющие граничным условиям на краях оболочки.

Внося (26.11) в правую часть (26.10) и интегрируя это уравнение, получим зависимость

$$\Phi(x, \theta, t) = F(q_i, f_i). \quad (26.12)$$

Запишем для краткости уравнение равновесия (26.9) в виде $X(w) = 0$.

Подставив в него выражения (26.11) и (26.12). При этом функции $X(q_i, f_i)$ не будет тождественно равна нулю. Для того чтобы обеспечить приближенное удовлетворение уравнению равновесия, по-

требуем, чтобы функция $X(q_i, f_i)$ была ортогональна ко всем функциям $f_j(x, \theta)$. Записав условия ортогональности, будем иметь

$$\int_S X(q_i, f_i) f_j(x, \theta) dx d\theta = 0, \quad (26.13)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

(S — поверхность оболочки).

После интегрирования (26.13) приходим к системе N линейных обыкновенных уравнений для функции $q_i(t)$. Решение этой системы можно получить численно. Следует отметить, что к уравнениям (26.13) можно прийти, опираясь на принцип возможных перемещений. Действительно, функция $X(w)$ есть не что иное, как сумма внешних и внутренних сил, отнесенных к единице площади срединной поверхности оболочки и спроектированных на нормаль, а $f_j(x, \theta)$ есть возможные перемещения. Следовательно, интеграл (26.13) выражает условие равенства нулю работы всех сил на возможном перемещении, что и должно иметь место в положении равновесия.

Необходимо указать, что к тем же уравнениям для функций $q_i(t)$ можно прийти и с помощью энергетического метода. Для этого надо определить кинетическую и потенциальную энергию оболочки, а также работу внешних сил.

При учете только нормальных сил инерции кинетическая энергия оболочки равна

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_S \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 r_1 dx d\theta. \quad (26.14)$$

Потенциальная энергия деформации пологой цилиндрической оболочки рассчитывается по формулам: энергия растяжения — сжатия срединной поверхности

$$\Pi_1 = \frac{h}{2E} \int_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - \frac{2(1+\mu)}{r_1^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right)^2 \right) \right] r_1 dx d\theta, \quad (26.15)$$

энергия изгиба

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} D \int_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - \frac{2(1-\mu)}{r_1^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right)^2 \right) \right] r_1 dx d\theta, \quad (26.16)$$

$$w_1 = w - w_0.$$

Работа внешних сил находится согласно зависимости

$$A_s = \int_V p(x, \theta, t) w(x, \theta, t) r_1 dx d\theta. \quad (26.17)$$

При вычислениях кинетической и потенциальной энергии и работы внешних сил используются приближенные зависимости для прогиба (26.11) и функции напряжений (26.12). Уравнения для функций $q_i(t)$ можно получить с помощью уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial (P_1 + P_2)}{\partial q_i} = \frac{\partial A_s}{\partial q_i}. \quad (26.18)$$

Здесь функции q_i полагаются обобщенными координатами. Можно также отнести силы инерции по принципу Даламбера к внешним силам и составить уравнения движения по методу Рунта

$$\frac{\partial (P_1 + P_2 - A_s - A_{ин})}{\partial q_i} = 0, \quad (26.19)$$

где $A_{ин}$ — работа сил инерции.

Обратим внимание на одно важное допущение, широко используемое при анализе устойчивости оболочек в динамике. Обычно предполагается, что внешняя нагрузка приложена к оболочке так, что она не вызывает изгиба по форме потери устойчивости. Тогда процесс потери устойчивости начнется только в том случае, если начальные условия для перемещения w будут ненулевыми. Чаще всего полагают, что оболочка имеет начальные неперпендикулярности формы и задает их в виде

$$w(x, \theta) = \sum_{j=1}^n q_j^0(t) \psi_j(x, \theta). \quad (26.20)$$

Тогда начальные условия для функций $q_j(t)$ будут следующими:

$$q_j(0) = q_j^0, \quad \dot{q}_j(0) = 0. \quad (26.21)$$

Анализ устойчивости оболочки сводится к исследованию процесса развития начальных прогибов под действием нагрузки, т. е. в математическом смысле будет решаться задача Коши.

Предположение о наличии начальных неперпендикулярностей формы конструкции в принципе не является обязательным. При воздействии неравномерной нагрузки процесс потери устойчивости возникает и у идеально гладкой оболочки.

Оставим теперь на определенном гидроаэромеханических сил. По-прежнему будем считать, что движение жидкости описывается полным уравнением либо, при неучете сжимаемости жидкости,

уравнением Лапласа. Если жидкость снаружи не ограничена, то граничные условия в бесконечности зависят от природы дифференциального уравнения в частных производных для потенциала φ . Если это уравнение Лапласа, как в случае течения несжимаемой жидкости, то требуется лишь, чтобы в отдаленных точках находилась в состоянии покоя. Если дифференциальное уравнение является волновым, как это имеет место при неустановившемся движении с учетом сжимаемости, то условия на бесконечности должны устанавливаться дополнительно, что возмущения волнового типа распространяются наружу от их источников.

Граничное условие на оболочке состоит просто в том, что вдоль всей поверхности оболочки составляющая скорости жидкости dw/dn , перпендикулярная этой поверхности, определяется скоростью самой оболочки. Частицы, соприкасающиеся с оболочкой, должны участвовать в ее движении по направлению нормали к поверхности, поскольку внутри жидкости, если исключить не затрагиваемые нами здесь случаи квантации, не должно образовываться каверн.

В этой главе, как и в предыдущих, возмущения, вызываемые в жидкости колебаниями оболочки, будем считать достаточно малыми для того, чтобы можно было решать гидродинамическую задачу в линейной постановке. Это, в частности, означает возможность линеаризации граничных условий и отнесение их к недеформированной поверхности оболочки.

Внешние силы разобьем на две категории. Силы первой категории, действующие на абсолютно жесткую неподвижную в пространстве конструкцию, считаем известными из решения соответствующей гидродинамической задачи. Силы второй категории определяются движением оболочки.

В ряде случаев при исследовании устойчивости оболочек жидкость можно считать несжимаемой. Это допущение существенно облегчает решение задач, так как позволяет учитывать гидродинамические силы второй категории с помощью коэффициентов присоединенной массы.

Литература, освещающая вопросы устойчивости соприкасающихся с жидкостью оболочек, пока небольшая. К ней относятся статьи А. К. Перцева и Ю. И. Кадашенина [48], [49], Б. Н. Степанова [64], Е. Н. Миса [41], А. С. Вольмира и М. С. Герштейна [18], Э. И. Григоровца, А. Г. Гершковца и Ф. Н. Шклярчука [25, 26]. Данному вопросу посвящена также одна из глав в монографии А. С. Вольмира [17]. Изучением устойчивости оболочек при воздействии ударной волны занимались С. С. Иванова, Н. С. Соловьева, В. В. Сорокин.

Здесь будут рассмотрены процессы потери устойчивости цилиндрической оболочки бесконечной и конечной длины, окруженной либо безграничной жидкостью, либо слоем жидкости.

§ 27. Устойчивость цилиндрической оболочки, окруженной безграничной жидкостью, при равномерной динамической нагрузке

Рассмотрим процесс потери устойчивости бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки, погруженной в безграничную акустическую среду. Будем предполагать, что оболочка подкреплена равноотстоящими поперечными ребрами, которые абсолютно жестки на изгиб, но не сопротивляются обжатю и не имеют массы². В этом случае оболочка будет терять устойчивость только в пролетах между ребрами. К боковой поверхности оболочки приложено гидростатическое давление p_0 и динамическая нагрузка $p^0(t)$. Будем считать, что внешние силы распределены по поверхности оболочки равномерно.

Конечно, в реальных условиях динамическая нагрузка является всегда в той или иной степени неравномерной, ибо волны давления распространяются в жидкости с конечной скоростью. Однако сделанное допущение не влияет на основные качественные закономерности процесса потери устойчивости оболочки и в то же время существенно упрощает решение. Более точная постановка задачи, учитывающая неравномерность приложения нагрузки по поверхности оболочки, изложена ниже, в § 29.

При сделанных допущениях процесс потери устойчивости будет происходить в каждом пролете между ребрами идентично, поэтому можно рассматривать деформацию оболочки лишь в пределах одного пролета.

Для решения задачи воспользуемся уравнениями (26.9), (26.10), которые запишем в безразмерном виде, приняв за основные единицы измерения радиус оболочки r_0 , плотность жидкости ρ и скорость звука в жидкости c_0 ($r_1 = r = c_0 = 1$),

$$\ddot{w} + c_0^2 \nabla^2 (w - w_0) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial t^2} \left(1 - \frac{\partial w}{\partial t} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \rho} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x \partial \theta} \frac{\partial w}{\partial x \partial \theta} = \frac{1}{\rho^2} p(x, \theta, t) \quad (27.1)$$

$$\frac{1}{\rho^2 (1 - \mu^2)} \nabla^2 \Phi^* = \left(\frac{\partial w}{\partial t \partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial \rho} - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x \partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2} \quad (27.2)$$

² Учет сил сопротивления и изгиба ребер не представляет особых трудностей, но не вносит в числительную сторону каких-либо изменений в формулу не производится.

Напомним, что в этих уравнениях перемещение измеряется в долях радиуса, единица давления равна ρc_0^2 , единица времени есть $\frac{r_0}{c_0}$,

$$c_0^2 = \frac{E}{\rho^2 (1 - \mu^2) c_0^2}; \quad \Phi^* = \frac{\Phi r_0}{\rho c_0^2}; \quad k_1^* = \frac{\lambda^2}{12 \tau_1}; \quad \Phi^* = \frac{\lambda D}{\rho c_0^2} \quad (27.3)$$

Зададим прогиб оболочки следующим выражением:

$$w(x, \theta, t) = q_1(t) + q_2(t) \cos \alpha x \cos \theta + q_3(t) \cos 2\alpha x \quad (27.4)$$

где $\alpha = \frac{\pi}{l}$;
 l — расстояние между ребрами, отнесенное к r_0 ;
 x — безразмерная продольная координата ($x = 0$ в середине пролета);
 n — число волн потери устойчивости по окружности;
 q_1, q_2, q_3 — неизвестные функции времени.

Отметим, что форма прогиба (27.4) неоднократно успешно использовалась при анализе как статической, так и динамической устойчивости оболочек [17]. Первый член в формуле (27.4) описывает равномерное обжатие оболочки. До начала процесса потери устойчивости оболочка деформируется только по этой форме. Второй член в указанной формуле описывает изгибную форму прогиба, которую принимает оболочка, теряя устойчивость движения по исходной форме равновесия. Третий член необходим для того, чтобы отразить экспериментальный факт, что вмятины на оболочке всегда получаются более глубокими, чем выпуклости.

Заметим, что так как рассматривается бесконечно длинная оболочка, то никаких граничных условий на прогиб не накладываемся. Необходимо обеспечить лишь периодичность деформаций как по длине, так и по окружности, чему формула (27.4) удовлетворяет.

Будем полагать, что оболочка имеет начальные неупругости, совпадающие с формой потери устойчивости

$$w_0(x, \theta) = q_0 \cos \alpha x \cos \theta \quad (27.5)$$

Начальные неупругости реальных оболочек не совпадают, как правило, с формой потери устойчивости. Однако действительную форму прогиба можно представить в виде разложения в ряд Фурье, в котором будут гармоника с любым номером n . В теоретическом решении можно удерживать лишь ту гармонику, которая совпадает с формой потери устойчивости, ибо малые начальные неупругости по другим формам оказывают на процесс потери устойчивости слабое влияние.

Остановимся на определении дополнительного давления, возникающего в жидкости при потере устойчивости оболочки.

Можно показать, что если оболочка движется в жидкости по формам $f_j(x, \theta)$, которые являются собственными функциями для волнового уравнения в области, окружающей оболочку, то движение наилучшим, возникающее на поверхности оболочки при движении последней по закону

$$w(x, \theta, t) = q_j(t) f_j(x, \theta),$$

определяется формулой

$$p_j^*(x, \theta, t) = -f_j(x, \theta) \int_0^t q_j(\tau) \psi_j(t - \tau) d\tau, \quad (27.6)$$

где $\psi_j(t)$ — единичная функция сопротивления.

В данном случае функции, входящие в выражение (27.4), $f_1 = 1$, $f_2(x, \theta) = \cos \alpha x \cos n\theta$, $f_3(x) = \cos 2\alpha x$, являются собственными для волнового уравнения, описывающего движение жидкости в пространстве, окружающем бесконечно длинный цилиндр. Поэтому мы можем воспользоваться формулой (27.6). Формулы для единичных функций сопротивления ψ_j были получены в работе [22]. Однако эти зависимости слишком сложны и неудобны для использования. Поэтому воспользуемся приближенными соотношениями. При равномерном обтекании оболочки применим формулу (19.3), согласно которой¹

$$\psi_1(t) = 0,15 + 0,85e^{-0,3\pi t}, \quad (27.7)$$

При катящемся движении оболочку используем рекомендованную в § 17 линейную аппроксимацию

$$\psi_j(t) = \left(1 - \frac{t}{2m_j}\right) [1 - \sigma(t - t_*)], \quad (27.8)$$

$$(j = 2, 3)$$

где $t_* = 2m_j$;

m_j — присоединенная масса жидкости при движении оболочки по j -й форме прогиба.

Пользуясь результатами первой главы, запишем

$$m_2 = -\frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{K_2(2\alpha)}{K_\alpha(\alpha)}\right) = -\frac{K_2(\alpha)}{K_\alpha(\alpha)},$$

$$m_3 = \frac{K_3(2\alpha)}{2\alpha K_1(2\alpha)} = -\frac{K_3(2\alpha)}{K_2(2\alpha)}, \quad (27.9)$$

¹ В соответствии с критерием в данном параграфе обозначениям, введенным в формуле (19.3) заменим 1.

Если $\alpha \gg 1$, то для цилиндрических функций можно использовать следующие асимптотические зависимости:¹

$$K_\alpha(u) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} (u^2 + \alpha^2)^{-\frac{1}{4}} \exp \left[\alpha \operatorname{arsh} \frac{\alpha}{u} - (u^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}} \right],$$

$$K'_\alpha(u) \sim -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(u^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{4}}}{u} \times$$

$$\times \exp \left[\alpha \operatorname{arsh} \frac{\alpha}{u} - (u^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}} \right],$$

$$\exp [\lambda t] = e^{\lambda t}.$$

С учетом этих формул вместо (27.9) будем иметь

$$m_2 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}, \quad m_3 = \frac{1}{2\alpha}. \quad (27.10)$$

Как было показано в § 17, при аппроксимации единичных функций сопротивления линейной зависимостью (27.8) формула для излучаемого давления принимает вид

$$p_j^*(x, \theta, t) = -(2\alpha q_j + \beta_j \dot{q}_j + \gamma_j \ddot{q}_j) f_j(x, \theta), \quad (27.11)$$

где

$$\alpha_j = -\frac{1}{2\alpha_j} [1 - \sigma(t - t_*)];$$

$$\beta_j = 1 - \sigma(t - t_*)x;$$

$$\gamma_j = m_j \sigma(t - t_*).$$

$$(27.12)$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением оболочек, у которых прогиб между ребрами не превышает радиуса оболочки ($\alpha > 1$). Для таких оболочек время $t_* = 2m_j$, в течение которого надо учитывать вязкость жидкости, составляет десятые доли единицы. Расчеты показывают, что в начале процесса потери устойчивости катящиеся против течения оболочки развиваются очень медленно, следовательно, малы и гидродинамические силы. Бурный рост прогибов обычно наступает при $t > 1$, когда жидкость движется, как несжимаемая среда. Это обстоятельство позволяет вообще не учитывать сжимаемость жидкости при катящемся движении оболочки и вместо формулы (27.11) применять для оценки гидродинамических сил следующую зависимость:

$$p_j^*(x, \theta, t) = -m_j \ddot{q}_j f_j(x, \theta), \quad (27.13)$$

$$j = 2, 3.$$

¹ Erdelyi et al., Higher Transcendental Functions, vol. 2, New York, 1953.

Таким образом, общее выражение для суммарной нагрузки, действующей на оболочку в процессе ее деформации, может быть записано в следующем виде:

$$p(x, \theta, t) = p^s(t) + p_{\text{ex}} - \int_0^{2\pi} q_1(x) [0,15 + 0,85e^{-0,39(1-\eta)}] d\alpha - m_0 \ddot{\varphi}_2(t) \cos \alpha x \cos n\theta - m_1 \ddot{\varphi}_3(t) \cos 2\alpha x. \quad (27.14)$$

Перейдем теперь к определению внутренних сил. Для этого подставим в уравнение сплошности (27.2) выражения для полного (27.4) и начального (27.5) прогибов и проинтегрируем его по методу неопределенных коэффициентов. В результате получим частное решение этого уравнения

$$\frac{\Phi_{x,p}^*}{\kappa^2 c_2^2 (1-\mu^2)} = B_1 \cos 2\alpha x + B_2 \cos 2n\theta + B_3 \cos \alpha x \cos n\theta + B_4 \cos 3\alpha x \cos n\theta. \quad (27.15)$$

Здесь обозначено

$$B_1 = -\frac{1}{32\kappa^2} (\varphi_2^2 - \varphi_1^2 - \frac{8}{\pi^2} \varphi_1);$$

$$B_2 = -\frac{\lambda^2}{32} (\varphi_2^2 - \varphi_1^2);$$

$$B_3 = -\frac{\lambda^2}{4(1+\lambda^2\mu^2)} \left[2\varphi_1\varphi_2 - \frac{1}{\pi^2} (\varphi_2 - \varphi_1) \right];$$

$$B_4 = -\frac{2\lambda^2}{(1+2\lambda^2\mu^2)} \varphi_2\varphi_3; \quad \lambda = \frac{\pi}{\alpha}. \quad (27.16)$$

К частному решению надо добавить общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\Phi_{x,p}^* = -\frac{N_1^0 \varphi}{2} - \frac{\kappa^2 \lambda^2}{2}, \quad (27.17)$$

где N_1^0 , N_2^0 — средние усилия в продольном и поперечном направлениях.

Средние усилия можно найти, воспользовавшись условиями замкнутости оболочки и несоблюдимости ребер жесткости. Условие замкнутости записывается в виде

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta = 0 \quad (27.18)$$

и означает, что приращение тангенциального перемещения φ при изменении угла θ на 2π должно быть равно нулю.

Используя зависимости

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - (\alpha - \alpha_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} \right)^2$$

и

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\kappa^2 c_2^2 (1-\mu^2)} (N_2 - \mu N_1) = \frac{1}{\kappa^2 c_2^2 (1-\mu^2)} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} - \mu \frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta} \right),$$

получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{\kappa^2 c_2^2 (1-\mu^2)} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} - \mu \frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta} \right) + (\alpha - \alpha_0) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} \right)^2, \quad (27.19)$$

где

$$\Phi^* = \Phi_{x,p}^* + \Phi_{x,\mu}^*.$$

Подставляя (27.19) в (27.18), приходим к следующему выражению:

$$N_2^0 - \mu N_1^0 = \kappa^2 c_2^2 (1-\mu^2) \left[\varphi_1 - \frac{\kappa^2}{8} (\varphi_2^2 - \varphi_1^2) \right]. \quad (27.20)$$

Так как рассматривается оболочка бесконечной длины, то поперечные ребра в процессе деформации обогнуться не смогут, для чего должно выполняться условие

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx d\theta = 0. \quad (27.21)$$

Поступая аналогично предыдущему случаю, получим такое соотношение:

$$N_1^0 - \mu N_2^0 = -\kappa^2 c_2^2 (1-\mu^2) \omega^2 \left[\varphi_2^2 + \frac{1}{2} (\varphi_2^2 - \varphi_1^2) \right]. \quad (27.22)$$

Теперь нетрудно выразить функцию напряжений через параметры q_i

$$\frac{\Phi^*}{\kappa^2 c_2^2 (1-\mu^2)} = B_1 \cos 2\alpha x + B_2 \cos 2n\theta + B_3 \cos \alpha x \cos n\theta + B_4 \cos 3\alpha x \cos n\theta - \frac{\varphi^2}{2(1-\mu^2)} \left[\varphi_1 - \omega^2 \varphi_2^2 - \frac{1}{8} (\omega^2 + \mu \omega^2) (\varphi_2^2 - \varphi_1^2) \right] - \frac{\kappa^2}{8(1-\mu^2)} \left[\varphi_1 - \mu \omega^2 \varphi_2^2 - \frac{1}{8} (\omega^2 + \mu \omega^2) (\varphi_2^2 - \varphi_1^2) \right]. \quad (27.23)$$

Перейдем к интегрированию уравнений равновесия (27.1). Подставив в него выражения для прогиба, функции напряжений и внешней сил, умножим полученное выражение на функцию $f_i(x, \theta)$ и проинтегрируем по поверхности одного пролета оболочки. В результате получим следующую систему уравнений движения оболочки:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + c_1^2 \dot{q}_1 - \frac{c_1^2 \mu^2}{8} (1 + \mu \lambda^2) (q_1^2 - q_0^2) - c_1 \omega^2 q_1^2 = \\ = \frac{1}{\omega^2} \left[p^2(t) + p_{cr} - \int_0^l \ddot{q}_1(t) [0,15 + 0,85e^{-0,39(t-\tau)}] d\tau \right]; \quad (27.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2 + a_1(q_1^2 - q_0^2) + a_2 q_1 \dot{q}_1^2 - a_3 q_1 \dot{q}_2 - a_4 q_1 \dot{q}_2^2 + a_5 q_1 q_2 + \\ + \Omega_2^2 (q_1 - q_0) - a_6 q_1 q_2 = 0; \quad (27.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_3 + a_7 q_1^2 \dot{q}_1 + a_8 q_1^2 + a_9 q_1 q_2 \dot{q}_1 + a_{10} q_1 \dot{q}_2 - a_{11} q_1^2 + a_{12} q_1 q_2 + \\ + a_{13} q_1 + a_{14} q_2 + a_{15} q_1 q_2 = 0, \quad (27.26) \end{aligned}$$

в которых обозначено

$$a_1 = \frac{c_1^2 \mu^4 (1 - \mu^2)}{1 + \alpha_1} \left[\frac{1}{16} \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) + \frac{1}{8(1 - \mu^2)} \left(\mu^2 + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2\mu}{\lambda^2} \right) \right];$$

$$a_2 = \frac{c_1^2 \mu^4 (1 - \mu^2)}{4(1 + \alpha_1)} \left[\frac{1}{(1 + \lambda^2)\mu} + \frac{1}{(1 + 3\lambda^2)\mu} + \frac{1}{4(1 - \mu^2)} \left(\mu + \frac{1}{\lambda^2} \right) \right];$$

$$a_3 = \frac{c_1^2 \mu^4 (1 - \mu^2)}{8(1 + \alpha_1)} \left[\frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{(1 + \lambda^2)\mu} \right];$$

$$a_4 = \frac{c_1^2 \mu^4 (1 - \mu^2)}{4(1 - \alpha_1)} \left[\frac{2}{(1 + \lambda^2)\mu} + \frac{3}{(1 + 3\lambda^2)\mu} \right];$$

$$a_5 = \frac{c_1^2 \mu^4 (1 - \mu^2)}{2\mu^2(1 + \alpha_1)(1 + \lambda^2)\mu}; \quad a_6 = \frac{c_1^2 \mu^2 (1 + \mu \lambda^2)}{1 - \alpha_1};$$

$$a_7 = \frac{2c_1^2 \mu^4 (1 - \mu^2)}{1 + \alpha_1} \left[\frac{1}{(1 + \lambda^2)\mu} + \frac{1}{(1 + 3\lambda^2)\mu} + \frac{1}{4(1 - \mu^2)} \left(\mu + \frac{1}{\lambda^2} \right) \right]; \quad (27.27)$$

$$a_8 = \frac{c_1^2 \mu^2}{4\mu(1 + \alpha_1)};$$

$$a_9 = \frac{c_1^2 \mu^4 (1 - \mu^2)}{1 + \alpha_1} \left[\frac{2}{(1 + \lambda^2)\mu} + \frac{3}{(1 + 3\lambda^2)\mu} \right];$$

$$a_{10} = \frac{c_1^2 \mu^4 (1 - \mu^2)}{1 + \alpha_1} \left[\frac{7}{(1 + \lambda^2)\mu} + \frac{11}{(1 + 3\lambda^2)\mu} - \frac{1}{2(1 - \mu^2)} \left(\mu + \frac{1}{\lambda^2} \right) \right];$$

$$a_{11} = \frac{c_1^2 \mu^4 (1 - \mu^2)}{2\mu^2(1 + \alpha_1)} \left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{8}{(1 + \lambda^2)\mu} \right];$$

$$a_{12} = \frac{6c_1^2 \mu^4 (1 - \mu^2)}{\mu^2(1 - \alpha_1)(1 + \lambda^2)\mu};$$

$$a_{13} = \frac{c_1^2 \mu^4 (1 - \mu^2)}{8\mu(1 - \alpha_1)};$$

$$a_{14} = \frac{c_1^2}{1 + \alpha_1} \left(1 - \mu^2 + \frac{4\mu\mu^2}{8} \right); \quad a_{15} = \frac{2c_1^2 \mu^2}{1 + \alpha_1};$$

$$\Omega_2^2 = \frac{c_1^2 \rho_0}{\mu^2(1 + \alpha_1)}, \quad (27.28)$$

где

$$\rho_0 = \mu_0^2 c_1^2 \left[\frac{(1 + \lambda^2)\mu^2 c_1^2 \mu^2}{12\mu^2} + \frac{(1 - \mu^2)\lambda^2}{(1 + \lambda^2)\mu^2} \right] \quad (27.29)$$

(в формулах (27.27) и (27.29) λ — относительная толщина).

Отметим, что величины Ω_2 и ρ_0 имеют следующий физический смысл: Ω_2 — частота собственных колебаний оболочки по форме $f_2(x, \theta)$; ρ_0 — верхняя критическая нагрузка при условии свободного расширения оболочки в осевом направлении.

Первое уравнение (27.24) является интегро-дифференциальным. Для удобства вычислений его целесообразно привести к дифференциальному уравнению третьего порядка. Дифференцируем (27.24) по времени и прибавим к полученному уравнению исходное, умноженное на 0,59, приходим к следующей зависимости:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \left(0,59 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \dot{q}_1 + \left(c_1^2 + \frac{0,127}{\mu^2} \right) \dot{q}_1 + 0,59 c_1^2 q_1 - \\ - c_1^2 \mu^2 (1 + \mu \lambda^2) \left[\frac{1}{4} q_1 \dot{q}_1 + 0,074 (q_1^2 - q_0^2) \right] - \\ - c_1^2 \mu^2 (2q_1 \dot{q}_1 + 0,59 q_1^2) = \frac{1}{\omega^2} [p^2(t) + 0,59 p^2(t) + 0,59 p_{cr}]. \quad (27.30) \end{aligned}$$

Полученная система уравнений является нелинейной, причем все три уравнения взаимосвязаны. Если ограничиться исследованием процесса потери устойчивости оболочки только при малых изгибных прогибах, амплитуда которых меньше толщины оболочки, то можно воспользоваться линейным вариантом уравнений движения

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \left(0,59 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \dot{q} + \left(c_1^2 + \frac{0,127}{\mu^2} \right) \dot{q} + 0,59 c_1^2 q = \\ = \frac{1}{\omega^2} [p^2(t) + 0,59 p^2(t) + 0,59 p_{cr}]; \quad (27.31) \end{aligned}$$

$$q_2 + \Omega_2^2 (q_1 - q_0) - a_6 q_1 q_2 = 0, \quad (27.32)$$

В данном случае первое из этих уравнений является незамкнутым. Его решение может быть получено в аналитическом виде. Таким образом задача сводится к интегрированию уравнения (27.32) при известной функции $q_1(\theta)$.

Остановимся теперь на определении начальных условий для функций $q_i(\theta)$. Если принять статическое давление равным нулю, то начальные условия задачи будут следующими:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 0; \quad \dot{q}_1(0) = 0; \\ \ddot{q}_1(0) &= \frac{1}{1 + 0.9\lambda^2} [\dot{p}^0(0) + 0.09p^0(0)]; \\ q_2(0) &= q_0, \quad \dot{q}_2(0) = 0, \quad \ddot{q}_2(0) = \dot{q}_3(0) = 0. \end{aligned} \quad (27.33)$$

При наличии статического давления начальные значения всех трех функций $q_i(0)$ будут ненулевыми. Для их определения надо решить систему уравнений (27.26), (27.26) и (27.30), положив в ней все зависящие от времени величины равными нулю. Эта задача является довольно сложной и может быть выведена только численно. В том случае, если начальные неперпендикулярности по сравнению с толщиной оболочки малы, а статическое давление существенно меньше критической величины, то можно применить линейный вариант уравнений. Тогда начальные значения функций $q_i(\theta)$ будут равны

$$q_1(0) = \frac{1}{\pi \frac{E}{1-\nu^2}} p_0; \quad q_2(0) = q_0 \frac{p_0}{p_0 - p_{cr}}; \\ q_3(0) = 0, \quad (27.34)$$

где

$$p_0 = \frac{p_0}{1 + \mu \lambda^2}. \quad (27.35)$$

Формула (27.35) дает значение верхней критической нагрузки при действии на оболочку равномерного нормального давления в предположении, что поперечные ребра жесткости не обжимаются. Если бы оболочка имела конечную длину и на нее действовало всестороннее давление, то вместо (27.35) для верхней критической нагрузки мы получили бы зависимость

$$p_0 = \frac{p_0}{1 + \frac{1}{2} \lambda^2}, \quad (27.36)$$

которая есть не что иное, как широко известная формула Мизеса, записанная в безразмерном виде.

Для использования формул (27.35) и (27.36) необходимо знать число волн n , образующихся при потере устойчивости оболочки.

Критическая нагрузка есть функция параметра $\lambda = \frac{\sigma}{\sigma_0}$. Потери

устойчивости оболочки происходит при минимальном значении критической нагрузки. Это обстоятельство позволяет использовать условие

$$\frac{d p_0}{d n} = 0,$$

с помощью которого можно получить соотношение

$$\omega^4 n^2 = \frac{12(1-\nu^2)(3+\lambda^2)(1+\Delta\lambda^2) - \Delta\lambda^2(1+\lambda^2)\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2[\Delta\lambda^2(1+\lambda^2) - (\lambda^2-1)(1+\Delta\lambda^2)]} \quad (27.37)$$

($\Delta = \frac{1}{2}$ — при всестороннем сжатии, $\Delta = \mu$ — при несимметричности ребер), связывающее конструктивные размеры оболочки ($\omega^4 n^2$) с числом волн потери устойчивости ($\lambda = \sigma/\sigma_0$). На рис. 96

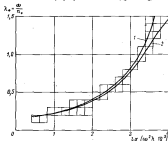


Рис. 96. График функции $\lambda_n = f(\omega^4 n^2)$.

1 — всестороннее сжатие; 2 — несимметричное сжатие.

показаны функции $\lambda_n = f(\omega^4 n^2)$, позволяющие найти число волн потери устойчивости в случае действия на оболочку всестороннего давления или боковой нагрузки при условиях несимметричности ребер жесткости.

Отметим, что уравнения (27.24) — (27.26) дают возможность исследовать статическую устойчивость оболочки в нелинейной постановке. Для этого надо положить в них все инерционные и гидродинамические силы равными нулю и построить зависимость между стрелой изгибного прогиба q_2 и нагрузкой p_{cr} . Такие функции для идеально гладкой оболочки и при наличии у оболочки

начальных изгибностей показаны на рис. 97. Провес потери устойчивости гладкой оболочки происходит следующим образом. При возмущении нагрузки от нуля до p_0 оболочка изгибных деформаций не получает. Когда нагрузка станет равной верхней критической, оболочка внезапно, скачком, перейдет в новое положение равновесия, соответствующее большим изгибным прогибам (путь 1—2 на рис. 97).

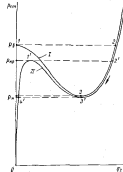


Рис. 97. Прогнбы оболочки при статической потере устойчивости.

Интерес как раз и представляет верхняя критическая нагрузка при наличии у оболочки начальных изгибностей, которую для краткости будем называть просто критической p_{cr} .

Кроме того, нам потребуется знать величину нагрузки, при которой оболочка из идеально упруго-пластического материала получит первые пластические деформации. Определим эту нагрузку, полагая изгибные прогибы малыми по сравнению с толщиной оболочки. При малых прогибах имеет место следующая зависимость:

$$p_{cr} = \frac{q_2 - q_1}{q_1} p_0. \quad (27.38)$$

Условие пластичности получим с помощью критерия Сен-Венана, согласно которому текучесть наступает при достижении наибольшими напряжениями предела текучести при одноосном

напряжении. Наибольшими в данном случае являются поперечные напряжения. Поэтому условие пластичности можно записать в виде

$$\frac{1}{k} N_2 + \frac{6}{M} M_{\max} = \sigma_y, \quad (27.39)$$

где σ_y — предел текучести материала (отнесенный к величине $\rho_0 g$).

При малых изгибных прогибах

$$N_2 = p_{cr}; \quad M_{\max} = k_1 \rho_0 g \zeta_0^2 (n^2 + \mu^2) (q_2 - q_1). \quad (27.40)$$

Поэтому условие (27.39) принимает вид

$$B (q_2 - q_1) + p_{cr} = k \sigma_y, \quad (27.41)$$

где

$$B = \frac{1}{2} k \rho_0 g \zeta_0^2 (n^2 + \mu^2).$$

Решая уравнения (27.38) и (27.41) совместно, получим квадратное уравнение

$$p_{cr}^2 - (p_0 + k \sigma_y + B q_1) p_{cr} + k p_0 \sigma_y = 0, \quad (27.42)$$

из которого найдем значение искомой нагрузки

$$p_{cr} = \frac{1}{2} (p_0 + k \sigma_y + B q_1) - \sqrt{\frac{1}{4} (p_0 + k \sigma_y + B q_1)^2 - k p_0 \sigma_y}. \quad (27.43)$$

(знак минус перед радикалом поставлен потому, что нас интересует минимальное значение нагрузки).

Условимся называть данную нагрузку предельной. Это, конечно, не означает, что при такой нагрузке оболочка разрушится. Просто термины указывает на то обстоятельство, что исчерпан предел работы материала в упругой стадии.

В дальнейшем будем называть оболочку, у которых предельная нагрузка меньше критической, высоконапряженными.

Потеря устойчивости в этом случае будет происходить при упруго-пластической работе материала. Слабо напряженные будем считать те оболочки, которые теряют устойчивость в упругой стадии и у которых критическая нагрузка ниже предельной.

Перейдем теперь к анализу закономерностей потери устойчивости оболочек в динамике. Уравнения движения оболочки (27.23), (27.26) и (27.34) решались численным методом Рунге — Кутты с помощью ЭВМ. Динамическая нагрузка была задана линейным законом

$$p^*(t) = p_0 \left(1 - \frac{t}{t_0} \right) [1 - \sigma(t - t_0)]. \quad (27.44)$$

Характерные графики функций $q_1(t)$ показаны на рис. 98 ($k = \frac{1}{200}$; $\alpha = 14$; $n = 20$; $\rho_{\text{ст}} = 1 \cdot 10^{-3}$; $\rho_{\text{об}} = 7 \cdot 10^{-3}$; $t_0 = 3$; $\rho_{\text{ст}} = 0$; $q_0 = 0,5 \cdot 10^{-4}$).

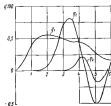


Рис. 98. Графики функций $q_1(t)$.

максимальных изгибных прогибов той же оболочки при различных начальных параметрах $\rho_{\text{ст}}$ и t_0 . Анализ графиков показывает, что в динамике оболочка начинает терять устойчивость при более высоких нагрузках, чем в статике. Эта перегрузка становится тем больше, чем меньше время действия динамического давления.

Наоборот, с увеличением длительности нагружения происходит постепенное приближение огибающей динамического давления к статической нагрузке.

Приведенные графики позволяют установить, только качественную картину поведения оболочки в динамике. Однако по ним нельзя достаточно точно оценить величину безопасной для оболочки нагрузки. Эту задачу необходимо решать с учетом возникающих в конструкции напряжений, а соответствии с рекомендациями предыдущего параграфа. Будем полагать материал оболочки идеальным упруго-пластическим.

С целью упрощения выкладки момент перехода материала в пластическое состояние определим с помощью критерия Сен-Венана

$$\frac{1}{k} N_2(t) + \frac{6}{8\pi} M_2(t) = \sigma_c. \quad (27.45)$$

Как видно из рисунка, в начале процесса имеет место равномерное обжатие оболочки, а изгибные прогибы развиваются очень медленно. Затем наступает период потери устойчивости, во время которого оболочка получает большие изгибные деформации. В дальнейшем происходят сложные нелинейные колебания оболочки.

Выясним, как зависят величину изгибных прогибов амплитуда и длительность нагрузки.



Рис. 99. Максимальные значения изгибного прогиба оболочки при различных нагрузках.

Можно предположить, что наибольшее напряжение возникает на гребнях или во впадинах волн потери устойчивости в середине пролета между ребрами. Поэтому усилие и изгибающий момент будем определять по формулам:

$$N_2(t) = \pi^2 q_2^2 \left\{ -q_1 - (1 - \mu^2) q_3 + \mu^2 q_2^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} [(2 - \mu^2) \pi + \mu \pi^2] (q_2^2 - q_3^2) \pm \right. \\ \left. \pm (1 - \mu^2) \omega^2 k^2 \left[\frac{2}{(1 + k^2)^2} + \frac{\pi^2}{(1 + 3k^2)^2} \right] q_2 q_3 \mp \right. \\ \left. \mp \frac{(1 - \mu^2) k^4}{(1 + k^2)^2} (q_2 - q_3) \right\}; \quad (27.46)$$

$$M_2(t) = k_1 \pi^2 q_2^2 [4 \mu^2 q_3 \pm (\pi^2 + \mu \omega^2) (q_2 - q_3)]. \quad (27.47)$$

В процессе определения безопасной нагрузки необходимо вычислить напряжения в верхних и в нижних фибрах на гребнях и во впадинах изгибных волн и сравнивать эти напряжения с пределом текучести материала. При этом амплитуда нагрузки должна последовательно повышаться, пока в какой-либо точке конструкции не будет достигнуто равенство (27.45). Следует отметить, что вычисления надо проводить при вариации числа волн потери устойчивости n , так как в динамике обычно образуется большее число волн, чем в статике. За окончательный результат следует принять тот, при котором безопасная нагрузка окажется наименьшей. Все это делает данные расчеты весьма громоздкими и осуществлять их можно только с помощью ЭВМ.

Определим безопасную нагрузку для нескольких оболочек, конструктивные размеры которых указаны в табл. 7. Материал оболочки — сталь с пределом текучести $\sigma_c = 0,39$ (в обычных размерностях $\sigma_c \sim 9000 \text{ кг/см}^2$). Начальные неперпендикулярности оболочек выбирались по формуле

$$q_0 = C \frac{h}{\pi}, \quad (27.48)$$

Таблица 7

№ оболочки (рис. 351)	k	n	$\rho_{\text{ст}} \cdot 10^3$	$\rho_{\text{об}} \cdot 10^3$	q_0	$\tau_c = \frac{2\pi}{\theta_c}$
I	0,01	10	—	28,7	1,7	3,5
II	0,01	4,5	11,3	—	0,76	8,4
III	0,01	2,25	5,45	—	0,395	16,5

что обеспечивало одинаковую относительную стрелку прогиба заметна при любом n . Заметим, что обмер начальной посылки реальным оболочкам и последующее разложение ее в ряд Фурье приводит к близкой зависимости стрелки прогиба от номера гармоника. Для расчетного примера значение C взято равным 0,2.

Расчеты показали, что первая из оболочек относится к высоконапряженным, а две следующие являются слабо напряженными. Значение предельной нагрузки для первой оболочки и критической нагрузки для второй и третьей даны в табл. 7. Там же указаны частоты и периоды собственных колебаний оболочек до формы потери устойчивости.

Как уже было установлено выше, оболочка теряет устойчивость в динамике при более высоком давлении, чем в статике. Эта динамическая перегрузка оболочки вызвана, во-первых, уменьшением сжимающих усилий вследствие действия инерционных и гидродинамических сил и, во-вторых, инерционностью процесса потери устойчивости. Для лучшего понимания физики явления целесообразно изучить влияние каждого из указанных факторов отдельно.

Расчеты показывают, что на максимальную величину сжимающего усилия $N_{\text{стат}}$ процесс потери устойчивости существенно не сказывается. Поэтому влияние инерционных и гидродинамических сил на величину сжимающих усилий может быть изучено с помощью уравнения (27.31), описывающего осесимметричное обжатие оболочки.

Если с помощью этого уравнения при $p_{\text{стат}} = 1$ рассчитать величину $q_{\text{стат}}$, то максимальное сжимающее усилие будет

$$N_{\text{стат}} = -N_0^0 \varepsilon_{\text{стат}}^0.$$

Обозначим

$$k_2 = n^2 \varepsilon_{\text{стат}}^0.$$

Тогда при $p_{\text{стат}} = 1$

$$N_{\text{стат}} = -k_2 p_{\text{стат}}. \quad (27.49)$$

Зависимость коэффициента динамичности k_2 от длительности действия нагрузки показана на рис. 100 ($\varepsilon_0^0 = 12,2$, $n^2 = 0,04$). Из графика видно, что существенное увеличение этого коэффициента, а следовательно, и сжимающих усилий имеет место при $t_0 < 10$. При более длительных нагрузках коэффициент динамичности близок к единице. Таким образом, за счет инерционности

процесса осесимметричного обжатия динамическая перегрузка может иметь место лишь при нагрузках, время действия которых сравнительно мало ($t_0 < 10$).

Динамическую перегрузку, вызванную инерционностью процесса потери устойчивости, будем характеризовать отношением

$$k = \frac{N_{\text{стат}}^0}{p_{\text{стат}}}, \quad (27.50)$$

где $N_{\text{стат}}^0$ — максимальная величина усилия при безопасной нагрузке;

$p_{\text{стат}}$ — критическая либо предельная нагрузка в статике (напомним, что в нашей системе единица измерения $p_{\text{стат}} = N_{\text{стат}}^0$).

График коэффициента перегрузки k приведен на рис. 101. Отметим их характерные особенности. Прежде всего бросается в глаза тот факт, что коэффициент перегрузки тем больше, чем меньше критическое давление у оболочки. Причина этого явления заключается в том, что при малом критическом давлении оболочка имеет и высокую частоту собственных колебаний по форме

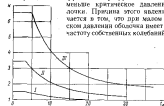


Рис. 101. Коэффициент перегрузки k для различных оболочек.

потери устойчивости. Это обстоятельство замедляет развитие изгибных прогибов и приводит к возрастанию коэффициента перегрузки. При увеличении длительности действия нагрузки коэффициент перегрузки стремится к единице. Это означает, что потеря устойчивости оболочки в динамике при достаточно длительной нагрузке происходит при почти том же давлении, что и в статике. Однако предельный переход к статике наступает у каждой оболочки при различной длительности нагрузки. Можно дать следующую грубую оценку данному явлению: коэффициент перегрузки будет близок к единице, если длительность действия нагрузки превышает три периода собственных колебаний оболочки по форме потери устойчивости.

Рассмотрим теперь, что происходит с оболочкой при оказании кратковременных нагрузках. В этом случае оболочка может достигнуть напряжений, равных пределу текучести, без потери устойчивости. Тогда величина безопасного усилия будет равна

$$N_{\text{без}}^0 = \sigma_{\text{т}} \quad (27.51)$$

а коэффициент перегрузки станет постоянным

$$k = \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sigma_{\text{ст}}} \quad (27.52)$$

Как показывают графики на рис. 101 и данные табл. 7, к кратковременным нагрузкам относятся также, время действия которых значительно меньше периода собственных колебаний оболочки.

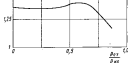


Рис. 102. Влияние статического давления на коэффициент перегрузки k.

Итак, рассмотренный пример позволяет установить, что в зависимости от длительности действия динамические нагрузки можно разбить на три категории: длительные, средние и кратковременные. Время действия длительных нагрузок должно составлять не менее нескольких периодов собственных колебаний оболочки по форме потери устойчивости, а безопасная амплитуда такой нагрузки может быть принята равной статическому критическому давлению.

При кратковременных нагрузках, время действия которых должно быть существенно меньше периода собственных колебаний, оболочка переходит в пластическое состояние без потери устойчивости. Безопасная нагрузка в этом случае может быть найдена из условия достижения максимальными значениями напряжений предела текучести материала. Отметим, что безопасная величина кратковременной нагрузки не зависит от критического давления на оболочку. При нагрузках средней длительности имеет место промежуточный случай.

В рассмотренном выше примере статическое давление полагалось равным нулю. Влияние этого фактора на коэффициент перегрузки оболочки иллюстрирует график на рис. 102. Конструктивные характеристики оболочки в данном примере были выбраны следующими:

$$h = \frac{1}{200}; \quad \omega = 16; \quad \alpha_1 = 0,40; \quad \rho_p = 0,12 \cdot 10^{-3}; \quad q_0 = 0,5 \cdot 10^{-4}.$$

Длительность действия динамической нагрузки принята равной $t_d = 3$. Как показывает график, при $\rho_{\text{ст}}/\rho_p < 0,7$ величина коэффициента перегрузки изменяется незначительно. При дальнейшем росте статического давления начинается быстрое уменьшение коэффициента перегрузки. Причина этого явления заключается в том, что статическое давление вызывает увеличение начальных изгибов, что в свою очередь приводит к более интенсивному развитию динамических изгибных деформаций оболочки.

§ 28. О влиянии повышения предела текучести материала на безопасную динамическую нагрузку оболочки

В предыдущем параграфе при определении безопасной нагрузки мы предполагали, что величина предела текучести материала заранее известна и не зависит от условий нагружения оболочки. В действительности предел текучести большинства металлов с ростом скорости деформации увеличивается. Это явление оказывает существенное влияние на несущую способность оболочек в динамике. Хотя вопрос об определении динамического предела текучести материала и не относится непосредственно к теме данной книги, все же его необходимо кратко осветить, так как без этого нельзя оценить значения безопасных динамических нагрузок для оболочек, взаимодействующих с жидкостью.

Динамический предел текучести углеродистой стали с физической точкой текучести может быть найден с помощью критерия, предложенного Кемпбеллом [85] на основе дислокационной теории текучести материалов. В настоящее время установлено, что основную роль в механизме пластической деформации металлов играют дислокации — особые рода дефекты кристаллической решетки, представляющие собой лишние или, наоборот, недостающие атомы. Дислокации могут перемещаться внутри кристалла как вследствие теплового движения, так и под действием приложенных к металлу напряжений. Возникновение пластической деформации связано с выходом определенного количества дислокаций на поверхность кристаллов. Но в углеродистых сталях дислокации окружены облаком атомов углерода, которое препятствует перемещению дислокаций. Поэтому для освобождения и выхода дислокаций на поверхность кристалла необходимо некоторое время. При быстром нагружении металла дислокации не успевают вовремя попасть на поверхность кристаллов и текучесть материала возникает при напряжениях, превышающих «статический» предел текучести.

Установлено, что среднее время освобождения дислокаций пропорционально величине

$$\exp \left[- \frac{U \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)}{kT} \right],$$

где U — энергия активации, т. е. энергия, необходимая для освобождения атома из узла кристаллической решетки при уровне напряжений σ ;

σ_s — предел текучести материала при 0° Кельвина;

k — постоянная Больцмана;

T — абсолютная температура.

Следовательно, за время t , в течение которого действует напряжение σ , общее количество освобожденных дислокаций пропорционально интегралу

$$\int_0^t \exp \left[-\frac{U \left(\frac{\sigma}{\sigma_s} \right)}{kT} \right] dt.$$

Если предположить, что текучесть материала начнется в тот момент, когда число освобожденных дислокаций достигнет некоторой критической величины C , не зависящей от вида функции $\sigma(t)$, то время возникновения текучести t_c можно найти с помощью следующего уравнения:

$$\int_0^{t_c} \exp \left[-\frac{U \left(\frac{\sigma}{\sigma_s} \right)}{kT} \right] dt = C. \quad (a)$$

Для энергии активации имеет место следующая приближенная зависимость:

$$U \left(\frac{\sigma}{\sigma_s} \right) = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\sigma}{\sigma_s}$$

(α — константа материала).

Подставляя ее в формулу (a), получим

$$\int_0^{t_c} \left[\frac{\sigma(t)}{\sigma_s} \right]^\alpha dt = C, \quad (b)$$

где $\alpha = 1/kT$.

В дальнейшем нас будет интересовать поведение металлов при температурах, близких к комнатной. Поэтому с помощью подстановки

$$C = t_s \left(\frac{\sigma_{s,c}}{\sigma_s} \right)^\alpha,$$

где $\sigma_{s,c}$ — предел текучести материала при статическом (медленном) нагружении и комнатной температуре; t_s — новая константа материала, приведем формулу (b) к виду

$$\int_0^{t_c} \left[\frac{\sigma(t)}{\sigma_{s,c}} \right]^\alpha dt = t_s. \quad (28.1)$$

Критерий (28.1) позволяет найти время возникновения текучести в материале — t_c . Динамический предел текучести определяется путем подстановки

$$\sigma_t = [\sigma(t)]_{t=t_c} \quad (28.2)$$

При некоторых законах нагружения для динамического предела текучести могут быть получены простые формулы. Так, например, при линейном возрастании напряжений

$$\sigma(t) = V \sigma_{s,c} t \quad (V = \cos \alpha \cdot 1/\text{сек}) \quad (28.3)$$

динамический предел текучести равен

$$\sigma_t = \sigma_{s,c} [(\alpha + 1) V t_s]^{1/(\alpha+1)}. \quad (28.4)$$

Недостаток формулы (28.4), как и самого критерия (28.1), заключается в том, что если $V \rightarrow 0$, то и $\sigma_t \rightarrow 0$. Однако практического значения это не имеет, так как пользоваться зависимостью (28.4) нужно только при больших V . Все же для обеспечения плавного перехода вместо (28.4) можно предположить зависимость

$$\sigma_t = \sigma_{s,c} [(\alpha + 1) V t_s + 1]^{1/(\alpha+1)}. \quad (28.5)$$

Иногда бывает удобнее представлять динамический предел текучести в функции от времени возникновения текучести.

При линейном законе нагружения согласно (28.3)

$$t_c = \frac{\sigma_t}{\sigma_{s,c} V}. \quad (28.6)$$

С учетом этой зависимости формула (28.4) примет вид

$$\sigma_t = \sigma_{s,c} \left[(\alpha + 1) \frac{t_c}{t_s} \right]^{1/\alpha}. \quad (28.7)$$

Если к материалу внезапно приложено постоянное напряжение, превышающее статический предел текучести материала, то с помощью критерия (28.1) можно определить момент появления пластических деформаций

$$t_1 = t_s \left[\frac{\sigma_{t,1}}{\sigma_{s,c}} \right]^\alpha \quad (28.8)$$

($\sigma_{t,1}$ — амплитуда напряжений).

Из этой формулы становится ясно физический смысл константы t_s . Она равна времени возникновения текучести при внезапном приложении к металлу напряжения, равного статическому пределу текучести.

Как уже упоминалось выше, критерий Кендалла теоретически обоснован для углеродистых сталей, имеющих физическую точку текучести. Однако эксперименты показывают, что соотношения

вытекающие из этого критерия, справедливы и в количественном отношении и для материалов, не имеющих площадки текучести. При этом под пределом текучести следует понимать условную величину, равную, например, напряжениям при остаточной деформации 0,2%.

Следует отметить, что в настоящее время константы α и t_0 определяются, в основном, опытным путем¹. При этом чаще всего используется динамическое нагружение материала. Достаточно просто провести испытание образца при двух скоростях нагружения, как с помощью формулы (28.4) можно найти значения констант α и t_0 . В табл. 8 приведены значения указанных величин для некоторых наиболее широко применяемых материалов. Чтобы представить более наглядно, как изменяется динамический предел текучести, на рис. 103 приведены графики коэффициента упрочнения

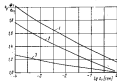


Рис. 103. Коэффициент упрочнения сталей.

1 — легированная сталь; 2 — сталь Ст. 3-4; 3 — низкоуглеродистая сталь ($\sigma_{0.2} = 6000 \text{ кг/см}^2$).

$$k_p = \frac{\sigma_r}{\sigma_0} \quad (28.9)$$

при линейном нагружении ряда сталей в функции от времени возникновения текучести. Графики показывают, что коэффициент упрочнения представляет собой почти линейную функцию величины $\lg \dot{\epsilon}$. Необходимо также отметить существенную зависимость коэффициента упрочнения от статического предела текучести материала. Наиболее сильно повышается предел текучести у малоуглеродистых сталей. Высокопрочные стали малочувствительны к скорости нагружения.

Таблица 8

Характеристика	Малоуглеродистая сталь	Сталь Ст. 3-4	Высокопрочная сталь	Сплав АТЖ-6
$\sigma_{0.2}$ [кг/см ²]	2000—2600	4000	6000	1000
t_0	0,9	0,08	0,022	0,03
α	17	17	39	40

¹ См., например, Ю. Я. Воловского-Калимовский, Динамический предел текучести. М., «Наука», 1965.

Исследуем теперь вопрос о том, как влияет повышение предела текучести материала на безопасную нагрузку оболочек. Как и в предыдущем параграфе, будем рассматривать бесконечно длинную цилиндрическую оболочку, погруженную в безграничную акустическую среду. На оболочку действуют гидростатическая нагрузка p_0 и равномерное динамическое давление $p^d(t)$, изменяющееся по линейному закону (27.44). Уравнения движения оболочки, описывающие процесс потери устойчивости, получены нами в § 27. Там же приведены формулы, позволяющие найти величину напряжений в различных точках оболочки. Таким образом, имеются все необходимые исходные зависимости для определения безопасных нагрузок.

Прежде чем перейти к рассмотрению расчетных примеров, отметим одно важное обстоятельство. Все предшествующие исследования проводились при использовании безразмерной формы завис. Их результаты справедливы для оболочек любых абсолютных размеров. Иначе обстоит дело при оценке несущей способности конструкций с учетом изменения предела текучести материала в динамике. Выше было показано, что повышение предела текучести зависит от абсолютной скорости деформации. В то же время у геометрически подобных конструкций относительная скорость деформации одинакова, а абсолютная — обратно пропорциональна характерному линейному размеру (например, радиусу). Следовательно, предел текучести будет увеличиваться тем сильнее, чем меньше размеры конструкции. Поэтому в данном исследовании мы вынуждены проводить расчеты, используя обычные единицы измерения.

Выберем для расчетного примера две оболочки, выполненные из стали с пределом текучести $\sigma_{0.2} = 2200 \text{ кг/см}^2$, конструктивные размеры которых указаны в табл. 9. Также даем значения верхних кратеческих напряжений

$$\sigma_0 = \frac{p_0}{b} \quad (28.10)$$

Так как эти напряжения превосходят предел текучести, то данные оболочки являются высоконапряженными и будут терять устойчивость при работе материала в упруго-пластической стадии.

Таблица 9

№ оболочки	r_0 [см]	L [см]	L [м]	σ_0 [кг/см ²]	$\sigma_{0.2}$ [кг/см ²]	$\sigma_0 \cdot 10^{-2}$ [1/мм]	$\Gamma_{\text{кр}} \cdot 10^3$ [мм]
I	20,0	0,30	7,0	6300	2000	13	0,48
II	20,0	0,20	14,0	2900	1700	5,5	1,14

Будем предполагать, что амплитуда начальных неупругих деформаций оболочек соответствует формуле

$$q_0 = \frac{0,4h}{\lambda r_1} \quad (28.11)$$

Отвечающие таким неупругим деформациям предельные напряжения оболочек

$$\sigma_{cr} = \frac{R_{cr}'}{k} \quad (28.12)$$

приведены в табл. 9. Их величина несколько меньше предела текучести материала.

У высоконапряженных оболочек упругие деформации появляются при небольших изгибных прогибах. Поэтому процесс их деформации будем исследовать с помощью линейных уравнений движения (27.31), (27.32). Наибольшие напряжения, возникающие на нижних фибрах гребней и на верхних фибрах впадин изгибных волн, находятся по формуле

$$\sigma(t) = \frac{E}{1-\mu^2} \left[q_2(t) + \frac{r^2 \lambda^2}{2r_1} (1-\mu^2)(1 + \lambda^2) q_1(t) \right], \quad (28.13)$$

где $q_1(t)$, $q_2(t)$ — безразмерные параметры прогиба, определяемые из уравнений (27.31), (27.32); $\lambda = \pi r_2 / r_1 l$.

Последовательность определения безопасной нагрузки может быть следующей. Заданная величина статического давления $p_{ст}$ и характеристика динамической нагрузки p_0 и t_0 , с помощью уравнений движения (27.31), (27.32) определяют прогибы оболочки $q_1(t)$ и $q_2(t)$. По формуле (28.13) находят наибольшие напряжения и вычисляется интеграл

$$I = \int_0^t \left[\frac{\sigma(t)}{\sigma_{cr}} \right]^n dt, \quad (28.14)$$

Расчет проводится вплоть до момента возникновения в оболочке максимальных напряжений. Если к этому моменту времени имеет место неравенство

$$I < I_{cr},$$

то надо увеличить амплитуду нагрузки и повторить вычисления. При достаточно малом шаге этого процесса в качестве безопасной можно принять нагрузку, при которой впервые имеет место равенство

$$I = I_{cr} \quad (28.15)$$

Величина наибольших напряжений в этот момент равна σ_c — динамическому пределу текучести материала.

Обратимся к анализу полученных результатов, которые представлены на рис. 104 и 105, где показаны значения динамического предела текучести σ_c и суммарных безопасных напряжений σ_{Σ} , связанных с безопасной нагрузкой формулой

$$\sigma_{\Sigma} = k_{\Sigma} \frac{R_{cr}'}{k} = \frac{p_0 t_0}{k}, \quad (28.16)$$

где R_{cr}' — амплитуда безопасной нагрузки;

k_{Σ} — коэффициент динамичности при осесимметричном обжатии оболочек (см. рис. 100).

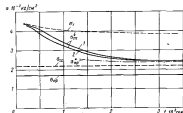


Рис. 104. Зависимость безопасных напряжений для оболочек I от длительности нагрузки.
(1) — $p_0 = 0,5$; (2) — $p_0 = 0,25$ МПа/мкс.

На тех же рисунках нанесены величины статического предела текучести σ_{cr} и статических предельных напряжений σ_{cr}' . Как следует из графиков, предел текучести материала увеличивается в динамике примерно вдвое. Безопасные динамические напряжения во всем диапазоне длительности нагрузки существенно превосходят статические предельные напряжения. При кратковременных нагрузках безопасные напряжения почти совпадают с динамическим пределом текучести материала. Это означает, что при таких нагрузках напряжения остаются в том момент, когда максимальные начальные напряжения будут равны динамическому пределу текучести. При увеличении длительности действия нагрузки безопасные напряжения падают и постепенно приближаются к некоторому асимптотическому значению, которое весьма близко к динамическому предельному напряжению σ_{Σ} . Последние определяются по статической формуле

(27.43), но при динамическом значении предела текучести. Заметим, что падение статического давления сказывается на суммарных безопасных напряжениях довольно слабо.

Рассмотренные примеры показали, что динамическая перегрузка оболочек, которую можно характеризовать отношением

$$n = \frac{\sigma_d}{\sigma_{ст}}, \quad (28.17)$$

происходит по двум причинам.

Первая из них заключается в инерционности процесса развития изгибных изгибов. Этот фактор сказывается на дина-

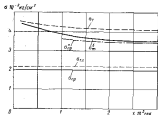


Рис. 105. Зависимость безразмерной нагрузки n от безразмерного времени t .

мической перегрузке тем сильнее, чем меньше отношение длительности действия нагрузки к периоду собственных колебаний оболочки по форме изгиба. Если длительность динамической нагрузки превосходит два-три периода собственных колебаний, то инерционность процесса становится несущественной.

Вторая причина состоит в повышении текучести материала. Этот фактор влияет на динамическую перегрузку тем сильнее, чем больше константы материала $1/\epsilon$ и t_0 и чем меньше абсолютный размер оболочки. Обратим внимание на то, что повышение предела текучести может привести к увеличению динамической перегрузки оболочки и при таких нагрузках, для которых инерционность процесса деформации уже несущественна. Именно так обстояло дело в рассмотренных выше примерах. Конечно, повышение динамической перегрузки при длительных нагрузках может иметь место только у высоконапряженных оболочек, теряющих устойчивость при упруго-пластических деформациях. При этом перегрузка оболочки будет тем больше, чем меньше предельные напряжения по сравнению с критическими.

§ 28. Устойчивость цилиндрической оболочки при поперечном воздействии ударной волны

Выше был рассмотрен процесс потери устойчивости цилиндрической оболочки в предположении, что нагрузка является равномерной и не вызывает ни изгиба, ни поперечное волн растяжения — сжатия в срединной поперечности. В некоторых случаях такая идеализация задачи является достижимой. Однако нагрузки могут иметь и резко выраженный неравномерный характер. Тогда оболочка будет изгибаться и в ней возникнут упругие волны деформаций. Эти явления при воздействии на оболочку ударных волн изучались в третьей главе в линейной постановке. Естественно, возникает вопрос, как оценить влияние неравномерности приложения динамической нагрузки на процесс потери устойчивости сопрягающихся с жидкостью оболочек.

Имен в виду прежде всего рассмотрим методическую сторону вопроса, обратившись к исследованию потери устойчивости бесконечно длинной гладкой цилиндрической оболочки, на которую падает плоская ударная волна с фронтом, параллельным оси цилиндра. Эта задача решалась А. С. Вольмирсом и М. С. Герштейном [18] путем сведения уравнений движения в частных производных к уравнениям в конечных разностях. Для гидродинамических сил при этом использовались соотношения, справедливые только для малых значений времени. Здесь эта же задача решается другим методом, не имеющим ограничений во времени.

При постановке задачи необходимо отметить, что в данном случае нет необходимости вводить предположение о начальных неупругих формах оболочки, ибо при неравномерной нагрузке появится изгиб конструкции, что обеспечит условия для начала процесса потери устойчивости. Поэтому будем считать оболочку идеально гладкой.

Выпишем уравнения движения оболочки, имея в виду, что оно будет плоским. При этом воспользуемся относительной системой единиц измерения, в которой за основные единицы примем радиус оболочки r_0 , скорость звука в жидкости c_0 и плотность жидкости ρ . Тогда система уравнений (25.3) примет следующий вид:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = n^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + N \left(1 - \frac{\partial w}{\partial t} \right) = n^2 \frac{\partial w}{\partial t} - p(R, t) \quad (29.1)$$

(индекс 2 у момента и усилий отброшен).

Усилие и момент выражаются через перемещения по формулам

$$N = n^2 \left[\frac{\partial w}{\partial t} - w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right];$$

$$M = -n^2 r_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (29.2)$$

Здесь перемещения отнесены к радиусу, нагрузка — к величине $\rho \omega^2$, ускорие — к $\rho \omega^2 r_1$, а момент — к $\rho \omega^2 r_1^2$. Коэффициенты равны

$$\mu^0 = \frac{\rho^0 h}{\rho^0 r_1}; \quad c_2^0 = \frac{E}{\rho^0 c_0^2 (1 - \mu^0)}; \quad b_1^0 = \frac{N^0}{12 \rho^0 r_1^2}. \quad (29.3)$$

В данном случае задачу удобно решать, записав уравнения движения в перемещениях. Подставляя зависимости (29.2) в уравнения (29.1), приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + c_2^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} - c_2^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} = 0; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(2\mu^0 \frac{\partial v}{\partial \rho} - c_2^2 \left[\frac{\partial v}{\partial \rho} - u + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 \right] \right) \times \\ \times \left(1 - \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{\rho^0} p(\theta, t). \end{aligned} \quad (29.4)$$

Начальные условия для функций $v(t)$ и $u(t)$ примем нулевыми.

Для упрощения анализа внешних сил представим нагрузку в виде суммы дифракционного давления, действующего на абсолютно жесткий и неподвижный цилиндр, и дополнительного давления, вызванного деформацией и движением оболочки,

$$p(\theta, t) = p^0(\theta, t) + p^*(\theta, t), \quad (29.5)$$

Систему уравнений движения оболочки можно решать двумя путями. Один из них состоит в применении метода сеток. При использовании этого метода контур оболочки от нуля до π разбивается на i участков. Интегрирование по времени производится с шагом Δt . В результате получаем сеточную область, по оси которой откладывается угол θ , а по оси абсцисс — время. Все производные выражаются с помощью центральных конечно разностных операторов τ подставляются в уравнения (29.4). Решение полученной таким образом алгебраической системы уравнений позволяет выразить прогиб в каждом узле сетки через прогибы в соседних узлах. Эти рекуррентные зависимости и позволяют с учетом начальных условий последовательно вычислять прогибы оболочки к каждой ее точке. Конечно, расчеты необходимо проводить с помощью ЭВМ.

Уравнения (29.4) можно решать также и методом Вуьнова—Галеркина. При этом перемещения оболочки записываются в виде рядов с конечным числом членов

$$v(\theta, t) = \sum_{n=0}^N v_n(t) \sin n\theta, \quad (29.6)$$

$$u(\theta, t) = \sum_{n=0}^N u_n(t) \cos n\theta.$$

Выражения (29.6) подставляются в уравнения (29.4), которые интегрируются по Вуьнову—Галеркину. В результате получается система обыкновенных нелинейных уравнений относительно параметров v_n и u_n , которую следует решать с помощью численных методов на ЭВМ.

При решении задач гидроупругости применение метода сеток наталкивается на серьезные трудности. Дело в том, что для использования этого метода надо иметь зависимости, позволяющие определить давление, действующее в любом узле сетки, т. е. в точке θ_i в момент t_j . В то же время, как было показано в третьей главе, точные зависимости для гидродинамических сил записываются в виде рядов

$$p^0(\theta, t) = \rho_m \sum_{n=0}^{\infty} p_n^0(t) \cos n\theta, \quad (29.7)$$

$$p^*(\theta, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} p_n^*(t) \cos n\theta, \quad (29.8)$$

где

$$p_n^0(t) = \int_0^t \bar{\omega}_n(\tau) \psi_n(t - \tau) d\tau, \quad (29.9)$$

$\psi_n(t)$ — функции, характеризующие сопротивление жидкости при движении оболочки по форме $\cos n\theta$;

ρ_m — амплитуда давления во фронте волны;

$\bar{\omega}_n(t)$ — гармоника давления для волны с единичной амплитудой.

Ряд (29.7) можно заранее суммировать и таким образом найти величину результирующего давления в каждом узле сетки. Можно также воспользоваться приближенной формулой (19.43). Иначе обстоит дело с нелучшим давлением. Для его вычисления надо знать гармоники нормального перемещения $u_n(t)$, которые в процессе решения задачи по методу сеток обычно не определяются. Эта трудность заставила ряд авторов искать пути приближенного определения давления нелучения. В третьей главе мы уже упоминали о том, что при малых значениях времени можно применить следующую зависимость:

$$p^*(\theta, t) = \frac{1}{2} \omega(\theta, t) - \dot{\omega}(\theta, t). \quad (29.10)$$

С учетом этой формулы применение метода сеток уже не встречает затруднений. В таком приближении задачу решил А. С. Вольмир в М. С. Герштейн [18]. Следует, однако, еще раз подчеркнуть, что формула (29.10) справедлива в очень небольшом промежутке времени. Кроме того, она не учитывает возможности переток жидкости в тангенциальном направлении, а именно такой движение и происходит при изгибе оболочки. Поэтому при изучении

процесса потери устойчивости оболочки формула (29.10) малоприменима. Примененная же для оценки дополнительного давления формула (29.8), (29.9) существенно усложняет метод сеток, ибо в процессе решения задачи надб раскладывает нормальный прогиб в ряд Фурье, находит гармоники $w_n(t)$, а затем вновь суммировать ряд (29.8). Все это заставляет нас отдать предпочтение при решении задач гидроупругости методу Бубнова—Галеркина.

С целью упрощения выкладок ограничимся рассмотрением потери устойчивости оболочки при малых прогибах и сохраним в уравнениях (29.4) только главные из квадратичных членов. Тогда уравнения движения примут вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_2^2 \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad (29.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + h_0^2 c_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c_1^2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} - w \right) \times \\ & \times \left(1 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{\rho^0} [p^0(\theta, t) + p^*(\theta, t)]. \end{aligned} \quad (29.12)$$

Положим в эти уравнения выражения для перемещений (29.5) и внешних сил (29.7), (29.8) и проинтегрируем их по методу Бубнова—Галеркина. Для этого перае уравнение ускорения на $\sin n\theta$, а второе на $\cos n\theta$ и проинтегрируем по переменной θ от нуля до 2π . В результате этой операции приходим к следующей системе уравнений:

$$\ddot{w}_n + c_1^2 n^2 \dot{w}_n - c_1^2 w_n = 0, \quad n \geq 1; \quad (29.13)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w}_0 + c_1^2 w_0 - \frac{1}{2} c_1^2 \sum_{i=1}^N (\dot{w}_i w_i - \dot{w}_i^2) = \\ = - \frac{1}{\rho^0} (\rho_0 \dot{w}_0^2 - \rho_0^2); \end{aligned} \quad (29.14)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w}_n + c_1^2 (1 + k_1^2 n^2) w_n = c_1^2 w_n + c_1^2 n^2 w_0 = \\ - \frac{1}{2} c_1^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta_{ij} (w_i - w_j) \dot{w}_j = \frac{1}{\rho^0} (\rho_0 \dot{w}_0^2 - \rho_0^2), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (29.15)$$

Здесь $\Delta_{ij} = 1$ при $i + j = n$ или $|i - j| = n$; $\Delta_{ij} = 0$ во всех остальных случаях.

При использовании для функций $\varphi_n(\theta)$ точных формул уравнения (29.14), (29.15) являются интегро-дифференциальными. С целью упрощения выкладок воспользуемся при оценке гидродинамических сил приближенной зависимостью

$$\varphi_n^*(t) = \left(1 - \frac{n}{2} t\right) \left[1 - \sigma \left(t - \frac{2}{n}\right)\right], \quad (29.16)$$

которая, как показано в третьей главе, может применяться без ограничения по времени. Подставляя эту формулу в выражение (29.9), приходим к следующему результату:

$$\rho_n^*(t) = \alpha_n w_n + \beta_n \dot{w}_n + \gamma_n \ddot{w}_n, \quad (29.17)$$

где

$$\alpha_n = -\frac{n}{2} \left[1 - \sigma \left(t - \frac{2}{n}\right)\right];$$

$$\beta_n = 1 - \sigma \left(t - \frac{2}{n}\right);$$

$$\gamma_n = \frac{1}{n} \sigma \left(t - \frac{2}{n}\right).$$

Напомним, что формулу (29.17) мы уже неоднократно применяли для оценки дополнительного давления. С учетом этой зависимости уравнения (29.14), (29.15) превращаются из интегро-дифференциальных в обыкновенные дифференциальные.

Решение задачи будем проводить численными методами на ЭВМ. Для этого приведем уравнения (29.14), (29.15) к системе первого порядка

$$\dot{X}_{1n} = X_{2n};$$

$$\dot{X}_{2n} = -c_1^2 X_{1n} + c_1^2 n Y_{1n};$$

$$\dot{Y}_{1n} = Y_{2n};$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{2n} = \frac{\rho_0 \dot{w}_0^2}{\rho^0} - c_1^2 Y_{2n} - \frac{1}{\rho^0} Y_{2n} + \\ + \frac{1}{2} c_1^2 \sum_{i=1}^N (\dot{w}_i Y_{1i} - \dot{w}_i^2 Y_{1i}); \end{aligned} \quad (29.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{2n} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma_n}{\rho^0}} \left\{ \frac{\rho_0 \dot{w}_0^2}{\rho^0} - \left[c_1^2 (1 + k_1^2 n^2) + \frac{\gamma_n}{\rho^0} \right] Y_{1n} + c_1^2 X_{1n} - \right. \\ \left. - c_1^2 Y_{1n} Y_{1n} - \frac{\beta_n}{\rho^0} Y_{2n} - \frac{1}{2} c_1^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta_{ij} (X_{1i} - Y_{1i}) \dot{w}_j \right\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$X_{1n} = w_n; \quad X_{2n} = \dot{w}_n;$$

$$Y_{1n} = w_n; \quad Y_{2n} = \dot{w}_n. \quad (29.19)$$

Для расчетных примеров в качестве внешней нагрузки будем принять ударная волна с постоянным за фронтом давлением.

С учетом того, что для функций $\varphi_n(\theta)$ была применена формула (29.16), гармоники дифракционного давления находились с помощью зависимостей (19.27) — (19.29).

Расчеты проводились для стальной оболочки с отношением $\lambda/r_1 \approx 1/100$. В рядах (29.6) удерживалось одиннадцать гармоник ($N = 10$). Вычисления проводились по методу Рунге-Кутты с шагом $\Delta t = 0,02$ на ЭВМ ЕСМ-2.

Обратимся к анализу полученных результатов. На рис. 106 показана форма прогиба оболочки при нагрузке $p_0 = 0,02$ в момент времени $t = 3,6$, а на рис. 107 — изменение прогиба оболочки в точке $\theta = 0$ в процессе нагружения. Для сравнения на обоих рисунках нанесен прогиб оболочки в предположении, что она

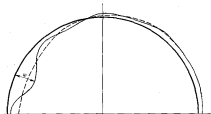


Рис. 106. Форма прогиба оболочки в момент времени $t = 3,6$ при нагрузке $p_0 = 0,02$.

— динамический прогиб; — — — статический прогиб.

устойчивости не теряет [в уравнениях (29.18) отброшены все нелинейные члены]. Отметим следующие характерные особенности процесса потери устойчивости оболочкой. Прежде всего обратим внимание на то обстоятельство, что изгибные волны образуются на оболочке преимущественно со стороны прихода ударной волны. С обратной стороны оболочка почти не изгибается. Заметим, что в рассматриваемый момент времени ($t \approx 3,6$) нагрузка распределена по контуру оболочки практически равномерно. Следовательно, такой характер потери устойчивости обусловлен резкой неравномерностью нагрузки в начале процесса.

Далее следует подчеркнуть, что число волн, образующихся по периметру оболочки в динамике ($n \approx 8$), значительно больше, чем при статической потере устойчивости ($n \approx 2$). Это явление обычно наблюдается при динамическом нагружении любых упругих конструкций [17].

Рассматривая графики на рис. 107, видим, что хотя нагрузка в данном примере превосходит статическую кратчайшую $n \approx 50$ раз, изгибные прогибы совпадают сравнительно хорошо, при $t \approx$

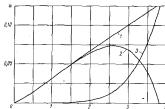


Рис. 107. Прогиб в любой точке оболочки ($\theta = 0$).

1 — линейная теория; 2 — динамическая теория; 3 — статический прогиб.

→ 2. Однако после начала процесса потери устойчивости развитие его идет весьма интенсивно.

Исследуем теперь влияние на процесс потери устойчивости оболочки величины нагрузки. На рис. 108 показана зависимость

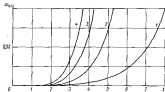


Рис. 108. Зависимость датчика прогиба в любой точке оболочки от величины нагрузки.

1 — $p_0 = 0,001$; 2 — $p_0 = 0,01$; 3 — $p_0 = 0,02$; 4 — $p_0 = 0,05$.

от времени стрелки изгибного прогиба оболочки в точке $\theta = 0$ при разной амплитуде нагрузки. Графики показывают, что чем больше нагрузка, тем раньше начинается потеря устойчивости

оболочки и тем интенсивнее идет процесс. В диапазоне $\rho_m = 0,005-0,02$ форма потери устойчивости, как показывает сравне-

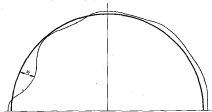


Рис. 109. Форма прогиба оболочки в момент времени $t = 2,0$ при нагрузке $\rho_m = 0,005$.

ние рис. 106 и 109, изменяется незначительно. При существенно большей нагрузке ($\rho_m = 1$) наблюдается уже иная картина (рис. 110).

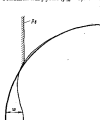


Рис. 110. Форма прогиба оболочки в момент времени $t = 0,2$ при нагрузке $\rho_m = 1$.

Сравнивая эти графики с аналогичным графиком для гладкой оболочки (рис. 106), видим, что даже столь небольшие незначительности существенно скапливаются на форме и величине прогиба оболочки. При этом надо отметить, что наличие регулярной за-

в этом случае оболочка получает вынужденную деформацию в районе приложения нагрузки и в самом начале процесса взаимодействия с ударной волной ($t = 0,2$).

Интересно выяснить, как влияют начальные незначительности формы оболочки на характер процесса потери устойчивости. На рис. 111 показаны эпюры прогибов оболочки при нагрузке $\rho_m = 0,02$ в момент времени $t = 3,6$ при наличии в оболочке начальных незначительностей формы, заданных по закону

$$w_0 = \pm 2 \cdot 10^{-4} \cos 8\theta$$

(стрелка прогиба составляла $0,02\lambda$).

Сравнивая эти графики с аналогичным графиком для гладкой оболочки (рис. 106), видим, что даже столь небольшие незначительности существенно скапливаются на форме и величине прогиба оболочки. При этом надо отметить, что наличие регулярной за-

начальной деформации приводит к появлению вынужденной деформации и на тыльной стороне оболочки, чего у гладкой оболочки не наблюдалось.

В рассмотренном расчетном примере давление за фронтом волны считалось постоянным и время его действия не ограничивалось. Естественно, что при такой нагрузке вопрос о безопасной величине давления не ставился, ибо очевидно, что при $t \rightarrow \infty$ оболочка

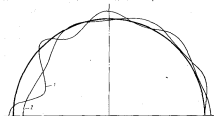


Рис. 111. Влияние начальных незначительностей на форму прогиба оболочки ($\rho_m = 0,02$; $t = 3,6$).

$$t = q_1 = 2 \cdot 10^{-4}, \quad t = q_2 = -2 \cdot 10^{-4}$$

либо вообще потеряет устойчивость. В случае нагрузки конечной длительности определение безопасной амплитуды давления является основной задачей. Этот вопрос с успехом может быть решен с помощью уравнений (29.18). Для этого в процессе решения необходимо в ряде точек оболочки следить за величиной суммарных напряжений и сравнивать их со значением предела текучести. Величина последнего может быть найдена с учетом влияния скорости деформации по формулам предыдущего параграфа. Та амплитуда нагрузки, при которой напряжения в оболочке достигнут предела текучести, и будет безопасной.

§ 30. Устойчивость цилиндрической оболочки, погруженной в ограниченную жесткими стенками жидкость, при динамическом нагружении

Рассмотрим процесс потери устойчивости тонкостенной цилиндрической оболочки, погруженной в ограниченную жесткую среду, при динамическом нагружении. Положим, как мы это уже делали неоднократно, что концы оболочки шарнирно оперты. Объем, занимаемый несжимаемой жидкостью, имеет форму полости между двумя коаксиальными круговыми цилиндрами. Одна

стенки полости образования тонкостенной оболочкой, другая — абсолютно жесткая. Верхний торец оболочки совпадает со свободной поверхностью, нижний — с дном полости. Со стороны свободной поверхности на оболочку и жидкость действует переменное во времени давление $p^0(t)$ (рис. 112).

Возмущения жидкости будем считать достаточно малыми, чтобы можно было исследовать ее движение в линейной постановке. Относительно оболочки полагаем, что к ней применимы линейная теория толчков оболочек [17].

Пример, кроме того, что тангенциальные ускорения в оболочке малы и ими можно пренебречь; жидкость невязкая. В связи с этим излагаемый ниже метод и полученные результаты применимы для исследования оболочек средней длины при умеренных раздвальных размерах кольцевого зазора.

Правильность учета сжимаемости жидкости при расчете потери устойчивости оболочки всегда можно проверить после того, как получено решение задачи и найден закон движения системы. Для этого нужно только найти спектр перемещений и убедиться в выполнении

Рис. 112. К расчету устойчивости оболочки, погруженной в ограниченную жесткой стенкой жидкость.

условия (2.23). Расчеты показывают, что изгибные колебания, связанные с потерей устойчивости оболочек, относятся обычно к категории «медленных», для которых условие (2.23) выполняется. Задача представляет интерес в связи с относительной сложностью организации экспериментальной проверки ее теоретического решения и, следовательно, возможностью получить опытную оценку различных приближенных подходов.

Пусть l_1 — длина оболочки; $\alpha = \pi/l_1$; $\alpha_k = k\alpha$ (k — целое число); $\Delta_1 = 8/(3\pi - 8)$; $\Delta_2 = -3\pi\Delta_1/8$; n — число волн потери устойчивости ($n = \pi/\alpha_0$). Начало отсчета вдоль оси x совместим со свободной поверхностью оболочки. Будем полагать, что все начальные несовершенства оболочки действуют подобно начальному отклонению от идеальной формы и что их суммарное действие определяется приведенной величиной прогиба

$$\omega_0 = q_0 \sin \alpha x \cos \alpha t. \quad (30.1)$$

Примем волной прогиб оболочки под нагрузкой в виде

$$w = \sum_{j=1}^n q_j f_j. \quad (30.2)$$

Здесь $q_j = q_j(t)$ — параметры прогиба, принимаемые в последующем в качестве обобщенных координат;

$$f_1 = \sin \alpha x; f_2 = \Delta_1 (\sin \alpha x - \frac{3\pi}{8} \sin^3 \alpha x);$$

$$f_3 = \sin \alpha x \cos \alpha t \quad (30.3)$$

взаимно ортогональные функции координат.

Принятая аппроксимация (30.2) удовлетворительно описывает как докритическую, так и закритическую деформацию оболочки. Статическое нижнее критическое давление, рассчитанное при использовании функций (30.3), совпадает с известным решением [29]. Правда, выражение, описывающее осесимметричное обжатие оболочки, не отвечает условиям шарнирного опирания торцов оболочки. Это обстоятельство, однако, не должно сильно сказаться на результатах решения задачи применительно к оболочкам средней длины, в которых допустимо пренебречь краевым эффектом.

При составлении уравнений движения оболочки, сопрягающейся с жидкостью, воспользуемся методом Рунца. При определении функции мембранных напряжений Φ будем исходить из безинерционного уравнения совместности деформаций теории толчков оболочек

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} \left[L(w, w) - L(w_0, w_0) \right] - \frac{1}{r_1} \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2}, \quad (30.4)$$

где

$$L(w, w) = \frac{2}{r_1^2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right]. \quad (30.5)$$

Подставим в правую часть уравнения (30.4) выражения (30.1) и (30.2). Интегрируя его, получим следующее выражение для функции напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{E} = & B_1 \cos 2\alpha x + B_2 \cos 2\alpha \theta + B_3 \cos 2\alpha x \cos \alpha \theta + B_4 \cos \alpha \theta + \\ & + B_5 \sin \alpha x + B_6 \sin \alpha x \cos \alpha \theta + B_7 \sin 3\alpha x \cos \alpha \theta - \frac{\alpha_1 r_0^2}{2k} - \frac{\alpha_2}{2k}. \end{aligned} \quad (30.6)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} B_1 = & \frac{\alpha^2}{32} (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + \frac{3\alpha\Delta_1}{64\alpha_1} \alpha_1; B_2 = \frac{1}{\alpha_1 r_1} (\alpha_1 + \alpha_2 \Delta_1); \\ B_3 = & -\frac{\alpha}{32\alpha^2} (\alpha_2^2 - \alpha_1^2); B_4 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 r_1 (\alpha^2 + 1)^2} + \frac{3\alpha\Delta_1 \alpha^2}{8(\alpha^2 + 1)} \alpha_1 \alpha_2; \\ B_5 = & \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2 + 4)} (\alpha_1 + \Delta_1 \alpha_2) \alpha_2; B_6 = -\frac{3\pi}{8} \Delta_1 \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + 9)} \alpha_1 \alpha_2; \\ B_7 = & -\frac{1}{2\alpha^2} (\alpha_1 + \Delta_1 \alpha_2) \alpha_1. \end{aligned} \quad (30.7)$$

Под $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$ понимаются некоторые постоянные значения сжимающих напряжений в кольцевом и продольном сечениях оболочки. Полагая, что интенсивность продольного усилия на краю оболочки N_1 является заданной функцией времени [в нашей задаче $N_1(t) = \frac{p^0(t) r_1}{2}$], найдем

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{N_1(t)}{\lambda}.$$

Величину кольцевого напряжения $\bar{\sigma}_2$ выразим через параметры протрузии с помощью условия замкнутости оболочки

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\sigma}_2} d\bar{\sigma}_2 = 0, \quad (30.8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{\sigma}_2} = \frac{r_1}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} - \mu \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) - \frac{1}{2r_1} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \bar{\sigma}_2} \right)^2 + \frac{1}{2r_1} \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \bar{\sigma}_2} \right)^2 + \omega.$$

Используя предыдущие соотношения, получим

$$\bar{\sigma}_2 = \mu \bar{\sigma}_1 - \frac{E}{r_1} \frac{3\pi}{16} \Delta \varphi_2 - \frac{E}{8} \bar{\sigma}_1^2 \omega^2 (\bar{q}_2^2 - \bar{q}_0^2). \quad (30.9)$$

Воспользовавшись выражениями для энергии деформации оболочки (26.15) и (26.16), найдем:

— энергию деформации срединной поверхности оболочки [после исключения $\bar{\sigma}_1$ с помощью (30.9)]

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & E \lambda r_1 A \left[b_1 (q_1 + \Delta_1 q_2)^2 + b_2 (q_2 - q_1)^2 + b_3 (q_1 + \Delta_1 q_2) (q_2^2 - q_0^2) + \right. \\ & + b_4 (q_1 + \Delta_1 q_2) q_2 (q_2 - q_0) + b_5 (q_1 + \Delta_1 q_2)^2 q_2^2 + b_6 (q_2^2 - q_0^2) + b_7 \Delta_1^2 q_2^2 + \\ & + b_8 \Delta_2 (q_1 + \Delta_2 q_2) q_2 + b_9 \Delta_2 q_2 (q_2^2 - q_0^2) + b_{10} \Delta_2 q_2 (q_2 - q_0) + \\ & \left. + b_{11} \Delta_1^2 q_2^2 + b_{12} \Delta_2 (q_1 + \Delta_1 q_2) q_1 q_2^2 + (1 - \mu^2) \frac{\omega^2}{2\pi} \right], \quad (30.10) \end{aligned}$$

где

$$b_1 = \frac{1}{2\pi^2}; \quad b_6 = \frac{\omega^4}{128} (3\bar{\mu} + 1);$$

$$b_2 = \frac{1}{8\pi^2 (\bar{\mu}^2 + 1)^2}; \quad b_7 = \frac{3}{8\pi^2};$$

$$b_3 = -\frac{2}{3\pi r_1} \bar{\mu}^2 \omega^2; \quad b_8 = \frac{8}{3\pi \bar{\mu}^2};$$

$$\begin{aligned} b_4 = -\frac{4}{3\pi} \left[\frac{\bar{\mu}^2 + 3}{(\bar{\mu}^2 + 1)(\bar{\mu}^2 + 4)} - \frac{6(\bar{\mu}^2 + 2)(1 + \mu)}{(\bar{\mu}^2 + 1)^2(\bar{\mu}^2 + 4)^2} \right]; \quad b_9 = -\frac{\omega^2}{2\pi} \times \\ \times \left(\bar{\mu}^2 + \frac{\bar{\mu}^2 + 1}{2\bar{\mu}^2} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_5 = \frac{\bar{\mu}^2 \omega^4}{8(\bar{\mu}^2 + 4)^2} \left[\frac{(\bar{\mu}^2 + 4)^2}{\bar{\mu}^2} + \frac{1}{2} \right]; \quad b_{10} = -\frac{\omega^4 \omega^2}{2\pi (\bar{\mu}^2 + 1)^2}; \\ b_{11} = -\frac{\bar{\mu}^2 \omega^4}{4} \left[\frac{1}{(\bar{\mu}^2 + 1)^2} + \frac{1}{(\bar{\mu}^2 + 9)^2} \right]; \end{aligned} \quad (30.11)$$

$$\begin{aligned} b_{12} = \frac{\omega^4}{\pi} \left[\frac{4}{15} \frac{(\bar{\mu}^2 + 5)}{(\bar{\mu}^2 + 4)(\bar{\mu}^2 + 9)} + \frac{4}{3} \frac{\bar{\mu}^2 (\bar{\mu}^2 + 2)}{(\bar{\mu}^2 + 1)(\bar{\mu}^2 + 4)} + \right. \\ \left. + \frac{24\bar{\mu}^2 (\bar{\mu}^2 + 2)(1 + \mu)}{(\bar{\mu}^2 + 9)(\bar{\mu}^2 + 4)^2} - \frac{6\bar{\mu}^2 (\bar{\mu}^2 + 2)(1 + \mu)}{(\bar{\mu}^2 + 1)(\bar{\mu}^2 + 4)^2} \right]; \end{aligned}$$

— энергию деформации изгиба оболочки (с учетом начальных неуправляемостей)

$$\Pi_3 = \frac{E h^3}{48(1 - \mu^2)} \pi r_1^2 \omega^4 \left[2(\bar{q}_1 + \Delta_1 \bar{q}_2)^2 + 8\Delta_1^2 \bar{q}_2^2 + (q_2 - q_0)^2 (\bar{\mu}^2 + 1)^2 \right]. \quad (30.12)$$

Переходим к характеристике внешних сил, действующих на боковую поверхность оболочки. Давление на боковую поверхность представим в виде суммы давления на недеформированную оболочку и дополнительного давления p^* , вызванного колебанием оболочки и жидкости. Первая составляющая — $p^0(t)$ неизменна по высоте кольцевого зазора и равна давлению на свободную поверхность воды; вторая — p^* зависит сложным образом от закона движения оболочки. Получим сначала общее выражение для p^* , используя метод, уже рассмотренный в § 6 применительно к осесимметричным колебаниям систем конечного размера. Затем рассмотрим некоторые упрощения. Давление p^* связано с потенциалом скоростей φ зависимостью (1.9).

Функция φ удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям

$$[\varphi]_{z=0} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=0} = 0; \quad (a)$$

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r=a_0} = 0; \quad (b)$$

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r=a_1} = -\dot{\omega}. \quad (в)$$

Представим φ суммой гармонических функций

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Пусть φ_1 точно удовлетворяет условиям (a) и (b) и в срединном условии (б)

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)_{r=a_1} r d\tau = 0, \quad (30.13)$$

что соответствует равенству нулю секундного расхода жидкости через сечение $x = l_1$. Следовательно, функция φ_2 должна удовлетворять условиям краевой задачи

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0; \quad \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right]_{r=r_1} = \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right]_{r=r_2} = [\varphi_2]_{x=0} = 0; \\ \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right]_{x=l_1} = - \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right]_{x=l_1}, \quad (30.14)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа.

Примем

$$\varphi_1 = - \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \sin \alpha_n x \cos \alpha_n \Phi_{2n} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_{2k} \frac{x}{\omega_k H}, \quad (30.15)$$

где $a_{2n} = a_{2n}(l)$ — коэффициенты разложения в ряд Фурье по $\sin \alpha_n x$ функции ω ; H — приведенная толщина слоя жидкости (4.13). Функции Φ_{2n} определяются верхним выражением в (2.11), в котором следует положить $\beta = 1$, $\omega = \alpha_n$.

Потенциал φ_2 представим рядом

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} A_{2n}, \quad (30.16)$$

где $b_{2n}(l)$ — коэффициенты, подлежащие определению;

$$A_{2n} = \frac{\sin \alpha_n x}{\alpha_n \operatorname{ch} \alpha_n l_1} \xi_{2n} \cos \alpha_n \Phi. \quad (30.17)$$

Здесь $\xi_{2n}(r)$ — нормированные собственные функции и собственные значения краевой задачи

$$\xi_{2n}'' + \frac{1}{r} \xi_{2n}' - \left(\frac{\alpha_n^2}{r^2} - \alpha_n^2 \right) \xi_{2n} = 0, \quad [\xi_{2n}']_{r=r_1, r_2} = 0. \quad (30.18)$$

В (30.18) штрихом обозначено дифференцирование по r . Вместе с постоянной величиной функции ξ_{2n} ($n = 1, 2, \dots$; $\alpha = 0, 1, 2, \dots$) образуют полную и ортогональную систему функций в области, ограниченной окружностями с радиусами r_1 и r_2 . Задача (30.18) решается в бесконечных функциях вещественного аргумента. Гармонические функции A_{2n} удовлетворяют условиям для φ_2 при $r = r_1$, $r = r_2$ и $x = 0$. Следовательно, коэффициенты b_{2n} должны быть подобраны так, чтобы ряд (30.16) удовлетворял условиям для φ_2 при $x = l_1$. Вычисляя b_{2n} , получим

$$b_{2n} = - \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right]_{x=l_1} \xi_{2n} \cos \alpha_n \Phi r dr d\Phi. \quad (30.19)$$

Из соотношений (30.15) и (30.16) при задании профиля выражением (30.2) получим

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_2; \quad \varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_{2n}, \quad (30.20)$$

где

$$\tilde{\varphi}_{11} = - \sin \alpha x \Phi_{2n} + x/\omega_k H; \\ \tilde{\varphi}_{2n} = - \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\sin \alpha_k \Phi_{2n} - x/\omega_k H); \\ \tilde{\varphi}_{20} = - \sin \alpha x \cos \alpha \Phi_{2n}; \\ \tilde{\varphi}_{2n} = - \omega \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_{2k} \sin \alpha_{2k} x}{\alpha_{2k} \operatorname{ch} \alpha_{2k} l_1} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \Phi_{2n} \xi_{2k} r dr d\Phi; \quad (30.21)$$

$$\tilde{\varphi}_{2n} = - \omega \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\xi_{2l} \sin \alpha_{2l} x}{\alpha_{2l} \operatorname{ch} \alpha_{2l} l_1} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \Phi_{2n} \xi_{2l} r dr d\Phi;$$

$$\tilde{\varphi}_{20} = - \omega \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_{2k} \sin \alpha_{2k} x \cos \alpha \Phi}{\alpha_{2k} \operatorname{ch} \alpha_{2k} l_1} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \Phi_{2n} \xi_{2k} \cos^2 \alpha \Phi r dr d\Phi.$$

Здесь

$$c_k = \begin{cases} - \frac{34}{(k-2)(k+3)(2n-k)} & \text{при } k = 3, 5, 7, \dots \\ 0 & \text{при } k \text{ четном} \end{cases} \quad (30.22)$$

— коэффициенты разложения в ряд Фурье по $\sin \alpha_k x$ функции f_2 .

Учитывая (30.20), подставим φ в (1.9) при $r = r_1$. В итоге найдем выражение, связывающее давление p^* с обобщенными координатами q_j .

$$p^* = - \rho \sum_{j=1}^3 \tilde{q}_j (\tilde{\varphi}_{11}|_{r=r_1} + \tilde{\varphi}_{2n}|_{r=r_1}). \quad (30.23)$$

Формулы для коэффициентов этого выражения оказываются слишком громоздкими для того, чтобы их можно было рекомендовать для применения в практических расчетах. Рассмотрим некоторые упрощения.

Первое из них связано с заменой точного граничного условия для φ при $x = l_1$ приближенным (30.13). Мы уже видели (§ 21), что подобная замена не должна затронуть образом отразится на осесимметричных колебаниях системы. Что же касается изгибных колебаний по форме f_2 , то для них такой подход является традиционным [13, 83, 101]. Из результатов, полученных в § 3,

следует, что ошибка, которая при этом возникает, уменьшится с ростом отношения $\lambda_0/\lambda_p = \bar{n}$ ($\lambda_0 = l_1$ — длина полуволны колебания в направлении оси x ; $\lambda_p = \pi r_p/\lambda$ — длина полуволны колебания в направлении λ). При замене точных граничных условий для φ приближенными из системы функций $\Psi_{\alpha 1, \dots, \alpha}$ ($\alpha = 1, 2; j = 1, 2, 3$) останутся лишь три:

$$\begin{aligned}\Psi_{11} &= -\sin \alpha x \Phi_{00}^2 + \varepsilon \omega H; \\ \Psi_{21} &= -\sum_{k=1}^{\infty} c_k (\sin \alpha_k x \Phi_{0k}^2 - \varepsilon \omega_k H); \\ \Psi_{31} &= -\sin \alpha x \cos \pi \theta \Phi_{00}^2.\end{aligned}\quad (30.24)$$

Функция Φ_{0p}^2 определяется формулой (4.3), в которой следует положить $\omega = \omega_0$, $\beta = 1$; функция Φ_{0k}^2 — формулой (2.11) при $\beta = 1$. Ряд простых аппроксимаций функции Φ_{0k}^2 приведен в § 3.

Второе упрощение задачи связем с предположением о том, что волны осесимметричных колебаний, характеризующиеся формами f_1 и f_2 , относятся к категории длинных, т. е. таких, при которых выполняется неравенство

$$(\pi H/\lambda_{\text{min}})^2 \ll 1, \quad (30.25)$$

где λ_{min} — минимальное расстояние между узлами длинных форм колебаний.

В рамках теории длинных осесимметричных волн оболочка должна рассматриваться как безмоментная, безматериальная, а движение жидкости — одномомерным. Продольные силы в пределах этой теории не оказывают влияния на свободные осесимметричные колебания системы. При одномомерном осесимметричном движении жидкости имеем

$$\begin{aligned}\Psi_{11} &= \frac{\sin \alpha x}{\omega_0 H} + \frac{\varepsilon}{\omega H}; \\ \Psi_{21} &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{\sin \alpha_k x}{\omega_k^2 H} + \frac{\varepsilon}{\omega_0 H} \right).\end{aligned}\quad (30.26)$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда обеспечивается выполнение условия (30.25). Это позволяет использовать при исследовании движения по координатам q_1 и q_2 упрощения, к которым приводит теория длинных волн.

Составим выражение для работы давления p^+ и инерционных сил оболочки на перемещение w

$$A_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (p^+ - \pi^2 \bar{w}) \omega r_1 dx d\theta. \quad (30.27)$$

Используя приведенные выше соотношения, получим

$$A_0 = -\sum_{i,j} \bar{q}_i \bar{q}_j (\alpha_{ij} + \gamma_{ij}), \quad (30.28)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^1 |\bar{q}_{ij}| \omega r_1 dx d\theta; \\ \gamma_{ij} &= \delta_{ij} \pi^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \bar{f}_i \bar{f}_j dx d\theta\end{aligned}\quad (30.29)$$

(δ_{ij} — символ Кронеккера).

В пределах гипотез теории длинных осесимметричных волн после интегрирования (30.29) получим

$$|\alpha_{ij}| = \frac{2\pi r_1 \rho}{\omega^2 H} \begin{vmatrix} 1,5 & 0,422^* & 0 \\ 1,21^* & 0,312^* & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \Phi_{0,0}^2 \omega^2 H \end{vmatrix}. \quad (30.30)$$

В (30.30) величины, отмеченные звездочкой, вычислены с точностью до трех знаков.

Работа давления p^+ (θ) из соотношения ω

$$A_1 = p^+ \int_0^{2\pi} \int_0^1 \omega r_1 dx d\theta. \quad (30.31)$$

Работа сжимающих усилий $N_1 = p^+ (\theta) r_1/2$

$$A_2 = -\frac{\rho^2 r_1}{2E} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{E}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{E}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] r_1 dx d\theta. \quad (30.32)$$

После подстановки и интегрирования найдем

$$A_1 = 2\pi r_1 \rho^+ \left[\frac{2}{\pi} q_1 + \left(\frac{2}{\pi} \Delta_1 + \frac{\Delta_2}{2} \right) q_2 \right]; \quad (30.33)$$

$$\begin{aligned}A_2 &= -\pi r_1^2 \rho^2 \left[-\frac{2}{\pi} (1 - \mu^2) + \frac{2\mu}{\pi r_1} q_1 + \left(\frac{2\Delta_2}{2r_1} + \frac{2\Delta_1}{\pi r_1} \right) q_2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\pi^2 \omega^2}{8} (q_1^2 - q_2^2) - \frac{(2\pi - \Delta_1) \omega^2}{4} - \frac{\omega^2}{4} (q_1 + \Delta_1 q_2)^2 - \frac{\omega^2}{8} (q_2 - q_1)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{E \Delta_2 \omega^2}{2} (q_1 + \Delta_1 q_2) q_2 - \frac{\omega^2}{4} \Delta_2^2 \right].\end{aligned}\quad (30.34)$$

Уравнения метода Рунге для координат q_1, q_2, q_3 запишем в виде

$$\frac{d(P_1 + P_2 - A_1 - A_2 - A_3)}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (30.35)$$

Поскольку задача решается в рамках гипотез теории движущих вод, следует исключить из уравнений движения члены, содержащие произведение осевой нагрузки на координаты q_1, q_2 (иначе оказалось бы, что частоты свободных осесимметричных колебаний зависят от нагрузки N_1), а члены, учитывающие изгиб по формам f_1 и f_2 . При окончательной записи уравнений движения воспользуемся относительной системой единиц измерения, приняв на этот раз в качестве основных единиц измерения толщину оболочки h — характерный линейный размер, комплекс EN^2/r_1^2 — характерное давление, и величину, обратную частоте собственных колебаний по координате q_1 (при условии, что на q_1 наложена связь: $q_2 = 0$) $T^* = \frac{r_1 h}{n} \sqrt{\frac{3\rho}{EN}}$ — характерное время.

Следовательно, в выбранной указанным образом системе единиц измерения $h = 1, EN^2/r_1^2 = 1, T^* = 1$. Мы увидим, что переход к новой системе единиц измерения позволит вскрыть некоторые особенности в поведении системы оболочка—жидкость при динамическом нагружении.

После некоторых преобразований уравнения движения системы приводятся к виду

$$\begin{aligned} \ddot{Q} &= P, \\ P &= -CQ + F, \end{aligned} \quad (30.36)$$

где $Q = (q_1, q_2, q_3)$ — столбец искомых переменных;
 $P = (P_1, P_2, P_3)$ — столбец искомогого функций;
 C — диагональная матрица;
 $F = (F_1, F_2, F_3)$ — столбец возмущающих функций.
 Элементы матрицы C

$$c_{11} = 0,678 + 0,678\beta_{10}q_1^2;$$

$$c_{22} = 33,22 + 25,8\beta_{20}q_2^2;$$

$$\begin{aligned} c_{33} &= \beta_{31} + \beta_{32}q_1 + \beta_{33}q_1^2 + \beta_{34}q_2 + \beta_{35}q_2^2 + \beta_{36}q_1^2 + \beta_{37}q_1q_2 + \\ &+ \beta_{38}q_2^2 - 0,5\eta_3^2(1 + \mu^2)\rho^2. \end{aligned} \quad (30.37)$$

Элементы матрицы F

$$\begin{aligned} F_1 &= 1,43q_2 - 0,678\beta_{10}q_1^2 - 0,678\beta_{11}q_1q_2 - 0,678\beta_{12}q_2^2 + \\ &+ 0,678\beta_{13}q_1q_2 + 0,678\beta_{14}q_2^2 + 0,244(1 - \mu/2)\rho^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= 0,725q_1 - 25,8\beta_{20}q_2^2 - 25,8\beta_{21}q_1q_2 - \beta_{22}q_1^2 + \\ &+ 25,8\beta_{23}q_1q_2 + 25,8\beta_{24}q_2^2 + 4,65(1 - \mu/2)\rho^2; \\ F_3 &= \beta_{30}q_1 + \beta_{31}q_1^2 + \beta_{32}q_1q_2 + \beta_{33}q_2^2, \end{aligned} \quad (30.38)$$

где

$$\beta_{10} = \eta^2(-17,1a_1 + 12,24a_2);$$

$$\beta_{11} = \eta(-8,55a_1 + 11,24a_2);$$

$$\beta_{12} = \eta(-8,55a_2 + 11,24a_1);$$

$$\beta_{13} = \eta^2(-96,5a_1 - 149a_2 + 120a_3);$$

$$\beta_{14} = \eta^2(38,2a_1 + 88,3a_2 - 73,5a_3);$$

$$\beta_{15} = \eta(3,38a_1 - 6,65a_2);$$

$$\beta_{16} = \eta(3,38a_2 - 6,65a_1);$$

$$\beta_{17} = \eta^2(5,76a_1 - 5,65a_2);$$

$$\beta_{21} = \eta^2 \left[\frac{\eta(\eta^2 + 1)^2}{12(1 - \eta^2)} + \frac{1}{\eta(\eta^2 + 1)^2} \right]; \quad (30.39)$$

$$\beta_{22} = 4\eta^2(a_1 + a_2);$$

$$\beta_{23} = \eta^2(-0,188\eta^2 - 22,6a_1 + 2,66a_2);$$

$$\beta_{24} = 8\eta^2a_1;$$

$$\beta_{25} = 8\eta^2a_2;$$

$$\beta_{26} = \eta^2(8a_1 - 13,3a_2);$$

$$\beta_{27} = 4\eta^2(a_1 + 1,39a_2 - 0,59a_3);$$

$$\beta_{28} = 2\eta^2a_3;$$

$$\beta_{30} = 2\eta^2(5,65a_1 - 5,65a_2).$$

Коэффициенты a_i ($i = 1, 2, \dots, 8$)

$$a_1 = -\frac{2}{3} \frac{\eta^2}{\eta^2 + 1}; \quad a_2 = -\frac{4}{3\eta} \left[\frac{\eta^2 + 3}{(\eta^2 + 1)(\eta^2 + 4)} - \frac{6(\eta^2 + 2)(1 + \mu)}{(\eta^2 + 1)^2(\eta^2 + 4)^2} \right];$$

$$a_3 = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{(\eta^2 + 4)^2} \right]; \quad a_4 = \frac{2\eta^2 + 1}{198};$$

$$a_5 = -\frac{5}{18} \frac{\eta^2}{\eta^2 + 1}; \quad a_6 = -\frac{\eta^2}{2(1 + \eta^2)^2};$$

$$a_7 = \frac{\eta^2}{4} \left[\frac{1}{(\eta^2 + 1)^2} + \frac{1}{(\eta^2 + 2)^2} \right];$$

$$\begin{aligned} a_8 &= \frac{1}{\eta} \left[\frac{4}{15} \frac{\eta^2 + 3}{(\eta^2 + 4)(\eta^2 + 9)} + \frac{4}{3} \frac{\eta^2(\eta^2 + 3)}{(\eta^2 + 1)(\eta^2 + 4)} + \right. \\ &+ \left. \frac{26\eta^2(\eta^2 + 2)(1 + \mu)}{(\eta^2 + 9)(\eta^2 + 4)} - \frac{8(\eta^2 + 2)\eta^2(1 + \mu)}{(\eta^2 + 1)^2(\eta^2 + 4)^2} \right], \end{aligned} \quad (30.40)$$

В (30.37) обозначено

$$\eta = \omega^2 r_0, \quad \xi = \frac{3\rho}{\omega^2 (\rho_{\text{ж}} + \rho^0) R} (\rho_{\text{ж}} = \rho |Q_{\text{ж}}^0|). \quad (30.41)$$

Положим, что продолжительность импульса давления J такова, что его влияние на движение оболочки по формулам (30.3) можно заменить влиянием мгновенного импульса. В этом случае при решении уравнений (30.35) следует положить $p^0(t) \rightarrow 0$ и ввести скорости в начальные условия:

$$\begin{aligned} P_1(0) = \dot{q}_1(0) &= 0,244(1 - \mu/2)J & q_1(0) &= 0; \\ P_2(0) = \dot{q}_2(0) &= 4,65(1 - \mu/2)J & q_2(0) &= 0; \\ P_3(0) = \dot{q}_3(0) &= 0,5\alpha_3^2(1 + \mu\alpha^2)J & q_3(0) &= 0. \end{aligned} \quad (30.42)$$

При проведении численных расчетов в выражениях для элементов (30.37) и (30.38) важно сохранить лишь подчеркнутые члены. Учет остальных членов несуществен для решаемой задачи.

Отметим, что при решении статической задачи (при $\dot{q}_s = 0$) и отбрасывания нелинейных членов из системы (30.35) не получается формула Минеса для верхнего критического давления. Это связано с тем, что формула Минеса получена при иных граничных условиях. Тем не менее, в широком диапазоне параметров оболочек уравнения (30.36) дают практически то же решение, что и формула Минеса. Решение уравнений (30.36) связано с геометрией слоя жидкости через коэффициент ξ (а ξ входит приведенная толщина кольцевого слоя M). Положим, что радиальный размер кольцевого затора Δr мал в смысле неравенства

$$\Delta r^2 \omega^2 (\alpha^2 + 1) = \Delta r^2 \pi^2 (1/\lambda_1^2 + 1/\lambda_2^2) \ll 1. \quad (a)$$

Из разложения (3.9) вытекает, что при выполнении условия (a) присоединенную массу $\rho_{\text{ж}}$, входящую в параметр ξ , можно аппроксимировать выражением

$$\rho_{\text{ж}} = \frac{\rho}{\omega^2 \Delta r (1 + \alpha^2)}. \quad (b)$$

Составим отношение $\lambda^2/\rho_{\text{ж}}$. С учетом выражений (a) и (b) найдем

$$\frac{\lambda^2}{\rho_{\text{ж}}} = \frac{\rho \lambda}{\mu \Delta r} \Delta r^2 \omega^2 (\alpha^2 + 1) \ll 1, \quad (в)$$

откуда следует, что при малой толщине кольцевого слоя жесткость оболочки практически не оказывает влияния на изгибные колебания.

Таким образом, в исследуемой задаче мы пришли к модели «бездеривационная оболочка» по отношению не только к осесимметричным, но и изгибным колебаниям.

Положим, что размер Δr мал. Не учитывая, как малое, различие между Δr и M , найдем, что в этом случае

$$\xi = 3(\alpha^2 + 1). \quad (30.43)$$

Легко обнаружить, что при замене общего выражения для ξ (30.41) формулой (30.43) коэффициенты системы (30.36) оказываются не зависящими от размера Δr . А это означает, что при уменьшении параметров оболочки и изменении затора будет меняться лишь масштаб времени T^* , пропорциональный величине $1/\sqrt{\Delta r}$. Отсюда, в частности, следует, что при малом заторе частоты собственных колебаний системы пропорциональны, а импульсы кратковременной нагрузки, приводящие к потере устойчивости оболочки, обратно пропорциональны значению $\sqrt{\Delta r}$.

Мы видим преимущество перехода к новым единицам измерения (а относительный размер единиц измерения) — он позволяет свести решение задачи (при выполнении условия (a)) к интегрированию системы, инвариантной по отношению к изменению радиального размера кольцевого затора.

Рассмотрим реакцию круговой цилиндрической оболочки, погруженной в сосуд с жидкостью (рис. 112), на кратковременный импульс давления $p^0(t)$. Положим, что продолжительность импульса J_0 такова, что его влияние на движение оболочки по формулам (30.3) можно заменить влиянием мгновенного импульса $J(t=0)$.

Решение задачи проследим для двух вариантов параметров системы:

- стальная оболочка, $\Delta r = 0,25$ см, $l_2 = 18$ см, $h = 0,03$ см, $r_1 = 4,5$ см, $\rho = 1,02 \cdot 10^{-4}$ кг/см², $p^0 = 8 \cdot 10^{-4}$ кг/см², $\mu = 0,3$, $\alpha_1 = 2200$ кг/см², $E = 1,9 \cdot 10^6$ кг/см²;
- оболочка из алюминиевого сплава, $\Delta r = 0,2$ см, $l_2 = 18$ см, $h = 0,055$ см, $r_1 = 4,55$ см, $\rho = 1,02 \cdot 10^{-4}$ кг/см², $p^0 = 2,85 \times 10^{-4}$ кг/см², $\mu = 0,3$, $\alpha_1 = 1100$ кг/см², $E = 7,2 \cdot 10^6$ кг/см².

Для оценки величины безопасной нагрузки (точнее, максимального значения безопасного импульса давления J_0 , позволяющего параметрам $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$, в ходе интегрирования уравнений (30.36) вычислен наибольшую интенсивность напряжений $\sigma_1(t)$ и среднее пролета оболочки. В разбираемом примере оболочка в процессе движения нагружена от действия внешних осевых сил. Если, кроме того, учесть, что оболочка имеет относительно большое удлинение ($l_1/2r_1 = 2$), то можно просто положить

$$\sigma_1 = |\sigma_2|,$$

где $|\sigma_2|$ — наибольшее по абсолютной величине значение кольцевого напряжения в середине пролета оболочки в текущий момент времени t (напряжение на гребнях или впадинах волн смещения оболочки по форме $\sin \alpha x \cos \pi y$).

После отбрасывания несущественных для численного расчета членов выражение для σ_0^2/E приводится к виду

$$\frac{\sigma_0^2}{E} = \frac{1}{\tau_1} \left[(q_1 - q_2 - \frac{1}{4} \pi^2 q_1 (q_1^2 - q_2^2) \pm \frac{\pi^2 q_1}{2(1-\mu^2)} (q_1 - q_2) \right]. \quad (30.44)$$

Здесь q_i ($i = 1, 2, 3$) — безразмерные функции времени, являющиеся решением системы (30.36); q_0 — параметр начальной погаси; r_1 — волчка радиуса, измеренная в толщинах оболочки. При сжатии $\sigma_2 > 0$.

Под действием внешнего импульса оболочка в первой фазе движения испытывает сжатие. Судя по результатам эксперимен-

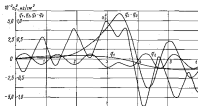


Рис. 113. Зависимость q_1 , q_2 , q_3 , q_0^2 от t (цилиндрическая оболочка, $J^* = 0.04$, $q_0 = 0.02$, $n = 7$).

тов (см. § 33), именно в этой фазе и происходит выпучивание с образованием остаточных изгибов. Ограничиваясь в расчете определением величин наибольшего напряжения сжатия, сохраняем перед последним членом в правых скобках знак плюс.

Наиболее характерные результаты расчетов приводятся в виде графиков на рис. 113—116. Отметим особенности движения оболочки.

При небольших значениях J движение системы сопровождается малыми осесимметричными и изгибными колебаниями оболочки. Наибольшее по абсолютному значению напряжение $|\sigma_0^2|_{\max}$ меньше предела текучести материала. Прогнбы q_0 , описывающие движение по формам потера устойчивости, начинают заметно расти лишь при таких значениях J , когда осесимметричное обжатие оболочки превышает в несколько раз критическое статическое. Вместе с этим растет $|\sigma_0^2|_{\max}$, достигая при максимальной величине безопасного импульса J_e предела текучести материала.

В начале движения изгибные прогибы q_3 развиваются медленно; быстрый рост прогибов начинается лишь тогда, когда осесимметричное обжатие уже идет на убыль (рис. 113). Первый максимум q_3 является, как правило, наибольшим (рис. 114). При развитых нелинейных колебаниях, соответствующих большим значениям J , рост импульса давления приводит к росту лишь первого максимума

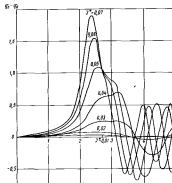


Рис. 114. Зависимость $q_3 - q_0$ от t при различных значениях параметра J^* (оболочка из алюминиевого сплава, $q = 0.02$, $n = 7$).

муму q_0 . Амплитуды последующих колебаний по координате q_3 слабо зависят от величины J (рис. 114).

Характер кривой $\sigma_0^2(t)$ можно проследить по графику рис. 113. Основным результатом вычислений являются зависимости

$$|\sigma_0^2|_{\max} = f(J^*) \quad [J^* = 0.244(1 - \mu/2)J],$$

рассчитанные для различных значений n и q_0 . В качестве иллюстрации этих зависимостей на рис. 115 приведены кривые $|\sigma_0^2|_{\max} = f(J^*)$, соответствующие стальной оболочке при $q_0 = 0.02$ ($n = 6, 7, 8, 9$). Результаты аналогичных расчетов для оболочки

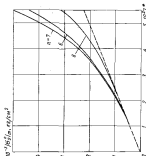


Рис. 116. Зависимость $|\sigma_0^0|_{\max}$ от J_0 при различных значениях ϕ_0 (оболочка из алюминиевого сплава).

$E = 0.61$; $\nu = 0.3$

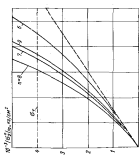


Рис. 115. Зависимость $|\sigma_0^0|_{\max}$ от J_0 при различных значениях ϕ_0 (стальная оболочка).

$E = 0.61$; $\nu = 0.3$

из алюминиевого сплава показаны на рис. 116. Зависимость $|\sigma_0^0|_{\max} = f(J_0)$ позволяют для каждой комбинации λ и ϕ_0 (в пределах принятого диапазона их изменения) рассчитать значение импульса J_0 , при котором наибольшее напряжение сжатия достигнет динамического предела текучести материала σ_0 .

Для определения σ_0 следует знать время t_m достижения величиной $|\sigma_0^0|_{\max}$ наибольшего значения $|\sigma_0^0|_{\max}$. В разбираемом примере t_m равно (приблизительно) трем единицам (в относительной системе единиц измерения). Отсюда для стальной оболочки (λ в сек)

$$t_m = 3T^* = 3t_1 \sqrt{3}, \text{ сек.}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \sqrt{E \rho h / \rho l^2} \sim \\ &= \sqrt{E h (\rho_0^2 - \bar{\rho}) / 2 \rho l^2} = \\ &= 2.25 \cdot 10^8 \text{ см/сек} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} t_m &= 3 \cdot 18 \sqrt{3} / \pi \cdot 2.25 \cdot 10^8 \approx \\ &\approx 1.2 \cdot 10^{-2} \text{ сек.} \end{aligned}$$

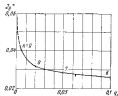


Рис. 117. Зависимость J_0 от ϕ_0 для стальной оболочки.

Используя графики рис. 103 для $t_m = 1.2 \cdot 10^{-2}$ сек и $\phi_{0,c} = -2200 \text{ кг/см}^2$, находим $\sigma_0 = 4000 \text{ кг/см}^2$. Положим, что при фиксированном ϕ_0 реализуется то значение λ , которому отвечает наименьшая величина J_0 . Зависимость между ϕ_0 и наименьшим (в указанном смысле) значениями J_0 для стальной оболочки при $\sigma_0 = 4000 \text{ кг/см}^2$ показана на рис. 117. Там же отмечены числа волн потерь устойчивости λ . Как видно, λ растет по мере уменьшения параметра начальных искривлений ϕ_0 (в статике $\lambda \sim \phi_0$). В области относительно больших значений ϕ_0 величина J_0 слабо меняется с изменением ϕ_0 . Величина J_0 резко увеличивается в области малых ϕ_0 . До значения, соответствующего поведению пластических деформаций при чисто осесимметричных колебаниях ($\phi_0 = 0$). Осесимметричные перемещения во всем рассматриваемом диапазоне величины ϕ_0 вносят существенный вклад в величину напряжения $|\sigma_0^0|_{\max}$ (указанные прямые на рис. 115, 116). Относительная доля вклада осесимметричных перемещений в величину $|\sigma_0^0|_{\max}$ увеличивается с уменьшением ϕ_0 .

§ 31. Экспериментальные исследования устойчивости цилиндрических оболочек, погруженных в ограниченную жидкую среду, при динамическом нагружении

Экспериментальные исследования выпучивания оболочек в резервуаре с жидкостью при динамическом нагружении проводились неоднократно [17]. Однако в известных автором книги работах жидкость использовалась лишь как промежуточная среда, через которую всесторонняя нагрузка передавалась на оболочку.

Приведем описание и результаты эксперимента, выполненного специально для проверки решений, полученных в предыдущем параграфе, где жидкость и оболочка рассматривались как единая механическая система, находящаяся под воздействием внешней динамической нагрузки.

Эксперимент проводился на установке, схематически изображенной на рис. 118.

Оболочки изготавливались из листовой конструкционной углеродистой стали МС-2 (ГОСТ 380—60) путем гнутья на деревянной оправке с последующей пайкой шва. В верхней части

оболочки имели вставные днища. Нижние концы крепились в установке. Размеры оболочек и характеристики материала совпадают с принятыми в численных расчетах (§ 30). Верхнее критическое давление (при всестороннем обжатии оболочки) $p_k = 1,5 \text{ кг/см}^2$. Напряжения, соответствующие этому давлению, $\sigma_{кр} = 206 \text{ кг/см}^2$. Для ориентировки в величинах начальных непрямолинейностей у нескольких оболочек были тщательно измерены начальные отклонения от круглой формы цилиндра. В табл. 10 приведены безразмерные амплитуды гармоник q_n амплитуды q_0 , рассчитанные по результатам замеров непрямолинейностей в среднем сечении у двух оболочек.

Перед испытанием резервуар заполнялся водой до уровня, несколько превышающего верхний торец оболочки. На поверхности воды размещался тонкий стальной диск, диаметр которого

отличался на 1 мм от диаметра внутренней полости резервуара. Диск фиксировался в исходном положении на пружинном подвесе. Нагружение системы производилось ударом по диску падающим грузом. Так как груз при ударе не отскакивал, импульс давления вычислялся по формуле

$$J = M^* V \sqrt{2gH^*} / S_d$$

($S_d = 130 \text{ см}^2$ — площадь диска; M^* , H^* — масса и высота падающего груза).

В опыте принятые ранее в расчете граничные условия в сечении, совпадающем с верхним концом оболочки, не выполнялись строго.

На колебания системы в эксперименте оказывала влияние инерционность масс жидкости, находящейся выше оболочки, диска и груза. Это влияние, не учитывавшееся в расчете, сводится, к конечному счету, к некоторому увеличению значения безразмерного импульса J_0 .

В опыте распределение давления по сечению $x = 0$ (рис. 112) было неравномерным. Расчет же строился в предположении, что на систему действует давление, распределенное равномерно по свободной поверхности жидкости и верхней дну оболочек.

Для сжатия инерционности массы, не учтенной в расчете, использовались два пути: 1) сжатие веса груза; 2) установка кольца из пористой резины в полости между диском и оболочкой вдоль стенки резервуара (рис. 118). При установке кольца увеличивалась частота собственных колебаний основного тона λ , как следствие, несколько снижалось значение J_0 . Так, испытания оболочек при толщине кольцевого зазора $\Delta r = 2,5 \text{ мм}$ показали, что установка резинового кольца снижает величину J_0 примерно на 15%. Распределение давления в сечении, совпадающем с верхним срезами оболочек, выравнивалось до некоторой степени сквозными отверстиями в центральной части диска.

Испытания проводились при $\Delta r = 2,5; 10; 20 \text{ мм}$, основная часть экспериментов — при $\Delta r = 2,5 \text{ мм}$. Коллежные деформации оболочек фиксировались тензодатчиками, наклеенными на внутреннюю стенку оболочки. При испытаниях системы с $\Delta r = 20 \text{ мм}$ на нескольких оболочках датчики наклеивались с обеих сторон с целью регистрации изгибных деформаций. Показания датчиков передавались через тензостанцию на бумажную фотоленту осциллографа. Предварительно фиксировались деформации ϵ_0 , соответствующие статическому обжатию оболочки давлением $p = 1 \text{ кг/см}^2$ ($\epsilon_0 \approx \epsilon_{кр}$).

В опыте величина импульса J_0 определялась в результате постепенного увеличения высоты бросания груза вплоть до момента начала резкого роста ординат кривой

$$\bar{\epsilon}_2 = [\epsilon_1]_{\text{мол}} / [\epsilon_0]$$

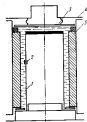


Рис. 118. Установка для экспериментальных исследований:

1 — образцы; 2 — датчик; 3 — диск; 4 — резервуар; 5 — резиновое кольцо.

λ	Оболочка I	Оболочка II
4	0,087	0,040
7	0,077	0,023
8	0,074	0,033

сопровождающегося появлением незначительных остаточных деформаций в оболочке, фиксируемых на осциллограмме процесса.

Типовые осциллограммы $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(t)$, соответствующие последовательному увеличению параметра

$$J^* = 0,244 (1 - \mu/2) J_0^2 / E h^3 T^*$$

(J — разрывная величина импульса давления) в одном из экспериментов, приведены на рис. 119. Отчетливо виден резкий рост

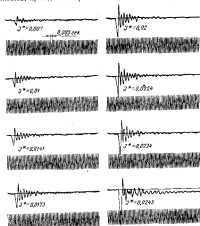


Рис. 119. Типовые осциллограммы $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(t)$, соответствующие последовательному увеличению параметра J^* .

величин $|\varepsilon_2|_{\text{max}}$ и возникновение остаточной деформации при $J^* = 0,0245$. В подальшем числе экспериментов наибольшими деформациями, фиксируемыми на ленте осциллограмм, были деформации сжатия.

С целью определения формы потери устойчивости система нагружалась импульсом, заведомо превышающим безопасный. Никаких замеров при этом не делалась (кроме подсчета числа волн λ).

Характер изменения деформации оболочки по мере роста величины импульса давления можно видеть из экспериментальных кривых зависимости параметра $\bar{\varepsilon}_2$ от J^* , записанных внутренним и наружным тензодатчиками при $\Delta t = 20$ мкс (рис. 120).

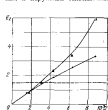


Рис. 120. Зависимость $\bar{\varepsilon}_2$ от J^* , измеренная внутренним (—) и наружным (---) датчиками.

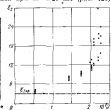


Рис. 121. Экспериментальные значения $\bar{\varepsilon}_2$, соответствующие различным значениям J^* .

Значения $\bar{\varepsilon}_2$, приведенные на рис. 120, соответствуют фазе сжатия оболочки. Пунктиром отмечены значения $\bar{\varepsilon}_2$, соответствующие обжатой оболочке верхним критическим давлением ($\varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}_{\text{lim}}$). При малых значениях J^* , когда $\bar{\varepsilon}_2 < \bar{\varepsilon}_{\text{lim}}$, движение оболочки почти не отличается от осесимметричного. При больших значениях J^* вклад от изгибной деформации в общую деформацию оболочки резко увеличивается (показавшие внутреннего и внешнего датчиков расходятся). Но даже при значениях $\bar{\varepsilon}_2$, превышающих в несколько раз $\bar{\varepsilon}_{\text{lim}}$, основной вклад в деформацию оболочки приходится на долю осесимметричных перемещений. На рис. 121 объединены результаты испытаний пяти оболочек ($\Delta t = 2,5$ мкс) при установке в колдоби над оболочкой резинового кольца (рис. 118). Аналогичные результаты были получены в ходе испытаний 10 оболочек без кольца.

Выяснилось, что при одинаковых условиях испытании изменение значений J_0^* колеблется в узких пределах: при установке резинового кольца $J_0^* = 0,021 - 0,0225$; без кольца $J_0^* = 0,024 - 0,025$.

Сопоставим экспериментальные результаты для стальных оболочек с расчетами, приведенными в предыдущем параграфе. Судя по результатам обмеров двух оболочек, величина параметра q_0 колеблется при $n = 6, 7$ и 8 в пределах $q_0 = 0,03-0,08$. Эти отклонения учитывают лишь отклонения начальной формы оболочки от идеальной. Учтем остальные несовершенства оболочки увеличением значения q_0 до $0,05-0,1$. Для этих значений q_0 расчетные величины максимальных безопасных параметров импульса (рис. 117) $J_0 = 0,026-0,028$. Как видно, теоретические значения J_0 согласуются с экспериментальными.

Рис. 122. Зависимость $\bar{t}_2$ от J при различных значениях Δt : 1 — $\Delta t = 2$ с; 2 — $\Delta t = 1$ с; 3 — $\Delta t = 0,25$ с.

Кривые $\bar{t}_2 = f(J)$ (J — размерная величина импульса давления) на рис. 122 построены по результатам испытаний с различными зазорами. В области малых зазоров величины J_0 и критичной степени зависят от Δt , увеличиваясь по мере его уменьшения. Этот же результат вытекает из теоретического решения.

При незначительном превращении импульсом нагрузки величиной безопасного импульса пластические деформации начинают



Рис. 123. Стальные оболочки изогн и до разрушения.

быстро расти. Однако сначала никаких видимых изменений с оболочкой не происходит. При значениях импульса, равных $J \approx 1,1J_0$, в оболочке появляются видимые глазом пластические оси, а при еще большей нагрузке — остаточные кривизны. Формы остаточных кривизн оболочек видны на рис. 123. Справа — оболочка до испытания. Число волн потерь устойчивости 6—7 (в основном 6). Теоретическое решение предсказывало $n = 7$. В статике оболочка теряет устойчивость при $n = 4$.

$$10^{-2} | \sigma_2^* | / \sigma_{0.2}, \text{ кг/см}^2$$

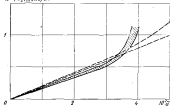


Рис. 124. Зависимость $|\sigma_2^*|$ от J^* (оболочки из алюминия и стили).

— — — расчет; заштрихованная область — эксперимент.



Рис. 125. Оболочки из алюминия и стили изогн и до разрушения. Справа — оболочка, потерявшая устойчивость в статике.

Параллельно со стальными оболочками исследовалась устойчивость точечных оболочек из алюминиевого сплава. Размеры оболочек и характеристики материала совпадают с принятыми в численных расчетах (см. § 30). Параметр начального прогиба q_0 у одной из оболочек

n	6	7	8
q_0	0,002	0,004	0,006

На рис. 124 приведено сопоставление экспериментальных данных, полученных при испытании трех оболочек (заштрихованная область) с теоретическими кривыми $|q|_{\text{эксп}} = f(J)$ при $\phi_0 = 0,02$ и $q_0 = 0$ ($Ar = 2$ мм).

На рис. 125 показаны оболочки после потери устойчивости в статике ($n = 4$) и при $J \gg J_0$, а также оболочка до испытания.

Число вмятин при $J \gg J_0$, $n = 6$. Число вмятин, предсказанных расчетом, при $q = 0,02$ $n = 6-7$ (см. рис. 116).

§ 32. Устойчивость системы оболочек, соприкасающихся со слоем жидкости, при динамическом нагружении

В двух предыдущих параграфах был рассмотрен относительно простой случай, когда цилиндрическая система конечного размера включает всего лишь одну оболочку.

Теперь перейдем к общему случаю: составим дифференциальные уравнения, описывающие динамическую реакцию на критически-временную осесимметричную нагрузку системы оболочек, соприкасающихся с жидкостью (рис. 79), с учетом начальных отклонений в форме оболочек. Основной специфика этой задачи связана с расчетом поля дополнительного давления p' , вызванного деформацией оболочек. Давление p' жидкости зависит не только от колебаний данной оболочки, но и от движения остальных оболочек системы. В связи с этим, исследуя устойчивость одной оболочки при ее динамическом нагружении, мы вынуждены одновременно с этим рассчитывать движение всей системы.

При построении решения задачи кажется наиболее естественным обобщить подход, уже использованный в § 24 при исследовании динамической реакции систем с гладкими оболочками, дополнив уравнения осесимметричных колебаний системы нелинейными уравнениями движения одной (рассчитываемой) оболочки по ее формам потери устойчивости.

Ограничим себя рассмотрением случая, когда система набрана из изотропных оболочек. Колебание оболочек связано жидкостью

в кольцевом слое $r \in (r_1, r_2)$. Снаружи слой ограничен жесткой стенкой $r_2 = r_2(z)$. Жидкость, кроме того, может находиться и внутри оболочек. В этом случае она ограничивается силой жесткие непроницаемыми перегородками (рис. 79, б).

Сначала составим динамические уравнения устойчивости одной цилиндрической оболочки, принадлежащей i -й парциальной системе. Покажем, что в начальной стадии нагружения движение

оболочки по закону $\sum_{k=1}^N X_{0k}/\alpha$ (см. § 24) подчиняется уравнению

малых осесимметричных колебаний, полученных в рамках теории длинных волн. При наличии в оболочке начальных неправильностей в системе по мере роста обжатия оболочки будут возбуждаться дополнительные движения, соответствующее изгибной форме потери устойчивости $\sin \alpha x \cos \alpha y$. Прогиб оболочки вследствие ее изгиба приводит к растяжению средней поверхности и возникновению мембранных напряжений. Вследствие искривления оболочки мембранные напряжения равносильны поперечной нагрузке, которая приводит к дальнейшему росту осесимметричной деформации корпуса.

В итоге взаимодействия между изгибными и осесимметричными перемещениями в системе возникнут сложные нелинейные колебания.

Здесь мы, естественно, исходя из предположения, что нагрузка относится к категории медленно меняющейся (§ 12) и, что торцевые сечения оболочки, не теряя круглой формы, получают радиальные смещения как при малых линейных колебаниях, так и при нелинейных колебаниях, связанных с потерей устойчивости оболочки.

Исходя из анализа результатов сравнительных расчетов, приведенных в § 24, можно заключить, что доминирующий вклад в осесимметричные колебания системы (состоящей из оболочек средней длины), вызываемые действием кратковременной, медленно меняющейся, в смысле (12.6), нагрузкой, вносят колебания первых тонов ($k=1$) каждой из парциальных систем, т. е. гармоники X_{0k}/α ($k=1, 2, \dots, N_d$). Физически очевидно, что именно низшие гармоники в силу своего подавляющего вклада в величину радиального обжатия оболочек и своей низкочастотности по сравнению с другими гармониками являются основными возбудителями изгибных колебаний. Однако обратное воздействие изгибных перемещений на осесимметричные отражается не только на величине смещений, соответствующих первой гармонике X_{01}/α , но и на форме осесимметричного волнообразования. Например, хорошо известно, что при потере устойчивости круговой цилиндрической оболочкой от равномерно распределенного внешнего давления осесимметричная составляющая получает бичообразную форму.

В построении динамических уравнений устойчивости системы это обстоятельство можно было бы отразить введением в рассмотрение высших гармоник, особенно третьей (см. рис. 16), которая в сочетании с первой гармоникой хорошо описывает бочкообразную осесимметричную деформацию. Но мы поступим иначе: для того чтобы не усложнять чрезмерно вида окончательных формул, введем в функцию осесимметричного смещения (для учета изменения характера волнообразования в оболочке в процессе потери ею устойчивости) член $q_1 \cos 2\alpha x$ ($\alpha = \pi/l_1$, l_1 — длина оболочки).

Функция $\cos 2\alpha x$ лишь незначительно отличается от формы колебаний третьего тона оболочки, принадлежащих парциальным системам изучаемого типа. Поэтому учет бочкообразности в осесимметричных колебаниях как по точной форме третьего тона, так и по малоотличающейся от нее форме $\cos 2\alpha x$ должно привести к сходственным результатам в исследовании устойчивости системы.

Смещение X_{11}/l_1 и давление на оболочку, соответствующее этому смещению, слабо меняются по длине оболочки (см. рис. 16). При исследовании устойчивости оболочки примем просто, что

$$l_{11} = 1 \quad (a)$$

и что, следовательно, смещение и давление на оболочку в пределах первой гармоники не меняются по длине оболочки. Функция (a) имеет норму, равную единице. В связи с этим для согласования уравнений движения по формам потери устойчивости с дифференциальными уравнениями осесимметричных колебаний системы необходимо, чтобы выражение для фактической формы колебания первого тона l_{11} , используемое для расчета коэффициентов уравнений осесимметричных колебаний (24.34), также имело норму, равную единице,

$$\int_0^1 f_{11}^2(s) ds = 1.$$

В этом случае нормирующий множитель κ в (24.37) должен определяться из (24.43).

Итак, при составлении уравнений движения i -й парциальной системы по формам потери устойчивости оболочки примем следующую аппроксимацию прогиба:

$$w_i = X_{i1} + w_0 + q_1 \cos 2\alpha x + q_2 \sin \alpha x \cos \alpha \theta, \quad (32.1)$$

где w_0 — статическая радиальная деформация оболочки.

Начальный прогиб

$$w_0 = q_0 \sin \alpha x \cos \alpha \theta. \quad (32.2)$$

Пусть p_{cr} — избыточное внешнее поперечное давление, сжимающее оболочку перед началом ее динамического нагружения

(разность между статическими составляющими давления вне и внутри оболочки); p_0 — верхнее критическое давление (соответствующее данному числу n); q_0 — стрелка прогиба оболочки по формуле $\sin \alpha x \cos \alpha \theta$ с учетом статических сил. Имеем (см. формулу (27.34))

$$q_0 \approx q_{00} \frac{r_2}{r_0 - r_{cr}}. \quad (32.3)$$

При построении системы уравнений движения положим, что статическая составляющая давления p_{cr} в пределах данной оболочки не зависит от абсциссы x .

В итоге мы прикинем, что суммарное поперечное давление на оболочку p (с учетом статической составляющей) при ее движении по обобщенной координате X_{11} не зависит от x .

Используем порядок составления уравнений движения, примененный в § 30. Подставим в правую часть уравнения совместности деформаций (30.4) выражение (32.1) и (31.2). Интегрируем его, получим следующую формулу для функции напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{r} = & B_1 \cos 2\alpha x + B_2 \cos 2\alpha \theta + B_3 \sin \alpha x \cos \alpha \theta + \\ & + B_4 \sin 3\alpha x \cos \alpha \theta - \frac{\bar{\sigma}_1 r^2}{2C} - \frac{\bar{\sigma}_2 r^2 \theta^2}{2C}, \end{aligned} \quad (32.4)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 = & -\frac{\bar{\sigma}^2}{32} (\bar{q}_2^2 - \bar{q}_1^2) + \frac{1}{4\alpha^2 r_1} q_1; \\ B_2 = & -\frac{1}{32\alpha^2} (\bar{q}_2^2 - \bar{q}_1^2); \\ B_3 = & \frac{q_1 - q_2}{\alpha^2 r_1 (\alpha^2 + 1)^2} + \frac{2\alpha^2}{(\alpha^2 + 1)^2} q_1 q_2; \\ B_4 = & -\frac{2\alpha^2}{(\alpha^2 + 1)^2} q_1 q_2; \end{aligned} \quad (32.5)$$

$\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$ — средние значения сжимающих напряжений в кольцевом и продольном сечениях. Имеем

$$\bar{\sigma}_1 = pr_1/h, \quad (a)$$

Пологая интенсивность продольных усилий на краю оболочки заданной, найдем

$$\bar{\sigma}_2 = N_2/h. \quad (b)$$

Из условия замкнутости (30.8) получим

$$\bar{\sigma}_2 = \mu \bar{\sigma}_1 + \frac{E(w_0 + X_{11})}{r_1} - \frac{E\alpha^2 \theta^2}{8} (\bar{q}_2^2 - \bar{q}_0^2) \quad (32.6)$$

или (с учетом выражений (а) и (б))

$$w_0 + X_{11} = \left(p_2 - \frac{p_2 N_1}{r_1} \right) \frac{r_1^2}{EA} + \frac{\bar{p}^2 \omega^2 r_1}{8} (q_1^2 - q_0^2). \quad (32.7)$$

По аналогии с (32.7) найдем соотношение между статическими величинами

$$w_0 = \left(p_0 - \frac{p_0 N_1}{r_1} \right) \frac{r_1^2}{EA} + \frac{\bar{p}^2 \omega^2 r_1}{8} (q_0^2 - q_0^2). \quad (32.7a)$$

Вычитая (32.7a) из (32.7), получим

$$X_{11} = \left(\Delta p - \frac{\Delta p N_1}{r_1} \right) \frac{r_1^2}{EA} + \frac{\bar{p}^2 \omega^2 r_1}{8} (q_1^2 - q_0^2). \quad (32.8)$$

Здесь первый член в правой части — осесимметричное перемещение оболочки i -й парциальной системы в пределах ее первой гармоники, найденное без учета непрямолинейности в форме оболочки, второй член

$$\frac{\bar{p}^2 \omega^2 r_1}{8} (q_1^2 - q_0^2) \quad (32.9)$$

— дополнительное осесимметричное смещение в пределах той же гармоники, вызванное изгибом оболочки по форме $\sin \alpha x \cos \alpha y$. $\Delta N_1 = N_1 - N_{10}$ — динамическая добавка к интенсивности осевых сил, $\Delta p = p - p_{ст}$ — избыточное (над статическим) давление на оболочку.

Энергия деформации средней поверхности оболочки (после исключения σ_z с помощью (32.6))

$$P_1 = EA r_1 \int_0^1 [b_1 (w_0 + X_{11})^2 + b_1 (q_1 - q_0)^2 + b_2 q_1^2 + b_3 (q_1^2 - q_0^2) + b_4 (q_1^2 - q_0^2) (w_0 + X_{11}) + b_5 (q_1^2 - q_0^2) q_1 + b_6 q_1 q_2 (q_1 - q_0) + b_7 q_1^2 q_2^2 + (1 - \mu^2) \frac{\bar{p}^2}{EA}] dx. \quad (32.10)$$

Энергия деформации изгиба оболочки

$$P_2 = \frac{EA r_1 \omega^4}{48(1 - \mu^2)} [(\bar{n}^2 + 1)^2 (q_1 - q_0)^2 + 32 q_1^2]. \quad (32.11)$$

В (32.10) приняты обозначения

$$b_1 = \frac{1}{r_1^2}; \quad b_2 = \frac{1}{2r_1^2 (\bar{n}^2 + 1)}; \quad b_3 = \frac{1}{2r_1^2};$$

$$b_4 = \frac{\omega^4 (1 + 3\bar{n}^2)}{128}; \quad b_5 = -\frac{\bar{n}^4 \omega^4}{4r_1}; \quad b_6 = \frac{\bar{n}^4 \omega^4}{8r_1}; \quad b_7 = \frac{\bar{n}^4 \omega^4}{r_1} \frac{1}{(\bar{n}^2 + 1)^2};$$

$$b_8 = \bar{n}^4 \omega^4 \left[\frac{1}{(\bar{n}^2 + 1)^2} + \frac{1}{(\bar{n}^2 + 9)^2} \right]. \quad (32.12)$$

Рассчитаем дополнительное давление на оболочку со стороны жидкости при ее движении по формам потерь устойчивости (вдоль координат q_1 и q_2).

Пусть p_1^* — давление в кольцевом зазоре и p_1^{**} — давление внутри оболочки при $r = r_1$, соответствующее колебанию системы по форме $\cos 2\alpha x$; p_1^* и p_1^{**} — то же, при колебании по форме $\sin \alpha x \cos \alpha y$.

Если исходную парциальную систему идеализовать, ограничив жидкость как внутри оболочки, так и вне ее в сечениях, совпадающих с концами оболочки, жесткими непрогибаемыми стенками, то выражение $\cos 2\alpha x$ будет в точности соответствовать форме собственных колебаний идеализованной таким образом системы.

Но функции $\cos 2\alpha x$, как уже отмечалось, лишь незначительно отличаются от формы колебаний третьего тона. Это позволяет сделать вывод, что:

— учет движения жидкости через сечения $x = 0$, l_1 слабо влияет на форму свободных колебаний третьего тона;

— при определении полей давления снаружи и внутри оболочки, вызванных ее движением по форме $\cos 2\alpha x$, можно аппроксимировать фактические граничные условия в сечениях $x = 0$, l_1 ($r > r_1$) и при $x = l_1$ ($r < r_1$) (см. рис. 15, б) условием непрогибаемости этих сечений.

Такая аппроксимация сводит расчет давления в системе конечного размера к исследованию поля давления в бесконечно длинной системе. Воспользовавшись результатами § 4, найдем

$$p_1^* = -\bar{q}_1 \cos 2\alpha x \sigma_{20};$$

$$p_1^{**} = -\bar{q}_1 \cos 2\alpha x \sigma_{20},$$

где σ_{20} — присоединенная масса жидкости вне оболочки, соответствующая форме $\cos 2\alpha x$; σ_{20}^* — то же, внутри оболочки.

Величины σ_{20} и σ_{20}^* определяются выражением (4.3), в котором следует положить $\beta = 1$ и заменить α на 2α .

Итак

$$\sigma_{20} = \frac{\rho}{2\alpha} \frac{r_1 (2\alpha r_1) I_2 (2\alpha r_1) + K_2 (2\alpha r_1) I_1 (2\alpha r_1)}{K_2 (2\alpha r_1) I_1 (2\alpha r_1) - K_1 (2\alpha r_1) I_1 (2\alpha r_1)};$$

$$\sigma_{20}^* = \frac{\rho^*}{2\alpha} \frac{I_2 (2\alpha r_1)}{I_1 (2\alpha r_1)}. \quad (32.13)$$

где ρ , ρ^* — массовые плотности жидкости вне и внутри оболочки.

Радиальное давление на оболочку, генерируемое колебанием по форме $\cos 2\alpha x$,

$$\Delta p_1^* = p_1^* - p_1^{**} = -\bar{q}_1 \cos 2\alpha x \sigma_{20} (1 + A_2), \quad (32.14)$$

где

$$A_2 = \frac{\sigma_{20}^*}{\sigma_{20}}. \quad (32.15)$$

В пределах теории длинных волн (при одномерном движении жидкости)

$$m_0 = \frac{\rho}{4\pi H}, \quad m_0^* = \frac{\rho^*}{4\pi H^*}, \quad A_1 = A = \frac{\rho^* H}{(\rho H)^*}, \quad (32.16)$$

где, как и раньше,

$$H = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_1}, \quad H^* = \frac{r_2^* - r_1^*}{2}.$$

Давления p_1^+ и p_2^+ рассчитываем по формулам

$$p_1^+ = -q_1 \sin \alpha \cos \alpha \theta \pi m_0;$$

$$p_2^+ = -q_2 \sin \alpha \cos \alpha \theta \pi m_0^*.$$

Здесь m_0 — присоединенная масса жидкости вне оболочки при ее колебании по форме $\sin \alpha \cos \alpha \theta$; m_0^* — то же, внутри оболочки.

Значения m_0 и m_0^* рассчитываются по формулам для бесконечно длинных систем (2.16). В § 30 уже обсуждалась возможность такого подхода. В § 3 приведен ряд простых аппроксимаций выражений для присоединенной массы m_0 .

Радиальное давление на оболочку, генерируемое движением по форме $\sin \alpha \cos \alpha \theta$,

$$\Delta p_1^+ = p_1^+ - p_2^+ = -q_1 \sin \alpha \cos \alpha \theta \pi m_0 (1 + A_1), \quad (32.17)$$

где $A_1 = \frac{m_0^*}{m_0}$.

Теперь составим выражение для работы составляющих радиального давления Δp_1^+ , Δp_2^+ и инерционных сил оболочки на перемещении w

$$A_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\Delta p_1^+ + \Delta p_2^+ - \pi^2 w) w r_1 dx d\theta. \quad (32.18)$$

Подстановка (32.1), (32.14), (32.17) в (32.18) без учета инерционности оболочки при ее движении по координате X_{11} дает

$$A_0 = -q_1 q_2 \pi r_1^2 \left[m_0 (1 + A_1) + \pi^2 \right] - 0,5 q_1 q_2 \pi r_1^2 [m_0^* (1 + A_1) + \pi^2]. \quad (32.19)$$

Работа давления p на перемещении w

$$A_1 = p 2\pi r_1^2 (X_{11} + w_0). \quad (32.20)$$

Работа осевых сжимающих сил

$$A_2 = -2N_2 \pi r_1^2 \left[-\frac{\bar{\alpha}_1 (1 - \mu^2)}{E} + \frac{p}{A_1} (X_{11} + w_0) - \frac{\mu^2 w^2}{4} (q_2^2 - q_1^2) - \frac{\mu^2 q_2}{4} (q_2 - q_1) - \frac{\mu^2}{8} (q_2 - q_1)^2 - \mu^2 q_1^2 \right]. \quad (32.21)$$

Далее составляем уравнения метода Рунга

$$\frac{d(P_1 + P_2 - A_1 - A_2 - A_3)}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (32.22)$$

Уберем из (32.22) при $i = 2$ против w_0 , используя формулу (32.7a); вторым членом в (32.7a) пренебрегаем как малой величиной.

Затем уравнения (32.22) приведем к безразмерному виду. С целью согласования динамических уравнений устойчивости i -й парциальной системы с дифференциальными уравнениями для координат X_{1i} (24.34) воспользуемся относительной системой единиц измерения, в которой в качестве основных единиц принимаются характеристическая скорость распространения возмущений c , характерный размер l и массовая плотность жидкости в кольцевом слое вне оболочки ρ ($c = 1$, $l = 1$, $\rho = 1$).

Положим $c = c_1$, $l = H_1$ (см. § 24); i — номер парциальной системы, в пределах которой возмущается устойчивость оболочки.

В результате перехода в (32.22) к относительной системе единиц измерения получим

$$\bar{q}_1 + \bar{c}_1 \bar{q}_1 = \bar{P}_1; \quad (32.23)$$

$$\bar{q}_2 + \bar{c}_2 \bar{q}_2 = \bar{P}_2. \quad (32.24)$$

где

$$\bar{c}_1 = (1 + 16\mu^2 k_1 - 4\eta_1 \frac{N_2}{c_1} + \beta_1 \bar{q}_1^2) \bar{c};$$

$$\bar{c}_2 = \beta_2 - \eta_2^* \frac{dN_1}{c_1} (1 + \mu^2 \bar{q}_1^2) - \eta_2^* (\rho_2 \bar{w}^2 + \frac{N_2}{c_1}) + \beta_2 X_{11} + \beta_2 w_1 + \beta_2 w_1^2 + \beta_2 w_1^2; \quad (32.25)$$

$$\bar{P}_1 = \beta_1 w_1^2 + \beta_1 w_1^2 - \beta_1 w_1^2 - \beta_1 w_1^2;$$

$$\bar{P}_2 = \beta_2 w_2 + \beta_2 w_2 + \beta_2 w_2^2.$$

В (32.25) обозначено

$$\beta_{11} = \eta_0^2 2\bar{\omega}^4 \left[\frac{1}{(\bar{\omega}^2 + 1)^2} - \frac{1}{(\bar{\omega}^2 + 9)^2} \right];$$

$$\beta_{13} = -\eta_0^2 \frac{\bar{\omega}^2}{3}; \quad \beta_{33} = -\eta_0^2 \frac{\bar{\omega}^2}{(\bar{\omega}^2 + 1)^2};$$

$$\beta_{21} = \eta_0^2 \left[\frac{4\eta_0 (\bar{\omega}^2 + 1)^2}{12(1 - \eta_0^2)} + \frac{1}{\eta_0 (\bar{\omega}^2 + 1)^2} \right];$$

$$\beta_{22} = -\eta_0^2 \bar{\omega}^4;$$

$$\beta_{23} = \eta_0^2 \bar{\omega}^4 \left[\frac{1}{2} + \frac{4}{(\bar{\omega}^2 + 1)^2} \right];$$

$$\beta_{31} = \eta_0^2 \frac{1}{16} (3\bar{\omega}^4 + 1); \quad (32.26)$$

$$\beta_{33} = \eta_0^2 6\bar{\omega}^4 \left[\frac{1}{(\bar{\omega}^2 + 1)^2} + \frac{1}{(\bar{\omega}^2 + 9)^2} \right];$$

$$\beta_{35} = \eta_0^2 \frac{2\bar{\omega}^2}{(\bar{\omega}^2 + 1)^2};$$

где

$$\eta = \omega^2 r_0^2 = \frac{1}{\omega_{\text{оп}}^2 (1 + A_1) + \omega^2} = \frac{1}{\omega_{\text{оп}}^2 (1 + A_2) + \omega^2}. \quad (32.27)$$

Примечание. При проведении численных расчетов и моделировании (32.25) можно использовать лишь подгруппы члены. Отметим, что в случае решения статической задачи при $q_{0k} = 0$, $A_2 = \rho_0 r_0^2 / 2$ и пренебрежения низкочастотных членах в (32.26) получается формула Мисеса для первого критического давления β_{11} .

Движение системы вдоль координаты q_2 вызывает дополнительное смещение по координате X_{c1} (ΔX_{c1}), определенное формулой (32.5) или с учетом обозначений (32.27)

$$X_{11} = \frac{\bar{\omega}^2 \alpha}{8} (q_1^2 - q_2^2). \quad (32.28)$$

Объединим уравнения вынужденных осесимметричных колебаний (24.34) с уравнениями устойчивости (32.23), (32.24), учтя дополнительное смещение по координате X_{11} (32.28). В результате получим замкнутую систему дифференциальных уравнений для динамической реакции совокупности оболочек, соприкасающихся с жидкостью в ограниченном объеме, на кратковременную

нагрузку с учетом возможности потери устойчивости оболочки i -й парциальной системы

$$\sum_{k=1}^{N_k} \gamma_{ik}^{10} \ddot{q}_{ik} + X_{ik} = F_{ik} + \delta_{ik} \cdot \Pi \frac{\bar{\omega}^2}{8} (q_1^2 - q_2^2);$$

$$(i = 1, 2, \dots, N_k, k = 1, 2, \dots, N_k) \quad (32.29)$$

$$\dot{q}_1 + \hat{c}_1 q_1 = \hat{F}_1;$$

$$\dot{q}_2 + \hat{c}_2 q_2 = \hat{F}_2.$$

Систему (32.29) следует дополнить начальными условиями при $t = 0$

$$X_{ik} = \dot{X}_{ik} = 0;$$

$$q_k = (\hat{F}_k / \hat{c}_k)_{t=0}; \quad (32.30)$$

$$q_1 = \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0.$$

В (32.29) $\delta_{ik} \cdot c_k = 1$, если одновременно $s = i$, $k = 1$; $\delta_{ik} \cdot c_k = 0$ в остальных случаях. Элементы γ_{ik}^{10} и F_{ik} определяются соответственно формулами (24.45) и (24.51).

Примечание. Выражение для возмущенных функций F_{ik} , приведенное в (24.51), получено в предположении, что оболочка разгружена от действия внешнего сил. Востребовано, что при использовании формулы (24.51) следует в рамках этого же предположения рассчитывать и элементы c_k , c_1 в (32.29), т. е. положить в них $X_2 = 0$.

Систему (32.29) можно сократить, если учесть, что основное значение в исследуемой задаче имеют вклады от первых гармоник парциальных систем. Отбрасывая вышние гармоники ($n > 1$, $k > 1$) и используя матричную форму записи, после перехода в (32.29) к уравнениям первого порядка получим

$$\dot{Q} = A^{-1} P;$$

$$P = CQ + F. \quad (32.31)$$

Здесь $Q = (X_{11}, X_{21}, \dots, X_{N_1,1}, q_1, q_2)$ — столбец искомых переменных; $P = (P_1, P_2, \dots, P_{N_1+2})$ — столбец вспомогательных функций;

$F = (F_{11}, F_{21}, \dots, F_{11} + \frac{\pi \eta}{\beta} (q_2^2 - q_0^2), \dots, F_{N+1}, \bar{F}_1, \bar{F}_2)$ — столбец возмущающих функций;

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix};$$

$$A_{11} = \alpha_{11} \bar{V}^2, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a_{11} = \gamma \bar{V}_0^2$$

$$C_{11} = [\delta_{11}] \bar{V}^2, \quad C_{22} = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 & 0 \\ 0 & \hat{c}_2 \end{bmatrix}$$

N_0 — число парциальных систем.

Начальные условия

$$X_{11} = X_{21} = \dots = X_{N+1} = 0; \quad P_1 = P_2 = \dots = P_{N+2} = 0;$$

$$q_1 = (F_1/c_2)_{t=0}; \quad q_2 = q_0$$

Для расчета устойчивости оболочки i -й парциальной системы по отношению к заданной динамической нагрузке $p^i(t)$ следует провести исследование решения уравнений (32.31) при различных числах n и заданном значении параметра начальной неупругости формы q_0 .

Рассмотрим пример расчета величины безопасного изгибающего давления J_0 (см. § 30) для оболочки лжжого отсека ($i = 1$) системы, изображенной на рис. 80 ($N_0 = 3$). Характеристика системы и расчет ее динамической реакции на кратковременную нагрузку без учета начальных неупругостей в форме оболочки приведен в § 24. Верхнее критическое давление для оболочки $p_{cr} = 2,5 \text{ кг/см}^2$ (в относительной системе единиц измерения $p_{cr} \sim 1,42 \cdot 10^{-3}$). Коллапсное напряжение, соответствующее давлению p_{cr} , $\sigma_{22cr} \sim 925 \text{ кг/см}^2$.

Зададим параметр неупругости формы выражением

$$q_0 = \frac{\lambda}{H} \frac{0,2}{\lambda}.$$

Ограничимся случаем, когда оболочка разгружена от действия статических сил ($p_{st} = 0$). Положим, что продолжительность действия импульса давления J_0 такова, что его влияние на движение системы можно заменить влиянием мгновенно приложенного импульса J ($J_0 = 0$) — см. § 24.

Исходная для расчета система уравнений (32.31) составлена в предположении, что форма первой гармоника для оболочки, теряющей устойчивость, имеет форму, равную единице

$$\int_0^1 f_1(x) dx = 1.$$

т. е. что нормирующий множитель χ в выражении для f_1 определяется из (24.43). Но в примере, рассмотренном в § 24, величина χ рассчитывалась не по формуле (24.43), а из соотношения (24.40). Желая без изменения воспользоваться вычислениями, выполненными в § 24, введем в уравнения (32.31) множитель

$$\alpha = \frac{\chi_0 [F_{11} (24.40)]}{\chi_{20} [F_{11} (24.43)]} = 1,203$$

(там, где это необходимо) для согласования уравнений движения во форме потери устойчивости с уравнениями осесимметричных колебаний (по координатам X_{11} , X_{21} и X_{31}).

С учетом сделанных замечаний получим

$$A_{11} = \begin{bmatrix} \gamma \bar{V}_0^2 & \gamma \bar{V}_0^2 & \gamma \bar{V}_0^2 \\ \gamma \bar{V}_0^2 & \gamma \bar{V}_0^2 & \gamma \bar{V}_0^2 \\ \gamma \bar{V}_0^2 & \gamma \bar{V}_0^2 & \gamma \bar{V}_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -277,97 & -84,125 & -100,20 \\ -235,49 & -132,20 & -168,32 \\ -167,51 & -100,52 & -262,03 \end{bmatrix};$$

$$F = \left(\frac{\pi \eta}{\beta c_2} (q_2^2 - q_0^2), 0, 0, \beta c_2 (q_2^2 - q_0^2), \beta c_2 q_0^2 \right);$$

$$\hat{c}_1 = \frac{1}{2}, \quad \hat{c}_2 = \beta c_2 + \beta c_2 \alpha X_{11} + \beta c_2 \alpha + \beta c_2 q_0^2$$

Начальные условия при $t = 0$

$$Q = (0, 0, 0, 0, q_0)$$

$P = J(\gamma \bar{V}_0^2, \gamma \bar{V}_0^2, \gamma \bar{V}_0^2, 0, 0) = J(0,5035; 0,4304; 0,3061; 0; 0)$. Колебные напряжения на гребнях и впадинах воле q_2 мм мм $\cos n\theta$ в середине пролета оболочки определяются выражением

$$\frac{q_2^2}{L} = \frac{1}{c_1} \left[\alpha X_{11} - q_1 - \frac{\pi \eta}{\beta} (q_2^2 - q_0^2) + \frac{\pi \eta}{2(1-\mu)} (q_2 - q_0) \right], \quad (32.32)$$

Здесь перед последним членом справа оставлен лишь знак плюс в связи с тем, что наибольшее по абсолютной величине напряжение в процессе потери устойчивости оболочки обычно являются напряжениями сжатия (см. § 30).

Приведем результаты расчета, выполненного на ЭВМ. На рис. 126 показаны кривые $|\sigma_{22}|_{cr} = f(J)$, вычисленные для ряда значений λ . Наклонная прямая соответствует чистому обжатю оболочки (при $q_0 = 0$). Изгибные напряжения становятся отрицательными при величинах обжатия, меньших верхнего критического

¹ В выражениях для F , $\hat{c}_1$ и $\hat{c}_2$ сохранены лишь слагаемые для членового расчета составляющих.

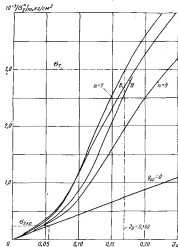


Рис. 126. Зависимость σ_{cr}^0 от J для различных значений k .

значения. Однако эти напряжения достигают опасного значения лишь при таких импульсах давления, которым соответствуют осесимметричные деформации, превышающие в несколько раз критическое статическое значение.

Положим, что оболочка выполнена из алюминиевого сплава с $\sigma_s = 3 \cdot 10^5$ кг/см². Пренебрегая повышением механических

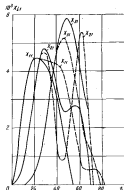


Рис. 127. Графики осесимметричных перемещений $X_{11}(t)$, $X_{22}(t)$, $X_{33}(t)$.
— — — рассчитаны с учетом возмущения устойчивости оболочки; — — — для учета возмущения устойчивости ($J = 0.2$, $n = 7$).

характеристик материала при высоких скоростях нагружения, снимем с кривых на рис. 126 значение наибольшего безопасного импульса $J_s = 0.169$. Теперь допустим, что импульс давления имеет форму треугольника. Время t_0 составляет четверть периода основного типа колебания системы $T_1 = 140$ ($t_0 = 35$).

Максимальное давление в импульсе

$$p_m = \frac{2J_s}{t_0} = \frac{2 \cdot 0.169}{35} = 1,42 \cdot 10^{-2},$$

что приблизительно в четыре раза превышает критическое давление p_{cr} .

На рис. 127 приведены графики осесимметричных перегибов $X_{12}(\theta)$, $X_{11}(\theta)$, $X_{22}(\theta)$, рассчитанные один раз без учета движения системы во формах потери устойчивости при $J = 0,2$ (сплошные кривые), другой — с учетом потери устойчивости янтинной оболочкой ($i = 1$) при $\lambda = 7$ (пунктирные кривые). Как видно, потеря устойчивости оболочки одного отсека оказывает существенное влияние на осесимметричные колебания всей системы в целом.

Литература

1. Александрович Л. И. и Лампер Р. Е. Собственные колебания упругого осесимметричного сферического контура. — В сб.: Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1966.
2. Алексеев А. М. Осесимметричные колебания сферической оболочки, заполненной жидкостью. — Изв. вузов, «Авиационная техника», 1963, № 2.
3. Балабух Л. И., Тажиев А. И. и Молчанов А. Г. Две задачи о собственных колебаниях упругих систем с жидким наполнителем. — В сб.: Расчеты на прочность. М., «Машиностроение», 1966 (вып. 12).
4. Балабух Л. И. Взаимодействие оболочки с жидкостью в танге. — В сб.: Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1966.
5. Балабух Л. И. и Молчанов А. Г. Осесимметричные колебания сферической оболочки, системы заполненной жидкостью. — Изв. ж. МТТ, 1967, № 5.
6. Балажарев Ю. Г. Осесимметричные колебания полостей сферической оболочки с жидкостью. — Изв. ж. МТТ, 1967, № 5.
7. Барон М. Поведение цилиндрической оболочки при полнотелом поперечном ударе пистолета. — «Вестник», 1956, № 4.
8. Бертгер К. А. Круглые пластины и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1961.
9. Беляк Х. Динамические взаимодействия между авиационной и жидкостью. — В сб.: Аэродинамика. М., ИЛ, 1961.
10. Болотин В. В. Колебания и устойчивость упругой цилиндрической оболочки и диска с жидкостью. — Изв. сб., 1956, т. 24.
11. Болотин В. В. Неустойчивые задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
12. Борисов Ю. В. Динамические массы, закрепленной на оболочке при действии динамической нагрузки. — В кн.: Сб. Доклады на XV конференции по строительной механике корабля. Л., «Судостроение», 1967, том 92.
13. Бублик Б. И. и Меркулов В. И. О динамической устойчивости тонких оболочек, наполненных жидкостью. — ПММ, 1959, т. 24, № 5.
14. Вакман Д. Е. Асимптотические методы в линейной радиотехнике. М., Советское радио, 1962.
15. Власов В. З. Общее теория оболочек и ее применение в технике. Избранные труды. Т. 1. АН СССР, 1965.
16. Вращающиеся методы в задачах о колебаниях жидкости и газа с жидкостью. М., Изд. Вителл. центра АН СССР, 1962.
17. Вольмар А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.
18. Вольмар А. С. и Герштин М. С. Поведение упругих цилиндрических оболочек при действии плоской акустической волны. — Изв. ж. МТТ, 1965, № 6.
19. Воронин М. И. О некоторых граничных методах в нелинейной теории колебаний оболочек. — ДАН СССР, т. 126, 1958, № 1.

20. Вареник И. И. О нелинейных критериях методов в нелинейной теории колебаний оболочек. — ПММ, т. 20, 1956, № 4.
21. Вареник И. И. Преобразование ступенчатых рёбров для определения нелинейных сил в задачах о нелинейности конструкций из жидкостей. — ИТО Сибирского. Л., 1960, вып. 108.
22. Горюнов Ю. В., Кадашевский Ю. И. и Миронов И. Л. О гидродинамическом давлении, возникающем при динамической нагрузке устойчивости цилиндрических оболочек, погружённых в жидкость. — В сб.: Труды конференции по теории пластин и оболочек, Казань, КГУ, 1961.
23. Градштейн И. С. и Рыжик Н. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
24. Григорьев Э. И. и Прискин Б. Л. Динамическое взаимодействие ортотропной цилиндрической оболочки с акустической ударной волной. — Изв. АН СССР, «Механика и машиностроение», 1963, № 6.
25. Григорьев Э. И., Горшков А. Г. и Шадырчук Ф. И. О взаимодействии ударной акустической волны на упругую цилиндрическую оболочку. — Изв. ж. МТТ, 1967, № 3.
26. Григорьев Э. И., Горшков А. Г. и Шадырчук Ф. И. Проникновение цилиндрической оболочки под действием ударной акустической волны диметром. — Изв. ж. МТТ, 1967, № 5.
27. Жуковский Н. Г. О гидродинамическом давлении в водопроводных трубах. — Собр. соч., т. 2, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
28. Замыслова В. В., Яковлев Ю. С. Динамические нагрузки при падении шаров. «Судостроение», Л., 1967.
29. Исабаева Ф. С. Определение законов критической нагрузки цилиндрической оболочки при посткритическом сжатии. — Изв. Казанского филиала АН СССР, 1955, вып. 7.
30. Никоса П. К. Определению частот колебаний упругих стержней в жидкости. — ПММ, 1957, т. 1, вып. 1.
31. Кельвинский Н. А. и др. Гидродинамический удар в упругих трубопроводах. — ДАН УССР, 1962, № 2.
32. Кочин Н. Е., Кибель М. А. и Роза Н. В. Теоретическая гидродинамика, т. 1, М., Гостехиздат, 1955.
33. Крендел Н. Б. Акустика. Издано «КВБЗ», 1964.
34. Лаурович Ж. А. и Шабад Б. П. Методы теории функций комплексного переменного. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
35. Ламберт Р. Е. Осцилляторные колебания цилиндрической бочки. — Изв. вузов, «Механика и машиностроение», 1967, № 4.
36. Липинер Р. И. и Тесленко А. А. О системе функций в численной симметрии при проективных методах Рунге к колебаниям упругого стержня. — Изв. ж. МТТ, 1967, № 5.
37. Лаванов К. К. Основания теории колебаний свободных открытых цилиндрических оболочек. — ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
38. Лурье А. И. Определённое интегрирование в его применении к задачам механики. М., Гостехиздат, 1950.
39. Мисс Е. Н. Колебания круглой цилиндрической оболочки, погружённой в вязкую среду, испытывающую осевую симметричную нагрузку. — В сб.: «Теория пластин и оболочек», Киев, АН УССР, 1962.
40. Мисс Е. Н. Малые колебания круглой цилиндрической оболочки, погружённой в вязкую среду, испытывающую осевую симметричную нагрузку. — ПММ АН УССР, 1963, № 6.
41. Мисс Е. Н. Устойчивость цилиндрической оболочки, погружённой в вязкую среду, при динамической нагрузке. — В сб.: «Теория пластин и оболочек», Киев, АН УССР, 1964.
42. Мисс Е. Н. Нелинейные упругие волны в заглублённой круглой цилиндрической оболочке, погружающейся в акустическую среду. — В сб.: 2-й Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной акустике. Алма-Ата докладов. И., АН СССР, 1964.
43. Мисс Е. Н. и Перкин А. К. Динамический резонанс погружённой в акустическую среду цилиндрической оболочки при воздействии осесимметричной динамической нагрузки. — В сб.: IV Всесоюзная конференция по прочности и пластичности. Тезисы докладов. М., АН СССР, 1967.
44. Мисс Е. Н. Резонанс погружённой цилиндрической оболочки на волну давления, распространяющуюся со сверхзвуковой скоростью в неограниченной среде. — Изв. ж. МТТ, 1965, № 3.
45. Мисс Е. Н. К теории колебаний упругих тел, испытывающих нагрузку. — ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
46. Мисс Е. Н. и Румянцев В. В. Динамика тела с полостью, содержащей жидкость. М., Издательство, 1965.
47. Новожилов В. В. О перемещении оболочки твердого тела под действием акустической волны давления. — ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.
48. Перкин А. К. и Кадашевский Ю. И. Устойчивость погружённой в жидкость цилиндрической оболочки при кратковременной нагрузке. — В сб.: Труды конференции по теории пластин и оболочек, Казань, КГУ, 1961.
49. Перкин А. К. О критерии возникновения акустической волны устойчивости оболочки в движении. — ИТО Сибирского. Л., 1964, вып. 138.
50. Плигин Ю. З. Г. Напряжения в упругих цилиндрических оболочках при взаимодействии с акустической волной давления. — В сб.: Труды VI Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек, М., «Наука», 1966.
51. Пономарев А. А. Свободные колебания оболочки с жестким круглым цилиндрическим стержнем с упругим плоским дном. — Изв. вузов, «Механика и машиностроение», 1963, № 4.
52. Пономарев А. А. К расчету частот собственных колебаний волновой сферической оболочки. — Изв. вузов, «Механика и машиностроение», 1965, № 10.
53. Прискин Б. Л. Взаимодействие цилиндрической цилиндрической оболочки с акустической волной. — В сб.: Теория пластин и оболочек, Киев, АН УССР, 1962.
54. Привалов И. И. Интегральные уравнения. М., ОНТИ, 1935.
55. Рабнович Б. И. Об уравнении упругих колебаний тонкостенных стержней с жестким основанием при падении свободной поверхности. — Изв. АН СССР, ОТН, «Механика и машиностроение», 1959, № 4.
56. Рабнович Б. И. Об уравнении нелинейных колебаний оболочки с жестким основанием. — Изв. АН СССР, ОТН, «Механика и машиностроение», 1964, № 1.
57. Радлов И. И. Динамика упругого тела, частично погружённого в жидкость. М., «Машиностроение», 1966.
58. Равенсорт И. И. Колебания упругой оболочки, частично погружённой в жидкость. М., «Машиностроение», 1967.
59. Родосский В. А. Динамические деформации боковых частей цилиндрической оболочки под действием акустической ударной волны. — ИТО Сибирского. Л., 1966, вып. 76.
60. Рэлеи Дж. У. Теория звука. М., Гостехиздат, 1965.
61. Самойлов Э. А. и Павлов В. С. Колебания полуферрической оболочки, погружённой в жидкость. — Изв. вузов, «Механика и машиностроение», 1964, № 3.
62. Самойлов Э. А., Павлов В. С. Колебания сферической оболочки, погружённой в жидкость. — Изв. вузов, «Механика и машиностроение», 1966, № 1.
63. Самойлов Э. А. Колебания сферической оболочки, погружённой в жидкость. — Изв. вузов, «Механика и машиностроение», 1966, № 2.
64. Сапонов Б. И. Динамическая устойчивость круглой цилиндрической оболочки под действием акустической ударной нагрузки. — В сб.: Труды конференции по теории пластин и оболочек, Казань, КГУ, 1961.
65. Селвин Л. И. О перемещении деформируемого тела в акустической среде. — ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.

66. Слейкин Л. И. Резонансные явления в эластичных оболочках при обдувке порывом. — В сб.: Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1966.
67. Слейкин Л. И. Резонансные явления в упругих средах. — В сб.: 3-й Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, Академия докладов. М., АН СССР, 1966.
68. Смирнов В. И. Курс высшей математики. т. 3. ч. 2-я. М., Гостехиздат, 1963.
69. Снеддон Н. Преобразования Фурье. М., ИЛ, 1955.
70. Срезневский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М., СИТИЗ, 1966.
71. Стокер Д. Д. Волны на воде. М., ИЛ, 1959.
72. Федорович Ю. А. и Федорович Т. К. Коллинеарные акустические системы оболочки — упругий стержень — груз под действием акустического потока давления в жидкости. — ИТО Суркова, А., 1968, том. 114.
73. Фокс В. А. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. М., АН СССР, 1946.
74. Харченко А. А. Неуставившиеся волновые движения. М., Гостехиздат, 1960.
75. Харченко А. А. Силы и моменты. М., Гостехиздат, 1957.
76. Шклярчук Ф. Н. Осесимметричные колебания жидкости внутри упругой цилиндрической оболочки с упругим давлением. — Изв. вузов, «Авиационная техника», 1965, № 4.
77. Шклярчук Ф. Н. О асимметричных методах расчета осесимметричных колебаний оболочки цилиндра с жидким наполнением. — Изв. АН СССР, «Механика», 1965, № 6.
78. Шклярчук Ф. Н. О вариационных методах расчета осесимметричных колебаний оболочки цилиндра, частично наполненного жидкостью. — В сб.: Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1966.
79. Шмаков В. П. Об уравнении осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с жидким наполнением. — Изв. АН СССР, «Механика и математическое», 1964, № 1.
80. Шмаков В. П. Об одном методе интегрирования уравнений осесимметричных колебаний сферической оболочки. — Докл. а. МТТ, 1966, № 2.
81. Эвонглас Ю. С. Гидродинамическая порыва. Л., Сизгиздат, 1961.
82. Batton M. L., Bleich H. H. Tables for Frequencies and Modes of Free Vibration of Infinitely Long Thin Cylindrical Shells. — J. Appl. Mech., 1955, vol. 22, No 2, pp. 178-184.
83. Batton M. L., Reissner E. The Effect of an Internal Compressible Fluid Column of the Breathing Vibration of a Thin Pressurized Cylindrical Shell. — J. Aeronautical Sci., 1958, No 5, pp. 288-294.
84. Bleich H. H., Batton M. L. Free and Forced Vibrations of Infinitely Long Cylindrical Shell in an Infinite Acoustical Medium. — J. Appl. Mech., 1954, vol. 21, No 2, pp. 167-177.
85. Campbell J. D. The Dynamic Yielding of Mild Steel. — Acta Metallurgica, 1953, vol. 1, No 6.
86. Carrier G. F. The Interaction of an Acoustic Wave and Elastic Cylindrical Shell. Contract No 7 out — 35810, Technical Report No 4, Brown University, 1959.
87. Carrier G. F. The Response of an Submerged Shell to an Axially Propagating Acoustic Wave. Contract No 7 out — 35810, No B11, 917, Brown University, 1959.
88. Chu Wen-Hwa. Breathing Vibrations of a Partially Filled Cylindrical Tank. Linear Theory. — J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E, 1963, vol. 30, No 4, pp. 532-536.
89. Fugge W., Zajac E. E. Bending Impact Waves in Beams. — Ing. Archiv, 1959, 28 Band.
90. Forrestal M. L., Herrmann G. Response of a Submerged Cylindrical Shell to an Axially Propagating Shear Wave. — J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E, 1965, No 4.
91. Haywood J. H. Response of an Elastic Cylindrical Shell to a Pressure Pulse. — Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1958, vol. 11, part 2.
92. Herrmann G., Kjosner J. M. Transient Response of a Periodically Supported Cylindrical Shell Immersed a Fluid Medium. — J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E, 1965, vol. 32, No 3.
93. Litzelman U. S., Kane D. D., Abramson H. N. Breathing Vibrations of a Circular Shell with an Internal Liquid. — J. Aero-Space Sci., 1962, vol. 29, No 9, pp. 1052-1059.
94. Mags-Nachbar P. On the Role of Bending in the Dynamic Response of Thin Shells to Moving Discontinuous Loads. — J. Aero-Space Sci., 1962, vol. 29, No 6.
95. Mags-Nachbar P. The Interaction of an Acoustic Wave and an Elastic Spherical Shell. — Quart. J. Appl. Math., 1967, vol. 15, No 1.
96. Miles J. M. On the Sleeting of Liquid in an Flexible Tank. — J. Appl. Mech., 1958, vol. 25, No 2, pp. 277-283.
97. Mindlin R. D., Bleich H. H. Response of an Elastic Cylindrical Shell to a Transverse Shear Wave. — J. Appl. Mech., 1953, vol. 20, No 2.
98. Morgan C. W., Ferrante W. E. Wave Propagation in Elastic Tube Filled with Streaming Liquid. — J. Acoust. Soc. Am., 1955, vol. 27, No 4.
99. Payton R. G. Transient Interaction of an acoustic wave with a circular cylindrical elastic shell. — J. Acoust. Soc. Am., 1960, vol. 32, No 6.
100. Skalak R. An Extension of the Theory of Water Hammer, part I, 2. — Water Power, 1955, No 15 and 1956, No 1.
101. Warburton G. S. Vibration of a Cylindrical Shell in an Acoustic Medium. — J. Mech., Engng. Sci., 1961, vol. 3, No 1.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От научного редактора	3
От авторов	5
Введение	7
Глава I. Свободные колебания оболочек, сопрягающихся с жидкостью	14
§ 1. Постановка задачи. Исходные уравнения	—
§ 2. Колебания бесконечно длинной осесимметричной цилиндрической системы (общий случай)	18
§ 3. К расчету присоединенной массы жидкости при колебании системы бесконечной протяженности	25
§ 4. Осесимметричные колебания бесконечно длинной системы	28
§ 5. Динамические системы	37
§ 6. Системы конечного размера	41
§ 7. Расчет осесимметричных колебаний систем конечного размера на основе теории длинных волн	59
Глава II. Динамическая реакция осесимметричной цилиндрической системы на аксиальную нагрузку	76
§ 8. Постановка задачи. Исходные уравнения	78
§ 9. Интегральное представление импульсной реакции системы	86
§ 10. Гидродинамическая индукция	87
§ 11. Асимптотическое представление импульсной реакции	100
§ 12. Динамическая реакция системы на другие типы нагрузки	110
§ 13. Реакция цилиндрической оболочки, погруженной в безграничную жидкостную среду, на волну давления, распространяющуюся в направлении образующей (стационарное решение)	110
§ 14. Взаимодействие ударной волны с оболочками цилиндрической формы	125
Глава III. Взаимодействие ударной волны с оболочками сферической и цилиндрической формы	141
§ 15. Начальные значения в постановке задачи	—
§ 16. Взаимодействие ударной волны со сферической оболочкой. Точное решение	145
§ 17. Приближенные методы определения гидродинамического сил. Особенности направленного освещения с сферической оболочкой	167
§ 18. Постановка и точное решение задачи о взаимодействии ударной волны с бесконечно длинной цилиндрической оболочкой	167
§ 19. Основные закономерности взаимодействия ударной волны с цилиндрической оболочкой	200

Глава IV. Взаимодействие ударной волны с оболочками сферической и цилиндрической формы	219
§ 20. Постановка задачи	—
§ 21. Динамическая реакция тонкостенных цилиндрических сосудов с жидкостью на осесимметричную нагрузку	221
§ 22. Влияние упругости дна на колебание цилиндрического сосуда с жидкостью	230
§ 23. Взаимодействие ударной волны с оболочками, взаимодействующими с жидкостью	236
§ 24. Система оболочек, сопрягающихся со слоем жидкости, при динамическом нагружении	241
§ 25. Взаимодействие ударной волны на оболочках, связанных с деформируемым массивом	262
Глава V. Устойчивость сопрягающихся с жидкостью оболочек при динамическом нагружении	280
§ 26. Основные особенности в методах исследования процесса потери устойчивости оболочек в динамике	—
§ 27. Устойчивость цилиндрической оболочки, погруженной в безграничную жидкостную среду, при равномерной динамической нагрузке	288
§ 28. О влиянии возмущения среды на устойчивость материала на безосевую динамическую нагрузку	305
§ 29. Устойчивость цилиндрической оболочки при закреплении оболочки ударной волной	313
§ 30. Устойчивость цилиндрической оболочки, погруженной в ограниченный жидкостный слой, при динамическом нагружении	321
§ 31. Экспериментальные исследования устойчивости цилиндрических оболочек, погруженных в ограниченный жидкостный слой, при динамическом нагружении	338
§ 32. Устойчивость сферических оболочек, сопрягающихся со слоем жидкости, при динамическом нагружении	344
Литература	359