

Л. М. БЕЛЕНЬКИЙ

РАСЧЕТ СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ СТАДИИ



Ленинград
"Судостроение"

1963



Рецензент докт. техн. наук О.М.Белый

Научный редактор докт. техн. наук Г.В.Войнов

Знакомый Л.М.

B43 Расчет судовых конструкций в пластической стадии. - Л.: Судостроение, 1983. - 448 с., ил.

ИДЗ

В книге впервые систематически рассмотрены основные подходы прикладной теории пластичности и методы расчета судовых конструкций в пластической стадии. Основное внимание уделено задачам прикладной теории пластичности. Рассмотрены способы определения предельной местной прочности корпусных конструкций при их деформации и ремонте. Книга содержит обширный справочный материал.

Для инженеров-технических работников проектных организаций, судостроительных и судоремонтных заводов и студентов старших курсов кораблестроительных институтов.

ИДЗ 629.12.011.1.004.24:639.374
ИДЗ (ИДЗ) - 82

ИДЗ-15-9-83

39.427

547999

548242

©Издательство "Судостроение", 1983 г.



B - энергия рассеивания;
пластируемая жесткость пластин.

E - модуль упругости при растяжении.

E_y - модуль упругости.

E_x - касательный модуль.

$e = E_y/E$ - безразмерный модуль упругости.

F - площадь; площадь поперечного сечения балки.

$F_{\text{св}}$ - площадь сечения свободного носового профиля и отсека профиля соответственно.

F'_0 - площадь сечения притесненного носового профиля.

F_1, F_2 - расстояния в отсеке от носового сечения соответственно.

$F_0 = F_{\text{св}}$ - безразмерная площадь сечения свободного носового профиля.

$\bar{F}_0 = F'_0/F$ - безразмерная площадь сечения отсека профиля.

$F'_0 = F'_0/F$ - безразмерная площадь сечения притесненного носового профиля.

f - максимальный прогиб.

$\bar{f} = f/B$ - безразмерный максимальный прогиб.

$f_{\text{ост}}$ - остаточный максимальный прогиб.

G - модуль упругости при сдвиге; модуль сдвига.

H - крутящий момент в пластине.

h - высота балки; толщина пластинки.

J - момент инерции площади поперечного сечения балки, вычисленный относительно нейтральной оси сечения.

K_p - условный коэффициент расхода.

L - длина трубы; длина перекрытия.

l - длина пролета балки; ширина перекрытия.

$M(x)$ - изгибаемый момент в поперечном сечении балки от поперечной нагрузки.

M_0 - предельный момент сечения (при изгибе).

M_{0n} - предельный момент сечения при кручении.

M_K - крутящий момент в сечении стержня.

$M_{ост}$ - остаточный изгибаемый момент.

M_T - момент фибровой текучести.

M_{max} - максимальный изгибаемый момент.

M_n - предельный момент сечения при $N \neq 0$.

M_0 - предельный момент сечения при $Q \neq 0$.

M_x, M_y - изгибающие моменты в пластине.

M_z - суммарный изгибаемый момент в поперечном сечении балки от поперечной нагрузки и продольных сил.

$m = \frac{M(x)}{M_0}$ - безразмерный изгибаемый момент в поперечном сечении балки от поперечной нагрузки; безразмерный изгибаемый момент в сечении пластины.

$m_0 = M_0/M_0$ - безразмерный предельный момент сечения при $N \neq 0$.

$m_T = M_T/M_0$ - безразмерный момент фибровой текучести.

$m_m = M_{max}/M_0$ - безразмерный максимальный изгибаемый момент.

$m_z = M_z/M_0$ - безразмерный суммарный изгибаемый момент в поперечном сечении балки от поперечной нагрузки и продольных сил.

N - продольная сила в поперечном сечении балки, пластины.

N_0 - предельная продольная сила сечения.

$N_{кр}$ - критическая сила.

$N_{ост}$ - остаточная продольная сила.

N_n - предельная продольная сила сечения при $M_n \neq 0$.

N_x, N_y - продольные усилия в пластине.

$n = N/N_0$ - безразмерная продольная сила сечения.

$\bar{P}$ - сосредоточенная сила; параметр, пропорциональный историческому значению поперечной нагрузки.

P_0 - предельная нагрузка.

Q - поперечная сила в поперечном сечении балки, пластины.

Q_n - предельная поперечная сила сечения.

Q_n - предельная поперечная сила сечения при $M_n \neq 0$.

Q_x, Q_y - обобщенные напряжения, обобщенные деформации.

Q_x^0, Q_y^0 - обобщенные силы, обобщенные перемещения.

q - интенсивность поперечной распределенной нагрузки.

q_0 - интенсивность предельной нагрузки.

R - реакция; реакция в узловой точке перекрытия.

S - статический момент площади; суммирующее усилие в пластине; расстояние между разными балками перекрытия.

T - работа внешних сил.

u, v, w - компоненты перемещений.

$\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ - компоненты скоростей.

$[u]$ - величина раскрытия осевых перемещений в балке, перемещений в срединной плоскости пластины.

w - прогиб.

γ - тангенциальный сдвиг.

ε - тангенциальное удлинение (деформация).

ε_1 - интенсивность деформаций.

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}$ - компоненты деформаций.

$\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_z, \dot{\epsilon}_{xy}, \dot{\epsilon}_{yz}, \dot{\epsilon}_{zx}$ - компоненты скоростей деформаций.

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ - главные удлинения (деформации).

ϵ^p - пластическая составляющая удлинения (деформации).

ϵ^e - упругая составляющая удлинения (деформации).

θ - угол наклона оси балки к пластическому направлению.

K - коэффициент осн. балки.

K_x, K_y, K_{xy} - коэффициенты и "кручения" средней плоскости пластины.

μ - коэффициент Пуассона; безразмерная длина нагруженного участка перекрестка.

σ - нормальные напряжения.

$\sigma_{ост}$ - остаточные напряжения.

σ_T - предел текучести материала (при растяжении).

σ_1 - максимальные напряжения.

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ - компоненты напряжений.

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - главные напряжения.

τ - касательные напряжения.

τ_T - предел текучести материала при сдвиге.

Ψ_k, Φ_k, χ_k - пластические функции.

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость учета пластических деформаций при расчете судовых конструкций растет с каждым годом. Она связана, с одной стороны, с общим прогрессом в судостроении: совершенствованием конструкций и снижением их массы, ростом размеров судов и увеличением их скорости плавания, применением технологических процессов строительства корпусов судов; с другой стороны, - с существенной интенсификацией эксплуатационных факторов, приводящей к ускоренным, а зачастую и к ускоренным ускоренным эксплуатациям. Круг практических вопросов, непосредственно связанных с рассмотрением пластических деформаций, возникающих в конструкциях, весьма широк. В основном он состоит:

проблем проектирования конструкций, обеспечивающих местную прочность корпуса (оценки запаса прочности конструкций, их статическая, динамическая расчетная нагрузка, нормирование прочности в т.п.);

проблем эксплуатации и ремонта конструкций корпусов, возникающих повреждений в виде остаточных деформаций (оценки необходимости ремонта поврежденных конструкций, оценки его прочности, возможности продолжения эксплуатации судна с поврежденными и необходимыми при этом ограничениями, выбора методов устранения повреждений в т.п.);

проблем проектирования технологических процессов, связанных с пластическим деформированием материалов конструкций (подогрев, гибка и правка корпусных конструкций, штамповка, сварка и др.).

Приведем несколько конкретных примеров. До недавнего времени местная прочность судовых конструкций регламентировалась назначением корпусных напряжений и расчетных нагрузок,

При определении которых предполагалось, как известно, что конструкция работает жестко упруго. В то же время действительные процессы при деформации судных конструкций включают их неупругие реакции при накоплении остаточных деформаций, которые достаточно часто встречаются на судах. Число, например, в пластине обшивки полейется остаточные прогибы, соответствующие отсутствию с полей деформации, на все длины недеформированной нагрузки, а в некоторых случаях на порядок превышающие расчетные. Но и это не исключает разрушения пластины. Если прочность сварного шва пластины обшивки, или ее разрушения потребуются нагрузки, что в два-три раза больше.

Таким образом, наличие существенного противоречия между реальными практикой эксплуатации конструкций корпусов и методами нормирования их жесткой прочностью по допускаемым напряжениям. Устойчивость пластинистой хорошо известна. Там же имеется и совпадение с соответствующими расчетными напряжениями и методами расчета эти методы нормирования для судов малых и средних размеров обшивки также в традиционных конструкциях дает приемлемые результаты.

Однако на больших участках обшивки использование этих методов имеет погрешность на порядок превышающую. Например, на крупных судах с горизонтальным способом постройки (тип $ro-ro$), где для крупных секций используются такелажные автоподъемники, требуется обеспечить работу секций на суду в упругом состоянии при действии больших толчков. Расчет же, учитывающий нелинейность поведения пластинистых деформаций, накопления остаточных прогибов пластин нагрузки в процессе эксплуатации судна, эксплуатационные нормы для деформации, дает реальные результаты, которые хорошо согласуются с практикой сварного судостроения [14, 20].

Согласен уже тот момент, что в нормативные основы жесткой прочности судных конструкций не следует вводить без рассмотрения пластических деформаций. Это можно получить все более широкие пределы сдвиг пластичности (см., например, [27, 65, 91] и др.). Переход к более точным методам нормирования жесткой прочности, учитывающей возможность накопления в конструкциях пластических деформаций, связан не только с разрабатываемыми проектами, характеризующими реальное состояние конструкций, но и с необходимостью методов расчета, позволяющих описать основные особенности ее поведения в реальном состоянии, а также выдать значимые расчетные значения нагрузок. Для последних ввиду с тради-

ционными методами определения в регламентации здесь можно воспользоваться в обратном направлении, основываясь на использовании информации о погрешностях конструкций и описании остаточных прогибов. В большинстве случаев эти прогибы — результат действия на конструкции местных поперечных нагрузок.

Если расчет позволяет установить связь между значениями этих нагрузок и остаточными прогибами, возникающими в конструкции от их действия, то, обратив зависимости на судах, можно оценить значения местных нагрузок, возникающих погрешностями. Этот подход оказывается эффективным в большинстве случаев и даже в тех случаях, когда наблюдаемые остаточные прогибы конструкции — результат их накопления от многократного действия местных сил [13, 21].

Важно бы отметить, что переход к нормам проектирования, характеризующим реальное состояние конструкций, и соответствующее изменение расчетных значений нагрузок не исключает ни одной конструкции. Пластические деформации, возникающие в конструкции, влекут за собой существенное перераспределение в ней напряжений усилий. Вследствие этого конструкция, спроектированная по допускаемым напряжениям, оказывается существенно перенапряженной по отношению, например, к продольным нагрузкам [5, 27, 65 и др.]. Так, сравним две одноосевые балки, нагруженные равномерно распределенной нагрузкой: шарнирно-опорная и жестко заделанная на опоре. Если на подпунктом шарнирно-опорной балки равномерно, то предельная нагрузка у жестко заделанной балки составит не 33,3% больше. Если же с увеличенной шарнирно-опорной балкой увеличить балку, равнопрочную ей по допускаемым напряжениям, на величину дополнительного местного усилия сосредоточенного проката, то у последней предельная нагрузка составит не 43% больше.

В этих простейших примерах выявляется общий законности: в пластической стадии эффект от повышения степени статической неопределенности конструкции проявляется существенно сильнее, чем в упругой стадии. Пластические деформации также значительно снижают значение пластичности свар и металла, характеризуются напряжением и др. Прогресс в пластической стадии существенно больше, потому возрастает роль влияния напряжений и соответственно конструкций, обеспечивающих расчет. Местные ослабления конструкций могут играть в существенное значение на предельной нагрузке, чем в случае оценки прочности по допускаемым напряжениям, и соответственно появляются дополнительные проблемы и местные подкрепления.

Все это свидетельствует о том, что учет пластических деформаций может существенно сказываться на результатах выбора оптимальной конструкции и конструктивных оформлений ее узлов.

Нарезанием сузовых монострукций, соединенных с плавильными и или остаточных деформаций, - одна из самых массовых видов эксплуатационных дефектов. Практически всегда имеет место, у которых таких повреждений не было бы. И наиболее распространенными причинами повреждений, например, сорванных конструкций прикладывает внимание при эксплуатации, особенно частые у промышленных судов [14]. Значительная часть повреждений происходит, получаемая у нас в стране повсеместное распространение, особенно повсюду в море для передачи груза и оборудования, получаемые только в слабейших остаточной операции. Повреждения часто возникают в неблагоприятных гидрометеорологических условиях, например при волнении 5 баллов. В результате при малом эксплуатационном времени конструкции практически весь промышленный судок требует ремонта.

Типичны повреждения диаметных монострукций в носовой оконечности от столкновения - массовые гидропластические деформации (удар носом о волну), возникающие при толке судна со значительной скоростью и с малой осевой носом против фронта волнения. Особенно подвержены элементу судостроения суда, массовым и деформированы длины 80-150 м. Наблюдается деформация диаметной обшивки в районе (0,05-0,30) от носового переборщика, нередко остаточные признаки продольных разрывов обшивки, отрыв их от флоры на сварном шве, часто "подсаживаются" флоры в районе килевых обшивки, теряют устойчивость от сдвига осевой флоры, иногда имеют место остаточные признаки перекрутки в целом (см., например, [108]). Значительным повреждением бортовых и диаметрных конструкций, возникающих с носовым ударом, на судах, работающих в Северном и Тихоокеанском бассейнах. Нередки летальные повреждения при столкновении в зимнее время в Балтийском море. Весомые повреждения возникают на подводных судах, работающих в Северо-Восточной Атлантике, особенно в районе шельфового Лабрадор. Возможны повреждения корпусов судов со сварными. Нельзя назвать и другие причины повреждений.

К наиболее серьезным задачам проблемы повреждаемости корпусов принадлежит анализ последствий повреждения корпусов судов - деформация поврежденной конструкции. Анализ показывает, что практически во всех случаях наиболее опасными последствиями повреждения являются прочностные последствия. Различают морщин-

ных явлений и внешнего вида судна, опасность нарушения водонепроницаемости, как правило, приводит к менее острым ограничениям [9].

Любое повреждение рассматриваемого типа связано с наличием форм конструкции и пластическим деформированием ее материалов. Для судов, обеспечивающих общую прочность, наиболее опасным может оказаться наличие форм конструкций; для судов, обеспечивающих местную прочность, основным пластическим деформациями, которые могут быть значительными и, влияя на них, разрушающим материал. Поэтому достаточные сейчас критерии для деформации повреждений основаны на ограничении величин пластических деформаций и, следовательно, требует анализа работы конструкций в пластической стадии. Пластический анализ позволяет выявить прикладываясь также критерии для деформации повреждений [18].

Результаты экспериментальных исследований свидетельствуют о значении остаточных деформаций условиями эксплуатации судов. В этом случае возникает вопрос о возможности изменений в конструкции - проведения профилактических мероприятий, которые гарантировали бы в конструкции нормальную работу конструкций [12]. Эта задача в практической части связана с затратой или проблемой местной прочности. Основное ее отличие состоит в том, что, рассматривая деформации и повреждения на конструкциях судов в конкретных условиях эксплуатации, необходимо будут разрабатывать разные формы деформирования, и необходимый эффект может быть достигнут ценой малых затрат. Это особенно важно, если такого рода работы должны выполняться во время оперативного ремонта судна, когда время и возможности их проведения весьма ограничены.

Изучение типичных повреждений с помощью экспериментальных исследований и экономическими анализами имеет большое значение для выбора повреждений корпусов, но обусловленное ограничением условий эксплуатации судов, хотя бы частичное рассмотрение того, что сейчас приходится на весьма широком термине "хорошая морская практика". В ряде случаев может оказаться, что анализ возможных ограничений, много сближающийся на производственной деятельности судов, можно существенно снизить его повреждаемость.

Изучение повреждений также и для оптимальной организации технического обслуживания корпусов, особенно в связи с повреждением не флоте системы поддержания технического состояния судов сводом второй обеспечения быстрого технического состояния судов связано с другими производственными операциями и существенно воз-

россия непрерывными периодами (вместо одного года 4 января два - четыре в феврале). Поскольку все основные нагрузки работы могут произойти только в определенных условиях, эффективность профилактики становится неотъемлемой необходимостью. Безусловно, оценка последствий аварийной для правильного решения в море безопасности продолжения эксплуатации судна, вынужденного прекращения, выбора необходимых при этом действий и многого другого.

Необходимость пластического анализа для проектирования таких технологических процессов изготовления деталей корпусов, как литье, гибка, пресс, штамповка, не требует пояснений: оценка деформации, перемещения узлов при гибке, ее оптимальной последовательности, выбор формы штампов - далеко не самый переломный момент этого анализа. Гидропластический, или, проще, объемный, анализ является определяющим фактором деформаций.

Понимая многозначность, многовариантность, что является практического использования пластического анализа для проектирования весьма широко: инженеру приходится сталкиваться с ним и в процессе проектирования корпусов судов, и при их постройке, и в процессе эксплуатации, и в связи с ремонтом.

Тема докладов, рассматриваемых теорией пластичности, становится более разнообразной. Небольшой материал для расчета судовых конструкций, но все же метод, представляют:

гидропластические методы в несимметричной асимметричной постановке;

гидропластические методы в геометрически симметричной постановке;

методы теории предельного равновесия.

Математические формулы, рассматриваемые в конструкции, имеют тот же характер, что и упругие деформации. На расчеты конструкции в равной мере влияют все описанные деформации, и поэтому должна решаться и гидропластическая постановка. Рассмотрение при этом перемещения, как правило, имеет тот же характер, что и в упругой стадии. Поскольку большинство судовых конструкций обладает относительной высокой жесткостью и упругие перемещения у них малы, то на конструкцию оказываются и в рассматриваемой упруго-пластической стадии, т.е. ввиду часто можно считать геометрически жесткой.

Когда пластические деформации достигают достаточно больших значений, что упругие превращения, становится возможным ввести пластические постановки задачи. Однако при этом следует учитывать

этот резко возрастающий процесс по сравнению с упругой стадией, и для большинства судовых конструкций проблема уже нельзя считать малой. Однако понимание сути пластической геометрически нелинейной постановки, которая порождает проблемы себя в большом числе задач [3]. Такие ограничения являются предельными существенно упрощают решение задач, исключая размеры круг пластических деформаций, который может быть рассмотрен с ее помощью.

Большое место занимает задача теории предельного равновесия (геометрически нелинейная задача для идеального тела эластического материала), позволяющая определять предельную нагрузку. Анализ показывает, что для очень многих судовых конструкций, особенно для корпусов корпусов, предельная нагрузка играет роль порогового значения внешней нагрузки: при нагрузках ниже предельной состояние прогиба конструкции обычно весьма невелико, при нагрузках выше предельной состояние прогиба становится существенно и должно рассматриваться как неустойчивое. Этот вопрос требует интереса и предельной нагрузки как и критерия прочности.

Глава об использовании пластических методов для расчета судовых конструкций, которая не отвечает, что теория пластичности - одна из наиболее бурно развивающихся частей механики твердого деформируемого тела, в которой применяются ее методы в инженерных расчетах не так очень широко. Первые работы по теории пластичности, связанные с именем Сен-Венана и М.Леона, относятся к 30-м годам прошлого века [12], а самые элементарные представления о расчете прочных конструкций в пластической стадии - понятия пластических моментов, появившиеся при работе Бекка, трактующая схему разрушения прутка стали - сформировались уже в начале столетия.

В конце тридцатых годов, в том числе в нашей стране, теория пластичности вышла в 30-е годы, и с тех пор стала неотъемлемой и применяемой составляющей в этой области очень быстро растет. Широко известны работы В.А.Панкратова, В.А.Шиманского, В.В.Давыдова, А.А.Курдюмова, А.И.Митинского, Л.И.Ремизова, А.И.Сомовского применительно к расчету судовых конструкций, многолетнее сотрудничество В.В.Васильева, работы К.Г.Абрамова, Г.В.Войнова, В.В.Давыдова, В.В.Евдокимова, В.И.Войнова, А.И.Курдюмова, А.В.Ломова, К.А.Панкратова, С.М.Леона, В.А.Васильева, В.В.Сорокина, В.И.Сорокина, В.И.Степанова, Г.В.Лаврова, В.В.Васильева, В.В.Васильева, В.В.Васильева и др. Тем не менее применяемая теория пла-

тепlosti в практике сушестроения пока ограничена; методы расчета судонки конструкций в пластической области еще не вошли в повседневный процесс конструирования. В учебных курсах переработочно-техники факультетов эти вопросы освещались сдержанными сведениями и были лишены широкого места.

Хотелось сказать, что в отечественной и иностранной литературе по пластичности очень немного книг, которые без особой подготовки могли бы быть использованы конструкторами для первоначального ознакомления с предметом, введения бы его в круг основных понятий теории пластичности, давая возможность воспользоваться ее результатами. Сейчас довольно сложно выполнить эту задачу без больших затрат времени, особенно если приходится применять даже и речь идет о расчете специфических судовых конструкций. Такая ситуация препятствует внедрению в практику судостроения и эксплуатация факты методов пластического анализа конструкций.

Данная книга - попытка частично восполнить этот пробел. При ее написании ставилась задача дать первоначальное знакомство с предметом, которое обеспечило бы возможность первоначального ознакомления, не требуя от читателей специальной подготовки. Одновременно ставилась попытка последовательно рассмотреть основные методы и аспекты, имеющие прикладное значение и дающие возможность их прямого практического использования в судостроении. Конечно, эта книга не сможет дать готовые методы и рекомендации, особенно в тех случаях, когда речь идет о комплексной оценке реальной прочностной способности конструкций уже потому, что многие вопросы еще не имеют решения. Автор, однако, надеется, что книга сможет оказать полезную тем, кто захочет освоить пластические методы и применить их к расчету судовых конструкций, будет способствовать более широкому внедрению этих методов в практику судостроения и эксплуатации флота.

Книга рассчитана на конструкторов, занимающихся практической деятельностью. Поэтому основное внимание и конкретность (приводятся в литературе) примеры, если они не помешают содержанию глав, методам или результатам. Во содержании книги, конечно, освещались научные вопросы автора, книга лет заимствованного прикладными вопросами теории пластичности применительно к задачам местной прочности судовых конструкций, решения в технической эксплуатации корпусов. Результаты этих исследований, выполненных в Ленинградском техникуме судостроения и судостроительной промышленности, а также особенно широко в Ленинградском высшем

техническом морском училище, также были отражены в книге.

В этих работах большое участие принимали коллеги и ученики автора А.В.Бурцова, В.В.Мажаров, В.К.Трунов, А.А.Ферин, В.П.Исидурин, В.П.Кожин, А.И.Овощинин, Б.М.Томский, З.А.Варламов, без постоянной поддержки и помощи которых написание этой книги было бы невозможным. Б.М.Томский и З.А.Варламов выполняли большую работу по проверке ряда расчетов и составлению таблиц.

Большое спасибо товарищам за участие в оформлении книги конструкторам О.М.Балаш, выполнявшим и практически прочитавшим рукописи, и конструкторам Г.В.Войтке, взявшим на себя труд редактирования книги.

Эта книга - первая попытка создать пособие по расчету судовых конструкций в пластической области, охватывающее широкий круг вопросов. Автор отдает себе отчет, что достичь поставленной цели во всех ее аспектах ему вряд ли удалось и поэтому будет благодарен читателям за все замечания по содержанию книги, в частности относительно пластических задач, которые могут представлять прикладной интерес для судостроения и смежных специальностей с эксплуатацией флота.

Открытым и почтительным прошу выразить в издательство "Судостроение" по адресу: 191063, г.Ленинград, ул.Гоголя, 8.

§ 1. Математические модели при растяжении напряженном состоянии

1.1. Диаграмма напряжений или деформаций. Зависимость между нормальными напряжениями в поперечном сечении растянутого стержня σ и относительными удлинениями ϵ характеризуется кривой, которую принято называть диаграммой напряжения при растяжении. У упругих стержней (малопластичных и малодеформируемых) она имеет три характерных участка (рис.1): начальный прямолинейный участок OA - упругая область, горизонтальный участок AB - площадка текучести и промежуточный участок BC - зона упрочнения. Угловой расчет ограничивается рассмотрением напряженного состояния в упругой области, где определены точки Гукса (до точки A):

$$\sigma = E \epsilon, \quad (1.1)$$

где E - модуль упругости материала при растяжении, численное значение E в кг/см^2 (σ - в том же масштабе, что и начальная точка диаграммы в ось σ).

Рассмотрим теперь напряженное состояние стержня в определенном сечении $\sigma = P/F_0$, где P - сила, растягивающая стержень; F_0 - площадь поперечного сечения стержня до деформации.

Ордината точки A диаграммы - предел пропорциональности материала $\sigma_{пл}$ - максимальное напряжение, при котором отношение σ/ϵ остается заданной величиной (обычно 0,002%). Эту границу прямолинейности кривой Гукса обычно рассматривают независимо от границы упругой области - точки B диаграммы.

Ордината последней - предел упругости материала σ_y - максимальное напряжение, при котором остаточные

удлинения достигают заданной величины (обычно 0,001-0,005%).

Ордината площадки текучести ось абсцисс точки - части материала σ_T . Так как у многих материалов диаграмма не имеет площадки текучести, по ГОСТ 1497-61 предел текучести - напряжение, при котором остаточные удлинения составляют 0,2%.

Ордината самой высокой точки диаграммы (точки B) - предел прочности материала σ_B - максимальное напряжение, которое выдерживает образец при растяжении.

Для практического расчета параметров рассмотренного деформированного участка диаграммы от точки B (пластической области): в теории пластичности связи между напряжениями в деформированном состоянии (расчетная величина напряжения). Напряжения здесь имеют предел упругости σ_y . Однако для упругих стержней значения $\sigma_{пл}$, σ_y и σ_T совпадают, и в большинстве практических расчетов можно считать, что в упругой области $\sigma < \sigma_T$, а в пластической области $\sigma > \sigma_T$. (Исключение, в частности, составляет область устойчивости, см. § 2.3).

Если в упругой области после нагружения стержня, например до точки 1 на диаграмме, начать уменьшать напряжение, пропорционально не будет уменьшаться и удлинение; на диаграмме линия разгрузки соединит с прямой OA , так как нагружение в упругой области сопровождается одним и тем же соотношением - законом Гука (1.1). Если начать разгрузку в пластической области, например на точке 2 диаграммы, то на последней на получим линию $2-2'$. Она совпадает с прямой, параллельной упругому участку диаграммы OA . Поэтому в теории пластичности обычно принимают, что разгрузка следует закону Гука. Абсолютно точки 2 характеризуют состояние деформации $\epsilon_{ост}$, о которых мы речь ниже. Их можно вычислить как

$$\epsilon_{ост} = \epsilon - \sigma/E, \quad (1.2)$$

где σ и ϵ - соответствующие напряжения и деформации в конце нагружения перед разгрузкой (ордината и абсцисса точки 2).

Необходимые зависимости $\sigma-\epsilon$ при нагружении и разгрузке приводят к неоднозначности связи между напряжениями и деформациями в пластической области. Так видно из



Рис.1. Диаграмма растяжения цилиндрической стали.

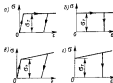


Рис.2. Диаграмма растяжения цилиндрической стали: а - линейного упругоэластического; б - линейного упругоэластического; в - упругоэластического и линейного упругоэластического; г - упругоэластического и линейного упругоэластического.



Рис.3. Зависимость σ - ϵ при равномерном нагружении.



Рис.4. Кривые зависимости σ - ϵ цилиндрической стали при различной температуре.



Рис.5. Зависимость σ - ϵ и эффект, связанный со временем развития пластической деформации.

рис.1, одна и та же нагрузка σ могут соответствовать разным удлинениям (точки 1 и 2"). Чтобы рассчитать величину ϵ , здесь нужно иметь, что представляет собой рассматриваемую напряженную состояние, т.е. в отличие от упругой стадии дополнительная необходимая деформация от исторического материала.

Точка E на диаграмме означает разрушение образца. Если из этой точки провести прямую, параллельную OA (на рис.1 - пунктир), - предельная нагрузка, мы увидим относительное остаточное удлинение образца (образца) при разрушении δ . Это максимальное остаточное удлинение, которое может получить материал, - характеристика его способности пластически деформироваться (характеристики предельной пластичности). Точка D на диаграмме означает максимум в растягиваемом образце перед - местного удлинения образца. (Важный случай образования дуги и более всего.) Равное удлинение площади поперечного сечения в районе шейки и объясняется тем, что σ на диаграмме перед от точки D.

Существенно, что до появления шейки относительное удлинение на разных участках по длине образца мало отличается друг от друга - образец вытягивается практически равномерно. После появления шейки вытягивание образца происходит почти исключительно за счет роста удлинения в районе шейки (локальных деформаций). Поэтому величина δ характеризует способность материала при равномерном, так и в локальном деформировании. Чтобы характеризовать способность материала к равномерным пластическим деформациям, пользуются равномерным удлинением δ_r , максимальным удлинением δ , но при определении которого отбрасывается деформация образца в районе шейки. Обычно δ_r близко относительному остаточному удлинению, отмеченному точкой D на диаграмме. Способность материала к локальному деформированию принято характеризовать относительным сужением в шейке

$$\phi = \frac{F_0 - F_{\text{ш}}}{F_0} \cdot 100\%, \quad (2.3)$$

где F_0 - площадь поперечного сечения образца до испытаний; $F_{\text{ш}}$ - минимальная площадь поперечного сечения образца (в шейке) в момент разрушения.

Во всех пор рассматриваемых материалов при растяжении на основе имеют диаграммы растяжения. Аналогично можно

характеристики деформированного материала при сжатии, построим диаграмму напряжений при сжатии. Многочисленные эксперименты показывают, что у пластичных материалов, в которых преобладают и материалы порошков, при увеличении ε диаграммы растяжения и сжатия близки. Поэтому в теории пластичности широко распространено допущение, что зависимость $\sigma - \varepsilon$ при растяжении и сжатии одинакова.

1.2. Зависимость зависимости $\sigma - \varepsilon$. Как видно из вышесказанного, зависимость между σ и ε реального материала достаточно сложна. Это составляет во многих случаях шаг в теоретическом анализе, так и при решении практических задач приходится к упрощенным идеализированным зависимостям (диаграммам) $\sigma - \varepsilon$. Одна из наиболее простых и распространенных - диаграмма идеального упруго-пластического материала (рис.2,а). В случае, когда пластичность деформации материала принимает упругое, если пренебречь показателем, получается диаграмма идеального эластического материала (рис.2,б). Пренебрегая тут учета упрочнения реального материала - использование диаграммы упругоупрочненного материала с идеальным упрочнением (рис.2,в) и идеализируем этот материал с идеальным упрочнением (рис.2,г). Иногда для упрощенных реальных диаграмм $\sigma - \varepsilon$ используют допущение, состоящее из трех отдельных частей (упругой части, идеальной текучести, идеального упрочнения). Допущение распространено применительно степенной функции типа $\sigma - A\varepsilon^m$, где A и m - константы; причем m - выбирает обычно в пределах от 0 до 1. В степенной диаграмме широко используются следующие формы простейших диаграмм $\sigma - \varepsilon$, предложенные Л.А.Ильюшиным [9]:

$$\sigma = E\varepsilon(1-\omega), \quad \omega = \omega(\varepsilon), \quad (2.4)$$

где ω - величина порывания, зависящая от форм диаграммы и значения ε . В упругой области $\omega = 0$, в пластической области $0 \leq \omega < 1$.

1.3. Постарое и порывание нагружения. Если после разгрузки материал начать снова нагружать, то, как показывают эксперименты, на диаграмме $\sigma - \varepsilon$ линия разгрузки и постарого нагружения точно не совпадает - получается петля (рис.3, линия $B^0 B^1$).

Она называется петлей гистерезиса и свидетельствует о том, что разгрузка и постарое нагружение связаны с необратимыми потерями (рассеиванием) энергии, которая переходит в тепло. Однако петля гистерезиса очень велика, и в подавляющем большинстве случаев ее влияние пренебрегают, считая, что зависимость $\sigma - \varepsilon$ при разгрузке и постаром нагружении совпадает с линией до нагружения (линия B на рис.3). Это допущение может быть существенно только в задачах расчета конструкций на повторно циклических нагрузках. Зато пренебрежение в этом случае рассеиваемой энергией из-за неучета петли гистерезиса в анализе циклических нагружений - разгрузка очень велика, однако при многократном постароме цикла суммарное рассеивание энергии становится значительным, и пренебрежение этим обстоятельством может повлечь за собой серьезные ошибки.

Особые эффекты возникают при нагружении, в котором материал последовательно испытывает пластические деформации разных знаков. Если предварительно растянуть стержень, создать в нем напряжение выше предела упругости, а затем разгрузить и подвергнуть сжатию (рис.3, линия $B^0 B^1$), то при сжатии пластическая деформация окажется при напряжениях $\sigma < \sigma_0^1$, а когда $|\sigma_0^1| < |\sigma_y|$

(σ_y - предел упругости материала при первом нагружении стержня). При этом разрыв между σ_0^1 и σ_y будет тем больше, чем больше была деформация стержня в предшествующем растяжении. Аналогичный эффект имеет место, если сначала стержень подвергнуть сжатию в пластической области, а потом разгрузить и растянуть.

Это явление, впервые детально изученное И.Кузнецовым (публикации 1881-1885 г.г.), носит имя автора и называется эффектом Бауэнгера. Объясняется оно неоднородностью микропластических деформаций поликристаллического материала. Эффект Бауэнгера может заметно повлиять на результаты, если ранее нагруженные стержни с значительной величиной пластических деформаций, а сами деформации значительны. В дальнейшем тем в книге, где эффект Кузнецова упоминается, это специально оговорено. В остальных случаях мы им пренебрегаем.

1.4. Влияние развития пластических деформаций. В исследова-

¹ Источник раздела написан совместно с А.А.Осиповым.

них теорией пластичности формулы зависимости $\sigma = \varepsilon$ время развития пластических деформаций не рассматриваются. Однако известно, что пластические деформации развиваются steadily на протяжении. На рис. 4 представлены результаты испытаний на одноосное растяжение образца малоуглеродистой стали [46] (кривая пропорциональности $\sigma_{0.2} = 228 \text{ МПа}$, предел прочности $\sigma_b = 440 \text{ МПа}$). Вырубка осуществлялась пластическим возрастанием нагрузки. В начале нагружения наблюдалось выделение из времени в фазированном состоянии деформации, после чего нагрузка постепенно снижалась. На рисунке: σ — напряжение; ε — деформация; δ — удлинение образца на время t при $\sigma = \text{const}$. На рисунке видно, что время возникновения развития пластических деформаций совпадает с моментом, в время протекания полного протекания деформации — процесс в две ступени [47].

Если аналогично охарактеризовать пластическое деформирование образца, соответствующее данной нагрузке при постоянном удлинении ε , то время выдержки наблюдается полное напряжение. Особенно важно эти эффекты учитывать при анализе, когда при постоянной нагрузке не только одноосное напряжение но времена σ и ε , но также происходит изменение размеров пластического тела по высоте сетчатой решетки. Это приводит к возникновению латентному росту прогиба.

Известно из экспериментов, что при постоянном растяжении эффект усталости имеет зависимость от высокочастотной пластичности образца и формулы из теории пластичности как эффект пластичности. Это дает возможность использовать методы пластичности, в частности решения пластических деформаций [48].

Как показано анализ, наиболее простой моделью, позволяющей описать основные особенности явления, оказывается модель, основанная на соединении в определенной последовательности двух упругих элементов разной жесткости, одного жесткого элемента и одного неупругого элемента. Эта модель приводит к уравнению

$$n \delta d + E_0 \delta = n \delta + \sigma - \left(1 - \frac{E_0}{E}\right) \sigma_r, \quad (1.5)$$

где $d = \frac{d\varepsilon}{dt}$; $\sigma = \frac{d\sigma}{dt}$; $n = \varepsilon$, E_0 и σ_r — константы; n — принято считать временем релаксации.

Если считать, что здесь σ_r — предел текучести материала и при $\sigma < \sigma_r$ материал работает упруго, то E в (1.5) — модуль упругости при растяжении. При бесконечно малом деформации $\delta = \sigma - \sigma_r$ и из (1.5)

$$\sigma = \sigma_r + E_0 \left(1 - \frac{\sigma_r}{E}\right). \quad (1.6)$$

Это уравнение отвечает всем указанным диаграммам упруго-пластического материала с линейным упрочнением (см. рис. 2, б), в $E_0 = E \sigma_r$ — модуль упрочнения; σ_r — угол наклона диаграммы в зоне упрочнения и ось ε .

Сказанное позволяет дать уравнению (1.5) физическое истолкование применительно к рассмотренному явлению. Будем считать σ_r , E и E_0 параметрами диаграммы растяжения при бесконечно малом деформации (рис. 3). Теперь пусть в результате нагружения с момента t (и постоянной величиной) напряжение в деформированном состоянии остается в данной точке времени деформирования точки A . Если в рассматриваемый момент времени $\sigma = \text{const}$, реализуется процесс ползучести. На рис. 5 на изображении линий AB , процесс ползучести, и пластические деформации, которые могут развиваться в результате ползучести, отмечены общими линиями δ . Аналогично при $\varepsilon = \text{const}$ реализуется процесс релаксации напряжения, отмеченный линией AC на рисунке; он — упругий, и в начале точки C — напряжение σ , которое может быть при этом достигнуто. При повторном нагружении, когда возникла нагрузка постоянная ($P = \text{const}$), реализуется промежуточный случай, в котором и σ и ε переменны (например, линия AD на рисунке).

Математический анализ рассмотренных взаимодействий позволяет получить наиболее универсальное математическое соотношение (1.5) в результате анализа единичных образцов малоуглеродистой стали не получать, реализацию в повторный изгиб (при $P = \text{const}$) при $E_0 = 600-2000 \text{ МПа}$ и $n = 2,3-4,5 \text{ 1/с}$. Выяснено, что эти значения E_0 типичны для модуля упрочнения, полученного при криволинейной аппроксимации исходной диаграммы растяжения малоуглеродистой стали.

Предложенная физическая трактовка (1.5) позволяет дать ей осмысленность, т.е. использовать при любой форме диаграммы растяжения, включая $E_0 = E_0(\varepsilon)$. Можно также, прибегая к криволиней-

ной аппроксимацией диаграммы с произвольным числом участков, прямо использованной (1.5), считая E_p — const в пределах участка, но разным на разных участках.

1.3. Деформация. Следовательно, конечно, далеко не исчерпывающей особенностью поведения стали в пластической области. В дополнении следует учесть не только роль времени действия нагрузки и соответствующую скорость деформации. Деформационный характер нагрузки может оказать заметное влияние на механические характеристики материалов [132], а при малой пластичности действия нагрузки пластическими деформациями могут не только разниться.

На диаграмме растяжения при переходе на другую зону в пластическую может иметь место крут, характеризующийся наклоном к началу пределом текучести, отношение значений которых достигает 1,25 [49]. Наличие заметных особенностей, таким образом в зоне упругости, имеет зависимость $\sigma - \epsilon$ при сжатии [82]. Целый ряд существенных эффектов наблюдается при переменной нагрузке [25], при повышенной температуре [113], заметная разнородность включения и др. [82, 102, 103].

Следует еще одна важная особенность. Информация о механических свойствах материала, которую инженер имеет при выполнении расчета, не полная, ограничена заданными механическими характеристиками, указанными в ГОСТе для данной марки материала. Известно, что ГОСТ регламентирует минимальные значения этих характеристик; реально же их значения могут быть существенно большими. Например, у стали марки 40 по ГОСТу $\sigma_{0.2} = 340$ МПа, в действительности это значение может достигать 380–400 МПа, но средние значения 300–320 МПа. Столь же большой разнородностью обладают и другие механические характеристики стали, а также такие параметры диаграмм растяжения, как длина площадки текучести, угол наклона диаграммы в зоне упругости и т.р. Поэтому в принципе достоверное описание зависимости $\sigma - \epsilon$ для реальной конструкции возможно только статистическими методами. Известно также, что сталь после обработки приобретает существенную анизотропию механических свойств: а именно образом листового материала, направленных вдоль и поперек направления проката, выявляют заметную разницу в значениях механических характеристик и форме диаграмм растяжения.

Учет указанных факторов, естественно, весьма усложняет расчет конструкций в пластической области, здесь его практически невозможно для большинства практических задач. Это составляет при-

чину и упрощенным приближенными формами зависимости $\sigma - \epsilon$ (см. ниже), заведомо смираться с тем, что расчет в пластической области имеет сильно приближенный характер. Но даже такой расчет, как показывает опыт, в очень многих случаях дает гораздо более достоверные информации о действительных запасах прочности конструкции, чем расчет в упругой области.

Отныне можно только предельно выявить основные факторы, наиболее существенно влияющие на поведение конструкций в пластической области, и учесть их комплексно. Например, при их комплексном описании без сознательных обоснований входить в расчет уточненные зависимости $\sigma - \epsilon$, приближая ее к реальной диаграмме растяжения, и не учитывать случайный характер механических характеристик, время развития пластических деформаций и т.п.; все существенно усложнит расчет, но практически не повлияет точность результатов.

§ 2. Основы пластичности

2.1. Описание напряженного и деформированного состояния. Напряженное состояние материала в теле в общем случае можно охарактеризовать девятью компонентами напряжений, которые действуют на трех взаимно перпендикулярных площадках (рис.6): тремя нормальными напряжениями — $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и шестью касательными напряжениями — $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$.

(Первый индекс при τ — обозначение оси, вдоль которой направлено это напряжение; второй индекс — обозначение оси, нормальной к площадке, на которой действует данное напряжение.) Они связаны между собой дифференциальными уравнениями равновесия



Рис.6. Компоненты напряжений.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

(X , Y и Z - проекции удельной объемной силы соответственно на оси x , y и z) и законом непрерывности касательных напряжений

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (2.2)$$

Из независимости получаются исходя из условий равновесия бесконечно малого параллелепипеда в предположении сплошности и непрерывности материала и малости произвольных перемещений по сравнению с размерами этого параллелепипеда (геометрически линейная деформация).

Если рассмотреть малый параллелепипед, то значения компонент напряжений, действующих на его поверхности, будут отличаться. Можно найти такое положение этого параллелепипеда, что все касательные напряжения обратятся в нуль. Тогда его плоскости называются xy , yz и xz плоскостями, а нормальные напряжения, действующие на этих плоскостях, - главными напряжениями σ_1 , σ_2 , σ_3 (обычно принимают $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$). Три главных напряжения характеризуют напряженное состояние материала в точке, так же как девять напряжений в произвольном ориентированном декартовом поле. Если последнее, всегда можно найти главные напряжения σ_n ($n = 1, 2, 3$) как корни кубического уравнения

$$-\sigma^3 + J_1(T_0)\sigma^2 + J_2(T_0)\sigma + J_3(T_0) = 0; \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} J_1(T_0) &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ J_2(T_0) &= -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2; \\ J_3(T_0) &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + \\ &+ 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Коэффициенты кубического уравнения $J_1(T_0)$, $J_2(T_0)$

и $J_3(T_0)$ называются соответствующими инвариантами, которые являются скалярными функциями тензора напряжений и T_0 . Они не зависят от выбора координатных осей; их совокупность является полной характеристикой напряженного состояния материала в точке. Инварианты можно выразить в виде главных напряжений.

Деформированное состояние материала в точке характеризуется девятью компонентами деформации: ϵ_x , ϵ_y и ϵ_z - основными удельными соответствующими вдоль осей x , y и z ; $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ и $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ - основными сдвигами соответственно в плоскостях xy , yz и xz . Деформацию точки тела определяется тремя компонентами: u , v и w - проекциями перемещения этой точки соответственно на оси x , y и z . Компоненты деформаций и перемещений геометрически связаны между собой, что определяется уравнениями Коши

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Если во эти уравнения подставить u , v и w , получаются уравнения дифференциальности деформаций

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x \partial x} &= \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial z^2}; \\ 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right); \\ 2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right); \\ 2 \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Уравнения (2.5) описывают геометрические условия постановки задачи. Если первоначально нулевая нагрузка нулевая, а для деформации заданы значения

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}; \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Аналогично заданы напряжения от г л а в н ы х направлений σ_x , σ_y , σ_z . Для описания деформации - таким координатным вектам, вдоль которых нет сдвига.

Если в (2.4) и (2.5) - статическим и геометрическим уравнениям - присоединить рассматриваемые ниже физические уравнения, связывающие коэффициенты напряжений и деформаций, то вместе с граничными условиями получаются системы уравнений, позволяющие определять все возможные величины: напряжения, деформации и перемещения. В упругих материалах физические уравнения имеют следующий вид Г у н ы:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

(2.8)

где $E = \frac{E}{2(1+\mu)}$ - модуль упругости при сдвиге; μ - коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона).

2.2. Изменение объема. Коэффициент поперечной деформации. Деформации материала можно представить системными из двух частей: части, связанной только с изменением объема материала в результате его деформирования, и части, связанной только с изменением его формы. Изменение объема характеризуется так называемым **о б ъ е м н ы м д е ф о р м и р о в а н и е м**

$$\Theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}. \quad (2.9)$$

Если $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$; $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, происходит только изменение объема материала, форма остается без изменений. Реальность такого рода напряженное состояние практически можно найти при одностороннем сжатии. Экспериментальные исследования в сочетании с соображениями двумерности показывают, что даже при весьма высоких значениях напряжений σ_x изменение объема происходит почти исключительно упруго, пластические деформации происходят мало. (Так, при $\sigma_x = 10\ 000$ МПа экспериментально установлено изменение объема у железа не превышает 3% [29].) Поэтому в расчетах можно принимать, что пластические деформации удовлетворяют тем же самым законам, а изменение объема подчиняется закону Г у н ы

$$\Theta = 3 \frac{1-2\mu}{E} \sigma_\Theta, \quad (2.10)$$

где Θ - статистическое изменение объема.

Свойством упругости является обратимость в упругой области деформации. При обратном напряженном состоянии, когда $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\mu' = -(\varepsilon_y/\varepsilon_x) = -(\varepsilon_z/\varepsilon_x)$

(здесь μ имеет отрицательное значение, чтобы отличить его от μ - знака в упругой области). Поскольку статистическое изменение объема

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad (2.11)$$

то в данном случае $\varepsilon_y = \varepsilon_z$, то $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{1}{2}(\Theta - \varepsilon_x)$.

При расчетах пластических деформаций, когда сам материал находится в упругой деформации, $\varepsilon_x \gg \Theta$, то $\Theta \approx 0$ (2.10) можно имеет порядок упругих деформаций. Тогда $\varepsilon_y =$

$-\varepsilon_x \approx -\frac{1}{2} \varepsilon_x$ и $\mu' \approx 0.5$. Для стали в упругой области, как известно, $\mu \approx 0.3$. Следовательно, в рассматриваемой области

тот пластический деформаций коэффициент поперечной деформации μ' равен от 0,5 до 0,5.

Если в расчете любая превращает величину упругих деформаций (рассматриваются только пластическая деформация), то соответственно применяется $\mu' = 0,5$ и $\theta = 0$.

2.3. Условие пластичности. При сплошном напряженном состоянии переход материала из упругого состояния в пластическое происходит, когда максимальное нормальное напряжение составляет предела упругости. В практических расчетах для этой цели принимается обычно предел текучести, превращая разницу между последним и пределом упругости. При сплошном напряженном состоянии условия перехода в пластическое состояние не столь сложны, так как деформируется в форме так называемых *условий пластичности*.

В настоящее время для пластических материалов в большинстве случаев используют два условия пластичности Треска (Сен-Венан - Треска), либо условия пластичности Мизеса (Губер - Мизеса). Первое предполагает, что пластическая деформация начинается, когда максимальное касательное напряжение достигнет предела текучести при чистом сдвиге. Это приводит к следующим соотношениям:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_T, |\sigma_2 - \sigma_3| = \sigma_T, |\sigma_3 - \sigma_1| = \sigma_T. \quad (2.42)$$

Условие пластичности Мизеса записывается так

$$\sigma_1 - \sigma_T = 0, \quad (2.43)$$

где σ_i - интенсивность напряжений - величина, пропорциональная квадратному корню из суммы из квадратов, разнесенных на главные напряжения (считаемые пластическим напряжением); σ_T - пропорциональное удельной пластической энергии, максимальной упругой деформации, известной из формулы (2.42),

$$\sigma_i = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \quad (2.44)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}.$$

Для плоской задачи ($\sigma_3 = 0$) условие пластичности Треска:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \sigma_1 > \sigma_2 > 0 \quad \sigma_1 - \sigma_2 &= \sigma_T; \\ \text{при } \sigma_1 > 0; \sigma_2 < 0 \quad \sigma_1 - \sigma_2 &= \sigma_T; \\ \text{при } \sigma_1 < 0; \sigma_2 < 0 \quad \sigma_1 - \sigma_2 &= -\sigma_T; \\ \text{при } \sigma_2 > \sigma_1 > 0 \quad \sigma_2 - \sigma_1 &= \sigma_T; \\ \text{при } \sigma_2 > 0; \sigma_1 < 0 \quad \sigma_2 - \sigma_1 &= \sigma_T; \\ \text{при } \sigma_2 < 0; \sigma_1 < 0 \quad \sigma_2 - \sigma_1 &= -\sigma_T; \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

условие пластичности Мизеса

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 - \sigma_T}. \quad (2.46)$$

Графически условия пластичности Треска и Мизеса для плоской задачи показаны на рис.7. Наибольшее расхождение между ними имеет место при чистом сдвиге и составляет 13,5%.

Условие пластичности является объектом многократных экспериментальных исследований. Вспарываемые данные обычно указываются между расчетными значениями по рассмотренным условиям пластичности, в одних случаях несколько лучше согласуются с условием пластичности Треска, в других - с условием пластичности Мизеса [82]. Поэтому на основе одних условий пластичности можно считать практически разословленным, и выбор одного из них обычно делается лишь сбалансированным удобством расчета задачи. Более подробно о рассмотренных вопросах можно ознакомиться в [49, 55, 55, 82].



Рис.7. Условия пластичности Треска (1) и Мизеса (2) для плоской задачи.

§ 3. Пластические деформации при обобщенном напряженном состоянии

3.1. Прямые и обратные задачи в построении физических уравнений теории пластичности. В теории пластичности в настоящее время используются различные варианты физических уравнений, описывающих связь между напряжениями и деформациями. Они отличаются друг от друга исходными допущениями, степенью сложности, соответствием экспериментальным данным. На параметры этих уравнений можно выделить две большие группы, известные под названием теории деформаций (деформационной теории) в теории течений.

Для теории деформаций характерна зависимость между напряжениями и деформациями. При нагружении (или разгрузке) напряженного состояния можно записать

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (3.1)$$

где E — постоянная, зависящая от материала.

Это — обобщенное законом Гука на случай нелинейной зависимости между σ и ε . При $E' = E$ закон (3.1) обрывается в закон Гука.

Для теории течений характерна зависимость между составляющими напряжений, определяющими мгновенные формы тела, и приращением пластических деформаций. Пространство напряжений задается как

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p, \quad (3.2)$$

где $d\varepsilon^e$ — упругие составляющие $d\varepsilon$, а $d\varepsilon^p$ — ее пластические составляющие.

Первая определяется законом Гука $d\varepsilon^e = \frac{d\sigma}{E}$, вторая — соотношением типа

$$d\varepsilon^p = dA(\sigma - \sigma_0), \quad (3.3)$$

где dA — параметр, зависящий от $d\varepsilon^p$, а $\sigma - \sigma_0$ — составляющая напряжений, определяющая мгновенные формы тела.

(Для одноосного напряженного состояния среднее напряжение $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma$.)

Можно представить (3.3) в несколько иной форме:

$$\frac{d\varepsilon^p}{d\varepsilon} = \lambda'(\sigma - \sigma_0), \quad \text{где } \lambda' = \frac{dA}{d\varepsilon}. \quad \text{Если } t - \text{но-}$$

вый параметр, от которого зависят пластические деформации ε^p , то мы можем рассмотреть отношение $\frac{d\varepsilon^p}{d\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^p$

как производную $\dot{\varepsilon}^p$ по $\dot{\varepsilon}$. Тогда

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda'(\sigma - \sigma_0). \quad (3.4)$$

Это наиболее распространенная форма связи σ и ε в теории течений. Величину $\dot{\varepsilon}^p$ называют скоростью пластических деформаций. Нужно, однако, помнить возможность того изложения, что $\dot{\varepsilon}$ не является параметром в его обычном физическом понимании (в теории пластичности время развития деформации не рассматривается, см. § 1). Выбор $\dot{\varepsilon}$ произволен и обусловлен лишь удобством решения задачи. Важно только, чтобы

$$\dot{\varepsilon} \sim \dot{\varepsilon}^p(x).$$

3.2. Теория деформаций. Для одноосного напряженного состояния составляющие напряжений, определяющие мгновенные формы тела, можно представить как

$$\sigma_x - \sigma_0; \sigma_y - \sigma_0; \sigma_z - \sigma_0; \tau_{xy}; \tau_{yz}; \tau_{zx}. \quad (3.5)$$

Из них можно составить девятую матрицу напряжений $\mathbf{E}$.

Аналогично для деформаций: составим девятую матрицу деформаций $\mathbf{E}$

$$\varepsilon_x - \varepsilon_0; \varepsilon_y - \varepsilon_0; \varepsilon_z - \varepsilon_0; \frac{1}{2}\gamma_{xy}; \frac{1}{2}\gamma_{yz}; \frac{1}{2}\gamma_{zx}, \quad (3.6)$$

где среднее удлинение

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}. \quad (3.7)$$

Физические уравнения, связывающие компоненты напряжений и деформаций, можно получить на основе следующих гипотез:

- 1) мгновенное состояние описано законом Гука;
- 2) компоненты девятимера деформаций прямо пропорциональны компонентам девятимера напряжений.

Первое слагаемое (2.40) и (3.7) принимает вид

$$\varepsilon_x = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_x, \quad (3.8)$$

второе имеет

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_0}{\sigma_x - \sigma_0} &= \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_0}{\sigma_x - \sigma_0} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_0}{\sigma_x - \sigma_0} = \frac{\gamma_{xy}}{2\varepsilon_{xy}} = \\ &= \frac{\gamma_{xy}}{2\varepsilon_{xy}} = \frac{\gamma_{xy}}{2\varepsilon_{xy}} = \Psi, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где Ψ — безразмерный коэффициент пропорциональности, зависящий от величины деформаций.

Тогда

$$\varepsilon_x - \varepsilon_0 = \Psi(\sigma_x - \sigma_0); \quad \gamma_{xy} = 2\Psi\varepsilon_{xy}; \quad (3.10)$$

При $\Psi = \frac{1}{2G}$ — согласно уравнениям (3.8) и (3.10) имеет место закон Гука по (2.8). Здесь G — модуль упругости при сдвиге. Если предположить $\Psi = \frac{1}{2G} + \Upsilon$,

где Υ зависит от величин деформаций, то, подставляя это в (3.10) и преобразуя их с учетом (3.8), можно выписать уравнения в пластическую составляющую деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right] + \Upsilon(\sigma_x - \sigma_0); \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} + 2\Upsilon\varepsilon_{xy}; \end{aligned} \quad (3.11)$$

Первое слагаемое в правой части этих уравнений — обобщенный закон Гука, описывающий упругие составляющие деформаций; второе слагаемое — пластическая составляющая деформаций. Эти урав-

нения являются уравнениями Гельмгольца.

В уравнениях (3.10) остается неизвестной величина Ψ . Чтобы ее определить, нужно сформулировать дополнительные условия, зависящие от конкретной упругости. Наиболее распространенной гипотезой упругости в теории деформаций является гипотеза "однородной упругости": независимость упругости от деформаций σ_i — функции напряженности деформаций ε_i , но зависимость от вида напряженного состояния σ_i . Тогда σ_i определяется по (2.14); а

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= \frac{\sigma}{3} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{3}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}; \\ \text{или} \\ \sigma_i &= \frac{\sigma}{3} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Поскольку функции $\sigma_i = \sigma_i(x_i)$ не зависят от вида напряженного состояния, для данного материала со всеми определенными экспериментально, достаточно любой вид нагружения, например, одноосное растяжение. Для одноосного $\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$;

$\varepsilon_1 = \varepsilon$; $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Подставляя это в уравнения σ_i по (3.14) и ε_i по (3.12), найдем $\sigma_1 = \sigma$; $\varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_2$. С учетом (3.8) и $\sigma_2 = \sigma/3$ $\varepsilon_2 = \varepsilon - \frac{1-2\nu}{3E} \sigma$.

Таким образом, зависимость $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ можно получить путем одноосного растяжения образца деформацией ε при растяжении.

Подставим в ε_i по (3.12) значения напряженности деформаций по уравнениям (3.10). В результате при учете (2.14) получим $\sigma_i = \frac{\sigma}{3} - \Psi \varepsilon_i$. Выразив вместо Ψ в подставив его в (3.10), найдем

$$\sigma_x - \sigma_0 = \frac{2\sigma_1}{3\varepsilon_1} (\varepsilon_x - \varepsilon_0); \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_1}{3\varepsilon_1} \gamma_{xy}; \quad (3.13)$$

В такой форме уравнения были предложены А.А.Кавчиным [54] и получили широкое применение при решении равнообразных задач, особенно в нашей стране.

Приведенные уравнения можно использовать только для случая нагружения (активной деформации). Приведено подобное условие, что в процессе деформирования интенсивность напряжений σ_i не уменьшается, т.е. $d\sigma_i > 0$. Если $d\sigma_i < 0$, имеет место разгрузка (пассивная деформация), которая происходит упруго (см. § 2). В этом случае связь между приведенными напряжениями и деформацией описывается законом Гука.

3.3. Теория течения. Уравнения теории течения можно построить, используя систему уравнений, аналогичную приведенной выше при рассмотрении теории деформаций. Для этой цели нужно ввести в рассмотрение скорости пластических деформаций:

$$\dot{\epsilon}_i^p = \frac{d\epsilon_i^p}{dt}; \dots; \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{xy}^p = \frac{1}{2} \frac{d\epsilon_{xy}^p}{dt}; \dots \quad (3.44)$$

Это — компоненты тензора скоростей пластических деформаций. Напомним, что время t здесь условно и является любым параметром, от которого зависит величина деформаций.

Выводные гипотезы могут быть сформулированы следующим образом:

- 1) изменение объема подчинено закону Гука;
- 2) компоненты тензора скорости пластических деформаций пропорциональны компонентам тензора напряжений.

Первое приводит к (3.8), второе к

$$\frac{\dot{\epsilon}_i^p}{\sigma_i - \sigma_0} = \dots = \frac{1}{2} \frac{\dot{\epsilon}_{xy}^p}{\tau_{xy}} = \dots = \lambda^p, \quad (3.45)$$

откуда

$$\dot{\epsilon}_i^p = \lambda^p (\sigma_i - \sigma_0); \quad \dot{\epsilon}_{xy}^p = 2\lambda^p \tau_{xy}; \quad (3.46)$$

Это уравнения А.Рейса. Их следует дополнить кинематическими условиями упругих деформаций по закону Гука (2.8).

Для определения коэффициента пропорциональности λ^p в уравнениях (3.46) нужно иметь соответствующую систему уравнений. Она может быть сформулирована аналогично системе одной кривой: интенсивность напряжений σ_i является функцией интенсивности скорости пластических деформаций $\dot{\epsilon}_i^p$, не выходящей от некое напряженного состояния (гипотеза Ф.Друкера). Здесь

$$\dot{\epsilon}_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)^2 + (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3)^2 + (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3)^2}. \quad (3.47)$$

Связывать вид зависимости σ_i от $\int \dot{\epsilon}_i^p dt$ можно, как и в теории деформаций, пользуясь диаграммой растяжения. Для одноосного напряженного состояния $\dot{\epsilon}_1^p = \dot{\epsilon}^p$; $\dot{\epsilon}_2^p = \dot{\epsilon}_3^p = -\frac{1}{2} \dot{\epsilon}^p$. (Последнее вытекает из условия, что

пластические деформации не изменяют объема.) Тогда по (3.47) $\dot{\epsilon}_1^p = \dot{\epsilon}^p$ и соответственно, поскольку для рассмотренного случая направления деформаций в процессе нагружения не меняются, $\int \dot{\epsilon}_1^p dt = \epsilon^p$. Такие случаи, зависимость σ_i от $\int \dot{\epsilon}_i^p dt$ для одноосного растяжения совпадает с зависимостью $\sigma - \epsilon^p$ и может быть изображена на диаграмме растяжения путем несложного пересчета ее абсцисс (вместо упругой составляющей удлинения).

На основании сказанного в начале параграфа все законченное в данной мере справедливо, если оперировать не скоростями пластических деформаций, а приведенными эти деформации. Приведенная приведенная деформация может служить условием $\dot{\epsilon}_i^p > 0$.

3.4. Ассоциированный закон течения. Рассмотрим теперь формулировку функциональных уравнений в теории течения — так называемый ассоциированный закон течения, полученный в последние годы весьма широкое распространение. Для этого введем понятие пластического потенциала — некоторой функции компонентов напряжений $\varphi = \varphi(\sigma_1, \dots, \tau_{xy}, \dots)$, частные производные от которой

из этих компонент пропорциональным соответствующим компонентам скорости пластических деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_x^p = \lambda' \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_x}; \dots; \dot{\varepsilon}_{xy}^p = \lambda' \frac{\partial \sigma}{\partial \tau_{xy}}; \dots \quad (3.18)$$

Эти соотношения имеют простой геометрический смысл. Если рассмотреть $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}$ как декартовы координаты многомерного пространства (пространства напряжений), то уравнение $\sigma = 0$ изображает в нем некоторую поверхность. Компоненты скорости пластических деформаций $\dot{\varepsilon}_x^p, \dots, \dot{\varepsilon}_{xy}^p, \dots$ можно рассмотреть как составляющие вектора $\dot{\varepsilon}^p$ в том же пространстве. Тогда уравнения (3.18) означают, что вектор $\dot{\varepsilon}^p$

направлен по нормали к поверхности $\sigma = 0$ в точке, соответствующей текущему напряженному состоянию. Можно показать, что для изотропного материала свойства пластического потенциала обладают условием пластичности $\sigma = 0$ [49, 55, 82, 456] и вместо (3.18) написать

$$\dot{\varepsilon}_x^p = \lambda' \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_x}; \dots; \dot{\varepsilon}_{xy}^p = \lambda' \frac{\partial \sigma}{\partial \tau_{xy}}; \dots \quad (3.19)$$

Для уравнения известной под названием «основного закона вязкого течения» [49]. Условие пластичности $\sigma = 0$ описывает минимальную замкнутую поверхность — поверхность текучести (рис. 8)⁴, а вектор $\dot{\varepsilon}^p$ при деформации направлен по нормали к этой поверхности [49, 82].

Посмотрим, как ассоциированный закон течения согласуется с полученными выше уравнениями. В случае зависимости $\sigma = 0$ применим условие пластичности Навье (2.13), приравняв к нулю его левую часть: $\sigma - \sigma^p = 0$. Если это подставить в уравнения (3.13), получим уравнения, совпадающие с уравнениями

⁴ Вдоль и выше на рисунках для наглядности мы ограничиваемся изображением для плоского напряженного состояния в главных напряжениях.



Рис. 8. Кривая текучести и вектор скорости пластической деформации.



Рис. 9. Направление вектора скорости пластической деформации в упругой точке.

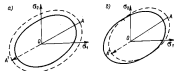


Рис. 10. Поверхности нагружения при изотропии (а) и анизотропии (б) упругости.



Рис. 11. Просток (1) и анизотроп (2) при нагружении.

Рейса (3.16) с точностью до постоянного множителя. Если принять в качестве $f = 0$ условие пластичности Треска, нетрудно убедиться в том, что ассоциированный закон (3.18) не совпадает с уравнением Рейса. Это тем не менее не дает основной отговорки ассоциированному закону в сочетании с условием пластичности Треска. В такой форме он выходит широко применимо для реальных вязких разнотвердых тел.

3.5. Обобщение ассоциированного закона течения. Применению ассоциированного закона течения выдвигают целый ряд специальных вопросов. В отрыве от условия пластичности Навье условие пластичности Треска - критерий-линейный; отнесением к нулю поверхности течения имеет место (в плоской задаче точки), где производные от f претерпевают разрывы. Вслед за этим в вязкости течения не имеет единственного направления. Для таких точек предполагается, что вектор скорости пластических деформаций может быть направлен произвольно в пределах сектора, образуемого нормалью к поверхности течения, лежащими в этой точке. На рис. 9 рассмотрены точки обозначены буквой A ; $r_1 = 0$ и $r_2 = 0$ - уровни поверхностей, содержащих в этой точке. Сплошными стрелками обозначены векторы в точке A , направленные по нормали соответственно к $r_1 = 0$ и $r_2 = 0$; пунктирные стрелки - возможные направления вектора $\dot{\epsilon}$.

Тогда ассоциированный закон можно записать как линейную комбинацию законов для поверхностей, лежащих в точке A :

$$\dot{\epsilon}_i^p = \lambda'_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_x} + \lambda'_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_x} + \dots \quad (3.20)$$

где λ'_1 и λ'_2 - произвольные неотрицательные коэффициенты пропорциональности.

До сих пор речь шла об идеальном пластическом материале. Ассоциированный закон течения успешно используется и для материалов, обладающих упрочнением. В этом случае возникает понятие поверхностей упрочнения. Поверхность нагружения и (или) поверхность течения представляет собой границу упругого состояния материала, находящегося в стадии упрочнения. С ростом напряжений для упрочняющегося материала поверхность течения выдвигается (деформируется, перемещается), превращаясь в поверхность упрочнения. Этот выдвигание может быть

принято разным образом, что дает большие возможности в описании поведения материалов в зоне упрочнения. При том же упрочнении и росте напряжения упрочнения и поверхность нагружения получается как результат разнотвердого расширения поверхности течения (рис. 10, а). Приведенные выше гипотезы упрочнения приводят к неустойчивому упрочнению. Эффект Баумингера здесь учесть нельзя (отрывки OA и OA' равны). При том же упрочнении трансляционным упрочнением поверхность нагружения совпадает с поверхностью течения, если последнее как геометрия не имеет никакого изгиба (рис. 10, б; поверхность течения - сплошная линия, поверхность нагружения - пунктирная линия). В этом варианте эффект Баумингера, по крайней мере качественно, можно описать (отрывки OA и OA' не равны). Известно также много вариантов расширения и перемещения поверхности течения и упрочнения [55].

Если выдвигать поверхность упрочнения, то применение ассоциированного закона не отличается от вышесказанного, только в уравнении (3.19) под $f = 0$, а в (3.20) под $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$ понимается соответственно не поверхность течения, а поверхность упрочнения.

3.6. Ассоциированный закон в теории деформаций. В форму ассоциированного закона могут быть получены функции упрочнения и в рамках теории деформаций. Допустим, что вектор пластической составляющей деформаций $\dot{\epsilon}^p$ (не во вектор скорости пластической деформации) направлен по данной нормали к поверхности течения (поверхности нагружения).

Тогда справедливо (3.13)

$$\dot{\epsilon}_i^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}; \dots; \dot{\epsilon}_{xy}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}}; \dots \quad (3.21)$$

Если в качестве $f = 0$ взять условие пластичности Навье по (2.13), то после дифференцирования по стрессу и упрочнению, отделившись от пластической составляющей уравнений Рейса по (3.11) на постоянный множитель. Если в качестве $f = 0$ взять условие пластичности Треска, не получим такой же несоответствия уравнению Рейса, как в теории течения для ассоциированного случая - уравнению Рейса. Уравнение (3.21) можно написать и с σ и ϵ -

приведенным законом деформирования.

3.2. Сопоставление теории деформаций и теории течения. Как видно из вышесказанного, уравнения, которые дает теория деформаций, прямо уравнений теории течения. Поэтому, естественно, в рамках теории деформаций удается получить решение большого числа прикладных задач. Однако хорошее соответствие результатов экспериментов этой теории дает в случае определенных случаев по сравнению с теорией течения. Теория деформаций всегда хорошо себя оправдывает при рассмотрении так называемого простого нагружения.

Простым называется нагружение, при котором во всех точках тела все компоненты тензора напряжений растут пропорционально одному параметру. (Если это условие не выполняется, нагружение называется сложным.) А.А.Ильинским показано, что для несжимаемого материала (при $\theta = 0$) в тех случаях, когда зависимость $\sigma_1 = \sigma_1(\epsilon_1)$ имеет вид степенной функции $\sigma_1 = A_1 \epsilon_1^n$, простое нагружение возможно, если все компоненты нагружения, действующее на тело, возрастает пропорционально одному параметру $[\epsilon_1]$. Это положение является теоремой о простом нагружении. Она является также и для некоторых других частных случаев зависимости $\sigma_1 = \sigma_1(\epsilon_1)$. Однако эту теорему нельзя считать справедливой для произвольной зависимости $\sigma_1 = \sigma_1(\epsilon_1)$.

Эксперименты показывают, что теория деформаций дает вполне удовлетворительные результаты также при рассмотрении нагружения, связанного с простотой, когда соответствующие компоненты тензора напряжений увеличиваются, но эти увеличения не связаны между собой рассматриваются как возмущения вокруг среднего положения, которое является простым нагружением (рис.12). При этих типах сложного нагружения результаты экспериментов обычно лучше согласуются с теорией течения. А.А.Ильинским показано, что при простом нагружении теория деформаций и теория течения приводят к одинаковым результатам [55].

Рассмотрим сложное, но состоящее изосотворенный закон течения и асоотворенный закон деформирования. Вначале ограничимся рассмотрением идеального пластического материала. При простом нагружении, когда компоненты тензора напряжений имеют пропорциональное одному параметру, в простейшем напряже-

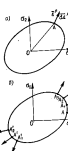


Рис.12. Простое (а) и сложное (б) нагружение.



Рис.13. Асоотворенный закон течения в условии пластичности Треска.

ний путь нагружения изображается прямой (рис.12,а). После того как материал в пластическое состояние достигнуте напряжения будут соответствовать точке А на поверхности текучести, которая является переменной по протеканию. По теории течения материал приращений (окрестностей) пластических деформаций $d\epsilon^p$ направлена по внешней нормали к поверхности текучести, и, следовательно, в процессе нагружения эта нормальная меняется не будет. Это дает право для выражения суммарной величины пластической составляющей деформаций $\bar{\epsilon}^p$ аппроксимировать ее приращением $d\epsilon^p$, т.е. $\bar{\epsilon}^p = \int d\epsilon^p$. При этом, естественно, направления векторов $d\bar{\epsilon}^p$ и $\bar{\epsilon}^p$ будут совпадать.

Отсюда следует, что вектор $\bar{\epsilon}^p$ также направлен по внешней нормали к поверхности текучести, что является основным допущением в асоотворенном законе деформирования. Вектор, выражающий по теории течения в теории деформаций будут одинаковыми.

При сложном нагружении, поскольку соответствующие компоненты тензора напряжений возрастают, в пластической области точка А

будет действителен на поверхности текучести и, следовательно, будет равен нулю. Направление вектора $\vec{d}\vec{x}^P$ (точки A_1, A_2, A_3 на рис.12,б). Тогда, если вычислить $\vec{T}^P$ по значениям $\vec{d}\vec{x}^P$, можно прибегнуть к геометрическому суммированию последних: алгебраическое суммирование даст нулевые результаты. При этом, естественно, направления векторов $\vec{d}\vec{x}^P$ и их суммы $\vec{T}^P$ совпадают не будут, и если $\vec{d}\vec{x}^P$ направлен по внешней нормали к поверхности текучести, то $\vec{T}^P$ будет иметь иное направление.

Таким образом, соответствие между предположениями теории деформаций и теорией напряжений не получается, следовательно, не совпадают и результаты. Если нагружение связано с простую, это означает, что в пластическом состоянии точки A^i (рис.12,б) на поверхности текучести будут расположены вокруг своего среднего положения (точки A_1^i и A_2^i). Соответственно будет измениться и направление векторов $\vec{d}\vec{x}^P$. Если отклонения от среднего положения не слишком велики и приняты одинаковы в обе стороны, то направления суммарного вектора $\vec{T}^P$ будет близким к направлению в точке A . Если в направлении близости результатов теории деформаций и теории течений.

Если поверхность текучести кусочно-линейна, как в условии пластичности Треска, а при данном нагружении точка A находится в пределах одного линейного участка поверхности (рис.13), то направления вектора $\vec{d}\vec{x}^P$ остаются неизменными. Соответственно, здесь допустимо алгебраическое суммирование $\vec{d}\vec{x}^P$, направления векторов $\vec{d}\vec{x}^P$ и $\vec{T}^P$ совпадают, и значит, в этом случае теория деформаций и теория течений должны давать одинаковые результаты. Аналогичное рассуждение применимо и при рассмотрении упругопластичного материала.

3.8. Обобщенные напряжения и деформации. Ассоциированный закон может быть записан в обобщенных напряжениях и деформациях. Под обобщенными деформациями понимается любая совокупность независимых величин q_k ($k = 1, 2, \dots$), которая полностью определяет деформации в рассматриваемом объеме, под обобщенными напряжениями $\hat{q}_k$ - такие величины, из которых можно получить направления соответствующих обобщенных деформаций, чтобы получить направление работы внутренних сил W_0 (за счет возникающих при этом внутренних диссипативных деформаций):

$$\delta W_0 = \sum_k \hat{q}_k \delta q_k. \quad (3.21)$$

Если упростить δq_k к нулю и подставить нулю и нулю части на dt , получим

$$\dot{W}_0 = \sum_k \hat{q}_k \dot{q}_k; \quad \dot{q}_k = \frac{d q_k}{dt}; \quad \dot{W}_0 = \frac{d W_0}{dt}, \quad (3.21)$$

где $\dot{q}_k$ - обобщенная скорость деформаций.

Если представляется возможность разделить q_k на упругую и пластическую составляющие $q_k = q_k^e + q_k^p$, то ассоциированный закон течений по (3.19) можно представить как

$$\dot{q}_k^p = \lambda^i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_k} \right); \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.24)$$

где $\Phi = 0$ - условие пластичности, выраженное через обобщенные напряжения. Соответственно ассоциированный закон деформирования по (3.21)

$$\dot{q}_k^e = \dot{q}_k - \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} \lambda; \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.25)$$

Эти представления, как будет показано ниже, во многих случаях позволяют существенно упростить решение задачи. Какое отношение с рассмотренным вопросом можно найти в [49, 55, 57, 103, 116]; см. также обзор [34, 40, 59, 90] и др.

§ 4. Теория предельного равновесия

4.1. Постановка и задачи теории предельного равновесия. При расчете конструкций в пластической стадии наряду с задачей определения напряжений, деформаций и перемещений, возникающих в конструкции от действия заданных внешних сил, может быть также поставлена задача определения той максимальной предельной нагрузки на конструкцию. Методы решения этой задачи рассматриваются в теории предельного равновесия. Помимо основных ее основанных на простейших примерах.

Рассмотрим растяжение прямоугольного стержня, сделанного из материала идеальным упругопластическим (упругая характеристика см. рис. 2,4). С ростом растягивающей силы P стержень деформируется упруго, пока нормальные напряжения σ , возникающие в его поперечных сечениях, не достигнут предела текучести σ_T . При $\sigma = \sigma_T$, что соответствует значению силы $P = P_0 = \sigma_T F$

(F - площадь поперечного сечения стержня), стержень начинает деформироваться пластически. Его удлинения будут расти без увеличения нагрузки (постоянства текучести) и ничем не ограничены, поскольку мы предполагаем, что материал не обладает упрочнением. Дальнейший рост внешней нагрузки невозможен: P_0 - та максимальная (предельная) нагрузка, которую может выдержать стержень.

Обратим внимание на то, что для определения предельной нагрузки P_0 совершенно несущественными особенностями деформирования стержня при нагрузках, меньших P_0 . Этот эффект - следствие предположения идеального жесткого стержня, вызванного его деформацией при $P < P_0$; в данном примере не учитывалось изменение площади поперечного сечения стержня в процессе нагружения.

При такой постановке очевидно, что результат не изменится, если считать материал стержня идеальным жесткопластическим (см. рис. 2,4), т.е. показать, что при $P < P_0$ деформаций стержня не происходит.

Таким образом, можно сказать, что в сущности единственным его результатом является определение предельной нагрузки. Под предельной нагрузкой понимается такое характерное значение внешней нагрузки, при котором после этого развивающихся пластических деформаций перемещения становятся теоретически неограниченными.

Задача решения при следующих предположениях:

- материал конструкций не обладает упрочнением, можно считать его идеальным жесткопластическим;
- всевозможные геометрические конструкции в результате деформаций считаются жесткие, задачи решения в геометрически неизменной постановке.

Добавим, что в теории предельного равновесия не рассматриваются задачи устойчивости. Поэтому при определении предельных нагрузок предполагается, что конструкция в ее элементах устойчива во время. Также существенно, что для определения предельной нагрузки нет необходимости анализировать деформации конструкции при $P < P_0$; достаточно рассмотреть ее равновесие в предельном состоянии, т.е. в конструкции появились неограниченные перемещения. Это характерно для методов теории предельного равновесия, а во многих случаях весьма значительное упрощение получается результатами, практической применимости которых, однако, ограничена рамками указанных предположений (справедливость этих предположений доказано на многих примерах).

Сформулированное допущение позволяет идти более строго к определению предельной нагрузки: считать ее таким значением внешней нагрузки, при котором в конструкции из идеального жесткопластического материала возникает перемещение, отличное от нуля. Поскольку на задачу решения в геометрически неизменной постановке, увеличение перемещения сводится к неограниченности и формально могут принимать любые значения. Чтобы разрабо-

нить эту неопределенность, найти перемещения и оценить возможные конструкции после достижения предельной нагрузки, нужно отталкиваться от допущения о малой деформации геометрии конструкции и расчете деформаций и роста нагрузки в геометрии заданной конструкции. Тогда выкажется (см. гл. 3), что в одних случаях предельная нагрузка, как в простом или сложном, является максимальной нагрузкой, которую может выдержать конструкция из идеального упругопластического материала, в других - лишь оценочная нагрузка, при котором в такой конструкции возникнет прогиб; для роста прогиба, однако, требуется дальнейшее увеличение нагрузки.

Сказанное уже свидетельствует о том, что достижение предельной нагрузки нельзя априори рассматривать как истинное состояние способности конструкции. При оценке последней нельзя не считаться с возможной потерей устойчивости систем тонкостенных элементов конструкции (примеры учета этих эффектов при определении предельной нагрузки приведены в § 17), с связностью конструкции (см. гл. 24) и другими факторами. Может произойти и изменение упругих свойств материала (см. § 22). Поэтому максимальная предельная или предельная нагрузка в простом или сложном случае является оценкой способности реальной конструкции достигнуть предельного состояния. Здесь можно лишь сказать, что применительно к данному случаю достижение предельной нагрузки обычно означает появление в нем заметных остаточных прогибов, которые с малой деформацией рассматриваются как незначительны. Более подробно эти вопросы освещены в заключении и гл. 6.

4.2. Предельный момент сечения балки при чистом изгибе.

Рассмотрим процесс развития пластических деформаций в сечении балки из идеального упругопластического материала при чистом изгибе. В упругой стадии распределение нормальных напряжений по высоте сечения линейно (рис. 14, а). С ростом изгибающего мо-



Рис. 14. Распределение напряжений по высоте сечения балки в упругой (а), упругопластической (б) стадиях и при предельном состоянии (в).



Рис. 15. Схема балки (а) и ее изгиба M (б).

мента M в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси, напряжения σ достигают предел текучести материала σ_y . Если считать идеальным закон, который при дальнейшем увеличении M расширяется в направлении к нейтральной оси (рис. 14, б). Когда пластические зоны сойдутся (рис. 14, в), по всей высоте сечения нормальные напряжения будут равны $\sigma = \pm \sigma_y$. Поскольку материал не обладает упрочнением, дальнейший рост σ и, следовательно, M невозможен. Это означает, что достигнута предельная способность сечения. Ему отвечает предельный момент сечения M - максимальный момент, который может воспринять сечение упругопластического материала, будучи полностью охваченным пластическими деформациями.

Для определения предельного момента M_0 воспользуемся законом равновесия элементов в изогнутой балке в сечении:

$$\int \sigma z dF = M, \\ \int \sigma dF = 0; \quad (4.1)$$

где F - площадь поперечного сечения балки.

Если совместить нулевой координат с нейтральной осью сечения и подставить в (4.1) $\sigma = \pm \sigma_T$, то

$$\sigma_T \int_{F_+} dF - \sigma_T \int_{F_-} dF = 0; \quad \sigma_T \int_{F_+} z dF - \sigma_T \int_{F_-} z dF = M_0, \quad (4.2)$$

где F_+ и F_- - соответственно растянутой и сжатой части площади сечения.

Из формул (4.2)

$$F_+ = F_- = \frac{1}{2} F; \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= \sigma_T W_0; \quad W_0 = S_+^* + S_-^*; \\ S_+^* &= \int_{F_+} |z| dF; \quad S_-^* = \int_{F_-} |z| dF, \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

где W_0 - предельный момент сопротивления сечения; S_+^* и S_-^* - статические моменты соответственно растянутой и сжатой частей сечения, вычисленные относительно нейтральной оси.

Таким образом, в предельном состоянии нейтральная ось делит площадь сечения пополам.

4.3. Прямая нагрузка балки. Рассмотрим прямоугольную однопролетную шарнирно-опертую балку, нагруженную сосредоточенной силой P в середине пролета, концы которой при изгибе могут беспрепятственно обогнуться (рис.15). С ростом P в средней части балки напряжения достигнут σ_T ; здесь возникнет пластическая зона. Увеличение изгибающих моментов M возможно лишь, пока наибольший изгибающий момент в балке M_{max} не достигнет величины предельного момента M_0 . Нагрузку P , при которой

$$M_{max} = M_0, \quad (4.5)$$

мы можем рассматривать как предельную нагрузку P_0 . Прямая нагрузка этой нагрузкой приводит к $M_{max} > M_0$, что для балки из сплошного упругопластичного материала невозможно. В данном примере $M_{max} = \frac{Pl}{4}$ (l - длина пролета балки). Подставив это в (4.5), найдем

$$P_0 = \frac{4M_0}{l}. \quad (4.6)$$

Рассмотрим особенности деформирования балки при $P = P_0$.

Сечение под силой, в котором достигнут предельный момент, полностью охвачено пластическими деформациями, и напряжения в нем уже не могут неограниченно возрастать, что приведет к образованию здесь силы оси балки². Форма срезов балки при этом приобретает такой вид, как если бы в рассматриваемом сечении произошел маркер (см. деформацию изогнутой оси балки изобразим на рис.15,а).

Эту аналогию широко используют в теории предельного равновесия: деформированное состояние сечения балки, в котором действует максимальный момент, равносильно предельному моменту M_0 , имеющемуся в пластическом маркере. После появления в балке пластического маркера ось превращается в две х-образных изогнутых статических моментах маркерный механизм (пластический механизм). Возможна прокладка в маркере трещины балки могут возрастать неограниченно, и это является ее предельным состоянием.

Рассмотрим другой пример: аналогично однопролетной балке с жесткими опорами по концы нагрузки равномерно распределенной нагрузкой изогнутой оси q (рис.16,а). Балка в изогнутой средней статически неопределима. Наибольший момент в опорном сечении $M_{оп} = -\frac{ql^2}{12}$, а наибольший изгибающий мо-

² Одна из вариантов строгого доказательства этого положения приведены в гл.6.

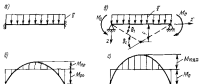


Рис.16. Схемы и эпюры M балки: а, б - в нагруженном состоянии; в, г - в предельном состоянии.

мент в пролете $M_{0p} = \frac{q l^2}{24}$. Поскольку $|M_{0p}| > |M_{0c}|$

первые пластические деформации возникнут в сечении надлежи: с ростом нагрузки будет достигнута $M_{0c} = M_0$ и, следовательно, возникнет статический шарнир. Это, однако, не означает наступления предельного состояния балки.

При дальнейшем росте нагрузки лишь прекратится рост изгибающих моментов в надлежи: в ней появится сдвиг оси балки. Балка превратится в шарнирно-свободную, независимо нагруженную на опорных моментах M_0 (рис.16,в); возникшие пластические шарниры в надлежи сдвигая рассматриваемую балку статически определенной, а дальнейший рост внешней нагрузки не вызовет появления в ней неограниченных перемещений. Поэтому последующее рассмотрение не отличается от рассмотренного ранее расчета статически определенной балки, нагруженной сосредоточенной силой. Превращая нагрузку ранее имеет место, когда максимальный момент в пролете $M_{max} = \frac{q l^2}{8} - M_0$ (рис.16,г) достигнет значения M_0 . Достигая $M_{max} = M_0$ (4.5) мыт

$$q_0 = \frac{16 M_0}{l^2} \quad (4.7)$$

В последнем примере отметим, что для определения q_0 потребовалось рассмотрение работы балки лишь на последний ста-

дии после образования статических шарниров в сечении надлежи. Благодаря этому при задании предела нагрузки отпала необходимость в рассмотрении статической неопределенности балки. Пластическая механика, основанная в предельном состоянии у рассматриваемой балки (на рис.16,в - пунктирные линии), приближается по своим результатам к статическому моменту статически определенной балки (см.рис.15,а); тот же изгибаемый механизм с тремя шарнирами. Разница лишь в том, что шарниры по краям балки на рис.15,а были конструктивными (шарнирные опоры), а в рассмотренном примере - статическими.

4.4. Статический метод определения предельной нагрузки.

Как уже неоднократно указывалось выше, для определения предельной нагрузки нет необходимости рассмотрения всей последовательности деформирования конструкции в процессе нагружения - достаточно рассмотреть ее равновесие в предельном состоянии. Однако на основании путей такого рассмотрения использован нами выше при определении предельной нагрузки шарнирных балок: использовались эпюры изгибающих моментов балки, рассматривался максимальный изгибающий момент в пролете M_{max} и приравнялся предельному моменту сечения M_0 , что давало уравнение для определения предельной нагрузки. Если по концам применительной балки есть надлежи, можно сделать вывод, что в надлежи появятся пластические шарниры. В этом случае при использовании эпюры изгибающих моментов вместо шарнира появляется шарнир и приравняется изгибающий момент, равный M_0 .

Таким образом, во всех случаях мы рассматривали эпюру моментов в сечениях, когда балка превратится в двухшарнирную статическую механику, что является для нас предельным состоянием. Равновесие балки обеспечивается при определении изгибающих моментов, в сечениях (4.5) на в одной из точек балки возникает перемещение не превышает $\delta \tau$, так как в этом сечении $M \leq M_0$. Следовательно, (4.5) играет роль условия пластичности в сечении уравнения для определения предельной нагрузки. Характерно, что использованное нами уравнение, в част-

ности независимости, характеризующие деформации и перемещения балки, не было необходимости.

Такой метод определения предельных нагрузок называется статическим методом; рассмотренные особенности расчета оказываются в любой задаче: достаточно использовать уравнения равновесия (в общем случае это дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия в напряжениях) и условия пластичности; деформации и перемещения в решении не фигурируют.

4.5. Кинематический метод определения предельной нагрузки.

Другой путь исследования равновесия конструкций в предельном состоянии — использование понятия виртуальных перемещений:

$$\delta(U - W) = 0, \quad (4.8)$$

где U — работы внешних сил; W — работы внутренних сил, т.е. суммы произведений работы внешних и внутренних сил системы, находящихся в равновесии, на возможных перемещениях равной числу. Как известно, (4.8) приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = \frac{\partial W}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.9)$$

где q_k — обобщенные перемещения.

Несложные допущения теории предельного равновесия позволяют ввести в (4.9) упрощения. На предположении, что материал — идеально жесткопластический, суммарные работы внутренних сил сводятся только к работе с пластическими деформациями материала. Поэтому она эквивалентна, превращаясь в тепло, которое выделяется в окружающем пространстве, и называется θ и θ —

е θ — рассеивание D . То же допущение и несимметричности линейных состояний также приводит к тому, что в предельном состоянии именно перемещения и деформации происходят при постоянных внешних и внутренних силах, а сами перемещения и деформации связаны между собой линейными соотношениями. Вследствие этого работы внешних и внутренних сил сводятся к линейным функциям перемещений, что позволяет в (4.8) отбросить эти члены.

Кинематический метод определения предельных нагрузок обычно основывается на использовании равенства в предельном состоянии работы внешних сил U и внутренних сил D (интерпретация)

$$U = D. \quad (4.10)$$

Для выполнения U и D должны быть известны формы перемещений.

Обратимся к рассмотренным выше примерам. У балки, нагруженной поперечной силой сосредоточенной силой P (см. рис. 15, а), в сечении под силой, где действует максимальный изгибающий момент, в предельном состоянии возникает пластический шарнир. Работу внешних сил можно вычислить как $U = P\delta$ (δ — прогиб в сечении под силой). Для определения суммарной рассеиваемой энергии необходимо учесть угол сдвига оси балки в пластическом шарнире θ : $D = M_0 \theta$.

Поскольку материал — идеально жесткопластический, а пластические деформации сосредоточены в сечении пластического шарнира, нагрузка ось балки будет представлять собой ломаную, состоящую из двух отрезков прямых. В силу этого, а также из соображений симметрии о масштабе прогиба до сравнения с размерами балки, позволившего заменить численный угол вычислениям его тангенса, $\theta = \frac{\delta}{l}$. Подставив это в выражение для D , а именно вместо θ в (4.10), получим уравнение

$$P\delta = M_0 \frac{\delta}{l},$$

в этом уравнении P дан заранее — нуль, поскольку здесь нагрузка фигурирует как прогиб.

Отсюда $R_0 = \frac{4M_0}{l}$, что совпадает с результатом, полученным выше статическим методом [формула (4.6)].

Рассмотрим балку с жесткими заделками по концам, нагруженную равномерной распределенной нагрузкой q (см. рис. 16, в). Работу можно так же определить как $U = 2 \int_0^{l/2} q \omega dx$.

Поскольку изогнутая ось балки, как и выше, симметрична относительно двух отрезков прямых, то при $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ $\omega = f \frac{x^2}{6}$.

Тогда, выполнив интегрирование, найдем $U = \frac{1}{2} q l f$. Зная реакцию $R = M_0 / (2\delta_1 + \delta_2)$.

Как видно из рис. 16, в,

$$\theta_1 = \frac{2f}{l}, \theta_2 = 2\theta_1 = \frac{4f}{l}.$$

Тогда $R = M_0 \frac{\delta_2}{l}$.

Подставляя U и R в (4.10), получим уравнение для определения q_0 :

$$\frac{1}{2} q_0 l f = M_0 \frac{\delta_2}{l}.$$

Отсюда $q_0 = \frac{4M_0}{l^2}$, что совпадает со значением q_0 , полученным выше статическим методом - формула (4.7).

Рассмотренные примеры содержат основные особенности кинематического метода, характерные для любой задачи: задается форма перемещений - кинематический механизм (в примерах - форма прогиба), определяется напряжение, отвечающее этому виду перемещений (в примерах эти напряжения характеризуются предельными моментами сечения), и вычисляется предельная нагрузка, используя начало возможных перемещений в форме (4.10).

Заметим, что использование начала возможных перемещений - не обязательная принадлежность кинематического метода. Достаточно лишь то, что здесь задается кинематический механизм и тем или иным методом исследуется его равновесие. Начало возможных перемещений - один из методов исследования равновесия. Другой метод - прямое использование уравнений статического равновесия -

показан ниже при рассмотрении предельных нагрузок перекрытий (гл. 4).

4.6. Экстремальная теория теории предельного равновесия. Возможности кинематического и кинематического методов определения предельной нагрузки значительно возрастает благодаря существованию экстремальной теории теории предельного равновесия.

Статическая экстремальная теория состоит в следующем: предельная нагрузка R_0^* , отвечающая данному статическому допустимому полю напряжений, всегда меньше действительной предельной нагрузки R_0 или равна R_0 :

$$R_0^* \leq R_0. \quad (4.11)$$

Под статическим допустимым понимается такое поле напряжений, которое удовлетворяет уравнениям равновесия и граничным условиям в напряжениях; при этом не в одной точке напряжения не превосходят тех, которые есть условия пластичности. Для определения предельной нагрузки здесь, естественно, используется статический метод.

Кинематическая экстремальная теория состоит в следующем: предельная нагрузка, отвечающая данному кинематически возможному полю перемещений (о скоростях перемещений) R_0^{**} , больше действительной предельной нагрузки R_0 или равна R_0 :

$$R_0^{**} \geq R_0. \quad (4.12)$$

Кинематически возможным называется такое поле перемещений (скоростей перемещений), которое удовлетворяет граничным условиям в перемещениях. (Для балки, как известно, это - условия ее опоры.) Для определения предельной нагрузки здесь используется кинематический метод. Объединяя (4.11) и (4.12), можно сказать

$$\rho_0^* \leq \rho_0 \leq \rho_0^{**}. \quad (4.13)$$

Эти неравенства открывают широкие возможности для приближенного решения задачи теории продольного равновесия. Приближенно заданное поле напряжений в конструкции, заданное его распределение по длине и соответствующим граничным условиям и определенная величина напряжений по условиям пластичности (или их ограничения в области $M_{\text{доп}}$), статическим методом находим ρ_0^* . Затем приближенно заданное поле перемещений, удовлетворяющее граничным условиям и перемещениям, кинематическим методом находим ρ_0^{**} .

На основании экстремальных теорем, и в частности (4.13), можно утверждать, что действительная продольная нагрузка будет лежать между ρ_0^* и ρ_0^{**} . Близость значений этих величин означает, что полученные решения достаточно близки к точному решению. Когда $\rho_0^* = \rho_0^{**}$, решение задачи в рамках допущений теории продольного равновесия является точным.

Если ρ_0^* и ρ_0^{**} существенно различны, есть возможность улучшить результат. Построив решение, поле напряжений можно задать с точностью по некоторому числу неопределенных параметров, значения которых, согласно (4.11), можно разложить в ряды по условиям минимума продольной нагрузки. Аналогично ведется поле перемещений, а неопределенные параметры согласно (4.12) определяются исходя из условия минимума продольной нагрузки.

В настоящей и последующих главах наглядно иллюстрируются численными примерами. С помощью теорем экстремальных теорем можно ознакомиться в [49, 55, 82, 216 и др.].

§ 5. Осицентричные балки

5.1. Вычисление продольных моментов осецентричных упругих телесных профилей. Воспользуемся результатами предыдущего параграфа для вычисления продольных моментов осецентричных профилей конкретной формы. У прямоугольного проф-

ля и очевидно имеет ось симметрии, которая и будет согласно (4.3) нейтральной осью. Тогда статические моменты обеих половин сечения одинаковы: $S_+^* = S_-^* = S^* = \frac{bh^2}{8}$ (b и h — ширина и высота сечения), а продольный момент сопротивления по (4.4)

$$W_0 = 2S^* = \frac{bh^2}{4}.$$

Для данного профиля с присоединенными полемками (рис.17) пропорционально обозначим: F^* — площадь профиля без присоединенного поля; F — полная площадь сечения (с присоединенным полем); S^* — статический момент площади профиля относительно присоединенного поля. Тогда для присоединенного поля будем считать малой по сравнению с высотой профиля h .

В начале рассмотрим случай, когда $F^* \gg F/2$. В нейтральной оси здесь расположен в центре профиля (на рис.17 ось совмещена с осью y), и ее отстояние от присоединенного поля $x_{\text{ос}}$ можно определять, разделив (4.3) на $F - 2\text{ос} \approx F/2$. Это дает

$$x_{\text{ос}} = \frac{1}{3} \left(F^* - \frac{F}{2} \right). \quad (5.1)$$



Рис.17. Сечение балки.



Рис.18. Сечение балки, — нейтральная ось.



Рис.19. Сечение балки.

Статистические моменты площади разбитой на осях частей профилей

$$S_{\Sigma}^2 = S^2 - F^2 z_{\Sigma} + \frac{1}{2} \sum x_i^2 z_i;$$

$$S_{\Sigma}^4 = (F - F^2) z_{\Sigma} + \frac{1}{2} \sum x_i^4 z_i.$$

Подставив это в (4.4) с учетом z_{Σ} по (5.1), получим

$$W = S^2 - \frac{1}{2} (2F^2 - F)^2. \quad (5.2)$$

В случае, если $F^2 \leq F/2$, нейтральная ось располагается в прикосновенной плоскости и $S_{\Sigma}^2 = S^2$, а $S_{\Sigma}^4 = 0$.

Тогда

$$W_0 = S^2. \quad (5.3)$$

Для основных данных профилей определяем W_0 удобным способом численно в табличной форме. Такой пример для несимметричного двутрапа с закругленной стенкой (рис.18) приведен в табл.1, который можно рассматривать как таблицу. Там обозначено: z_i - отстояние центра тяжести площади сечения i -го элемента профиля от оси сравнения y ; F_i - площадь сечения i -го элемента (ось сравнения расположена в нижней стенке). В графе 6 таблицы выписывают сумму частей графа 5 с нарастающим итогом, вычисленную по формуле, приведенной стрелочками. Каждая цифра здесь - сумма площадей элементов, стоящих в данной строке, в всех элементах, расположенных выше него. Данные графа 6 дают возможность выписать, пользуясь условием (4.8), в каком элементе профиля располагается нейтральная ось:

$$\frac{z_{k-1}}{2} F_k \leq \frac{F}{2} \leq \frac{z_k}{2} F_k, \quad (5.4)$$

где k - номер элемента, в котором расположена нейтральная ось.

В нашем примере $F/2 = 284 \text{ см}^2$. Из графа 6 видно, что неравенство (5.4) выполняется, если $k=4$:

$$\frac{z_{k-1}}{2} F_k = 268 \text{ см}^2 \quad \text{и} \quad \frac{z_k}{2} F_k = 288 \text{ см}^2. \quad \text{Таким}$$

образом, нейтральная ось расположена в нижней части стенки.

На рис.18 ее отстояло от оси сравнения обозначено через z_{Σ} .

Продолжим согласно (4.3) можно найти, составив уравнение

Т а б л и ц а 1. Вычисление продольного момента сопротивления сечению

Элемент			z_i , см	F_i , см ²	$z_i (S_i)$, см	$z_i (S_i) - z_{\Sigma} F_i$	$S_i^2 - (S_i - F_i)^2$
№ (рис.18)	Наименование	Размеры, мм					
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Верхняя полка	2000x10	100	200 → 200	95	19 000	
2	Верхняя часть стенки	500x8	75	40 → 240	70	2 800	
3	Подножка	100x8	50	8 → 248	45	360	
4	Нижняя часть стенки	500x8	25	40 → 288	20	800	
5	Нижняя полка	2000x4	0	280 → 568	5	1 400	
				568		24 860	

$z_k z_k + \frac{1}{2} F_k = \frac{F}{2}$ (z_k - толщина k -го элемента; z_k - часть высоты этого элемента, расположенная выше нейтральной оси). Отсюда

$$z_k = \frac{1}{F_k} \left(\frac{F}{2} - \frac{z_{k-1}}{2} F_k \right). \quad (5.5)$$

В нашем примере $z_k = \frac{1}{280} (284 - 248) = 45,0 \text{ см}$. Тогда по рис.18 $z_{\Sigma} = 50,0 - 45,0 = 5,0 \text{ см}$.

По найденному z_{Σ} продолжим вычисления в графе 7. Сумма частей в графе 8 дает нам искомый продольный момент сопротивления.

5.2. Определение продольной нагрузки однопролетными балками. Рассмотрим общую возможность определения предельной нагрузки однопролетных ароческопических балок (см. также примеры § 4).

Строго говоря, в соответствии с экстремальными теоремами, каждая задача должна решаться неким статическим и каноническим методом. Если результаты решений совпадают, это свидетельствует о том, что полученные решения в рамках теории предельного равновесия являются точными. (Возможны несколько иной путь: решить задачу каноническим методом, проверить, удовлетворяют ли полученные напряжения условиям пластичности и условиям равновесия; или, соответственно: найти из статического решения форму перемещений, проверить, будут ли равновесно работ внешние и внутренние силы и удовлетворятся ли граничные условия по перемещениям). Для однопролетных балок, однако, при известных формах нагрузки решения часто столь просты, что сомнений в их точности не возникает, и необходимость в этих проверках практически отпадает.

В статическом методе решение сводится к нахождению выражения изгибающих моментов. Для балки, шарнирно-опертой по концам (рис. 19), в предельном состоянии изгибающие моменты $M(x)$ определяются только величиной и формой поперечной нагрузки:

$$M(x) = M_q(x), \quad (5.6)$$

и можно исходя из условия $\frac{dM(x)}{dx} = 0$ [или в данном случае $\frac{dM_q(x)}{dx} = 0$] найти в соответствии с максимумом момента M_{max} , который здесь зависит только от формы нагрузки. Подставляя в (5.6) $x = c$, получим

$$M_{max} = M_q(c) = Pl \cdot \psi(\xi); \quad \xi = \frac{c}{l}, \quad (5.7)$$

где P — параметр, пропорционально которому изменяются значения зон соответствующих поперечной нагрузки; $\psi(\xi)$ — величина, зависящая от ξ и формы поперечной нагрузки.

Приравняв $M_{max} = M_0$ согласно (4.5), найдем предельную нагрузку

$$P_0 = \alpha \frac{M_0}{l}; \quad \alpha = \frac{1}{\psi(\xi)}. \quad (5.8)$$

Если рассуждения о том, как изменится, если концы балки жестко заделаны. Отличие от шарнирно-опертой балки здесь будет лишь в величине коэффициента чистого изгиба от момента M_0 , примененного по концам балки, или совокупности пластических шарниров, образующихся в балке. Таким образом, вместо (5.6) в данном случае $M(x) = M_0 \cdot \eta(x)$, где $M_0 \cdot \eta(x)$ — изгибающий момент от поперечной нагрузки в случае шарнирного опирания концов.

Тогда $\frac{dM(x)}{dx} = \frac{dM_q(x)}{dx}$ и условием M_{max}

(значения c) будет таким же, как и у шарнирно-опертой балки. Значит, останутся неизменными $\psi(\xi)$ и α , а условие $M_{max} = M_0$ здесь приводит к

$$P_0 = 2\alpha \frac{M_0}{l}. \quad (5.9)$$

Из соотношения (5.8) и (5.9) следует, что предельная нагрузка однопролетной пластической балки, жестко заделанной по концам, всегда вдвое больше предельной нагрузки такой же балки при шарнирном опирании со концов.

Существенное свойство возникает, когда один конец балки жестко заделан, а другой шарнирно оперт. Здесь к изгибающему моменту от поперечной нагрузки шарнирно-опертой балки $M_q(x)$ добавляется изгибающий момент от M_0 , приложенного в свободном конце (например, на правой опоре).

$$\text{Получим: } M(x) - M_0(x) - M_0 \frac{x}{l} = \frac{dM(x)}{dx} = \frac{dM_0(x)}{dx} - \frac{M_0}{l} = 0$$

В связи с этим рассуждением на основании значения C - обобщен M_{max} в отличие от предыдущих случаев зависит от M_0 и параметра P : $C = C(P, M_0)$. Движения над реками не имеет особенностей, но уравнение $M_{max} = M_0$ оказывается невыполнимым относительно P_0 .

В аналитическом виде решения в опорных концах балки приводятся не столь компактно. Работы опорных сил в опорных концах может быть представлена как

$$V = \int_0^l g(x) \omega dx, \quad (5.10)$$

где ω - прогибы балки.

Если учесть, что исчерпание нагрузочной способности однопролетной двухосевой балки в большинстве случаев сопровождается образованием двухосевого вторичного механизма (особые случаи рассмотрены ниже, то нагрузка ось балки - механизм, состоящий из двух отрезков прямых (структурная линия на рис.19). Тогда

$$\omega = \begin{cases} x \frac{\theta}{l} & \text{при } 0 \leq x \leq c; \\ l - x \frac{\theta}{l-c} & \text{при } c \leq x \leq l; \end{cases} \quad (5.11)$$

$$V = \frac{f}{c} \int_0^c g(x) x dx + \frac{1}{l-c} \int_c^l g(x) (l-x) dx, \quad (5.12)$$

где f - прогиб в середине пролетного пластического шарнира (максимальный прогиб); c - позиция шарнира.

В общем случае величина c неизвестна. Выигрыш расчетная определяется как

$$D = M_0 (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \quad (5.13)$$

где θ_1 , θ_2 и θ_3 - углы slopes в пластических шарнирах (рис.19).

$$\theta_1 = \frac{f}{c}, \quad \theta_2 = \frac{f}{l-c}; \quad \theta_3 = \theta_1 + \theta_2 = \frac{fl}{c(l-c)}. \quad (5.14)$$

Подставив это в (5.13), получим для балки с жестким изгибом на концах

$$D = M_0 f \frac{2l}{c(l-c)}. \quad (5.15)$$

Для шарнирно-опертой балки следует положить в (5.13)

$$\theta_1 = \theta_2 = 0$$

$$D = M_0 f \frac{l}{c(l-c)}. \quad (5.16)$$

Если левый опорный шарнир, в правый конец балки жестко заделан, то $\theta_1 = \theta$ и

$$D = M_0 f \frac{l+c}{c(l-c)}. \quad (5.17)$$

Вращающие U и D согласно (4.15), получим минимальное значение статической предельной нагрузки P_0 .

Выражая из него P_0 оказывается зависимым от c - обобщенного пластического шарнира. Как указывалось, c может быть неизвестно. Для его нахождения следует использовать классическую вариационную теорему теории предельного состояния (§ 4). Взяв за риг значение c , получим риг минимально возможного статического механизма. Согласно этой теореме действительным будет тот из них, который дает максимальную

пределную нагрузку. Следовательно, с точки зрения метода на расчете можно P_0 .

5.3. Пример. Пределная нагрузка балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой. Пусть на балку BC равномерно-распределенная нагрузка q действует поперек балки, правый B конец заделан. Решим задачу статическим методом, зададим

$$M(x) = \frac{qx^2}{2} - M_0 \frac{x}{l}.$$

Возьмем на условии $\frac{dM(x)}{dx} = 0$

$$\frac{q}{l} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}; \quad \alpha = \frac{ql^2}{M_0}.$$

Подстановка полученной в $M(x)$, найдем $M_{max} = M(\alpha)$, в $M(x) = M_0$ дает уравнение $\alpha^2 - 12\alpha + 4 = 0$. Корень этого уравнения $\alpha = 11,66$. Вычисляем q относительно q , получим

$$q_0 = 11,66 \frac{M_0}{l^2}.$$

Используя численный метод, решим задачу так найдем q (5.12) при $q(x) = q$ const, что дает $U = \frac{1}{2} q l^2$. Приравняем ее второму расхождению по (5.17), найдем предельную нагрузку

$$q = \frac{M_0}{l} \frac{1+\alpha}{\alpha(1+\alpha)}; \quad \bar{c} = \frac{c}{l}.$$

Условие $\frac{dQ_0}{d\bar{c}} = 0$ приводит к уравнению $\bar{c}^2 + 2\bar{c} - 1 = 0$, корень которого $\bar{c} = \sqrt{2} - 1 = 0,414$. Подстановка полученного и выражений для q_0 приводит к результату, полученному статическим методом.

5.4. Таблица предельных нагрузок однопролетных балочных систем. Другой случай. В табл.2 для трех случаев предельных нагрузок даны предельные значения α - коэффициента предельной нагрузки, позволяющего вычислить ее в форме

$$q_0 = \alpha \frac{M_0}{l^2}; \quad P_0 = \alpha \frac{M_0}{l}; \quad M_0 = \alpha M_0. \quad (5.18)$$

В таблице приняты следующие обозначения. Величине нагрузки: q , P и M - соответственно интенсивность распределенной нагрузки, сосредоточенная сила, сосредоточенный момент; l и c - длина пролета и расстояние от сосредоточенного момента, образующегося в пролете балки, от ее левого конца;

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{l}; \quad \bar{P} = \frac{P}{l}; \quad \bar{c} = \frac{c}{l}. \quad (5.19)$$

Балки с жесткими шарнирами на обоих концах свободно не рассмотрены, ибо, как показано выше, их предельная нагрузка является только предельной нагрузкой шарнирно-свободной балки, а величина q у обоих концов балки. Все балки с шарнирами на обоих концах в предельном состоянии образуют двухпролетный трехшарнирный статический механизм, форма которого определяется определенной величиной c . Величинами являются особые случаи, для которых c не применимо. У жестких балок в предельном состоянии образуются один шарнир - в середине. Поэтому c для них не применимо. (Здесь также есть особые случаи.)

Остановимся на двухпролетном случае. У шарнирно-свободной балки, симметрично нагруженной двумя силами P (отросток 2, табл.2), на участке между силами при $\alpha \leq x \leq l - \alpha$ $M(x) = M_{max} = const$ имеет место частый случай. Поэтому максимум нагрузки здесь неопределимо. Нагрузка увеличивается, что численный метод дает один и тот же максимум P_0 при произвольном изменении положения оси балки в пределах этого участка, но симметрично относительно середины пролета, в том числе: для одного шарнира сосредоточенного пролета и двух симметрично расположенных шарниров в пределах участка.

Частый случай в рассмотренной ситуации имеет много точек:

№ п.п.	Схема нагрузки	Путь от центра нагрузки до края				
		Δ	a	b	δ	f
1	2	α	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
4		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

П р о д о л ж е н и е т а б л . 2

5		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
6		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
7		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
8		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
9		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

1	2	3	4	5	6	7
10		$\frac{b}{a-b} \ln \frac{a}{b}$	$\frac{1+y^2}{2}$	$2 \frac{a(2x-b)^2-2x^2}{b^2(2-b)^2}$	$2x\sqrt{1+2b-b^2}$	$\frac{1}{b} \ln \frac{2}{1+b}$
11		$\frac{2}{b(2b+b)} \ln \frac{a(2b+b)}{b-b(1-b-\frac{b}{2})}$	$2x+b$	$2x\sqrt{2+b}$	$\frac{1}{b}$	
12		$\ln 5,68$	$0,5773$	$2b$	$\frac{1}{2}$	
13		$\ln 5,68$	$0,4227$	$2x,5b$	$0,3473$	$\frac{1}{2}$

1	2	3	4	5	6	7
14		$\frac{b}{b^2(2b+2a)} \ln \frac{a}{b}$	$\frac{a+b\sqrt{2}}{2}$	—	—	$\frac{b}{2+a}$
15		$\frac{\ln 5,68}{b^2(2b+2a)} \ln \frac{a}{b}$	$\frac{1}{2} \ln \frac{a(2b+2a)}{b^2}$	$\frac{2b}{1+0,6517}$	$0,4119 \sqrt{2+2b}$	$\frac{b}{2+a}$
16		$\frac{\ln 5,68}{b^2(2b+2a)} \ln \frac{a}{b}$	$0,4227 \ln \frac{a}{b}$	$\frac{21,58}{1+0,6517}$	$0,5858 \sqrt{2+2b}$	$\frac{b}{2+a}$

у шарнирно-опертой балки, нагруженной четырьмя силами P (страница 4), на участке между опорами балки; у консольной балки с одной заделкой, нагруженной сосредоточенными моментами M (страница 5 и 7); у консольной, нагруженной двумя противоположно направленными силами P , на участке между заделкой и свободным концом балки (страница 5).

У шарнирно-опертой балки, нагруженной двумя противоположно направленными силами (страница 5), опора моментов несимметричной относительно середины пролета. Соответственно несимметричны и сосредоточенные пластические механизмы: в пролете возникает два механизма при $x = a$ и $x = l - a$; возникает еще балка - механизм, состоящая из трех крайних пролетов; при $x = l/2$ $\omega = 0$.

У шарнирно-опертой балки, нагруженной на опорах сосредоточенными моментами M (страница 6), пластический механизм возникает: пластический шарнир образуется у опорных сечений, которое получает возможность вращаться вокруг опоры; в остальной части балки $\omega = 0$. Такие механизмы возникают у шарнирно-опертой балки, нагруженной M непрерывно в пролете (страница 7 при $a = b$). Здесь возможен следующий механизм: в силу несимметричности опор $M(x)$ возникает пластический шарнир в центре от середины пролета на расстоянии Δ возникает пластический шарнир, удаленный между шарнирами пролета вокруг точки $x = l/2$; по мере того как $\Delta \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$. У такой же балки при $a \neq b$ образуется один или два шарнира в трансверсальных механизмах; при $a < b$ возникает механизм внале, при $a > b$ - вправо в соответствии со знаком M_{max} . Формулы для балок, нагруженных трапециевидной нагрузкой, в табл. 2 - приведены.

§ 5.5. О применении принципа виртуальных перемещений для определения предельных нагрузок. Практической важности таблица предельных нагрузок однопролетных балок, которые при-

ведены ниже, по сравнению с таблицами элементов упругого изгиба балочных систем имеет лишь действительную ценность.

С одной стороны, в данном случае значительно расширяется круг задач, где приведенные выше формулы могут быть использованы непосредственно: ниже показано, что только в расчете однопролетных балок прямо сводится расчет непрерывных балок, рам с неподвижными узлами, ряд пластических механизмов у непрерывных и рам с подвижными узлами. Кроме того, в § 6 показано, что на приведенную нагрузку балки не влияет жесткость опор и узлов; их можно считать жесткими.

Во, с другой стороны, в теории предельного равновесия, как фактически показавшей теория, нельзя использовать принцип виртуальности действия сил. Это значит, что нельзя обобщать результаты расчетов на случаи, приведенных в таблицах, и соответственно предсказывать значения их решений; для любой нагрузки, которой нет в таблицах, нужно решать задачу заново.

Покажем, что тем не менее достаточно широко класс задач по определению предельных нагрузок, где такое обобщение возможно. Для практического использования численных методов. У однопролетной двухшарнирной балки опорные реакции согласно (5.12) - (5.15) могут быть выражены как

$$D = M_0 \frac{1}{c} X(\xi), \quad (5.20)$$

где $X(\xi)$ зависит только от условий закрепления концов балки и $c = l/\lambda$.

Аналогично из (5.10) - (5.12) следует, что работа внешних сил определяется как

$$U = P_1 \psi(\xi), \quad (5.21)$$

где P - параметр, пропорциональный которому изменяется все составленное непрерывное нагружение; $\psi(\xi)$ - величина, зависящая от формы поперечной нагрузки и значений c .

Применяя U и D , получим выражение предельной

$$\text{нагрузки } R_0 = \frac{X(\xi)}{\psi(\xi)} \frac{M_0}{l}.$$

Отсюда коэффициент

продольной нагрузкой отнесено (5.18)

$$\alpha = \frac{X(\bar{E})}{\bar{\varphi}(\bar{E})} \quad (5.22)$$

Предположим, что рассматриваемые поперечные нагрузки имеют две составляющие равной формы:

$$Q = Q_1 + Q_2; \quad Q_1 = \beta_1 \bar{Q}; \quad Q_2 = \beta_2 \bar{Q}; \quad \beta_1 + \beta_2 = 1, \quad (5.23)$$

где β_1 и β_2 — коэффициенты, характеризующие составление $\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$ в суммарной поперечной нагрузке. Если для $\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$ выразить продольную нагрузку, рассмотренную на действительном расстоянии, то по (5.22) коэффициенты продольной нагрузки

$$\alpha_1 = \frac{X(\bar{E}_1)}{\bar{\varphi}_1(\bar{E}_1)}; \quad \alpha_2 = \frac{X(\bar{E}_2)}{\bar{\varphi}_2(\bar{E}_2)} \quad (5.24)$$

значит $\bar{\varphi}(\bar{E})$ можно выразить, поскольку формы нагрузок $\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$ различны и зависят от форм $\bar{Q}$. Предположим, что, несмотря на указанное различие, поперечные пластического напряжения в протекте балки по всей рассматриваемой скрутке совпадают с величиной: $\bar{E}_1 = \bar{E}_2 = \bar{E}$. Тогда для $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$ и $\bar{Q}$ выразим $X(\bar{E})$, а следовательно, и значения рассматриваемых суммарных; работу по значениям α для $\bar{Q}$ по (5.24) и (5.23) можно представить так

$$U = U_1 + U_2 = \beta_1 \bar{Q}_1 \bar{\varphi}_1(\bar{E}) + \beta_2 \bar{Q}_2 \bar{\varphi}_2(\bar{E}). \quad (5.25)$$

Применив для D и U по (5.20) и (5.23), найдем

$$\alpha = \frac{X(\bar{E})}{\beta_1 \bar{\varphi}_1(\bar{E}) + \beta_2 \bar{\varphi}_2(\bar{E})}$$

или при учете (5.23) и (5.24)

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \quad (5.26)$$

Формула (5.26) показывает, имея коэффициенты продольной нагрузки рассчитанные для $\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$, можно α для суммарной нагрузки. Если $\bar{E}_1 \neq \bar{E}_2$, суммируемые по (5.26) отнесены к различным расстояниям. Однако можно предположить, что для нагрузок, приведенных к достаточно близким с, если суммарная нагрузка имеет $\bar{E}_1 \neq \bar{E}_2 \approx \bar{E}$, формула (5.26) можно использовать как приближенную. При этом суммарное приближенное значение продольной нагрузки будет всегда меньше действительного.

Если сравнить (5.26) с основой статического метода, то от использования означает предположение, что поперечные напряжения приближенно зависят от $\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$ одинаково. Им же суммируем, по этой сумме определяем $\bar{F}_0$. Если в действительности напряжения не совпадают в суммарной момент от $\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2$ в сечении, то возникает пластический шарнир. Если относительно нейтральной, то, следовательно, действительное значение $\bar{F}_0$ будет существенно больше.

В табл.2 по (5.26) получены приближенные формулы для балки с трехмерной продольной нагрузкой, которая разбивается на продольную $\bar{Q}_1$ равномерно распределенную $\bar{Q}_2$:

$$\alpha = \frac{1+\gamma}{2} \beta; \quad \beta = q l; \quad \beta_1 = \frac{1-\gamma}{2}; \quad \beta_2 = \gamma.$$

Для шарнирно-опертой балки максимальная ошибка приближенного решения — 0,7%.

§ 6. Методические замечания

6.1. Влияние на продольную нагрузку скрутки и длины пластичности шарнира и шарнира. Основное влияние скрутки на пластичность шарнира балки на ее продольную нагрузку, зависимость, что в величине продольного расстояния на шарнире считать материал конструкции жесткопластическим. У балки из такого материала протягом пластичности шарнира, когда нагрузка отстоит продольной, в балке появляется пластический шарнир. Если в шарнире при этом должен образоваться пластический шарнир, то возникающий с ней максимальный момент будет равен продольному M_0 или зависимость от пластичности шарнира. До появления шарнира пластичность шарнира также не может зависеть от работы

балки (утам поперете в сечении балки равны нулю, або профилі несуточную).

Когда речь идет об упругой податливости или фиксированном смещении опор балки, нужно иметь в виду, что при определенных пределах нагрузки линия статически неопределяемых упругих балок балогора непрерывного статического шарнира превращается в такую или несколько статически определяемых балок. Напряженное же состояние статически определяемой балки, или, наоборот, не зависит от смещения опор.

Из сказанного следует, что смещения и податливость опор и заделок балки теоретически не влияют на ее предельную нагрузку, и при определенных пределах нагрузки упругие (определенные) опоры и упругие заделки следует считать жесткими. Сказанное не может быть распространено на упругие или нестационарные опоры и заделки, когда реакции опор или реактивный момент в заделке ограничены некоторыми предельными значениями. Вследствие последнего имеет значение предельная нагрузка балки. С такими примерами мы встретимся при рассмотрении предельных нагрузок перегородчат.

Величину нестационарного прогиба балки экспериментально. Сказанное на первом издании результаты испытаний шарнирных балок, выполненные в 1928-1929 гг. в Германии Г. Мейером-Лейбманом [83]. Он исследовал двухпролетные балки, симметрично нагруженные сосредоточенными силами (рис. 20). Средняя опора балки по нагружению получила фиксированное смещение. Результаты испытаний приведены в табл. 3. В этой таблице приняты следующие обозначения:

Характеристики	Заделка балки		
	1	2	3
Δ , см	0	0,46	-1,42
$P_{(5)}$, т	3,50	4,67	0
P_0 , т	13,1	13,6	13,45



Рис. 20. Схема балки (попериона Г. Мейера - Лейбмана).



Рис. 22. Схема двухпролетной балки (а), со статическим смещением (б, в, г) и опорный момент (д).



Рис. 23. Максимальные прогибы шарнирных балок, жестко заделанных по концу. 1 - балка, нагруженная сосредоточенной силой посередине пролета; 2 - балка, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q; — предельный прогиб; --- истинный профиль.



Рис. 21. Схема балки.



Рис. 24. Балка, закрепленная одним концом.

6.3. Балки ступенчато-переменного сечения. Особенности расчета неразрывных многопролетных балок ступенчато-переменного сечения, когда в пределах длины одного пролета предельный момент постоянен, но для разных пролетов различен, связаны с тем, что на промежуточных опорах таких балок скачкообразно меняется предельный момент. В расчет на два значения предельного момента здесь можно заключаться нежелая. Действительно, по мере роста нагрузки на балку и соответствующего возрастания момента на опоре пластическая деформация первой возникает в балке с самой тонкой балкой, граничащей с сечением. После образования там пластического шарнира рост предельного момента на опоре прекратится. Таким образом, у балки ступенчато-переменного сечения, в отличие от промежуточной, при расчете на пролет как многопролетной однопролетной балки возрастающие моменты в разных пластических шарнирах могут иметь разное значение.

Проведем следующий анализ, рассмотрим средний пролет балки, представленной на рис.21. Пусть M_1 и M_2 - предельные моменты крайнего и среднего пролетов и $M_1 < M_2$. Тогда в предельном состоянии моменты в шарнирах на средних опорах будут равны M_1 , а в шарнире над силой $P - M_2$.

Соответственно при решении задачи статическим методом максимальный предельный момент в среднем пролете будет иметь вид

$$M_{max} = \frac{Pl_2}{4} - M_1 \quad \text{и должен быть равен } M_2. \text{ Это даст}$$

$$P_0 = \frac{4(M_1 + M_2)}{l_2}.$$

В каноническом методе работы внутренних сил считаются как $D = 2M_1\theta_1 + M_2\theta_2$ и после подстановки значений θ_1 и θ_2 (рис.21) в приведенном работе выкладки для $D = P_f$ даст также то выражение P_0 .

6.4. Свободный случай нагружения. Свободные пластические механизмы в многопролетных неразрывных балках могут возникнуть, когда отдельные пролеты имеют нагрузку противоположного направления. Проведем следующий анализ для однопролетной балки, нагруженной сосредоточенными силами (рис.22,а). Нагруженные пропорциональны: $P_1 = P$; $P_2 = \bar{P}P$. Разными будем считать

канонические методы, последовательно рассматривая канонические возможные пластические механизмы.

Механизм 1 (рис.22,б) - в предельном состоянии переходит только левый пролет. Расчет сводится к рассмотрению этого пролета как однопролетной балки, шарнирно-опертой на левом конце и жестко защемленной на правом. Тогда согласно табл.2 предельная нагрузка, отсчитывая длину механизма,

$$P_0^{(1)} = \frac{l+\bar{a}}{\bar{a}(l-\bar{a})} \frac{M_1}{l_1}; \quad \bar{a} = \frac{a}{l_1}. \quad (6.1)$$

Механизм 2 (рис.22,в) - в предельном состоянии переходит только правый пролет. Он аналогичен механизму 1 и

$$P_1^{(2)} = \frac{l+\bar{b}}{\bar{b}(l-\bar{b})} \frac{M_2}{l_2}; \quad \bar{b} = \frac{b}{l_1}; \quad \bar{P} = \frac{P_2}{P_1}. \quad (6.2)$$

Механизм 3 (рис.22,г) - в предельном состоянии переходит оба пролета. Этот механизм можно рассматривать как комбинационный, получившийся при одновременной реализации механизмов 1 и 2, у которых углы сдвига на средней опоре имеют разные знаки. Поэтому при их наложении в рассматриваемом механизме пластический шарнир на опоре исключается; шарниры в пролетах достаточно для образования механизма с одной ступенью свободы.

Работа внешней сил

$$D = P_1 f_1 + P_2 f_2. \quad (6.3)$$

Поскольку известна ось балки - шарнирная, состоящая из трех отдельных пролетов, f_1 и f_2 связаны между собой геометрически:

$$f_1 = f_2 \frac{l_1 - a}{l_2 - b}. \quad (6.4)$$

Возврат рассуждениям к углу сдвига в шарнирах

$$D = M_0(\theta_1 + \theta_2); \quad \theta_1 = \frac{f_1}{a} + \frac{f_1}{l_1 - a}; \quad \theta_2 = \frac{f_2}{l_2 - b} + \frac{f_2}{b}. \quad (6.5)$$

Приращения U и D с учетом (6.2)-(6.5) и assuming бес-
размерные обозначения, найдем

$$P_0^{(1)} = \frac{\alpha + \beta}{\pi \beta [(1-\beta) + \beta \lambda (1-\beta)]} \frac{M_0}{l_1}; \quad \lambda = \frac{l_2}{l_1}. \quad (6.6)$$

В соответствии с кинематической экстремальной теоремой
решается тот из механизмов, который дает минимальное значе-
ние P_0 . Все P_0 и будет действительный предельный нагруз-
кой. Указанное, например при $\alpha = \beta = 0,5$, приводит к

$$P_0 = \alpha \frac{M_0}{l_1},$$

$$\alpha = \begin{cases} \beta & \text{при } \beta \lambda \leq \frac{1}{3} & (\text{механизм I}); \\ \frac{\beta}{1+\beta \lambda} & \text{при } \frac{1}{3} \leq \beta \lambda \leq 3 & (\text{механизм 3}); \\ \frac{\beta}{\beta \lambda} & \text{при } 3 \leq \beta \lambda & (\text{механизм 2}). \end{cases}$$

Для решения задачи статическим методом
нужно рассмотреть систему уравнений моментов (рис.22,а). На-
скажем момент при выстрелных условиях в сечении под си-
лами P_1 и $P_2 = M_{max}^{(1)}$ и $M_{max}^{(2)}$ и на правой опо-
ре - πM . Она связана между собой уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} M_{max}^{(1)} &= P_1 \frac{a(l_1-a)}{l_1} + \pi M \frac{l_1-a}{l_1}, \\ M_{max}^{(2)} &= P_2 \frac{b(l_2-b)}{l_2} + \pi M \frac{l_2-b}{l_2} \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Если в (6.7) положить $M_{max}^{(1)} = M_0 = M_0$, то из пер-
вого уравнения получим $P_0^{(1)}$, соответствующее с (6.6); из вто-
рого уравнения можно найти ограничительное значение применяемой этой
решения, потребовав, чтобы $M_{max}^{(2)} \leq M_0$. Анало-

гично, полагая $M_{max}^{(2)} = M_0 = M_0$, из второго

уравнения (6.7) получим $P_0^{(2)}$, соответствующее с (6.6), а
первое уравнение даст ограничительное значение из условия

$M_{max}^{(1)} \leq M_0$. Наконец, полагая $M_{max}^{(1)} = M_{max}^{(2)} = M_0$

и используя из (6.7) M_0 , получим $P_0^{(3)}$ по (6.6), а далее,
потребовав, чтобы $M_0 \leq M_0$, найдем соответствующее огра-
ничение.

Рассмотренный путь решения задачи применим к любым случаям
внутренних силных пролетов нагрузками противоположного направле-
ния.

**6.3. Приближенное определение прогиба в пределах со-
стояния.** Во многих практических случаях при практическом исполь-
зовании методов теории предельного равновесия очень важно опре-
делить величину прогиба, возникающих при действии нагрузок, близ-
ких к предельным. Для этих целей можно использовать прибли-
женные методы, основанные в основном на известном коэффициенте и применяемых
для любых статических систем, значения которых выносятся в усло-
виях переломного момента [27].

Метод основан на предположении, что ось имеет изогнутый
профиль, а материал является упругопластическим. Идеальный
профиль - это симметричный контур оси стержня. Если ось имеет
упругопластический стержень (см.рис.14) совпадает с предельным
состоянием, т.е. упругопластический стержень стержня. Методом
в стержне идеального профиля в условиях переломного момента
пластическая деформация локализуется в отдельных сечениях и их
величина из профиля можно полностью учесть. Величина в этих се-
чениях пластического шарнира.

Тогда величина пластических деформаций в переломной системе,
по существу, составляет ее упругой и только повышает степень ста-
тической неопределимости. В предельном состоянии пластическое
повращение шарниров системы становится кинематически независи-
мой и имеет одну степень свободы. Если здесь означать один
шарнир - тот, который называется последним, система становится
кинематически независимой и будет статически определимой или
по крайней мере (для одностержневых систем) степень ее статической
неопределимости будет ниже, чем в исходном состоянии. Последнее
обычно очень упрощает расчет, выполнение которого можно найти про-

гибы от действия нагрузки, равной предельной нагрузке.

Однако, связанное с рассмотрением предельного состояния, можно сказать, что анализ прогиба балки идеального и прямоугольного профилей (рис.23). Через EJ там обозначены жесткости балки. На рисунке видно, что прогибы этих балок достаточно близки даже при нагрузках, мало отличающихся от предельных.

Из связанного вытекают следующие основные приближенные вычисления прогибов в предельном состоянии:

на основании рассмотрения предельного равновесия конструкцией определяются распределение и вид пластических напряжений в предельном состоянии;

в результате анализа работы этих конструкций в упругой стадии или физических соображений выкинут, какой вариант принимается исследованию;

в расчетную схему конструкции вводят пластические напряжения и определяют моменты в тех сечениях, где они должны возникнуть в предельном состоянии, на основании напряжений, образующихся исследовании;

выполняют упрощенный расчет конструкций с такими известными моментами напряжения и определяют прогибы, возникающие при действии нагрузки, равной предельной, который и является искомым.

Если одновременно решение вопроса о положении пластического шарнира, возникающего исследовании, выкинут из рассмотрения, можно выполнить расчет в нескольких вариантах, вытекающих из расчетной схемы разных напряжений, в отношении которых можно предположить, что они образовались исследовании; для окончательного выбора следует вариант, который дает наибольшие прогибы.

Например, у балки, показанной на рис.21, в предельном состоянии есть три шарнира: на промежуточных опорах и в сечении под силой P . Последними являются шарниры на промежуточных опорах. Поэтому, моменты шарниры только в сечении под силой P , мы можем и расчету однопролетной балки с моментами (для нее пролета между опорами l_1 , длина консоли $l_2/2$), нагруженной на конце консольной силой $P_0/2$ и моментом M_0 . Упрощенный расчет такой статически определимой балки дает прогибы на концах консоли

$$f = \frac{P_0 l_2^3}{48 EJ} - \frac{M_0 l_2^2}{8 EJ} + \left(\frac{P_0 l_2}{4} - M_0 \right) \frac{l_2 l_1}{8 EJ}$$

Подставляя $P_0 = \frac{8 M_0}{l_2}$, найдем для предельного состояния

$$f = \left(\frac{l_1}{4} + \frac{l_2}{2} \right) \frac{M_0 l_2^2}{8 EJ}$$

§ 7. Балка переменного сечения.

Четыре главные идеи

7.1. Особенности предельного состояния балки переменного сечения. Основная особенность предельного состояния балки переменного сечения состоит в том, что положение пластических шарниров здесь определяется не только формой кривой эпюрных моментов $M(x)$, но и характером изменения предельных моментов $M_0(x)$ по длине балки. Показано это на примере однопролетной балки с жесткими заделками на концах, нагруженной прямоугольной поперечной нагрузкой одного направления.

При решении вопроса о статическом методе в условиях неопределенности вида напряжений можно представить в следующем виде:

$$P l_1 \psi(x) - M_0^* \left(1 - \frac{x}{l_1} \right) - M_1^* \frac{x}{l_1} \leq M_0(x), \quad (7.3)$$

где M_0^* и M_1^* - изгибающие моменты в шарнирах сечениях соответственно при $x=0$ и $x=l_1$; $P l_1 \psi(x)$ - изгибающий момент от поперечной нагрузки; P - параметр, пропорциональный которому изменяется все соответствующее поперечное нагружение; $\psi(x)$ - функция, определяющая форму эпюры изгибающих моментов от поперечной нагрузки.

Для удовлетворения неравенству (7.3) нужно исследовать форму кривой

$$m(x) = \frac{M(x)}{M_0(x)}, \quad (7.2)$$

найти ее максимум при $x = c_i$ ($i = 1, 2, 3$) и проверить, чтобы в этих сечениях $|m(c_i)| = 1$. Тогда в остальных сечениях балки будет обеспечено $|m(x)| < 1$. Указанное можно обеспечить соответствующим выбором значений P_0 , M_0^a и M_0^b . Тогда вместо неравенств (7.1) можно написать систему трех уравнений

$$\left. \begin{aligned} P_0 l \varphi(c_1) - M_0^a \left(1 - \frac{c_1}{l}\right) - M_0^b \frac{c_1}{l} &= -M_0(c_1); \\ P_0 l \varphi(c_2) - M_0^a \left(1 - \frac{c_2}{l}\right) - M_0^b \frac{c_2}{l} &= M_0(c_2); \\ P_0 l \varphi(c_3) - M_0^a \left(1 - \frac{c_3}{l}\right) - M_0^b \frac{c_3}{l} &= -M_0(c_3), \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

из которой определяются значения P_0 , M_0^a и M_0^b для предельного состояния. Здесь предполагается $c_1 < c_2 < c_3$, а значения при $M_0(c_i)$ выбираются исходя из условия, что образующая деформаций пластического материала монотонически возрастает: значения угла скрутки и соответствующие моменты в крайних шарнирах и в среднем шарнире должны быть противоположными. Это обеспечивается соответствием результатов, полученных статическим и кинематическим методами.

Известно, что приращение момента и скорости деформации в этом месте мало отличаются от аналогичного в § 5 для притягиваемых балок, только крайние шарниры не обязательно должны размещаться в основных шарнях и их положение нужно выбирать исходя из условия минимума предельной нагрузки.

Если конца балки шарниры опоры, то $M_0^a = M_0^b = 0$ и в (7.3) остается только второе уравнение, из которого определяется значение P_0 . Если шарниры опоры один из концов балки, соответственное обращение в нуль один из опорных моментов и в (7.3) остается два уравнения.

При рассмотрении предельного состояния были использованы предположения о предельном моменте и пластическом шарнире без каких-либо оговорок о характере изменения сечений по длине балки. Справедливость этого предположения, либо в упругой стадии, или, конечно, после изменения сечений приводит к значительным изменениям поля напряжений - концентрации напряжений, - которые не могут быть описаны в рамках технической теории метода балки.

Менее строго допустимо: распределение напряжений по высоте сечений, находящегося в предельном состоянии, $\sigma_x = E \epsilon_x$, которое приводит к предельному моменту по (4.4), удовлетворяет тем условиям пластичности Треска (2.15), если $\sigma_x = E \epsilon_{xx} = 0$, так и дифференциальными уравнениями равновесия (2.1), если учесть, что сдвиги в сечении участка балки остаются нулевыми и напряжения тем неопределенными. При этом не нарушаются и граничные условия. Поэтому такое распределение напряжений является статически допустимым.

Также нетрудно убедиться в том, что скорости деформаций, отвечающие пластическому шарниру ($\dot{\epsilon}_x = \dot{\chi} x$, $\dot{\epsilon}_x = \dot{\chi} x$), где $\dot{\chi}$ - кручение оси балки), удовлетворяют уравнению непрерывности деформаций (2.6), заданному в скоростях, в граничных условиях. Не нарушается и ассоциированный закон течения, поскольку значения $\dot{\epsilon}_x$ и $\dot{\epsilon}_x$ совпадают, а отклонение в кинематическом решении дает одинаковые результаты. Все это согласно аксиоматическим теоремам теории предельного равновесия (см. § 4) свидетельствует о том, что приведенные предположения в отношении напряжений и скоростей деформаций приемлемы.

Таким образом, использованные предположения о пластических шарнирах и предельных моментах при определении предельных нагрузок балок переменного сечения являются принципиально строгими вне зависимости от характера изменения сечений по длине балки. Если лишь один ограничитель: значения нулевых напряжений на предельном состоянии сечения должны быть пропорциональными.

7.2. Прямая и изогнутая балки. Обобщенные случаи

В качестве примера рассмотрим пространственную жестко защемленную

¹ Настоящий раздел написан совместно с Б.И.Авданиным.

основу с присоединенным полемом обтекания, симметричному по координатной плоскости. Для простоты будем считать нагрузку и конструкцию балки симметричными относительно срединной плоскости. Тогда

$$M_0^B = M_0^A = M^B; c_1 = l - a_1 - c; c_2 = l/2.$$

Если изгибаемые пластические шарниры образуются в пределах катаны, то величину c можно определять исходя из условия

$$\left. \frac{dM(x)}{dx} \right|_{x=c} = 0 \text{ или } R_0 l \left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{x=c} + \left. \frac{dM_0(x)}{dx} \right|_{x=c} = 0, \quad (7.4)$$

а R_0 и M^B — из уравнений (7.2).

Для простоты особенно интересны случаи образования шарниров катаны, при которых координат шарнир образуются в сечении балки у конца катаны, т.е. когда $c=0$ (рис.24). Это обеспечивает необходимые условия равновесия системы балки на один катан и обычно дает минимальную нагрузку в месте, если противоречить балку на предельной нагрузке. В катане при этом не происходят пластических деформаций, что значительно облегчает обоснование ее устойчивости.) Тогда $M_0(l) - M_0(l/2) = M_{0P}$ — предельному моменту рассматриваемой балки или равновесной катаны, а из (7.3)

$$R_0 = \frac{2}{\varphi(l/2) - \varphi(a)} \frac{M_{0P}}{l}; M^B = \frac{\varphi(l/2) + \varphi(a)}{\varphi(l/2) - \varphi(a)} M_{0P}. \quad (7.5)$$

Если, например, нагрузка на балку равномерно распределена и имеет интенсивность q , а $P = ql$, то

$$\varphi(x) = \frac{x}{2l} \left(1 - \frac{x}{l}\right); \varphi(l/2) = \frac{1}{8}; \varphi(a) = \frac{\bar{a}}{2} \left(1 - \bar{a}\right); \bar{a} = a/l; \quad (7.6)$$

$$M^B = \frac{1 + 4\bar{a}(1 - \bar{a})}{(1 - 2\bar{a})^2} M_{0P}; \quad R_0 = \frac{16 M_{0P}}{l^2}, \quad (7.7)$$

где $l_K = l - 2a$ — длина пролета балки между катанами.

Укажем, обосновываемые положения шарнира у конца катаны, обосновываются из (7.4). Чтобы воспользоваться им, нужно иметь выражение $M_0(x)$. Для катаны с присоединенной катаной (рис.24), если считать, что площадь поперечного сечения балки с катаной меньше площади присоединенного полем обтекания (используем эту область как в предыдущем), для $0 < x < a$

$$M_0(x) = M_{0P} + \sigma_T \delta_K v(a-x) \left[h_P + \frac{x}{2}(a-x) \right]; \quad v = \frac{h}{2}, \quad (7.8)$$

где δ_K — толщина катаны.

Тогда (7.4) при использовании (7.6)–(7.8) дает уравнение, из которого можно найти a . Получается

$$a = a_{\max} - \frac{1}{2} - \frac{4 M_{0P}}{\sigma_T \delta_K h_P v}. \quad (7.9)$$

Известно, что это граничное значение a . При $a < a_{\max}$ шарнир всегда появляется у конца катаны; при $a > a_{\max}$ шарнир катаны образуется в пределах катаны $0 < c < a$.

Если между катанами балки в заданной есть катан (рис.25), то в сечении заданной предельный момент симметрично падает [в выражении (7.8) при $x=0$ выходит M_{0P}]. Тогда,

чтобы обосновать образование шарнира у конца катаны, нужно дополнительно удовлетворять условию $M_0(l) \geq M^B$. Используя (7.7) и (7.8), найдем

$$\sigma_T \delta_K a v \left(h_P + \frac{a}{2} \right) \geq \frac{1 + 4\bar{a}(1 - \bar{a})}{(1 - 2\bar{a})^2} M_{0P}. \quad (7.10)$$

Отсюда определяется другое граничное значение $a = a_{\min}$.

Для $a > a_{\min}$ условие (7.10) выполняется.

В данном решении использовались выражения (7.8), справедливые лишь в случае, если балка во всех сечениях имеет посто-

точно боковой присоединенный поперек сечения. Это объясняется особенностями, когда, например, рассчитываемая балка является простыми перерезанной балкой и находится на жестком основании конструкции и нагрузкой сдвигаемыми простыми (рис.25,а). В случае изолированного упругого соединения (рис.25,б) на шаре приложения и длину размеры присоединенного поперек увеличиваются и в наклонном сечении, проходящем через угол (1-1 на рис.25,б), присоединенный поперек обращается в нуль [77]. Таким образом предельный способ нагрузки и предельного прогиба вычисленные условия $|m(x)| \leq 4$ для наклонного сечения, которое

известно увеличенного виде всего и оказывается выходящее сложное.

Конечно, рассмотрение здесь - лишь пример, иллюстрирующий возможность применения выведенных предельных размеров балки перерезанного сечения к расчету наклонных соединений. Эти результаты при выборе размеров или расчетах рассмотрены в наклонном и другом присоединении, в частности связанных с обеспечением необходимых условий на устойчивость, устойчивость прочностных или в т.д.

§ 3. Внутренние продольные и поперечные силы на предельном состоянии сечения балки

3.1. Продольные внутренние сечения балки при совместном действии изгибающего момента и продольной силы. Продольная сила N , так же как изгибающий момент M , зависит в сечении только от нормальных напряжений σ . Поэтому для предельного состояния сечения при совместном действии M и N характерно наличие по всей его толщине $\sigma = \pm \sigma_T$ или, точнее

рассмотренную в § 4. Сечение будет лишь в уравнении равновесия

$$\int \sigma dF = N; \quad \int \sigma z dF = M. \quad (8.1)$$

Подставляя сюда $\sigma = \pm \sigma_T$ и разбивая площадь сечения на растянутую и сжатую части: F_+ и F_- , получим

$$N_T = \sigma_T (F_+ + E); \quad N_C = \sigma_T (F_- - S_-); \quad S_+ = \int x z dF; \quad S_- = \int z dF. \quad (8.2)$$

Здесь N_T и N_C - значения N и N , при совместном действии которых сечение переходит в предельное состояние.

Начало координат diambil в центре тяжести сечения, а статические моменты растянутой и сжатой частей площади сечения S_+ и S_- вычислены с учетом знака z . Эти же моменты от S_+ и S_- по (4.4). Но тогда $S_+ S_- = S^2$ - статический момент всей площади сечения, а $S = 0$. Следовательно, $S_+ = -S_- = N_0 = 2 \sigma_T S_+$.

Из (8.2) следует, что значение продольной силы N приводит к сдвигу нейтральной оси сечения по сравнению с ее положением при чистом изгибе, и, когда N достигнет значения $\sigma_T F$, эта ось выйдет за пределы сечения. При этом E (или F_+) обращается в нуль. Такое значение продольной силы является предельным

$$N_0 = \sigma_T F. \quad (8.3)$$

В этом случае $S_- = 0$, так как $E = 0$; тогда $S_+ = S = 0$. Следовательно, если продольная сила N достигнет предельного значения N_0 , то согласно (8.2) $M_N = 0$, т.е. сечение не имеет возможности изгибаться относительно момента M . Выясним (8.2) подробнее, какие формы профиля, дающие поперечные нейтральной оси сечения в зависимости изгибающего момента от продольной силы в предельном состоянии $N_0 = M(N)$. Последнюю условие представляется в сокращенной форме, обозначая

$$m = \frac{M_N}{N_0}; \quad n = \frac{N}{N_0}. \quad (8.4)$$

3.2. Влияние поперечной силы на предельный момент сопротивления профилей. Если для прямоугольного профиля h и ширины b обозначить через β ординату нейтральной оси, то

$$E = F \left(\frac{1}{2} - \beta h \right); \quad E = F \left(\frac{1}{2} + \beta h \right); \quad N_0 = -2 N_0 \beta; \quad (8.5)$$

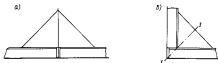


Рис. 25. Конструктивные схемы узла с линиями: а - элемент перерезанной балки; б - локализованное угловое сжатие.



Рис. 26. Зависимость m/n для симметричных профилей. 1 - двутавр; 2 - штакет при $\beta_0 = 0,45$; 3 - прямоугольный; 4 - колесный (труба).

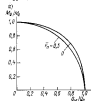


Рис. 28. Зависимость M/N для симметричных (а) и несимметричных (б) профилей.



Рис. 27. Зависимость m/n для несимметричных профилей. ——— тавровый; ———— двутавровый.



$$S_n = \frac{2h^2}{8} (1 - 4\beta^2); \quad M_n = M_0 (1 - 4\beta^2). \quad (8.6)$$

Величины β получим

$$M_n = M_0 \left(1 - \frac{N_n^2}{N_0^2} \right) \quad \text{или} \quad m = 1 - n^2. \quad (8.7)$$

Для других профилей зависимости $m = m(n)$ приведены в табл. 4 при соответствующих обозначениях:

$$F_n = \frac{F_n}{F}; \quad F_0 = \frac{F_0}{F}, \quad (8.8)$$

где F_n и F_0 - площади сечения соответственно узлового пояса и сечения двутаврового профиля; R - высота профиля.

Для несимметричного двутавра N принято положительным, если в немона пояс наклонен от M к N одного пояса; M - положительным, если немона поясков растут.

Зависимости для несимметричного двутавра или приближенные могут быть использованы для любых профилей с присоединенным поясом, если считать, что $F_n = F'_n - F'_0$, где

F'_n - площадь профиля без присоединенного пояса.

Линия зависимостей предельного момента M_N от площади сечения N показывает, что у профилей с горизонтальной осью симметрии зависимости для $M(N)$ различаются не очень резко. Это видно из рис. 26: кривые для любого симметричного двутавра располагаются между кривыми 1 и 3. При этом значение N всегда имеет M_N и поэтому не зависит от значения N . У несимметричных профилей значение N может увеличивать M_N , например у двутавров, когда M и N имеют наклонный разный пояс и немона поясков (рис. 27).

Таблица 4. Продольные моменты профилей с учетом влияния продольных сил

Профиль		м
Вид	Схема	
Прямоугольный		$\pm (I - \pi^2)$
Крестообразный		$\pm (I - \pi)$
Симметричный двутавр		$\pm \left[I - \frac{\pi^2}{F_c (2 - F_c)} \right]$ при $0 \leq \pi \leq F_c$; $\pm 2 \frac{I - \pi}{2 - F_c}$ при $F_c \leq \pi \leq 1$
Ассиметричный двутавр		$\frac{F_c h}{W_x} (I - \bar{z}_x) (1 + \pi)$ при $-1 \leq \pi \leq \pi_B$; $\frac{F_c h}{W_x} \left[\bar{z}_x (1 - \pi) - \frac{I}{4 F_c} (\pi_B - \pi)^2 \right]$ при $\pi_B \leq \pi \leq \pi_H$;

Продолжение табл. 4

Ассиметричный двутавр		$\frac{F_c h}{W_x} \bar{z}_x (1 - \pi) \text{ при } \pi_B \leq \pi \leq 1,$ где $\pi_B = 2 F_c - 1$; $\pi_H = 2 F_c - \frac{F_c^2}{F_c} - 1$; $\bar{z}_x = \bar{F}_c + \frac{1}{2} \bar{F}_c$
Кольцевой (труба)		$\cos \frac{\pi h}{2}$

8.3. Продольные моменты сечений при одностороннем действии изгибающего момента и сжимающей продольной силе. При одностороннем действии в сечении балки изгибающего момента M и сжимающей продольной силы Q здесь возникает и нормальное, и касательное напряжения. Поэтому для анализа поведения материала в пластическом состоянии необходимо воспользоваться условием пластичности. Если считать, что в продольных сечениях балки нормальные напряжения не возникают, условие пластичности Треска (2.15), как известно, принимает вид

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (8.9)$$

Сечение находится в предельном состоянии, если на всех его точках действуют напряжения, удовлетворяющие (8.9). Условие равновесия внешних и внутренних сил в сечении здесь

$$\int_F \sigma dF = 0; \quad \int_F \sigma x_2 dF = M; \quad \int_F \tau dF = Q. \quad (8.10)$$

Решив задачу статическим методом, при заданном статическом напряженном поле напряжений (см. § 4), найдем условие, чтобы при заданном $M = \int_F \sigma x_2 dF$ величина Q была максимальной. Из (8.9) и (8.10)

$$\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma^2} \quad \text{и} \quad Q = \frac{1}{2} \int_F \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma^2} dF. \quad (8.11)$$

В этом случае максимум Q при $M = \text{const}$ отвечает максимуму функции

$$\Phi = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma^2} + \nu \sigma z,$$

где ν — произвольный параметр [10]. Тогда вместо на условии $\frac{d\Phi}{d\sigma} = 0$ можно получить

$$\sigma = \sigma_x + \frac{\nu z}{\sqrt{1 + \nu^2 z^2}}. \quad (8.12)$$

Отсюда видно, что при $z=0$ $\sigma = 0$, т.е. начало координат совпадает с нейтральной осью. Подставляя (8.12) в (8.11), получим

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2} \sqrt{1 + \nu^2 z^2}. \quad (8.13)$$

Тогда по (8.10)

$$\int_F \frac{x dF}{\sqrt{1 + \nu^2 z^2}} = 0; \quad (8.14)$$

$$M_0 = \sigma_x \nu \int_F \frac{z^2 dF}{\sqrt{1 + \nu^2 z^2}}; \quad Q_0 = \frac{\sigma_x}{2} \int_F \frac{dF}{\sqrt{1 + \nu^2 z^2}}, \quad (8.15)$$

где M_0 и Q_0 — значения M и Q , отвечающие предельному состоянию сечения.

Выражение (8.14) определяет положение нейтральной оси, (8.15) — зависимость $M_0 = M(Q)$ для сечений в предельном состоянии, зависящую в параметрической форме (параметр — ν).

Из (8.12) и (8.14) следует, что при $\nu=0$ $\sigma=0$ и $M_0=0$, т.е. предельное состояние достигается только Q . В этом случае по (8.13) $\tau = \tau_x = \sigma_x/2$ и предельное значение Q по (8.15)

$$Q_0 = \frac{\sigma_x}{2} F \quad (8.16)$$

При $\nu \rightarrow \infty$ по (8.13) и (8.15) $\tau=0$, $Q_0=0$ и $M_0=M_0$. Соответственно согласно (8.14) положение нейтральной оси при $Q=0$ или приближается к центру тяжести сечения, при $Q=Q_0$ — идет к нейтральной оси.

* Области применения настоящего и предыдущих глав в литературе 8.4 результатов, относящихся к задаче классических работ в области прикладной теории пластичности, согласно которым предельные перерезывающие силы Профаной были определены в 1884 г. в 8 отношении кх поперечных сечений, требует всестороннего рассмотрения; см. § 17 в заключение.

Решив задачу в аналитическом методе, зададим скорости удлинения $\dot{\epsilon}$ и сдвига $\dot{\gamma}$ в сечении в форме

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 \cos t, \quad \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 \sin t \quad (8.17)$$

($\dot{\epsilon}_0$ - скорость удлинения краевых слоев в данном сечении). Для описания напряжений воспользуемся соотношениями вязкого течения (3.13) с условием пластичности (8.9), переписав его в виде $\dot{\gamma} - \dot{\epsilon}^2 + 4\dot{\epsilon}^2 - \dot{\epsilon}^2 = 0$. Тогда

$$\dot{\epsilon} - \lambda' \frac{\partial \epsilon}{\partial x} - 2\lambda' \dot{\sigma}; \quad \dot{\gamma} - \lambda' \frac{\partial \gamma}{\partial x} - 2\lambda' \tau. \quad (8.18)$$

Здесь при $\dot{\epsilon}$ и $\dot{\gamma}$ будем искать p , что рассмотренная задача является нестационарной, а мы ищем только стационарные соотношения деформаций.

Из (8.18)

$$\sigma = \frac{\dot{\epsilon}}{2\lambda}; \quad \tau = \frac{\dot{\gamma}}{2\lambda}. \quad (8.19)$$

Подставив это в условие пластичности (8.9), сможем найти конкретную величину

$$\lambda = \frac{\dot{\gamma}}{4\sigma} \sqrt{1 + \left(\frac{2\dot{\epsilon}}{\dot{\gamma}}\right)^2}. \quad (8.20)$$

Это дает возможность с учетом (8.17) получить конкретные значения напряжений:

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2\dot{\epsilon}}{\dot{\gamma}}\right)^2}; \quad \tau = \frac{\sigma_0}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{2\dot{\epsilon}}{\dot{\gamma}}\right)^2}. \quad (8.21)$$

Так как $\dot{\gamma}$ и $\dot{\epsilon}$ не зависят от x , а на их основании не существует никаких ограничений, можно считать $\frac{2\dot{\epsilon}}{\dot{\gamma}} = \gamma$

и (8.21) означает с параметрами для напряжений (8.12) и (8.13), полученными статическим методом.

Сокращение статического и кинематического решений в данном случае еще не дает оснований утверждать, что полученные результаты являются точными. Чтобы иметь право воспользоваться рассмотренными теоремами теории вязкого течения, необходимо также доказать, что приращение энергии приращений статическим способом, а поле напряжений (скоростей деформаций) - кинематическим способом.

В основном исследован вопрос равенства кинематическому, не трудно убедиться: (8.17) удовлетворяет условиям непрерывности деформаций (2.6), если предположить, что пластические деформации локализованы в одном сечении, а сечение с или без деформации остается жестким. Однако напряжения из (8.21) не удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия (2.1) и, значит, не являются статическим допустимыми. Следовательно, данное решение неточно.

Для получения точного решения нельзя ограничивать анализ одним сечением, требуется решение плоской стационарной задачи. Такое решение представляло в короткой версии метода прямоугольного сечения (задача Грина) изложено, например, в [55].

Чтобы оценить приведенное выше решение, напомним, что локализовано в это место деформации с велич напряжений и деформаций - это обычные уравнения статического метода балок, применимость которой как для упругих, так и для пластических тел давно превратилась в аксиому [87], хотя поле напряжений здесь и не удовлетворяет уравнениям равновесия (2.1). В рамках этой допущения полученное решение можно считать точным: напряжения из (8.21) удовлетворяют условию пластичности из (8.9) и соответствуют поле скоростей деформаций (8.17). Нули или отрицательные скорости в основных граничных разделах. Из (8.21) следует, что в крайних точках сечения не возникает деформации $\dot{\epsilon} \neq 0$. Это, однако, не говорит о нулевых граничных условиях, а может быть истолковано как разрыв $\dot{\epsilon}$ в указанных точках, где оно величине скачкообразно меняется от конечного значения до нуля. Таким разрывом характерна для нестационарных задач [48].

Отметим, что первый вид разложения статического решения с возмущенными условиями максимума $\bar{Q}$ при фиксированном значении M известен Н.А.Давиденкову [104]. Он был реализован А.Р.Равичиным [105], который получил в численном решении, основанном на теории деформации. Решение А.Р.Равичина является точным в рамках теоретической теории метода, хотя и не было так точно вычислено автором; их элементарное обобщение приводит к рассмотренному выше решению, известному из [104]. Хотя такие решения часто другие решения. Они приближены и основаны на разных параметрах деформации с распределениями нормальных и касательных напряжений в сечении — см. обзор [121, 124]. Взаимодействие деформации с деформацией в деформированном состоянии рассмотрено в [41].

2.4. Влияние деформаций на ось на продольный момент деформированных профилей. Для несимметричного деформированного профиля интегрирование в (8.14) и (8.15) приводит к следующим выражениям:

$$\frac{I_{00} F_0}{\sqrt{1+\gamma^2 Z_{00}^2}} - \frac{I_{00} F_0'}{\sqrt{1+\gamma^2 Z_{00}^2}} + \frac{F_0}{\gamma^2} (\gamma^2 Z_{00}^2 - \sqrt{1+\gamma^2 Z_{00}^2}) = 0; \quad (8.22)$$

$$M_0 = G_T F_0 \gamma \left[\frac{Z_{00}^2 F_0}{\sqrt{1+\gamma^2 Z_{00}^2}} + \frac{Z_{00}^2 F_0'}{\sqrt{1+\gamma^2 Z_{00}^2}} + \frac{F_0}{2\gamma^2} (\gamma^2 Z_{00}^2 \sqrt{1+\gamma^2 Z_{00}^2} + \gamma^2 Z_{00} \sqrt{1+\gamma^2 Z_{00}^2} - \text{Arsh } \gamma Z_{00} - \text{Arsh } \gamma Z_{00}') \right]; \quad (8.23)$$

$$Q_0 = \frac{1}{2} G_T F_0 \left[\frac{F_0}{\sqrt{1+\gamma^2 Z_{00}^2}} + \frac{F_0'}{\sqrt{1+\gamma^2 Z_{00}^2}} + \frac{F_0}{\gamma^2} (\text{Arsh } \gamma Z_{00} + \text{Arsh } \gamma Z_{00}') \right]. \quad (8.24)$$

Этих типов не обобщения, как в виде (здесь не указано). Деформация обобщения: $F_0' = F_0 - F_0'$ — деформация площади сечения; $Z_{00}' = Z_{00} / h$ — отстояние от нейтральной оси соответствующего сечения к сечению, отнесенное к h ; $Z_{00} + \gamma Z_{00}' = 1$; $\gamma = \gamma h$ — безразмерный параметр.

Для симметричного деформированного профиля $Z_{00} = Z_{00}'$ и $F_0 = F_0'$; (8.22) удовлетворяется тождественно, а (8.23) и (8.24) приобретают вид

$$M_0 = G_T F_0 \frac{1}{\gamma} \left[\frac{F_0 + \frac{1}{2} (1+\gamma^2) F_0}{\sqrt{1+\gamma^2}} + \frac{F_0}{4\gamma} \text{Arsh } \gamma \right], \quad (8.25)$$

$$Q_0 = \frac{1}{2} G_T F_0 \left(\frac{2 F_0}{\sqrt{1+\gamma^2}} + \frac{F_0}{\gamma} \text{Arsh } \gamma \right),$$

где $\gamma = \frac{1}{2} \gamma$ — безразмерный параметр.
 $F_0' = 0$; $F_0 = 1$ — деформация профиля

$$M_0 = M_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_0^2}} \left(\nu_0 \sqrt{1 + \nu_0^2} - \text{Arsh } \nu_0 \right); \quad (8.26)$$

$$Q_0 = Q_0 \frac{1}{\nu_0} \text{Arsh } \nu_0.$$

У идеального профиля $\bar{F}_0 = 0$; $\bar{F}_0 = \frac{\pi}{2}$ и

$$\left(\frac{M_0}{M_0} \right)^2 + \left(\frac{Q_0}{Q_0} \right)^2 = 1 \quad (8.27)$$

Известно, что зависимость $M_0 = M(Q)$ симметрична дугообразно относительно оси Q и имеет вид $M_0 = M(Q)$. Это видно из рис. 28, а: кривая $M_0 / M_0 - Q_0 / Q_0$ для идеального профиля ($\bar{F}_0 = 0, 5$) и прямоугольного профиля ($\bar{F}_0 = 0$) сливается друг с другом, а две зависимости для симметричных дуготворов ($0 < \bar{F}_0 < 0, 5$) расходятся отсюда вниз. Следовательно, если основание для перемещаемых дуготворов расположено в предельном расчете зависимость (8.27). Влияние несимметричного профиля на $M = M(Q)$ можно оценить по рис. 28, б, где представлены результаты расчетов для случая $\bar{F}_0 = 0$. Из рисунка видно, что с увеличением несимметрии дуготворного профиля степень влияния $\bar{Q}$ на предельный момент уменьшается. Для кривых профилей с произвольными контурами можно получить аналогичные.

8.5. О влиянии продольных и поперечных сил на предельную нагрузку балки. Влияние продольных и поперечных сил на предельную нагрузку балки определяется двумя факторами: влиянием N и $\bar{Q}$ на предельный момент сечения и влиянием N и $\bar{Q}$ на форму пластического механизма, ко-

торый образуется в балке после достижения предельного состояния.

Известно, что влияние продольных сил на пластический механизм зависит от того, как продольная нагрузка влияет на предельный момент сечения. Однако в той же мере известно, что при наличии продольных сил распределение напряжений в балке становится гораздо чувствительнее к изменению ее геометрии и размеров деформаций, чем при поперечном изгибе, когда $N = 0$.

В итоге, в гл. 3, показано, что продольные силы не могут изменить форму пластического механизма идеализированной балки и, следовательно, их влияние на предельную нагрузку связано только с изменением предельного момента сечения. Однако в той же мере известно, что при наличии продольных сил распределение напряжений в балке становится гораздо чувствительнее к изменению ее геометрии и размеров деформаций, чем при поперечном изгибе, когда $N = 0$.

В результате идеализация балки при изгибе, балки и продольной, может быть изменена: балка может фактически потерять несущую способность при изгибе только продольной, но может и продольно воспринимать нагрузку балки продольной, но деформации. Поэтому при $N \neq 0$, как правило, идеализация продольной нагрузки недостаточно, необходимо оценить влияние балки в предельном состоянии с учетом изменения ее геометрии, что является предметом главы 3.

Влияние продольных и поперечных сил, как показано в § 17, может привести к существенным изменениям формы пластического механизма балки. При этом $\bar{Q} / Q_0$ для продольных нагрузок остается справедливым для идеализации балки. Влияние того, как видно из рис. 28, при этом $\bar{Q} / Q_0$ их влияние на предельный момент увеличивается. Поэтому практически для длинных и жестких балок одного набора влиянием перемещаемой силы на предельную нагрузку балки можно пренебречь. Влияние на предельную нагрузку балки продольных и поперечных сил, в частности на идеализацию дуготворов с полной осевой тем длинных стержней и фактов, рассмотрено в § 17.

3.1. Особенности расчета прямых балок. Для плоских прямых балок в составе стальной конструкции обычно характерны малые отношения высоты балки к радиусу кривизны ее оси (меньше 1/15). Это позволяет при рассмотрении напряжений и деформаций в сечении такой балки использовать соотношения, полученные для прямых балок. Поэтому и особенности расчета в данном случае связаны лишь с особенностями эпюр изгибающих моментов, продольных и поперечных сил, а также форм графиков пластических механизмов.

Среди перемещений следует выделить особый род — вращательный продольный сдвиг. Проиллюстрируем это на примере расчета криволинейного стержня на сжатие (рис. 29). В сечении такого стержня возникает изгибающий момент и продольная сила.

$$M(x) = T \sin \alpha; \quad N(x) = - \frac{T}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2}}, \quad (3.1)$$

где α — ордината недеформированной оси стержня.

Из (3.1) видно, что $M(x)$ и $N(x)$ имеют экстремальные значения в сечении изгибающей. $\alpha_{\max} = M_{\max} / T$; $M_{\max} = T \alpha_{\max}$; $|N|_{\max} = T$. Следуя процедуре статического метода, для определения предельной нагрузки T_0 нужно приравнять $M_{\max}$ предельному моменту сечения M_N , что дает

$$T_0 = \frac{M_N}{\alpha_{\max}}; \quad (3.2)$$

Если в этом элементе перерезывающая сила не превышает состояния сжатия балки не учитывается; продольная сила N считается перпендикулярной плоскости поперечного сечения.



Рис. 29. Сжатый криволинейный стержень.



Рис. 30. Изгибаемая.



Рис. 31. Схема арки (а) в деформированном состоянии (б).



Рис. 32. Схема кругового кольца (а) в деформированном состоянии (б).



Рис. 33. Схема эллиптического кольца (а) в деформированном состоянии (б).

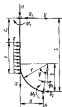


Рис. 34. Прямой стержень.

M_N должно вычисляться с учетом влияния проекции цепи N (см. § 8). Поэтому (9.2) имеет справедливость для случаев, когда M является предельный момент стержня $M_N = M(N)$. (Тогда вместо $M_{\text{изг}}$ следует написать в скобках значение $M_N = M(N)$). В противном случае необходимо использовать значение $M_N = M(N)$ или же стержня, когда стержень $L = C$, где отношение между ними равно единице, тогда стержень можно считать бесконечным, и берется момент M произвольной длины стержня относительно его торца $\frac{M(C)}{M(N)} = 1$. (Эти случаи не имеют принципиального значения).

определение проекционных нагрузок более переменного действия, см. § 7.) В последующих примерах не ограничимся рассмотрением случаев, когда положение пластических шарниров определяется только положением стержневых изгибающих моментов. (Включение составляет расчет армостальных элементов.)

[illegible]

9.2. Натяжной. Натяжной участок является стержнем, ось которого состоит из произвольного участка и соединяется с ним пути симметрии. Стержень нагружен сжатием и имеет в конце, действующий параллельно произвольному участку (рис.30). Натяжной элемент в продольном сечении на произвольном участке

$$M(\varphi) = 2 \rho r \sin \left(\alpha_0 - \frac{\varphi}{2} \right); \quad N(\varphi) = -\rho \cos \left(\alpha_0 - \frac{\varphi}{2} \right); \quad (9.3)$$

100% **REPUTATION** **GUARANTEED** **OR** **YOUR** **MONEY** **BACK**

$$M(\vartheta) = \rho r (1 - \cos \alpha_0) ; \quad N(\vartheta) = -\rho r, \quad (2.4)$$

Из (3.3) и (3.4) видно, что выходящий изгибный момент $M_{\text{вых}}$ действует на прямоугольном участке. Приравняв его M_{H_0} к величине предельной нагрузки

$$\rho_0 = \frac{M_N}{\pi(1 - \cos \alpha_0)} \quad (9.5)$$

M_N вычислена с учетом $|N| = P$ — так же максимизировано значение функции цели.

У.3. Апп. Рассмотрим круглую арку с кривоизогнутым профилем, симметрично загруженную сосредоточенной силой P (рис.31,а). Для получения арки, если отбросить подпорку и заменить ее действиям реакциями опор (рис.31,б) в сечении $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$, симметричные разрезные надрезные моменты, продольные и поперечные силы одинаковы. Тогда надрезные моменты и продольные силы в произвольном сечении можно выразить так:

$$\left. \begin{aligned} M(\Psi) &= -M_p - \frac{\rho r}{2} (1 - \sin \Psi - \cos \Psi); \\ N(\Psi) &= -\frac{\rho}{2} (\sin \Psi + \cos \Psi). \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Из (9.6) легко установить, что $M(\varphi)$ имеет три экстремума: при $\varphi = 0$; $\pi/4$; $\pi/2$. Поэтому для обоснования статистической независимости колы контролируемой (см. § 4) необходимо, чтобы в этих трех положениях магнитный момент с учетом его знака равнялся нулю. Тогда ни в одном сечении арки магнитный момент не превышает предельный. Заметим теперь, что, расположив в сечении контролируемой $M(\varphi)$ пластинчатый шарнир, мы получим механизм с одной степенью свободы. Шарнир в сечении сои одной и в шарнире в арке для этой цели недостаточны.

Из (9.4) $M(0) = M(\pi/2) = -M_1$. Послед-
ний мы должны считать предельным моментом сечения, вычисленным
при $N = N(0) = N(\pi/2) = P/\sqrt{2}$. Тогда, согласно к (9.4)
 $M(\pi/4) = -M_1 + \frac{P\sqrt{2}-P}{2}$ и предпр., чтобы не расхо-
дились M_2 - предельному моменту сечения, вычисленному при
 $N = N(\pi/4) = -P/\sqrt{2}$,
получим уравнение для опре-

величина продольной нагрузки P_0 . Она даст

$$P_0 = \frac{2}{\sqrt{2}-1} \frac{M_1 + M_2}{r} \quad (9.7)$$

(Результат для arcs другой формы см. в [116].)

9.4. Кольцо. Рассмотрим круговое кольцо, растянутое силами P (рис. 32, в). Рассуждая по тем же соображениям, что и в предыдущем параграфе, нетрудно убедиться, что в этих сечениях продольная сила не возникает. Поэтому расчет растянутого кольца можно свести к расчету сплошного цилиндра. Находящийся момент здесь $M(x) = M_0 - \frac{P}{2} x$ имеет максимум в сечении, где приложены силы P , и равен нулю в сечении, где $M_0 = M_{max} = \frac{P}{2} r$. Полагая, что M_0 — продольный момент сечения при $N=0$, и приравняв M_{max} продольному моменту M_0 , получим

$$P_0 = 2 \frac{M_0 + M_1}{r}; \quad (9.8)$$

M_1 вычисляется при $N = P/2$ — значение продольной силы поперечные пролеты получаются.

Рассмотрим статическое кольцо, нагруженное равномерно распределенным давлением внутренностью q (рис. 33, в). Угловой симметрией, выходя четверть кольца (рис. 33, в), из условия равновесия которой $R_1 = q a$, $R_2 = q b$. Выражения кинематического момента здесь

$$M(y) = M_1 - \frac{q}{2} \frac{a^2 - b^2}{b^4} y^2, \quad (9.9)$$

при составлении которого уравнение заданное дано в виде

$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Из (9.9) следует, что $M(y)$ имеет два экстремума: при $y=0$ и $y=b$. Сила соответствующая M , продольным моментом сечения при $|N| = R_1 = q a$ и приравняв $M(b) = M_2$ — продольному моменту сечения при $|N| = R_2 = q b$, получим выражение продольной

нагрузки

$$q_0 = \frac{M_1 + M_2}{a^2 - b^2}. \quad (9.10)$$

Здесь предполагается $a > b$. При $a \approx b$, когда величина b^2 по сравнению с a^2 можно пренебречь, и $M_1 = M_2 = M_0$ (9.10) совпадает с выражением для продольной нагрузки сплошного диска с внутренним отверстием по формуле. При $a = b = r$ (9.10) дается смысл: в круглом кольце, нагруженном равномерно распределенной нагрузкой, кинематические моменты равны нулю и возникают только продольные силы $N = q r$. Продольная нагрузка здесь составляет при $N = M_0$ и равен $q_0 = N_0 / r$. При этом формула в (9.10) $M_1 = M_2 = 0$, формула дает неопределенность $0/0$, и кольцо можно рассчитывать только на устойчивость.

9.5. Криволинейный минимизатор. Рассмотрим криволинейный минимизатор, форма которого может быть аппроксимирована дугой, соединяющейся с дугой окружности (рис. 34). На части своего пролета он нагружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q . (Такая схема соответствует нагружению дуги окружности сплошной нагрузкой при малых поворотах или при малых углах, если минимизатор можно рассматривать как криволинейную балку.) Для конкретизации задачи рассмотрим, что нагрузка расположена в пределах криволинейной части дуги и может рассматриваться как криволинейная часть дуги по малым углам. (Граница этого участка будет установлена ниже.)

При расчете дуги статическим методом статическое допущение поле напряжений может быть сделано в двух вариантах: кинематический момент в сечении кольца имеет одно- или двухзначный (вариант 1) или разный знаки (вариант 2). Вариант 1 приводит к малому кинематическому моменту, совпадающему с кинематическим моментом балки длиной l ; соответственно совпадает и продольная нагрузка. Поэтому здесь достаточно рассмотреть вариант 2, а в соответствии со статической кинематической теоремой (см. § 4) затем выбрать тот из них, который дает большую продольную нагрузку. Рассмотрим условия в сечении кольца показанном на рис. 34. Исходя из условия равновесия балки

$$R_1 - q c + R_2 = 0; \quad q c (c + \frac{c}{2}) - R_1 l + M_0 = M_1 - M_2 = 0 \quad (9.11)$$

Нагибающий момент в продольном сечении на нагруженной части промежуточного участка

$$M(x) = M_1 - R_1 x + \frac{q(x-c_0)^2}{2}, \quad N(x) = -H \quad (9.12)$$

и на ненагруженной части промежуточного участка

$$\left. \begin{aligned} M(y) &= -M_2 - R_2(b-r \cos \varphi) + H(a-r+r \sin \varphi); \\ N(y) &= -R_2 \cos \varphi - H \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

На промежуточном участке $M(x)$ имеет две экстремумы. Один расположен в сечении вышки, другой - в нагруженной части балки и может быть найден из (9.12) с использованием условия

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0. \quad \text{Последнее дает следующую экстремуму}$$

$$c_m = c_1 + \frac{R_1}{q}. \quad (9.14)$$

Выяснив условия экстремальности под напряжением, потребуем, чтобы оба экстремальных значениягибающего момента с учетом знака равнялись предельному моменту сечения. Это дает

$$M_1 - R_1 \left(c_1 + \frac{R_1}{q} \right) + \frac{R_1^2}{q} = -M_2, \quad (9.15)$$

где M_1 и M_2 - предельные моменты сечения, вычисленные при $N = N_1 = (N_1)_p = -H$. Так как в рассматриваемых сеченияхгибающие моменты имеют разные знаки, M_1 и M_2 могут иметь разные значения (см. § 8). На промежуточном участке $M(y)$ также имеет два экстремума: один в сечении вышки; расположение второго выведем из условия $\frac{dM(y)}{dy} = 0$. Последнее по (9.13) дает

$$\varphi_m = \arctg \frac{H}{R_2}, \quad (9.16)$$

и исходя из условия экстремальности под напряжением

$$-M_2 - R_2(b-r \cos \varphi_m) + H(a-r+r \sin \varphi_m) = M_1, \quad (9.17)$$

где M_2 - предельный момент сечения, вычисленный при

$$N = N_2 = -R_2 \cos \varphi_0 - H \sin \varphi_0, \quad \text{а } M_1 - \text{ предельный момент при } N = N_1 = -R_2 \cos \varphi_m - H \sin \varphi_m.$$

Здесь мы предполагаем, что φ_m относится к ненагруженной части балки.

Уравнения (9.14), (9.15) и (9.17) имеют равную неизвестную как систему, решения которой являются неизвестными величинами R_1 , R_2 , H и предельная нагрузка q . Если, однако, будем предполагать (9.14) для c_m и (9.16) для φ_m , а также условия экстремальности сечения, связывающие M и N в предельном состоянии, а значения N в сечении, гдегибающий момент имеет экстремум. Все эти величины зависят от неизвестных реакций. Решение такой системы возможно только численно.

Отметим, что полученные выше результаты относятся кравелым, если учесть только влияние продольной силы на поперечное сечение, где отклонениегибающего момента и продольную моменту сечения незначительно (связано только с силами приращивания стержня). Для промежуточной части стержня это справедливо, ибо здесь $N = \text{const}$, а, значит, c_m по (9.14) незначительно меняется. Для промежуточной части величину φ_m можно считать исходя из условия макс. $|M(y) - M(N)|$, где $M(N)$ - предельный момент сечения, вычисленный от N . Это может быть проверено, если $\frac{dM(y)}{dy} - \frac{dM(N)}{dN} = 0$. Учитывая, что

$$\frac{dM(N)}{dN} = \frac{dM(N)}{dN} \frac{dN}{d\varphi} \quad \text{и используя (9.13), получим}$$

$$-R_2 r \sin \varphi_m + H r \cos \varphi_m - \frac{dM(N)}{dN} (R_2 \sin \varphi_m - H \cos \varphi_m) = 0$$

или

$$\left(1 - \frac{R_2}{H} \operatorname{tg} \varphi_m \right) \left[1 + \frac{1}{r} \frac{dM(N)}{dN} \right] = 0$$

$$\text{Так как } 1 + \frac{1}{r} \frac{dM(N)}{dN} \neq 0, \quad \text{то } 1 - \frac{R_2}{H} \operatorname{tg} \varphi_m = 0,$$

а последнее приводит к (9.16).

В качестве примера приведем результаты расчета по изложенной методике аналоговой системы расчетного троллея СИТ-300. В расчете принято: $l = 2,70$ м, $a = 1,40$ м, $b = 1,64$ м,

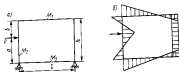


Рис. 35. Схема (а) и эпюр изгибающих моментов (б) простой прямоугольной рамы.

Механизм 2 - механизм перегиба (рис. 36, б). Работа механизма сама остается такой же, как у механизма 1; угол сдвига по всем шарнирам по абсолютному значению одинаков и равен $\theta = r/a$; изгибающие моменты $D = 2(M_1 + M_2)\theta$. Прокладки $\bar{D}$ и $\bar{D}$, получим

$$P_0^2 = (M_1 + M_2) \frac{2}{a}. \quad (9.19)$$

Механизм 3 - комбинированный (рис. 36, в). Он получается сложением механизмов перегиба и сдвига. При этом, чтобы комбинированный механизм имел только одну степень свободы, нужно исключить шарнир в верхнем левом углу, где угол сдвига у соседних механизмов имеет противоположные знаки. Работа механизма сам здесь остается той же; угол сдвига в шарнирах

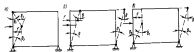


Рис. 36. Пластические механизмы рамы: а - сдвиг; б - перегиб; в - комбинированный.

$\theta_1 = \theta_2 = r/a$; $\theta_3 = \theta_4 = r/a$; изгибающие моменты $D = M_1\theta_1 + M_2(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$; прокладные нагрузки

$$P_0^2 = M_1 \frac{1}{h} + M_2 \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{h} \right). \quad (9.20)$$

В соответствии с канонической предельной теоремой (см. § 4) по трем заданным значениям P_0 нужно выбрать значение $h > h$, $P_0^2 > P_0^2$, и, следовательно, механизмы 1 и 2 должны реализоваться по крайней мере (9.19) и (9.20), поэтому получим, что $P_0^2 > P_0^2$ при $\frac{M_2}{M_1} < \frac{2h}{a} - 1$. Таким образом, окончательно

$$P_0 = \begin{cases} (M_1 + M_2) \frac{2}{a} & \text{при } \frac{M_2}{M_1} \geq \frac{2h}{a} - 1; \\ M_1 \frac{1}{h} + M_2 \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{h} \right) & \text{при } \frac{M_2}{M_1} < \frac{2h}{a} - 1. \end{cases} \quad (9.21)$$

Вопрос нагрузки с заданными расчетами для более подробного рассмотрения, например, в [13].

§ 10. Кручение. Прокладные нагрузки имеют несимметричную и поперечную нагрузку.

10.1. Частая нагрузка. Прокладные моменты сечения. Начнем со стороны кручения сечений и рассмотрим процесс развития в нем пластических деформаций. В упругой стадии распределение касательных напряжений τ в сечении вдоль радиуса линейно (рис. 37, а). С ростом крутящего момента M_K касательные напряжения в точках у центра сечения достигают τ_T - предела текучести при сдвиге, и затем здесь возникает область пластической зоны, которая при дальнейшем увеличении M_K будет расширяться в направлении к центру сечения (рис. 37, б). Когда пластическая зона достигнет центра (рис. 37, в), все сечение окажется охваченным пластическими деформациями, что является его предельным состоянием.

Крутящий момент $M_{K\text{пл}}$, соответствующий сечению в предельном состоянии, - предельный момент сечения при кручении, - можно вычислять

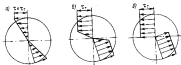


Рис. 37. Напряжения в сечении круглого стержня при кручении: а - упругий стержень; б - упруго-пластический стержень; в - предельное состояние.

или

$$M_{\text{ок}} = 2\pi \int_0^R \tau_r r^2 dr = \tau_r \frac{\pi D^3}{12}, \quad (10.1)$$

где D - диаметр сечения.

Пример текучести при сдвиге по условию пластичности Треска $\tau_r = \sigma_r/2$, по условию пластичности Мизеса $\tau_r = \sigma_r/\sqrt{3}$

(см. § 2). Тогда предельный

$$M_{\text{ок}} = \tau_r W_{\text{ок}}; W_{\text{ок}} = \frac{\pi D^3}{12}, \quad (10.2)$$

где $W_{\text{ок}}$ - предельный момент сопротивления сечения при кручении.

Полный момент сопротивления круглого сечения, как известно, $W_p = \frac{\pi D^3}{16}$ и $W_{\text{ок}}/W_p = 1,33$.

При расчете кольцевого сечения рассуждения совершенно аналогичны, и

$$W_{\text{ок}} = \frac{\pi (D^3 - d^3)}{12}, \quad (10.3)$$

где d - внутренний диаметр кольца.

Для кольцевого кольцевого сечения

$$W_{\text{ок}} = \frac{\pi D^3 t}{12}, \quad (10.4)$$

где t - толщина кольца.

Задачу определения предельного момента сечения при кручении можно решить и в общем виде для сечений произвольной формы. Для частного кручения характерно ассоциирование в поперечном сечении стержня только касательных напряжений, т.е. $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$. (Ось x совмещена с осью стержня.) Тогда дифференциальные уравнения равновесия (см. § 2) сводятся к

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0.$$

Оно удовлетворяется, если

$$\tau_{xy} = \tau_r \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad \tau_{xz} = -\tau_r \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (10.5)$$

где $\psi = \psi(y, z)$ - функция напряжений.

Главные касательные напряжения в плоскости сечения

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \quad \text{в предельном состоянии должны быть равны}$$

τ_r . Откуда

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 = 1. \quad (10.6)$$

На контуре сечения τ должен быть направлен по касательной к контуру. Для однозамкнутого контура это условие в (10.6) удовлетворяется, если ψ - поверхность равного света, ограниченного на контур. Разными радиусами кривизны и внутренним или в сечении или с учетом (10.5)



Рис.38. Схемы поверхности равного сдвига для прямоугольного контура (а) и контура, составленного из прямоугольников (б).



Рис.39. Деформация сдвига в наборе при кручении.



Рис.40. Схема несимметричного профиля.

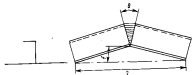


Рис.41. Схема деформации сдвига.



Рис.42. Векторный набор (а) и набор с векторным свободным полем (б).

$$M_x = - \iint (\tau_{xy} z - \tau_{xz} y) dy dz = 2 \tau_z \iint y dy dz. \quad (10.7)$$

Таким образом, для сечения с осями симметрии контуром параллельный момент сосредоточен при кручении перпендикулярно направлению действия силы, сдвигающего плоскостное сечение и поверхности равного сдвига, которая образуется из его контур. Нормаль к поверхности равного сдвига, как известно, имеет постоянный угол с нормалью к ее основанию, равный 45° . Для круглого сечения диаметром D эта поверхность имеет вид кругового конуса высотой $\frac{1}{2} D$; для прямоугольного для профиля, составленного из прямоугольников, он имеет вид "крыш" (рис.38). Различные поперечные для последних контуров вычислять W_{ox} , пользуясь элементарными геометрическими представлениями. Так, для прямоугольного профиля (рис.38,а) высота "крыш" равна $b/2$ и

$$W_{ox} = \frac{b^3}{6} (3h - b). \quad (10.8)$$

Для вытянутого прямоугольника (п а л о с), когда $h \gg b$,

$W_{ox} \approx \frac{b^3 h}{3}$. Эта формула при $h/b \gg 12$ дает ошибку менее 3%. Для профиля, составленного из вытянутых прямоугольников (табл. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000).

$$W_{ox} = \frac{1}{2} \sum b_i^2 h_i, \quad (10.9)$$

где b_i и h_i - соответственно толщина и высота i -го элемента профиля; K - число прямоугольных элементов в профиле.

где F_+ и F_- — плотности в верхней и нижней частях плоской системы соответственно; S_+^H и S_-^H — статические моменты F_+ и F_-

относительно нейтральной оси.

Обозначим, как и ранее, $F_H = b\epsilon$; $F_C = h\delta$; $F_H^1 = b_1\epsilon_1$; $F = F_H + F_C + F_H^1$. Кроме того, введем безразмерные коэффициенты $0 \leq \eta_1 \leq 1$ и $0 \leq \eta_2 \leq 1$, считая, что $\frac{F_H^1}{F_H} \eta_1$ — плотность части плоской системы продольного пояса при $y > 0$, $\frac{F_H^1}{F_H} \eta_2$ — то же самое для второй половины продольного пояса при $y < 0$. Тогда

$$F_- = F_H + F_C + \frac{F_H^1}{2} (\eta_1 + \eta_2); \quad (10.16)$$

$$F_+ = \frac{F_H^1}{2} (2 - \eta_1 - \eta_2).$$

Подставляя это в (10.11), получим

$$F_H + F_C - F_H^1 (1 - \eta_1 - \eta_2) = 0. \quad (10.17)$$

Статические моменты здесь вычислим как $S_+^H = h \left(F_H + \frac{F_C}{2} \right)$; $S_-^H = 0$, и после подстановки в (10.12) получим

$$M_H = G_T S_+^H - G_T h \left(F_H + \frac{F_C}{2} \right). \quad (10.18)$$

Третье уравнение (10.10) представим так

$$\int_0^1 y dy dF = G_T \int_{F_+} y dy dF - G_T \int_{F_-} y dy dF; \quad (10.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{F_+} y dy dF - F_H \frac{b}{2} + \frac{F_H^1 b_1}{4} \eta_1 - \frac{F_H^1 b_1}{4} \eta_2; \\ \int_{F_-} y dy dF - \frac{F_H^1 b_1}{4} (1 - \eta_1) - \frac{F_H^1 b_1}{4} (1 - \eta_2). \end{aligned} \right\} \quad (10.20)$$

Это приводит к уравнению

$$F_H b + F_H^1 b_1 (\eta_1 - \eta_2) = 0. \quad (10.21)$$

Решая совместно (10.17) и (10.21), найдем

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{F_H}{F_H^1} \left(1 + \frac{F_C}{F_H} + \frac{b}{b_1} \right) \right]; \\ \eta_2 &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{F_H}{F_H^1} \left(1 + \frac{F_C}{F_H} - \frac{b}{b_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.22)$$

Решая эти уравнения относительно η_1 и η_2 , получим пределы, в пределах которых определено данное решение:

$$\frac{F_H}{F_H^1} \left(1 + \frac{F_C}{F_H} + \frac{b}{b_1} \right) \leq 1. \quad (10.23)$$

Таким образом, при выполнении (10,20) все участки (10,10) упругоупрочнены, и, следовательно, пружина после нагружения является статически прочным. Ему отвечает предельный момент равенный по (10,13), что совпадает с максимальным предельного момента упругоупрочненного профиля с симметричным поперечным сечением (5,3). Это значит, что совпадают в значении предельный изгибный момент, найденный статическим методом.

Решая эту задачу кинематическим методом, можно заметить, что максимальное поле перемещений складывается образом (рис.41): деформированный ось балки представляет собой кривую, состоящую из двух отрезков прямых и кривую в срединной плоскости сечения. Для балки остается жесткой на изгибном сечении в районе средин, где развиваются пластические деформации (на разрыв на изгибном сечении); вершины сечения имеют в предельном состоянии жесткие перемещения не изменяются.

Поскольку ось вращения поперечного балки, оставшаяся жесткой, имеет в предельном состоянии жесткие, материал обогнутости профиля будет испытывать только растягивающие продольные удлинения. Других компонентов деформаций здесь не возникает. Поэтому в деформированном виде жестко жестко только нормальные напряжения, равные

σ_T . Момент, который они создают относительно оси вращения, равен (10,22) - предельному моменту симметричного профиля. Энергия рассеивания здесь $D = M_0 \theta - M_0 \frac{\theta^2}{2}$. Это число не отличается от результатов, полученных в § 4 и 5.

Таким образом, рассмотренные различные статические и кинематические методы дали одинаковые результаты. Это в соответствии с экстремальными теоремами теории предельного равновесия (§ 4) свидетельствует о том, что они являются точными. Однако следует указать: несимметричный профиль вращающейся балки ограниченной (10,20) не подвергнется нагрузке балки не вращается. Для равных балок сдвигного изгиба (10,20) практически всегда выполняется.

В предельном состоянии рассматриваются изогнутые балки изгиба. Возможность распределения результатов равновесия на пластичность, поперечную несимметричность балки, не сдвига и балки проверены статическим методом на моделях, которые представляли собой элемент оболочки с двумя балками изгиба, как на рис.39. В эксперименте наблюдались: сдвигательный разрыв элемент про-

фили, его форма (угловой профиль несимметрично составленным с теоретическим профилем), относительно расположения (линии с угловыми линиями, поперечными линиями в одну сторону, в разные стороны), пружин балки, участки их закрепления (спирально отгибание и жесткая заделка), толщина пластичной оболочки и пр. Всего было получено 62 модели. В большинстве модели имели жесткие опоры. Несогласие нагрузки было распределено на балки в части пружин балки и приращивалось в плоскости их сечения (пластичная оболочка между балками изгиба не изгибалась).

Эксперименты дали следующие результаты:

1. Балки несимметричного профиля балки не имеют изгибную способность на обдувание. Протяженные нагрузки балки углового и теоретического профиля при одинаковых предельных моментах сопротивлялись одинаково приблизительно одинаково.

2, 3. Угловой сдвиг оболочки отклонялся отклонения несимметричного изгиба от сдвиг несимметричного сечения (закручивания) - см. рис. 39. Соотношение с угловым равновесием (см. § 34 и [20]) было примерно количественно соответствия. Однако разный рост этих отклонений имел место лишь при жестком предельном состоянии. В большинстве случаев происходило изменение знака отклонений: в предельном состоянии изгиб балки резко отклонялся в направлении, противоположном направлению сдвига, в то время как в угловом сдвиге.

Этот эффект можно объяснить тем, что в состоянии, близком к предельному, резко возрастает "чувствительность" изгиба к малым крутящим моментам, возникающим вследствие случайных перекосов или эксцентриситетов в приложенной нагрузке. Эти моменты, приходящие на зажимы на работу изгиба в угловом сдвиге, вызывают отклонение его изгибания в предельном состоянии и определяют знак угла изгибания. Аналогичная картина в ряде случаев имеет место и у балки симметричного профиля. Однако несимметричный профиль проявляет существенно большую склонность к изгибанию. При этом естественно необходимо также помнить, что балки несимметричного профиля обладают меньшей устойчивостью кривой формы.

3. Балки жесткой несимметричности оболочки в направлении, перпендикулярном направлению изгиба, на предельную нагрузку изгиба не обдуваются. В угловом сдвиге жестко жестко оболочки соответствуют сдвигу на рис.39. Однако с развитием пластических деформаций в изгибе, когда началось формирование пластических из-

напря, рост средних обжатий между наборами прекращался (многие даже считались уменьшением прогибов), и в ней играя ось шарнира образовывалась слом. Играв роль поперечного ребра жесткости, слом осевых притягивал кгибу обжатия.

Аналогичные явления наблюдались при монтаже моделей о зномы толкой обжатия. Малые сжимающие напряжения в обжатия, возникающие вследствие кгибу набора и удерживающей стали, вызывали потерю устойчивости обжатия: в пластине возникали гофры со значительными стрелками прогиба. Однако во мере развития пластических деформаций в наборе в обжатия появлялись поперечный слом, обозначивший положение ее участка в кгибу набора как присоединенного полуса; величина потеря устойчивости обжатия на такую-то способность набора не обнаруживалась.

10.3. Переменная нагрузка базис поворотного набора. Сжимающее напряжение может быть легко обжатия и локализовано при рассмотрении поворотного набора, встречающегося в симметричных корпусах, когда стенки башки набора асимметричны обжатия (рис. 42, в). В отношении релаксации асимметрии напряжений в собственно профиле относительно оси Z при удовлетворении третьего уравнения равновесия (10.10), так же как в предыдущем разделе, компенсируется несимметрией распределения напряжений в присоединенном полусе (разный диаметр r_1 и r_2). Превышающий момент сопротивления в этом случае вместо (10.25) определяется законом

$$M_0 = \sigma_r h \left(F_0 + \frac{F_0}{2} \right) \cos \alpha, \quad (10.21)$$

где α — угол отклонения стенок набора от нормали к обжатия. Ограничивающее нормальное напряжение (10.20) приобретает вид

$$\frac{F_0}{F_N} \left[1 + \frac{F_0}{F_N} + \left(2 + \frac{F_0}{F_N} \right) \frac{h}{b_1} \sin \alpha \right] \leq 1. \quad (10.22)$$

При их выполнении и выполнении предельного момента осевыми по (10.21) методики определения предельных нагрузок базис поворотного набора не отличается от мето-

дики определения нагрузки базис принятого набора.

Судя по полученным результатам непереносимости у-напряжения свободного полуса плоскости стенки (рис. 42, б) такие конструкции встречаются в основном у поворотного набора при существенной кгибу кгибу обжатия) скорее не влияет на предельную нагрузку базиса.

Приведенные законы проверялись экспериментально на моделях, изготовленных из стали 45, и подтверждались как для симметричного, так и для несимметричного поворотного набора. Угол α варьировался от 0 до 30° . Разные статические поворотного набора после кгибу кгибу переменной нагрузки всегда происходило в сторону увеличения угла α до зависимости от формы набора. В экспериментальных статических обжатиях отклонения значений предельных нагрузок от их средних значений у поворотного набора до сближения с прямым набором. Это свидетельствует о снижении устойчивости работы конструкции в состоянии, близком к предельному, при малых поворотах набора.

Было также изготовлено четыре модели с башками такого профиля, имеющие различные свободные полусы (рис. 42, б). Отличия в их геометрии и в значениях предельной нагрузки по сравнению с обжатия, у которых имели перпендикулярные стенки, не обнаружено.

§ 11. Поведение конструкции
после достижения предельного состояния

11.1. Предельная нагрузка как критерий прочности. Роль геометрической нелинейности. Проведяшие нагрузки, вызванные с помощью теории предельного равновесия, отмечают переходу конструкции в предельное состояние, когда дальнейшее развитие пластических деформаций она приобретает в кинематическом или статическом механизме. Возникает при этом перемещение конструкции неупругим, ибо в теории предельного равновесия предполагается, что дальнейшее развитие конструкции происходит от деформирования трансформации массы (задача решается в геометрически нелинейной постановке).

Поскольку теория предельного равновесия не может ответить на вопрос, какими будут перемещения в конструкции после достижения предельной нагрузки. Ответ на этот вопрос имеет большое практическое значение. Прежде всего он связан с оценкой предельной нагрузки как критерия предельной прочности конструкции.

Если достижение предельной нагрузки вызывает в конструкции большие неупругие перемещения, то возникает ее разрушение, и предельная нагрузка может быть отождествлена с разрушающей нагрузкой. В этом случае можно считать, насколько точно предельная нагрузка характеризует момент разрушения, но может ее разрушения происходить при меньших нагрузках.

Если же достижение предельной нагрузки означает появление балки, но ограниченных перемещений, дальнейший рост которой

продолжит увеличивать несущие нагрузки, истеричность несущей способности конструкции не происходит. Тогда можно считать, как велика величина перемещения, насколько оно не превышает для предельной несущей способности конструкции. Однако, предельная нагрузка в этом случае как критерий предельной прочности играет другую роль, является качественно иной характеристикой.

Чтобы ответить на поставленные вопросы нужно учесть в расчете нелинейную геометрию конструкции, т.е. расчет сделать в геометрически нелинейной постановке. (При этом, конечно, нужно помнить, что в тогда решались вопросы о несущей способности конструкции не будет истеричности, ибо здесь не рассматриваются вопросы потери устойчивости, возникновения местных разрушений и др., см. также § 4.)

Геометрически нелинейные задачи отличаются две особенности: во-первых, возникающие равновесия конструкции выполняются над ее деформированным состоянием, поэтому в уравнениях равновесия появляются члены, содержащие перемещения; во-вторых, вследствие перемещения отпадают сбалансированные, в уравнениях, сбалансированные деформации и перемещения (уравнения Коши, см. § 2), упрощаются нелинейными членами. При этом элемент деформации конструкции (балка, пластина, оболочка) изменяется по геометрии определяется в конечном состоянии. Перемещения вдоль оси балки (в продольной плоскости) являются как оболочка) имеют сбалансированные силами. Это позволяет упростить анализ, если в уравнениях равновесия не все компоненты перемещений, а только продольная, в соотношениях уравнения Коши только те наименьшие члены, которые зависят от продольных.

При этом балка имеет учет изменения ее геометрии, как правило, осуществляется лишь в случаях, когда нагрузка с поперечной нагрузкой на балку действует продольные силы. Если последние заданы, тогда случаи прямого момента сложным образом изгибом балки и. Если распространяются также заданы, тогда продольные силы являются реактивными и возникают как результат принятых сбалансированных моменты балки при изгибе - реакции. Уравнения для балки от продольных сил и отталкивания не являются прямого момента сбалансированные целыми и упрощаются в выражениях. При рассмотрении более сложных конструкций: пластины и оболочки, а также рамы, которых также применяются стержней и др., учет влияния изменения геометрии осуществляется в тех случаях, когда большие продольные силы или распор существуют

11.2. Равновесие наклонной эллиптической дуги.

Для геометрической нелинейности, естественно, приводит к усложненному условию равновесия. Получение решений даже простых задач оказывается невозможным на элементарном. Здесь приходится использовать теорию предельного равновесия — ее простота, что немаловажно в инженерных расчетах. Поэтому применяемые методы, особенно простоту методов теории предельного равновесия, приходится ограничивать ее результаты учетом геометрической нелинейности. Рассмотрение идет в такой постановке и в дальнейшем рассуждениях.

В дальнейшем, как и в теории предельного равновесия, в теории применяются идеализации конструктивных элементов, но усложнение профилей считается существенным. Отсюда следует, что в рамках теории предельного равновесия приходится считать возможным определить положение конструкции после воздействия предельной нагрузки — единую предельную нагрузку как критерий предельной прочности — в ряде случаев достаточно можно определить профили конструкции при больших перетрузках, когда внешние нагрузки существенно не превышают предельные. Здесь остается применение статических и энергетических методов теории предельного равновесия, если ввести в них некоторые обобщения. Сказанное продемонстрируем на примере простых конструкций.

11.3. Статический метод. Рассмотрим шарнирную балку, нагруженную сосредоточенной силой P в середине пролета и вращательными моментами $M = \pm \frac{P\delta}{2}$ (рис. 43, а). Поскольку материал балки эллиптически-нелинейный, прогибы в ней происходят после образования пластического шарнира. Предполагаем, что ось балки при этом приобретает форму дуги, состоящей из двух стрелок кривых (эллиптических дуг на рис. 43, а). Решив задачу статическим методом теории предельного равновесия, нужно рассмотреть одну изгибную момент. Такая задача представлена на рис. 43, б и является результатом графического сложения изгибных моментов от поперечной нагрузки $M(x)$ и вращательной оси $N(x)$. (Для последнего несомненно, так как прогибы не считаются существенными.) Чтобы не нарушалось условие нелинейности, изгибающие моменты

$$M_z = N(x) - N_{\text{огр}} \quad (11.1)$$



Рис. 43. Схема балки (а) и изгибные моменты (б и в).

во всех сечениях не должны превышать предельного момента сечения балки M_H , который вычисляют с учетом влияния поперечной оси (см. § 8), т. е. $M_z \leq M_H$. Последнее есть условие пластичности после напряжений. На основе на рис. 43, б видно, что наибольшее значение M_H имеет посредине пролета и условия пластичности после напряжений будет выполняться, если потребовать $M_{z \text{ макс}} = M_H$. Разрешением $M_{z \text{ макс}}$, получим $\frac{P\delta}{2} - Nl = M_H$. Поскольку нам удалось удовлетворить условию $M_z \leq M_H$, приняв значение формы изогнутой оси балки в качестве предельной. Полученное выражение содержит неизвестную стрелку прогиба балки δ и

$$P = \frac{2}{l} (M_H + Nl), \quad (11.2)$$

т. е. рост прогибов должен соответствовать усложнению поперечной нагрузки P и, следовательно, предельные балки в шарнирных местах не означают конкуренции со стальной способностью. Это и есть результат влияния нелинейности геометрии балки.

Рассмотрим ту же балку, но в случае, когда прогибаемые силы — сжимающие. Эпюра моментов M_z представлена на рис. 43, в. Приравняем $M_{z \text{ макс}}$ к M_H , получим вместо (11.2)

$$P = \frac{2}{l} (M_H - Nl). \quad (11.3)$$

Из этого выражения видно, что увеличение пружины здесь должно сопровождаться уменьшением поперечной нагрузки P . В противном случае будет нарушена равновесная жесткость. Это также препятствует возникновению геометрии балки.

Статистическая особенность приведенных примеров по сравнению с определенным предельным нагрузкой балки при изогнутом изгибе (см. аналогичный пример в § 4 при $N = 0$) состоит в том, что равновесие пластического механизма рассматривалось относительно деформированного состояния балки. Это выражается в учете изгибающих моментов от провисания оси, зависящих от величины прогиба. Если считать прогибы весьма малыми и положить в (11.2) и (11.3)

$$f = 0, \text{ то } P = \frac{4M_1}{l}, \text{ что соответствует условию равновесия, определенному в недеформированном состоянии балки. Это означает } P = P_0 \text{ ось предельная нагрузка балки, которую дает теория предельного равновесия (§ 4). Таким образом, статически и с точки зрения теории предельного равновесия можно пользоваться для решения геометрических нелинейных задач, только разложить конструкцию только рассматривать лишь ее деформированное состояние.}$$

11.4. Кинематический метод. Напомним (см. § 4), что в кинематическом методе исследование равновесия кинематически возможного пластического механизма сводится к исследованию минимума возможных переменных

$$\frac{\partial U}{\partial q_k^*} = \frac{\partial D}{\partial q_k^*}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (11.4)$$

где q_k^* — обобщенные переменные. (Число q_k^* можно избирать по числу степеней свободы пластического механизма или числу сосредоточенных параметров, с точностью до которых задано поле переменных.)

В задачах теории предельного равновесия (геометрически нелинейно) работы внешних сил U и энергии рассеивания D — функции переменных. Поэтому там (11.4) использовались в форме $U = D$. В данном случае U и D — линейные функции переменных, а начало возможных переменных надо использовать в

деформированной форме (11.4).

Продолжим рассмотрение примера сжатого катящего балки (рис. 43, а). Как и ранее, катящийся формой ее изогнутой оси в катящем направлении, состоящий из двух отрезков прямых с пластическим изгибом поперечной нагрузки. Пластический механизм балки имеет одну степень свободы, и поэтому переменный угол его толка можно однозначно определить, зная, например, значение f — максимальной отрезка прогиба, которую в прямых и криволинейных обобщенных переменных. Тогда по (11.4) $\frac{\partial U}{\partial f} = \frac{\partial D}{\partial f}$. Рассчитаем энергию прогиба только в пластическом изгибе, где угол сжатия $\theta = \frac{2f}{l}$ и соответственно $D = M_1 \theta = M_1 \frac{2f}{l}$. Работу внешних сил представим как $U = P f - N u_1$, где u_1 — обобщенная координата балки при изгибе. Знак минус перед N связан с тем, что направление N и направление перемещения точки ее приложения (направление обобщенной координаты) противоположны. Величину u_1 выголим, полагая ось балки вертикальной. (Нагружено в общем виде момента, что на результате это не сказывается.) Имеем в виду, что изогнутая ось балки — ломаная, состоящая из двух отрезков прямых, выдем

$$u_1 = l - 2\sqrt{\frac{l^2}{4} - f^2} \approx l - l \left(1 - 2 \frac{f^2}{l^2}\right) = 2 \frac{f^2}{l}. \quad (11.5)$$

Дифференцируя U и D по f и приравняв результаты, получим

$$P - N \cdot 4 \frac{f}{l} = M_1 \frac{2}{l},$$

что приводит к формуле (11.2), полученной тем же статическим методом. Если провисание оси сжатой балки, прямо лишь помнить знак N и выражения для U . Все остальное останется без изменений, и мы приходим соответственно к (11.3).

Таким образом, кинематический метод теории предельного равновесия так же может быть использован для ре-

никая геометрически неопределимая задача, только при численном решении внешних и внутренних сил должны быть учтены дополнительные члены, отвечающие существующим при больших прогибах. (В данном примере - это работа сил M .) Следует также, что результаты, полученные статическим и динамическим методами совпадают. В начале теории предельного равновесия такое совпадение в силу ее экстремальных теорем свидетельствует о том, что найденное решение в рамках исходных предположений этой теории является точным. В данном случае подобное совпадение неслучайно, ибо на геометрически неопределимые задачи экстремальные теоремы теории предельного равновесия распространения быть не могут. Замечательностью положения см. в [8].

11.5. Устойчивость пластического течения. Обратимся к рассмотрению результатов выполненных нами примеров. По выражениям (11.2) и (11.3) видно, что изменение знака предельных сил M (илина релаксацию системы) при одном и том же величине приводит к качественному изменению характера ее работы после прекращения действия «возмущающей» пластической нагрузки. Если сила M - сжимающая, то бесконечно малое увеличение прогиба при постоянной поперечной нагрузке ($P = P_0$) порождает предельное равновесие изгиба. Суммарный изгибающий момент в шарнире возрастает, следовательно дальнейшее увеличение изгибающего момента от прогибов или, что эквивалентно, и ведет к дальнейшему увеличению прогибов. Если сила M - растягивающая, то бесконечно малое увеличение прогиба при $P = P_0$ уменьшает суммарный изгибающий момент; в конечном счете прогибы уменьшаются, материал тем переходит из пластического состояния в жесткое, шарнир исчезает, и дальнейший рост прогибов становится невозможным. Следовательно свидетельствует о том, что в рассмотренных случаях пластическое состояние имеет различные формы равновесия: при растяжении мы имеем устойчивое равновесие как устойчивое, при сжатии - как неустойчивое. Когда предельные силы нет и изменения геометрии неустойчиво для работы балки, условия равновесия пластического механизма (при $P = P_0$) не зависят от прогибов. Это свидетельствует о наличии бесконечной формы равновесия.

Прямые моменты пластического течения конструкции устойчивым, если обнаруживается после достижения предельной нагрузки пластический механизм имеет устойчивую форму равновесия; пластическое течение становится неустойчивым, если пластический механизм имеет неустойчивую форму равновесия. Исследования устойчивости пластического течения позволяет сделать вывод: предельной нагрузки как критерия предельной прочности. Если пластическое течение устойчиво, достижение предельной нагрузки не означает исчерпания возможностей конструкции, ибо дальнейшее изменение геометрии этой конструкции она может противостоять в больших нагрузках. Если пластическое течение неустойчиво, конструкция, следовательно, не может сопротивляться нагрузкам больше предельных. Если эти утверждения и оправданы только в рамках принятых нами допущений, эксперименты хорошо подтверждают сказанное [8].

Если же, если пластическое течение неустойчиво, разрушение конструкции может происходить при нагрузках меньших (а иногда и существенно меньших), чем предельная отрицательная величина изменения геометрии конструкции начинает проявляться уже в неупругом состоянии и даже упругой стадии ее работы и будет тем больше, чем меньше жесткость имеет эта конструкция. При устойчивом пластическом течении максимальные прогибы, что конструкция может выдерживать нагрузки, намного превышают предельную, и в этой стадии геометрически малейшие прогибы в неупругом состоянии для ряда жестко закрепленных пластических элементов означают значительные прогибы [8].

§ 12. Сильный изгиб балки. Роль распора

12.1. Соотношения деформирования балки при сильном изгибе.

Рассмотрим балку, нагруженную поперечной нагрузкой одного направления и продольным растягивающим усилием N (рис. 44,а). Наблюдение моменты M_E здесь определяются по (11.1). После прекращения продольной нагрузки на участках, где $M_E \leq M_N$, балка останется жесткой (жесткое упругое); на участках, где



Рис. 44. Силами балки (а) и эпюры изгибающих моментов (б).

$M_{\Sigma} = M_N$, переходит в пластическое состояние (пластический участок). Для подсчета, приравняв M_{Σ} по (11.1) предельному моменту M_N , можно сразу найти прогибы

$$w = \frac{1}{N} [M(x) - M_N]. \quad (12.1)$$

Если в пластическое состояние переходит не участок балки конечной длины, а только сечение, в нем образуется пластический шарнир. По (12.1) остается справедливым для сечения шарнира. Но (12.1) означает, что на шаре суммарных моментов M_{Σ} , если не строить путем графического сложения эпюры $M(x)$ и Nw , посещенные на пластическом участке будут эквивалентны. Это показано на рис. 44, б шарниром.

Эпюра $M(x)$ имеет один максимум, если поперечная нагрузка по длине балки одна не меняет. Тогда в пролете балки не может образоваться более одного пластического участка и, как следует из (12.1), максимальный прогиб f балки будет иметь в сечении, где изгибающий момент от поперечной нагрузки максимальный —

$$M(x) = M_{\max}:$$

$$f = \frac{1}{N} (M_{\max} - M_N). \quad (12.2)$$

Если предположить, что поперечная нагрузка изменяется пропорционально одному параметру P , а $N = const$, то для шарнирно-опертой балки $M_{\max} = bP$, где b — постоянная. При постоянной предельной нагрузке, когда балка превращается в пластический механизм, $P = P_0$ и $M_{\max} = bP_0 = M_N$. Тогда из (12.2) можно записать

$$f = \frac{M_N}{N} \left(\frac{P}{P_0} - 1 \right). \quad (12.3)$$

Изложенное справедливо и для балки с заделками на опорах: нужно лишь учесть дополнительные моменты, возникающие в пластических шарнирах заделок. Иногда известны участки балки, которые сформировались прогибами конца этих участков, которые известны. Это либо опоры, где $w = 0$, либо границы с пластическим участком, где w определяется (12.1). На рис. 44, в форма изогнутой оси на шаре M_{Σ} совпадает с формой Nw . (Вспомогательное построение грани участка рассмотрено ниже.)

В случае, если продольная сила N достигает предельного значения N_0 , предельный момент сечения $M_N = 0$ (см. § 8). Тогда по (12.1)

$$w = \frac{M(x)}{N_0}, \quad (12.4)$$

и это выражение справедливо для балки по всей длине. Заметим, что (12.4) — уравнение гибкой нити. Продифференцировав его дважды, получим

$$N_0 \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = q(x).$$

Таким образом, при $N = N_0$ балка превращается в гибкую пластическую нить, форма прогиба которой совпадает с формой эпюры изгибающих моментов от поперечной нагрузки.

12.2. Особенности расчета балок с распором. Одна из основных особенностей расчета балок с распором, когда продольные силы N возникают как следствие соединяемых опорной конструкцией препятствий сближению концов балки при изгибе, — необходимость определения величин этих сил, которые в процессе нагружения балки являются переменными. Для этой цели составляют уравнения совместности деформаций

$$w_1 = w_A + w_B, \quad (12.5)$$

где w_B — сближение концов при изгибе балки с вертикальной осью; w_A — то же для балки с распорной осью; w_B — аб-

Величину u_1 , как известно, вычисляют как

$$u_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (12.6)$$

Величину u_2 можно представить следующим образом:

$$u_2 = \int_0^l \varepsilon dx + \sum_{i=1}^r [\omega]_i, \quad (12.7)$$

где ε — одноосевые удлинения оси баки; $[\omega]_i$ — величина раскрытия продольных переменных на оси баки в i -м пластическом шарнире (см. ниже); r — число пластических шарниров в баке.

Чтобы определить u_4 , нужно знать жесткостные характеристики конструкции, соединяющей распор, — распорной конструкции. (Здесь рассматриваются только ее реакции на действие силы N .) Если эта конструкция является упругой, то

$$u_4 = AN, \quad (12.8)$$

где A — коэффициент жесткости распорной конструкции в одной ее точке; N — величина переменных в точке приложения единичной силы в направлении ее действия. При $A = 0$ — распор жесткий, при $A = \infty$ — распор отсутствует. Для характеристики жесткости распорной конструкции можно также пользоваться коэффициентом распора. Определим его как

$$k_p = \frac{N}{N_p}, \quad (12.9)$$

где N — продольная сила, возникающая в баке при наличии упругого распора; N_p — та же сила в другом, жестком распоре.

Если распорная конструкция представляет собой простейший упругий стержень с площадью сечения F_p и модулем упругости

E , в котором сила N вызывает сжатие (или растяжение) в плечи которого равны длине баки l , то коэффициент жесткости

$$A = \frac{2}{EF_p l}. \quad \text{Тогда для упругой баки это приводит к } k_p = \frac{F_p l_p}{F_p l},$$

где F_p — площадь сечения баки.

Для определения пластических удлинений оси баки u_2 используем ассоциированные законы в обобщенных напряжениях (см. § 3). При сложном нагружении баки в качестве обобщенных напряжений можно принять M_M и M_N — продольную силу и изгибающий момент в сечении. Тогда приращение работы внутренних сил на единичную длину баки выражается как $\delta W_2 = N_M \delta \varepsilon + M_N \delta \omega$, т.е.

ε и ω должны быть обобщенными деформациями. Здесь $\omega = -\frac{d^2 w}{dx^2}$ — кривизна оси баки. В этом случае в качестве условий пластичности выступают зависимости между M_N и M_M для предельного состояния сечения (см. § 8), которые в общем виде можно представить как $M_N = M(N)$, или $\Phi = M_N - M(N) = 0$. Тогда для теории деформаций (см. § 3)

$$\varepsilon = \gamma, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial N} = -\gamma, \quad \frac{dM(N)}{dN} = \gamma, \quad \omega = \psi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial M_N} = -\psi, \quad \kappa = \dot{\omega} = -\dot{\psi}, \quad \frac{dM(N)}{dN} = \dot{\psi},$$

$$\varepsilon = -\dot{\omega} = -\dot{\psi}, \quad \frac{dM(N)}{dN} = \dot{\psi}, \quad (12.10)$$

для теории течения аналогично:

$$\dot{\varepsilon} = -\dot{\omega} = -\dot{\psi}, \quad \frac{dM(N)}{dN} = \dot{\psi}. \quad (12.11)$$

Приведенные законы пластических шарниров, где $\omega = \dot{\omega} = \infty$. Приращение работы внутренних сил в шарнире $\delta W_0 = N \delta [\omega] + M \delta \theta$, где $[\omega]$ и θ — обобщенные деформации;

θ — угол сдвиг оси баки в шарнире, а $[\omega]$ — конечная приращенная продольная деформация в сечении, т.е. раскрытие оси баки в шарнире.

Положим размер оси $[u]$ в сечении пластического шарика объясняется тем, что в этом сечении $\xi = \infty$. Следовательно, в силу теоремы о плоских сечениях будут бесконечными относительные удлинения во всех точках сечения, кроме точек на нейтральной оси. Последняя ось лежит относительно оси стороны (напомним, что ось стороны проходит через центр тяжести сечения) из-за наличия продольных сил (см. § 8). Это значит, что и на оси стороны $\xi = \infty$, а следовательно, точки балки по разные стороны сечения перемещаются друг относительно друга на конечном расстоянии, в данном случае $[u]$.

Используя для сечения шарика, как и выше, ассоциированный закон, для новых обобщенных деформаций получим по теории деформаций в теории течений соответствием

$$[u] = -\theta \frac{dM(N)}{dN} \quad \text{и} \quad [\dot{u}] = -\theta \frac{dM(N)}{dN}. \quad (12.12)$$

Если развернуть теперь связанные уравнения (12.3), используя теорию деформаций, окажется

$$u_1 = -\int_0^1 \frac{dM(N)}{dN} \xi dx - \sum_{i=1}^r \frac{dM_i(N)}{dN} \theta_i + AN. \quad (12.13)$$

По теории течений после предварительного дифференцирования (12.5)

$$\dot{u}_1 = -\int_0^1 \frac{dM(N)}{dN} \xi dx - \sum_{i=1}^r \frac{dM_i(N)}{dN} \dot{\theta}_i + A\dot{N}. \quad (12.14)$$

Здесь производные от $M(N)$ оставлены под знаком интеграла в первом слагаемом, так как знак гидродинамического момента по длине балки может изменяться и соответственно может изменяться под знаком $M(N)$ (см. § 8).

В случае, если $M(N)$ и $M_i(N)$ — линейные функции N , то $\frac{dM(N)}{dN}$ и $\frac{dM_i(N)}{dN}$ не зависят от N , а дифференцирование (12.13) по времени даст (12.14), т.е. теория деформаций в теории течений приводит к одним и тем же результатам. Это соответствует общему закону о соответствии этих теорий в линейного упругого пластичности, сформулированному в § 3.

Если известна ось балки — заданные значения, (12.13) и (12.14) могут быть существенно упрощены. Тогда гидродинамические моменты на пластических участках в промежутке балки имеют один и тот же знак и производные от $M(N)$ можно вынести за знак интеграла и знак суммы. Также следует учесть, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 \xi dx &= \int_0^1 \frac{d^2 \omega}{dx^2} = \left. \frac{d\omega}{dx} \right|_{x=0} = \\ &= \left. \frac{d\omega}{dx} \right|_{x=l} = \theta_0 + \theta_1, \end{aligned} \quad (12.15)$$

где θ_0 и θ_1 — абсолютные значения углов поворота концов сечения балки.

Результаты (12.15) не изменятся, если первая производная ξ имеет разрыв, т.е. ось балки в разрывах. С учетом связанного уравнения (12.13) для балки с жесткими заделками на концах приобретает вид

$$u_1 = -(\theta_0 + \theta_1) \left[\frac{dM(N)}{dN} + \frac{dM^1(N)}{dN} \right] + AN, \quad (12.16)$$

где $M_N^1 = M'(N)$ — продольный момент в опорных сечениях балки.

$M_N = M(N)$ — то же самое в пределах ее пролета. Для шарнирно-опертой балки в (12.16) следует принять $\frac{dM^1(N)}{dN} = 0$.

12.3. Балка, закрепленная одним закрепленным концом (рис. 45, а). Как видно из знака суммарных изгибающих моментов M_x (рис. 45, б), она удовлетворяет условию $M_x \leq M_N$, если нагрузка всей балки имеет вид параболы, составленной из двух отрезков прямых, а в трех сечениях, где с перегибом в предельное состояние в балке появились пластические шарниры, M_x равно предельному моменту. Максимальный изгибающий момент в пролете от свободной нагрузки M_{max} с учетом предельных моментов в опорах

$$M_{max} = \rho \frac{c c'}{l} - M_N' \quad \text{а по (12.2)}$$

$$f = \frac{1}{N} \left(\rho \frac{c c'}{l} - M_N' - M_N \right), \quad (12.17)$$

Предельная нагрузка из (12.17) при $f = 0$ $P_0 = \frac{1}{c c'} (M_N' + M_N)$.
Выражение прогиба балки

$$w = \begin{cases} f \frac{x}{c} & \text{при } 0 \leq x \leq c; \\ f \frac{l-x}{c'} & \text{при } c \leq x \leq l. \end{cases} \quad (12.18)$$

Положив, что N — единичная нагрузка, возникающая при ее сдвигании (12.18). Дифференцируя w по (12.18) и подставляя это в (12.6), найдем θ_1 , а также угол наклона в опорных сечениях θ_0 и θ_2 :

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \frac{l}{c c'} f^2; \theta_0 = \frac{f}{c}; \theta_2 = \frac{f}{c'}. \quad (12.19)$$

Тогда (12.16) приобретает вид

$$\frac{1}{2} \frac{l}{c c'} f^2 - \frac{l}{c c'} f \left[\frac{dM(N)}{dN} + \frac{dM'(N)}{dN} \right] + A N. \quad (12.20)$$



Рис. 45. Схема балки (а) и знаки изгибающих моментов (б).



Рис. 46. Зависимости нагрузки — прогиб балки прямоугольного профиля, жестко защемленной на одном и нагружаемой сосредоточенной силой, по: 1 — от теории упругости; 2 — от теории течения.

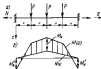


Рис. 47. Схема балки (а) и знаки изгибающих моментов (б, в).



Рис. 48. Графическое представление прогиба.



Рис. 49. Схема балки (а) и знаки изгибающих моментов (б).

Вспомогательная линия § 8 (см. табл. 4), для эллиптического профиля высотой h найдем

$$\frac{dM(N)}{dN} = \frac{dM'(N)}{dN} = -\frac{M_0}{N_0} - \frac{h}{2}, \quad (12.21)$$

для прямоугольного профиля

$$\frac{dM(N)}{dN} = \frac{dM'(N)}{dN} = -2 \frac{N}{N_0} \frac{M_0}{N_0} - n \frac{h}{2}, \quad (12.22)$$

где $n = \frac{N}{N_0}$.

Тогда из (12.20) для эллиптического профиля

$$n = \frac{1}{2} \beta \bar{f} (\bar{f} - 2), \quad \beta = \frac{h^2 l}{4 N_0 c c'}, \quad \bar{f} = \frac{f}{h}; \quad (12.23)$$

для прямоугольного профиля

$$n = \frac{1}{2} \beta \frac{\bar{f}^2}{1 + \beta \bar{f}}. \quad (12.24)$$

Граничные условия (12.23) и (12.24) определяются соотношением $n = 1$, чему в обоих случаях соответствует $\bar{f} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\beta}}$.

При больших значениях f балка работает как рабная дуга. В случае быстрого расхода (12.20) упрощается

$$f = -2 \left[\frac{dM(N)}{dN} + \frac{dM'(N)}{dN} \right]. \quad (12.25)$$

Если $M(N)$ — линейная функция N , как для эллиптического профиля, то N из уравнения (12.25) вычисляется, т.е. в эластопластической зоне определять N нельзя. (Оно вычисляется исключительно от 0 до N_0 .)

Для прямоугольного профиля из (12.25), если воспользоваться

(12.22), получим

$$n = \frac{\bar{f}}{2}.$$

Применив его применительно (при $n = 1$) $\bar{f} = 2$. Зная отношение $N = N_0 n$, можно подставить его в (12.17) и найти зависимость P от f при $f \leq 2$. Если также учесть зависимость предельной нагрузки из табл. 2 $P_0 = \frac{2l}{cc'} M_0$, получим при $\bar{f} \geq 2$

$N = N_0$, этой зависимости можно придать вид

$$\frac{P}{P_0} = \begin{cases} 1 + \frac{3}{4} \bar{f}^2 & \text{при } \bar{f} \leq 2; \\ 2 \bar{f} & \text{при } \bar{f} \geq 2. \end{cases} \quad (12.26)$$

Получим для сопоставления численные результаты с использованием теории течений. Проведем в качестве условного времени t максимальную отработку прогиба f и дифференцируя (12.19), найдем

$$\dot{\theta}_1 = \frac{l}{cc'}; \quad \dot{\theta}_2 = \frac{1}{c}; \quad \dot{\theta}_3 = \frac{1}{c'}. \quad (12.27)$$

Подставив это в уравнение (12.16), записанное в дифференциальной форме, получим

$$\frac{l}{cc'} f = -\frac{1}{cc'} \left[\frac{dM(N)}{dN} + \frac{dM'(N)}{dN} \right] + A \dot{N}. \quad (12.28)$$

Для прямоугольного профиля при $A = 0$ это дает $n = \bar{f}$ и граничные значения $\bar{f} = 1$, а подстановка в (12.17) приводит к

$$\frac{P}{P_0} = \begin{cases} 1 + \bar{F}^2 & \text{при } \bar{F} \leq 1; \\ 2\bar{F} & \text{при } \bar{F} \geq 1. \end{cases} \quad (12.29)$$

Сопоставляя результаты, полученные при использовании приведенной теории деформации (12.26) в теории течения (12.29), можно сказать, что она достаточно близка (рис.46). Заметим, что решение получается лишь при P , близких P_0 , т.е. в области, где упругоупругий эффект вообще не проявляется.

12.4. Вязкоупругая теория сдвигательных усилий

(рис.47,а). Для данной задачи $M_{max} = M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl}{2} - M_N'$.

При $P = P_0$ упругоупругие параболы переходят в прямые в центре пролета. Протяг при $x = l/2$ по (12.3)

$$f = \frac{1}{N} \left(\frac{Pl}{2} - M_N' - M_N \right), \quad (12.30)$$

предельная нагрузка по (12.30) при $f = 0$ $P_0 = 2 \frac{M_N + M_N'}{l}$. Значит суммарный момент M_{Σ} , отвечающий рассмотренному механизму в упругоупругом состоянии $M_{\Sigma} \leq M_N$, представляется на рис.47,а. Нагружая ось балки здесь - линейно, состоящая из двух прямых линий:

$$\omega = f \frac{2x}{l} \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{4}; \quad (12.31)$$

Последнее справедливо, пока с ростом нагрузки не будет нарушен условие $M_{\Sigma} \leq M_N$. Как видно из риса M_{Σ} , такая ситуация есть на участке $l/4 \leq x \leq l/2$. Поэтому для построения нужно вычитать M_{Σ} при $x = l/4$. Здесь по (12.31) $\omega = f_1 = \frac{1}{2} f$; $M\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{3}{8} Pl - M_N'$, а с учетом (12.30)

$$M_{\Sigma} = \frac{3}{8} Pl - M_N' - N f_1 = \frac{Pl}{8} - \frac{1}{2} (M_N + M_N'). \quad (12.32)$$

Из этого выражения видно, что с ростом нагрузки P величина M_{Σ} в данном сечении возрастает и, следовательно, может достигнуть значения M_N . Таким образом, получение кинематически справедливых кинем при $P \leq P_{\Sigma}$, а P_{Σ} нужно найти, приравняв $M_{\Sigma} = M_N$ при $x = l/4$.

$$P_{\Sigma} = 4 \frac{M + M'}{l} = 2P_0. \quad (12.33)$$

При $P > P_{\Sigma}$ протяг в сечении $x = l/4$ должен определяться по (12.1):

$$f_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{8} Pl - M_N' - M_N \right). \quad (12.34)$$

На участке $l/4 \leq x \leq l/2$ эпюра $M(x)$ и $N(x)$ состоит из прямых линий, а $M_{\Sigma} = M_N$. Если участок перейдет в пластическое состояние, то нагружая ось балки при $l/4 \leq x \leq l/2$ останемся приравняв ее, где $M(x)$ здесь линейная функция x . Это значит, что переход материала в пластическое состояние на данном участке не сопровождается ростом деформации, кинематическая ось не меняется. Поэтому можно предположить, что при $P = P_{\Sigma}$ образуется новый пластический шарнир в сечении $x = l/4$. Тогда эпюра M_{Σ} приобретает вид, представленный на рис.47,а, и протяги балки (теперь ось ее - ломаная, состоящая из четырех отрезков прямых) определяются выражениями:

$$\omega = \begin{cases} f, \frac{4x}{l} & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{l}{4}; \\ f_1 + (f - f_1) \left(\frac{4x}{l} - 1 \right) & \text{при } \frac{l}{4} \leq x \leq \frac{l}{2}. \end{cases} \quad (12.35)$$

Определим величину N , позволяя наличие раскрытия. При $P \leq P_{\Sigma}$ зависимость N от f не отличается от полученной в предыдущем примере при $s = s'$, где форма изогнутой оси балки в обоих случаях одна и та же. Поэтому ограничимся рассмотрением случая $P \geq P_{\Sigma}$, когда в пролете уже образовалось три шарнира.

Дифференцируя по $\bar{f}$ по (12.38), найдем μ_1 по (12.6), а также угол наклона в шарнирах

$$\mu_1 = \frac{4}{1} (2\bar{f}_1^2 - 2\bar{f}_1\bar{f} + \bar{f}^2); \quad \theta_0 - \theta_1 = \frac{4\bar{f}_1}{1}. \quad (12.36)$$

Подставив все в (12.16), получим

$$\frac{4}{1} (2\bar{f}_1^2 - 2\bar{f}_1\bar{f} + \bar{f}^2) = - \frac{\partial G_1}{\partial \bar{f}} \left[\frac{dM(N)}{dN} + \frac{dM'(N)}{dN} \right] + AN. \quad (12.37)$$

Отсюда при $A = 0$ (линейный раскол) для шарнирного профиля, если воспользоваться (12.31),

$$2\bar{f}_1^2 - 2\bar{f}_1\bar{f} + \bar{f}^2 = 2\bar{f}_1; \quad \bar{f} = \frac{f}{h}; \quad \bar{f}_1 = \frac{f_1}{h}; \quad (12.38)$$

для прямоугольного профиля μ из (12.22)

$$2\bar{f}_1^2 - 2\bar{f}_1\bar{f} + \bar{f}^2 = 2\bar{f}_1, n. \quad (12.39)$$

Из этих выражений можно найти зависимость n от $\bar{f}$, если исключить из них $\bar{f}_1$. По (12.30) и (12.34) $f_1 = \frac{3}{4}f - \frac{2}{3}\frac{M}{N}$. Откуда для n изогнутого профиля с учетом данных табл. 4

$$\bar{f}_1 = \frac{3}{4}\bar{f} - \frac{1}{6}\frac{1-n}{n}.$$

Подставив эту зависимость в уравнение (12.38) и решив его относительно n , найдем

$$n = \frac{\bar{f} - 1 + 2\sqrt{1 + 2\bar{f} - \bar{f}^2}}{5\bar{f}^2 - 10\bar{f} - 8}. \quad (12.40)$$

Нижняя граница применимости (12.40) вытекает из условия $n = 1$ $\bar{f} = 12/5$. Верхняя граница соответствует максимальному шарниру или основанию балки. Здесь $f_1 = \frac{3}{2}f$ и соответственно $n = \frac{1}{2 + \bar{f}}$. Приравняв это (12.40), можно найти нижнюю границу $\bar{f} = 2$. Ей соответствует $n = 1/3$. Таким образом, формула (12.40) применима при $2 \leq \bar{f} \leq 12/5$; при этом n изменяется в пределах $1/3 \leq n \leq 1$.

12.5. Балка, нагруженная равномерно распределенным давлением сдв. Если все сжатосточные балки в пролете направлены в одну сторону и растут пропорционально одному параметру P , то величина работы такой балки совершенно аналогична выполненной в предыдущем примере. Здесь вместо $M(x)$ представляем собой конструкцию балки, состоящую из отрезков прямых.

При $P = P_0$ в сечении, где $M(x) = M_{max}$, возникает пластический шарнир. Протяг в этом сечении определяется формулой (12.2), а на первом этапе выгнуты ось балки будет линейной, состоящей из двух отрезков прямых. Протяг второго этапа будет равен $P = P_2$, когда в сечении под силой, соседнем с сечением первого шарнира, M_x достигнет величины M_N . [При определенном M_x на действующем этапе так же, как для получения выражения (12.32), и, приравняв его M_N , найдем P_2].

При $P > P_2$ протяг в этом сечении уже определенной формулой (12.2); здесь возникает второй шарнир и выгнуты ось балки будет линейной, состоящей из трех отрезков прямых. Далее вычисляется M_x в следующем сечении под силой, соседнем с первыми двумя шарнирами; определяется значение $P = P_3$, при котором в балке возникает третий шарнир, и т.д. Вместе с ростом P в пролете балки может образоваться столько пластических шарниров, сколько там применимо соотношения сдв. Шарниры будут возникать последовательно и направлены от осевого, где $M(x) = M_{max}$, к опорам. Пластический участок балки захватит между шарнирами промежуточные шарниры. При этом рост пластических деформаций с увеличением P будет происходить только в шарнирах; между шарнирами ось балки останется прямой.

Эти представления дают возможность изобразить в координатной графической форме для определения числа шарниров в пролете, фор-

мы изготовить все балки в единичном масштабе при заданном значе-
нии Р. Он состоит из следующих (рис. 48): сначала строит эпюру мо-
ментов $M(x)$ от поперечной нагрузки; потом строит диаграмму нап-
ряжений, ординаты которой на величину прогибают моменты М и вы-
несут ординаты эпюры $M(x)$; через вершины полученных балок проводят
прямые, касательные к ним. Часты этих прямых между эпюрой и ле-
нницей - настоящие участки балок (соответственно эпюры N и σ);
часты дугишек между точками касаний с прямыми - пластические
участки балок (эпюры N и σ). По эпюре N определяют прогибы,
по эпюре σ - напряжения.

13.5. Ввиду отсутствия необходимых технических данных (рис. 19 а). Выразили для отношения моментов всей сарни от перерезов нагрузки, если предположить, что в сарангах уже образовались пластические шарниры, имеет вид

$$M(x) = \frac{q l^2}{2} \eta (1 - \eta) = M_n; \quad \eta = \frac{x}{l}. \quad (13.41)$$

Максимальный момент $M_{\max} = \frac{q l^2}{8} = M_A'$ действует под действием нагрузки q $\eta = 1/2$. Протяну в этом сечении по (12.3)

$$f = \frac{f}{N} \left(\frac{g^2}{b} - M_N^2 - M_N \right). \quad (18.42)$$

На последнем зре $f = 0$ предельная нагрузка

$$\sigma_{\text{f}} = \sigma \frac{M_{\text{f}} + M_{\text{a}}}{I}$$

На основе структурных моментов (рис.48,d) видно, что условие $M_{II} \in M_{II}$ выполняется, если считать, что в средней части пролета ось балки соответствует естественным пластическим деформациям, а жесткие и пластические участки балки соответствуют пластику. На пластическом участке пролета определяются выражениями (12.1), на жестких участках ось балки остается прямойлинейной, поворачиваясь вокруг опор. Тогда

$$\text{so } = \begin{cases} \theta \perp \eta & \text{and } \theta \triangleleft \eta \triangleleft \alpha; \\ \frac{t}{\lambda'} \left[\frac{\theta \perp^2}{2} \eta (t - \eta) - M'_\theta - M'_\eta \right] \text{ and } \alpha \triangleleft \eta \triangleleft \frac{t}{2}, \end{cases} \quad (12.48)$$

$\alpha = \frac{\bar{A}}{L}$; $\bar{A}$ — длина восточного участка; θ — угол между осью
сечения и осью.

Вычитая α и θ по обеим сторонам исходя из условия неразрывности α и $\frac{d\alpha}{dx}$ на границе внешнего и внутреннего участков:

$$[\omega]_{\alpha} = \omega|_{\eta=\alpha-\beta} - \omega|_{\eta=\alpha+\beta} = 0; \quad (E.44)$$

$$\left[\frac{dw}{dx} \right]_x = \frac{dw}{dx} \Big|_{\eta=x-0} - \frac{dw}{dx} \Big|_{\eta=x+0} = 0.$$

Как видно из (12.44), элемент $[w]$ означает разность значений функции, вычисленной в точках, в отстоях $\tau = \delta t$, численных с разных сторон от этого сечения.

Выражения (12.44) при использовании (12.43) приводят к двум вариантам

$$\theta(1-\alpha) - \frac{1}{N} \left[\frac{q l^2}{2} \alpha (1-\alpha) - M_N' - M_N \right] = 0; \quad (12.45)$$

$$\theta = \frac{q l}{2N} (1-2\alpha) = 0.$$

Решая эти соотношения, найдем

$$\theta = \frac{q l}{2N} (1-2\alpha); \quad \alpha = \sqrt{\frac{(M_N + M_N')}{q l^2}}. \quad (12.46)$$

Из (12.46) видно, что пластические деформации могут возникнуть всю балку или в том случае, если поперечная нагрузка возрастает до бесконечности, так как $\alpha = 0$ при $q = \infty$, или, если $N = N_0$.

Определим величину предельной силы N , вызывая наличие раскрыта. По (12.6), используя (12.43), найдем

$$U_1 = \frac{q^2 l^2}{24 N^2} (1-2\alpha)^2 (1+4\alpha), \quad (12.47)$$

Подставляя это в $\theta_0 = \theta_c = \theta$ по (12.46) и (12.48), получим

$$\frac{q^2 l^2}{24 N^2} (1-2\alpha)^2 (1+4\alpha) = -\frac{q l}{N} (1-\alpha) \left[\frac{dM(N)}{dN} + \right. \\ \left. + \frac{dM'(N)}{dN} \right] + AN. \quad (12.48)$$

Чтобы решить это уравнение, нужно приблизительно разложить q , выраженное через α , в ряд по M_N и M_N' через N . Полагая решение задачи на примере балки с прямо-угольной формой профиля, равномерно распределенной по высоте. Распор полагаем нулевым. Для этого считаем с учетом (12.22) и формул табл.4 уравнение (12.48) примет вид

$$\frac{q l}{12 N^2} - \frac{N_0}{h} (1-2\alpha) (1+4\alpha) = 1. \quad (12.49)$$

Подставляя сюда α по (12.46), найдем

$$N = \sqrt{\frac{l}{32} \frac{q}{q_0} (\gamma + q^*) - \frac{1}{2}}; \\ q^* = \sqrt{36 \frac{q_0}{q} - 15}; \quad (12.50)$$

$$q_0 = \frac{8 M_0}{l^2},$$

где q_0 — предельная нагрузка балки.

Можно вычислить и максимальный прогиб балки, подставляя (12.50) в (12.48), с учетом данных табл.4:

$$\bar{f} = \frac{f}{h} = \frac{1}{32} (\gamma + q^*) \sqrt{3 \frac{q}{q_0} \frac{\theta - q^*}{3 + q^*}}. \quad (12.51)$$

График зависимости этого решения определяется по (12.49) при $N = N_0$ и $\alpha = 0$. Получается $q/q_0 = 6$. При $q/q_0 = 6$ балка работает как гибкая и ее по (12.42); $\bar{f} = \frac{f}{4} \frac{q}{q_0}$.

$$A = \frac{1}{2} \left(q_1^2 + \frac{q}{q_0} - q \right); \quad F = \frac{1}{2} \frac{q_1^2 + 3 \frac{q}{q_0} - 6}{q_1 + \frac{q}{q_0} - 4}; \quad (12.52)$$

$$q_1^2 = \sqrt{3 \frac{q}{q_0} \left(4 - \frac{q}{q_0} \right)}.$$

Убавив с помощью зависимости по концам формулы (12.50) и (12.52) для A соответствующий элемент, а в формулах (12.54) и (12.52) для F прежде всего нужно вычитать из A . При этом соответственно

$q_0 = \frac{16 N_0}{\pi}$. Полученные зависимости иллюстрируются графиками на рис.50.

Примеры расчетов полученных результатов для балок с распором может дать рассмотрение пая системы. На (12.43) на пластическом участке кривая ось балки

$$x = - \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{q}{N}. \quad (12.53)$$

В момент появления нагрузки предельного значения $q = q_0$ прогиба у жесткопластической балки отсутствуют и, следовательно $N = 0$. Тогда по (12.53) $x = \infty$. Поскольку при этом $\alpha = 1/2$ (или пластический участок обращается в точку),

$x = \infty$ может иметь место только в сечении посредине пролета. Это соответствует предельной теории Предельного равновесия: предельное состояние балки связано с образованием посредине пролета пластического шарнира, где ось балки получает сдвиг. С ростом нагрузки балка превращается в гибкую нить, для которой $N = N_0$, а по (12.53) $x = \frac{q}{N_0} < \infty$. Таким образом, на гра-



Рис.50. Зависимость нагрузки - прогиб балки, жестко защемленной по концам и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой различного сечения: 1 - балка треугольного профиля; 2 - балка прямоугольного профиля.

фике видно, что в среднем сечении кривая ось балки соответственно возрастает от нуля до бесконечности при $q = q_0$, а затем при увеличении нагрузки до $q = 6 q_0$ - постоянно увеличивается по величине $6 q_0 / N_0$. Следовательно, в диапазоне $q_0 < q < 6 q_0$ в материале сечения происходит разгрузка. Но процесс деформирования при нагружении и разгрузке у пластичного материала необратим, а это обстоятельство в приведенном виде решения не учесть.

Строгое решение данной задачи получено в [41]. Там показано, что на начальном этапе нагружения после достижения $q = q_0$ пластический участок в средней части балки не появляется. Образовавшийся при $q = q_0$ пластический шарнир развивается и с ростом нагрузки переходит к опорам, вызывая увеличение ось балки, которая еще шарниры остается жесткой. При последующем нагружении эти шарниры превращаются в участки нулевой длины; появляется пластический участок и в средней части, но здесь кривая ось балки уменьшается. Балка полностью переходит в пластическое состояние при $q / q_0 = 6$, когда $N = N_0$. Такое строгое решение достаточно сложное, а сопоставление его с приведенным выше приближенным решением показывает [9], что анализ при начальных прогибах и последнем состоянии, чем определяется возможность его практического использования. Кроме того, из строго-пластического решения следует [41], что учет упругих деформаций существенно ослабляет эффект разгрузки и проявляется он только у стержней жестких балок.

12.7. Векор, нагруженный равномерно распределенной нагрузкой (рис.51,а). Для определенности будем считать, что интенсивность нагрузки $q(x)$ в пределах пролета балки не меняет своего значения пропорционально одному параметру. В силу этого $M(x)$ — постоянная функция с одним максимумом в пролете балки. Если предположить, что в районе этого максимума образуется пластический участок, то пределы в его пределах определяются выражением (12.1), а получившийся вектор M_{Σ} (рис.51,а) не противоречит условиям $M_{\Sigma} \leq M_N$. Участки, принадлежащие к опорам, остаются жесткими и с ростом прогибов приходят к нулю. Это следует из условия:

$$\omega = \begin{cases} \theta_0 x & \text{при } 0 \leq x \leq a_1; \\ \frac{1}{N} [M(x) - M_N] & \text{при } a_1 \leq x \leq a_2; \\ \theta_1 (l - x) & \text{при } a_2 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (12.54)$$

где a_1 и a_2 — расстояния начала и конца пластического участка от соответствующей опоры.



Рис.51. Схема балки (а) и эпюра изгибающих моментов (б).



Рис.52. Схема балки.

Чтобы определить значения a_1 , a_2 , θ_0 и θ_1 , нужно рассмотреть условия сопряжения участков. Требуемые неравномерности ω : $[\omega]_{a_1} = 0$; $[\omega]_{a_2} = 0$ — приводят к зависимостям

$$\begin{aligned} \theta_0 a_1 - \frac{1}{N} [M(a_1) - M_N] &= 0; \\ \frac{1}{N} [M(a_2) - M_N] - \theta_1 (l - a_2) &= 0. \end{aligned} \quad (12.55)$$

Нетрудно показать, что условие в пластических участках сопряжения должно выполняться, если только не их границы не приходят к пластической сосредоточенной силе. Поэтому здесь, кроме того

$$\left[\frac{d\omega}{dx} \right]_{a_1} = 0; \quad \left[\frac{d\omega}{dx} \right]_{a_2} = 0.$$

Это дает еще два уравнения:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{1}{N} \left. \frac{dM(x)}{dx} \right|_{x=a_1}; \\ \theta_1 &= -\frac{1}{N} \left. \frac{dM(x)}{dx} \right|_{x=a_2}. \end{aligned} \quad (12.56)$$

Выражения (12.56) дают возможность определить a_1 и a_2 по уравнениям (12.55). Заметим, что в случае распределенной нагрузки возможен графический прием определения пределов и протяженности пластического участка, который был описан выше для балки, нагруженной сосредоточенными силами на рис.40, только опоры $M(x)$ и $N(x)$ будут не константы, а плавные кривые.

12.8. Балка, нагруженная жестким сосредоточенным грузом. Рассмотрим случай, когда нагрузка на балку передается через

векторы (параметризуемая) имеют цилиндрической формы радиусом R (рис.52). Это поледрность элементов увеличим $\varphi(x) = R \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{R^2}\right)$. В средней части, прилегающей к стержню, балка должна искривляться. Поскольку материал — эластопластический, это может произойти только вследствие пластических деформаций.

Следовательно, участок $-a \leq x \leq a$ — площадь констати — является пластическим участком балки. Вне пластичности констати диаметр $M(x)$ — линейно (поперечная нагрузка отсутствует). Здесь балка должна оставаться жесткой. В противном случае будет нарушено условие $M_N \leq M_N$. Следовательно однозначно определенная форма профиля балки:

$$w = \begin{cases} R \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{R^2}\right) + C & \text{при } 0 \leq x \leq a; \\ \theta \left(\frac{1}{2} - x\right) & \text{при } a \leq x \leq \frac{1}{2}L, \end{cases} \quad (12.57)$$

где C — константа, а θ — угол наклона в пластическом шарнире по опоре.

Величина C и θ можно определять исходя из условий непрерывности w и $\frac{dw}{dx}$ на границе упругого и пластического участков: $[w]_a = 0$ и $\left[\frac{dw}{dx}\right]_a = 0$, которые принимают вид

$$\theta = \frac{C}{R}; \quad C = \frac{a}{2R} (1-a) - R. \quad (12.58)$$

Подставляя это в (12.57) и используя безразмерные обозначения

$$\eta = x/L; \quad \alpha = a/L, \text{ получим}$$

$$w = \begin{cases} \frac{1}{2R} (\alpha - \alpha^2 - \eta) & \text{при } 0 \leq \eta \leq \alpha; \\ \frac{1}{2R} \alpha (1 - 2\eta) & \text{при } \alpha \leq \eta \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (12.59)$$

Чтобы избежать необходимости рассмотрения форм распределения интенсивности внешней нагрузки, при решении этой задачи воспользуемся кинематическим методом (см.) §1). Проведем работу внешних сил через $U = P_f - N w_L$, где P — внешняя сила, приложенная к стержню. Прогиб посредине пролета балки f и величину w_L по (12.6) определяем из условия (12.59):

$$f = \frac{1}{2R} \alpha (1 - \alpha); \quad w_L = \frac{1}{2R} \alpha (3 - 4\alpha). \quad (12.60)$$

Работа внутренних сил здесь происходит в пределах пластического участка и в пластическом шарнире в основных сечениях. С учетом (12.45) и выражения θ по (12.58)

$$\begin{aligned} D &= 2 \int M_N \kappa dx + 2 M_N' \theta = \\ &= 2 (M_N + M_N') \theta = 2 \frac{M_N + M_N'}{R} L \alpha. \end{aligned} \quad (12.61)$$

Воспользуемся методом возможных перемещений по (II.4), приняв в качестве обобщенной координаты безразмерную длину пластического участка α , значение которой однозначно определяет все перемещения балки: $\frac{dU}{d\alpha} = \frac{dD}{d\alpha}$. Подставляя сюда U и D в выписанные дифференциальные, после преобразований получим

$$P = 2 \frac{N}{R} l \alpha + \frac{M_N + M_N'}{l(1-2\alpha)} \quad (12.62)$$

Выразим (12.60) и (12.62) через единичную интенсивность нагрузки P и ω .

Обозначим величину N для случая раскрытия, постоянная в уравнении (12.16) ω_1 по (12.40) и $\theta = \theta_0 - \theta_1$ по (12.58):

$$\frac{l^2}{8R^2} \alpha^2 (3-4\alpha) - 2 \frac{l}{R} \alpha \left[\frac{dM(N)}{dN} + \frac{dN'(N)}{dN} \right] + AN, \quad (12.63)$$

Максимальный момент возникает в раскрывающей арке в угловом профиле при $\lambda = 0$. С учетом (12.22) из этого уравнения получим

$$N = \frac{l^2}{12Rh} \alpha (3-4\alpha). \quad (12.64)$$

Интересно, что N здесь имеет максимум. Исходя из условия

$$\frac{dN}{d\alpha} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 3/8 \quad \text{получается} \quad N_{\max} = \frac{3}{64} \cdot \frac{l^2}{Rh}.$$

Это означает, что при $\frac{l^2}{Rh} < \frac{3}{64}$ с ростом поперечной нагрузки не происходит постоянного возрастания продольной силы; N не достигает значения N_0 и балка не прекращается в гибкую пластинку или нет. При $\alpha = 3/8$ N начинает уменьшаться, но пластический участок балки продолжает расширяться, а материал здесь переходит в жесткое состояние. Поэтому при дальнейшем росте нагрузки пластическая деформация происходит только по границе

пластичности балки при $\eta = \alpha$. Поскольку α с ростом нагрузки растет, соответственно увеличивается икрашенная часть балки. Такая же картина пластического деформирования балки имеет место в случае раскрытия балки при гибком раскрытии. Вследствие этого по теории течения получается неравномерное удлинение всей балки в пределах пластического участка, что подтверждается экспериментом. (Полное же решение с использованием теории деформаций этого эффекта не выдает.) Особенность поведения деформированной балки, нагруженной жестким цилиндрическим штампом, имеет место и в случае, если ее профиль — произвольный штифт. Подробно эти вопросы рассмотрены в [9, 15].

§ 13. Большие прогибы криволинейных балок в рам

13.1. Особенности деформирования криволинейных балок. Проведя анализ особенностей работы криволинейных балок при больших прогибах на простейших примерах, рассмотрим рассмотренные случаи, представленные в § 8. Начнем со случая криволинейного стержня (см. рис. 89). Здесь можно непосредственно воспользоваться результатами § 9. Нужно лишь заметить,

ω_0 — ординаты недеформированной оси стержня, $\omega_0 + \omega$ — ординаты деформированной оси стержня (ω — прогиб), порядок тем же образом и рассмотрим равновесия стержня в деформированном состоянии. Здесь M_{max} расположен в сечении максимального $\omega_0 + \omega$, а, учитывая (9.2), можно записать

$$T = \frac{M_N}{\omega_{max} + f}, \quad (13.1)$$

где f — прогиб в сечении пластического шарнира.

Из (13.1) видно, что рост f должен сопровождаться уменьшением T . Это означает, что пластическое течение стержня неустойчиво. (Напомним также § 11: неустойчивость пластического течения означает, что дальнейшее увеличение нагрузки ведет к уменьшению нагрузки способности стержня. Когда пластическое течение устойчиво, конструкция в принципе способна воспринимать возросшую нагрузку и после перехода в пластическое состояние, если, конечно, не происходит потеря устойчивости в местных нарушениях.)

При рассмотрении (13.1) не учтено, что уменьшение T ведет к появлению в собой увеличения предельного момента M_N (см. § 8), отбрасываем в числителе формулы. Покажем, что это обстоятельство не влияет на окончательные выводы. Для начального профиля отогнутой табл. 4 $M_N = M_0 \left(1 - \frac{T}{N_0}\right)$. Подставим это в (13.1) и

$$\text{тогда найдем } T = \frac{M_0}{M_0/N_0 + \omega_0 \max + f}. \text{ Характер зависи-}$$

мости T от f не изменился.

$$\text{Для прямоугольного профиля окончательно } M_N = M_0 \left(1 - \frac{T^2}{N_0^2}\right) \\ \text{и } \frac{M_0}{N_0^2} T^2 + (\omega_0 \max + f) T - M_0 = 0. \quad \text{Отсюда}$$

$$\frac{dT}{df} = - \frac{T}{2 \frac{M_0}{N_0^2} T + \omega_0 \max + f} < 0$$

т. е. следовательно, пластическое течение неустойчиво.

Теперь рассмотрим разогнутый прямоугольный стержень, нагруженный по сравнению с предыдущим примером силой сжатия N . На величину предельной нагрузки в форму образуются пластического момента эта нагрузка не влияет (см. § 9). Если предположить возможность $T > T_0$ по (9.2), то условия пластичности стержня напряжений $M(x) = T(\omega_0 + \omega) \leq M_N$ выполняются, если считать, что в районе $\omega_0 \max$ образуется пластический участок конечной длины, для которого

$$T(\omega_0 + \omega) = M_N. \quad (13.2)$$

$$\text{Если предположить сила } N(x) = \frac{T}{\sqrt{1 + \left[\frac{d(\omega_0 + \omega)}{dx}\right]^2}}$$

по (9.1) и условиям пластичности сечения $M_N = M(N)$ по § 8 и решить их совместно как систему уравнений, то можно из ее кор-

ней считать $\omega_0 + \omega \neq y(x)$. Это означает, что для отгнутый участок прямолинейная ось его параллельна линии действия сил T . Но (13.2) противоречит предельности участка

$$\omega = -\omega_0 + \frac{M_N}{T}, \quad (13.3)$$

где M_N минимален при $N = T$, так как $\frac{d(\omega_0 + \omega)}{dx} = 0$.

Из (13.3) следует, что рост абсолютного значения ω должен сопровождаться увеличением T , т. е. пластическое течение отменяется.

Перевогнутый пластический участок определяется условием на границе условия в равной неравности ω_0 на границе отгиб участка в пластическом участке. Аналогичные условия неравности $\frac{d\omega}{dx}$ дают возможность определить границы пластического участка. При $T = N_0$ по (13.3) $\omega = -\omega_0$, т. е. тогда разогнутый стержень достигнет предельного изгиба для сечения, стержень полностью выпрямится. Пользуясь теорией течения, можно показать пластические деформации стержня (удлинение оси, изменение площади) в процессе нагружения происходит только на границе пластического участка [9].

13.2. Дуга. Рассмотрим разгибание кругового вала силой P (см. рис. 22, в). Если так же, как и в § 9, рассмотреть его в разогнутом равновесном положении, мы приходим к задаче о растяжении кругового стержня, который отличается от рассмотренного выше тем наличием на концах концентратора момента M_2 (рис. 53). Нетрудно убедиться, что последнее не может изменить характера перемещений стержня. Нам представляется конструктивнее по рис. 53 (сплошная линия - недеформированная ось стержня). Образующая прямолинейный пластический участок длиной α валам соответствует с участком прямолинейным участком. Пластический участок остается кругом кривизны, центр которой располагается на нормали к концу пластического участка. Координаты центра кривизны $x = -\omega$, $y = \alpha/2$ (ω - перемещение пластического участка в направлении оси x). Если пренебречь удлиненными осью стержня, то для



Рис. 53. Схема деформированной растянутой полуроды.



Рис. 54. Схема стержня.

на четверть колма в процессе деформирования $r\alpha + a/2$. Прямая линия от центра четверть колма до деформации $\frac{\pi r}{2}$, тогда $\alpha = r(\pi + 2\alpha)$. На рис. 53 также следует:

$h = r \cos \alpha$; $h = r \sin \alpha$. С другой стороны, $h = r + f/2 - a/2$. Прямая линия прямого конца деформации h , можно выразить переменные f как функции угла α :

$$f = 2r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha - 1 + \sin \alpha \right). \quad (13.4)$$

В процессе деформирования колма в среднем роле силой P полагается и будет возрастать прямая сила $N = \frac{P}{2} \cos \alpha$. Величина этого будет меньше значения прямого момента M_2 . Суммарный изгибающий момент на пластическом участке $M_E = \frac{P}{2} (r - h) = M_2$. Прямая сила M_E передается моменту

M_1 , вычисленному с учетом прямой силы $N = P/2$, которая действует в пределах пластического участка, а также постоянная прямая для деформации h , вычислен

$$P = 2 \frac{M_1 + M_2}{r(1 - \cos \alpha)}. \quad (13.5)$$

Выражения (13.4) и (13.5) дают зависимость между P и f . Нетрудно установить, что с ростом f угол α уменьшается, а сила P возрастает, т.е. пластическое течение колма устойчиво.

В случае сжатия колма (минимум силы P) также не рассматриваем полужонки с использованием решения с сжатием прикладываемой стороне приложим к колму, что пластическое течение колма устойчиво.

13.3. Арки (см. рис. 11, а). Обратимся к примеру, рассмотренному в § 9 - круговой арке, жестко заделанной по концам и симметрично нагруженной сосредоточенной силой P , в анализе-рассуждениях ее колма (см. рис. 11, д), нетрудно убедиться, что равнодействующая приложенных в точках сил P и реакции сечений колма действует вдоль одной линии. Следовательно, расчет полужонки сводится к расчету сжатого арочного участка, и можно сделать вывод о устойчивости ее пластического течения.

Если рассмотреть колма P и рассмотреть растянутому арку, получившие колма результаты также могут быть использованы. Пластическое течение в этом случае устойчиво. Полужонка или полужонка образует пластический участок. Он прилагается к шарнирному концу, сдвигающей колма полужонки. Жесткие участки - дуги окружности, центры которых располагаются на колмах в точках пластического участка. Решение задачи аналогично приведенному выше решению для колма. Зависимость между силой P и вертикальным перемещением точки ее приложения f можно представить в параметрической форме:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{2(M_1 + M_2)}{r(1 - \cos \Psi) \left[1 + \left(\frac{r}{r+f} \right)^2 \right]}; \\ f &= r \left[\sqrt{2 \sin \Psi + \frac{\pi}{2} - 2 \Psi^2} - 1 - 1 \right], \end{aligned} \right\} \quad (13.6)$$

где Ψ - параметр, изменяющийся в пределах от $\pi/4$ (при $P = P_0$) до края; M_1 и M_2 - предельные моменты сечения, численные соответствия при $N = \frac{P}{2} \frac{r}{r+f}$ и

$$N = \frac{P}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{r+f} \right)^2}. \text{ Подробное см. в [9].}$$

13.4. Напряжения. Рассмотрим напряжения в сечении (см. рис.30) при $P = P_0$. В предельном состоянии происходит вся прямоугольная часть стержня (см. § 9), и при строгом пластичноупругом поведении здесь возможно широкое завыривание под действием нагрузки. Предположим, что стержень отстоит от образования пластического шарнира в заделке. (Здесь изгибающий момент будет максимальным, если учесть деформации стержня в упругой и упругоупругой стадиях.) Вращение стержня в шарнире при $P = \cos \alpha$ ведет к увеличению изгибающего момента в этом сечении. Следовательно, с ростом перемещений условия $M_1 \leq M_N$ требует увеличения P - признак неустойчивости пластического течения.

Если допустить, как сила P на обратный, максимальный изгибающий момент и продольная сила по-прежнему действуют в прямоугольной части стержня. Однако изгибающий здесь происходит не будет, так как на-он этого изгибаются бы сечениями соответствующими от линии действия P , а это привело бы либо к $M_2 > M_N$ - нарушению условия устойчивости под нагрузкой, либо к $M_2 < M_N$ - разрыву и переходу в жесткое состояние. Значит, пластическому деформированию подвергается только сечение на границе прямоугольного и прямоугольного участка. Здесь при-

знаки оси стержня должны соответственно измениться от $1/r$ до 0, т.е. произойдет выкручивание стержня, длина прямоугольного участка растет, а прямоугольного - соответственно уменьшается.

В результате уменьшается расстояние между линиями действия сил P и ось прямоугольного участка. Поэтому для соблюдения условия $M_1 \leq M_N$ с ростом перемещений сила P должна уменьшаться - признак устойчивости пластического течения. Связь сил P с вертикальным перемещением точки на краевом f нужно представить в параметрической форме [9]:

$$P = \frac{M_N}{r(1 - \cos \alpha)}; \quad (13.7)$$

$$f = r(\alpha_0 - \alpha + \sin \alpha - \sin \alpha_0),$$

где α - параметр, изменяющийся в пределах от α_0 до края; M_N - предельный момент сечения, численный при $N = P$.

13.5. Вращение сечения при деформации при деформации. Ранее при рассмотрении задачи теории предельного равновесия упоминалось, что в стержнях плоских рам с прямоугольными сечениями возможны продольные силы (см. § 9). Возможны ли вращение на работу рамы, когда прямой изгиб стержня возможен, на примере Π -образной рамы, нагруженной поперечным горизонтальным стержнем сосредоточенной силой (рис.34). Обозначим M_1 и M_2 - предельные моменты сечений горизонтального и вертикального стержней соответственно, численные с учетом влияния продольных сил, действующих в этих стержнях; N_1 и N_2 - продольные силы в тех же стержнях; f - прогиб в середине горизонтального стержня; f_1 - прогиб верхнего конца вертикального стержня;

$$M_1 = M_{01} \text{ при } N_1 = 0; \quad M_2 = M_{02} \text{ при } N_2 = 0; \quad N_1 = N_{01} \text{ при } M_1 = 0; \quad N_2 = N_{02} \text{ при } M_2 = 0.$$

Из рассмотренных изгибающих моментов для деформированного состояния рамы можно получить все возможные пластические механизмы, которые могут образоваться при действии сил P предельного значения P_0 . Эти механизмы представлены на рис.35.

Механизм 1 (рис.35,а). В горизонтальном стержне пластические шарниры могут образоваться в трех сечениях; в обра-



Рис.55. Пластический механизм рамы: а - механизмом 1; б - механизмом 2; в - механизмом 3.



Рис.56. Схема условий в углах рамы.

на пролетах под силой P и в сечении, прилегающем к углам рамы. Чтобы шарниры возникли в последних, в них в сечении вертикальных стержней, прилегающих к углам, должно выполняться условие $M_A > M_P$. Здесь M_A вычисляют при $N_A = P_0/2$. В горизонтальном стержне при достижении предельной нагрузки прогибывания еще нет ($f = 0$), поэтому $M_P = M_{cr}$.

Горизонтальный стержень в данном случае представляет собой балку с защемлением на концах, предельная нагрузка которого $P_0 = \frac{8 M_{cr}}{l}$. Если вертикальные стержни останутся жесткими (приращение их несмещенности), то концы горизонтального стержня при его изгибе сдвигаются не могут. Поэтому расчет горизонтального стержня сводится к рассмотрению балки с жестким размером (см. § 42), а пластическое течение рамы будет устойчивым.

Схема условий, действующих на стержни рамы, представлена на рис.56. На схеме видно, что вертикальный стержень можно рассмотреть как консоль, нагруженную на конце поперечной силой N_P и моментом M_P , а также предельной силой $N_A = P/2$. Максимальный изгибающий момент здесь возникает в начале. Чтобы рассмотреть механизм не существовать, в вертикальном стержне не должно быть пластических деформаций, т.е. нужно потребовать выполнения условий $M_{max} < M_A$ или

$$N_P H + M_P < M_A. \quad (13.8)$$

Существование этого механизма ограничено определенным значением P . С ростом P растет N_P и соответственно падает M_P . Если достигнет $N_P = N_{cr}$, то M_P обратится в нуль. Поэтому при любых значениях N_P и M_P неравенство (13.8) нарушится при $P < 2 N_{cr}$ и данный механизм превратится в механизм 2.

Если $x \leq x_{cr} = 2$ (см. рис.55, d). Если условие (13.8) выполняется, а условие $M_A > M_P$ выполняется, параллельно с тремя шарнирами в горизонтальном стержне образуется по одному шарниру в каждом вертикальном стержне. Для вертикального стержня с учетом возникающих прогибов (см. рис.56) $M_P = N_P y + M_P + \frac{P}{2} (f_1 - u)$. Прогибы этого стержня u , если в начале имеет место шарнир, а в остальной части ось стержня остается перпендикулярной $u = f_1 (1 - \frac{y^2}{H^2})$. Отсюда видно, что M_P имеет максимум значение при $y = H$ - в начале. Требуя, чтобы оно равнялось предельному моменту M_A , получим

$$N_P H + M_P + \frac{P}{2} f_1 = M_A.$$

В этом уравнении неизвестны величины N_P и f_1 . Примем за начало, что прогиб конца вертикального стержня f_1 равен $\frac{A}{2} u_1$, где $u_1 = 2 \frac{f^2}{l}$ - обобщенная величина горизонтального стержня. Это дает возможность подставить зависимость N_P от f :

$$N_P = \frac{M_A - M_P}{H} - \frac{P}{2} \frac{f^2}{lH}. \quad (13.9)$$

Отсюда следует, что при $\frac{M_A - M_P}{H} > \frac{P}{2} \frac{f^2}{lH}$ предельная сила $N_P > 0$, т.е. горизонтальный стержень растянут. Если рост f должен сопровождаться увеличением P , а значит пластическое течение устойчиво. При $\frac{M_A - M_P}{H} < \frac{P}{2} \frac{f^2}{lH}$ со-

ответственно $N_r < 0$, а пластическое течение неустойчиво. За-
метим, что с ростом P второй член (43.9) возрастает, а пер-
вый член убывает, так как M_0 падает из-за роста $N_0 = P/2$.

Следовательно, если пластическое течение рамы при нагрузке P мо-
жет быть устойчивым, с ростом P оно становится неустойчивым.

М о д е л ь 3 (см. рис. 35, а). Если не удовлетворя-
ется условию $M_0 > M_p$, пластический шарнир образуется в соче-
тании вертикального стержня, примыкающего к узлу. Этот механизм
аналогичен механизму 2, только момент в узле будет не M_0 , а
 M_p . Поэтому, повторив все выкладки с указанным изменением, по-
лучим $N_r = -\frac{P}{2} - \frac{P^2}{2EN} < 0$. Следовательно, данный меха-
низм также приводит к неустойчивому пластическому.

Если нагрузка имеет силу P , в раме также возможно образо-
вание трех механизмов, аналогичных рассмотренным, но с дополни-
тельным направлением притоков горизонтального стержня. Развитие этой
модели мало отличается от рассмотренного: пластическое течение
во всех случаях сопровождается утончением [8].

Обращает на себя внимание замечание в раме общего случая
пластических шарниров, чем получается по теории предельного рав-
новесия.

§ 14. Особенности расчета сужах перекрытий как системы перекрестных связей

14.1. Исходные допущения. В данной главе сужах перекры-
тия рассматриваются как плоская стержневая система, состоящая
из перекрещивающихся стержней двух направлений, перпендикулярных
друг другу и открытых на жесткий контур. Внешняя нагрузка дейст-
вует перпендикулярно плоскости перекрытия. Предполагается, что
стержни работают на изгибный изгиб; в узлах пересечения стерж-
ней возможны только реакции, перпендикулярные плоскости пере-
крытия. (Это обычные допущения, применяемые при упругом расчете
сужах перекрытий как системы перекрестных связей [102]. Их
пригодность для пластического расчета в некоторых случаях не
очевидна и требует специальных обоснований. См. замечание.)
Если одного направления называют балками главного направления,
другого направление — перекрестными связями.

Расчетом ширины сжатых продольных стержней методами
теории предельного равновесия. Внешние перерезывающие силы на
продольные стержни учитывают как приращение к внутренним
перекрытиям (§ 17). Если на простейшем примере покажем особен-
ности расчета перекрытий в данной постановке.

14.2. Статический метод. Рассмотрим перекрытие, состоящее
из двух единичных балок главного направления и одной пере-
крестной связи (рис. 37, а). Все балки жестко заделаны на несме-
щаемом контуре. Балка главного направления нагружена равномер-
но распределенной внешней нагрузкой интенсивностью q_0 ; пере-
крестная связь внешней нагрузкой не несет. Обозначим: M , а
 M_0 — предельные моменты сочленов балки главного направления и
перекрестной связи соответственно; R — реакция в узле пере-
сечения балки главного направления с перекрестной связью.

Рассмотрим балку главного направления (рис. 37, б). На ее
определенных моментах $M(x)$ видно (рис. 37, в), что



Рис. 57. Перекресток: а - схема перекрестка; б - схема балки главного направления; в - схема поперечных моментов балки главного направления; г - схема перекрестков балки.

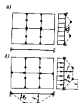


Рис. 58. Плоскостное изгибное перекрестие: а - моментом 1; б - моментом 2.

$M(x)$ по длине балки может иметь пять изгибов: в сечении заданном; при $x = c$, где $0 < c < l/2$, в точках в симметричном сечении; поперечные пролеты. В предельном состоянии во всех перечисленных сечениях может быть достигнута предельная нагрузка, и изгибающие моменты соответственно там будут равны предельному $\pm M_p$. Поэтому при составлении уравнения $M(x)$ сразу правые моменты в сечениях равны $-M_p$. Тогда при $0 \leq x \leq l/2$

$$M(x) = \frac{q\alpha l}{2}x - \frac{q\alpha x^2}{2} - \frac{R}{2}x - M_p. \quad (14.1)$$

Отсюда исходя из условия $\left. \frac{dM(x)}{dx} \right|_{x=c} = 0$, найдем

$\frac{c}{l} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R}{q\alpha l} \right)$. Подставим это в (14.1) и для реализации предельного состояния потребуем, чтобы $M(c) = -M_p$. Последнее имеет уравнение, которое можно разрешить относительно q . В результате

$$q_0 = \left(\bar{q} + \bar{R} + 4\sqrt{\bar{q}\bar{R}} \right) \frac{M_p}{\alpha l^2}; \quad \bar{R} = \frac{Rl}{M_p}. \quad (14.2)$$

Теперь потребуем, чтобы $M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q\alpha l^3}{8} - \frac{Rl}{4} - M_p = -M_p$. Откуда

$$q_0 = 2 \frac{R}{\alpha l} \quad \text{или} \quad q_0 = 2\bar{R} \frac{M_p}{\alpha l^2}. \quad (14.3)$$

Приведя правые части (14.2) и (14.3), получим уравнение для определения R . Его корень $\bar{R} = 32$. При этом найдем $\bar{R}$ по (14.2) или (14.3)

$$q_0 = 64 \frac{M_p}{\alpha l^2}. \quad (14.4)$$

Чтобы выявить область применимости (14.4), нужно рассмотреть предельное состояние перекрестной балки (рис. 57, г). Для нее при максимальной балки предельное состояние достигается при

$$R_0 = 6 \frac{M_p}{L} \quad \text{или} \quad \bar{R}_0 = \frac{R_0 l}{M_p} = 6 \frac{M_p}{M_p} \frac{l}{L}. \quad (14.5)$$

Поскольку всегда должно соблюдаться условие $R_0 \geq R$,

(14.4) для q_0 справедливы лишь $R_0 = \delta \frac{M_1}{M_2} \frac{l}{L} \geq \bar{R} = 32$.

Если же по условиям задачи $\delta \frac{M_1}{M_2} \frac{l}{L} < 32$, то вы-

ходит, что в решении (14.4) нарушено неравенство $R_0 \geq R$ в интервале (14.5) для определения R справедливы. В качестве R можно брать его предельное значение из (14.5) и пользоваться выражением для q_0 из (14.2). Не исключено, что также следует, что при $\delta \frac{M_1}{M_2} \frac{l}{L} > 32$, поскольку

$R < R_0$, у перекрестки в предельном состоянии перекрестная связь остается жесткой, и его предельное состояние достигается лишь в результате перехода в предельное состояние балки главного

направления. При $\delta \frac{M_1}{M_2} \frac{l}{L} < 32$ в предельное состояние

переходит балка обоих направлений, но в этом случае в сечении перекрестки балка главного направления предельный момент не достигнет, так как $\bar{R} < 32$, и, следовательно, $M(1/2) > M_1$.

14.3. Кинематический метод. В предельном состоянии перекрестки, как это в данном случае очевидно, может образоваться только для кинематически возможных пластических механизмов.

Механизм 1 - механизм балочного типа: переходит в предельное состояние только балка главного направления, перекрестки связи остаются жесткой (рис. 58, в). Последним случаем является второй балочный механизм, который следует рассмотреть как симметричные двухпролетные перекрестные балки. Для таких балок, согласно к § 5, 6 в табл. 2, в точках упора можно здесь обозначения, найдем $q_0^{(p)} = \delta^4 \frac{M_1}{aL^3}$, что совпадает с (14.4).

Механизм 2 - перекрестки в предельном состоянии балки обоих направлений (рис. 58, d). Работа механизмов U в этом механизме совершается только вследствие перемещения балки главного направления, ибо только они несут внешнюю нагрузку. Изогнутая ось балки имеет

$$\omega = \begin{cases} f \frac{x}{l} & \text{при } 0 \leq x \leq c; \\ f & \text{при } c \leq x \leq \frac{l}{2}; \end{cases} \quad (14.6)$$

$$U = 2U_1 = 2 \left[2 \int_0^{l/2} q(x) \omega dx \right] = \\ = 2qaL(1-\bar{c})f; \quad \bar{c} = \frac{c}{l},$$

где U_1 - работа механизмов U на одной балке.

Расчетные энергии у балки главного направления представляют 4 чистых пластических шарнира, углы сдвига в которых равны $\theta_1 = \frac{f}{l}$. Поэтому $D_1 = 4M_1\theta_1 = 4M_1 \frac{f}{l}$.

Согласно изогнутой оси перекрестной балки пластический шарнир

$$\theta_2 = \frac{3f}{l} \quad \text{и} \quad D_2 = 4M_2\theta_2 = 12M_2 \frac{f}{l}. \quad \text{Энергия}$$

рассеивания всей системы

$$D = 2D_1 + D_2 = 2 \frac{M_1}{l} \frac{1}{\delta} (4 + R_0 \bar{c}) f; \\ R_0 = \delta \frac{M_2}{M_1} \frac{l}{L}. \quad (14.8)$$

Приведя U и D к одному выражению для предельной нагрузки:

$$q_0^{(p)} = \frac{4 + R_0 \bar{c}}{2L} \frac{M_1}{\delta} \quad (14.9)$$

Нормальную величину $\bar{\varepsilon}$, характеризующую положение шарнира в пролете относительно главного направления, найдем в соответствии с кинематической экстремальной теоремой (см. § 4) из условия

$$\frac{d q_0^{(2)}}{d \bar{\varepsilon}} = 0. \text{ Получается } \bar{\varepsilon} = \frac{2}{R_0} (\sqrt{4 + R_0} - 2).$$

Подставим $\bar{\varepsilon}$ в (14.9) и после преобразования

$$q_0^2 = \left(\frac{\bar{R}_0}{\sqrt{4 + \bar{R}_0} - 2} \right)^2 \frac{M_2}{\alpha b^2}. \quad (14.10)$$

Если умножить здесь числитель и знаменатель на

$$8 + \bar{R}_0 + 4\sqrt{4 + \bar{R}_0}, \quad \text{получим в (14.10). Сопоставим получен-$$

ные результаты для разных механизмов, получим кинематическую экстремальную теорему. Условие реализации механизма I:

$$q_0^{(1)} \leq q_0^{(2)}, \quad \text{что приводит к } \bar{R}_0 \leq 6 \frac{M_2}{M_1} \frac{l}{L} \approx 32,$$

и, наоборот, получим полное совпадение со статическим решением.

14.1. Комбинированный метод. Сущность его в следующем: как и в кинематическом методе, рассмотрим все кинематически возможные пластические механизмы, но пропуская равновесие заданного механизма анализируем статическим методом. Механизм I не вызывает каких-либо затруднений, поэтому составим только из механизма 2. Здесь, поскольку перерезающая сила переходит в предельное состояние, а нагрузка она только реакция R , последнее можно взять предельное значение R_0 . Его можно найти, рассмотрев предельное равновесие этой связи как балку, нагруженной двумя сосредоточенными силами (см. рис. 57, г). Это сделано выше и получено (14.3).

Балку главного направления можно рассмотреть тоже как изогнутую, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой

q_0 , предельное значение которой нужно найти, а фиксированной

сосредоточенной силой R . (Здесь расчеты балки предельного равновесия балки при неперемещаемом нагружении.) Такую схему мы уже рассматривали (см. рис. 57, д) и получали (14.2). В данном случае нужно только подставить туда вместо R значение $\bar{R}_0$ по (14.5). Здесь не следует рассматривать случаи, когда

$$M(l/2) = -M_1, \quad \text{ибо он противоречит заданному пластическому механизму. Сопоставить полученные результаты нужно, применяя значения предельных нагрузок в соответствии с кинематической экстремальной теоремой, ибо она отвечает заданное кинематически возможные пластические механизмы. Способ их отыскания в данном случае уже не принципиален.$$

14.2. Сопоставление рассмотренных методов. Применим теперь особую экстремальную теорему. В статическом методе основное трудности связаны с выделением всех механизмов q_0 , отвечающих разным статическим изогнутым балкам нагруженным, а анализом областей их применимости. Эта трудность резко возрастает с усложнением схемы перерезания и особенно, когда в предельном состоянии прогиба имеет не вся конструкция, а только ее часть, что характерно для воздействия на перерезание заданной нагрузки (§ 45).

Кинематический метод позволяет избежать этих трудностей, но при общей процедуре имеет другой недостаток: для каждого механизма нужно рассмотреть всю систему в поле изгибаемых прогибов, что сопряжено со значительными трудностями при расчете сложных систем.

Комбинированный метод (по сущности разновидность кинематического метода) позволяет избежать обеих трудностей. Он дает возможность рассмотреть систему на отдельных изогнутых балках и сделать расчет в последовательном направлении для всех предельных нагрузок. Кроме того, по сравнению с кинематическим методом уменьшается число рассматриваемых пластических механизмов: здесь действительно рассматриваются не отдельные механизмы, а группы механизмов. В каждой группе задается расположение пластических шарниров только на контуре деформированной зоны перерезания (в нашем примере, на концах балки); внутренние шарниры в пролете балки определяются при их расчете статическим методом исходя из анализа изогнутых механизмов. (Последнее в принципе можно

выразившись, что отвечает разным пластическим механизмам механизмам). Таким образом, при комбинированном методе составленные механизмы — это только возможные варианты граничных условий перекрестий в различных состояниях. В связи с этим самым логичнее рассмотреть перекрестий построение на основании комбинированного метода.

§ 45. Неоднородные перекрестия

45.1. Расчетные схемы. Рассмотрим произвольный ряд расчетных схем, характерных для неоднородных перекрестий, который позволяет: во-первых, получить решения для случаев, наиболее широко встречающихся на практике; во-вторых, по возможности выявить и выделить все основные типы пластических механизмов, встречающихся у неоднородных перекрестий; в-третьих, продемонстрировать методику расчета перекрестий на конкретных числах примеров, чтобы облегчить ее освоение при решении конкретной задачи.

Пусть считать, что перекрестий по всей своей площади нагружены равномерно распределенной нагрузкой, которая распространяется только в одном главном направлении, если не оговорено нагрузки перпендикулярной силой; перекрестий имеет две оси симметрии, если специально не оговорено наличие асимметрии; все балки перекрестия имеют заданную на своем контуре, если специально не оговорено иное, жесткость сечения; число балок главного направления нечетно (пять и более); в регулярных перекрестиях все балки главного направления одинаковы.

Приведенные выше решения справедливы и для случаев, когда балки направлены (или осями направлений) перпендикулярно нагрузке продольным сечением¹. (Такие случаи, как известно, возникают при общем методе судна и натурных перекрестных сечениях при планировании системы набора перекрестий или балок главного направления при продольной системе.) Продольные осями, как показано в гл. 3, не влияют на форму пластического механизма, образующегося при

¹ Имеется в виду достаточно жесткие перекрестия, при расчете которых в соответствии с изложенными предположениями теория продольного разрыва мало не отличается с малым уходом от предельных, полученных при наличии продольных сил и произвольном расположении изгибающих моментов.

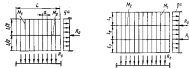


Рис. 59. Регулярное перекрестие с одной перекрестной осью.

Рис. 60. Регулярное перекрестие с двумя перекрестными осями.

возникновении балки продольного сечения; и наконец оказывается лишь на величине предельного момента балки. Расчет же перекрестий комбинированным методом (см. выше) сводится к последовательному определению предельных изгибающих моментов балок перекрестия. Поэтому при наличии продольных сил достаточно определить предельные моменты балок в соответствии с разделом § 3, и дальнейший расчет перекрестий формально является одномерным и не будет.

Приведем ниже примеры сечений с рассмотрением неоднородных перекрестий. Однако напомним, что при рассмотрении решений задачи определения предельных изгибающих моментов для более широкого класса перекрестий, у которых малыми нагрузками распределены по всей или большей части площади перекрестия: сферических перекрестий, платформ, кораблей, вышек и др.

45.2. Регулярное перекрестие с одной перекрестной осью (рис. 59). Расчет аналогичен расчету перекрестий с двумя балками главного направления, рассмотренному в предыдущем параграфе. Для механизма 1 — балочного типа — система сбалансированная (14.4). Для механизма 2, когда возникает в продольном состоянии перекрестных осями, сбалансированная $q_0^{(2)}$ по (14.2), но требует особого рассмотрения направления продольного изгибающего момента R_0 .

Далее, что эти реакции для всех балок главного направления одинаковы. Действительно, если перекрестная сила имеет прогибы, отличающиеся на всей своей длине, значит, все балки главного направления

ние балки имеет прогиб, отличный от нуля. Это возможно, если все она находится в изгибном состоянии, а предельная нагрузка для такой же как выразится по (14.2). Величина нагрузки на всю балку главного направления единичная, значит, можно дать для нее еще и то же $q_0^{(0)}$. Это возможно, как видно из (14.2), только, если все R_0 единичным.

Таким образом, перекрестная связь — единичная балка, нагруженная единицей точечным единичным сосредоточенным сил. Если величина балки пяти, то, как известно, их без балки единицы можно выразить равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью R_0/a . Для такой балки по табл.2

$$\frac{R_0}{a} = 16 \frac{M_1}{l^2}; \quad \bar{R}_0 = \frac{R_0 l}{M_1} = 16 \frac{M_1}{M_1} \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{a}{l}. \quad (15.1)$$

Можно заметить, если $q_0^{(0)} < q_0^{(1)}$. По (14.2) и (15.1) следует, что это имеет место при $\bar{R}_0 \geq 32$. Таким образом, окончательно

$$q_0 = \begin{cases} 64 \frac{M_1}{a l^2} & \text{при } \bar{R}_0 \geq 32; \\ \left(8 + \bar{R}_0 + 4\sqrt{4 + \bar{R}_0}\right) \frac{M_1}{a l^2} & \text{при } \bar{R}_0 \leq 32. \end{cases} \quad (15.2)$$

Для перекрестки с парараз-соединения по концам балки главного направления решение аналогично и

$$q_0 = \begin{cases} 48,64 \frac{M_1}{a l^2} & \text{при } \bar{R}_0 \geq 27,32; \\ \left[4 + \bar{R}_0 + \sqrt{2(2 + \bar{R}_0)}\right] \frac{M_1}{a l^2} & \text{при } \bar{R}_0 \leq 27,32. \end{cases} \quad (15.3)$$

15.3. Расчетные параметры с двумя перекрестными связями (рис.60). Для механизма I — балочного типа расчет сводится к рассмотрению балки главного направления как неразрезной балки, предельная нагрузка которой выражается предельной нагрузкой самого слабого пролета (см. § 6). По табл.2

$$q_0 = 16 \frac{M_1}{a l^2}; \quad i = 1, 2, \quad (15.4)$$

если подставляется балка $l/2$. Механизм 2, когда переходит в предельное состояние перекрестная связь, приводит к необходимости рассмотреть балку главного направления как балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой в двух сосредоточенных силах R_0 (см. рис.62). Наибольший изгибающий момент здесь может быть либо в крайнем пролете, либо посередине среднего пролета балки. Соответственно этому получаются для каждого предельной нагрузки

$$q_0^{(2)} = \left[2(4 + \bar{R}_0) + 4\sqrt{2(2 + \bar{R}_0)}\right] \frac{M_1}{a l^2}; \quad (15.5)$$

$$q_0^{(3)} = 8(2 + \bar{R}_0 \bar{l}_1) \frac{M_1}{a l^2}; \quad \bar{l}_1 = \frac{l_1}{l}. \quad (15.6)$$

Расчетная схема перекрестной связи в данном случае не отличается от рассмотренной для перекрестки с одной перекрестной связью, и выражается по (15.1). На основании (15.5) и (15.6) можно убедиться, что $q_0^{(2)} \geq q_0^{(3)}$, если

$$\bar{R}_0 \leq 16 \frac{1 - 2\bar{l}_1}{(4\bar{l}_1 - 1)^2}.$$

15.4. Расчетные параметры с тремя перекрестными связями (рис.61). Для механизма I — балочного типа остается

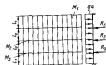


Рис. 67. Регулярное перекрытие с тремя перекрестными связями.



Рис. 68. Перекрытие с рамочной балкой главного направления.

направлений (15.4), но когда в предельное состояние переходит перекрестная связь, включается большее число возможных направлений, так как последние имеют разные предельные моменты (M_2 и M_3) и расстояния на разных расстояниях.

В с л у ч а е 2 - в предельное состояние переходит средняя перекрестная связь, крайние перекрестные связи остаются жесткими. Здесь также сводится к уже рассмотренному расчету перекрытия с одной перекрестной связью, опорным контуром которого служат крайние перекрестные связи. Поэтому могут быть использованы (15.2), если заменить там обозначения: l на $2l_2$ и R_0 на R_2 .

В с л у ч а е 3 - в предельное состояние переходит крайние перекрестные связи, средняя перекрестная связь остается жесткой. Расчет здесь также сводится к рассмотрению перекрытия с одной перекрестной связью, одной из сторон опорного контура которого является средняя перекрестная связь, но при крайних пролетах балки главного направления. Наибольший изгибающий момент возникает в большем пролете последней. Поэтому, если $l_1 > l_2$, то

$$q_0^{(2)} = 8 \left[4 + R_2 l_2 + 2 \sqrt{2(2 + R_2 l_1)} \right] \frac{M_1}{\alpha l^2};$$

$$l_2 = \frac{l_1}{l}, \quad (15.7)$$

где $\bar{R}_2$ вычисляют по (15.1), если там заменить R_0 на R_2 и M_2 на M_3 . При $l_1 < l_2$ в (15.7) нужно заменить l_2 на l_1 .

В с л у ч а е 4 - в предельное состояние переходит все перекрестные связи. Расчетная схема балки главного направления представляется на рис. 61. Наибольший изгибающий момент здесь может быть либо в крайних пролетах, либо в средних пролетах. Соответственно получаются

$$q_0^{(4)} = \left(8 + \bar{R}_2 + 2\bar{R}_3 + 4\sqrt{4 + \bar{R}_2 + 2\bar{R}_3} \right) \frac{M_1}{\alpha l^2}; \quad (15.8)$$

$$q_0^{(3)} = \left[8 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 l_1 + 2\sqrt{2(2 + \bar{R}_2 l_1)(4 + \bar{R}_2 + 2\bar{R}_3 l_1)} \right] \frac{M_1}{\alpha l^2};$$

$$l_1 = \frac{l_2}{l}. \quad (15.9)$$

Здесь $\bar{R}_2$ и $\bar{R}_3$ вычисляют по (15.1), если в первом случае заменить там R_0 на R_2 , а во втором R_0 на R_3 и M_2 на M_3 .

Для частного случая, когда $l_1 = l_2$ и $M_2 = M_3$, очевидно, что $q_0^{(1)} = q_0^{(4)}$, т.е. значения 2 и 3 здесь образуются одновременно. Но это возможно, ибо данные значения численно несовместны. Поэтому они вообще рассматриваться не могут. Следовательно q_0 для остальных случаев примет к следующему:

$$q_0 = \begin{cases} \left[8 + 2\bar{R}_0 + \sqrt{2(4 + \bar{R}_0)(8 + 3\bar{R}_0)} \right] \frac{M_1}{\alpha l^2} & \text{при } \bar{R}_0 \leq 1,54; \\ \left(8 + 3\bar{R}_0 + 4\sqrt{4 + 3\bar{R}_0} \right) \frac{M_1}{\alpha l^2} & \text{при } 1,54 \leq \bar{R}_0 \leq 64; \\ 256 \frac{M_1}{\alpha l^2} & \text{при } \bar{R}_0 \geq 64. \end{cases} \quad (15.10)$$

$\bar{R}_0$ определяется по (15.1).

Если $M_2 = M_3$, а l_1 и l_2 разные (например, $l_1 > l_2$),

но балки по величине, становится возможной реализация механизма 3. Однако возможен случай $\bar{R}_0$, где $q_0^{(II)}$ по (15.7) дает наименьшие значения q_0 , т.е.е. Верхняя его граница

$\bar{R}_0 = 84$; при $l_1 = l_2$ нижняя граница этого значения строится также и $\bar{R}_0 = 84$. Аналогично получается при $l_1 < l_2$, только соответственно реализуется механизм 2.

15.5. Перекрестие с балками главного направления. Рассмотрим случаи, когда предельные моменты перекрестных связей единичны — R_0 и расстояния между ними равны — b . Здесь могут образоваться только два механизма: либо механизм балочного типа (для которого $q_0^{(II)} = 16 \frac{M_1}{a b^2}$), либо механизм,

когда переходит в предельное состояние все перекрестные связи. (Либо механизмы, связанные с переходом в предельное состояние части перекрестных связей. — математически неосуществимы). Для последнего расчетный изгибный момент главного направления — равномерное распределение интенсивности $q_0 = R_0 / b$, где R_0 — реакция перекрестных связей, определенная по (15.1). Тогда получается

$$q_0^{(II)} = 16 \left(\frac{M_1}{a b^2} + \frac{M_2}{b l^2} \right). \quad (15.11)$$

15.6. Перекрестие с рамными балками главного направления. Рассмотрим особенности, наводимые в расчет регулярного перекрытия наличием рамных балок главного направления, на примере перекрытия с двумя перекрестными связями и двумя рамными балками главного направления. (На рис. 62 рамные балки показаны жирными линиями; M_2^1 — предельный момент их сечения.) Механизмы балочного типа, естественно, здесь остаются без изменений.

Образуется новый тип механизма, когда перекрестные связи переходят в предельное состояние, а рамные балки главного направления остаются жесткими. В этом случае последние из-

дают роль жестких опор для перекрестных связей и расчет сводится к рассмотрению регулярного перекрытия между этими балками, т.е.е. при определенном $\bar{R}_0$ для (15.5) и (15.6) и (15.1) нужно заменить L на S .

Также можно быть жестким механизмом в механизме, когда переходит в предельное состояние все балки перекрытия. Они не приводят к заметным искажениям, если можно превратить внешнюю нагрузку, воспринимаемую рамными балками. В этом случае расчет рамной балки ведется как изгибаемый балка, симметрично изгибаемой двумя сосредоточенными силами R_0^1 — реакциями перекрестных связей, предельные значения которых по табл. 2

$$R_0^1 = \frac{2 M_1^1}{L_1}. \text{ В расчетной схеме перекрестной связи отныне}$$

R_0^1 нужно заменить R_0 в сечениях, где установлен рамный балка, имеющие соответственно их направления. Тогда исходя из расчета перекрестной связи вместо (15.1) получим

$$R_0 = \frac{\frac{2 M_2}{S} - R_0^1}{\frac{L^2}{8 a S} - 1}. \quad (15.12)$$

Заметим, что, если расстояние между рамными балками велико, т.е.е. в принципе нужно рассмотреть два варианта определения R_0 : когда наибольший изгибающий момент расположен посередине среднего пролета перекрестной связи и в ее крайнем пролете.) Подставляя R_0 в (15.5) и (15.6) для жестких балок главного направления, получим предельную нагрузку перекрытия q_0 .

Если жесткая превратить внешнюю нагрузку на рамные балки главного направления, из расчетной схемы не будет исключаться от расчетной схемы жестких балок, а соответственно можно пользоваться (15.5) и (15.6):

$$q_0^{(II)} = \left[2 (4 + \bar{R}_0^1) + 4 \sqrt{2 (2 + \bar{R}_0^1)} \right] \frac{M_1^1}{a l^2}; \quad (15.13)$$

$$q_0^{(2)} = 8(2 + \bar{R}_0' \bar{b}_0) \frac{M_1'}{\alpha l^2}; \quad \bar{R}_0' = \frac{R_0' b}{M_1'} \quad (15.14)$$

Если только нужно проверить один один параметр, можно на равной длине направления меньшей нагрузки q в равной перекрестной связи убедиться, что есть

$$q_0^{(4)} = 8(2 - \bar{R}_0' \bar{b}_0) \frac{M_1'}{\alpha l^2} \quad (15.15)$$

Поскольку перекрестная нагрузка равномерно распределенной нагрузкой, значения q_0 , получаемые из расчета жесткости балки по (15.5) или (15.6) и равной балки по (15.13), (15.14) или (15.15), должны быть одинаковыми. Поэтому, проверяя правые части, например (15.5) и (15.13), получим уравнение

$$2(4 + \bar{R}_0) + 4\sqrt{2(2 + \bar{R}_0)} - \\ - [2(4 + \bar{R}_0') + 4\sqrt{2(2 + \bar{R}_0')}] \frac{M_1'}{M_1} = 0 \quad (15.16)$$

связывающее $\bar{R}_0$ и $\bar{R}_0'$. Его можно решить совместно с (15.12) для перекрестной связи или систему, корни которой будут значения R_0 и R_0' . Аналогично можно рассмотреть и другие возможные варианты, проверяя правые части (15.5) и (15.14), (15.5) и (15.15) и т.д.

15.7. Анализ регулярного решения. Применение решения для перекрестки с равными балками главного направления показывает, что даже эти простейшие нерегулярности существенно увеличат величину коэффициента необходимости для ряда параметров, составляющих и решить систему уравнений относительно R_0 и R_0' , причем эти уравнения могут быть невыполнимыми; нарушается характерный для регулярных перекрестий схемы расчета, состоящий в последовательном рассмотрении отдельных балок. С увеличением схемы перекрестной

так эти трудности быстро возрастают. Прямой этих трудностей, как видно из изложенного, состоит в том, что в составе перекрестки есть две балки разной несущей способности (жесткости и равные балки главного направления), который нагружен внешней нагрузкой.

Расчет существенно упрощается, если воспользоваться методом последовательных приближений и в каждом приближении считать жесткости нагрузки, например, на равную балку известной. Тогда только жесткости балки останутся нагруженной неизвестной величиной нагрузки, разделение приближенного значения которой является целью расчета, и полностью сохраняется последовательность расчета, характерная для регулярных перекрестий.

Алгоритм может быть построен следующим образом: задается q_0 в первом приближении и из (15.13)–(15.15) определяется наименьшее положительное значение R_0' ; из (15.13) определяется R_0 ; по (15.5) и (15.6) определяется наименьшее значение q_0 . Это приближение и значение q_0 второго приближения, и расчет повторяется. Заметим, что здесь необходимо также учесть влияние нагрузки, непосредственно не связанную с перекрестками с балками. Эта нагрузка при расчете перекрестной связи должна рассматриваться как заданная и входит в нормальные для предельного значения реакции R_0 , т.е. предельно соответствующий перекресткам (15.12).

15.8. Перекрестки с разными балками. Укажем рассмотренный пример, состоящий между равными балками главного направления (равными балками) и перекрестными балками (неравными) через линию (рис. 82). Расчет таких балок возможен для нахождения предельного момента нагрузки в пролете между равными балками (M_1') и равной балки в пролете между перекрестками (M_1''). Подумавшим будем считать равномерно распределенную нагрузку. Последнее выполняется при рассмотрении максимального балочного типа в последовательном значении предельной нагрузки подумавшим $q_0 = 1,66 \frac{M_1'}{l^2}$ (см. табл. 2). При рассмотрении максимального, оставаясь в пределах предельно возможных значений, когда равные балки остаются жесткими, расчет предельной пролетной перекрестки

в месте крепления пиллеров и перекрестий правыхми известными силами $P_{кр}$. Это не мешает общей схеме расчета. Например, если у рассматриваемого типа перекрестий пиллеров постоянны по углам лева, изменения наступят только изгибаемых, связанных с перекрестием в предельном состоянии всех балок перекрестия: при расчете рамного балки прямо учесть наличие известных сил $P_{кр}$, которые суммируются с реакциями R_0 .

15.13. Особенности расчета перекрестий с асимметричным опорным контуром. Основными особенностями расчета перекрестий с асимметричным опорным контуром связаны с тем, что, во-первых, все (или большинство) их балок имеют разную длину и способность, во-вторых, перекрестие может образовывать пластические механизмы, когда переходит в предельное состояние части перекрестия в ограниченной зоне, либо если возникает неравномерное распределение. Проиллюстрируем это примером расчета перекрестия с трапециевидальным контуром и одной перекрестной балкой (рис. 64). Преломный момент у всех балок главного направления одинаков - M_1 . Минимум балочного типа здесь обилие и не содержит особенностей. Интерес для анализа представляют механизмы, связанные с переходом в предельное состояние перекрестий балки. Для балки главного направления здесь справедливы (15.2)

$$q_0 = \left(\beta + \bar{R}_1 + 4 \sqrt{4 + \bar{R}_1} \right) \frac{M_1}{\alpha l_i}; \quad \bar{R}_1 = \frac{R_1 l_i}{M_1}. \quad (15.19)$$

Здесь l_i - номер балки главного направления. Так как q_0 для всех балок одинаково, существуют равной длины их пролеты l_i будут разные значения реакций R_i . Проще, так видно из (15.19), чем больше l_i , тем больше R_i . Поэтому в предельном состоянии может возникнуть не вся перекрестная балка, а только ее часть, принадлежащая к большей стороне опорного контура перекрестия. Таким образом, расчетная схема перекрестной балки - балка с известными значениями на концах, нагруженная k сосредоточенными силами R_i в длине пролета $(k+1)\alpha$.

Наибольший момент у такой балки в середине j , где преломная сила R_j определяется выражением

$$M_j = \frac{\alpha}{k+1} \left[j \sum_{i=1}^j R_i (k+1-i) + (k+1-j) \sum_{i=j+1}^k R_i i \right] - M_2. \quad (15.20)$$

Если M_j - наибольший изгибающий момент в пролете балки и известны значения отклонений, например $r_i = R_i/R_1$, то, потребовав $M_j = M_2$, можно найти предельные значения

$$R_1 = \frac{2M_2}{\alpha} \frac{k+1}{j \sum_{i=1}^j r_i (k+1-i) + (k+1-j) \sum_{i=j+1}^k r_i i}. \quad (15.21)$$

Значения j определяется из условия (15.20), но можно его найти и по условию минимума R_1 по (15.21), варьируя j от 1 до k . (Варируя по j будет соответствовать вариации комбинированных возможных пластических механизмов балки с разным расположением шарнира в пролете.) Для рассматриваемого примера, учитывая рост R_i в направлении большей стороны опорного контура перекрестия, достаточно варьировать j от 1 до $k/2$.

Значения отклонений r_i определяются исходя из условия постоянства q_0 для всех балок главного направления. Приравняв правые части (15.19) для разных балок, получим систему линейных уравнений относительно r_i . Решить такую систему можно, используя метод последовательных приближений. В первом приближении возьмем q_0 для всех

балки, кроме, например, первой. Тогда, решением (15.19) относительно R_i , найдем

$$r_i = \frac{l_i + 4\sqrt{\frac{M_i}{q_0 a}}}{l_i + 4\sqrt{\frac{M_i}{q_0 a}}} \quad (15.22)$$

Затем по (15.21) находим R_i и по (15.19) или первой из них — q_0 второго приближения. Такой расчет нужно выполнять для всех значений k от $k=2$ до $k=n-1$ ($n-1$ — число балок главного направления в перекрытии) и выбрать наименьшие значения q_0 . Для рассматриваемого перекрытия можно уменьшить число параметров, если вести расчет, последовательно уменьшая значение k от $n-1$ до тех пор, пока будет иметь место уменьшение q_0 .

Анализ показывает, что точный расчет трапециевидного перекрытия расчетом прямоугольного перекрытия средней ширины дает удовлетворительные результаты только в тех случаях, когда минимум q_0 отвечает $k=n-1$, т.е. когда в предельном состоянии перекрестная связь получает прогибы по всей своей длине. В противном случае выводы от такой замены могут быть весьма ошибочными.

§ 16. Воротные перекрытия. Движимые нагрузки

16.1. Особенности расчета воротных перекрытий. Форма движущей нагрузки. Для воротных перекрытий можно выделить два типа движущих нагрузок, представляющих практический интерес: общие нагрузки, распределяемые по всей или почти по всей площади перекрытия, и движущие нагрузки, прикладываемые по малой площади по сравнению с площадью всего перекрытия. При действиях в башах и в пролетах перекрытия в предельном состоянии образуют соответственно общие пластические механизмы, подробно рассмотренные в предыдущем параграфе применительно

не к любым перекрытиям. Поэтому в расчет воротных перекрытий на действия таких нагрузок надо опираться от расчетов любых перекрытий. Так, если нагрузка равномерно распределенная, основное отличие воротного перекрытия состоит в том, что оно может иметь только одну ось симметрии. Это необходимо учесть при расчете балок главного направления в рассмотрении перетяг пластических возможных пластических механизмов, связанных с перекрестом в предельном состоянии перекрестных связей. (Пример расчета несимметричного перекрытия с одной перекрестной связью рассмотрен в предыдущем параграфе при анализе одного из возможных пластических механизмов перекрытия с тремя перекрестными связями.) Основное в такой мере касается учета нечетности в конструкции перекрытия.

Если нагрузка движется линейно по высоте борта, при симметричной системе опоры основное отличие. При продольной системе опоры имеет место балка главного направления, огибаемая нагрузками различной интенсивности, в результате чего реакция на перекрестной связи становится различной по величине; перекрестная связь может в предельном состоянии деформироваться только не части своей длины и т.п. Схема расчета в этом случае аналогична рассмотренной выше для перекрытий с трапециевидными опорными контурами, только реакция в каждой опоре зависит от формы движущей нагрузки, определяется здесь не разницей в длине их пролета, а разницей величин движущей нагрузки. Например, в простейшем случае для перекрытия с одной перекрестной связью отношение реакций на перекрестной связи r_i будет определяться по (15.22), а

$$r_i = \frac{1 + \frac{4}{l} \sqrt{\frac{M_i}{r_i q_0 a}}}{1 + \frac{4}{l} \sqrt{\frac{M_i}{r_i q_0 a}}}, \quad (16.1)$$

где $r_i q_0$ — интенсивность движущей нагрузки на i -й балке главного направления.

Наиболее существенная особенность расчета перекрытий на действие локальных нагрузок, возникающая при наличии трещин во время строительства, появившихся в железобетонных и т.п. Их рассмотрение в послесред периферии. Анализ выполняется с сохранением допущений, которые были сформулированы при рассмотрении сплошных перекрытий, на основании условий симметрии перекрытия и формы нагрузки.

Нагрузки представляются равномерно распределенной на участке прямоугольной формы, границы которого параллельны осям симметрии перекрытия, а перекрытие имеет одну ось симметрии. Примеры, рассмотренные в предыдущем параграфе, показывают, что при увеличении числа перекрестков связей в перекрытии существенно возрастает число качественно различных расчетных механизмов. При этом приходится рассматривать все механизмы, характерные для перекрытий с данным числом перекрестков связей, и выбирать их механизмы, в которых происходит предельное состояние системы чаще всего перекрестных связей.

Потому здесь сразу рассматривается перекрытие с тремя и более перекрестными связями в два взаимоперпендикулярных направления, образующихся при переходе в предельное состояние одной, двух и т.п. перекрестных связей. Это эквивалентно расчету перекрытий с соответствующим числом перекрестных связей. Механизмы балочного типа, сводящиеся к расчету неразрезных многопролетных балок, не имеют особенностей, требующих особого специального рассмотрения. Система перекрытия показана на рис.65; нагруженный участок контурован.

46.2. Плоскостная модель с одной перекрестной связью. Рассматривая плоскостные механизмы, образующиеся в случае, когда исключается всякая возможность одной перекрестной связи. В силу локального характера внешней нагрузки длина ее деформированного участка γ , α может быть меньше длины перекрытия ($\gamma, \alpha \leq L$). Предположим также, что длина этого участка не меньше длины площадки $\mu \alpha$, на которой распределена внешняя нагрузка ($\gamma, \alpha \geq \mu$).

Тогда одновременно с перекрестной связью должна перейти в предельное состояние вся балка главного направления, несущая внешнюю нагрузку (загруженная балка), в часть балки главного направления, на которую внешняя нагрузка непосредственно не



Рис.65. Перекрытие, нагруженное локальной нагрузкой.



Рис.66. Схема балки перекрытия: незагруженной (а) и нагруженной (б) балки главного направления и перекрестной связи (в).

действует (незагруженные балки), возникающая в пределах деформированного участка перекрестной связи. Незагруженная балка (рис.66,а) переходит в предельное состояние только от действия реакции R_1^H , предельное значение которой определяется из расчета этой балки как

$$R_1^H = 2 \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} M_1. \quad (16.2)$$

Внешняя нагрузка на жестко сгруппированные балки по условию симметрии (рис.66,б). Поэтому одновременный переход их в предельное состояние возможен лишь в случае, если приложенные к ним нагрузки реакции R_1 будут также одинаковы. Таким образом, расчетная схема перекрестной связи сводится к балке длиной γ, α , нагруженной рядом сосредоточенных сил R_1 и R_1^H (рис.66,в).

Величина сил R_1^H известна, величина сил R_1 должна быть найдена при расчете этой балки как от приложенных нагрузок. Если предполагать, что такое это значение сил велико, то

$$R_1 = \frac{16 + \frac{R_1^2 \alpha}{M_1 \mu} (\nu_1 - \mu)^2}{\nu_1 (2\nu_1 - \mu)} \frac{M_{21}}{a} \quad (15.3)$$

Косинус R_1 определен, принимая значение нагрузки q минимальным при расчете напряженной балки гравитного направления (рис. 66, а). Напряжения в этой балке расположены между осевыми перекрестными силами симметрично:

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{l_1^2 - \beta} \left[(Y m \bar{l} + 2) + \sqrt{(Y m \bar{l} + 2)^2 - (Y^2 \beta) m^2 \bar{l}^2} \right] x \\ x &= \frac{M_1}{a(l_1 + l_2)} x; \\ \bar{l} &= \frac{l_1}{l_1 + l_2}; \quad \beta = \frac{1}{4} \left(\frac{l_2 - b}{l_1 + l_2} \right)^2; \quad Y = \frac{l_2 + b\bar{l}}{2(l_1 + l_2)}; \\ m &= \frac{R_1(l_1 + l_2)}{M_1} \end{aligned} \right\} \quad (15.4)$$

Далее деформированный участок перекрестной связи (параметр ν_1) определяем исходя из условия минимума q_0 . Из (15.4)

видно, что условие $\frac{dq_0}{d\nu_1} = 0$ эквивалентно условию:

если $\frac{dR_1}{d\nu_1} = 0$. Изложим (15.3), исходя из этого условия получим

$$\nu_1 = \frac{2}{\mu} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\beta} \frac{1}{1 + 16 \frac{M_{21}}{\mu^2 R_1^2 a}}} \right) x$$

$$x \left(\mu + 16 \frac{M_{21}}{\mu R_1^2 a} \right). \quad (15.5)$$

15.3. ПЛОСКОСТЬ МОДЕЛИРОВАННОЙ СИММЕТРИИ ПЕРЕКРЕСТНЫХ СИЛ И БАЛКИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ ГРУНТОВ СДВИЖОМ

($\nu_1 = \nu_2$). Основная особенность случая, в котором происходит сдвиг, состоит в том, что перекрестные связи, — необходимость сдвигаемого рассматриваемой точки и в этом состоянии перемещений балки перекрестной. Рассмотрим j -ю нагруженную балку гравитного направления (рис. 67, а). Минимум изгибающего момента в соответствии с плоскостью шарнира всегда располагается в пределах нагруженного участка; σ_j — это отстояние от первой перекрестной связи. Не рассматривая геометрии изогнутой оси балки можно написать следующие соотношения

$$\frac{M_{1j}}{M_{2j}} = \frac{l_1}{l_2} \frac{l_2 + l_2 - \sigma_j}{l_1 + \sigma_j}, \quad (15.6)$$

где M_{1j} и M_{2j} — моменты балки в указанных точках соответственно для первой и второй перекрестных связей. Аналогичные

соотношения можно записать также для $j = 1$ и $j = n$ указанных точек второй перекрестной связи (рис. 67, б)

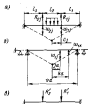


Рис. 67. Силы балки перекрестной: а — нагруженной балки гравитного направления; б — перекрестной связи; в — нагруженной балки гравитного направления.



Рис. 68. Силы нагруженной балки гравитного направления.

$$\frac{w_{1j}}{w_{1k}} = \frac{v_1 - 2j}{v_1 - 2k}; \quad \frac{w_{2j}}{w_{2k}} = \frac{v_2 - 2j}{v_2 - 2k}. \quad (16.7)$$

Так как $v_1 = v_2$, то

$$\frac{w_{1j}}{w_{1k}} = \frac{w_{2j}}{w_{2k}} \quad \text{и} \quad \frac{w_{1j}}{w_{2j}} = \frac{w_{1k}}{w_{2k}}. \quad (16.8)$$

Следовательно (16.8) справедливо для любой балки главного направления, то же (16.8) следует, что оно выполняется, если $C_j = C_k$.

т.е. положение шарниров в пролете у всех балок одинаково. На у всех нагруженных балок главного направления такая одинаковая q_0 .

Поскольку условие $C_j = C_k$ может выполняться только, если будут равны одинаковые значения реакции $R_{1j} = R_{1k}$ и $R_{2j} = R_{2k}$.

Учитывая, что значения моментов нагруженной балки главного направления (рис. 66, а) кусочно-линейны, обеспечить выполнение условия $C_j = C_k$ в этом случае, т.е. получить шарнир в одном сечении между перекрестными осями, можно только при условии, что на этом участке изгибающий момент постоянен. Это определяет отношение реакций $R_1' / R_2' = l_1 / l_2$, а на основании расчета нагруженной балки получаем

$$R_1' = \frac{2M_1}{l_1}; \quad R_2' = \frac{2M_2}{l_2}. \quad (16.9)$$

Таким образом, для перекрестных осей остается справедливым условие, полученное в предыдущем случае (см. рис. 66, а), а соответственно формулы (16.3) для определения R_1 , а также

R_2 после замены там M_1 на M_{21} и R_2' на R_1' . По найденным R_1 и R_2 на основании расчета нагруженной балки

главного направления определяем предельную нагрузку перекрестия q_0 .

16.4. Постатистические механизмы с двумя перекрестными осями в отделе, когда на перекрестных участках выполняются

($v_1 \neq v_2$). Если $v_1 \neq v_2$, условия существенно усложняются. Тогда соответственно $C_1 \neq C_2$ и на расположение шарниров в пролете балок главного направления накладываются ограничения значениями v_1 и v_2 . Разные значения C_j у нагруженных балок главного направления при одинаковой нагрузке q приводит к разным значениям R_{1j} и R_{2j} . Для нагруженных балок главного направления (16.9) остаются справедливыми, но исключаются тем условие, где такое одно условие отменяет этой балки имеет значение, отличное от нуля. Здесь следует пользоваться (16.8).

В наших уравнениях постоянно для определения всех неизвестных: q_0 , C_j , R_{1j} и R_{2j} . Но в отличие от предыдущего случая эти уравнений нужно рассматривать как систему, часть уравнений которой исключены. Поэтому здесь целесообразно прибегнуть к методу последовательных приближений, аналогично тому, как это сделано выше применительно к нерегулярным нагрузкам перекрестия.

В первом приближении возьмем q_0 для всех балок кроме осей, например, первой, а для нее фиксируется C_1 . По C_1 с помощью уравнений совместности переменных определим C_j для всех балок, а затем на их расчете определим значения реакции R_{1j} и R_{2j} , значениями которых определим найденным значением C_j . Потом на расчете перекрестных осей найдем значения реакции первой балки R_{11} и R_{21} и найдем от расчет, который даст q_0 и C_1 второго приближения.

Следует, что случай $v_1 \neq v_2$ возможен в принципе во всем. Как показано выше, это realization приводит к $C_j \neq C_k$ и в статический шарнир в балке главного направления всегда располагается в пределах нагруженного участка. Следовательно, если нагруженный участок очень узок ($\delta \rightarrow 0$) и перекрестие нагружено по ширине, то положение шарниров в пролете балок опре-

являются одинаковыми. Тогда совместные усилия $C_j = C_k$ будут $V_1 = V_2$. Такие невозможно $V_1 \neq V_2$, если перекрытие по конструкции и нагрузке симметрично.

16.5. Случай, когда плоская нагрузка приложена между перекрестной силой и опорным контуром перекрытия. Если обе перекрестные силы расположены по одну сторону от пластического шарнира в пролете балки главного направления (рис.16.8), что имеет место, когда плоская нагрузка приложена между первой перекрестной силой и опорным контуром перекрытия, между прогибами в этих сечениях существует следующее соотношение

$$\frac{W_{1j}}{W_{2j}} = \frac{l_2 + l_2}{l_1} \quad (16.10)$$

Оно одинаково для всех балок (при любом j), из чего следует $W_{1j}/W_{1k} = W_{2j}/W_{2k}$ и в (16.9) $V_1 = V_2$.

Следовательно, для рассматриваемого случая деформирования участки перекрестных сил равны по длине.

Из этого, однако, не вытекает, что усилия реакции на всех балках главного направления должны быть одинаковыми. Кроме того, поскольку в уравнениях совместности шарнирной не фиксируется координаты пластического шарнира в балке, тот участок под определенными составными усилиями реакции.

Это является составным допущением о том, что материал перекрытия - эластопластический. В данном случае две перекрестные силы с перемещением их участков балок главного направления образуют статически неопределимую систему, распределение усилий в которой не может быть определено условиями равновесия. В эластопластической балке это - эластичная, пока деформаций в котором неопределенно. Оно может быть любым статическим допущением, что не подпадает на равновесие пластического механизма.

Получаясь отныне, в данном решении можно принять, что определенные усилия реакции всех нагруженных балок главного направления одинаковы. У нагруженных балок (16.10) может быть выполнено только при условии, что пластический шарнир расположен в сечении, где приложена R_1^j . Соотношение R_1^j и

R_2^j остается неизменным и может быть принято, например, $R_1^j = 0$.

16.6. Перекрестные механизмы с трех и более перекрестными силами. Сказанное выше верно для любого числа перекрестных сил, расположенных по одну сторону от пластического шарнира в пролете балок главного направления. Они все имеют одинаковое значение V в составлении уравнений реакций для них неопределимы. Поэтому возможные реакции могут быть распределены на пластические механизмы, образующиеся при переходе в предельное состояние трех и более перекрестных сил.

Расчет двупролетного перекрытия при $V_1 \neq V_2$ может выполняться со своей необходимостью рассмотрением большого числа кинематически возможных механизмов за счет произвольной вариации механизмов параметров V_1 и V_2 . Здесь, однако, возможна организация извлечения плоской минимума q_0 , аналогичная процедуре известного метода минимизации усилий. За заданную точку плана удобно принять механизм двупролетного типа. Затем перейти к механизму с одной перекрестной силой, шарнирной в предельном состоянии, последовательно увеличивая длину ее деформированного участка, пока не будет достигнут локальный минимум q_0 ; затем подключить вторую перекрестную силу и т.д. Деформированная зона перекрытия при этом последовательно расширяется поочередно рассматриваемую точку, пока не будет найден минимум q_0 .

16.7. Общий алгоритм. Расчеты, изложенные в настоящем и предыдущем параграфах, выявляют существенную общность вычислительной процедуры для перекрытий с различными конструктивными схемами. Благодаря применению комбинированного метода во всех случаях общую задачу расчета перекрытия удается свести к определенному последовательности расчете эквивалентных балок. Это позволяет предложить единый алгоритм, общий для всех типов перекрытий. Его удобно разбить на три блока: "Сила", "Перекрытие", "Минимизация".

Б л о к "С и л а" состоит в определении предельной нагрузки эквивалентной балки, на концах которой расположены шарниры (конструктивные или пластические), borne внешней нагрузки и общим образом произвольными. В этом расчете может быть учтено влияние разнообразных факторов: переменности сечения

отвечает об истощении балки несущей способностью. В полках при этом возникают направленные востановившая линия 0,45 Ст.

Весьма обстоятельные исследования описанного эффекта выполнены И.И.Михайловым [61, 66]. Им были проведены испытания балок, представляющих собой полустатические модели длинных стоек. Они полностью подтвердили предположение, что первой стадией в пластическом этапе практически означает истощение несущей способности балки; направленные в полках при этом остаются только в сохраненной части постоянными, несмотря на некоторый последующий рост нагрузок. В выполненных исследованиях пластическое деформирование стоек после сбалансированности потерей устойчивости от сдвига с падением гофр под углом 45°. Работой этих гофр как раскосов в составе ферм, образуемой ими вместе с пластинами в фланцах, объясняется возможность некоторого увеличения нагрузок на балку после того, как несущая способность стоек истощилась.

Анализ факторов, влияющих на предельное состояние стоек широкополочных двутавров, особенностей пластического течения в их стенках содержится в работах авторов [17, 18, 80]. Были проведены систематические эксперименты на малых моделях балок (скажем 100) и контрольные испытания натурных моделей длинных балок. В этих экспериментах варьировались составные размеры балок, стенок несимметричных профилей, конструкция перекосов стоек.

В результате уточненных выводов:

1. Можно выделить два разных предельных состояния стоек, наступающих в связи с истощением несущей способности стоек: первое предельное состояние связано с потерей устойчивости стоек от сдвига; второе предельное состояние - с развитием в стенке, оставшейся плоской, неограниченного пластического деформирования.

2. Потеря устойчивости стоек, как правило, зависит не только от весьма резкого возрастания скорости прогибов балки, что имеет очевидные признаки это состояние происходит. Для балок с определенными размерами, параметрами для длинных стоек и ферм, потеря устойчивости стоек происходит одновременно с ее переходом в пластическое состояние. Наличие первого, особенно опасного для слабо перекосованных, сдвигов стоек имеет значение перекосованных сил G , при которых происходит потеря устойчивости стоек - см. также [8].



Рис. 69. Взоры продольных удлинений в упругой стадии (а) и их продолжение в пластической стадии (б) у широкополочной двутавровой балки с тонкой стенкой.



Рис. 70. Зависимость $M(P)$ для широкополочного двутавра с тонкой стенкой.
 $1-P_2/P_n=0,95$; $2-P_2/P_n=0,75$

3. Подкреплением стоек балок с помощью ребер жесткости можно обеспечить их устойчивость в пластической стадии. (Подобное см. в конце данного параграфа.) Тем не менее характер работы стоек резко изменится. Происходит нарушение связи между элементами: двутавровое сечение как бы распадается на две ветви таврового профиля, между которыми начинают развиваться напряжения, приводящие к началу появления участка стоек. На рис. 69, б для иллюстрации предельного состояния в эксперименте изображены продольные удлинения по высоте балки в пластической стадии, на рис. 69, а - для соответствующего - в упругой стадии. В результате связи скорости продольных удлинений на этих участках стоек увеличивается, что приводит к второй нагрузке материала и позволяет балке воспринимать возросшие нагрузки. Предельное состояние в этом случае достигается лишь тогда, когда в обеих тавровых ветвях, на которые распались двутавровая балка, возникает пластическое течение. Эта ситуация развивается как второе предельное состояние стоек. Однако в в данном случае может появиться стоек в пластическом этапе сбалансированности резким ростом прогибов балки, а дальнейшее увеличение внешней нагрузки приводит к появлению в ней весьма значительных прогибов. Кроме того, как показано выше, подкрепление стоек, обеспечивающее

возможность достижения второго предельного состояния, как правило, пренебрежимо.

Наклонение с учетом сил инерции или отклонен позволяет принять в качестве предельного значения перерезывающей силы для балки длинных перекрытий вместо (8.26)

$$Q_d = \tau_T F_c \approx \frac{1}{2} Q_T F_c \quad (17.1)$$

(Напомним, F_c — площадь сечения стержня.)

В (17.1), согласно условию пластичности Треска, принято $\tau_T = \frac{1}{2} Q_T$. Как указывалось в § 8, с равным основанием можно было воспользоваться условием пластичности Навье и считать $\tau_T = Q_T / \sqrt{3}$. Если принять ограничитель перерезывающей силы по (17.1) и воспользоваться решением для предельного состояния сечения, приведенным в § 8, (8.22)–(8.24), вид кривых текучести для сечения существенно изменится.

На рис.70 они показаны для симметричных сечений при отношении площади стержня к площади диска F_c/F_D , характерных для длинных балок. По рисунку видно, что кривая текучести весьма близка к ломаной, образованной двумя отрезками прямых $M_d/M_0 = 1$ и $Q_d/Q_c = 1$. (Наибольшее отклонение от ломаной для различных значений — не более 4%). Незамеченная профем, как показано в § 8, также приближает предельную кривую к указанной ломаной. Это дает основание принять ломанку $M_d/M_0 = 1$, $Q_d/Q_c = 1$ в качестве кривой текучести для длинных балок и считать для них, что при $Q < Q_c$ перерезывающая сила не влияет на предельный момент сечения, а при $M < M_0$ гибающий момент не влияет на предельное значение перерезывающей силы. (Как показывает анализ, это приводит к ошибкам при определении предельной нагрузки в соединяющем балки стержне сечении менее 4%; наибольшая относительная ошибка — 2%.)

Величина продольных сил N , возникающих при общем повороте судна, определяется из предельного состояния сечения балок — длинных стропил и вертикальных стоек — в соот-

ветствии на предельный уровень перекрытия [63]. (На форму пластических моментов так же, как у обычных перекрытий N , не влияет.) Предельное состояние сечения при совместном действии M , Q и N может быть описано уравнениями (8.22)–(8.24), если в правой части (8.22) заменить Q на N ; а в левой части (8.23) — M на $M - Nx_D$ (x_D — расстояние от крайней оси сечения от центра тяжести его площади).

Применительно к рассматриваемым балкам, как показывает анализ, N имеет весьма образное по величине предельное значение. При $N < N_0(1 - F_c)$ можно пренебречь реакциями, представляемыми на рис.70, заменив тем же M_0 по M_N — предельный момент сечения, возникающий при $Q = 0$ и $N = 0$ по формулам табл.4, т.е. кривая (перерезающая) текучести может быть приближенно описана как $M_d/M_0 = 1$ и $Q_d/Q_c = 1$.

Упомяну на еще один фактор, существенный для рассматриваемой задачи: направление от общего центра и центра длинных стропил (вертикального диска) O_x вместе с направлениями от центра диска O_D образует в длинной системе и системе второго для, которые выступают в роли присоединенных концов балок перекрытия, в которых оно направлено в составе O_x и O_D общего центра, как следует из условия пластичности Треска (см. § 2), жесткости направленного состояния не влияет на уровень присоединенных концов рассматриваемых балок в пластическом состоянии. Если O_x и O_D имеют разное значение, условие пластичности —

$$[O_x - O_D] = O_T \text{ — в жесткости направленного состояния}$$

снижает уровень напряжений, при котором в балках балок возникает пластическая деформация. Этот эффект можно приблизительно учесть, условно уменьшив площадь присоединенных концов пропорционально соотношению O_x/O_T и O_D/O_T . Подробнее см. в [63].

Отметим также, что использование Q_c по (17.1) позволяет учесть в расчете и другие факторы, влияющие на несущую способность сечения длинных балок. В частности, если истинная несущая способность связана с некоторой жесткостью сечения при изгибах $\tau_{Np} < \tau_T$, а в (17.1) следует заменить τ_T на

в x_p . При определении σ_{x_p} может быть учтено влияние напряжений в подкрепленной стенке — см., например, [3].

17.3. Влияние скрутки на крутильную способность двутавровых балок. При совместном действии в сечении изгибающего момента M и поперечной силы Q их удобно принять в качестве обобщенных напряжений (см. § 3). Тогда обобщенными деформациями должны быть соответственно χ — кривизна оси балки в сечении и γ — средний сдвиг в сечении, а предельное энергичное расхождение будет иметь вид $\delta D_0 = M \delta \chi + Q \delta \gamma$.

Из ассоциированного закона течения следует, что вектор предельных деформаций должен быть направлен по внешней нормали к кривой текучести. Так для сечения двутавровой балки можно построить линию ABC на рис. 70. Тогда получаем, что при $M/M_0 = 1$ и $0 \leq Q \leq Q_0$ вектор предельных деформаций направлен осью M/M_0 (посмотрите на рис. 70) и, следовательно, в сечении возникает только изгибная деформация ($\delta \chi \neq 0$; $\delta \gamma = 0$). Соответственно при $Q/Q_0 = 1$ и $0 \leq M \leq M_0$

вектор предельных деформаций направлен осью Q/Q_0 , и в сечении возникает только сдвиговая деформация ($\delta \chi = 0$; $\delta \gamma \neq 0$); одновременно возникают изгибная и сдвиговая деформации возможно лишь в угловой точке кривой текучести при $M/M_0 = 1$ и $Q/Q_0 = 1$ ($\delta \chi \neq 0$; $\delta \gamma \neq 0$).

Если пластическое деформирование сосредоточено в одном сечении (пластический шарнир), то соответственно должны быть приняты лишь обобщенные деформации: χ — кривизна, θ — угол наклона оси балки в сечении, γ — сдвигание [10] — разрыв притоков балки в сечении (соответствующим сдвигом), и все остальные члены остаются справедливыми. Напряжение в сечении $[m] \neq 0$ называется напряжением сдвига в отличие от обычного пластического шарнира (напряжения вращений), для которого характерно наличие $\theta \neq 0$.

Изложенное позволяет строго подойти к определению предельных нагрузок балок рассматриваемого класса, используя методы теории предельного равновесия. Проиллюстрируем это на примере расчета шарнирно-опертой балки, нагру-

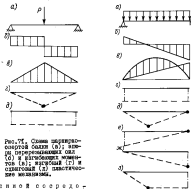


Рис. 71. Схемы шарнирно-опертой балки (а); эпюры поперечной силы (б) и изгибающего момента (в); изгибные (г) и сдвиговые (д) пластические деформации.

енной сосредоточенной силой P (рис. 71, а). Форма эпюры статических моментов $Q(x)$ и изгибающих моментов $M(x)$ можно получить статическим методом поле напряжений. Построим, чтобы избежать сложностей, эпюры $M(x)$ и $Q(x)$ равными M_0 и Q_0 сечения, учитывая возможную нелинейность последних.

На эпюру $M(x)$ и $Q(x)$ (рис. 71, б и в) $M_{max} = \frac{PL}{4}$ и $M_{min} = PL/2$, что дает для значений предельных нагрузок

$$P_{D_{max}} = \frac{4M_0}{l} \quad \text{и} \quad P_{D_0} = 2Q_0. \quad (17.2)$$

Рис. 72. Схемы балки (соединение — шарнирно-опертой балки — жесткой заделки) (а); эпюры поперечной силы (б) и изгибающего момента (в); сдвиговые (г), изгибные (д) и комбинированные (е, ж, з) пластические деформации.

Граничные условия первого сечения заданы условием $M_{max} = M_0$ при $Q_{max} < Q_c$, что приводит к

$$\omega = \frac{Q_c l}{M_0} > 2. \quad (17.3)$$

Решая задачу численным методом, рассмотрим для классического нелинейного пластического механизма катаный с одним шарниром (рис. 71, г), ему соответствует P_{0H} по (17.2); см. § 4 — с одной из двух шарниров одна из опорных сечений (рис. 71, д). Работа внешних сил для последнего $U = P_f$; энергия рассеяния $D = 2Q_c [\omega] = 2Q_c f$. Приравняв $U = D$, получим P_{0H} по (17.2), в условии (17.3) выкажет из классической экстремальной теории $P_{0H} < P_{0H}$.

Заслуживает внимания вопрос пропорциональности выдвинутого сдвигающего пластического механизма. Отметим, что шарниры образуют исключительно поле моментов в опорных сечениях. Их можно возить в двух видах симметричных сечений. От этого величина D не меняется, поскольку $|Q(x)|$ по длине балки постоянно. (Аналогичный случай имеет место при рассмотрении пластического механизма сдвига, симметрично нагруженной дугой сосредоточенными силами, — применительно к шарнирам арки). Более того, здесь можно вообще отказаться от предположений о шарнирах сдвига и считать, что сдвиг по всем сечениям балки по абсолютной величине одинаков и равен $\gamma = \frac{2f}{l}$, во и тогда $D = Q_c \gamma l = 2Q_c f$. В последнем случае форма кинематической оси балки — дуга, состоящая из двух отрезков прямых, что хорошо согласуется с картинкой, наблюдаемой в эксперименте [17, 61]. Это, кстати, хорошо иллюстрирует понятие шарнира сдвига как малого участка по длине балки, в пределах которого концентрируются большие сдвигательные деформации.

Рассмотрим балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой q , шарнирами шарниром одного конца и жесткой заделкой на другом

(рис. 72, а) и исследуем ее предельное равновесие и огибающую в предельных методах. Классическим нелинейным пластическим механизмом представлено на рис. 72, г-ж. Расположение шарнира здесь соответствует расположению экстремумов $Q(x)$ и $M(x)$ на кривых (рис. 72, б и в). Для одностороннего и двустороннего механизмов расчет отложен и дан

$$q_{0H} = 11,66 \frac{M_0}{l^2}; \quad q_{0H} = \frac{2Q_c}{l} \quad (17.4)$$

Для комбинированного механизма Γ (рис. 72, а) фиксируем значение перемещаемой оси на левом конце балки $Q(0) = Q_c$, вычленим кинематический момент на правом конце балки $M(l) = -Q_c l - \frac{1}{2} q l^2$ и приравняем его M_0 . Получается

$$q_{0H}^{(1)} = \frac{2M_0}{l^2} - \frac{2Q_c}{l}. \quad (17.5)$$

Для комбинированного механизма Δ (рис. 72, а) фиксируется $Q(l) = -Q_c$ и $M(l) = -M_0$ и удовлетворяет трем условиям $M(0) = 0$. Получается $q_{0H}^{(2)} = q_{0H}^{(1)}$. Для комбинированного механизма Θ (рис. 72, а) фиксируется $Q(l) = -Q_c$, равносильность кинематического момента в пролете, который приравняем M_0 . В результате

$$q_{0H}^{(3)} = (1 + \omega + \sqrt{1 + 2\omega}) \frac{M_0}{l^2}, \quad (17.6)$$

где ω — по (17.3). Из (17.4) и (17.5) видно, что

$q_{0H} < q_{0H}^{(1)} = q_{0H}^{(2)}$, т. е. следовательно, комбинированные механизмы Γ и Δ реализоваться не могут. Аналогично срав-

$$q_{\alpha} = \begin{cases} \frac{2G_1}{l} \quad \text{при} \quad \omega \leq 4; \\ (1 + \omega + \sqrt{1 + 2\omega}) \frac{M_1}{l^2} \quad \text{при} \quad 4 \leq \omega \leq 6,82; \\ 11,65 \frac{M_1}{l^2} \quad \text{при} \quad \omega \geq 6,82. \end{cases} \quad (17.7)$$

Обобщая полученные результаты, что однонаправленные двухпарные балки с поперечной нагрузкой одного направления могут образовывать три типа пластических механизмов с одной степеню свободы и три балки, когда образуется три шарнира времени; с двумя степенями, когда образуется два шарнира времени, и комбинация шарниров и шарниров — одна балка, когда образуется два шарнира времени и один шарнир времени. Если рассмотреть $M(x)$ и $G(x)$ совместно с одним шарниром, то может образоваться одновременно шарнир времени и шарнир времени. Шарнирные шары, если считать их элементами механизма, рассматриваются как шарниры времени, но не пластические, а концентрические (без трения).

17.3. Переходы с одной перекрестной системы. Рассмотрим перекрестные регуляторы, все балки — пружинистые. Нагрузки равномерно распределены и воспринимаются только балками главного направления (фигуры). Последние шарниры опоры по концам. Перекрестный шарнир (вертикальный шарнир) имеет по концам нулевые моменты. Обобщением сокращенного механизма, как в § 15 (рис. 59). Испытательно обозначим: G_1 и G_2 — предельные значения перекрестной силы соответственно для фазы и шара.

Для механизма с балочного типа предельная нагрузка определяется по (17.7). При образовании механизма, когда переходит в предельное состояние все балки перекрестия, или должны рассматриваться как изолированные балки, нагруженные равной силой сосредоточенных сил R_0 . В силу симметрии балки и нагрузки здесь может образоваться только два механизма, симметричный и антисимметричный, что имеет соответственно для предельных

$$R_0(c) = \frac{2G_1}{l} ; \quad R_0(\omega) = \frac{2G_1}{l^2} . \quad (17.8)$$

Выборить следует наименьшее значение R_0 . Шар — изолированная балка, нагруженная нагрузкой равномерно распределенной интенсивности q и сосредоточенной силой сосредоточенности R_0 . В силу симметрии здесь тоже может образоваться только симметричный и антисимметричный, который равен

$$\left. \begin{aligned} q_{\text{сим}} &= \frac{2G_1}{a^2} + \frac{R_0}{a^2} ; \\ q_{\text{антисим}} &= \left[4 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2(2 + \sqrt{2})} \right] \frac{M_1}{a^2} ; \\ R_0 &= \frac{R_0 l}{M_1} . \end{aligned} \right\} \quad (17.9)$$

В соотношениях (17.8) и (17.9) есть четыре значения q , которые относятся к четырем механизмам: четыре шарнира, четыре шарнира и три шарнира. Анализ реальных значений параметров показывает, что для данного типичного перекрестия в деформированном состоянии реализуется только симметричный механизм.

17.4. Переходы с трех перекрестных систем. Сохраняя исходные предположения предыдущего примера и добавив еще две перекрестные силы — балочные стрингеры. Обобщением механизма на рис. 51, но работая между перекрестными системами будем считать шарнирами. Дополнительно обозначим через G_3 — предельное значение перекрестной силы для стрингера. Поскольку формы шарниры опоры, при образовании механизма с балочного типа наиболее слабым участком является шарнир, для которых определяем (17.7).

При переходе в предельное состояние шарниры и стрингеры не рассматриваются, так как они не рассматриваются в предыдущем примере. Поэтому для определения предельных значений реакции можно использовать (17.8) с подстановкой туда соответствующих предельных значений и перекрестных сил.

Рассмотрим механизм, когда в предельное состояние переходят стрингеры, а киль остается жестким. Расчетная схема флора - изогнутый балок, нагруженный равномерно распределенной нагрузкой и сосредоточенной силой R_2 , расположенной на одном конце (у киля) и перпендикулярно или параллельно киле. Во втором - киль также перпендикулярен. Выходитая несимметрия закрепления балки из-за килевого и симметричного механизма может образоваться комбинированный механизм. Они дают

$$\left. \begin{aligned} q_{сим} &= \frac{4Q_1}{\alpha l} - \frac{2R_2}{\alpha l}; \\ q_{сим} &= 2 \left(12 + \bar{R}_2 + 4 \sqrt{12 + \bar{R}_2} \right) \frac{M_1}{\alpha l^2}; \quad \bar{R}_2 = \frac{R_2 l}{M_1}; \\ q_{асим} &= 2 \left(2 + \bar{R}_2 + \omega_1 + 2 \sqrt{1 + \bar{R}_2 + \omega_1} \right) \frac{M_2}{\alpha l^2}; \quad \omega_1 = \frac{Q_1 l}{M_1}. \end{aligned} \right\} \quad (17.10)$$

При образовании механизма, отвечающего переходу в предельное состояние киле, когда стрингеры остаются жесткими, расчетная схема флора аналогична рассмотренной в предыдущем случае, только оба конца флора жестко заделаны и вместо R_1 действует R_2 . Выходитая несимметрия в балке может реализоваться только для механизма - изгибной и сдвиговой, которые приводят к

$$\left. \begin{aligned} q_{сим} &= \frac{4Q_1}{\alpha l} + \frac{2R_2}{\alpha l}; \\ q_{асим} &= 2 \left[18 + \bar{R}_2 + 4 \sqrt{2(8 + \bar{R}_2)} \right] \frac{M_1}{\alpha l^2}; \\ \bar{R}_2 &= \frac{R_2 l}{M_1}. \end{aligned} \right\} \quad (17.11)$$

Для механизма, отвечающего переходу в предельное состояние всех балок пере-

крытия, на флор действует три реакции в киле: две перпендикулярно осям, одна симметричная, в результате получается

$$\left. \begin{aligned} q_{асим} &= \frac{2Q_1}{\alpha l} + \frac{R_2}{\alpha l} + \frac{2R_3}{\alpha l}; \\ q_{асим} &= \left[4 + \bar{R}_2 + 2\bar{R}_3 + 2 \sqrt{2(2 + \bar{R}_2 + 2\bar{R}_3)} \right] \frac{M_1}{\alpha l^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.12)$$

Отметим, что в данном случае пластический механизм всех перекрытий должен быть симметричным (либо сдвиговой, либо изгибной); в противном случае будет нарушено условие совместности перемещений балок перекрытия.

Эти примеры дают возможность выявить основные особенности расчета длинных перекрытий. Несомненно, учет сдвига, естественно, упрощает расчет, делая его более громоздким, возрастает число пластических механизмов, требующих рассмотрения. Общий порядок расчета, однако, остается тем же, как и при рассмотрении коротких и средних перекрытий, и укладывается в общий алгоритм, приведенный в предыдущем параграфе. Нужно лишь учесть возможность образования сдвиговых и комбинированных механизмов при расчете изогнутых балок (или "балки").

17.6. Подкрепление стенок длинных балок. Одним из важных вопросов проблем, связанных с оценкой действительной несущей способности конструкций, является проблема обеспечения конструктивного обеспечения предельной местной прочности. Пластические деформации в большом числе случаев концентрируются в ограниченной области (пластические шарниры в сечениях, узлы) и важно, чтобы конструкция была способна обеспечить развитие этих часто больших деформаций. Иначе снижается несущая способность сечений (узлов), происходит местное разрушение, что существенно снижает на несущую способность конструкции в целом.

Сказанное в полной мере относится к длинным перекрытиям. В частности, как указывалось выше, возмущение сдвиговых пластических деформаций в стенках длинных балок (перекрытиях сдви-

†

Настоящий раздел написан совместно с В.В.Михайловым.

ля) сопротивлению потерей устойчивости. Эксперименты [19, 20] обнаруживают наличие гофр, ориентированных под углом 45° к оси балки, стрелка прогиба которых с ростом деформаций быстро увеличивается, при этом гофры в разных сечениях. Такие гофры — явные распространённые явления при эксплуатационных нагрузках средних перекрываний балками воспретными нагрузками, возникающими при сжатии, являясь по сути, предельным явлением — см. [103] и др.

Появление гофр сопровождается развитием больших локальных пластических деформаций, которые вносят привнес в изгибную жесткость конструкции (возникновение разрывов). Если учесть, что нагрузка перекрывает в предельном состоянии представляет собой пластический стержень с пластическим шарниром в центре балки, развиваются не однородности, это явление имеет существенное влияние на работу изгибающей способности перекрываний. Основным недостатком целесообразности подкрепления стенок листовыми балками в районах появления больших остаточных деформаций (в основном в районе опорного контура перекрывания) для обеспечения на устойчивость.

Наблюдения форм потерей устойчивости стенок с образованным гофр, ориентированных под углом 45° к оси балки, свидетельствуют о концентрации больших усилий. В связи с этим было принято экспериментальное исследование устойчивости листовых пластин при чистом сжатии в стенках листовых пластин с деформацией [19]. Попробовали выработать в виде ребер жесткости, параллельных осей на стороне опорного контура листов. В эксперименте выработали толщину листов, соотношение сторон ее опорного контура, расстояния, ориентации в размеры подкрепления ребер. Величина относительных усилий γ , при которых происходила потеря устойчивости для разных листов, колебалась в пределах $\frac{\gamma_G}{\gamma_r} = 5 \pm 100$ (G — модуль упругости при сжатии).

Важно было отметить также 200 листов. Комбинируя различные условия формы потерей устойчивости подкрепленной пластины: гофрировка, когда пластина теряет устойчивость между ребрами, а пластина остается деформированной, с изгибом, когда пластина теряет устойчивость вместе с ребрами. Момент потерей устойчивости пластины практически однозначно определяется величиной относительного усилия $\frac{\gamma_G}{\gamma_r}$. Это позволило на резу-

татах обработки данных экспериментов получить эмпирические формулы для критических усилий

$$\frac{\gamma_G}{\gamma_r} = 4,4 \left(\frac{100}{\delta} \right)^2; \quad \frac{\gamma_G}{\gamma_r} = 13,9 \cdot 10^{-4} \frac{W_0}{h L^2}, \quad (17.13)$$

где γ_r и γ_G — критические усилия, отвечающие гофрировке и выпучиванию соответственно; δ — толщина пластины; α — расстояние между ребрами; h и L — высота и длина пролета ребра; W_0 — предельный момент сопротивления сечения ребра.

Учитывая, что критические усилия по (17.13) относятся не моменту потери устойчивости, а изгибающему моменту способности пластины, когда в последнем найденный критический прогиб и дальнейший рост внешней нагрузки становится практически невозможным.

Для оценки возможности использования (17.13) для стенок балок было проведено сравнение 80 испытанных коротких листовых балок изогнутого изогнутого профиля — как симметричного, так и несимметричного. Эти пластины использовались как, в начале перегибной; см. также [19, 20]. Стенки балок были подкреплены перпендикулярными ребрами жесткости. По мере увеличения нагрузки пластины на две стороны и нагрузки соответствующей осевой нагрузке пролета. Наблюдения показали полное соответствие форм потерей устойчивости стенок балок и пластины при чистом сжатии. Величина критических усилий стенок γ_G была по сравнению с критическими усилиями пластины γ_H и значительно менее стабильна. Соотношение γ_G/γ_H колебалось в пределах 0,2–0,6. Величина на критические усилия стенок величина изгибающих моментов в сечении балки, на которой возникла ее полная деформация не уменьшалась. Анализ полученных результатов позволяет рекомендовать использовать (17.13) для расчета стенок балок, усилием γ умноженным на коэффициент 0,2–0,3. Анализ показывает, что это приводит к реальным размерам подкрепления. Так, при высоте балки 500–1500 мм и толщине стенок 8–12 мм требуется усиление ребер — параллельный в 5–12 с интервалом 250–340 мм. Это гарантирует отсутствие потерей устойчивости до величины $\frac{\gamma_G}{\gamma_r} = 10$.

Наименный метод определения предельных нагрузок перекрытий основан на последовательном рассмотрении всех количественных изменений пластических механизмов. Этот формализм требует процедуры количественного (и соответственно комбинированного) метода. Однако в практических расчетах, конечно, можно не рассматривать безразлично перекаленные пластические механизмы, которые дают предельную нагрузку, меньшую боковую, чем другие механизмы. Естественно, здесь должна быть уверенность, что описанный механизм действительно реализуется на момент, в противном случае не исключена ошибка в одну сторону - завышение предельной нагрузки перекрытия. Возможны и приближенные решения задачи, когда поставлены вопросы о пределах балки перекрытия задается. Последнее всегда задает предельную нагрузку, но решения получаются простыми.

Глава 5

ПРЕДЕЛЬНЫЕ НАГРУЗКИ И ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПЛАСТИК ОБЛАСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕКРЫТИЯХ

§ 10. Особенности работы пластин оболочки на предельном изгибности.

Формы пластичности

10.1. Предельные нагрузки и нагрузка способности пластин

общие. Основные особенности в поведении пластин оболочки на предельном изгибности связаны с появлением в них относительно больших прогибов. Известно, что относительно прогибы оболочки толщиной в 5-10 мм образуются на эксплуатационных судах; также порядок толщины допуска на деформативность оболочки, а это составляет 0,3-1,0 толщины пластины. Соответственно отрывки прогиба при деформации оболочки достигают 30-50 мм, а часто и существенно больше.

При таких прогибах поведение пластины в значительной мере определяется сложными взаимодействиями, возникающими из-за расщепления - прогибания, сложными сложными конструкциями, оболочками и закреплениями краев пластины, а также благодаря ее размерам. Такие нагрузки обуславливают сложную ситуацию для работы пластины в пластической области; ее разрушение обычно происходит при расходе больших перекрытий нагрузках, которыми характеризуются весьма большие прогибы.

Несмотря на это, можно, во-первых, для пластины по предельным и другим расчетам значительно упростить область пластического деформирования, решая геометрически линейные задачи, в которых изменения геометрии пластины в результате ее деформирования не учитываются; во-вторых, предельные нагрузки, найденные в рамках упомянутой теории предельного равновесия (см. § 4), так характеризуются прочностью гораздо менее сложными для пластины по сравнению с изгибом.



Рис.73. Зависимость нагрузки - прогиб жесткой (1) и гибкой (2) плиты.

На рис.73 показан характерный для плиты с расходом для зависимости нагрузки q - прогиб f . На рисунке видно, что достигшие предельной нагрузки q_0 для жесткой плиты не отличаются от предельной способности. Для жесткой плиты (кривая 1) q_0 еще есть величина нагрузки, при которой начинается заметное увеличение скорости роста прогиба и начинается пластическое деформирование. Для гибкой плиты (кривая 2), когда плита не принимает существенной роли в упругой стадии, q_0 меньше от со-мнительно. Показывая прямая (дуга) на рисунке отмечает идеальную пластическую мембрану, в которую превращается плита при больших прогибах, когда плита не напряжена до того ее предел достигнет σ_T .

Иррациональные возможности использованы для плиты общей предельной нагрузкой, как критерий прочности имеют нелинейнообразные приложения для ее определения точных средних методов, жесткой стадии предельного более простым приближенным решением. Такие решения в большинстве случаев, как показано выше, удается получить математическими методами теории предельного равновесия. Заметим, что для толстых плит, например из алюминия, предельная нагрузка является практически идеальной оценкой предельной способности [43, 104].

18.2. Среднее предельное поле плиты. Теория общего толстой плиты обычно строится в рамках допущения, используемых в теории Каргофа-Ламе; состоит, что совокупность точек, лежащих на перпендикуляре к срединной плоскости плиты до деформации, остается на перпендикуляре к срединной поверхности после деформации (гипотеза "прямых нормалей"); нормальные напряжения по толщине, параллельных срединной поверхности, пренебрежимо по сравнению с другими компонентами напряжений; толщина плиты в ре-

зультате деформации не меняется. Далее допущение приводит для компонент деформации к следующим зависимостям:

$$\varepsilon_x^{(1)} = \varepsilon_x + \varepsilon_x z; \quad \varepsilon_y^{(1)} = \varepsilon_y + \varepsilon_y z; \quad \gamma_{xy}^{(1)} = \gamma_{xy} + 2\varepsilon_{xy} z; \quad (18.1)$$

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \varepsilon_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (18.2)$$

где ε_x , ε_y , ε_{xy} - компоненты деформации срединной по-

верхности; $\varepsilon_x^{(1)}$, $\varepsilon_y^{(1)}$, $\gamma_{xy}^{(1)}$ - компоненты деформаций

слоя, отстоящего на величину z от срединной поверхности (мы помним, что ось x и y расположены в срединной поверхности, а ось z является нормалью к ней); ε_x , ε_y , ε_{xy} - соответствующие проекции в кручение срединной поверхности.

Для случая деформации с произвольными координатами уравнения Коши (2.5) и (2.7); в геометрически нелинейных случаях в них увеличатся нелинейные члены, содержащие прогиб w . Уравнения неразрывности деформаций для последнего случая имеют вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^4}. \quad (18.3)$$

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz; \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz; \quad S = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz; \\ M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz; \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz; \quad H = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz, \end{aligned} \right\} \quad (18.4)$$

где N_x и N_y - продольные силы, направленные вдоль осей x и y ; M_x и M_y - изгибающие моменты; S и H соответствующие сдвигающие усилия и крутящий момент; h - толщина пластины. (Вплотную рассмотренный случай на напряженное состояние пластины считается приемлемым, и она здесь не выполняется.) Связь между этими величинами устанавливает уравнение равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - N_x \kappa_x - N_y \kappa_y - \\ &- 2S \kappa_{xy} + q = 0, \end{aligned} \right\} \quad (18.5)$$

где q - интенсивность нагрузки, действующей по нормали к срединной поверхности пластины.

В рассмотренной линейной задаче члены, содержащие кривизны, на уравнениях отсутствуют. Нетрудно убедиться, что если принять N_x , N_y , S , M_x , M_y и H в качестве обобщенных напряжений, то обобщенными деформациями соответственно будут ε_x , ε_y , γ_{xy} .

κ_x , κ_y , κ_{xy} в принципе энергии рассматриваем, относимое к единице площади срединной плоскости, определяется как

$$\begin{aligned} \delta D_0 &= N_x \delta \varepsilon_x + N_y \delta \varepsilon_y + S \delta \gamma_{xy} + \\ &+ M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + H \delta \kappa_{xy}. \end{aligned} \quad (18.6)$$

18.3. Обобщенные напряжения и обобщенный закон течения.

Для пластины в состоянии на основе закона пластичности Треска и обобщенного закона течения можно записать состояние обобщенных напряжений в зависимости от соответствующих скоростей обобщенных деформаций [93]. Если рассмотреть состояние в данной точке, где $\tau_{xy} = 0$, а $\sigma_x = \sigma$, а $\sigma_y = -\sigma$,

и заменить соответствующее значение при обобщенных напряжениях и деформациях, то, используя

$$\beta_1 = -\frac{1}{h} \frac{\dot{\varepsilon}_x}{\dot{\kappa}_x};$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{h} \frac{\dot{\varepsilon}_x}{\dot{\kappa}_x}; \quad (18.7)$$

$$\beta_3 = -\frac{1}{h} \frac{\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y}{\dot{\kappa}_1 + \dot{\kappa}_2},$$

можно связать продольные силы N_1 , N_2 и изгибающие моменты M_1 , M_2 , относящиеся продольному состоянию пластины в данной точке по формулам, приведенным в табл.5, которые представляют собой закон пластичности пластины в обобщенных напряжениях. Конкретизация см. в [9, 93].

В табл.5 обозначено:

$$n_1 = \frac{N_1}{N_0}; \quad n_2 = \frac{N_2}{N_0}; \quad m_1 = \frac{M_1}{M_0};$$

$$m_2 = \frac{M_2}{M_0}, \quad N_0 = \sigma_T h; \quad M_0 = \sigma_T \frac{h^2}{4}, \quad (18.6)$$

а обозначения преобразованы со знаком плюс-минус. Знак здесь выбран таким образом, чтобы он соответствовал соответствующим скоростям обозначенных деформаций. Вероятно же табл.5 выбраны в зависимости от соотношения β_i ($i = 1, 2, 3$), приведенных в ее первой колонке. Эти формулы справедливы для $-\frac{1}{2} < \beta_i < \frac{1}{2}$. Если же часть (или все) β_i оказываются $\beta_i > \frac{1}{2}$ или $\beta_i < -\frac{1}{2}$, вместо соответствующих β_i нужно подставлять $1/2$ или $-1/2$.

Собого рассмотрения требуют случаи, когда две β_i равны между собой, а третья дает неопределенность типа 0/0. Условие пластичности для этого случая представлено в табл.6. В последней колонке приведенным отмечением на соответствия скоростей деформаций на ассоциированному закону течения. Если $\beta_1 = \beta_2$, можно пользоваться формулами табл.5, но β_i в первой колонке нужно заменить соответствующими абсолютными значениями скоростей вращения $|\dot{\chi}_i|$, приняв в качестве $|\dot{\chi}_3| = |\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2|$.

Эти формулы условия пластичности особенно удобны в сочетании с численным методом теории предельного равновесия. Для этого решение может быть использовано и в рамках теории деформации, если зависимость скорости деформации в виде ассоциированного закона деформирования: нужно лишь в (18.7) и табл.6 заменить скорости обозначенных деформаций на сами деформации, отбросив точки. Доказательство см. в [9]; там же применено аналогичное условие пластичности для трехосных пластин и оболочек.

18.4. Условие пластичности для ползучих жестких телесных тел. При ползучем изгибе жестких телесных тел, когда проявляются они пер, можно пользоваться условиями пластичности, приведен-

Таблица 5. Выражения обобщенных напряжений

Сочетание по β_i	$\pm n_1$	$\pm n_2$	$\pm m_1$	$\pm m_2$
$\beta_3 < \beta_1 < \beta_2$ $\beta_2 < \beta_1 < \beta_3$	$-(\beta_1 + \beta_2)$	$-(\beta_1 - \beta_2)$	$1 - 2(\beta_1^2 + \beta_2^2)$	$2(\beta_1^2 - \beta_2^2)$
$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ $\beta_2 < \beta_3 < \beta_1$	$-(\beta_2 - \beta_1)$	$-(\beta_2 + \beta_1)$	$2(\beta_2^2 - \beta_1^2)$	$1 - 2(\beta_1^2 + \beta_2^2)$
$\beta_2 < \beta_3 < \beta_1$ $\beta_1 < \beta_3 < \beta_2$	$-(\beta_1 + \beta_2)$	$-(\beta_2 + \beta_1)$	$1 - 2(\beta_1^2 + \beta_2^2)$	$1 - 2(\beta_1^2 + \beta_2^2)$

ним виде. Но для частного частного случая проще получить решение, непосредственно используя условия пластичности Треска для плоской задачи (2.15) и ассоциированный закон течения (деформирования). Для этого на рис. 7 достаточно заменить σ_1 и σ_2 на M_1 и M_2 , а также ввести в левую часть ε_1 и ε_2 на χ_1 и χ_2 . Получается

$$\left. \begin{array}{ll} \text{при } \chi_1 > 0; \chi_2 > 0 & m_1 = m_2 = 1; \\ \text{при } \chi_1 > 0; \chi_2 \leq 0 \text{ и } |\chi_1| > |\chi_2| & m_1 = 1; m_2 = 0; \\ \text{при } \chi_1 = -\chi_2 > 0 & m_1 = m_2 = 1; \\ \text{при } \chi_1 \geq 0; \chi_2 < 0 \text{ и } |\chi_1| < |\chi_2| & m_1 = 0; m_2 = -1; \\ \text{при } \chi_1 < 0; \chi_2 < 0 & m_1 = m_2 = -1; \\ \text{при } \chi_1 < 0; \chi_2 \geq 0 \text{ и } |\chi_1| > |\chi_2| & m_1 = -1; m_2 = 0; \\ \text{при } \chi_1 = -\chi_2 < 0 & m_1 = m_2 = -1; \\ \text{при } \chi_1 = 0; \chi_2 > 0 \text{ и } |\chi_1| < |\chi_2| & m_1 = 0; m_2 = 1. \end{array} \right\} (10.9)$$

10.5. Условия пластичности для призматического изгиба пластины. При призматическом изгибе пластины плоская, параллельная сторонам изогнутого контура, всегда является нейтральной. Тогда здесь $\varepsilon_1 = 0; \chi_1 = 0; \varepsilon_2 = -\chi_2 = 0$, где в выражении, параллельном плоской стороне изогнутого контура, пластины не деформируется. Из этого из (10.7) $\beta_1 = \beta_2$ и $\beta_2 = 0/0$, а из табл. 6

$m_1 = \pm (1 - m_2^2)$, что означает с условием пластичности для балки призматического сечения при совместном действии изгибающего момента и продольной силы (см. § 8). Следовательно, все расчеты для балки из идеального жесткопластического материала, изогнутой на $\pi/2$ и π , могут быть без корректарных распространены на призматический изгиб пластины, а решения для криволинейных поверхностей — соответственно на изгиб цилиндричес-

Т а б л и ц а 6. Условия пластичности в изгибе пластины для сферического сечения

Состояние β_i	Условие пластичности	Знаки тесисов $M_0; \dot{\varepsilon}_1; M_0 \dot{\varepsilon}_2; M_0 \dot{\chi}_1; M_0 \dot{\chi}_2$
$\beta_1 = \beta_2; \beta_2 = \frac{0}{0}$	$m_1 = m_2 = \pm [1 - (a_1 - a_2)^2]$	$\pm 2(m_1 - m_2); \pm 2(m_1 - m_2); 1; -1$
$\beta_2 = \beta_1; \beta_1 = \frac{0}{0}$	$m_2 = \pm (1 - m_1^2)$	$0; \pm 2m_2; 0; 1$
$\beta_2 = \beta_1; \beta_1 = \frac{0}{0}$	$m_1 = \pm (1 - m_2^2)$	$\pm 2m_1; 0; 1; 0$

ких оболочек бесконечной длины, у которых нагрузка вдоль образующей не меняется.

§ 19. Прямые нагрузки пластин

19.1. Основы теории прямолинейного метода теории пластинчатых оболочек. Рассмотренный выше приближенный метод определения прямых нагрузок основан на классическом методе теории прямолинейного равновесия, он требует знания поля перемещений — формы прогиба пластины w в прямых сечениях. По известным из о линейно-соотношений (18.8) определяем кривыми срединной плоскости, а по их соотношениям — условиям пластичности, рассмотренным в предыдущем параграфе. Последнее позволяет определить значение момента в представлении возможности вычислить меру распределения D . Прямые D работы вычисляем как, вычислив тогда меру прямолинейной нагрузки.

Заметим, что в принципе форму прогиба w можно задать с точностью до любого числа произвольных параметров, рассмотрев последние в соответствии с классическим методом прямой теории прямолинейного равновесия (см. § 4) исходя из условий максимума прямой нагрузки. Однако решение задачи здесь мало отличается от использованной выше для определения прямой нагрузки формы. Так же как и для балок, ее можно использовать для решения геометрически нелинейных задач (см. гл. 3).

В этом случае требуется задать с w также значение перемещения в срединной плоскости пластины u в P , при определенном меру распределения учитывать ту ее часть, которая связана с работой прямых сил X и, наконец, для определения произвольных параметров заданного поля перемещений пользоваться условиями максимума перемещений, поскольку в геометрически нелинейном случае экстремальные теоремы теории прямолинейного равновесия (см. § 41). Сказанное иллюстрируется примерами следующего параграфа.

19.2. Пластина, нагруженная сосредоточенной силой. Рассмотрим в качестве примера, пластина, нагруженная силой P , действующей на пластину, пластина достаточно длинна от срединного контура и деформированная или пластины не достигают последнего. Это даст право рассматривать d с x и y в

и u — пластины, и значение становится симметричным. Заданная простейшую форму прогиба w в поле кругового контура радиусом R (рис. 74). В полярных координатах

$$w = f(1 - \rho^2); \quad \rho = \frac{r}{R} \quad (19.1)$$

Заметим, что при такой форме w расчет бесконечной пластины совпадает с расчетом круглой пластины радиусом R , нагруженной на внешнем контуре. Кроме того в радиальных и тангенциальных напряжениях

$$M_r = -\frac{d^2 w}{dr^2} = 0; \quad M_\theta = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{f}{R^2 \rho^2} \quad (19.2)$$

В силу осевой симметрии радиальные и тангенциальные напряжения являются главными напряжениями и для определения обобщенных напряжений можно непосредственно пользоваться (18.9). Здесь $M_r = 0$;

$$M_\theta > 0 \quad \text{и} \quad |M_r| < |M_\theta| \quad \text{Поэтому} \quad M_r = 0; \quad m_\theta = 1.$$

Тогда меру распределения по всей деформированной области, на исключенном кольцевом контурном центре,

$$D = 2\pi \int_0^R (M_r m_r + M_\theta m_\theta) r dr = 2\pi M_\theta f.$$

$$\text{Град осевых в контурном центре} \quad \theta = \left[\frac{dw}{dr} \right]_R = -\frac{1}{R}. \text{ Соот-}$$

ветственно здесь $M_r = \frac{dw}{dr} = -\infty$, а для M_θ соответствующей (19.2). Следовательно, $M_r < 0$; $M_\theta > 0$ и $|M_r| > |M_\theta|$ в соответствии (18.9) обобщенные напряжения



Рис. 74. Пластический механизм пластин.



Рис. 76. Пластический механизм пластин.



Рис. 78. Пластический механизм пластин.



Рис. 75. Пластический механизм пластин.



Рис. 77. Пластический механизм пластин.

$m_r = -1$ и $m_\theta = 0$. Тогда имеем

$$D_1 = 2\pi R M_r \theta = 2\pi M_0 f \quad (19.3)$$

$$D = D_1 + D_2 = 4\pi M_0 f.$$

Работа внешних сил $U = Pf$. Приравняв ее (19.3), найдем предельную нагрузку

$$P_0 = 4\pi M_0. \quad (19.4)$$

Полученный результат является приближенным. Он совпадает с решением в [110].

19.3. Пластин, нагруженные сосредоточенной силой вдоль огибающей контуры. Если допустить, что сила P приложена достаточно близко к огибающей контуру, можно рассмотреть случай, когда линия деформирования зоны пластичности K совпадает с огибающей контуры α . Тогда в форму прогиба w по (19.1) нужно ввести коррекцию: в соотношении (19.1) вместо жесткости пластин D нужно использовать жесткость пластин D_1 , приравняв ее к работе внешних сил U (19.3), а для начальной энергии расколотой зоны можно пользоваться (19.3), взяв соответственно D в работе жесткого элемента, т.е.

$$D_1 + D_2 = 4(\pi - \varphi) M_0 f. \quad (19.5)$$

На границе жесткого элемента возникают пластические шарниры, угол slopes в которых θ_K (для шарнира вдоль контура пластин) и θ_R (для шарнира вдоль радиуса) равны $\theta_K = -\frac{f}{\alpha}$; $\theta_R = \frac{f}{R} \tan \frac{\varphi}{2}$. Для шарнира вдоль контура пластин приравняв в направлении его оси $M_1 = -\frac{d^2 w}{dy^2} = 0$, в шарнире ось

$\kappa_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\theta_x}{\Delta x} = -\infty$. Следовательно, здесь по (18.9)

$$m_1 = 0; \quad m_2 = -1. \quad (18.6)$$

(Заметим, что сказанное верно для любого шарика, расположенного между двумя жесткими элементами.) Энергия рассеяния здесь

$$D_3 = M_2 \theta_K \cdot 2b = 2 M_0 f \operatorname{tg} \Psi. \quad (18.7)$$

В шариках вдоль радиусов по (18.2) $\kappa_r = 0$;

$\kappa_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\theta_y}{r \Delta y} = \infty$. Тогда по (18.8) $m_r = 0$,

$$m_y = 1$$

$$D_4 = 2 M_y \theta_B R = 2 M_0 f \operatorname{tg} \Psi. \quad (18.8)$$

Работа внешних сил по-прежнему $U = Ff$. Поэтому, согласно (18.5), (18.7), (18.8) и приравняв сумму U , получим

$$P_0 = 4 M_0 (x - \Psi + \operatorname{tg} \Psi). \quad (18.9)$$

Найдем Ψ исходя из условия минимума P_0 в соответствии с канонической экстремальной теоремой. Из $\frac{dP_0}{d\Psi} = 4 M_0 \left(-1 - \frac{1}{\cos^2 \Psi} \right)$ видно, что $\frac{dP_0}{d\Psi}$ положительна и не имеет корней во всем диапазоне $\Psi = 0 \div \pi/2$. Следовательно, у P_0 нет минимумов; это соответствует функции Ψ , минимальное значение которой отличено $\Psi = 0$. Последнее же соответствует (18.9) в (18.4).

Наконец следует отметить о том, что решение для деформаций пластины (18.4) справедливо при любых отстоящих силах P от

опорного контура пластины. Этот вывод, естественно, вытекает из формулировки. В значительной мере он — результат выбора предположений теории предельного равновесия и единичности неопределенной формы предельных; пример того, насколько осторожно следует подходить к предельным решениям теории предельного равновесия, если нет возможностей для достаточной проверки их применимости. В то же время эксперименты [5] свидетельствуют о том, что пластическая зона, образующаяся в тонкой пластине при действии сил, близких к сосредоточенным, имеет весьма ограниченные размеры и локализуется в районе точки приложения сил; тогда же расширяет в форме конуса зоны сдвигающие влияния опорного контура пластины, сосредоточенная сила должна быть приложена очень близко к нему.

18.4. Прямоугольная пластина с ребром, нагруженная сосредоточенной силой. Рассмотрим прямоугольную пластину, нагруженную ребром жесткости и нагруженную в центре сосредоточенной силой P (рис. 76; ребро жесткости выделено пунктиром). На контуре пластины в ребро жесткости наклеены. Предположим, что пластину перекашивает в предельное состояние благодаря образованию пластических шарниров, расположенных вдоль контура (шарниры) и расходящихся от точки приложения силы к углам контура (диагональных). В ребре образуются пластические шарниры в точке приложения силы P и на опорном контуре. На ось перпендикулярным ось ребра и лежит в плоскости пластины. Тогда при $x \geq 0$ и $y \geq 0$

$$\theta_y = \begin{cases} f \left(1 - \frac{2x}{b} \right) & \text{при } y \leq \sqrt{x}; \\ f \left(1 - \frac{2y}{a} \right) & \text{при } y \geq x, \end{cases} \quad (18.10)$$

где $\sqrt{x} = a/b$.

Также обозначим: θ_A и θ_B — углы сил в контурных шарнирах, принадлежащих соответственно к сторонам контура длиной a и b ; θ_A — угол сил в диагональных шарнирах:

$$\theta_A = -\frac{2f}{b}; \quad \theta_B = -\frac{2f}{a};$$

$$\theta_C = -\frac{2f}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right). \quad (18.11)$$

Половому перегибу образуется между жесткими элементами, для них справедливы (19.6) с соответствующими знаками:

$M_A = M_B = -M_0$; $M_A = M_B$. Взяв за точку аналогичен нулевым θ .

Тогда энергия расслоения в контурных и жестких элементах

$$D_1 = 2(M_A \theta_A a + M_B \theta_B b) = 4M_0 \frac{1+\nu^2}{\nu} f; \quad (19.12)$$

$$D_2 = 2M_A \theta_A \sqrt{a^2 + b^2} = 4M_0 \frac{1+\nu^2}{\nu} f. \quad (19.13)$$

Для ребра расчет не отличается от расчета балки с изогнутым трехпараметром пластическим моментом

$$D_3 = 4M_{op} |\theta_A| = \frac{8M_{op}}{b} f. \quad (19.14)$$

При определении предельного момента сечения ребра M_{op} нейтральная ось должна располагаться в пластике, совпадая с осью вращения ребра. Разделив (19.12) - (19.14) и предельное суммарное $U = P_f$, получим

$$P_0 = 8M_0 \frac{1+\nu^2}{\nu} + \frac{8M_{op}}{b}. \quad (19.15)$$

Из рассмотрения (19.15) видно, что для очень длинных пластин при $\nu \rightarrow 0$ $P_0 \rightarrow \infty$. Это не соответствует действительности: при малом ν деформированная зона не будет охватывать всю пластину. В этом и этом режиме минимум P_0 по ν . Он найден из условия

$$\frac{dP_0}{d\nu} = 0 \quad \text{отвечает} \quad \nu_0 = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{M_{op}a}{M_0a}}}. \quad \text{Линия по-}$$

формированной зоны пластины $b_0 = a/\nu_0$, если в ее пределах реализуется рассмотренный тип пластического механизма. (На условии пересечения огибающей контур на линии $y = \pm b_0/2$). Таким образом, (19.15) следует пользоваться только при $\nu > \nu_0$.

При $\nu < \nu_0$ нужно в (19.15) подставить $\nu = \nu_0$ и $b = a/\nu_0$.

При $M_{op} = 0$ рассмотрим недеформированную пластину, для которой $\nu_0 = 1$ по (19.15) $P_0 = 16 M_0$. Это значительно больше P_0 по (19.4). Это свидетельствует о том, что при статическом изгибе ребра (19.15) дает существенно ошибку. Разные можно улучшить, рассмотрев пластический механизм, поле перемещений которого представляет комбинацию (19.1) и (19.10) (рис. 77). Отвечая ему предельную нагрузку легко вычислить при использовании приведенных выше решений

$$P_0 = 4M_0 (\pi - 2\psi + 2\psi \psi) + \frac{8M_{op}}{a} \cos \psi, \quad (19.16)$$

где ψ определяется исходя из условия $\frac{dP_0}{d\psi} = 0$, которое дает

$$\sin \psi = \sqrt{\left(\frac{M_0 a}{2M_{op}}\right)^2 + 1} - \frac{M_0 a}{2M_{op}}. \quad (19.17)$$

Найдем минимальное значение $\psi = \psi_{min} = \arccos \nu$.

Если по (19.17) $\psi < \psi_{min}$, в (19.16) нужно использовать ψ_{min} ; P_0 по (19.16) имеет минимум P_0 по (19.25).

Очевидно, что найденный и найденные улучшения (19.15) путем уточнения формы предельной. Для жестких ребер (19.15) вполне согласуется с данными экспериментов [9].

19.5. Прямостолбовые пластины, нагруженные равномерно распределенной нагрузкой¹. Рассмотрим прямо столбовую пластину, жестко заделанную на одном конце и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 78). Предположим, что в предельном состоянии пластины разрывными диагоналями образовались системы пластических шарниров, показанных на рис. 78 пунктирными линиями. (Сохраняем наименование шарниров, принятые в предыдущей главе, а шарнир, совпадающий с осью симметрии, назовем средним). Тогда предельная пластин имеет форму "крыла" и при $x \geq 0$ и $y \geq 0$

$$w = \begin{cases} f \left(1 - \frac{2y}{a} \right) & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{2c}{a} y + \frac{b}{2} - c; \\ f \left(1 - \frac{x}{c} \right) & \text{при } \frac{2c}{a} y + \frac{b}{2} - c \leq x \leq \frac{b}{2}. \end{cases} \quad (19.18)$$

Угол наклона в шарнирах

$$\theta_a = -\frac{f}{c}; \quad \theta_b = -\frac{2f}{a}; \quad \theta_c = \frac{4f}{a};$$

$$\theta_A = \frac{2f}{\sqrt{a^2 + c^2}} \left(\frac{a}{2c} + \frac{2c}{a} \right), \quad (19.19)$$

где θ_a и θ_b — углы наклона контурных шарниров; θ_c и θ_A — углы наклона соответственно среднего и диагональных шарниров.

Согласно (19.6) моменты в шарнирах $M_a = M_b = -M_0$;

¹ Настоящая работа выполнена совместно с Е.Е.Тютюном и З.А.Зелениным.

$M_c = M_A = M_0$. Энергия растяжения в контурных шарнирах

$$D_1 = 2 (M_a \theta_a a + M_b \theta_b b) = \\ = 2 M_0 \frac{y + 2c}{\sqrt{c}} f; \quad y = \frac{b}{2}; \quad c = \frac{a}{2}; \quad (19.20)$$

в среднем шарнире

$$D_2 = M_c \theta_c (b - 2c) = 4 M_0 \frac{1 + 4c^2}{2} f; \quad (19.21)$$

в диагональных шарнирах

$$D_3 = 4 M_A \theta_A \sqrt{\frac{a^2}{4} + c^2} = 2 M_0 \frac{1 + 4c^2}{c} f. \quad (19.22)$$

Работа пластич. сдв.

$$U = 4 \int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{2c}{a} y + \frac{b}{2} - c} q w dx dy = q a^2 \frac{3 - 2\sqrt{c}}{6\sqrt{c}} f. \quad (19.23)$$

Согласно (19.20)–(19.22) и выражения (19.23), получим

$$q_0 = 24 \frac{M_0}{a^2} \frac{y + 2c}{c(3 - 2\sqrt{c})}. \quad (19.24)$$

Найдем $\bar{c}$ найдем исходя из условия минимума q_0 , потребовав $\frac{d q_0}{d c} = 0$. Это дает

$$\bar{c} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{y^2 + 3} - y \right). \quad (19.25)$$

Подставляя $\bar{c}$ в (19.24), окончательно получим

$$q_0 = \alpha \frac{M_0}{a^2}; \quad \alpha = \frac{48}{(\sqrt{y^2 + 3} - y)^2} \quad (19.26)$$

Для оценки точности (19.26) можно построить приближенное статическое решение, задаваясь статически простыми полями изгибаемых и крутящих моментов, используя двойные степенные ряды (19.2):

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_i \sum_j A_{ij} x^i y^j; \\ M_y &= \sum_i \sum_j B_{ij} x^i y^j; \\ H &= \sum_i \sum_j C_{ij} x^i y^j \end{aligned} \quad (19.27)$$

Коэффициенты A_{ij} , B_{ij} и C_{ij} должны выбираться из условий удовлетворения:

уравнения равновесия — в данном случае третьего уравнения (18.6), где следует положить $N_x = N_y = S = 0$;

граничных условий — в данном случае $M_x = M_y = 0$ при $x = \pm b/2$ и $M_y = M_0$ при $y = \pm a/2$;

условия симметрии M_x , M_y и H относительно осей x и y .

Этим определяется минимум числа членов рядов, который должен содержать (19.27). При большем числе этих членов часть коэффициентов останется неопределенной, их значения заданы (см. ниже).

Воспользуемся уравнением равновесия (18.6), коэффициенты в (19.27) оказываются связанными от кривизны пластичной изогнутой φ . Наибольшее возможное значение последней определяется требованием, чтобы ни в одной из точек пластины не было нарушения условия пластичности (16.9). Тогда получаются поля моментов M_x , M_y и H будут статически допустимыми. Задача может решаться многократно для разных значений коэффициентов в (19.27), оставшихся неопределенными. Критерием для выбора наилучшего указанного решения согласно статической экстремальной теории (см. § 4) служит получение наибольшего значения φ_0 .

Если, например, задать при $x \geq 0$ и $y \geq 0$

$$\begin{aligned} M_x = M_y = A \left[a_0 + a_1 \left(\frac{2x}{b} \right)^3 + \right. \\ \left. + a_4 \left(\frac{2x}{b} \right)^4 \right] \left[b_0 + b_3 \left(\frac{2y}{a} \right)^3 + b_4 \left(\frac{2y}{a} \right)^4 \right] - M_0 \end{aligned} \quad (19.28)$$

(A , a_i , b_i — произвольные параметры), а выражения для H разыскать из уравнения равновесия (18.6), то удовлетворение граничным условиям и условиям симметрии приводит к $a_0 = b_0 = 1$;

$a_4 = -(1 + a_3)$; $b_4 = -(1 + b_3)$. Значения a_3 и b_3 остаются неопределенными и могут разыскиваться исходя из условия максимума φ . Результаты расчетов, выполненных на ЭВМ «Урал-2» с использованием (19.28), хорошо аппроксимируются выражением $\alpha_0 = 5,6 + 31,2 \nu$, где α_0 — коэффициент в первой формуле (19.26).

Для известных значений (при известных ν) (19.28) приводит к неизменяемому результату. Вместо него здесь можно принять, например, при

$$x \leq \frac{2c}{a} y + \frac{b}{2} - c \quad M_y = A \left[1 - \left(\frac{2y}{a} \right)^2 \right] - M_0$$

$$\text{и } M_x = H = 0 \text{ при } x \geq \frac{2c}{a} y + \frac{b}{2} - c$$

$$M_x = B \left[1 - \left(\frac{x}{c} \right)^2 \right] - M_0 \quad \text{и } M_y = H = 0$$

(A , B и

c — произвольные параметры). Такой поле моментов отвечает

$\alpha_0 = 16$. Сопоставляя полученные α_0 в соответствии со статической экстремальной теорией, окончательно найдем

$$\sigma_k = \begin{cases} 18 & \text{при } 0 \leq \nu \leq \frac{1}{3}; \\ 5,6 + 38,2 \nu & \text{при } \frac{1}{3} \leq \nu \leq 1. \end{cases} \quad (19.28)$$

Зависимости (19.26) и (19.28) дают соответственно верхнюю и нижнюю границы σ_k . (Точное решение находится между этими.) Если по ним найти среднее значение σ_k , то при $\nu = 1/3$ отклонение статистического и численного решений от среднего составляет $\pm 23,1\%$ (максимальное отклонение), при $\nu = 1/3 \pm 13,2\%$, при $\nu = 0,8 \pm 11,9\%$, при $\nu = 0$ решения совпадают.

Для квадратной пластины ($\nu = 1$) лучшей нижней границей $\sigma_k = 41$ получено описанным методом на основе (19.27) в [120]. Здесь отклонения численного и статистического решений от среднего составляют $\pm 7,9\%$.

19.6. Дополнение. Использование метода линейного программирования. Из вышесказанного видно, что оценка точности решения, полученного численным методом, который применяется здесь своей простотой, зависит от того, насколько точно заданы формы прогибов. Для рассмотренных выше решений форма прогибов задана на результатах экспериментов [9, 98]. В общем случае это, конечно, ограничивает возможности численного метода. Предложить замену его ограничениям можно, задавая форму прогибов в соответствии с большим числом произвольных параметров, рассуждая с использованием вариационных принципов теории упругости, следствием которых являются экстремальные теоремы. Задача сводится к поиску минимум функции методом математического программирования.

Один из вариантов такого решения задачи предложен А.Р. Гинзбургим [111]. Пластина разбита на сетку элементарных шарниров на конечные элементы, например треугольные, которые отбрасывают жесткости. Внешняя нагрузка прикладывается в виде сосредоточенных сил в узлах сетки. Рассчитывают соотношения прогибов в узлах с использованием метода возможных перемещений (4.6) в форме минимума

внешней нагрузки системы (см. также § 27): $\min (D - U)$.

Поскольку шарниры образуются между жесткими элементами, действующими в них моменты по (19.6) равны $\pm M_0$ в работа жестких сил $U = P \sum \bar{p}_i w_i$, где P — параметр, пропорционально которому изменяется заданная нагрузка P_i (в i -м узле $P_i = P \bar{p}_i$); w_i — прогиб в i -м узле. Суммирование здесь ведется по всем узлам.

Энергия рассогласия $D = \sum M_0 \theta_{ij} l_{ij}$, где l_{ij} — длина шарнира между узлами i и j ; θ_{ij} — угол сдвига в том же шарнире, который является линейной функцией w_i окружающих его узлов. Суммирование здесь ведется по всем шарнирам. Ограничения накладываются условиями:

$$\theta_{ij} \geq 0 \quad \text{при } M_{ij} = M_0; \quad \theta_{ij} \leq 0 \quad \text{при } M_{ij} = -M_0. \quad (19.30)$$

Таким образом, рассуждения функции $D - U$ (функция цели) и ограничениями неравенства (19.30) являются линейными формами w_i , и решение может быть найдено методами линейного программирования. Предельная нагрузка P_0 определяется приращением U в D :

$$P_0 = \frac{\sum M_0 \theta_{ij} l_{ij}}{\sum \bar{p}_i w_i}. \quad (19.31)$$

В [78] предложено решение задачи статическим методом с использованием линейного программирования. Поле моментов заданной в форме (19.27) функцией цели служит выражением для перемещений нагрузки q , получаемое из уравнения равновесия (19.3); ограничениями-равенства для граничных условий, ограничениями-неравенства — условия пластичности, которые приближенно аппроксимированы.

Есть и более общие подходы к решению задачи отыскания предельных нагрузок статическим и численным методами с использованием линейного программирования [69, 74] и др.

20.1. Постановка задачи. Как указывалось в § 18, реальная нагрузка пластины оказывает на ее деформации влияние, которое можно считать пренебрежимо малым. В этом параграфе рассмотрим все допущения теории упругости, но отбросим предположение, что прогибы пластины малы, т.е. рассмотрим нелинейные задачи в геометрически нелинейной постановке, так же как в гл.3 применительно к балкам.

20.2. Круглая пластина, нагруженная сосредоточенной силой. Применяем канонический метод проиллюстрируем на простейшем примере, рассмотрим круглую пластину, нагруженную в центре сосредоточенной силой P . Для простоты рассмотрим напряженно-деформированное состояние пластины в срединной плоскости пластины и получим, предположим

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0, \quad \text{откуда}$$

$$u = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 dr + C. \quad \text{При } r = 0 \quad u \text{ имеет}$$

особую точку, а здесь возможен разрыв переменных u . Поэтому для общности примем при $r = 0$ $u = u_0$. С учетом симметрии, найдем по (19.1):

$$u = u_0 - \frac{1}{2} \frac{f^2}{R^2} r^2. \quad (20.1)$$

По (19.1) и (20.1) найдем обобщенные деформации

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} = \frac{u_0}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{f^2}{R^2};$$

$$\varepsilon_r = -\frac{d^2 u}{dr^2} = 0; \quad \varepsilon_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{f}{R^2} r. \quad (20.2)$$

Для определения обобщенных напряжений воспользуемся теорией течений в упругих пластинках, приведенной в § 18. Для этой цели найдем скорости деформаций, приняв в качестве упругого времени $\bar{t}$ маломальский предел f . Тогда, дифференцируя по f (20.2), получим

$$\dot{\varepsilon}_r = \dot{\varepsilon}_r = 0; \quad \dot{\varepsilon}_\varphi = \frac{\dot{u}_0}{R^2} - \frac{f}{R^2}; \quad \dot{\varepsilon}_\varphi = \frac{f}{R^2} r. \quad (20.3)$$

По (18.7) срединная линия параметров β_i , найдем, что радиальное направление совпадает с осью 1 ,

$$\beta_1 = -\frac{1}{h} \frac{\dot{\varepsilon}_r}{\dot{\varepsilon}_\varphi} = \frac{0}{0}; \quad \beta_2 = \beta_3. \quad (20.4)$$

В силу этого мы должны воспользоваться формулами второй строки табл.6. Основы пластичности и линии течений:

$$n_\varphi = 1 - n \frac{1}{2}; \quad \frac{N_\varphi \dot{\varepsilon}_\varphi}{M_0 \dot{\varepsilon}_\varphi} = 2 n_\varphi. \quad (20.5)$$

Подставив сюда N_φ и M_0 по (18.8) и $\dot{\varepsilon}_\varphi$ и $\dot{\varepsilon}_r$ по (20.3), получим

$$n_\varphi = 2 \left(\dot{u}_0 \frac{R}{h} - \bar{f} r \right); \quad \bar{f} = \frac{f}{h}. \quad (20.6)$$

В данном случае поле деформаций задано с точностью до двух параметров — u_0 и f . Считая их обобщенными переменными, воспользуемся методом обобщенных переменных в форме (II.4) $\frac{\partial U}{\partial u_0} = \frac{\partial D}{\partial u_0}$

$$\text{и } \frac{\partial U}{\partial f} = \frac{\partial D}{\partial f}. \text{ Здесь } U = P f \text{ и } \frac{\partial U}{\partial u_0} = 0, \frac{\partial U}{\partial f} = P.$$

Тогда

$$\frac{\partial D}{\partial u_0} = 0; \quad \frac{\partial D}{\partial f} = P. \quad (20.7)$$

Для выполнения этих производных D воспользуемся (18.6). Протягивая обобщенные деформации — результат прямики $u_0 = \delta u_0$. Потребная $\delta u_0 \rightarrow 0$ и проинтегрируем по площади пластины, получим

$$\frac{\partial D}{\partial u_0} = 2\pi \int_0^R \left(M_r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial u_0} + N_\varphi \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial u_0} + \right. \\ \left. + M_r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial u_0} + M_\varphi \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial u_0} \right) r dr. \quad (20.8)$$

Дифференцируя (20.2) по u_0 и подставляя в (20.8) с учетом безразмерных обобщенных, получим

$$\frac{\partial D}{\partial u_0} = 8\pi M_0 \frac{R}{h_0} \int_0^1 n_\varphi df. \quad (20.9)$$

Прямая функциональная зависимость для $\frac{\partial D}{\partial f}$, согласно зависимости

$$P = \frac{\partial D}{\partial f} = 2\pi M_0 \int_0^1 (-4n_\varphi \bar{f}^2 + m_\varphi) d\bar{f}. \quad (20.10)$$

Линейное рассмотрение работы пластины можно разбить на этапы.

Этап 1. Во всех точках пластины $|n_\varphi| < 1$, поэтому (20.5) и (20.6) справедливы для всего поля пластины. Подставляя последние в (20.9), после интегрирования получим уравнение, из которого

$$\dot{u}_0 = \frac{1}{2} \frac{h_0}{R} \bar{f}. \quad (20.11)$$

Теперь можно конкретизировать выражения обобщенных напряжений (20.5) и (20.6):

$$n_\varphi = \bar{f}(1 - 2\bar{f}); \quad m_\varphi = 1 - n_\varphi^2. \quad (20.12)$$

Подставим это в (20.10). После интегрирования и сокращения получим

$$P = 2\pi M_0 \left(1 + \frac{1}{3} \bar{f}^3 \right). \quad (20.13)$$

Граница применимости полученного выражения определяется достижением $|n_\varphi|_{\max} = 1$. Из (20.12) видно, что это имеет место

одновременно при $\bar{f} = 0$ и $\bar{f} = 1$, когда $\bar{f} = 1$.

Этап 2. При $\bar{f} > 1$, как мы установили,

$$\left. \begin{aligned} n_\varphi &= 1; \quad m_\varphi = 0 & \text{при } 0 \leq \bar{f} \leq \bar{f}_1; \\ n_\varphi &= -1; \quad m_\varphi = 0 & \text{при } \bar{f}_2 \leq \bar{f} \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (20.14)$$

Поскольку, имея обратные к (20.9) и подставив туда (20.6) вместо σ (20.14) для соответствующих значений, найдем

$$\hat{\omega}_0 = \frac{1}{2} \frac{h}{R} \frac{F(P_1^2 - P_2^2) - (P_1 + P_2) + 1}{P_2 - P_1}. \quad (20.15)$$

Тогда πy по (20.6) в области $P_1 \leq P \leq P_2$

$$\pi y = \frac{F(P_1^2 - P_2^2) - (P_2 - P_1) + 1}{P_2 - P_1} - 2\bar{f}P. \quad (20.16)$$

На границах области $\pi y = 1$ при $P = P_1$, $\pi y = -1$ при $P = P_2$. Это дает из (20.16) две уравнения. Решив их как систему, нетрудно получить

$$P_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\bar{f}}\right); \quad P_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{f}}\right). \quad (20.17)$$

Подставив это в (20.16), найдем πy , совпадающее с (20.12).

Теперь можно переписать (20.10), учитывая (20.12), (20.14) и (20.17):

$$P = 2\pi M_0 \left(\bar{f} + \frac{1}{3\bar{f}}\right). \quad (20.18)$$

Из (20.18) при $\bar{f} = 0$ P соответствует предельной нагрузке пластины $P_0 = 2\pi M_0$. Поэтому можно (20.13) и (20.18) представить в форме

$$\frac{P}{P_0} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{3}\bar{f}^2 & \text{при } \bar{f} \leq 1; \\ \bar{f} + \frac{1}{3\bar{f}} & \text{при } \bar{f} \geq 1. \end{cases} \quad (20.19)$$

Это совпадает с точным решением [43, 52]. Аналогично можно получить решение, используя теорию деформаций. Результаты совпадают с данными. Если иметь бесконечное решение, которое задано $m_r = m_y = 0$, тогда пластина превращается в мембрану, при больших $\bar{f}$ P/P_0 будет мало отличаться от (20.19).

Эти решения и ряд других примеров приведены в [9].

20.8. Векторная теория, использующая осредненные значения. Предполагая, что y задается на пластину жестким шарниром радиусом R_0 , решение будем искать стандартным методом, преобразуя шарнир жесткостью пластины ($m_r = m_y = 0$). Условием, что пластина обходит шарнир в пределах площади контакта радиусом R_0 и через R обходит радиус деформированной или пластины. Уравнения равновесия в области вне площади контакта имеют вид

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{N_r - N_y}{r} = 0; \quad (20.20)$$

$$N_r \frac{dw}{dr} + \frac{P}{2\pi r} = 0.$$

Если предположить, что $\varepsilon_r \geq 0$ и $\varepsilon_y \geq 0$, или $\dot{\varepsilon}_r \geq 0$ и $\dot{\varepsilon}_y \geq 0$, то из условия пластичности Треска (точка В на рис.7) $N_r = N_y = N_0$. Нетрудно видеть, что при этом первое уравнение (20.20) удовлетворяется тождественно, а из второго уравнения $\frac{dw}{dr} = -\frac{P}{2\pi N_0 r}$. Интегрируя последнее в тре-

диз, чтобы на границе деформированной зоны пластины при $r = R$ было $w = 0$, а также для $r_0 \leq r \leq R$

$$w = \frac{P}{2 \pi N_0} \ln \frac{R}{r}. \quad (20.21)$$

Прогиб в районе плоскости контакта однозначно определен формой кривой $w = w_0 + \frac{r_0^2 - r^2}{2 R_w}$, где w_0 — прогиб при $r = r_0$, который можно найти из (20.21). Тогда при $0 \leq r \leq r_0$

$$w = \frac{P}{2 \pi N_0} \ln \frac{R}{r_0} + \frac{r_0^2 - r^2}{2 R_w}. \quad (20.22)$$

Величина r_0 определится исходя из условия непрерывности

$$\frac{dw}{dr} \text{ при } r = r_0;$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{P R_w}{2 \pi N_0}}. \quad (20.23)$$

Максимальный прогиб пластины при $r = 0$ из (20.22) и (20.23)

$$f = \frac{P}{2 \pi N_0} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{R}{r_0} \right). \quad (20.24)$$

Из приведенных результатов видно, что условие непрерывности и уравнения равновесия не дают полного решения задачи; остались неопределенными разрыв R и перемещение u_0 . Согласно условиям непрерывности пластины в координатах $[x]$ имеем

$\ln \frac{R}{r_0}$ оказалась практически постоянной и в среднем равна

$$1,7. \text{ Поэтому приближенно можно считать} \quad f = 3,7 \frac{P}{2 \pi N_0}. \quad (20.25)$$

20.4. Прогнутая пластина с ребром, нагруженной сосредоточенной силой. Рассмотрим прямоугольную пластину с жестким ребром, подкрепленную ребром жесткости, заделанную на опорном контуре и нагруженную в центре сосредоточенной силой P . Сохраняем схему этой задачи такой же, как в предыдущем параграфе (см. рис. 76), но решим ее в иной постановке. Будем считать, что пластические шарниры разделяют пластину на четыре треугольных элемента, которые останутся такими также с ростом прогибов. Углубления в срединной плоскости сосредоточены вдоль шарниров и такие разрывные перемещения u и v , значения которых в соответствии с несоосирированным законом течения обозначены в шарнирах, где шарнир с наибольшим моментом действует продольным осям (см. § 11). Рассмотрим разрывы и обозначения показаны на рис. 79. Из условия непрерывности опорного контура при $y = 0$ и $x = 0$ соответственно

$$\frac{1}{2} \int_0^b \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = [u]_0 + 2 [u]_a;$$

$$\frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{dw}{dy} \right)^2 dy = [v]_0 + 2 [v]_b,$$

где $[u]_a$ и $[v]_b$ — разрывы перемещений в контурных шарнирах; $[u]_0$ и $[v]_0$ — аналогичные разрывы в центре пластины. Сохраним w по (19.10), после интегрирования осями шарниры

$$[u]_a = \frac{f^2}{b} - \frac{1}{2} [u]_0; \quad [v]_b = \frac{f^2}{a} - \frac{1}{2} [v]_0. \quad (20.26)$$



Рис. 79. Схема разрывов перемещений в пластине.

U деформационных параметров разрывы $[u]_A$ линейно меняются по длине разрыва:

$$[u]_A = [u]_{A1} + ([u]_{A2} - [u]_{A1}) \frac{\bar{x}}{\bar{L}}; \quad \bar{L} = \frac{a}{L} \quad (20.27)$$

где $[u]_{A1}$ и $[u]_{A2}$ — значения $[u]_A$ соответственно в углах опорного контура и в центре пластины; $\bar{x}$ — координата вдоль оси деформационного разрыва, считываемая от угла опорного контура; $L = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Газовые в контурах шарниров приводят к появлению сил в деформационном шарнире в работе, приложенных к углу опорного контура. В центральной части пластины деформационный шарнир отсутствует. На симметричных состояниях (рис. 79) с учетом (20.26) найдем

$$\left. \begin{aligned} [u]_{A1} &= -\left([u]_0 \frac{a}{L} + [u]_0 \frac{b}{L}\right) = -\frac{f^2}{L} \frac{1 + \nu^2}{\nu} + [u]_{A2} \\ [u]_{A2} &= \frac{1}{2} \left([u]_0 \frac{a}{L} + [u]_0 \frac{b}{L}\right) \end{aligned} \right\} \quad (20.28)$$

На (19.10), (20.26) и (20.28) видно, что перемещения в пластине однозначно определяются начальными $[u]_0$, $[u]_0 \neq f$. Если

использовать их в качестве обобщенных параметров, начало деформационных параметров (II.4) дает три уравнения:

$$\frac{\partial U}{\partial [u]_0} = \frac{\partial D}{\partial [u]_0}; \quad \frac{\partial U}{\partial [u]_0} = \frac{\partial D}{\partial [u]_0}; \quad \frac{\partial U}{\partial f} = \frac{\partial D}{\partial f}. \quad (20.29)$$

Поскольку $U = P_f$, то $\frac{\partial U}{\partial [u]_0} = \frac{\partial U}{\partial [u]_0} = 0$ и $\frac{\partial U}{\partial f} = P$. Тогда

$$\frac{\partial D}{\partial [u]_0} = 0; \quad \frac{\partial D}{\partial [u]_0} = 0; \quad \frac{\partial D}{\partial f} = P. \quad (20.30)$$

Так как треугольные элементы остаются все время жесткими, все шарниры не деформируются. Значит, для шарнира $\dot{u}_1 / \dot{u}_2 = 0/0$.

Это позволяет заменить условия пластичности в каждом состоянии. По (19.7) $\dot{\beta}_1 = \dot{\beta}_2$ и $\dot{\beta}_2 = 0/0$ и на табл. 6

$$n_1 = 1 - n_2^2; \quad \frac{N_0 \dot{u}_1}{M_0 \dot{u}_2} = 2 n_1. \quad (20.31)$$

В данном случае $\dot{u}_1 = \infty$ и $\dot{u}_2 = \infty$, а их отношение конечно и равно $\dot{u}_1 / \dot{u}_2$. С учетом (19.8)

$$n_1 = \pm \frac{2}{h} \frac{[u]}{\theta}. \quad (20.32)$$

Наибольший из решений задачи мало отличается от рассмотренного выше для круглой пластины. Поэтому, используя гладкость функции, ограниченной единичными решениями, приходим $n_1 = 0$ и $n_2 = \pm 1$. С учетом указанного размерами (20.30). Для контурных шарниров, используя (20.26), найдем

$$\frac{\partial D_1}{\partial [u]_d} = 2 \left(N_d \frac{\partial [u]_d}{\partial [u]_d} + N_d \frac{\partial [v]_d}{\partial [u]_d} b \right) = N_d a; \quad (20.33)$$

для ленточных шарниров, используем (20.27) и (20.28):

$$\frac{\partial D_2}{\partial [u]_d} = 4 \int_0^{l/2} N_d \frac{\partial [u]_d}{\partial [u]_d} dz = -N_d a. \quad (20.34)$$

Будем считать, что продольные связи, возникающие в ребре жесткости, незначительны, и их можно пренебречь. Тогда для ребра жесткости переменной D_3 по (19.14) и $\frac{\partial D_4}{\partial [u]_d} = 0$. Подставляя полученные в первом уравнении (20.30), приходим к тождеству, и $[u]_d$ остается неопределенным. Такой же результат дает второе уравнение (20.30) в отношении $[v]_d$. Это — следствие получения из отсутствия моментов в шарнирах.

Аналогично выполняются вычисления для третьего обобщенного параметра f . Находим

$$\frac{\partial D_1}{\partial f} = 4 N_d f \frac{1+v^2}{v};$$

$$\frac{\partial D_2}{\partial f} = -2 N_d f \frac{1+v^2}{v}; \quad (20.35)$$

$$\frac{\partial D_3}{\partial f} = \frac{8 M_{sc}}{b}.$$

Подставляем это в третье уравнение (20.30), сократившись получим

$$\rho = \begin{cases} P_0 & \text{при } \bar{f} \leq 1; \\ P_0 + 8 M_{sc} \frac{1+v^2}{v} (\bar{f} - 1) & \text{при } \bar{f} \geq 1, \end{cases} \quad (20.36)$$

где $\bar{f} = \frac{f}{f_0}$, а P_0 — продольная нагрузка по (19.15).

Если учесть наличие изгибающих моментов в шарнирах, получим следующее:

$$P = \begin{cases} P_0 + \frac{16}{3} M_{sc} \frac{1+v^2}{v} \bar{f}^2 & \text{при } \bar{f} \leq \frac{2}{3}; \\ P_0 + 8 M_{sc} \frac{1+v^2}{v} \left\{ 1 + 5\bar{f} + \frac{4}{3} \left[\bar{f}^2 \sqrt{\bar{f}(2+\bar{f})} \right] \right\} & \text{при } \bar{f} \geq \frac{2}{3}. \end{cases} \quad (20.37)$$

Различие между (20.36) и (20.37) возникает из-за наличия момента при F , связанного с P_0 , когда жестко пластическое решение имеет максимум.

20.3. Вспомогательная задача. Вспомогательная жесткая пластина с продольной нагрузкой[†]. Будем считать, что пластина имеет жесткий разрыв. Воспользуемся каноническим методом и ограничимся обобщенными решениями. Смысл профилей изогнутой поверхности пластины при больших прогибах в маломоментах $[F]$ поясним, что ее форма может быть достаточно хорошо описана при $x \gg 0$ и $y \gg 0$ (рис. 80) следующими выражениями:

$$w = \begin{cases} f \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{b}{2} - c, \\ f \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) \left[1 - \left(\frac{\frac{b}{2} - \frac{b}{2} + c}{c} \right)^2 \right] & \text{при } \frac{b}{2} - c \leq x \leq \frac{b}{2}. \end{cases} \quad (20.38)$$

[†] Настоящий раздел написан совместно с В.П. Мещеряковым.



Рис. 30. Сложная пластина.

По (20,36) в средней части пластины при $0 \leq x \leq \frac{b}{2} - c$ изогнутая поверхность — цилиндрическая. Размеры цилиндрической области по результатам тех же экспериментов:

$$C = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} \left[\frac{b}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{b}{\alpha} - 1 \right)^2 \right] & \text{при } 1 \leq \frac{b}{\alpha} \leq 3; \\ \alpha & \text{при } \frac{b}{\alpha} \geq 3. \end{cases} \quad (20,38)$$

Измерения удлинений в экспериментах показали, что в цилиндрической области они хорошо согласуются с удлинениями, вычисленными для бочки. В области $b/2 - c \leq x \leq \frac{b}{2}$ при больших прогибах удлинения оказались нестабильными у разных пластин одного размера (распределение удлинений по площади пластины оказалось качественно разным). Даже у цельных пластин кривые номинальных удлинений вдоль осей x и y имели различную форму.

Аналогичные результаты в этом отношении получались в экспериментах [147].

Анализ показал, что вид зависимостей переменных U и V от $\bar{x}$ и $\bar{y}$, если она удовлетворяет граничным условиям, здесь не зависит ни от параметров энергетического δD , ни от параметров прогибов δf . Поэтому в распределение удлинений определяются случайными факторами, которые в обычных случаях неустойчивости (нестабильности) зависят от средних значений толщин

пластин, механических характеристик металлов, анизотропии механических свойств и т.п.). Отсюда усиливается неустойчивость. Это в рассмотренной модели имеет большую свободу в выборе U и V .
Примем

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \quad (20,40)$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

и, обозначая $\bar{x} = \frac{x + \frac{b}{2} + c}{c}$; $\bar{y} = 2 \frac{y}{a}$; $\bar{z} = \frac{z}{a}$;

$v = \frac{\alpha}{b}$, по (20,38) и (20,40), найдем

$$\varepsilon_x = \begin{cases} 0 & \text{при } -\left(\frac{b}{2c} - 1\right) \leq \bar{x} \leq 0; \\ 2 \frac{f^2}{c^2} \bar{x}^2 (1 - \bar{y}^2)^2 & \text{при } 0 \leq \bar{x} \leq 1; \end{cases} \quad (20,41)$$

$$\varepsilon_y = \begin{cases} \delta \frac{f^2}{a^2} \bar{y}^2 & \text{при } -\left(\frac{b}{2c} - 1\right) \leq \bar{x} \leq 0; \\ \delta \frac{f^2}{a^2} \bar{y}^2 (1 - \bar{x})^2 & \text{при } 0 \leq \bar{x} \leq 1. \end{cases} \quad (20,42)$$

Так как $\gamma_{xy} = 0$, ε_x и ε_y — главные удлинения.

Для оправки деформаций используем условия неустойчивости Треска в форме, представленной на рис. 7.

$$\text{При } -\left(\frac{b}{2c} - 1\right) \leq \bar{x} \leq 0 \quad \varepsilon_x = 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon_y > 0,$$

Следовательно, пластическое течение должно определяться оторванной $\bar{B}C$ пятиугольника на рис.7 (считаем ось 1 - ось x) и $N_y = N_0$. При $0 \leq \bar{x} \leq 1$ и $\varepsilon_x > 0$ и $\varepsilon_y > 0$, значит, пластическое течение здесь определяется точкой B (см. на рис.7) и $N_x = N_y = N_0$. Перемещения, как следует из (20.40), (20.41) и (20.42), однозначно определяются значениями f , k_f и $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в качестве обобщенных координат. Тогда по (II.4)

$$\frac{\partial U}{\partial f} = \frac{\partial D}{\partial f};$$

$$\frac{\partial U}{\partial f} = q \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{\partial w}{\partial f} dx dy; \quad (20.43)$$

$$\frac{\partial D}{\partial f} = N_0 \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial f} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial f} \right) dx dy.$$

Подставив сюда (20.36), (20.41) и (20.42) в указанные интегралы, имеем

$$\frac{\partial U}{\partial f} = \frac{q \sigma^2}{18 \nu} (3 - 2 \bar{\varepsilon} \psi);$$

$$\frac{\partial D}{\partial f} = \frac{4 N_0 f}{45 \bar{\varepsilon} \nu} (4 \nu + 15 \bar{\varepsilon} - 14 \bar{\varepsilon}^2 \nu). \quad (20.44)$$

Приведенная приведенная кривая, получив универсальную зависимость

$$q = \frac{8 N_0}{k_f \sigma} f; \quad k_f = \frac{3 - 2 \bar{\varepsilon} \nu}{4 \nu + 15 \bar{\varepsilon} - 14 \bar{\varepsilon}^2 \nu}. \quad (20.45)$$

Если в (20.45) разложить $\bar{\varepsilon}$ по (20.39), то

$$k_f = \begin{cases} \frac{-1 + 34 \nu^2 + \nu^4}{-7 + 24 \nu + 34 \nu^2 + 24 \nu^3 + 121 \nu^4} & \text{при } 1 \geq \nu \geq \frac{1}{3}; \\ 1 & \text{при } \nu \leq \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (20.46)$$

20.6. Деформации. Разрывные пластич. Применение идеи решения начальных краевых задач пластичности и как показано результаты [9]. Однако ограниченность математического метода, связанная с необходимостью задания поля перемещений, здесь проявляется в том смысле, что, как в задачах теории предельного равновесия, так как приходится дополнительно рассматривать перемещения в срединной плоскости. В то же время если возможность задания поля перемещений с достаточно большими частями деформированных параметров, которые рассматриваются как обобщенные перемещения и определяются с использованием данных возможных перемещений. Здесь имеет значение развитие идеи, предложенной в § IV применительно к геометрическим задачам к нелинейным задачам при рассмотрении задачи пластичности, деформированной ребром.

Все деформации в пластичности рассматриваются вдоль линий треугольной сетки. Получившиеся треугольные элементы считаются абсолютно жесткими. По линии сетки образуются пластические шарниры, в которых деформация характеризуется углами сдвига θ_{ij} и разрывами перемещений $\{u\}_{ij}$ и $\{v\}_{ji}$ (i и j - номера узлов по номерам шарниров; $\{u\}_{ij}$, $\{v\}_{ji}$ - величины разрывов для полного шарнира в узле i и в узле j соответственно). Угол θ_{ij} является линейной функцией w_i - прогиба в узле, смежном с полным шарниром.

Разрывы $\{u\}_{ij}$ и $\{v\}_{ji}$ в каждом узле связаны между собой чисто геометрически, что дает два уравнения (уравнения совместности деформаций в узлах). Кроме того, разрывы $\{u\}_{ji}$ для элементов, принадлежащих к узлу, также оказываются связанными между собой и с прогибами (уравнения совместности перемещений в линейной сетке). В качестве обобщенных перемещений используются w_i и $\{u\}_{ij}$.

Недостатки уравнения для критических деформаций, ассоциированных с началом деформирования типа (20,31), (20,32) и началом возможных переменных. Получается система алгебраических уравнений, линейных относительно $\{u\}$ и $\{j\}$ и нелинейных относительно ω . Подборное см. в [9,10]. Здесь возможна также использование методов математического программирования.

Несколько слов о разрушении пластин при постановке задачи прогиба. Размещением двух экспериментов[†] [9] для рассмотренных типов нагрузок удалось выявить форму прогибов пластин при разрушении, характерные из значений при разрушающей нагрузке, для разрушения пластин. Все эксперименты выполнялись с тонкими пластинами из мягкой углеродистой стали. При воздействии на пластину шарового жесткого штампа радиусом R_w в случае, когда R_w мал по сравнению с длиной короткой стороны внешнего контура пластин a ($a/R_w > 10$), форма прогибов носила строго осесимметричный характер. Все плоскости контакта изогнутой поверхности пластины имели зауженность вверх [что означает в (20,31)], являясь перпендикулярной к недеформированной части пластин. Разрушение происходило всегда на границе плоскости контакта. В эксперименте обнаружилось следующее соотношение величин $f_p/R_w = 1,0 \pm 0,6$, где f_p — максимальный остаточный прогиб при разрушении.

Разрушающая нагрузка может быть описана формулой

$$P_p = A \cdot \sigma_B \cdot h \cdot R_w, \quad (20,47)$$

где σ_B — предел прочности материала; A — постоянная; ее значение в эксперименте колебалось в пределах 2,7-4,4. В [114] получен более узкий диапазон значений $A = 3,7-3,9$.

Когда радиус штампа R_w сопоставим с a ($a/R_w < 5$),

осевая симметрия прогибов заметно нарушается. Деформированная зона в пластине вытягивается вдоль длинной стороны внешнего контура; на последних изогнутой поверхности пластины образуется ско-

лы, по которым и происходит разрушение. Соотношение при разрушении оказалось величиной f_p/a . Ее нижняя граница 0,13-0,14.

У пластин, нагруженных равномерное распределенной нагрузкой, форма прогибов соответствует (20,38) и (20,39). Разрушение происходит у осей изогнутой поверхности пластин на длинной стороне внешнего контура. Соотношение величин f_p/a . Ее значения колеблются в пределах 0,13-0,22. (Те же цифры получены в [148] на более толстых пластинках.) Отмечается определенная зависимость f_p/a от соотношения сторон внешнего контура пластин: при $b/a = 1$ $f_p/a = 0,13 \pm 0,16$; при $b/a = 3$ $f_p/a = 0,21 \pm 0,22$.

Приведенные здесь данные, характеризующие разрушение пластин, естественно, справедливы лишь в области значимых параметров, которые варьировались в эксперименте, т.е. для тонких пластин из низкоуглеродистой стали. Для (20,47) $R_w/h > 2$.

[†] Эксперименты проводились А.В.Нестоловым и В.П.Исодушкиным.

§ 25. Основание зависимости момента балки
в упругопластической стадии

25.1. Общая зависимость. Рассмотрим общий случай момента балки в упругопластической стадии. Условно разделим внешние и внутренние силы в сечении

$$\int \sigma dF = N; \quad \int \sigma z dF = M_E, \quad (25.1)$$

где M_E , как и в гл.3, — суммарный изгибающий момент в сечении от внешней нагрузки и продольных сил

$$M_E = M(x) - Nw. \quad (25.2)$$

На основании гипотезы Бернулли сечений

$$\varepsilon^{(2)} = \varepsilon + \kappa z; \quad \kappa = - \frac{d^1 w}{dx^1}, \quad (25.3)$$

где ε и κ — удлинение и кривизна оси балки.

Для решения задачи необходимо иметь зависимость между напряжениями σ и деформациями ε . В зависимости от того, что в (25.3) в (25.1), разписать последнее. Это даст уравнения, свя-

занные ε и κ с N и M_E , — дифференциальными уравнениями упругопластического изгиба.

В общем случае зависимость $\sigma - \varepsilon$ можно принять в форме (1.4)

$$\sigma = \varepsilon \varepsilon^{(2)} (1 - \omega); \quad \omega = \omega(\varepsilon \varepsilon^{(2)}). \quad (25.4)$$

Подстановка (25.3) в (25.4) в (25.1) приводит к

$$\left. \begin{aligned} E \varepsilon \int (1 - \omega) dF + E \kappa \int (1 - \omega) z dF &= N; \\ E \varepsilon \int (1 - \omega) z dF + E \kappa \int (1 - \omega) z^2 dF &= M_E. \end{aligned} \right\} \quad (25.5)$$

Здесь $F = \int dF$; $S = \int z dF = 0$; $J = \int z^2 dF$ — площадь,

статический момент и момент инерции площади сечения относительно y . (Ось y и z проходит через центр тяжести сечения.)

Вам обозначить

$$\begin{aligned} F^2 &= \int \omega dF; \quad S^2 = \int \omega z dF; \\ J^2 &= \int \omega z^2 dF, \end{aligned} \quad (25.6)$$

то (25.5) приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} E(F-F^*)\varepsilon - ES^*\varepsilon &= N; \\ -ES^*\varepsilon + E(J-J^*)\varepsilon &= M_{II}. \end{aligned} \right\} \quad (21.7)$$

В упругой области $\varepsilon_0 = 0$ и $F^* = S^* = J^* = 0$, т.е. последние представляют собой напряжения и удлинения упругого материала, учитываемые наряду с эффектами пластических деформаций. Из (21.7)

$$\varepsilon = \frac{N}{E(F-F^*)} + \frac{S^*}{F-F^*} \varepsilon; \quad (21.8)$$

$$E\left(J-J^* - \frac{S^{*1}}{F-F^*}\right)\varepsilon = M_{II} - \frac{S^*}{F-F^*} N. \quad (21.9)$$

Данную задачу можно решить методом последовательных приближений. В первом приближении материал предполагается упругим, во всех точках балки определены σ , ε и из (21.4) — ε_0 . Последнее позволяет вычислить по (21.6) F^* , S^* , J^* и частично проинтегрировать (21.9), что дает ε и ε_0 по (21.8) второго приближения. Далее определяются $\varepsilon^{(1)}$ по (21.3), ε_0 — по (21.4), и вычисления повторяются. (Высоте сложности процесса последовательных приближений предостерегает анализ, см. § 26. Подробнее см. в [105, 126].)

21.3. Балка из упругопластического материала с линейным упрочнением. Для упругопластического материала с линейным упрочнением (см. § 1, рис. 2, в) зависимость между напряжениями и деформациями может быть представлена в виде

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon^{(2)} & \text{при } |\sigma| \leq |\sigma_T|; \\ \sigma_T \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_T}\right) \operatorname{sign} \varepsilon^{(2)} + E_\sigma \varepsilon^{(2)} & \text{при } |\sigma| > |\sigma_T|, \end{cases} \quad (21.10)$$

где E_σ — модуль упрочнения, равный тангенсу угла наклона диаграммы напряжений при растяжении к оси ε в зоне упрочнения;

$$\operatorname{sign} \varepsilon^{(2)} = 1 \quad \text{при } \varepsilon^{(2)} > 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{sign} \varepsilon^{(2)} = -1 \quad \text{при } \varepsilon^{(2)} < 0.$$

Подставляя (21.10) в (21.1), приходим к следующему уравнению:

$$\left. \begin{aligned} &\sigma_T \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_T}\right) (F_+^{(2)} - F_-^{(2)}) + (EF^{(2)} + E_\sigma F^{(2)})\varepsilon + \\ &+ (ES^{(2)} + E_\sigma S^{(2)})\varepsilon = N; \\ &\sigma_T \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_T}\right) (S_+^{(2)} - S_-^{(2)}) + (ES^{(2)} + E_\sigma S^{(2)})\varepsilon + \\ &+ (EJ^{(2)} + E_\sigma J^{(2)})\varepsilon = M_{II}. \end{aligned} \right\} \quad (21.11)$$

Здесь, как и выше, F , S и J — значения статистического момента и момента инерции площади соответственно, вычисленные относительно оси y ; кляном $(\cdot)_+$ и $(\cdot)_-$ означают, что данная величина относится только к части площади сечения, находящейся пласти-

часные деформации или, соответственно, лежащими в упругом состоянии (упругое ядро сечения); включая "+" и "-" используются аналогично для растянутой и сжатой частей пластичного сечения соответственно.

При поперечном изгибе (когда $N = 0$), если сечение обладает горизонтальной осью симметрии, $F_+ = F_-$; $S^{(0)} = S^{(1)} = 0$, а из первого уравнения (21.11) $\varepsilon = 0$, что очевидно, а второе уравнение приобретает вид

$$\sigma_T \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) (S_+^{(0)} - S_-^{(0)}) + (ES^{(0)} + E_0 J) \chi = M_E. \quad (21.12)$$

Для жесткопластического материала с линейным упрочнением (рис. 2, б) $\varepsilon = \varepsilon_0$, когда сечение полностью переходит в пластическое деформированное,

$$F^{(0)} = S^{(0)} = J^{(0)} = 0; F^{(1)} = F; S^{(1)} = S = 0; J^{(1)} = J, \quad (21.13)$$

выполняются следующие:

$$E_0 F \varepsilon = N - N'; E_0 J \chi = M_E - M'; \quad (21.13)$$

$$N' = \sigma_T (F_+ - F_-); M' = \sigma_T (S_+ - S_-). \quad (21.14)$$

Сравним (21.14) и (8.2), видим, что она совпадает. Следовательно, N' и M' — продольная сила и изгибающий момент для продольного состояния сечения из жесткого пластического материала (без упрочнения), для которых справедливы зависимости, указанные в § 8 (табл. 4).

Если здесь нейтральная ось выходит из плоскости сечения, т.е.

сечение имеет направление только одного знака, то $F_- = S_- = 0$;

$F_+ = F$ и $S_+ = S = 0$. Тогда $M' = 0$, а $N' = N_0 =$

$= \sigma_T F$ — продольная продольная сила, а (21.14)

$$E_0 F \varepsilon = N - N_0; E_0 J \chi = M_E. \quad (21.15)$$

Последнее совпадает с известным дифференциальным уравнением упругого изгиба балки, только модуль упругости E здесь заменен на модуль упрочнения E_0 . Этот результат естественен, ибо если ε в данном случае (когда нейтральная ось вышла из плоскости сечения) по форме не отличается от изгиба в упругой области, если проинтегрировать напряжения от изгибающего момента с продольной силой.

Третьим применением уравнений (21.15) определяется ситуация, когда нейтральная ось совпадает с линией для вершины крайней сечения. Тогда напряжения на краях равны σ_T , и их можно считать как разность средних напряжений $\sigma_+ = N/F$ и крайних $\sigma_R = M/W$. Отсюда граничное значение продольной силы

$$N \approx N_0 + |M| \frac{F}{W}. \quad (21.16)$$

Для линейно упругоупругоупругого материала (рис. 2, в), если учесть, что

$$F_+^{(0)} = F_+ - F_+^{(1)} \quad \text{и} \quad F_-^{(0)} = F_- - F_-^{(1)}$$

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_T (F_+^{(0)} - F_-^{(0)}) + E F^{(1)} \varepsilon + E S^{(1)} \chi &= N - N'; \\ -\sigma_T (S_+^{(0)} - S_-^{(0)}) + E S^{(1)} \varepsilon + E J^{(1)} \chi &= M_E - M'; \end{aligned} \right\} \quad (21.17)$$

где N' и M' по (21.14).

21.3. Свойств ядра бруса несимметричного сечения из упругого пластического материала. Формулы (21.3) позволяют найти положение нейтральной оси сечения в границах упругого ядра (рис. 21) в зависимости от ε и β . Полагая при $\beta = 1$

$$\varepsilon^{(2)} = 0 \quad \text{и при } x = a + \beta h \quad \varepsilon^{(2)} = \sigma_T / E,$$

получим

$$\beta = -\frac{1}{h} \frac{\varepsilon}{\alpha}; \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{h} = \frac{\sigma_T}{E h \alpha}. \quad (21.18)$$

Подставив (8.5) и (8.6), найдем

$$N' = -2 N_0 \beta; \quad M' = M_0 (1 - 4 \beta^2). \quad (21.19)$$

Рассмотрим частный случай двусторонней текучести, когда пластические деформации появились в верхней и нижней частях сечения. На рис. 21, в рассмотрим

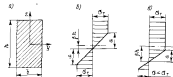


Рис. 21. Схемы сечений (а) и ядра нормальных напряжений при двусторонней (б) и односторонней (в) текучести.

$$F_+^{(2)} = F_-^{(2)} = b a = F \bar{\alpha};$$

$$S_+^{(2)} - S_-^{(2)} = b a \left(\frac{a}{2} + \beta h \right) - b a \left(-\frac{a}{2} + \beta h \right) = F h \bar{\alpha}^2;$$

$$J^{(2)} = 2 b a \beta h = 2 F h \bar{\alpha} \beta;$$

$$J^{(2)} = \frac{b (2 a)^3}{12} + 2 b a (\beta h)^2 = 2 F h^3 \left(\frac{1}{3} \bar{\alpha}^2 + \beta^2 \right).$$

Подставив это вместе с (21.18) и (21.19) в (21.17), получим

$$-2 \beta = \frac{N}{N_0}; \quad 1 - \beta^2 = \frac{4}{3} \frac{\sigma_T^2}{E^2 h^2} \frac{1}{\alpha^2} = \frac{M_0}{M_0}. \quad (21.21)$$

При односторонней текучести (рис. 21, в) аналогично

$$F_+^{(2)} = F \bar{\alpha}; \quad F_-^{(2)} = F \left(\frac{1}{2} + \beta \right);$$

$$S_+^{(2)} - S_-^{(2)} = F h \left[\bar{\alpha} \left(\frac{a}{2} + \beta \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \beta^2 \right) \right];$$

$$J^{(2)} = -\frac{F}{2} h \left[\frac{1}{4} - (\bar{\alpha} + \beta)^2 \right];$$

$$J^{(2)} = \frac{1}{4} F h^3 \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha} + \beta \right) \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha} + \beta \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha} - \beta \right)^2 \right]$$

После очевидных преобразований и преобразований можно получить выражения для α и ε , которые являются искомыми уравнениями. Получаются следующие:

$$\text{при } m_D \leq m_T \quad \alpha = \frac{3\sigma_T}{Eh} m_D; \quad \varepsilon = \frac{\sigma_T}{E} n; \quad (21.23)$$

$$\text{при } m_T \leq m_D \leq m_{T+T}$$

$$\alpha = \frac{8}{9} \frac{\sigma_T}{Eh} \frac{(1-n)^2}{(1-n-\frac{3}{2}m_D)^2};$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_T}{E} \left[n + \left(\sqrt{\frac{Th}{2\sigma_T}} \alpha - \sqrt{1-n} \right)^2 \right]; \quad (21.24)$$

$$\text{при } m_{T+T} \leq m_D \leq m_0$$

$$\alpha = \frac{2\sigma_T}{Eh} \frac{1}{\sqrt{3(m_0-m_D)}}; \quad \varepsilon = \frac{h}{2} n \alpha; \quad (21.25)$$

$$\left. \begin{aligned} m_D &= \frac{M_D}{M_0}; \quad n = \frac{N}{N_0}; \quad m_0 = 1-n^2; \\ m_T &= \frac{M_T}{M_0} = \frac{2}{3}(1-n); \quad m_{T+T} = \frac{M_{T+T}}{M_0} = \frac{2}{3}(1+n-2n^2). \end{aligned} \right\} \quad (21.26)$$

Здесь M_D — момент дуговой текучести; M_{T+T} — максимальный момент, соответствующий появлению в сечении двусторонней текучести; M_0 — безразмерный прогибный момент сечения, учитывающий о учетом влияния N .

При перерезании нити $m_D = m_0$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{3\sigma_T}{Eh} m & \text{при } 0 \leq m \leq \frac{2}{3}; \\ \frac{2\sigma_T}{Eh} \frac{1}{\sqrt{3(1-m)}} & \text{при } \frac{2}{3} \leq m \leq 1. \end{cases} \quad (21.27)$$

При $m = 1$ $\alpha = \infty$ — возникает срыв оси дуги (известно-ый перелом).

21.4. Перерезание нити дуги несимметричного двустороннего профиля со скручивающим изгибающим моментом. У дуги несимметричного двустороннего профиля при $F_D^0 \sim F_D + F_0$ (обозначения см. в § 8) двусторонняя текучесть реализуется только в предельном состоянии. В упругоэластической стадии

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{6}{J} \frac{\sigma_T}{Eh} \frac{1}{F_D m_D (m_D + 2n) \left[1 + \sqrt{1 + \frac{32}{27} \frac{\alpha_1^2}{m_D (m_D + 2n)^2}} \right]}; \\ m_D &= \alpha_0 (1-m); \\ \alpha_0 &= \frac{F_D}{F_0} + \frac{1}{2} \frac{F_0}{F_D}; \\ \alpha_1 &= \frac{F_D^2}{F_0}; \quad m = \frac{M(x)}{M_0}. \end{aligned} \right\} \quad (21.28)$$

Если $F_0' = F_0 + F_G$ и без сомнения можно считать центр тяжести сечения расположенным в рассматриваемом поле, (24,28) упрощается

$$\kappa = \frac{G_T}{Eh} \frac{1}{(3\eta - \eta)}$$
(24,29)

Большое число вариантов дифференциальных уравнений упругопластического изгиба для разных профилей с учетом упрочнения в предельных сеч. приведено в [41].

§ 22. Расчет балки с помощью пластических функций

22.1. Поперечный изгиб. Пластический сдвиг. При поперечном изгибе деформации материала балки существенно определяются значениями кривизны ее осей κ в различных условиях. Поэтому, если балку из материала упругого материала нагрузить некоторой фактической поперечной нагрузкой q_F , подобранной так, чтобы ее кривизна κ во всех сечениях была такой же, как у балки из упругого пластического материала, то деформации и перемещения у обеих балок будут совпадать. Поэтому расчеты можно вести вместо соответственно к рассмотренной упругой балке, нагруженной фактической нагрузкой q_F . В данном случае право сразу найти кривоизгибающий момент от q_F — $M_F(x)$, зная κ с помощью дифференциальных уравнений упругопластического изгиба, например (24,27) или (24,28), и подставляя ее в дифференциальное уравнение изгиба упругой балки

$$M_F(x) = EJ\kappa.$$
(22,1)

Эквив. $M_F(x)$ отличается от эквив. $M(x)$ только в пределах пластического участка балки. Это иллюстрируется примером

¹ Этот прием — разновидность метода упругих решений (метода фактических нагрузок), см. § 26.

на рис. 22. Точка пересечения эквив. $M(x)$ с линией M_T (рис. 22,б) имеет границы пластического участка балки. (Эквив. $M_F(x)$ показана на рис. 22,а.) На $M_F(x)$ удобно выделить ту его часть, которая связана с пластическим пластическим изгибом, — пластическую составляющую фактического кривоизгибающего момента (пластический момент)

$$M_P(x) = M_F(x) - M(x) = EJ\kappa - M(x),$$
(22,2)

который определяется только фактической нагрузкой q_F и действительной нагрузкой на балку. (Эквив. $M_P(x)$ показана на рис. 22,г.) Расчет удобно вести раздельно: на пластическую нагрузку, вычисляя упругую составляющую прогибов w_P , и на действительную фактическую нагрузку q_F , считая пластическую составляющую прогибов w_P . Результаты суммируются в соответствии с принципом независимости действия сил, примененным для рассмотренной здесь упругой балки.

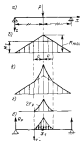


Рис. 22. Схема балки (а); эквив. изгибающий момент (б); фактический (в) и пластический (г) изгибающие моменты; эквив. изгибающий момент (д).

Практически нет необходимости переходить от $M_p(x)$ к q_p . Можно вести расчет непосредственно по $M_p(x)$, используя графоаналитический метод. Этот метод, как известно, основывается на аналогии дифференциальных зависимостей между интенсивностью поперечной нагрузки $q(x)$, перегибающим моментом $G(x)$ и изгибающим моментом $M(x)$:

$$q(x) = \frac{dG(x)}{dx} = \frac{d^2M(x)}{dx^2}, \text{ в пределах } \mathcal{K}, \text{ где посто-}$$

янно сечения ω' и перегиба ω : $\mathcal{K} = \frac{d\omega'}{dx} = \frac{d^2\omega}{dx^2}$.

Если рассматривать $\mathcal{K}$ как условную нагрузку q_y , то перегибающие силы от этой нагрузки будут равны углам поворота ω' , а изгибающие моменты — прогибам ω . При этом должно быть соблюдено соответствие граничных условий у балок с заданной и условной нагрузками. Для упругой балки $\mathcal{K} = \frac{M_{max}}{EI}$ и вместо $\mathcal{K}$ можно оперировать с $M(x)$.

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к определению перегибающих сил и изгибающих моментов в балке, нагруженной поперечной нагрузкой интенсивностью $M_p(x)$ (см. рис. 12,а). Поскольку форму этой нагрузки достаточно сложна, расчеты можно существенно облегчить, если заранее вычислить площади F_p и статические моменты S_p эпюры $M_p(x)$. Удобнее это делать по участкам, в пределах каждого из которых $M(x)$ монотонно возрастает или убывает. Расположив начало координат в начале такого участка, можно записать

$$\begin{aligned} F_p &= \int_0^c M_p(x_1) dx_1; \\ S_p &= \int_0^c M_p(x_1) x_1 dx_1; \\ S_p^1 &= \int_0^c M_p(x_1) (c - x_1) dx_1, \end{aligned} \quad (22.3)$$

Как видно из этих формул, статический момент S_p вычислен относительно начала участка, где $M_p(x) = 0$, а S_p^1 — относительно конца участка, где $M_p(x)$ имеет наибольшее значение; c — длина участка. Выражения (22.3) можно представить в безразмерной форме:

$$F_p = M_0 c \Psi_k; S_p = M_0 c^2 \Psi_k^1; S_p^1 = M_0 c^2 (\Psi_k - \Psi_k^1); \quad (22.4)$$

$$\Psi_k = \int_0^1 m_p(\eta) d\eta; \Psi_k^1 = \int_0^1 m_p(\eta) \eta d\eta; \eta = \frac{x_1}{c}; \quad (22.5)$$

$$m_p(\eta) = \frac{M_p(\eta)}{M_0} = \frac{EI}{M_0} x(\eta) - m(\eta); m(\eta) = \frac{M(\eta)}{M_0}; \quad (22.6)$$

где Ψ_k и Ψ_k^1 — безразмерные функции.

В примере на рис. 14 в пределах рассматриваемого пластического участка $M(x)$ — линейная функция x , что дает возможность записать

$$m(\eta) = m_T + (m_m - m_T) \eta; m_m = \frac{M_{max}}{M_0}; \quad (22.7)$$

где M_{max} — наибольший изгибающий момент в пределах пластического участка.

Для сечений заданной формы при заданной форме эпюры нагрузки величина $\frac{EI}{M_0} x(\eta)$ в (22.6) зависит только от $m(\eta)$. Если же последнее выражается выражениями (22.7), то после интегрирования по (22.5) функции Ψ_k и Ψ_k^1 будут зависеть только от величин m_m . Проиллюстрируем это на примере

прямоугольного профиля. Если материал идеальнo упруго-пластический. Подставляя χ из (21,27) в (22,8), получим

$$m_p(\eta) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1-m(\eta)}} - m(\eta), \quad (22,8)$$

а после интегрирования по (22,5)

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(m_m) &= \frac{4}{3} \frac{1-\sqrt{3(1-m_m)}}{3m_m-2} - \frac{1}{8} (3m_m+2); \\ \Psi_2(m_m) &= \frac{4}{9} \frac{2-3m_m\sqrt{3(1-m_m)}}{(3m_m-2)^2} - \frac{1}{9} (3m_m+1). \end{aligned} \right\} \quad (22,9)$$

Здесь подмодуль при Ψ_1 и Ψ_2 принято значение $\lambda = 2$, так как для вычисления этих функций достаточно иметь одно значение $m(\eta)$. Поэтому $\Psi_1(m_m)$ и $\Psi_2(m_m)$ являются линейными пластическими функциями m . Их значения приведены в табл.2 приложения. Не представляется затруднений вычислить Ψ_3 и Ψ_4 для любых случаев нагрузки, формы сечения и картины распределения численных интегрирования, если есть дифференциальные уравнения упругопластического течения (уравнения для χ).

22.2. Средние значения прогиба и угла поворота. Примеры. Вернемся к примеру, рассмотренному на рис.22. Суммарная нагрузка, действующая на упругую балку (рис.22,а), симметрична к линии $2F_P$, а реакции опор одинаковы: $R_P = F_P$. Напомним, что здесь реакции R_P пропорциональны пластической составляющей угла поворота открытого сечения ω'_{op} . При этом (22,4)

$$R_P = EJ\omega'_{op} = F_P = M_0 \in \Psi_1(m_m). \quad (22,10)$$

Максимальный момент покрывные пролеты - величина, пропорциональная пластической составляющей прогиба в этом сечении (максимального прогиба), может быть вычислен как

$$EJ\omega_{op} = R_P \frac{l}{2} - S_P,$$

а также, подставляя (22,4) в (22,10), найдем

$$\begin{aligned} EJ\omega_{op} &= M_0 \in \Psi_1(m_m) \frac{l}{2} - M_0 \in 2\Psi_2(m_m) = \\ &= \Psi_1(m_m) M_0 l \left[\frac{F_P^2}{2} - \frac{S_P}{l} \right] \Psi_2(m_m) + \frac{S_P}{l} \Psi_1(m_m) l. \end{aligned} \quad (22,11)$$

Чтобы вычислить длину жестякового участка ξ , рассмотрим направление жестякового момента для нижней балки на участке $\xi \leq x \leq l/2$: $M(x) = \frac{F_P}{2} x$. При $x = l/2 - \xi$ должно быть $M(x) = M_y$, что дает $\xi = \frac{l}{2} - \frac{2M_y}{F_P}$. Напомним,

$$m_m = \frac{M_{max}}{M_y} = \frac{\rho l}{4 M_y}, \text{ и остается воспользоваться табл.1}$$

приведенной для определения значений $\Psi_1(m_m)$ и $\Psi_2(m_m)$.

Чтобы найти полный прогиб балки ω_{max} , следует использовать полученный результат вычисления упругой составляющей прогиба. Используя равенство для упругой балки, нагруженной силой покрывные пролеты (рис.22,а), найдем $\omega_{max} = \frac{\rho l^2}{48 EJ} x$ пропорционально

$\omega_{max} = \omega_{op} + \omega_{up}$. Если деформация балки упруга (см. табл.6), то ω_{max} - величина изменения прогиба при полной реа-

грузки, а W_{np} — остаточные прогибы.

Аналогично можно найти любые другие характеристики перемещений балки. Такие прогибы в произвольном сечении

$$EJw_p = \begin{cases} R_p(x) & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} - c; \\ R_p x - S'_p(m) & \text{при } \frac{l}{2} - c \leq x \leq \frac{l}{2}, \end{cases} \quad (22.12)$$

$$\text{где } S'_p(m) = M_0 \left(x - \frac{l}{2} + c \right)^2 \left[\varphi_1(m) - \varphi_1(m_0) \right],$$

здесь $m = \frac{M(x)}{M_0}$ играет роль $m_{\text{ст}}$, что принимая, что

$m(\eta)$ по (22.7) известно.

Рассмотрим более сложный пример — балку, нагруженную силой P в середине на опорах (рис. 83, а). Эпюры $M(x)$ и $M_p(x)$ строятся аналогично предыдущему (рис. 83, б и в), только эпюры состоят из трех участков здесь три: в пролете и в районах, примыкающих к опорам. Первый, как и в предыдущем примере, мы разделим на две части длиной $-c_1$ и c_2 . Расчет сводится к определению перемещений сил в известных моментах балки, представленной на рис. 83, в. Найдем реакции левой опоры R_{op} , вычислив сумму моментов всех сил, действующих на балку относительно правой опоры:

$$R_{op} l + F_{p,0} \left(l - \frac{S'_{p,0}}{F_{p,0}} \right) - F_p \left(b + \frac{S'_{p,2}}{F_{p,2}} \right) - \\ - F_{p,2} \left(b - \frac{S'_{p,2}}{F_{p,2}} \right) + S'_{p,1} = 0.$$

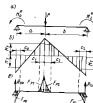


Рис. 83. Силы балки (а); эпюры изгибающих моментов $M(x)$ и $M_p(x)$ в сечении рассеченной балки (в).



Рис. 84. Криволинейная поперечная эпюра $M(x)$

(Обозначения на рис. 83, в.) Стоящие в скобках (22.4), получим

$$R_{op} = EJw''_{op} = M_0 l \left\{ -\frac{c_1}{l} \left(1 - \frac{c_2}{l} \right) \varphi_1(m_0) + \right. \\ \left. + \left[\frac{b}{c} \left(\frac{c_1}{l} + \frac{c_2}{l} \right) + \frac{c_1^2}{l^2} - \frac{c_2^2}{l^2} \right] \varphi_1(m_m) - \right. \\ \left. - \left(\frac{c_1^2}{l^2} - \frac{c_2^2}{l^2} \right) \varphi_1(m_m) - \frac{c_2^2}{l^2} \varphi_1(m_0) - \varphi_1(m_0) \right\};$$

$$m_0 = \frac{M_0^0}{M_0}; m_m = \frac{M_m^0}{M_0};$$

$$m_m = \frac{1}{M_0} \left[P \frac{a \cdot b}{l} - M_0^0 \left(1 - \frac{a}{l} \right) - M_0^0 \frac{a}{l} \right]. \quad (22.13)$$

Соответственно минимальный касательный момент для условной балки

$$\begin{aligned} E J w_p|_{x=a} &= R_{ap} a + F_{ps} \left(a - \frac{S'_{ps}}{F_{ps}} \right) - S'_{ps} = \\ &= R_{ap} a + M_p l^2 \left[\frac{a}{l} \frac{c_0}{l} \psi_1(m_0) \right] - \frac{c_0^2}{l^2} \left[\psi_1(m_0) - \right. \\ &\left. - \psi_1(m_0) \right] - \frac{c_0^2}{l^2} \left[\psi_1(m_0) - \psi_1(m_0) \right] \end{aligned} \quad (22.14)$$

22.3. Криволинейный двучленный момент касательных моментов. В примерах, рассмотренных выше, касательный момент $M(x)$ в пределах пластического участка был задан функцией X и соответственно использовались линейные пластические функции ψ_1 и ψ_2 . В принципе их использование возможно и для криволинейной кривой $M(x)$, если прибегнуть к их криволинейной аналогии. Разобьем пластический участок длиной c (рис.84) на j произвольных частей и рассмотрим его части между соседними точками M_{i-1} и M_i . Заменяя кривую $M(x)$ прямой, проходящей через точки M_{i-1} и M_i , вычислим площадь и статический момент кривой $M_p(x)$ и ΔF_{pi} и ΔS_{pi} . Выражение для касательных моментов в силу соседнего приобретает вид, аналогичный (22.7):

$$\begin{aligned} m(\eta^{(i)}) &= m_1 + (m_2 - m_1) \eta^{(i)}; \\ m_2 &= \frac{M_i}{M_0} \end{aligned} \quad (22.15)$$

Выражение (22.15) на рис.84 изображено стрих-пунктирной прямой, а для него, очевидно, для $M(x) = M_p$ (начало пластического участка), не совпадает с началом координат. Проведется условная

линия эластического участка c_i , которую можно найти, полагая

$$\text{в (22.15) при } \eta^{(i)} = \frac{c_i - \Delta x_i}{c_i} \quad m(\eta^{(i)}) = m_{i-1} = \frac{M_{i-1}}{M_0}.$$

Получается

$$c_i = \frac{m_i - m_{i-1}}{m_i - m_{i-1}} \Delta x_i. \quad (22.16)$$

Минимум площади кривой $M_p(x)$ может быть вычислен как

$$\Delta F_{pi} = F_{pi} - F_{pi-1}, \quad \text{при учете (22.4)}$$

$$\Delta F_{pi} = M_0 \left[c_i \psi_1(m_i) - (c_i - \Delta x_i) \psi_1(m_{i-1}) \right].$$

Величина ΔS_{pi} вычисляется аналогично, но нужно помнить, что статический момент кривой $M_p(x)$ должен быть вычислен относительно начала действительного пластического участка:

$$\Delta S_{pi} = \Delta F_{pi} \left(\frac{S_{pi} - S_{pi-1}}{\Delta F_{pi}} - c_i + x_i \right),$$

а по (22.4)

$$S_{pi} - S_{pi-1} = M_0 \left[c_i^2 \psi_2(m_i) - (c_i - \Delta x_i)^2 \psi_2(m_{i-1}) \right].$$

Таким образом, если

$$\Delta F_{pi} = M_0 c_i \Delta \varphi_{pi}; \quad \Delta S_{pi} = M_0 v_i^2 \Delta \psi_{pi},$$

то

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi_{pi} &= \varphi_i(m_i) - \varphi_i(m_{i-1}); \\ \Delta \psi_{pi} &= \psi_i(m_i) - \left(\frac{m_{i-1} - m_r}{m_i - m_r} \right) \psi_i(m_{i-1}) - \\ &= \frac{m_{i-1} - m_r}{m_i - m_r} \Delta \psi_{ri}. \end{aligned} \right\} \quad (22.17)$$

Продифференцировав ΔF_{pi} и ΔS_{pi} для всех частей рассмотренного пластического участка балки, найдем для него F_p и S_p в форме (22.4):

$$\begin{aligned} F_p &= \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{c} \Delta \varphi_{pi}; \\ \psi_p &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{c_i}{c} \right)^2 \Delta \psi_{pi}. \end{aligned} \quad (22.18)$$

22.4. Частотный анализ. Рассмотрим две особые случаи, когда применяемое выше правило кусочно-линейной аппроксимации кривой $M(x)$ для вычисления пластических функций φ_k и ψ_k не применимо. Если в пределах пластического участка $M(x) = \text{const}$, балка находится в условиях частотного колебания, $m_i = m_{i-1}$ и по (22.16) $c_i = \infty$. Рассмотрим также частотные пластические функции

нормы. Будем вычислять φ_k и ψ_k особым.

Поскольку $M(x) = \text{const}$, то по (22.2) $M_p(x) = \text{const}$. Тогда, интегрируя по (22.5), получим

$$\begin{aligned} \varphi_0(m_m) &= m_r; \\ \varphi_0(m_m) &= \frac{1}{2} m_p. \end{aligned} \quad (22.19)$$

Это — кусочные пластические функции, так как здесь m_r (φ) — кусочная функция φ . Значения m_p для балки прямоугольного сечения из идеального упругопластического материала представлены в табл. I приложения.

В качестве примера рассмотрим балку, представленную на рис. 35. Если считать P здесь $M(x) = \text{const}$ и $M_p(x) = \text{const}$ пластический участок также соответственно разбить на три части: концы длиной c и среднюю длиной c_0 . Функции формы разнородной балки определяются как $R_p = EJ \omega_p^2 = F_p + \frac{1}{2} F_{p0} =$
 $= M_0 \left[c \varphi_i(m_m) + \frac{c_0}{2} \varphi_0(m_m) \right]; \quad m_m = \frac{P_0}{M_0},$



Рис. 35. Схема балки (а); кривая изгибающих моментов (б) и схема разнородной балки (в).



Рис. 36. Схема балки (а); кривая изгибающих моментов (б) и схема разнородной балки (в).

$$EJw_{\text{кр}} = R_P \frac{l}{2} - F_P \left(\frac{3l}{8} + \frac{c_1}{2} \right) - \frac{c_2}{4} \frac{F_{\text{кр}}}{2} =$$

$$= R_P \frac{l}{2} - M_0 l^2 \left\{ \frac{c}{l} \left[\Psi_1(m_m) - \Psi_1(m_{m1}) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{c}{l} \frac{c_2}{l} \Psi_1(m_m) + \frac{1}{2} \frac{c_2^2}{l} \Psi_2(m_m) \right\}.$$

Второй особый случай возникает, когда в пределах пластического участка $M(x)$ имеет место экстремум. Если здесь прибегнуть к кратно-линейной аппроксимации $M(x)$, то в районе экстремума при разбиении пластического участка на малые части с целью повышения точности расчета величины M_{i-1} и M_i возникают сложности и c_i по (22,66) сильно возрастает. В результате при вычислении $\Delta \Psi_{i-1}$ и $\Delta \Psi_i$ возникают малые разности

близких величин и точность расчета падает. Это затрудняет расчет, и в ряде случаев удобнее пользоваться специальными известными функциями. Так, если в пределах пластического участка длина нагруженно-равномерно распределенной нагрузки, вызывающий момент может быть представлен в виде

$$m(\eta) = m_T + (m_m - m_T)/(2 - \eta) \eta, \quad (22,80)$$

Здесь, как и в (22,7), $m(0) = m_T$, $m(1) = m_m$, а параметр $m(\eta)$ имеет место в зоне пластического участка при

$\eta = x/l$. Функции $\Psi_1(m_m)$ и $\Psi_2(m_m)$, введенные в предыдущем (22,80), являются алгебраическими и логарифмическими функциями. Для балки произвольного профиля из линейно упругопластического материала значения $\Psi_1(m_m)$ и $\Psi_2(m_m)$ приведены в табл.4 приложения.

Рассмотрим балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой (рис.86). В силу симметрии нагрузка ее опор $M_P(x)$ эквивалентна такой опоре для первого пролета - балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой силой (см.рис.83). Поэтому подставляем там формулы для $w_{\text{кр}}$ и $w_{\text{кр}P}$ друг за другом и в данном случае, только $\Psi_1(m_m)$ и $\Psi_2(m_m)$ нужно соответственно заменить на $\Psi_1(m_m)$ и $\Psi_2(m_m)$. Другими, конечно, будут значения чис c и m_m :

$$c = \frac{l}{2} \sqrt{1 - \frac{m_T}{m_m}}; \quad m_m = \frac{gl^2}{8M_0}.$$

Если по концам балки приложены моменты M^P , в районе опор также могут возникнуть пластические участки. Для этих участков, как показывает анализ, без существенных ошибок можно пользоваться известными пластическими функциями.

Для удобства расчетов балки набора в табл.5 приведенные функции известных пластических функций для несимметричных нагруженных профилей из линейно упругопластического материала; в табл.4 приведены - пластические функции для тех же профилей в тех случаях, когда материал упругопластический с линейным решением при $\sigma = \sigma_0/3 = 0,05$. Анализ показывает, что учет упругости в упругопластическом расчете может иметь смысл лишь при нагрузках, близких к предельным. Это иллюстрируется примерами на рис.87, где для двух типов нагрузок показаны решения максимальных прогибов балки из линейно упругопластического материала (двухгранная линия) и при наличии линейного упругости (сплошная линия, $\sigma = 0,05$); профиль балки - несимметричный двутавр.

22.5. Статистическое распределение балки. Неоднородность производства расширяет статистическую неоднородность балки вследствие усиления заделку: приходится составлять и решать аналогичные уравнения. Вероятно и балка, нагруженный сосредоточенной силой в пролете и моменты на опорах (см.рис.83), и здесь считать, что эти моменты близки к нулю на самом деле, а также считать,



Рис. 27. Зависимость нагрузки — максимальный прогиб для однопролетных балок несимметричного сечения: 1 — жестко защемленная по одному концу, нагруженная поперечным прогибом сосредоточенной силой P ; 2 — шарнирно опертая по одному концу, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q
 — упругоэластический материал с линейным упрочнением

$$\left(\sigma = \frac{E_0}{E} = 0,38 \right); \dots - \text{линейный упругоэластический материал.}$$

из балки жестко защемлена. Тогда моменты M_0^B и M_1^B неизвестны и подлежат определению. Найти их можно, потребовав, чтобы углы поворота опорных сечений равнялись нулю:

$\omega_0^B = \omega_1^B = 0$. Пластикальные составляющие углов поворота на обеих опорах ω_{0p}^B нами вычислены выше — (22.13). Угловая составляющая по известным моментам

$$EJ \omega_{0e}^B = \frac{1}{6} Pab \left(1 + \frac{b}{a} \right) - \frac{1}{3} M_0^B l - \frac{1}{6} M_1^B l.$$

Аналогично вычисляются ω_{1p}^B и ω_{1e}^B . Суммируя угловые и пластинальные составляющие и приравняв их нулю:

$$\omega_{0p}^B + \omega_{0e}^B = 0; \quad \omega_{1p}^B + \omega_{1e}^B = 0,$$

получим систему двух линейных уравнений, решением которой являются опорные моменты M_0^B и M_1^B . Решения можно получить численно, применяя метод последовательных приближений.

Если рассматривается неразрезная многопролетная балка, можно рассчитать ее на опорах, приходящих в этих сечениях известным опорным моментам и, рассматривая изолированно каждый пролет, найти углы поворота опорных сечений так же, как это сделано выше. Приравняв на каждой опоре углы поворота смежных пролетов, получим систему уравнений для определения опорных моментов. В упругих случаях, как известно, такой путь приводит к уравнениям теорем трех моментов и пяти моментов. При аналитическом типе опор

неразрезной балки рассматривая статическую неопределенность известным методом сводимся к балкам невыполненным трудностями, преодолеть которые можно только используя ЭВМ.

Практически, однако, всегда есть два обстоятельства, упрощающих расчет. Во-первых, так же, как и все пролеты балки одновременно переходят в пластический стадию. Если часть пролета работает упруго, соответствующие части уравнений будут линейными (уравнения трех или пяти моментов). Во-вторых, с ростом нагрузки у балок из вязкоупруго-пластического материала в некоторых опасных сечениях образуется пластическое ядро. Тогда избыточные моменты в этих опасных сечениях и равны M_0^B и те части уравнений, которые составлялись для их определения, выполняются. Так, в примере, на рис. 20, если $M_0^B = M_0$, то для уравнения (22.13) $\psi_1 (m_0) = 0,500$ и $\psi_1 (m_0) = 0,444$ (см. также табл. 2 приложения). Соответственно отпадает необходимость в уравнении равновесия $\omega_0^B = 0$.

22.5. Пластинальные функции для однопролетного жесткого балки. Напомним выше и принцип справедливо и для однопролетного балки, если вместо $M(x)$ использовать суммарный момент M_{Σ} по (21.3) и для вычисления пластинальных функций брать соответственно дифференциальные уравнения упруго-пластического ядра, составленные при условии $M \neq 0$. (При этом, естественно, возникает необходимость в дополнительных приближениях, ибо M_{Σ} зависит от ω .)

Специальная задача возникает только при рассмотрении балки с расходом, когда для определения величин M нужно составить уравнение совместности деформаций (22.5) и определять удлинения осей балки по (12.7). При вычислениях $\int l dx$ в пределах пластинального участка для E нужно пользоваться дифференциальными уравнениями упругоэластического ядра (см. § 21). Эти операции имеют быть существенно упрощены, если решить задачу теми же методами, что и задача ядра, применяя описанным пластинальные функции.

Возьмем считать, что удлинение ϵ имеет упругий характер, но вычисляя некоторые функции продольными силами $N_p(x)$, по-

торые могут изменяться по длине балки: $N_p(x) \approx EF\epsilon$, где

ϵ — действительные удлинения, определенные дифференциальными уравнениями упругопластического материала. Аналогично (22.2) удобно выразить пластическую составляющую фактической продольной силы

$$N_p(x) = N_p(x) - N = EF\epsilon - N. \quad (22.21)$$

Тогда пластическая составляющая относительного удлинения оси

балки $\epsilon_p = \frac{N_p(x)}{EF}$, а пластическая составляющая абсолютного удлинения оси в пределах пластического участка

$$\begin{aligned} u_p &= N_0 \epsilon X_k; \\ X_k &= \int_0^x n_p(\eta) d\eta; \\ n_p(\eta) &= \frac{N_p(\eta)}{N_0}. \end{aligned} \quad (22.22)$$

Здесь, как и выше, G — длина упругого участка; N_0 — предельная продольная сила; X_k — пластическая функция.

результате

$$\int_0^L dx = \frac{N_0}{EF} + \sum_{j=1}^j u_{pi}, \quad (22.23)$$

где j — число упругих участков по длине балки.

Функции X_k аналогичны ранее определенным функциям Y_k .

Φ_k и обладает теми же свойствами. Для балки треугольного сечения из идеального упругопластического материала все названные пластические функции могут быть вычислены в общем виде:

линейные пластические функции

$$\begin{aligned} \psi_0 &= m_p; \\ \psi_0 &= \frac{1}{2} m_p; \\ X_0 &= n_p; \end{aligned} \quad (22.24)$$

параболические пластические функции

при $m_r \leq m_{zm} \leq m_{rr}$

$$\begin{aligned} \psi_r &= \frac{\theta}{g} \frac{(1-n)^2}{m_r} \left(\frac{m_r}{m_0} - 1 \right) - \frac{1}{2} (m_{zm} + m_r); \\ \psi_r &= \frac{3\theta}{27} \frac{(1-n)^2}{m_r^2} \left(\frac{m_r}{m_0} - 1 + \ln \frac{m_r}{m_0} \right) - \frac{1}{6} (2m_{zm} + m_r); \\ X_r &= (1-n) \left[\frac{\theta}{2} \frac{1-n}{m_r} \left(\frac{m_r}{2m_0} - \frac{1}{2} + \ln \frac{m_r}{m_0} \right) + 1 \right]; \end{aligned}$$

$$\text{при } m_{rr} \leq m_{zm} \leq m_0$$

$$\begin{aligned} \psi_r &= \frac{4}{3m_r} \left[m_0 + n(1-n) \sqrt{3(m_0 - m_{zm})} \right] - \frac{1}{2} (m_{zm} + m_r); \\ \psi_r &= \frac{4}{27m_r^2} \left\{ \theta(1-n)^2 \left[\frac{n}{1-n} + \ln(1-n) \right] + [2(m_0 - m_r) + \right. \\ &+ (m_{rr} - m_r)(1-n)] - [2(m_0 - m_r) + (m_{zm} - \\ &- m_r)] \sqrt{3(m_0 - m_{zm})} \left. \right\} - \frac{1}{6} (2m_{zm} + m_r); \\ X_r &= \frac{2}{3m_r} \left\{ 4(1-n)^2 \left[\frac{n}{3m_r} + \ln(1-n) \right] + n \left[(1-n) - \right. \right. \\ &- \left. \left. \sqrt{3(m_0 - m_{zm})} \right] + \frac{3}{2} (m_{rr} - m_r) \right\} - n; \end{aligned} \quad (22.25)$$

$$m_z = m_{zm} - m_r; \quad m_n = 1 - n + \frac{m_{zm}}{2};$$

$$m_{znp} = \frac{M_{pmax}}{M_0};$$

$$\text{при } m_T \leq m_{\Sigma m} \leq m_{T+}$$

$$\varphi_1 = m_T^{\frac{1}{2}} \frac{m_k}{\Delta} \left(\frac{l}{m_T} + A \right) - \left(\frac{2}{3} m_k + m_T \right);$$

$$\psi_2 = m_T^{\frac{1}{2}} \frac{m_k}{\Delta} A - \left(\frac{5}{12} m_k + m_T \right);$$

$$\chi_2 = \frac{5}{2} m_k^{\frac{1}{2}} \frac{m_k}{\Delta} \left(\frac{l}{m_T} + A \right) - 3 m_T^{\frac{1}{2}} A + (1-n);$$

$$\text{при } m_{T+} \leq m_{\Sigma m} \leq m_0$$

$$\varphi_1 = m_T^{\frac{1}{2}} \frac{m_k}{\Delta} \left[\frac{B-n}{m_T(l-n)} + C \right] + \frac{2}{3\sqrt{3}} D - \left(\frac{2}{3} m_k + m_T \right); \quad (22.26)$$

$$\psi_2 = \frac{m_k^{\frac{1}{2}}}{\Delta} \left[\frac{m_k B - 2 n m_T}{m_T(l-n)} + m_k C \right] + \frac{2}{3\sqrt{3}} D -$$

$$- \left(\frac{5}{12} m_k + \frac{1}{2} m_T \right) - \frac{2}{3\sqrt{3} m_k} \left(\sqrt{m_k^2 - m_{T+}^2} - \sqrt{m_k^2 - m_{\Sigma m}^2} \right);$$

$$\chi_2 = \frac{5}{2} m_T^{\frac{1}{2}} \frac{m_k}{\Delta} \left[\frac{B-n}{m_T(l-n)} + C \right] - 3 m_T^{\frac{1}{2}} C + \frac{2}{\sqrt{3}} D + B - n;$$

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{m_k}{\sqrt{\Delta}}; \quad B = 1 - \sqrt{\frac{m_{\Sigma m} - m_{T+}}{m_k}};$$

$$C = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{m_k}{\sqrt{3}} - \arctg \frac{m_k}{\sqrt{\Delta}} (1-B);$$

$$D = \frac{l}{m_k} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{m_{\Sigma m} - m_{T+}}{m_k - m_{\Sigma m}}}; \quad \Delta = m_k (3 m_T - m_{\Sigma m}).$$

Исходя из этого, эти функции приведены в приложениях табл.1 и 2, 22.7. Решение задачи описанного характера. Учет порогов. Как уже отмечалось выше, решение задачи описанного характера базируется на применении пластических функций. Процедура использования метода последовательных приближений. Процедура заключается в том, что приближения могут быть следующие.

В ряде случаев вычисляем M_T по (22.2) с использованием и предыдущего приближения. Сравниваем эти M_T с M_T — моментом деформей текучести сечения, вычисляемого с учетом влияния продольной силы N , определяем приближенность пластического участка (участков) с .

По величинам M_{Tmax} и N определяем значения пластических функций φ_k и ψ_k . Определяем пластическую составляющую прогибов w_p , так же как при поперечном изгибе, учитывая составляющую прогибов w_d и суммируем прогибы w .

Оцениваем, что прогибы нужно вычитать в тех же сечениях, в которых определяем M_T . Одновременно уточню эти сечения рассматривать как границы участков, в пределах которых M_T является линейно, полагаясь описанным выше приемом крутило-линейной аппроксимации M_T для вычисления φ_k и ψ_k .

Такой расчет, естественно, достаточно громоздок, но обеспечивает высокую точность. Если в высокой точности нет необходимости, можно пользоваться приближенным методом. Состоит это из того, что в рассматриваемом участке вычитаем из прогибов поперечной нагрузки и продольной сил [118]. Начальное значение рассматривают только из поперечной нагрузки — момент изгиба поперечного изгиба, вычисляем прогибы. На втором этапе эти прогибы трактуют как начальную нагрузку и рассматривают изгиб балки с начальной нагрузкой от действующей продольной сил.

Если получившиеся от поперечной нагрузки прогибы аппроксимировать синусоидой, можно воспользоваться известным решением задачи о растяжении (сжатии) балки с синусоидальной начальной нагрузкой [118], из которого

$$w = w_m \sin \frac{\pi x}{l}; \quad w_m = \frac{M_{max}}{1 + \frac{N}{EJ}}; \quad \alpha^2 = \frac{N l^2}{\pi^2 EJ}. \quad (22.27)$$

Здесь $w_{m,0}$ - максимальный прогиб балки (поперечные пролеты);

$w_{m,0}$ - тот же прогиб при поперечном изгибе балки. Знак плюс во второй формуле (22,27) отбрасывается в случае, когда прогибные линии N - разнотеневые.

Использование решения задачи в таком виде не учитывает содей существенных оснований, если форма изогнутой оси балки достаточно близка к окружности, что имеет место для шарнирно-опертой балки с симметричной или двусторонней и антисимметричной поперечной нагрузкой. Основное преимущество использования выражения (22,27) состоит в том, что при решении задачи поперечного изгиба можно ограничиться только определением максимальных прогибов $w_{m,0}$; необходимость в последовательных приближениях отпадает, но численные результаты упрощаются.

При малых прогибах для определения N также можно использовать метод последовательных приближений. В первом приближении вычисления выполняются в следующей последовательности.

Решают задачу о свободном изгибе балки с использованием значения N предыдущего приближения и определяют w .

По этим w находят N_0 согласно (12,6); по N предыдущего приближения и результатам расчета балки по огибающей изгиба определяют пологие функции X_k ; находят $\int_0^L dx$

по (22,23), w_c по (12,9) и из уравнений совместности деформаций (12,5) находят N .

Здесь пологое приближение огибающей - максимальное w_c , тригонометрические w при огибающей изгибе в ряде случаев. Если поперечная нагрузка не имеет резко асимметричного характера, w_c можно вычислить по приближенной формуле

$$w_c = \beta \frac{N_0^2}{L} \quad (22,28)$$

При изгибных решениях в форме изогнутой оси балки коэффициент β меняется в определенных узких пределах. Так, если ось балки-двойная, состоящая из двух отрезков прямых, $\beta = 2,2$. Если ось балки огибается по дуге окружности, $\beta = 2,69$. Если это

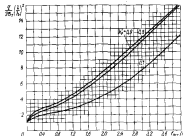


Рис. 28. Диаграммы максимальных остаточных прогибов пластины с раствором, жестко заделанной по краям контура, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q тангенциальной к цилиндрической поверхности.

окружности или косинусов, $\beta = 2,46$. Поэтому для приближенных расчетов можно принимать $\beta = 2,4$ и считать его постоянным. Это дает особые выгоды в сочетании с изложенным выше приближенным методом решения задачи о свободном изгибе.

22.9. Состояние прогиба пластины, жестко по цилиндрической поверхности. На изложенного выше видно, что расчет пластины в упругопластической стадии даже в простейших случаях сопряжен с весьма долгими объемами вычислений, выполнение которых практически невозможно без применения ЭВМ. Поэтому особенно привлекательна табличная форма решений, если результаты удастся представить в виде таблиц или графиков, удобных для практического использования.

На рис. 29 представлены диаграммы для приближенного определения максимальных остаточных прогибов $f_{ост}$ пластины с раствором, жестко по цилиндрической поверхности. Пластина нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q и

костно заданная на опорной контуре. Условный коэффициент расщеп-

$$\lambda_p' \text{ определяется как } \frac{1}{\lambda_p'} = 1 + \frac{AEh}{(1-\mu^2)l}, \text{ где } \lambda - \text{ко-}$$

эффициент жесткости расщепленной конструкции по (12,8). Материал пластин - алюминий углеродистый; h - толщина пластин; l - длина короткой стороны ее опорной контуры.

Кривые на диаграмме получены как результат сечения результирующего расчета¹, выполненного на ЭВМ с использованием мето-

да, приведенного в § 22, для заданных значений G , $\frac{1-\mu^2}{E} \frac{l}{h} = 2 \pm 0,0$. Как показано анализом, алгебраический анализ в сечении

$f_{\text{сеч}}$ от такого сечения не превышает 6-7%.

Линейные диаграммы для расчета пластин обшивки в углеродистостальной обшивке с учетом напряжений от общего изгиба судна и от изгиба борта лобора приведены в [93].

§ 23. Несущая способность свайных и свайно-копучных стержней

23.1. Устойчивость свайного стержня в углеродистостальной обшивке. Устойчивость свайного стержня в углеродной обшивке, как известно, исследуется путем рассмотрения его равновесия в деформированном состоянии с помощью уравнения

$$EJw'''' + Nw'' = 0. \quad (23.1)$$

Наименьшее значение сжимающей силы N (в ял е р о в а с и л а), при котором это уравнение имеет ненулевое решение,

$$N_y = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (23.2)$$

Это известная формула Эйлера. При $N > N_y$ устойчивый равновесный будет изогнутая форма стержня (стержень изгибается, т.е. =

¹ Расчеты выполнены Б.Е.Толды по составленной им программе.

рост устойчивости). При $N = N_y$ устойчивый равновесный деформированный является и прямолинейным, и криволинейным форм (присутствует изгибание, деформация формы устойчивого равновесия). Формула (23.2) определяет, пока устойчивость имеет сжимающую нагрузку $G = N/F$ и абсолютные удлинения $\Delta \delta$, т.е. $\Delta \delta < \Delta \delta_{\text{пл}}$ - критическая удлинения материала.

Если стержень в момент потери устойчивости приходит к положению в его сечении координатных направлений напряжений $\Delta \delta$, в сечении разбивается на две части: F_- и F_+ - соответственно сжатую и растянутую. Положительными изгибными напряжениями. Если G близко к $G_{\text{пл}}$ или превосходит его, то в области F_- , где напряжения от сжатия и изгиба суммируются, могут наблюдаться пластические деформации, и распределение напряжений по высоте сечения будет отклоняться. В области сечения F_+ изгиб вызывает сжатие напряжений, разгрузку, которая, как известно, носит упругий характер.

Если в силу, что изгибные деформации стержня в момент потери устойчивости малы, с незначительностью распределения напряжений в области F_- обычно не считается и для упрощения связи между $\Delta \delta$ и соответствующими деформациями $\Delta \varepsilon$ используют касательный модуль $E_K = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \approx \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$, реальный тангенс угла наклона касательной к диаграмме напряжений при разрыве в точке, отмеченной напряжениями G . Тогда для F_- $\Delta \delta = \varepsilon_K N_y z$, где N_y - критическая нагрузка изгибно-го сжатия в сечении стержня. Для области F_+ деформации сдвига разгрузки носят упругий характер, и $\Delta \delta = \varepsilon_K N_y z$.

Если считать $N = const$ и рассмотреть только положительные изгибные напряжения, то условие равновесия изогнутого

стержня сил в сечении представляется как $\int_F \Delta \delta dF = 0$;

$$\int_F \Delta \delta z dF = M. \quad \text{Положительными изгибными } \Delta \delta \text{ и полн-}$$

где $z \geq 0$ в области F_+ , получим

$$ES_+ + E_K S_- = 0; \quad (EJ_+ + E_K J_-) \chi_H = M, \quad (23.3)$$

где S_+ и S_- — статические моменты площади F_+ и F_- , вычисленные относительно нейтральной оси; J_+ и J_- — аналогичные моменты инерции F_+ и F_- .

Если обозначить

$$E_T = \frac{EJ_+ + E_K J_-}{J} \quad (23.4)$$

и учесть, что $\chi_H = -\omega''$, а $M = N\omega$, второе уравнение (23.3), преобразованное в $E_T J \omega'''' + N\omega = 0$. После квадратурного дифференцирования оно будет отличаться от (20.1) только значением E_T , а поэтому дает максимальное значение смещения N (в прямоугольной оси), аналогичное (23.2):

$$N_{кр}'' = \frac{\pi^2 E_T J}{l^2}, \quad (23.5)$$

E_T по (23.4) зависит от приведенных модулей.

Для стержня прямоугольного профиля, если h_+ и h_- — высота соответственно растянутой и сжатой частей площади сечения, по (23.3)

$$E b \frac{h_+^3}{2} - E_K b \frac{h_-^3}{2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{h_+}{h_-} = \sqrt{\frac{E_K}{E}}.$$

Так как $h_+ + h_- = h$ — высота сечения, то

$$h_+ = h \frac{\sqrt{E_K}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_K}}; \quad h_- = h \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_K}}.$$

Читая последнее, по (23.4)

$$E_T = \frac{E \frac{bh_+^3}{2} + E_K \frac{bh_-^3}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{4ES_K}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_K})^3}. \quad (23.6)$$

23.2. Влияние возрастания сжимающей оси. Если считать, что в момент потери устойчивости сжимающая сила N не постоянна, а возрастает (это так называемая концепция Ф.Вилла), в области F_- дополнительные случайные растягивающие напряжения $\Delta \sigma$ могут скомпенсироваться сжимающими напряжениями абсолютные значения N . Тогда разгрузка здесь не происходит. Если распространить на эту область напряжения, сжатые или растянутые в области F_+ , здесь также будет $\Delta \sigma = -E_K \chi_{H1}$, а (23.4) придется заменить E на E_K и E_T окажется равным E_K . Тогда вместо (23.5) мы получим

$$N_{кр}'' = \frac{\pi^2 E_K J}{l^2}. \quad (23.7)$$

Сравнение (23.5) и (23.7) показывает, что учет возрастания N в момент потери устойчивости приводит к снижению критической силы, так как $E_K < E_T$. (Подробнее см. в [26, 62], а также обзор [58]. В [26], в частности, показано, что (23.7) остается справедливой и в случае, если, несмотря на возрастание N , разгрузка происходит. Интересные результаты получены в [48].) В конструктивных расчетах [26, 68, 118] для определения $N_{кр}$ используются кривые, построенные в основном по данным экспериментов. Для стали такая кривая показана даже на рис. 90 пунктирной линией. Там обозначено:

$$\sigma_0 = N_0 / F; \quad \sigma_{кр} = N_{кр} / F.$$

23.3. Влияние несовершенств скато-моментного стержня. Влияние изгибной оси на величину критической нагрузки. Если сучового набора в плоскости обшивки винтов не было идеальное при-

моделью (когда имеется начальная нагрузка), так же как максимальная сила никогда не будет превышена строго по оси стержня. Эти так называемые начальные несовершенства α могут существенно влиять на критическую нагрузку. Но-во-наиб: в стержне появляются перегибающие моменты в соответствии с прогибом при $N < N_{кр}$. Чем меньше, тем меньше, тем меньше несовершенств, тем меньше, но при N , близкой к $N_{кр}$, возникает резкий рост прогибов. Это, как известно, и определяет практическая ценность расчетов на устойчивость.

Влияние начальных несовершенств на $N_{кр}$ может быть учтено путем оценки реальной способности сжатых-изогнутых стержней. Расчет такого стержня — это частный случай расчета сложного изгиба, когда опорные нагрузки отсутствуют. Поэтому здесь могут быть применены рассмотренные методы, изложенные в предыдущем параграфе, чуть только в M_z по (22,2) положить $M(x) = 0$ и в прогибы прибавить w_0 — стрелу начальной нагрузки или величину эксцентриситета сжатывающей силы:

$$M_z = N(w_0 + w). \quad (23,0)$$

(Здесь учтен знак силы N .) С ростом N одновременно растут w . Прогну зависимость M_z от N в соответствии с w от N вычислена. Для вычисления характерной нагрузки изогнутого (рис.89). Отмечающее этому максимуму значение N есть критическое значение сжатывающей продольной силы $N_{кр}$, при достижении которой реальная способность стержня истощается. Если задача расчета ограничивается определением $N_{кр}$, можно воспользоваться графиком $N - w$ на изогнутом. При этом, как правило, удобнее рассматривать ординаты, для стрелы прогиба стержня максимальный w_m , ибо при обычно встречающемся начальном несовершенстве в этом сечении $M_z = M_{z \max}$. Тогда при

$$N = N_{кр} \frac{dN}{dw_m} = 0. \text{ Этому условию можно придать в более}$$

удобную форму. Взяв полный дифференциал $M_{z \max}$ по формуле (23,0)



Рис.89. Зависимость прогиба от сжатывающей силы у стержня с начальной нагрузкой.



Рис.90. Влияние начальной нагрузки на величину способности сжатых стержней сложного изгиба стержня.

$$dM_{z \max} = Nd(w_m + w) + (f_m + w_m) dN$$

(f_m — максимальная ордината начальной нагрузки или величина эксцентриситета N). Разделив все члены на $d w_m$, получим

$$\frac{dM_{z \max}}{dw_m} = N + (f_m + w_m) \frac{dN}{dw_m}.$$

Откуда, учитывая, что $\frac{dN}{dw_m} = 0$,

$$N_{кр} = \frac{dM_{z \max}}{dw_m}. \quad (23,1)$$

Подставляя сюда $M_{z \max}$ из дифференциального уравнения упругости стержня, получим зависимость, которая вместе с (23,0) позволяет найти $N_{кр}$ и w_m . Проинтегрируем это на примере стержня прямоуг. изогнутого в прогиб на заданного упругостного материала. Здесь из (22,34) для случая

односторонней токуности ($m_I \leq m_E \leq m_{I+I}$)

$$m_I = 2(1-n)\sqrt{1-\frac{2}{3}(1-n)\frac{2\theta_I}{E\Delta x}} \quad (23.40)$$

Если считать, что оторванье происходит по окружности

$$w = w_m \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \text{то кривая } X = -\frac{d^2 w}{dx^2} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 w_m \sin \frac{\pi x}{l}. \quad \text{Тогда максимальный изгибаемый}$$

момент (по средине пролета)

$$m_{I+I} = 2(1-n)\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1-n}{6n_2 w_m}}\right); \quad (23.41)$$

$$n_2 = \frac{N_2}{N_0}; \quad \bar{w}_m = \frac{w_m}{h},$$

где N_2 определяется по (23.3). Подставив это в (23.9), получим уравнение, из которого

$$\bar{w}_m = \frac{1-n_{xp}}{6n_{xp}}\sqrt{\frac{n_{xp}}{n_2}}; \quad n_{xp} = \frac{N_{xp}}{N_0}. \quad (23.42)$$

Теперь можно подставить (23.41) в (23.42) и (23.4), что даст

$$\bar{f}_n = \frac{1-n_{xp}}{2n_{xp}}\left(1 - \sqrt{\frac{n_{xp}}{n_2}}\right); \quad f_n = \frac{f_n}{h}. \quad (23.43)$$

Применимость этого результата ограничена условием

$n_p \leq m_E \leq m_{I+I}$. Подставив в это неравенство m_I и m_{I+I} из (23.36) с помощью (23.4) и (23.41)-(23.43), не-

трудно показать, что нижняя граница может быть достигнута только при $\bar{f}_n = 0$ и при этом $n_{xp} = n_2$, т.е. потерянная несущая способность в узловой стальной момент произойдет только при отсутствии начальной потери, и критическая нагрузка будет равна двусторонней по (23.2). Верхняя граница имеет ограничение

$$\bar{f}_n \leq \frac{1-n_{xp}}{2}. \quad (23.44)$$

Для $\bar{f}_n \approx \frac{1-n_{xp}}{2}$ и N_{xp} в оторванье происходит

двухсторонняя токуность. Для этого случая из (23.36)

$$m_E = m_p = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{E\Delta x}}\frac{f_n}{h}. \quad (23.45)$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получим

$$m_{I+I} = m_p = \frac{f}{128n_2^2}\sqrt{\frac{1}{m}};$$

$$\bar{w}_m = \frac{f}{6n_{xp}}\sqrt{\left(\frac{n_{xp}}{n_2}\right)^3}; \quad (23.46)$$

$$\bar{f}_n = \frac{f}{6n_{xp}}\left[m_p - \sqrt{\left(\frac{n_{xp}}{n_2}\right)^3}\right]$$

Если в последней положить $\tau_1 = \infty$, мы получим жестко-пластическое решение (см. § 12):

$$\bar{r}_n = \frac{r - n_{cr}^2}{4n_{cr}} \quad (23.17)$$

Здесь учтено (21.25). Результаты расчетов, выполненных с помощью данного решения, представлены на рис. 90 в виде графиков, характеризующих влияние начальной погрешки на крутильный момент (напряжение). Пунктирные прямые — экспериментальные данные для сталей с твердостью без ядра [118] иллюстрируют ограниченность возможности использования представлений об идеальном упругопластическом материале для исследования устойчивости. Стрелкообразные прямые — аналитическое решение из (23.17). Как видно из рисунка, оно имеет N_{cr} и может дать приемлемые результаты лишь для весьма малых степеней при больших начальных погрешках. Для упругих материалов имеет место соотношение N_{cr} из 5.45 [36]. Подробные рассмотренные вопросы изложены в [35], [115].

§ 24. Кручение. Упругопластический ядро несимметричного сечения

24.1. Упругопластическое кручение. Для круглого сечения и равномерного распределения касательных напряжений вдоль его радиуса рассмотренное выше (см. § 10). Но рис. 37, б для идеального упругопластического материала следует:

$$\tau = \begin{cases} \tau_r \frac{r}{a} & \text{при } 0 \leq r \leq a; \\ \tau_r & \text{при } a \leq r \leq \frac{D}{2}, \end{cases} \quad (24.1)$$

где a — радиус ядра упругой зоны (упругого ядра сечения).

Тогда крутильный момент

$$M_K = 2\pi \int_0^{\frac{D}{2}} \tau r^2 dr = M_{cr} - \frac{\pi \tau_r}{6} a^3, \quad (24.2)$$

где M_{cr} — предельный момент сечения при кручении из (10.1).

Для определения упругого ядра рассмотрим деформации в сечении. Определим радиальное смещение χ , как функцию, зависящую от радиуса сечения r и пропорциональную относительному углу закрутки:

$$\frac{d\theta}{dx} = \chi' = r \frac{d\theta}{dx}; \quad \text{соответственно}$$

в пределах упругого ядра $\tau = G r \frac{d\theta}{dx}$. На его границе

при $r = a$, $\tau = \tau_r$, откуда $a = \frac{\tau_r}{G \frac{d\theta}{dx}}$. Подставляя это в (24.2), найдем

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_r}{G} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi \tau_r} (M_{cr} - M_K)}} \quad (24.3)$$

При $M_{cr} - M_K \frac{d\theta}{dx} = \infty$ достигается предельное состояние. Интересно, что уже при $a = D/4$, $M_K = 0,988 M_{cr}$, т.е. состоянии, близкое к предельному, реализуется при относительно небольших значениях $\frac{d\theta}{dx}$.

Для некруглых сечений аналитическое решение жестко-упругопластического кручения связано с большими трудностями. Здесь показано представление в виде аналога Якоби, которая использована в § 10 применительно к предельному состоянию [36]. Чтобы уло-

тетворить уравнению равновесия $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0$.

можно воспользоваться функцией напряжений Ψ , связанной с напряжениями зависимостями типа (10.5). Ее выражения для упругих и пластических зон сечения Ψ_e и Ψ_p соответственно, будут равными: Ψ_p , как дано в § 10, представляет собой поверхность равного сдвига; Ψ_e , как известно из упругих решений, связывается уравнением, аналогичным уравнению напряжений изогнутой мембраны, изогнутой равномерным давлением.

На границе упругой и пластической зон из условия непрерывности напряжений $\frac{\partial \Psi_e}{\partial x} = \frac{\partial \Psi_p}{\partial x}$ и $\frac{\partial \Psi_e}{\partial y} = \frac{\partial \Psi_p}{\partial y}$.

т.е. $\Psi_e = \Psi_p + const$. Это позволяет прибегнуть к условному эквиваленту. Как контур рассматриваемого сечения считать некую «кромку» равного сдвига. Основание кривы достигают мембраной, которая нагружена равномерным давлением. В отдельных зонах мембрана будет приходить к «краю»; эти зоны по мере нагружения будут увеличиваться. Проекция этих зон на основание «кромки» совпадет с пластическими зонами сечения, в общем, ограниченной мембраной в этом основании, будет пропорциональна удвоенному крутящему моменту. На рис. 91 для примера показано развитие пластических зон при кручении стержня прямоугольного сечения. (Пластические зоны заштрихованы.)

24.2. Упругопластический изгиб балки переменной жесткости¹.

Рассмотрим упругопластический изгиб балки переменной жесткости переменной формы, сечение переменной, принятое выше в аналогичной задаче предельного равновесия (см. § 10); величина нагрузки на изогнутость q действует в плоскости стержня; наличием поперечных напряжений, возникающих в сечении можно пренебречь; материал — идеальный упругопластический. Форма профиля и обозначения показаны на рис. 40. Предполагается, что левый стержень профиля в плоскости ее наименьшей жесткости вращает за собой не-

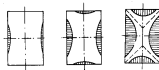


Рис. 91. Пластические зоны в сечении прямоугольного стержня при кручении.

посредством поперечного сечения балки, перпендикулярной оси балки, как показано на рис. 38.

Отметим переход от стержня к профилю в сечении балки эквивалентно: распределение поперечных усилий T и нормальных усилий N (рис. 32). Рассмотрим теперь левый стержень с присоединенным плоским или изогнутой балкой таврового профиля, нагруженной поперечной нагрузкой q и эксцентрично приложенными поперечными усилиями T . Суммарный изгибающий момент в сечении такой балки

$$M_{\Sigma c} = M(x) - Nh; \\ N = \int_0^T T dx + T_0, \quad (24.4)$$

где $M(x)$ — изгибающий момент от нагрузки q ; T_0 — значение T в начале координат. Для шарнирно-опертой балки, если начало координат расположить на опоре, $T_0 = 0$ и

$$\int_0^T T dx = 0.$$

Во избежание путаницы выключив в (24.4) предполо, что центр тяжести сечения рассматриваемого тавра расположен в присоединенном плоском. Это позволяет воспользоваться предельным уравнением упруго-пластического изгиба в форме (21.29):

¹ Настоящий раздел написан совместно с В.П.Колесниным.

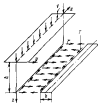


Рис. 92. Схема условий в балке со-симметричного профиля.

$$\kappa = \frac{\alpha_T}{Eh} \sqrt{\frac{1}{3(1-\mu_{Dz})}};$$

$$m_{Dz} = \frac{M_{Dz}}{M_{Ox}}; \quad (24.5)$$

$$M_{Ox} = \frac{1}{2} \sigma_T f_c h.$$

Если N в (24.4) определен, это уравнение позволяет определить профиль балки w , пользуясь, например, пластическим функцией (см. § 22). Прямые удлинения в стенке по длине ее соединения со свободным концом

$$\epsilon_A = \kappa h. \quad (24.6)$$

Рассмотрим теперь стенку в плоскости yOz от левых осей x и r . Приближенно возьмем его цилиндрическим, поскольку стенка — весьма тонкостенная прямоугольная пластина, ограничиваясь решением для балки-полоски, представленной на рис. 93, а. Это — классика с упругой деформацией конца, осложненной изгибной жест-



Рис. 93. Схема балки (а); эпюра изгибающих моментов (б) в осью условной балки (в).

костью обшивки. Для ее расчета можно прибегнуть к пластическим функциям (см. § 22). Упругая составляющая максимального прогиба

$$v_{em} = \frac{r h^3}{3 D_c} + \kappa M_m R, \quad \text{где } \kappa \text{ — коэффициент из-}$$

гибности обшивки; M_m — изгибаемый момент в заданной (рис. 93, б); D_c — цилиндрическая жесткость стенки.

Если считать, что изгиб пластин обшивки, к которой присоединены стенки, также цилиндрической, то, учитывая форму ее изгиба, приведенную на рис. 29, ее расчетную длину можно свести к длине-полоске, изгибаемой поперечным моментом M_m , с длиной пролета a , равной расстоянию между осями набора. Тогда

$$\kappa = \frac{a}{24 D_\sigma}. \quad \text{Учитывая, что } D_c = \frac{E \delta^3}{12 (1 - \mu^2)};$$

$$D_\sigma = \frac{E t^3}{12 (1 - \mu^2)}; \quad M_m = r h, \quad \text{сновам окончательно}$$

опишем

$$D_c v_{em} = \frac{1}{3} r h^3 \left(1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{a}{h} \cdot \frac{\delta^3}{t^3} \right). \quad (24.7)$$

Чтобы определить пластическую составляющую прогиба u_{pm} , рассмотрим условную балку, нагруженную распределенной нагрузкой с интенсивностью $M_p(x)$ (рис. 93, в). Здесь, как принято в графоаналитическом методе, введенная перекосами на противоположных концах балки, чтобы удовлетворить граничным условиям. Скорее всего, именно в § 22, найдем

$$D_c v_{pm} = M_{oc}' ch \left(\eta_1 - \frac{\rho}{h} \psi_1 \right), \quad (24.8)$$

где η_1 и ψ_1 — известные пластические функции по (22.9) для

тогда при $\alpha = 0$, определяемые по $M_{\alpha\alpha} =$

$$= -\frac{M_{\alpha\alpha}}{M_{\alpha\alpha}^0}; \quad M_{\alpha\alpha}^0 = \sigma_T \frac{\delta^2}{4}. \text{ Если пластический участок}$$

$$c = h \left(1 - \frac{M_{\alpha\alpha}}{M_{\alpha\alpha}^0}\right); \quad M_{\alpha\alpha}^0 = \sigma_T \frac{\delta^2}{8}. \text{ Полный прогиб}$$

$$\text{балки-стержня } U_{\alpha\alpha} = U_{\alpha\alpha}^0 + U_{\alpha\alpha}^1.$$

Изложенное выше, если считать, что на участке пластического материала стержня не возникает внешнего изгиба изгибной от изгиба в зоне пластичности. Также получаем прямую, исходящую из центра свободного конца (где разрывом пластических деформаций от изгиба стержня в плоскости xOz) направлена от изгиба в плоскости yOz максимальным, а изгиба в плоскости xOz минимальным (где разрывом пластических деформаций от изгиба стержня в плоскости yOz) максимальным направлена от ее изгиба в плоскости xOz). Это, однако, не позволяет использовать данное решение в случае, когда пластические деформации занимают большую часть профиля.

Обратимся к рассмотрению свободного конца. Его расчетная схема (см. рис. 43) — балка прямоугольного профиля, нагруженная распределенной поперечной нагрузкой интенсивностью q и сосредоточенной продольной нагрузкой P . Суммарный изгибающий момент в сечении здесь

$$M_{\alpha\alpha} = -M_{\alpha\alpha}(x) + N \frac{b}{2} \quad (24.8)$$

где $M_{\alpha\alpha}(x)$ — изгибающий момент от q .

Прогибы концов U могут быть найдены с использованием пластических функций (см. § 22), вычисленных с учетом $N \neq 0$. Продолжая удаление в конце не только, приходящей к стержню,

$$\epsilon_h = \epsilon_n + \kappa_n \frac{b}{2}, \quad (24.10)$$

где ϵ_n и κ_n определяются по (21.23) — (21.26), если заменить h на b , находить предельный момент как $M_0 = \sigma_T \frac{b\delta^2}{4}$, а в качестве M_{Σ} принять $M_{\Sigma n}$ по (24.8).

Теперь нужно записать условия совместности деформаций свободного конца и стержня. Для этого следует приравнять ϵ_h по (24.6) и (24.10) к прогибу $U_{\alpha\alpha}$ стержня по (24.7) и (24.8) и U -прогибу, определяемому из решения задачи:

$$\kappa h = \epsilon_n + \kappa_n \frac{b}{2}; \quad U_{\alpha\alpha} + U = U. \quad (24.11)$$

Совместное решение этих уравнений позволяет определить неизвестные условия γ и T . Решение возможно только численное с использованием метода последовательных приближений. В качестве начального приближения можно принять упрощенное решение. Для упрощенной задачи для стержня в (24.6) можно положить сразу $\kappa =$

$$\epsilon_h = \frac{M(x) - M_0}{EJ_c}; \quad J_c = \frac{J_c h^3}{3}. \quad (24.12)$$

Для конца по (24.10)

$$\epsilon_h = \frac{N}{EJ_n} + \frac{b}{2} \frac{d^2 U}{dx^2}. \quad (24.13)$$

Приравняв их, найдем

$$N = \frac{\frac{M(x)}{EJ_c} h - \frac{b}{2} \frac{d^2 U}{dx^2}}{\frac{1}{EJ_c} + \frac{1}{EJ_n}}. \quad (24.14)$$

Против плоски определяем по дифференциальному уравнению изгиба

$$E J_0 \frac{d^2 v}{dx^2} = -M_0(x) + N \frac{b}{2}; \quad J_0 = \frac{b^3 k}{12},$$

или

$$E J_0 \frac{d^2 v}{dx^2} = -r + \frac{d^2 N}{dx^2} \frac{b}{2}. \quad (24.15)$$

Подставим сюда r по (24.7) и N по (24.14), учитывая,

что $\frac{d^2 M}{dx^2} = q$. Тогда

$$E J_0 \frac{d^2 v}{dx^2} + k v = q_{\text{пр}}; \quad (24.16)$$

$$J_{\text{пр}} = \frac{J_0 b^2}{12} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{J_0}{J_c}} \right);$$

$$q_{\text{пр}} = q \frac{\frac{1}{2} + \frac{b}{k}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{J_0}{J_c}};$$

$$k = \frac{E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\delta}{h} \right)^3 \frac{1}{1 + \frac{1}{\delta} \frac{A}{h} \frac{\delta^3}{t^3}}. \quad (24.17)$$

Это — уравнение балки, лежащей на оплывшем упругом основании. Полученный результат совпадает с решением [25] и хорошо соответствует данным экспериментов (см. § 10) как для упругой, так и для начальной упругопластической стали.

Для расчетов в данной задаче при упруго-пластическом деформировании материала удобно применять метод, позволяющий увеличивать нагрузку q путем небольших приращений Δq с тем, чтобы результаты последующего шага линейно отклонялись от результатов предыдущего шага. Примерительно выполняемый упругий расчет с использованием известных решений для балки, лежащих на оплывшем упругом основании: для ряда сечений балки по (24.16) определяем v , N — по (24.14), r — по (24.15). Это позволяет выполнить независимый расчет отгиба и продольного полями как балки туперного профиля с свободным концом так балки прямоугольного профиля, определяем напряжения и их распределение, и подобрать значения начальной нагрузки q_T — отсеченное напряжение в балке первых пластических деформаций.

Для первого шага принимаем $q = q_T + \Delta q$ и соответственно $N = N_T + \Delta N$; $r = r_T + \Delta r$; N_T и r_T отсеченные N и r по упругому расчету при $q = q_T$; их приращения ΔN и Δr берут пропорционально Δq . По этим значениям N и r с помощью (24.4) — (24.6) определяем удлинение в стержне по линии ее соединения со свободным концом ϵ_A . Используя (24.9), по тем же N и r с помощью пластических функций выполняем расчет свободного конца и по (24.10) также определяем ϵ_A . Сравнимая последние с соответствующими значениями ϵ_A , вычисленными в стержне, найдем величину ϵ_A . Если эти величины совпадают, корректируем значение Δr , и расчет плоски повторяется. В случае несоответствия этим выполняем еще дополнительные корректировки Δr , пока величина ϵ_A не окажется близкой заданного уровня. В случае, если уже при первом расчете плоски величина ϵ_A окажется близкой, уменьшаем шаг нагрузки Δq , и расчет выполняем заново.

По найденным значениям r и известным значениям $N = N_T + \Delta N$ с помощью (24.7) и (24.10) выполняем прогибы стержня в плоскости ее максимальной жесткости v . Последнее позволяет с помощью свободного конца, полученным на предыдущем этапе расчете, и найденным величинами v . Если эти величины совпадают, корректируем значения ΔN и заново повторяем расчеты плоски с увеличением r . Такие вычисления

с корректировкой ΔN выполняется несколько раз, пока величина ψ не сойдется к малому заданному уровню. В случае, если величина ψ уже в первом расчете стала сойтись к малому, уменьшением шаг нагрузки Δq , а расчет выполняется только.

По завершению вычисления первого шага, когда найдем значения N и r , отвечающие принятому q (обозначим их N_1 , r_1 и q_1), вычисляем их приращение $\Delta q_1 = q_1 - q_T$;

$\Delta r_1 = r_1 - r_T$; $\Delta N_1 = N_1 - N_T$, а для второго шага в качестве исходных принимаем $q = q_1 + \Delta q_1$;

$r = r_1 + \Delta r_1$;

$N = N_1 + \Delta N_1$. Итерационная процедура для второго шага

не отличается от описанной выше. Это относится и к любому $(i+1)$ -му шагу. Для подсчета в качестве исходных принимаем

$q = q_i + \Delta q_i$; $r = r_i + \Delta r_i$; $N = N_i + \Delta N_i$,

где $\Delta q_i = q_i - q_{i-1}$; $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$; $\Delta N_i = N_i - N_{i-1}$.

Опыт выполнения расчетов показывает, что процесс корректировки r и N в каждом шаге быстро сходится, если Δq выбрано достаточно малым. Поверимеся, исходя из полученных численных деформаций качественно остается таким же, как в упругой стадии, лишь увеличивается скорость роста прогибов w и боковых отклонений u . Рассмотреть возможность ее роста при развитии пластических деформаций, когда нагрузка приближается к предельной, данное решение не позволяет, ибо в нем не учтена возможность появления и развития явления пластических волн в отходе от ее начала и ее окончания в обобщенного вида в плоскости деформации жесткости. Кроме того, при расчете рассмотренных выше малых деформаций совместности деформаций устойчивости плоской формы катба [36, 124].

Глава 7 УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПЛАСТИН

§ 36. Уравнения упругопластического катаба пластины

§ 36.1. Уравнения катба гибких пластин. Наиболее распространенные у нас в стране методы формы дифференциальных уравнений упругопластического катба пластины, предложенные А.А.Ивановым [31], который основан на теории деформации (см. § 3). Материал предполагается несжимаемым: условие усадки по (3.9)

$\varepsilon_z = 0$. Используя равенство Киргофа - Лава и незначительность напряжений и деформаций от действия перпендикулярных сил (см. § 18, где такие приемы уравнений равновесия и совместности деформаций пластины) приходим к тому, что материал пластины находится в плоском напряженном состоянии, когда $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ и $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, а в силу несовместности материалов $\varepsilon_z = -(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$.

Учитывая это, можно представить функциональные уравнения теории деформаций (3.13) для элемента пластины, параллельного срединной плоскости и отстоящего от нее на z , в следующей форме:

$$\sigma_x = \frac{4G_1}{3\epsilon_1} \left(\epsilon_x^{(2)} + \frac{1}{2} \epsilon_y^{(2)} \right); \sigma_y = \frac{4G_1}{3\epsilon_1} \left(\epsilon_y^{(2)} + \frac{1}{2} \epsilon_x^{(2)} \right);$$

$$\tau_{xy} = \frac{G_1}{3\epsilon_1} \gamma_{xy}^{(2)}. \quad (25.1)$$

Натянутость, сжатие и деформации по (2.14) и (3.12) здесь приобретает вид

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} ; \quad (25.2)$$

$$\varepsilon_z = \sqrt{\left(\varepsilon_x^{(2)}\right)^2 + \varepsilon_x^{(2)} \varepsilon_y^{(2)} + \left(\varepsilon_y^{(2)}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(\gamma_{xy}^{(2)}\right)^2} . \quad (25.3)$$

Если в (25.3) компоненты деформаций выразить через углы наклона в кривых срединной плоскости элементов по (18.1), получим

$$\varepsilon_z = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_z^2 - 2|z| P_{zx} + z^2 P_x} ; \quad (25.4)$$

$$\left. \begin{aligned} P_z &= \varepsilon_z^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 ; \\ P_{zx} &= \varepsilon_x \kappa_x + \varepsilon_y \kappa_y + \frac{1}{2} \varepsilon_x \kappa_y + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon_y \kappa_x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \kappa_{xy} ; \\ P_x &= \kappa_x^2 + \kappa_x \kappa_y + \kappa_y^2 + \kappa_{xy}^2 . \end{aligned} \right\} \quad (25.5)$$

На (25.4) можно получить отношение от срединной плоскости слоя, где $\varepsilon_z = 0$:

$$z_0 = - \frac{P_{zx}}{P_x} . \quad (25.6)$$

Подставляя (25.1) в (18.4) с учетом (18.1), можно вычислить усилия и моменты, действующие на элемент элемента:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{4}{3} \left[\left(\varepsilon_x + \frac{1}{2} \varepsilon_y \right) J_1 + \left(\kappa_x + \frac{1}{2} \kappa_y \right) J_2 \right] ; \\ N_y &= \frac{4}{3} \left[\left(\varepsilon_y + \frac{1}{2} \varepsilon_x \right) J_1 + \left(\kappa_y + \frac{1}{2} \kappa_x \right) J_2 \right] ; \\ S &= \frac{1}{3} \left(\gamma_{xy} J_1 + 2 \kappa_{xy} J_2 \right) ; \\ M_x &= \frac{4}{3} \left[\left(\varepsilon_x + \frac{1}{2} \varepsilon_y \right) J_2 + \left(\kappa_x + \frac{1}{2} \kappa_y \right) J_3 \right] ; \\ M_y &= \frac{4}{3} \left[\left(\varepsilon_y + \frac{1}{2} \varepsilon_x \right) J_2 + \left(\kappa_y + \frac{1}{2} \kappa_x \right) J_3 \right] ; \\ H &= \frac{1}{3} \left(\gamma_{xy} J_2 + 2 \kappa_{xy} J_3 \right) ; \end{aligned} \right\} \quad (25.7)$$

$$J_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial i}{\partial z} dz ;$$

$$J_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial i}{\partial z} z dz ; \quad (25.8)$$

$$J_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial i}{\partial z} z^2 dz .$$

Напомним, что ε_z и ε_t в последних являются по толщине пластины. Подстановка (25.7) в уравнение равновесия (18.5) вместе с уравнением compatibility деформаций (18.3) дает уравнение упругопластического режима пластины, являющееся обобщением уравнений Кармана для упругой среды [128].

25.3. Упрощенный метод жесткой пластины. В геометрически нелинейном анализе, когда прогибы пластины малы, остаток малым, но пластины наряду с поперечной нагрузкой нагружены продольными силами, задача упрощается: в уравнениях равновесия — последние уравнения (18.5), обращаются в нуль члены, содержащие кривизны κ_x , κ_y и κ_{xy} , а в уравнениях совместности (18.5) соответственно должны быть отброшены члены, содержащие ω . Тогда получается в первом для уравнения (18.3) аналогичное напряженное состояние срединной плоскости (плоская задача), а третье уравнение (18.5) — закон жесткой пластины. В упругой среде эти же задачи могут решаться независимо, а результаты решений потом могут суммироваться в соответствии с принципом независимости деформаций сдв. Для упругопластической среды это неправомерно, ибо условия в срединной плоскости и моменты здесь не являются независимыми; они связаны между собой уравнениями (25.7).

При методе жесткой пластины, когда продольных сил нет, совместность деформаций по (25.4) приобретает вид

$$\varepsilon_t = \frac{z|z|}{\sqrt{3}} \sqrt{P_M}, \quad (25.8)$$

исходя из (25.7)

$$M_x = \left(\kappa_x + \frac{1}{2} \kappa_y \right) J(P_M);$$

$$M_y = \left(\kappa_y + \frac{1}{2} \kappa_x \right) J(P_M); \quad (25.10)$$

$$H = \frac{1}{2} \kappa_{xy} J(P_M)$$

где $J(P_M) = \frac{4}{9} J_0$. Вычисление последнего также может быть упрощено. Из (25.8) найдем

$$|z| = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{P_M}}; \quad z^2 = \frac{3}{4} \frac{\varepsilon_t^2}{P_M};$$

$$dz = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d\varepsilon_t}{\sqrt{P_M}}.$$

Подставляя это в (25.8) и проводя замену переменных, получим

$$J(P_M) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{P_M}} \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \sigma(\varepsilon_t) d\varepsilon_t = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{P_M}} \int_0^{\varepsilon_0} \sigma(\varepsilon_t) d\varepsilon_t, \quad (25.11)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{h}{\sqrt{3}} \sqrt{P_M}, \quad (25.12)$$

где ε_0 — интенсивность деформаций по (25.8) при $z = \pm h/2$. Выражение $J(P_M)$ по (25.11) сводится к вычислению интеграла по диаграмме напряжений при растяжении материала, выраженная черта ε_0 и ε_t . Если для пластичной материала используется форма зависимости (1.4)

$$\sigma_t = E \varepsilon_t (1 - \omega); \quad \omega = \omega(\varepsilon_t), \quad (25.13)$$

то

$$J(P_M) = D (1 - \Omega^2); \quad \Omega = \frac{3}{\varepsilon_0^2} \int_0^{\varepsilon_0} \omega \varepsilon_t^2 d\varepsilon_t, \quad (25.14)$$

где $D = \frac{E h^3}{9}$ — пластическая жесткость упругой пластины из недеформируемого материала, когда коэффициент поперечных деформаций $\mu^1 = 0,5$ (см. § 2).

При вычислении Ω по (25.14) интегрирование ведется непосредственно по контуру $\Phi_i - \varepsilon_i$. Например, для упруго-пластического материала с линейным упрочнением

$$\Omega = \left(1 - \frac{E_p}{E}\right) \left(1 - \frac{3\sigma_T}{2E\varepsilon_{1T}}\right),$$

где E_0 - модуль упрочнения.

Теперь можно подставить моменты по (25.10) в третье уравнение равновесия (18.5). Разрешенная одномерная задача по (18.2), имеет:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \\ & = \frac{q}{D} - \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\Omega \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] - \\ & - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\Omega \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\Omega \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (25.15)$$

По сравнению с уравнением метода упругих пластин здесь в правой части появилось при члене, содержащем Ω , которая является переменным коэффициентом (зависит от x и y).

25.3. Метод решения упругопластической задачи. Для решения упругопластических задач в рамках теории деформаций пригодна большинство методов, используемых для решения упругих задач при соответствующем их обосновании. Наиболее широкое распространение, однако, получили методы упругих решений и в, в частности, вариационные методы и специальные численные методы. Основным из методов упругих решений состоит в linearизации уравнений упругопластической задачи путем ее сведения к упругой задаче с фиктивными параметрами. В зависимости от того, что

принимается в качестве фиктивных параметров, этот метод может быть построен в разных вариантах. Наиболее известны такие его варианты, как метод переменных параметров упругости, метод фиктивных жесткостей и метод пополнительных нагрузок (см. ниже в § 26).

Вариационные методы используют общие теоремы, основанные на принципе возможных перемещений. Такие (см. § 27) рассмотрен вариационный метод, основанный на использовании минимума полной энергии. Другие вариационные методы см. в [34, 35, 113] и др.

Численные методы мы рассмотрим в особую группу, хотя при использовании любого метода получить аналитическое решение упругопластической задачи в форме, пригодной для практического применения, удается не всегда, возможно только численное ее решение. Здесь речь идет об универсальных методах, основанных на использовании возможности ЭВМ [105, 136]. Расчет пластин в упругопластической стали описан в обзорной [4, 74, 94, 125, 140].

§ 26. Метод упругих решений

26.1. Метод переменных параметров упругости. Основная идея метода переменных параметров упругости состоит в том, что расчет конструкции из упруго-пластического материала на деформацию тех же сил, но из упругого материала с фиктивными параметрами упругости: фиктивным модулем упругости E_0 и фиктивным коэффициентом Пуассона μ_0 . При этом выполняется требование эквивалентности: деформации в переменной и заданной упругопластической конструкции и рассматриваемой упругой конструкции должны быть одинаковы.

Проявляем в обзор виде условия, при которых выполняется требование эквивалентности. Дифференциальные уравнения равновесия (2.1), как указывалось в § 2, получаются исходя из рассмотрения статического равновесия бесконечно малого элемента сплошной изотропной среды и, следовательно, не зависят от меха-

материала свойства материала. Уравнения Коши (2.5) и их следствие — уравнения неразрывности деформаций (2.6) получаются только исходя из рассмотрения геометрии деформаций и перемещений такого же бесконечно малого элемента и поэтому тоже не зависят от механических свойств материала. Геометрия исходной упругопластической конструкции и рассматриваемой упругой конструкции, внешние нагрузки, действующие на них, одинаковы, значит, одинаковы и граничные условия.

Таким образом, требование однозначности будет удовлетворено, если фактические уравнения, связывающие напряжения и деформации в соответствующих конструкциях, также будут связывающими. Запишем обобщенный закон Гука (3.8) в следующем виде:

$$\sigma_x - \sigma_0 = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_0); \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \quad (3.11)$$

где σ_0 и ε_0 — средние напряжения и средние удлинения по

$$(2.9) \text{ и } (3.7); \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)} - \text{модуль упругости при сдвиге.}$$

Если совместить (3.11) с фактическими уравнениями теории деформаций в форме (3.13), то очевидно, что для будут совпадать, если в (3.11) модуль G заменить фактическим модулем

$$G_F = \frac{\sigma_F}{3\varepsilon_F}. \quad (3.12)$$

Допишем (3.11) законом Гука для изотенной области (3.6)

$$\sigma_0 = \frac{E}{1-2\mu} \varepsilon_0, \text{ а записав аналогичное выражение для}$$

упругопластического материала

$$\sigma_0 = \frac{E_F}{1-2\mu_F} \varepsilon_0. \quad (3.13)$$

Применив σ_0 для упругого и упругопластического материалов, а также требуя $G = G_F$, получим два уравнения, из которых

$$E_F = \frac{\frac{\sigma_F}{\varepsilon_F}}{1 - \frac{1-2\mu}{3E} \frac{\sigma_F}{\varepsilon_F}}; \quad \mu_F = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{3E} \frac{\sigma_F}{\varepsilon_F}}{1 + \frac{1-2\mu}{E} \frac{\sigma_F}{\varepsilon_F}}. \quad (3.14)$$

Вычисление по (3.14) фактически E_F и μ_F в зависимости действительных E и μ обеспечивает удовлетворение требованиям однозначности. В случае вязкого материала, как это принято при выводе уравнений вязкого течения в § 2Б,

$$E_F = 3G_F = \frac{\sigma_F}{\varepsilon_F}; \quad \mu_F = \mu = \frac{1}{2}. \quad (3.15)$$

Как видно из изложенного, рассматриваемый метод приводит к необходимости решения другой задачи, когда параметры упругости (упругие константы) E и μ в разных точках конструкции различны и зависят от величины деформации. Сказанное, естественно, относится только к областям, где в упругопластической конструкции имеют место пластические деформации. Реализация метода практически всегда требует использования метода последовательных приближений. Процедура вычисления может быть следующей:

1. В первом приближении решается упругая задача для действительных значений параметров упругости ($E_F = E$ и $\mu_F = \mu$), вычисляются деформации во всех точках конструкции и соответственно интенсивность деформаций ε (по (3.12)).

2. Моменты инерции $G_{ij} = G_i$ для принятой конструкции растяжки, по найденному ε_{ij} определяются G_{ij} и вычисляют G_{ij}/ε_{ij} . Например, если согласоваться (25.43), то $G_{ij}/\varepsilon_{ij} = E [1 - \omega(\varepsilon_{ij})]$.

3. По найденным G_{ij}/ε_{ij} в области, где $G_{ij}/\varepsilon_{ij} < 3E$, вычисляются с помощью (25.4) параметры упругости второго приближения L_{02} и μ_{02} с их использованием выполняется упругий расчет конструкции, определяются ε_{i2} и т.д. (Подробнее с рассмотренным методом можно ознакомиться в [29, 82].)

25.2. Метод фактических жесткостей. Основным идеей метода фактических жесткостей состоит в том, что расчет конструкции из упругопластического материала на деформации заданных величин или заменяется расчетом на деформации так же как конструкция из упругого материала, но с фактическими характеристиками жесткости. Требованиям эквивалентности остаются такие же, как в предыдущем случае. Однако, в этом случае его выполнение начало на примере одного случая (см. § 22).

При данном методе, как известно, жесткость балки характеризуется двумя параметрами: EJ — жесткостью при растяжении и EJ_{ϕ} — изгибной жесткостью. Для заданной балки, если вести ее расчет в упругой стадии $EJ_{\phi} = N$; $EJ_{\phi} = M_{\Sigma}$. Для упругой балки с фактическими характеристиками жесткости соотношения

$$EJ_{\phi}(x) = N; \quad (26.5)$$

$$EJ_{\phi}(x) = M_{\Sigma}.$$

Обратясь к дифференциальным уравнениям упругоупругого изгиба заданной балки (24.7), потребуем, чтобы у нее в балке с фактическими характеристиками жесткости балки означенными N , M_{Σ} , ε и χ . Тогда, применяя формулы (24.7) и (26.6), получим

$$F_{\phi}(x) = F - F^* - S^* \frac{\chi}{L}; \quad (26.7)$$

$$J_{\phi}(x) = J - J^* - S^* \frac{\varepsilon}{L}.$$

Таким образом, рассмотренный метод приводит к исследованию упругого расчета конструкции с фактическими характеристиками жесткости, которые различны в разных точках конструкции и зависят от величин деформаций. Реализация метода требует использования метода последовательных приближений, процедура которого принципиально мало отличается от рассмотренной выше применительно к методу переменных параметров упругости.

В общем случае для упругой конструкции связь между обобщенными напряжениями G_k и обобщенными деформациями q_k (см. § 2) можно представить как

$$G_k = \sum_i G_{ki} q_i; \quad (26.8)$$

$$G_{ki} = \text{const}; \quad k = 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2, \dots$$

Аналогично для упругоупругой конструкции

$$G_k = \sum_i G_{ki} q_i; \quad (26.9)$$

$$\Phi_{ki} = \Phi_{ki}(q_1, q_2, \dots).$$

Требования эквивалентности выполняются, если для упругой конструкции с фактическими характеристиками жесткости

$$G_{ki}^{(\phi)} = \Phi_{ki}; \quad k = 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2, \dots \quad (26.10)$$

Отметим, что метод фактических напряжений для тонкостенных конструкций (отверстий, наплавки, оболочек) обладает определенными преимуществами по сравнению с методом переменных параметров упругости. Здесь в отличие от последнего не нужно вносить коррективы в характеристики напряженного состояния каждой точки, а можно оперировать характеристическими сечениями, что проще. Например, при извлечении штифта болта, когда $N = \varepsilon = 0$, по (26.7)

$$J_F(x) = J - J^*, \text{ т.е. в рамках метода фактических напряжений}$$

требуется рассмотреть упругий балок переменного сечения, метод расчета которой хорошо известен (например см. в [17]).

26.3. Метод действительных нагрузок. Основным идея метода действительных нагрузок состоит в том, что расчет конструкции из упругопластического материала на действие заданных внешних сил заменяется расчетом той же конструкции из упругого материала, но на действие фактически возникших сил. Требуемая эквивалентность сохраняется таким же, как и выше. Рассмотрим общую схему удовлетворения этому требованию.

Для упругой конструкции (тела) заданной формы при известном уровне ее опорных величин внешние нагрузки q однозначно определяют напряжения деформации и перемещения во всех точках конструкции. Обозначим σ_{ij} , ε_{ij} - соответствующие компоненты тензора напряжений и деформаций T_0 и T_ε , см.

§ 2; $i = x, y, z$; $j = x, y, z$; при $i = j$

σ_{ii} и ε_{ii} - соответственно нормальные напряжения и удлинения; при $i \neq j$ σ_{ij} и ε_{ij} - соответственно касательные напряжения и сдвиги. Если рассмотреть в обратном порядке, когда известны σ_{ij} во всех точках тела, в том числе и на его поверхности $\sigma_{ij}^{(0)}$, то последние однозначно определяются внутренними нагрузками, приложенными к поверхности тела q_i . Сила инерции $\sigma_{ij}^{(0)}$ и q_i выражает граничные условия в напряжениях. (Влияние объемных сил мы не рассматриваем.) Пусть тензор нем известным значением ε_{ij} для рассматриваемого тела из упруго-пластического состояния и на нем были фактически возникли нагрузки q_i и q_j , которые являются то же ε_{ij} в том же теле, если считать его упругим. Схема расчета будет следующей: по заданным ε_{ij} с помощью закона Гука определяются σ_{ij} , вычисляются $\sigma_{ij}^{(0)}$, а по последним отыскиваются соответствующие им внутренние нагрузки q_i и q_j . Равенство $q_i - q_i = q_j$ представляет собой то же действительные нагрузки, которыми нужно нагружать тело (наружу с q_i), чтобы получить заданные ε_{ij} .

Таким образом, метод действительных нагрузок прикладывает к необходимости упругого расчета конструкции на действительные нагрузки, распределенные по ее поверхности конструкции может оказаться достаточно сложным. В § 22 этот метод использовался для упругопластического расчета болта; ниже иллюстрируется его применение для расчета шпунта. Этот вариант метода упругих решений (в таком виде он предложен А.А.Ильиным) получил название шпунта распределения. Подробнее см. [34].

26.4. О возможности метода упругих решений. Второй метод. Нужно отметить, что сложность процесса последовательных приближений в методе упругих решений не является [8, 100]. Тем не менее мы широко и успешно пользуемся. Считаем возможным, что процесс хорошо сходится, когда пластические деформации малы и имеют порядок упругих деформаций; сложность незначительна уменьшается, когда пластические деформации значительны. Процесс сходится лучше, если материал имеет существенное упрочнение, а сходится хуже при использовании деформаций со значительной пластичности материалов. Он обычно применяется редко для продольного состояния или в тех случаях, когда исчерпание первой способности происходит вследствие потери работоспособности второго ряда. Это трудно осмыслить.

Настоящий раздел написан совместно с В.А.Трубиным.

Известно, что сходимость процессов последовательных приближений существенно зависит от выбора начального решения (в котором процесс должен сходиться) и первого приближения. В методе уругих решений в качестве первого приближения часто применяется решение уругого расчета конструкции на действии внешней системы сил. Если полевые конструкции в уруго-пластической стадии мало отличаются от ее поведения в уругом состоянии, точное решение в первом приближении оказывается достаточно близким. Если решение полевых конструкций в уругой и уруго-пластической стадиях существенно, соответствующие известным размерам между первым приближением и точным решением.

В предельном состоянии полевые конструкции качественно отличаются от ее поведения в уругой стадии. Следовательно ограничена применимость области применения метода уругих решений. По-этому, факт нелинейности процесса последовательных приближений может служить приближенным критерием достижения конструкцией несущей способности, или ее близости к ней.

Очевидно, что процесс последовательных приближений не является непрерывной аппроксимацией метода уругих решений. Здесь может использоваться и итерационный метод. Если последовательные полевые конструкции в процессе нагружения в результате этого процесса не достигают малых отклонений (малы), то на каждой стадии нагружения приращение напряжений, деформаций и перемещений будет достаточно малым, чтобы можно было отклониться от последовательных приближений. В качестве исходных данных фактических параметров метода уругих решений (в любом его варианте) применяются их значения, вычисленные на предыдущем шаге.

Начиная метод в сочетании с методом уругих решений позволяет более надежно оценить несущую способность конструкции [70]. Кроме того, данный метод позволяет одновременно учесть и геометрическую нелинейность. На каждом шаге решения геометрическая нелинейность с заданными начальными перемещениями (напряжениями, деформациями) рассчитывается полевая оболочка. Приращение перемещений, полученное на данном шаге, суммируется с исходными и вводится в качестве заданных начальных перемещений в расчет для следующего шага. Естественно, возможны различные комбинации методов последовательных приближений и итерационного метода.

Подробнее см. в [49, 106, 108] и др.

28.5. Уругоэластический изгиб листовой пластины. Переходим к получению более уранилищ (28.15) в форме

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q + q'; \quad (28.17)$$

$$\frac{q'}{D} = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\Omega \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\Omega \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\Omega \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]. \quad (28.18)$$

Здесь q' - интенсивность дополнительной поперечной нагрузки, которую нужно приложить к уругой пластине, чтобы получить прогиб, совпадающий с прогибом уругоэластической пластины.

Поскольку (28.17) описывает уругой геометрически линейный изгиб, можно найти разложение прогиба от нагрузки $q = w_0 + w_p$ и от нагрузки $q' = w_p'$. Затем просуммировать или $w = w_0 + w_p$. Если нагрузка пластины уруга (см. гл. 6), то w_0 - величина известна заранее при данной нагрузке, а w_p - собственно прогиб. Вычисления w_p существенно упрощаются, если на рассматриваемой пластине есть уругое решение для случая ее нагрузки сосредоточенной силой P в произвольной точке с координатами ξ, η :

$$w_p = \frac{P}{D} \Gamma(x, y, \xi, \eta), \quad (28.19)$$

где Γ - известная функция Грина.

Тогда, прогиб от $P = q' d\xi d\eta$ и найдемся применением независимости действия сил, методом

$$w_p = \frac{1}{D} \iint q'(\xi, \eta) \Gamma(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (28.20)$$

Далее задачу можно решить численно. В [51] также показано, что подстановка q' по (26,13) позволяет преобразовать (26,14) к виду

$$w_p = \iint \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \right) \right] \Omega d\xi d\eta. \quad (26,15)$$

Процесс последовательных приближений здесь заканчивается в следующем:

1. Решением уравнения волчка о моменте (26,11) при $q' = 0$, определяется $w = w_0$ и по (18,2) x_x, x_y, x_{xy} .

2. По (26,5) вычисляются P_M , по (26,12) — ε_i , по (26,13) и (26,14) — Ω и по (26,12) определяется q' второго приближения.

3. Для найденного q' по (26,14) или (26,15) определяется w_p второго приближения. Затем вычисляются x_x, x_y, x_{xy} и расчет повторяется.

26.6. Упругодеформационный расчет рабной системы. Согласно [124], приемы расчета такие (26,7) и (26,8). Подставляя с момента (26,13) можно представить в виде

$$J_1 = E \int_{-h/2}^{h/2} dx - E \int_{-h/2}^{h/2} \omega dz = Eh + \Delta J_1; \\ \Delta J_1 = -E \int_{-h/2}^{h/2} \omega dz. \quad (26,16)$$

Аналогично

$$J_2 = \Delta J_2; \quad \Delta J_2 = -E \int_{-h/2}^{h/2} \omega x dz; \quad (26,17)$$

$$J_3 = \frac{Eh^3}{12} + \Delta J_3; \quad \Delta J_3 = -E \int_{-h/2}^{h/2} \omega x^2 dz. \quad (26,18)$$

Подставляя (26,16)–(26,18) в (25,7), получим

$$\left. \begin{aligned} N_x &= N_{x0} + N_{xp}; \\ N_y &= N_{y0} + N_{yp}; \\ S &= S_0 + S_p; \\ M_x &= M_{x0} + M_{xp}; \quad M_y = M_{y0} + M_{yp}; \\ H &= H_0 + H_p, \end{aligned} \right\} \quad (26,19)$$

или

$$\left. \begin{aligned} N_{x0} &= B \left(\varepsilon_x + \frac{1}{2} \varepsilon_y \right); \quad N_{y0} = B \left(\varepsilon_y + \frac{1}{2} \varepsilon_x \right); \\ S_0 &= \frac{B}{4} \gamma_{xy}; \\ M_{x0} &= D \left(x_x + \frac{1}{2} x_y \right); \quad M_{y0} = D \left(x_y + \frac{1}{2} x_x \right); \\ H_0 &= \frac{D}{2} x_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (26,20)$$

в N_{xp} , ..., M_{xp} выписаны из (25.7), если им соответственно заменить N_x , ..., M_x в месте J_1 , ..., подставить ΔJ_1 , ..., $B = \frac{4}{9} E h$ - цилиндрическая жесткость при растяжении, а $D = \frac{1}{9} E h^3$ - цилиндрическая жесткость при изгибе упругой пластины из несжимаемого материала.

Если из (26.20) выразить компоненты деформаций и подставить в выражения для N_{xp} , ..., M_{xp} , последние примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} N_{xp} &= \frac{N_{xs}}{Eh} \Delta J_1 + \frac{12 M_{xs}}{Eh^3} \Delta J_2; \\ N_{yp} &= \frac{N_{ys}}{Eh} \Delta J_1 + \frac{12 M_{ys}}{Eh^3} \Delta J_2; \\ S_p &= \frac{S_s}{Eh} \Delta J_1 + \frac{12 M_s}{Eh^3} \Delta J_2; \\ M_{xp} &= \frac{N_{xs}}{Eh} \Delta J_2 + \frac{12 M_{xs}}{Eh^3} \Delta J_3; \\ M_{yp} &= \frac{N_{ys}}{Eh} \Delta J_2 + \frac{12 M_{ys}}{Eh^3} \Delta J_3; \\ M_p &= \frac{S_s}{Eh} \Delta J_2 + \frac{12 M_s}{Eh^3} \Delta J_3. \end{aligned} \right\} \quad (26.21)$$

Формулы (26.20) представляют собой выражения для усилий и моментов в упругой пластине при $\mu' = 0,5$ [126], а, следовательно, N_{xp} , ..., M_{xp} , ..., S_p , ... - упругие соответствующие усилия и моменты; тогда соответствующим N_{xp} , ..., M_{xp} , ...,

эластическое соответствующее усилие и моменты. Введем функцию «напряжений» F :

$$N_x = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad N_y = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad S = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (26.22)$$

Тогда первые два уравнения равновесия (18.5) удовлетворятся тождественно. Подстановка (26.19)–(26.22) в третье уравнение равновесия (18.5) и уравнение неразрывности деформаций (18.3) преобразует их к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) &= q + q' + \\ &+ h \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]; \\ \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} &= E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \\ &\left. - \frac{\partial^2 \varepsilon'_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon'_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma'_{xy}}{\partial x \partial y} \right], \end{aligned} \right\} \quad (26.23)$$

где q' - интенсивность контактной осевой нагрузки, которую нужно приложить к упругой пластине; ε'_x , ε'_y и

γ'_{xy} - контактные деформации срединной плоскости упругой пластины, возникающие как следствие действия в ней контактных продольных сил;

$$\left. \begin{aligned} q' &= \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2}; \\ \varepsilon'_x &= \frac{1}{Eh} \left(N_{xx} - \frac{1}{2} N_{yy} \right); \\ \varepsilon'_y &= \frac{1}{Eh} \left(N_{yy} - \frac{1}{2} N_{xx} \right); \\ \gamma'_{xy} &= \frac{3}{Eh} S_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (26.24)$$

Процесс последовательных приближений здесь аналогичен рассмотренному в предыдущей главе:

1. Решая уравн. Лапласа с посылки (26.23) при $q' = \varepsilon'_x = \varepsilon'_y = \gamma'_{xy} = 0$, определяются функции w и функции изгибаемой F ; по (18.2) вычисляются M_{xx} , M_{xy} и M_{yy} , по (26.22) — N_{xx} , N_{xy} и S_{xy} , по (26.20) — ε_x , ε_y и γ_{xy} .

2. По найденным компонентам деформаций по (25.5) определяются P_x , P'_x и P_{xx} , по (25.4) — ε_1 ; по кривизнам $\varepsilon_1 = \varepsilon'_1$ определяются ϕ_1 и по (25.53) ϕ_2 по толщине пластины; по (26.16)–(26.18) вычисляются интегралы ΔJ_1 , ΔJ_2 и ΔJ_3 ; по (26.21) — N_{xx} , ..., M_{xx} , ..., по (26.24) — q' и ε'_x , ε'_y и γ'_{xy} .

3. Вновь решая систему (26.23) с учетом найденных значений q' , ε'_x , ε'_y и γ'_{xy} , определяются w и F второго приближения, и расчет повторяется.

Аналогичное решение для пластины с начальной погондой (прогиб ободки) показано в [124]. Наличие w_0 — средняя начальная погонда эквивалентна (26.23) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \\ + h \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) = \\ = q + q' + h \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right); \\ \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - E \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = \\ = E \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon'_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon'_y}{\partial y^2} - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 \gamma'_{xy}}{\partial x \partial y} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (26.25)$$

§ 27. Вращающиеся диски

27.1. Общие понятия, связанные со вращением пластинчатых дисков. Ввиду (гл.2-6) начало возможных переменных широко использовалось для решения пластичностных задач в форме классического метода теории предельного равновесия в сочетании со или экстремальных теорем этой теории. В настоящем параграфе рассматриваются вопросы применения начала возможных переменных в упругопластических задачах.

Начало возможных перемещений формулируется так (см. также § 4)

$$\delta(U - W) = 0 \quad (27.1)$$

т.е. сумма приращений работы внешних сил U и внутренних сил W системы, находящейся в равновесии, на возможных перемещениях равна нулю. Приращение работы внешних сил, приложенных к телу, не считая сил инерции, может быть представлено в виде

$$\delta U = \int_V (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dV + \int_S (q_x \delta u + q_y \delta v + q_z \delta w) dS. \quad (27.2)$$

Напомним: X , Y и Z — проекции unit-ов объемной силы на координатные оси; q_x , q_y и q_z — проекции unit-ов поверхностной силы на координатные оси; u , v и w — компоненты перемещений; V и S — объем и площадь поверхности тела.

Сопоставляя приращение работы внутренних сил

$$\delta W = \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV. \quad (27.3)$$

принципу теории, основанной на единстве возможных перемещений.

Теорема Клапейрона для упругоупругого состояния материала обобщается следующим образом:

$$U = \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV. \quad (27.4)$$

Для упругого состояния выражение в скобках, как известно, представляет собой удельную потенциальную энергию деформаций — ра-

боту внутренних сил, что приводит теорему Клапейрона к обычной форме $U = 2W$.

Принцип минимума полной энергии является прямым следствием начала возможных перемещений. Для полной энергии такоо получается

$$\mathcal{E} = W - U, \quad (27.5)$$

и по (27.1)

$$\delta \mathcal{E} = 0. \quad (27.6)$$

Это условие экстремума $\mathcal{E}$. Можно показать, используя как второй вариации $\mathcal{E}$, что этот экстремум является минимумом. Таким образом, действительная форма равновесия тела отличается от всех возможных форм тем, что для нее полная энергия принимает минимальное значение. Принцип полной энергии в (27.6) получается в результате приращений перемещений и деформаций. Таким образом, (27.6) означает условие действительное поле напряжений среди всех kinematically возможных, т.е. любой переменной, удовлетворяющей граничным условиям.

Принцип минимума дополнительной работы рассматривает статически возможные поля напряжений, т.е. поля напряжений, удовлетворяющие уравнениям равновесия и граничным условиям, а позволяет выбрать среди них действительное поле напряжений. Удельная дополнительная работа (дополнительная работа, связанная с единицей объема) может быть выражена через линейность напряжений и деформаций как

$$R_D = 3 \frac{1-2\nu}{2E} \sigma_D^2 + \int_V \epsilon_i d\sigma_i. \quad (27.7)$$

Здесь σ_D — среднее напряжение по (2.3). В кинематической форме можно представить удельную работу внутренних сил, называемую потенциальной деформаций



Рис. 94. Диаграмма $\sigma - \epsilon$.

$$W_0 = 3 \frac{1-2\nu}{2E} \sigma_0^2 + \int_0^{\epsilon_0} \sigma_i d\epsilon_i. \quad (27,8)$$

Первый член в (27,7) и (27,8) — потенциальная энергия деформации объема, которая определяется законом Гука (15,30). Второй член в (27,8) представляет собой работу внутренних сил, связанную с изменением формы тела. На диаграмме $\sigma_i - \epsilon_i$ она представляется собой площадь, ограниченную кривой $\sigma_i - \epsilon_i$ и осью ϵ_i .

На рис. 94 эта площадь заштрихована вертикальными линиями. Соответственно второй член (27,7) на диаграмме $\sigma_i - \epsilon_i$ — площадь, ограниченная кривой $\sigma_i - \epsilon_i$ и осью σ_i . На рис. 94 она заштрихована горизонтальными линиями. Потенциальная работа для любого тела

$$R = \int R_0 dV. \quad (27,9)$$

Принцип минимума диссипативной работы гласит: из всех статически возможных напряженных состояний только для истинного напряженного состояния диссипативная работа всего тела имеет минимальное значение. В упругом состоянии $R = W$ и равен потенциальной энергии деформаций, а принцип минимума диссипативной энергии основан на соотношении между минимальной работой

Теорема Коши также устанавливает равенство δ_i точки приложения сил P_i и направления их действия к диссипативной работе

$$\delta_i = \frac{\partial R}{\partial P_i}. \quad (27,10)$$

Изложена теорема, как и все предыдущее рассмотрение упругостатических задач, основана на теории деформаций. С помощью этого теорема можно сформулировать в [42, 43].

27.2. Принцип минимума полной энергии в случае упругопластического течения пластин. Вариационный метод. Рассмотрим упругопластический лист пластин из несжимаемого материала. Рассмотрим пластину в (27,5) выберем левый член в выражении работы внутренних сил на единицу площади срезающей плоскости пластины можно записать как

$$\delta W_{oc} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i \delta \epsilon_i dz. \quad \text{Выражение } \delta \epsilon_i \text{ можно записать по (25,4), проинтегрировав поперек его в квадрат:}$$

$$2\epsilon_i \delta \epsilon_i = \frac{4}{3} (\delta P_x - 2|x| \delta P_{xx} + x^2 \delta P_{xx}). \quad (27,11)$$

Выражая остаток $\delta \epsilon_i$, получим

$$\delta W_{oc} = \frac{2}{3} (J_1 \delta P_x - 2J_2 \delta P_{xx} + J_3 \delta P_{xx}). \quad (27,12)$$

Здесь J_1 , J_2 и J_3 вычисляются по (25,8).

Тогда вариационная работа внутренних сил для всей пластины

$$\delta W = \frac{2}{3} \iint_S (J_1 \delta P_x - 2J_2 \delta P_x x + J_3 \delta P_x) dx dy, \quad (27.13)$$

где интегрирование выполняется по всей площади срединной плоскости S . Вариационная работа внешних сил

$$\delta U = \iint_S q \delta w dx dy. \quad (27.14)$$

Приравняв (27.13) и (27.14) в соответствии с принципом минимума полной энергии (27.6) или началом возможных перемещений (27.1) получим вариационное уравнение, решение которого является решением задачи. Этот метод принято называть **вариационным**.

Из условий кинематик $\delta P_x = \delta P_{ix} = 0$ и выражение (27.13) приобретает вид

$$\delta W = \frac{1}{2} \iint_S J(P_x) \delta P_x dx dy. \quad (27.15)$$

27.3. Поэлементный метод Рунда. Для решения полученного вариационного уравнения может быть использован метод Рунда. Например, для жесткой пластины прогиб задается в виде ряда:

$$w = \sum_i \alpha_i \varphi_i(x, y), \quad (27.16)$$

где $\varphi_i(x, y)$ — фундаментальные функции, удовлетворяющие

условиям закрепления пластины на опорном контуре; α_i — произвольные параметры, подлежащие определению.

По (25.5)

$$\begin{aligned} \delta P_x &= 2\alpha_x \delta \alpha_x + \alpha_x \delta \alpha_y + \alpha_y \delta \alpha_x + \\ &+ 2\alpha_y \delta \alpha_y + 2\alpha_{xy} \delta \alpha_{xy}. \end{aligned} \quad (27.17)$$

По (18.2) и (27.16)

$$\delta \alpha_x = -\delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -\frac{1}{i} \frac{\partial^2 \varphi_i(x, y)}{\partial x^2} \delta \alpha_i.$$

Тогда δP_x по (27.17) можно представить в виде

$$\delta P_x = \sum_i P_i \delta \alpha_i; \quad (27.18)$$

$$\begin{aligned} P_i = - \left[2\alpha_x \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + 2\alpha_y \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} + \alpha_x \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + \alpha_y \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + 2\alpha_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} \right]. \end{aligned} \quad (27.19)$$

Здесь в виде $\varphi_i(x, y)$ обозначены аргументы x и y сокращено. Подставляя (27.18) в (27.15) и приравняв его (27.14) с учетом (27.16), получим рассмотренное вариационное уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_S J(P_x) \sum_i P_i \delta \alpha_i dx dy = \\ = \iint_S q \sum_i \varphi_i \delta \alpha_i dx dy. \end{aligned}$$

Если учесть независимость переменных $\delta \alpha_i$, последнее приводит к системе уравнений

$$\frac{1}{2} \iint_S J(P_{\alpha}) P_i dx dy = \\ = \iint_S q \varphi_i dx dy; \quad i = 1, 2, \dots \quad (27.20)$$

Если также учесть выражение для $J(P_{\alpha})$ по (26.14) и подставить в (27.20) значения по (18.2) и (27.16), окончательно получим

$$\sum_k A_{ik} \alpha_k = B_i + C_i, \quad (27.21)$$

где

$$A_{ik} = D \iint_S \left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \varphi_k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \varphi_k}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^3 \varphi_k}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} \right) dx dy; \\ B_i = \iint_S q \varphi_i dx dy; \quad C_i = \frac{D}{2} \iint_S P_i \Omega dx dy. \quad (27.22)$$

Решение системы уравнений (27.21) требует использования метода последовательных приближений:

1. В первом приближении пренебрегается отсутствием пластических деформаций, $\Omega = C_i = 0$; решается упругая задача, определяется α_i и ω .

2. По найденному ω определяются кривые, по (26.5) вычисляются P_{α} , по (25.12) — ε_{ij} , по (26.14) — Ω .

3. Найденные Ω позволяют по (27.21) определить значения C_i второго приближения и повторить расчет.

В отнесении независимости процессов сдвигов и сжатия, рассмотренное выше в отношении метода упругих решений (§ 26), трудность решения существенно зависит от числа членов ряда (27.16). Если ограничить один член ряда $\omega = \alpha_1 \varphi_1(x, y)$, то α_1 сразу можно определить по (27.21)

$$\alpha_1 = \frac{B_1}{A_{11} - C_1}; \quad (27.23)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= D \iint_S \Phi_1 dx dy; \quad B_1 = \iint_S q \varphi_1 dx dy; \\ C_1 &= \iint_S \Phi_1 \Omega dx dy; \\ \Phi_1 &= \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (27.24)$$

В ряде случаев (задача пластического деформации стержня) хорошие результаты получаются, если φ_1 выбирается по упруго-

го решения [54] (см. также ниже). Метод, близкий к изложенному, подробно рассмотрен в [125]; учитывается скачкообразность материала.

27.4. Приближенный метод А.А. Власова. Для приближенного решения задачи неразрывными методами, когда пластические деформации относительно малы и форма профилей пластин в упруго-пластической стадии мало отличается по сравнению с упругой стадией, удобный способ предложенный в [54]. Иллюстрируется решение упругой задачи:

$$w_0 = \frac{P_0 a^4}{D} \bar{w}(x, y);$$

$$q = P \bar{q}(x, y), \quad (27.25)$$

где a — характерный размер пластины; P — параметр, характеризующий величину нагрузки; $\bar{w}(x, y)$ и $\bar{q}(x, y)$ — функции, характеризующие соответственно форму профиля и форму нагрузки.

Для упруго-пластической стадии профиля задается в виде

$$w = \frac{\alpha^4}{D} f \bar{w}(x, y), \quad (27.26)$$

Величина f , пока неизвестна. Тогда по (25.5)

$$P_x = \frac{\alpha^4}{D^2} f^2 \bar{P}_x;$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_x = & \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \alpha^4. \end{aligned} \quad (27.27)$$

По (27.26) и (27.27)

$$\delta w = \frac{\alpha^4}{D} \bar{w} \delta f; \quad \delta P_x = 2 \frac{\alpha^4}{D^2} f \bar{P}_x \delta f. \quad (27.28)$$

Подстановка последних в (27.14), (27.15) и приращение их:

$$\begin{aligned} P \iint_S q \bar{w} dx dy - \\ - \frac{f}{D} \iint_S P_x dx dy. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (25.14)

$$P = f \frac{\iint_S \bar{P}_x dx dy - \iint_S \Omega \bar{P}_x dx dy}{\iint_S \bar{q} \bar{w} dx dy}. \quad (27.29)$$

Для упругой стадии $\Omega = 0$ и $P = f$. Тогда по (27.29)

$$\frac{\iint_S \bar{P}_x dx dy}{\iint_S \bar{q} \bar{w} dx dy} = 1. \quad (27.30)$$

Согласуем здесь величину не зависит от f . Поэтому (27.29) можно представить как

$$P = f \left(1 - \frac{\iint_S \Omega \bar{P}_x dx dy}{\iint_S \bar{q} \bar{w} dx dy} \right). \quad (27.31)$$

В качестве примера рассмотрим прямоугольную

параллельно впертую пластину со стороны
напряжения a и b , нагруженную равномерно распре-
деленной нагрузкой интенсивности q . Тогда в (27,36) $\bar{y} = \bar{x}$
и $\bar{P} = q$. Согласно [447], найдем w в форме

$$\bar{w} = \beta \cos \frac{\pi \bar{x}}{2} \cos \frac{\pi \nu \bar{y}}{2};$$

$$\nu = a/b; \quad \bar{x} = x/a; \quad \bar{y} = y/b. \quad (27,32)$$

Тогда по (27,27)

$$\bar{P}_K = \frac{\beta^2 \pi^2}{64} R_K; \quad (27,33)$$

$$R_K = (1 + \nu^2)^2 (1 + \cos \pi \bar{x} \cdot \cos \pi \nu \bar{y}) +$$

$$+ (1 + \nu^4) (\cos \pi \bar{x} + \cos \pi \nu \bar{y}). \quad (27,34)$$

Подставим (27,32) в (27,33) и (27,30), найдем значение β ,
решая тем самым уравнение задачи для заданной формы прогиба. По-
лучается

$$\beta = \frac{256}{\pi^2 (1 + \nu^2)^2}. \quad (27,35)$$

С помощью (27,27) и (27,35) по (26,43) найдем выражение для
интенсивности деформаций на поверхности пластины

$$\bar{\epsilon}_i = \frac{\epsilon_i l}{\epsilon_T} = \frac{32 \tau h a^2 \sqrt{R_K}}{\sqrt{3} \pi^2 D (1 + \nu^2)^2 \epsilon_T}; \quad (27,36)$$

$$\epsilon_T = G_T / E.$$

Для центра пластины при $\bar{x} = \bar{y} = 0$ $\bar{\epsilon}_i = \bar{\epsilon}_{im}$ — макси-
мум:

$$\bar{\epsilon}_{im} = \alpha f; \quad (27,37)$$

$$\alpha = \frac{576 a^2 \sqrt{1 + \nu^2 + \nu^4}}{\sqrt{3} \pi^2 G_T h^2 (1 + \nu^2)^2}.$$

Тогда

$$\bar{\epsilon}_i = \frac{\bar{\epsilon}_{im} \sqrt{R_K}}{2 \sqrt{1 + \nu^2 + \nu^4}}. \quad (27,38)$$

Найдем $\bar{w}$ по (27,32), вычислив интеграл $\iint \bar{w} d\bar{x} d\bar{y}$

и подставим результат в (27,31) вместо αf из (27,37). Полу-
чим выражение для нагрузки:

$$q = \frac{\bar{\epsilon}_{im}}{\alpha} \left(1 - \frac{\nu}{1 + \nu^2} \iint_{\bar{\delta}}^{\bar{y}_0} R_K d\bar{x} d\bar{y} \right). \quad (27,39)$$

Если подставить теперь $\bar{w}$ по (27,32) и q по (27,39) в
(27,36), можно найти максимальный прогиб пластины $w = w_m$
при $\bar{x} = \bar{y} = 0$ в функции от максимальной интенсивности де-
формаций $\bar{\epsilon}_{im}$:

$$w_m = \frac{4 \sqrt{3} a^2 h^2 G_T}{9 \pi^2 D \sqrt{1 + \nu^2 + \nu^4}} \bar{\epsilon}_{im}. \quad (27,40)$$

Аналогичные построения удобно вести в следующем порядке: задается минимальный предел плотности $\omega_{\min}$ и на (27.40) определяется $\bar{\varepsilon}_{(m)}$; по (27.38) вычисляются $\bar{\varepsilon}_i$ для логотической зоны плотности; по (25.14) $\bar{\varepsilon}_2$ и по (27.38) нагрузка $\bar{q}$, соответствующая заданному пределу $\omega_{\min}$.

В [51, 517] приведены решения для ряда других плотностей. Аналогичные решения могут быть получены на основе принципа минимума потенциальной работы, если известна плотность напряжений [54]. Теорема Коши также для трехмерного случая плотности напряжений в [44]. Известно также много других работ.

Глава 6

МИКРОПЛАСТИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ СЛУЖАЮТ КОНСТРУКЦИИ ЗА ПРЕДЕЛОМ ПРУГОСТИ

§ 26. Поведение конструкции

при многократном нагружении

26.1. Основные особенности работы конструкции при многократном нагружении. Поведение конструкции, работающей в пластической области, при повторном нагружении на все меньшие нагрузки может быть заметно иным по сравнению с первым нагружением. Это связано с особенностями деформирования конструкции при разгрузке после нагружения на предел упругости. После разгрузки в конструкции все еще имеют место остаточные деформации и остаточные напряжения, и если напряженное состояние при нагружении было неупругим, появляются также остаточные напряжения.

Остаточные деформации могут повлечь за собой упрочнение материала. Тогда при повторном нагружении для возникновения пластических деформаций, например того же значения, потребуется более высокие напряжения. Остаточные напряжения приводят к изменению геометрии конструкции, и, если этот фактор существен для работы конструкции, он может оказать влияние на ее поведение при повторном нагружении. Остаточные напряжения, суммируясь с напряжением, возникающим от действия внешней нагрузки при повторном нагружении, что приводит к изменению напряженного состояния конструкции по сравнению с первым нагружением и таким образом влияют на ее работу.

Много определяет характер деформирования материала конструкции при разгрузке. Не всегда разгрузка сопровождается изменением деформаций упругого характера — реализуется упругая разгрузка. Возможны случаи, когда процесс

уменьшения внешней нагрузки сопостав с увеличением в развитии пластических деформаций — нау пругая разгрузка. В этом случае весьма существенным явлением пластических деформаций, возникающим в процессе разгрузки, является то, что пластические деформации при нагружении, могут при разгрузке развиться в эластические деформации обратного знака.

Если нагружение конструкции многократным, остаточные деформации в последующем и последующем нагружении могут оказаться незначительными. Сущностью этого явления является следующее: развитие работы конструкции при многократном и многократном действии внешней нагрузки.

Можно выделить три типа поведения конструкции при многократном нагружении: приспособляемость, прогрессирующее разрушение и переменная текучесть. При приспособляемости имеет место, если заданная нагрузка (внешняя нагрузка), которая при многократном нагружении вызывает пластические деформирования конструкции, после конечного числа циклов нагружения вызывает в конструкции только упругие деформации. Конструкция приспособляется к заданной нагрузке.

Приспособляемость может реализоваться уже после первого цикла нагружения, например при циклическом поперечном изгибе пластины из эластичного упругопластичного материала. Здесь приспособляемость обеспечивается благодаря остаточным напряжениям, возникающим в поперечном сечении после разгрузки. Это видно на рис. 95. Загруженные пластины (рис. 95, а) получают как результат сложения упругих напряжений (рис. 95, б) и изменений напряжений в результате разгрузки (рис. 95, в). Последнее получается законом Гука.

При повторном нагружении, если предположить, что возникшие при этом деформации упруги, упругие напряжения останутся в предельном состоянии на рис. 95, в, но будет иметь противоположные знаки. Суммирование напряжений с упругой остаточными напряжениями приведет к упругим на рис. 95, г, означающей первую разгрузку. Следовательно, предположение об упругом характере повторного нагружения не привело к какому-либо противоречию.

Если конструкция к заданной нагрузке не приспособляется, возможно либо последовательное увеличение пластических деформаций с ростом числа циклов нагружения — прогрессирующее разрушение либо возникновение в каком-либо из циклов и далее в тех же циклах конструкции последовательного пластического

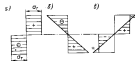


Рис. 95. Загруженные нормальные упругопластичные материалы в сечении были нагружены упругим профилем: а — в первом нагружении; б — в первом нагружении; в — в первом нагружении; г — в первом нагружении.

деформаций разных знаков — переменная текучесть. В этом случае частоты пластических деформаций многократных: при прогрессирующем нагружении — вследствие постепенного изменения деформаций и напряжений, при переменной текучести — в результате эластичной усталости.

При многократном нагружении может возникнуть существенным расхождением между из-за несоответствия зависимости $\sigma - \epsilon$ при разгрузке и повторном нагружении (состояние гистерезиса на диаграмме растяжения); при многократном нагружении существенна роль эффекта Баушингера (см. § 4).

§ 2.2. Теорема приспособляемости. Для оценки поведения конструкции при многократном нагружении в общем случае необходимо знать ее первоначальное, нагруженное и деформированное состояние при разгрузке, повторном нагружении и т.д. Знать достаточно — достаточно, если предположить, что материал является упругопластичным, а возникающие напряжения малы по сравнению с размерами конструкции (геометрически подобны).

Эта теорема характерна для так называемой теории приспособляемости. Если предположить, что конструкция при последующих нагружениях зависит только от остаточных напряжений; остаточные деформации малы, так как нет упрочнения, а значения остаточных напряжений пропорциональны, то эта теорема является верной. Не учитываются и другие возможные эффекты. Поэтому возможность теории приспособляемости в такой постановке ограничена. В то же время она позволяет в общем виде сформулировать условия, при которых конструкция обеспечит приспособляемость. Она известна как теорема приспособляемости.

Теорема Баяна-Молана (статическая теорема приспособляемости) состоит в следующем: приспособляемость конструкции обеспечит, если имеет место следующее условие: для суммирования напряжений $\sigma_{ij}^{(n)}$ для которых $\sigma_{ij}^{(n)}$

$$\sigma_{ij}^{(T)} \geq \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}, \quad (28.1)$$

где σ_{ij} - компоненты тензора напряжений (§ 2, 26); $\sigma_{ij}^{(T)}$ - значения σ_{ij} , удовлетворяющие условиям пластичности; $\sigma_{ij}^{(0)}$ - значения σ_{ij} , возникающие в конструкции от действия заданной системы внешних сил, если ее материал является упругим. Если из возможных полей $\sigma_{ij}^{(T)}$ является поле остаточных напряжений в конструкции после полной разгрузки, поскольку возможно или отсутствует, остаточные напряжения должны быть самоуравновешены.

Теорема Коитера (эквивалентная теорема приспособленности) гласит: приспособленность конструкции не существует, если может быть найдено какое угодно число произвольных пластических деформаций, отличающих компонентные значения полей напряжений первоначальной, при котором приращение работы внешних сил будет больше приращения энергии рассеивания. Эквивалентное теорем см., например, в [60, 66].

Приведение теоремы во многом является обобщением эквивалентных теорем теории предельного равновесия (см. § 4) на случай многогранного нагружения. На их основе можно получить приближенные решения задачи, определяющие нагруженности системы нагружения, в которых конструкция может приспособиться: использованные теоремы Бейли-Мэллая дают лучшее приближение этих нагрузок, теорема Коитера - соответственно верхнюю оценку.

28.3. Приспособленность сечения балки при совместном действии изгибающего момента и продольной силы. Рассмотрим балку, нагруженную в различных отрезках системы нагрузками, когда возможно нагружение в целом возмущается от нуля до максимума и уменьшается до нуля [79]. Предполагается, что после полной разгрузки в сечении могут действовать остаточные продольная сила $N_{ост}$ и остаточный изгибающий момент $M_{ост}$, что характерно для статически

неопределенных балок. По теореме Бейли-Мэллая приспособленность сечения обеспечивается, если во всех его точках выполняются условия

$$|\sigma_x + \sigma_y| \leq \sigma_T. \quad (28.2)$$

Здесь напряжения в точках сечения представляются в виде суммы двух составляющих: σ_0 - статические напряжения, которые можно рассмотреть как постоянные напряжения в целом, но меняющиеся в процессе нагружения и разгрузки; σ_y - соответствующие переменные усилия в целом.

Означая, что наибольшие абсолютные значения $\sigma_y - \sigma_y^{max}$ и σ_y^{min} достигаются в конце нагружения, формулу (28.2) можно переписать соответственно для растянутой и сжатой частей сечения как

$$\begin{aligned} \sigma_0 + \sigma_y^{max} &= \sigma_T; \\ \sigma_0 + \sigma_y^{min} &= -\sigma_T \end{aligned} \quad (28.3)$$

Задачу состоит в определении наибольших значений N и M в целом, при действии которых обеспечивается приспособленность сечения, - выявить границу приспособленности. Можно предположить

$$\begin{aligned} N &= N_{ост} + N_y^{max}; \\ M &= M_{ост} + M_y^{max}, \end{aligned} \quad (28.4)$$

где N_y^{max} и M_y^{max} - переменные составляющие N и M .

Из N_y^{max} и M_y^{max} упрощен расчетом определяются σ_y^{max}

и $\sigma_y^{\min}$. Если считать $N_y^{\max}$ и $M_y^{\max}$ известными, то

$$\sigma_{or} = \max \left\{ |\sigma_N + \sigma_M|; |\sigma_N|; |\sigma_M| \right\}; \quad (28,5)$$

$$\sigma_N = N_y^{\max} / F; \quad \sigma_M = \frac{M_y^{\max}}{J} z;$$

σ_{or} — абсолютное обжатие $\sigma_y^{\max}$ и $\sigma_y^{\min}$; F и J — площадь и момент инерции сечения.

На рис. 96, в представлены эпюры σ_{or} по высоте сечения как абсолютный эпюр σ_N , σ_M и $\sigma_N + \sigma_M$.

Значения N_{act} и M_{act} связаны с остаточными напряжениями σ_0 условиями равновесия внешних и внутренних сил в сечении в эпюре растяжения, когда $\sigma_y = 0$:

$$N_{act} = \int \sigma_0 dF; \quad (28,6)$$

$$M_{act} = \int \sigma_0 z dF.$$

Для определения неизвестных $N_y^{\max}$ и $M_y^{\max}$ можно из уравнения σ_0 по (28,5) и подставить их в (28,6):



Рис. 96. Эпюры нормальных напряжений:
а — эпюра σ_N ;
б — эпюра σ_M ;
в — эпюра $\sigma_N + \sigma_M$;
г — эпюра σ_{or}

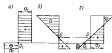


Рис. 97. Эпюры нормальных напряжений в сечении балки:
а — в конце нагружения (в предельном состоянии); б — для упругой релаксации; в — остаточные напряжения.

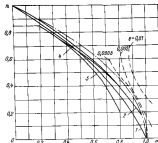


Рис. 98. Безразмерные предельные моменты в прокатных балках.

1 — $\mu_{act} = \mu_{act} = 0,2$; 2 — $\mu_{act} = \mu_{act} = 0,2$; 3 — $\mu_{act} = \mu_{act} = 0,2$;
4 — $\mu_{act} = 0,2$; 5 — $\mu_{act} = 0,2$.

$$\left. \begin{aligned} N_{act} &= \int_{F_+} (\sigma_T - \sigma_y^{max}) dF + \int_{F_-} (-\sigma_T - \sigma_y^{min}) dF; \\ M_{act} &= \int_{F_+} (\sigma_T - \sigma_y^{max}) z dF + \int_{F_-} (-\sigma_T - \sigma_y^{min}) z dF, \end{aligned} \right\} \quad (28.7)$$

где F_+ и F_- — соответственно растянутая и сжатая части площади сечения в конце нагружения.

Выполнив интегрирование, получим

$$N_{act} = N_T - N_{ar}; \quad M_{act} = M_T - M_{ar}, \quad (28.8)$$

$$N_T = \sigma_T (F_+ - F_-); \quad M_T = \sigma_T \left(\int_{F_+} z dF - \int_{F_-} z dF \right); \quad (28.9)$$

$$N_{ar} = \int_F \sigma_{ar} dF; \quad M_{ar} = \int_F \sigma_{ar} z dF. \quad (28.10)$$

Различаясь (28.8) с помощью (28.4) и (28.10), можно переписать последние N_y^{max} и M_y^{max} .

352

28.4. Приспособленность балки при поперечном изгибе. При поперечном изгибе $\sigma_N = 0$ и $N = N_{ar} = N_{act} = 0$.

Тогда из (28.8) $N_T = 0$ и по (28.9) $F_+ = F_-$, что совпадает с (4.3) и соответствует предельному состоянию сечения при симметричном нагружении. Из этого следует, что M_T по (28.9) совпадает с M_0 по (4.2) — предельным моментом сечения. Приспособленность $\sigma_N = 0$, $\sigma_{ar} = \sigma_N$. Тогда по (28.5) и (28.10)

$$M_{ar} = M_y^{max}, \quad \text{в результате по (28.8) } M_{act} = M_0 - M_y^{max},$$

и после подстановки приспособленности отсюда M_y^{max} в (28.4), получим $M = M_0$.

Следовательно, при поперечном изгибе граница приспособленности совпадает с предельным состоянием сечения и имеет криволинейный характер нагружения теоретически в рамках принятой допущений не снижает несущей способности балки.

Следует, однако, что у профилей, нейтральная ось которых не является осью симметрии, в частности у несимметричного двутавра (такого же для балок брусчатого лабра, приспособленные в сечении), приспособленность достигается не после первого цикла нагружения. Из рис. 99 видно, что приспособленность от упругого характера деформации себя не определяет: на участке OB , оставшиеся нейтральными сменяются балкой σ_T , и здесь при разгрузке будут иметь место перемены пластических деформаций, сменяемых по знаку с пластическими деформациями при нагружении. Этот эффект — следствие несимметричного положения нейтральной оси сечения в упругом состоянии (точка O) и в предельном состоянии (точка O_1), характерное для несимметричного двутавра.

Таким образом, в первом цикле нагружения балок несимметричного двутаврового профиля имеют место неупругая разгрузка, рост (накопление) остаточных деформаций и остаточных прогибов. Нужно, однако, отметить, что упруг

отки эффектов практически мало меняет результаты, а проявляется они при действии загибающих моментов, близких к критическим, когда точность оценки деформаций и перемещений при изгибах материала в рамках теории об изгибной жесткости материала вообще резко падает. Поэтому в практических расчетах по основным неэластичным основаниям в большинстве случаев неэластичный характер деформации можно пренебречь.

28.5. Изгибная жесткость плиты под произвольным изгибом с учетом действия прогиба $\bar{z}$. Из формулы-записи элементной ширины, если обозначить через $\frac{N}{2}$ среднюю поперечную силу в плите нагруженной от средней нагрузки, можно конкретизировать выражение (28.3) для σ_{xy} :

$$\sigma_{xy} = \frac{N \frac{m_{xy}}{2}}{h} = \sigma_T m_{xy}; \quad (28.11)$$

$$\sigma_{xz} = \tau_2 \frac{M \frac{m_{xz}}{2}}{h} z = \frac{3}{2} \sigma_T m_{xz} \bar{z},$$

тогда

$$\begin{aligned} m_{xy} &= \frac{N \frac{m_{xy}}{2}}{N_0}; \\ m_{xz} &= \frac{M \frac{m_{xz}}{2}}{M_0}; \\ \bar{z} &= \frac{2z}{h}. \end{aligned} \quad (28.12)$$

$$\frac{\sigma_{xz}}{\sigma_T} = \begin{cases} \frac{3}{2} m_{xz} \bar{z} & \text{при } -1 \leq \bar{z} \leq -\beta; \\ m_{xy} & \text{при } -\beta \leq \bar{z} \leq 0; \\ m_{xz} + \frac{3}{2} m_{xz} \bar{z} & \text{при } 0 \leq \bar{z} \leq 1. \end{cases} \quad (28.13)$$

Это позволяет вычислять интегралы в (28.10). По (28.9) $n_x = N_x/N_0 = \beta$; $m_{xz} = M_x/M_0 = 1 - \beta^2$. После подстановки в (28.8), если $n_{oxt} = N_{oxt}/N_0$ и $m_{oxt} = M_{oxt}/M_0$, получим систему двух уравнений относительно n_y и m_y :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} n_y (1 + \beta) + \frac{3}{2} m_y \beta^2 &= \beta - n_{oxt}; \\ \frac{1}{2} n_y (1 - \beta^2) + \frac{1}{2} m_y (2 - \beta^2) &= 1 - \beta^2 - m_{oxt}. \end{aligned} \right\} \quad (28.14)$$

Решив эту систему, находим по (28.4) m_x и n_x , отбрасывая граничные присоединения.

$$\left. \begin{aligned} m_x = \frac{M}{M_0} &= 2 \frac{(1 + n_{oxt})(1 - \beta) - m_{oxt}}{2 - \beta^2 - \frac{3}{4} \beta^2 (1 - \beta)}; \\ n_x = \frac{N}{N_0} &= \frac{2(\beta - n_{oxt}) - \frac{3}{2}(m - m_{oxt})\beta^2}{1 + \beta} + n_{oxt}. \end{aligned} \right\} \quad (28.15)$$

Зависимость (20,15) дает связь между моментами M и L в параметрической форме (при параметре играет β). Результаты расчетов¹ представлены на рис.30. Кривая-конструкция линии отечественного предельного состояния при симметричной нагрузке (краевая текучесть). Кривая 1 - границы приспособляемости при $M_{ост} = M_{ост} = 0$. Показали заметно не совпадает с первой; небольшое расхождение составляет 5%, что является следствием использования пологих кривых для уругой стали и предельного состояния на срез продольной связи, как и при симметричной нагрузке несимметричных нагрузок (см. рис.37). Из рисунка следует, что при наличии пластических деформаций, вызванных при нагружении, имеет тот же знак, что и пластические деформации при нагружении. Следовательно, циклическое действие M и N , значения которых лежат между кривой текучести и границей приспособляемости, ведут за собой прогрессирующее разрушение.

Наличие в сечении остаточных продольных сил и изгибающих моментов $N_{ост}$ и $M_{ост}$, совпадающих по знаку с N и M и имея напряжения, уменьшает расхождение между кривой текучести и границей приспособляемости; если знаки $N_{ост}$ и $M_{ост}$, N и M не совпадают - ситуация обратная. На рис.30 это изображается кривыми 2 и 3. Случай, когда $N_{ост} > 0$, а $M_{ост} < 0$ при $N > 0$ и $M > 0$ - промежуточный. Так, кривая 4 на рисунке ($N_{ост} = 0,2$, $M_{ост} = -0,2$) близка к кривой 2 при малых значениях N и M и сливается с кривой 3 при больших значениях N . Однако остается опасность возникновения прогрессирующего разрушения в листовых соединениях, испытывающих поперечную нагрузку, на примере загиба балки-полоски, жестко заделанной по концам и имеющей распор. Начиная рассмотрение с остаточных изгибающих моментов и продольных сил. У балки из идеального упругопластического материала, нагруженной равномерной распределенной нагрузкой q , по известным

предельного состояния (концы нагружены) $M(l/2) = M(0) = \frac{q_0 l^2}{16}$, где $M(l/2)$ и $M(0)$ - изгибающие моменты соответственно посредине пролета и в заделке.

Если предположить нагрузку уругой, то для вычисления максимальных изгибающих моментов в результате расчета достаточно выполнить уругой расчет той же балки на нагрузку q_0 с предельно допустимым наклоном. Как известно, $\Delta M(l/2) = -\frac{q_0 l^2}{24}$;

$$\Delta M(0) = \frac{q_0 l^2}{12}. \text{ Тогда соответственно изгибающие моменты}$$

$$M_{ост}(l/2) = \frac{3q_0 l^2}{48}; \quad M_{ост}(0) = -\frac{3q_0 l^2}{48}. \text{ Учитывая, что предельная нагрузка балки } q_0 = \frac{16M_0}{l^2}, \text{ в безразмерной форме для средин пролета } m_{ост} = 1/3; \text{ для заделки } m_{ост} = -1/3.$$

Наличие продольной силы в сечении снижает величину момента, воспринимаемого этим сечением. Продольная сила, рассматриваемая на срез распора, вообще снижает изгибающие моменты в балке, и этот эффект проявляется тем сильнее, чем больше протяженность. Последнее есть проявление геометрической нелинейности явления, рассмотренной в предыдущем параграфе при многократном нагружении рассмотрены в следующем параграфе.

Чтобы оценить величину остаточных продольных сил, нужно было бы рассмотреть балку с учетом распора при нагружении и разрушении. Состояние здесь не описано, поэтому в § 30, рассмотрев характерные значения $N_{ост}$ результатами экспериментов [130]. Испытывались стальные полые прямоугольные сечения толщиной 0,23-0,41 мм, шириной 20 мм, пролетом 300 мм; на обечайки делался жесткий распор; потерянная нагрузка - циклическая возмущающая сосредоточенная сила P ; приложения посредине пролета. Величины $N_{ост}$ для одной из балок приведены на рис.39 (точки - результаты экспериментов). Как видно из рисунка, $N_{ост}$ может достигать больших величин. В связи с распором балки $N_{ост}$

¹ В выполнении расчетов принимал участие В.Л.Водунов.



Рис. 98. Расчетные предельные силы в балке с раствором.
1 - теоретический расчет; 2 - скорректированный расчет, учитывающий влияние остаточных напряжений на результаты измерения деформаций в конце нагружения.

и N в конце нагружения.

Составили нагрузки серии $N_{\text{рас}}$ и $N_{\text{ост}}$ с результатами анализа, представленным на рис. 98, можно сделать вывод, что наличие в пластинках после разрушения остаточных продольных сил и изгибающих моментов существенно снижает связь между кривой текучести и границей приспособляемости на рис. 98 и соответственно снижает опасность развития прогрессирующего разрушения.

Попытаемся оценить величину упрочнения. Простейший вариант - упрочнительный материал с линейным упрочнением. Предполагая, что разрушение будет связано упрочной и приспособляемостью обеспечивается после первого цикла нагружения, если пластинка нейтральной оси не имеет смещения Δ при нагружении (такая Δ на рис. 97, d) не выйдет за пределы упрочного слоя сечения в конце нагружения. Границу приспособляемости, полученную исходя из этого условия с использованием равенств § 22, представлен на рис. 98 пунктирными линиями. Она разделяется на участки статистического модуля упрочнения $\sigma = E_0/E$. Значения $\sigma = 0,0008 \div 0,01$ практически полностью перекрывают диапазон значений этой величины при аппроксимации диаграмм растяжения реальными кривыми сталей. На рисунке видно, что величина упрочнения смещает границу приспособляемости за пределы области, ограниченной кривой текучести при однократном нагружении.

Применение данных в целом свидетельствует о том, что восстановление прогрессирующего разрушения в пластинках обшивки от многократного действия поперечной нагрузки практически невозможно, и, таким, образом, в эксперименте не обнаруживается нали-

вной остаточной пластичности при многократном нагружении (см. например, [7, 9, 103, 104] и др.). Поэтому в приведенных расчетах пластинки обшивки можно принимать нагруженными характером разрушения и эффективными, теоретически обоснованными для многократного нагружения. Более подробно вопросы приспособляемости пластинки в [20, 65, 103; см. также обзор § 42].

§ 29. Наложение остаточных напряжений в пластинках обшивки

29.1. Остаточные напряжения. Рассмотревши две теории приспособляемости, как и другие современные подходы к анализу поведения конструкций в пластической области при многократном или переменном нагружении, основаны на предположении, что остаточные напряжения, возникающие в конструкции после завершения цикла нагружения - разрушения, до следующего цикла остаются неизменными. Насколько не очевидно, что остаточные напряжения для полной конструкции однозначно соответствуют историческому нагружению в рамках линейной упругоупрочняемой системы жестких материалов. Когда речь идет о работе обычных конструкций в сосредоточенных условиях в течение достаточно длительного времени, такое предположение вряд ли может быть признано безосновательным.

Вопросы статичности остаточных напряжений в металлах весьма сложны, и сейчас можно лишь сослаться на некоторые экспериментальные данные и качественный анализ явлений, возникающих вследствие этих напряжений [103]. В то же время остаточные напряжения в конструкциях - весьма распространенное явление. Причины их возникновения весьма разнообразны: помимо воздействия внешних нагрузок, возникающих в результате пластических деформаций (как в рассмотренной задаче, а также в таких технологических процессах, как штамповка, прокатка, волочение, литье, механическая обработка и др.), это - неравномерность нагрева и охлаждения элементов конструкции (при литье, термической обработке, сварке), деформации при монтаже конструкции и т.п. Известно, что существенные остаточные напряжения могут возникнуть после постройки судна или ремонта конструкций корабля. Однако нет никаких оснований утверждать, что эти напряжения остаются неизменными до конца срока службы судна.

В качестве основных факторов, влияющих на величину остаточных напряжений, можно указать на пластические деформации, возникающие в конструкции при статическом нагружении; релаксационные процессы в материале; циклическое нагружение конструкции. Первое очевидно и является предметом исследования в теории пластичности. Однако нельзя забывать и о том, что в реальных условиях эксплуатации структурные элементы подвергаются большому числу внешних воздействий (вибрации и т.п.), которые наряду с амплитудированной основной нагрузкой также могут вызвать наличие их остаточных напряжений.

Релаксация (уменьшение) напряжений в материале с течением времени при постоянных деформациях - широко известное явление. Он имеет место как в упругой, так и в пластической областях, особенно заметна при полициклических нагрузках и может рассматриваться как один из проявлений вязкоупругих свойств стали (см. § 1). Процессы остаточного старения металлов, связанные со структурными изменениями материала, - это также уменьшение остаточных напряжений во времени. Достаточно широко известно снижение остаточных напряжений в литых и сварных конструкциях при циклическом нагружении благодаря наличию неупругих пластических деформаций в структурных элементах материала (см., например, обзор [74]).

Известное явление состоит в том, что предположение об изменении (снижении) остаточных напряжений в конструкциях корабля на достаточно длительные периоды эксплуатации можно более обоснованно, чем предположение об их неизменности.

Заметим, что, говоря об изменении во времени остаточных напряжений в конструкциях, нельзя исключать возможности изменения остаточных деформаций. Структурные циклы-типы переделанных элементов, имеющих пластичность, не позволяют отнестись к ним при анализе рассматриваемых. Но этот вопрос, так же как количественный оторос эффект, связанный с изменением остаточных напряжений в конструкциях, безусловно, заслуживает внимания.

§ 2.3. Особенности поведения конструкций при циклическом статическом нагружении в условиях многоциклического нагружения. Можно утверждать, что если в конструкции, достигшей состояния приспособленности к действию заданной нагрузки, уменьшить остаточные напряжения, то последующее нагружение этим нагружением вызовет в конструкции появление пластических деформаций, т.е. состояние приспособленности в пластической зоне, согласно (28.1)

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}, \quad (29.1)$$

где $\sigma_{ij}^{(0)}$ - остаточные напряжения. В области, где

$$|\sigma_{ij}^{(0)}| > |\sigma_{ij}^{(1)}|, \quad \sigma_{ij}^{(0)} \text{ и } \sigma_{ij}^{(1)} \text{ имеют противоположные знаки,}$$

пусть после разгрузки $\sigma_{ij}^{(1)}$ уменьшилось,

став равным $\eta \sigma_{ij}^{(0)}$ при $0 \leq \eta \leq 1$. Тогда к концу последующего (второго) нагружения, если приложить его упругим,

$$\sigma_{ij(2)} = \sigma_{ij}^{(0)} + \eta \sigma_{ij}^{(0)}. \quad (29.2)$$

Если сравнить (29.1) и (29.2) для области, где знаки $\sigma_{ij}^{(0)}$ и $\sigma_{ij}^{(1)}$ различны, станет ясно, что здесь $|\sigma_{ij(2)}| > |\sigma_{ij}^{(1)}|$,

т.е. приращивание об упругом характере второго нагружения приводит к нарушению условия пластичности, а значит, оно должно сопровождаться образованием пластических деформаций.

Известное имеет экспериментальное подтверждение. Результаты на металлы в пластической области давки и подпрессовки пластины с размером [7, 9, 134]. В каждом цикле нагружения после разгрузки у давки демонстрировалось приспособление, приращивание об области ее конца при давке, чем снижались остаточные

печные напряжения; у пластично деформированного противостоятелем стороне открытого контура в соответствующей комбинации со приращением напряжений, чем тем же частично скомпенсированы остаточные плавные напряжения. Максимально обнуляются приращением остаточных прогибов в каждом цикле нагружения. В контролируемых испытаниях балки в пластично деформированной нагрузкой, когда остаточные плавные напряжения полностью не скомпенсированы, приращений остаточных прогибов во втором и последующих нагружениях зафиксировано не было.

Рассуждая полагать релаксационным циклом нагружения такой цикл в составе многократного нагружения конструкции в пластической стадии, когда в первом между нагружением и последующим нагружением остаточные напряжения $\sigma_{ост}$ уменьшаются. Соответственно, если после разрушения

$\sigma_{ост}$ обращается в нуль, релаксационный цикл будет считаться полным; если $\sigma_{ост}$ останется отличным от нуля, — частичным релаксационным циклом, если $\sigma_{ост}$ не изменится, — полным циклом нагружения.

Если считать материал идеальным упругопластическим, а изменение геометрии конструкции вследствие ее деформирования несущественным (обычные допущения теории пластического течения), то при постоянном релаксационном цикле последующие нагружения ничем не отличаются от начального нагружения, и, значит, при действии одинаковой нагрузки приращение пластических деформаций при каждом нагружении будут одинаковыми. Скорее всего для любой ширины контура.

Следовательно, при циклическом постоянном нагружении в этих условиях будет происходить приращение пластических деформаций с постоянной скоростью. Оценивая возможность обобщения этого вывода на нагружение, в котором реализуется частотные релаксационные циклы — релаксационное нагружение, если в каждом цикле величина максимального $\sigma_{ост}$ одинакова: параметр $\eta = \sigma_{ост}/\sigma$ в (29.2). Если η в разных циклах разный, приращение пластических деформаций такое будет иметь место в каждом цикле, но скорость их роста будет переменной. Таким образом, при многократном релаксационном нагружении конструкции из иде-

ального твердого пластического материала в пластической стадии, если изменение ее геометрии несущественно, всегда имеет место прогрессирующее разрушение.

В связи с вышесказанным можно учесть изменения в поведении конструкции, вызванные ростом пластических деформаций. Здесь можно выделить два случая: упрочнение конструкции, — когда рост пластических деформаций с постоянной скоростью при многократном релаксационном нагружении и $\eta = const$ приводит к пропорциональному увеличению начальной нагрузки, и разупрочнение конструкции, — когда в аналогичных условиях требуется увеличение начальной нагрузки.

Упрочнение может быть физическим и геометрическим. Физическое упрочнение конструкции — проявление упрочнения материала. Например, при повторном нагружении балки из упругопластического материала с упрочнением она в те же приращения пластических деформаций обрабатывается воздействием равных величин моментов при равной величине начальных пластических деформаций (деформаций материала отнесены до начала рассматриваемого нагружения). С ростом пластических деформаций должны увеличиваться и изгибающие моменты, а следовательно, начальная нагрузка, с которой связано их возникновение.

Аналогично проявление геометрического упрочнения конструкции как абсолютного изменения ее геометрии с ростом пластических деформаций. Если изменение геометрии при очередном нагружении заданной нагрузкой влечет за собой увеличение возможных напряжений, соответственно будут уменьшаться и приращения пластических деформаций. Поэтому поддержание постоянной скорости роста пластических деформаций потребует увеличения нагрузки. Примером может служить плавный изгиб балки, когда продольные силы релаксированы. Увеличение начальной нагрузки балки как следствие остаточных прогибов, полученных ее в предшествующих нагружениях, приводит к увеличению изгибающих моментов от заданной внешней нагрузки. Аналогично, если изменение геометрии конструкции при очередном нагружении влечет за собой увеличение возможных напряжений, — конструкция является геометрически разупрочненной (в с.л. (Пример — плавный изгиб балки, когда продольные силы скомпенсированы.)

Наименее позволяет утверждать следующее: при постоянной жесткости конструкции из идеального упругоэластического материала при многократном релаксационном нагружении возможна при условии, что существует такое поле остаточных перемещений, при котором от действия заданной нагрузки в ней не возникнут пластические деформации. Это необходимо условие существования приспособленности. Достаточно условно можно считать допустимостью, что указанное поле остаточных перемещений может возникнуть от действия заданной нагрузки.

23.3. Наименее остаточных прогибов в области при многократном релаксационном нагружении¹. Рассмотрим цилиндрический лист пластинки обычной, жестко заделанной на своем контуре, жесткий диск с нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q . Материал будем считать идеально упругоэластическим. При многократном релаксационном нагружении в пластинке появятся остаточные прогибы, которые будут расти с увеличением числа релаксационных циклов. Эти прогибы, как уже отмечалось выше, играют роль начальной погрешки в расчете изгибающих моментов в сечениях пластинки от действия заданной нагрузки q . При этом соответственно уменьшается пластическое участие пластинки. Такой процесс постепенного уменьшения пластического участия приведет к ситуации, когда пластическое участие в средней части пластинки сократится до нуля. Если бы пластинка была шарнирно закреплена на контуре, это означало бы достижение состояния приспособленности.

Все это позволяет сформулировать понятие первого предела накопления остаточных прогибов, как такую величину начальной погрешки пластинки, при которой изгибающий момент поперечные ее пролеты, возникающий от действия заданной нагрузки q , равен моменту фибровой прочности сечения M_T . Как показано выше, достижение первого предела наступает при релаксационном нагружении у жестко за-

деланной пластинки нечет за собой резко уменьшения скорости роста остаточных прогибов.

Наименее остаточных прогибов жестко заделанной пластинки достигают приращением (будет достигнуто состояние приспособленности), когда исчезнут пластические деформации также в районе внешнего контура пластинки. Поэтому назовем вторым пределом накопления остаточных прогибов такую величину начальной погрешки пластинки, при которой изгибающий момент в сечении заданная, возникающий от действия заданной нагрузки q , равен моменту фибровой прочности сечения. Поскольку величина предела накопления определится только геометрией начальной погрешки и значением нагрузки q , ясно, что предел накопления не зависит от характера релаксационного цикла — значения параметра τ в (23.8). Последний зависит только не числа релаксационных циклов, релаксации которых необходима для достижения предела накопления.

Для определения предела накопления остаточных прогибов равномерноэластичной пластинки воспользуемся приближенными методами расчета балок с диском, изложенными в § 22. При реализации первого предела накопления пластическое участие есть только в районе заданки (рис.100). Поэтому пластическое участие при повороте в среднем сечении от нагрузки q в среднем моменте M^H выражается как

$$E_1 J \omega'_p = -F_p = -M_0 \leq \varphi_1 (m^H); \quad (23.9)$$

$$m^H = \frac{M^H}{M_0};$$

соответствующая пластическая остаточная максимальная прогибе

$$E_1 J \omega_{np} = \frac{1}{2} E_1 J \omega'_p + F_p \left(\frac{1}{2} - \frac{S_p}{r_p} \right) =$$

$$= -M_0 c^2 \left[\varphi_1 (m^H) - \varphi_2 (m^H) \right]. \quad (23.10)$$

¹ Настоящий раздел написан совместно с В.П.Исидуровым.



Рис. 100. Схема балки (а); линия изгибающего момента (б) и схема реакции балки (в).

Здесь $E_1 = \frac{E}{1 - \mu^2}$ учитывает различие между изгибом балки поперек направления к балке, μ — коэффициент Пуассона. Пренебрежностью пластической участия, если пренебречь неоднородностью распределения изгибающего момента ($c \ll l$):

$$c = \frac{2 M_p}{q l J} (m^* - m_r).$$

Угловая составляющая максимального прогиба от q и M^*

$$E_1 J w_{\max} = \frac{5 q l^4}{384} - \frac{M^* l^2}{8}. \quad (29.5)$$

Начиная считать будем считать симметричной с максимальной стрелой f_m , тем как она образовалась в процессе накопления остаточных прогибов, когда в изгибной линии место пластических шарниры. Тогда суммарный максимальный прогиб пластике, изгибающий f_m , при учете влияния прогибающей силы N по (22.27) составит

$$f = \frac{w_{\max} + w_{\text{огр}} + f_m}{1 + \alpha^2}; \quad \alpha^2 = \frac{N l^2}{\pi^2 E_1 J}. \quad (29.6)$$

Для определения изгибающей f_m — первого прогиба накопления — можно приравнять максимальный изгибающий момент в пролете изгибающей $M_{\text{огр max}}$ моменту фибровой твердости сечения M_p :

$$M_{\text{огр max}} = \frac{q l^2}{8} - M^* - N f = M_p. \quad (29.7)$$

Выражение (29.4) — (29.6) позволяет найти f_m , если известны N и M^* . Для определения последнего нужно потребовать, чтобы угол поворота опорного сечения $w'_0 = 0$. Угловая составляющая w'_0 от q $E_1 J$, $w'_{0q}(q) = \frac{q l^2}{24}$.

Для нас и w'_{0p} по (29.3) влияние прогибающей силы N может быть приближенно учтено с помощью (22.27). Для угловой составляющей w'_0 от M^* погрешность будет довольно мала. Поэтому здесь лучше воспользоваться известным точным решением [102]. Тогда

$$w'_0 = \frac{w'_{0p} + w'_{0q}(q)}{1 + \alpha^2} - \frac{1}{2} M^* l \frac{ch \alpha}{\alpha} = 0; \quad (29.8)$$

$$\alpha = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{N}{E_1 J}}.$$

Анализ² показывает, что для различных пластин балки при постоянном первом прогибе накопления в заданных нормах есть пластические шарниры, M^* равен предельному моменту сечения и необходимость в решении (29.8) отпадает.

Для определения прогибающей силы N нужно составить уравнение совместности деформаций (12.5) $w_p = w_z + w_d$. Взаим-

ную w_d найдем приближенно по (22.28) как $w_d =$

² Анализ выполнен Н.М.Красовым.

$= 2,4 \frac{f^2 - f_0^2}{l}$. Вспомогательные функции

$$u_{\pm} = \frac{Nl}{E_r F} + \frac{2N_0}{E_r F} cX, (m^2) + \frac{N}{N_0} h |\omega_0|, \quad (29.9)$$

Последний член учитывает разрыв оси балки в сечении пластически напряженного металла по (12.12), (12.22) и должен учитываться лишь в случае, если последнее есть. В результате получается уравнение

$$2,4 \frac{f^2 - f_0^2}{l} = \frac{2N_0}{E_r F} cX, (m^2) + \frac{N}{N_0} h |\omega_0| + \frac{Nl}{E_r F k_p^2}, \quad (29.10)$$

где $\frac{1}{k_p^2} = 1 + \frac{AE_r F}{l}$; k_p^2 - условный коэффициент рас-

пора, связанный с действительным по (12.9), если балка работает упруго; A - коэффициент податливости расправленной конструкции по (12.6). Решение задачи в целом следует выполнять численно с использованием метода последовательных приближений.

Максимум может быть также найденно для определения в первом пределе накопления. Основным при этом является пластическая деформация в пластине оторочателе, но если пренебречь этой зависимостью пластическая функция можно показать равными нулю: $\psi_1(m^2) = \psi_2(m^2) = X_1(m^2) = 0$.

Пренебрегая $M_{\Sigma \text{ макс}} = M_T$ (29.7) отбрасывая опорный изгибающий момент по условию $M^0 = M_T$, и уравнение (29.8) вместе с (29.10) используется для определения N и f_{II} - второго предела накопления.

Как показывает анализ, первый предел накопления для рассмотренных пластин реализуется после двух-четырех полных циклов нагружения, достижение второго предела накопления требует большого числа циклов нагружения. На рис.101 для примера приведены характерные кривые накопления остаточных прогибов

$f_{ост}$. Здесь r - номер полного циклического нагружения. Крас-

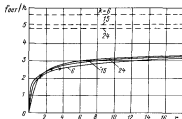


Рис.101. Кривые накопления остаточных прогибов.

ные на крайних отрезках $f_{ост}$ первого предела накопления, пунктирные горизонтальные линии - соответствующая $f_{ост}$ второго предела накопления. Кривые построены для

$$\frac{q}{2G_T} \left(\frac{l}{h} \right)^2 = 9 \quad \text{и} \quad \text{различными значениями параметра}$$

$$k = \frac{3G_T}{E_r} \left(\frac{l}{h} \right)^2. \quad \text{Для численных расчетов приняты значения}$$

форм кривых накопления остаточных прогибов накопления.

С целью удобства практического расчета для рассмотренных пластин на рис.102-104 представлены построены максимальные остаточные прогибы $f_{ост}$ пластины, жестко заделанной на одном конце и свободной на противоположной поверхности, нагруженной при многократном действии равномерной распределенной нагрузки (первый предел накопления). На рис.103-107 приведены аналогичные

* Для построения кривых на основании расчетов, выполненных Е.Б.Там-чиным.

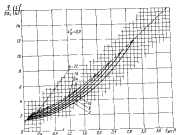


Рис. 402. Диаграмма максимальных остаточных пределов функции, жестко заданной на опорном контуре в функции по параметрической поверхности (первый предел абсолютный).

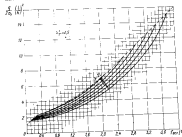


Рис. 403. Диаграмма максимальных остаточных пределов функции, жестко заданной на опорном контуре в функции по параметрической поверхности (второй предел абсолютный).

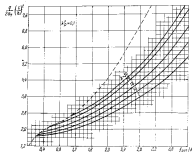


Рис. 404. Диаграмма максимальных остаточных пределов функции, жестко заданной на опорном контуре в функции по параметрической поверхности (второй предел абсолютный).

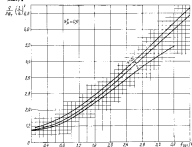


Рис. 405. Диаграмма максимальных остаточных пределов функции, жестко заданной на опорном контуре в функции по параметрической поверхности (второй предел абсолютный).

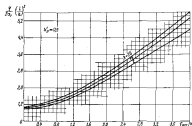


Рис. 1.66. Диаграмма максимальных остаточных напряжений пластины, жестко заделанной на опорном контуре и нагруженной по цилиндрической поверхности (второй предел текучести).

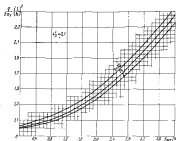


Рис. 1.67. Диаграмма максимальных остаточных напряжений пластины, жестко заделанной на опорном контуре и нагруженной по цилиндрической поверхности (второй предел текучести).

диаграммы максимальных остаточных напряжений пластины, жестко заделанной на опорном контуре и нагруженной по цилиндрической поверхности, возникающих при многократном действии равномерно распределенной нагрузки (второй предел текучести). Здесь, как и выше, k_p — условный коэффициент раскрытия; параметр k —

$$= \frac{3S_T}{E_T} \left(\frac{1}{k} \right)^2. \text{ Примерная кривая на рис. 1.66-1.68 — граница}$$

неустойчивости первого предела текучести. Она отвечает случаю, когда предел текучести достигнут после первого нагружения.

22.4. Об определении максимальных значений местных нагрузок по остаточным напряжениям. Местные напряжения возникают на эксплуатационных судах, испытывая с увеличением в ней остаточный процесс. Когда величина фактической нагрузки определена максимальных значений местных нагрузок, возникающих при повреждении, по величине последних. Это значение имеет ряд аспектов [18], один из которых состоит в установлении для пластины зависимости нагрузки — остаточный процесс.

Получение решения здесь основано тем, что деформирование местных нагрузок происходит на первом многократном, а дальнейшие остаточные процессы возникают — результат их накопления в течение эксплуатационного периода эксплуатации судна. Показателем многократности процесса накопления, учитывая известные результаты о периодичности пластичности при обычном нагружении к этому вопросу (см. в приложении параграф), можно прибегнуть к нормальному закону распределения, которое можно было бы сопоставить с известным на тех же судах повреждениями других элементов конструкции, например, корпуса.

Преодолевать эти трудности позволяют известные нам представления об изменении остаточных напряжений в объеме в процессе эксплуатационного судна, равномерном нагружении и предельном накоплении остаточных процессов. Если рассмотреть деформацию на эксплуатационном судне остаточные процессы объема как предел накопления, можно определить максимальные значения циклической постоянной нагрузки, которая способна вызвать эти процессы. Такая нагрузка может служить нижней оценкой максимальных местных нагрузок, возникающих в процессе повреждения. В качестве верхней оценки можно принять значение нагрузки, отвечающей на-

большими проблемами, а прикладными ее практического решения. Но в большинстве случаев, к сожалению, разрыв между теорией и практикой оказывается настолько большим, что остается только сожалеть.)

Надстройкой может служить исследование влияния нагрузок, возникающих на борту промышленных судов при плавании во время штормов через различные волны [19]. Нагрузки определялись на основании массовой информации о размерах габаритов бортовой обшивки в районе переменной материи. Эти перемены - результат накопления на протяжении 40-45 лет эксплуатации судна, в течение которых обшивку часто подвергали обшивке прибрежных швартовки и деформации в некоторых местах.

Это исследование основывается прежде всего на расчетном соотношении между нагрузкой и остаточными проблемами второй степени. Полученные в результате статистической обработки данных нагрузки лежат в пределах 20-40 Н, что дает хорошее согласие с массой статистической бортовой обшивки и данными о его повреждении на эксплуатируемых судах.

Согласно информации о повреждении судна основано, что если предположить, что нагрузка бортовой обшивки от волн (5-10), была увеличена нагрузкой, поврежденной обшивки на этих судах (меньше от волн) не обнаружено; на волн судна, где волны от волн имеют массовый характер, предположили нагрузку поврежденной обшивки меньше указанной. Нагрузки, введенные на основании проблем обшивки и предположения, что они являются результатом статистического анализа повреждений, оказались 500-1500 Н. Это является большим предельным нагрузкам бортовой обшивки практически всех судов.

Наибольшее влияние нагрузки оказывают на обшивку подвески к нормированию местной прочности обшивки. Учитывая многолетний практический опыт эксплуатации судов с габаритной бортовой обшивкой, было составлено заключение принять предположение: к концу срока службы судна габаритная обшивка не должна вызывать необходимости ремонта. Поэтому в качестве нормативных ограничений для выбора габаритной обшивки приняты предположения: для предотвращения [8] с определенными значениями. Расчетный остаточный предел к концу срока службы судна определяется как соответствующий второму пределу накопления. Полученные в результате толщину обшивки оказались реальными, хорошо согласующимися с опытом эксплуатации.

Аналогичные исследования выполнялись в связи с определением влияния нагрузок, возникающих на днищную обшивку судов при плавании. Так же на основе массовой информации о размерах поврежденной обшивки габаритных нагрузок, отмеченных наибольшим остаточным пределом. Учитывая, что последние могут быть результатом накопления на ограниченный период эксплуатации судна, предположили аналогичный (1-2 года), в качестве расчетного был принят первый предел накопления. Полученные нагрузки хорошо согласуются с расчетными данными с массой статистической информации о повреждении днищной обшивки бортов, а также обшивки, определяемые, как и выше, при ограничении предельных остаточных пределов - с современным мировым опытом судостроения.

Накопленные предположения о влиянии остаточных проблем и их нормирование также хорошо оправдали себя при определении толщины местных габаритных нагрузок с габаритными свойствами нагрузок [21, 22]. Практика габаритных нагрузок на толщину обшивки показала: большие местные нагрузки от статистической толщины обшивки обшивки, эксплуатируемой для транспортировки грузов. Практика также расчет этих нагрузок в угловой обшивке по предельным напряжениям привела к определенным большим толщинам, которые являются не собой существенное переопределение нагрузки. Рассмотренный подход позволил получить существенно меньшие толщины, хорошо согласующиеся с мировой практикой проектирования в строительстве судов этого типа. Это есть практический опыт применения изложенных методов при определении местных нагрузок.

¹ В работе принимал участие Е.В.Толкач и С.А.Зарский.

Заключение

Заключением книги, состоявшей ответов на некоторые вопросы, которые могут возникнуть при ее чтении в связи с практическим применением рассмотренных решений и методов к расчету стальных конструкций. В первую очередь речь пойдет о вопросах, относящихся к проблеме обеспечения предельной несущей прочности конструкций в тесно связанной с ней проблеме оценки погрешности расчетов на несоответствующих сущих.

В книге не случайно уделено большое внимание определению предельных нагрузок. Как указывалось выше, предельные нагрузки могут быть использованы для оценки качества повышения надежности стального шедра - остаточным профитом, достаточно большим, чтобы стать объектом деформации и соответственно вызвать необходимость ремонта. При малых нагрузках остаточные профиты невелики, имеют характер технологических нагрузок при постройке сущих и не являются ниши бы то ни было опасными. В подтверждение этого показаны примером некоторые результаты анализа, сделан с простыми примерами.

На рис. 108 представлены зависимости нагрузки - профит для односторонней балки, жестко заделанной по концам и нагруженной посередине профитом сжатосточной силой P ; размер соответствует. Если профит балки - идеальный, в материале идеально упругопластический, то при достижении предельной нагрузки P_0 одновременно в трех сечениях образуются пластические шарниры; при $P < P_0$ балка работает упруго (кривая 1). Виртуальнопластическая оценка идею соответствует к кривой до $P = P_0$ остаточные профиты не накапливаются. Балка прямоугольного профит (кривая 2) - в расчетной упругопластической стадии. Разность абсцисс кривых 1 и 2 - ее остаточные профиты $f_{ост}$. Из рисунка видно, что она меньше уп-



Рис. 108. Зависимость нагрузки - профит односторонней балки с жестко заделанными по концам, нагруженной посередине сжатосточной силой P посередине сущих.

1 и 2 - соответственно идеальный и виртуальнопластический профиты, кривая 3 - виртуальнопластический профит, кривая 4 - виртуальнопластический профит, кривая 5 - виртуальнопластический профит.



Рис. 109. Зависимость нагрузки - профит односторонней балки с жестко заделанными по концам из идеально упругопластического материала, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q .

1 - идеальный профит; 2 - прямоугольный профит.

ругим профитом в доле при $P \rightarrow P_0$ составляет ~ 40-50% последних. Фигурные же профиты балки стального шедра, как известно, весьма велики. К этому же выводу приводит рассмотрение балки двутавровой профит. Например, у двутавра с $\bar{F}_H' = 0,7$ и $\bar{F}_H / \bar{F}_0 = 0,6$ разность значений $\frac{EJ}{M_0 L^2} f$ в балке прямоугольного профита выше до $P / P_0 = 0,996$ и приближается 2,51.)

Рост упрочнения (кривая 3 на рис. 109) снижает остаточные профиты. В нашем примере $P / P_0 = 1 / \text{ост}$ уменьшается почти вдвое.

Нужно сказать, что столь малые остаточные профиты по многим соображениям только для рассмотренной балки. Притом здесь две. Первая состоит в том, что все пластические шарниры в балке образуются одновременно. Поэтому упругопластическая стадия заканчивается в относительно узкой области начальной стадии нагрузки и образование остаточных профитов связано лишь с распространением пластических деформаций по длине балки. Разнообразием образования пластических шарниров профиты бы в балке растянутой упругопластической стадии.

Второй пример связан с формой нагрузки. А.Р.Резниченко показывает [40], что у балки прямоугольного профиля на изгибе упругопластического материала при конечных прогибах пластичное состояние возникает достаточно лишь в случае, если в этом состоянии отсутствует поперечная нагрузка $q = \infty$, т.е. действует сосредоточенная сила. ([6] показывает справедливость этого положения для двутавровых профилей.) Это положение выполняется для всех трех пластических шарниров балки балки.

Следствие дает расчетные соотношения прогибов балки с распределенной нагрузкой, приведенных на рис.109. Здесь отмечены прогибы балки балки, но такие имеют шарниры упругих прогибов: для балки прямоугольного профиля при $q/q_0 = 0,96$ $f_{огр}$ составляет 128% упругих прогибов, при $q/q_0 = 0,98$ - соответственно 170%. При нагрузках, еще меньше отклоняющихся от q_0 , прогибы резко возрастают, для q_0 достигают даже при $f' = \infty$.)

На рис.109 также видно, что вплоть до нагрузок $q/q_0 = 0,96 \div 0,98$ поправки для значения остаточных прогибов связаны с распространением пластических деформаций по длине балки (расширением пластичных пластических шарниров.) В связи с этим становится очевидной ошибка $f_{огр}$ по результатам расчета балки с идеальным профилем вместо балки прямоугольного профиля (см. § 6).

В целом можно сказать, что при расчетных нагрузках, упругопластических расчеты

$$q \leq (0,96 \div 0,98) q_0,$$

значения остаточных прогибов конструкций соизмеримы со значениями упругих либо миним их, т.е. весьма малы. В особенности это характерно для жестких балочных конструкций, остаточные прогибы которых при указанных условиях являются в пределах тысячных долей от длины их свободных пролетов [47].

Таким образом определяются возможности использования приведенных нагрузок в качестве критерия опасности возникновения перекосов шарнира (шарнира) и единичных единиц остаточных прогибов перекосов.

Некоторые оговорки о величине расщепления. Характерный вид зависимости нагрузки - прогиб для пластин с расщеплением на рис.73.

Для жестких пластин (в балках) типичны резкие увеличение скорости роста прогибов по достижении предельной нагрузки (печи горючего) участка на прогиб 1 мм.73). Остаточные прогибы f/h велики, однако, остаются еще небольшими (следствие сильной жесткости конструкции), и соответственно величине расщепления незначительны. В то же время в том же время перекосности шарнира и огибающей это сечение по отношению к балке и пластинам имеет количественно разные последствия, поскольку абсолютные значения прогибов у шарнира при этом существенно различны. Так, при $f/h = 5/6$ прогиб пластины толщиной $h = 10$ мм составляет 2 мм, что является недопустимым в процессе технологического процесса из-за жесткости обшивки при строительстве судна. Для балки шарнира жесткости $h = 200$ мм такое же f/h означает уменьшение прогибов 40 мм, что может означать уже достаточно малую величину, чтобы избежать расщепления [8].

Все это является подтверждением правильности вывода о том, что предельная нагрузка может служить критерием перекосности шарнира. Одновременно указывается круг задач, в которых величину расщепления должно учитывать. Это прежде всего пластины обшивки. Для жестких пластин ($\sigma_T/E \cdot l^2/h^2 > 10$), если считать коэффициент расщепления балки в единицы; l - длина короткой стороны шарнира (шарнира) величину расщепления можно считать уже в упругой стадии; появление пластических деформаций (упругопластическая стадия) приводит к росту остаточных прогибов и соответственно к увеличению ради расщепления. Предельная нагрузка здесь недопустима (по крайней мере 2 на рис.73). 7 жестких пластин (при $\sigma_T/E \cdot l^2/h^2 < 2$) при нагрузках, близких предельной, остаточные прогибы малы, и поэтому применим упругопластический расчет без учета расщепления (в геометрической стадии пластичности). Появление предельной нагрузки здесь соответствует началу интенсивного пластического деформирования пластины; с дальнейшим ростом нагрузки остаточные прогибы становятся огромными и соответственно возникает необходимость учета расщепления. Таким образом, для жестких пластин предельная нагрузка может использоваться в качестве границы области нагрузок, где величину расщепления не учитывать.

Для балки шарнира в упругопластической стадии величину расщепления, как правило, пренебрежимо. Учитывать его следует лишь при

весоме деформации прогиба, когда речь идет об оценке последствий повреждений (дефектаций). Здесь, кстати, достаточно высокие результаты дает использование математических геометрических моделей расчетов.

Для простейших этих расчетов применимы при $r^2/l^2 \cdot (E/5\rho) R'_p > 0,4$ (R'_p — условный коэффициент разбора). Для пластин,

гравированных на цилиндрической поверхности и нагруженных равномерно распределенной изгибной интенсивностью q , при $q/d_p \cdot l^2/R^2 \geq 3$ применима разрывная дельта критическо-

теoretическая равновесия с приближенным условием ускорения деформаций [8].

Ключевым является расчет в условиях жестких условий на работу простейших обшивки в пластической стадии пластичности обшивки, особенно внимание на вопросы способности конструкций, обеспечивающих разброс пластичности, для оценки в значительной мере определяется предельными местными прочностью обшивки. (Увеличение в данной мере отклонения в несущей способности разбора, характеризующегося размерами пластин.) (Особенно важным становится учет влияния условий в пластике, возникающих от общего изгиба стержня, изгиба перекрывающей в подкрепляющих ребер жесткости [9]).

Изложенное позволяет высказать в некоторых соображениях, касающихся нормирования предельной местной прочности стержней конструкций, в частности использование методов нормирования по тем же понятиям „предельного состояния“. Подчеркнем, что содержание этого понятия здесь не совпадает с понятием предельного состояния в теории предельного равновесия. В данном случае оно гораздо шире и подразумевает состояние конструкции такого состояния, при котором дальнейшее ее использование является невозможным. Из сказанного ясно следует, что для оценки разбора в качестве регламентированной характеристики предельного состояния в большинстве случаев может быть принята предельная нагрузка, определяемая методами теории предельного равновесия.

Для листов обшивки в состоянии такой характеристики предельного состояния ясно напряжение. Здесь можно, как и нормативных для дефектаций в технологическом подходе на построение

судим, регламентировать значение остаточной стрелки прогиба. Для листов, участвующих в общем изгибе стержня, допускаемые значения этих стрелок будут ограничиваться главным образом ограничением минимальных отгибов листов на разрывные коэффициенты в соответствии с возможностями в эксплуатации прогибов листов. Для пластин, участвующих в обеспечении только местной прочности, при назначении допускаемых стрелок прогиба ограничения могут быть связаны с условиями прогиба, при которых происходит разрывание листов (как и в нормативных для дефектаций) или другие технологические последствия. При этом, естественно, следует учесть особенно влияние эффекта максимального остаточного прогиба в пластине, если величина изгиба действует многократно.

Решающим является способность стержней конструкций, с которой связаны их предельные местные прочности в стадии пластичности в условиях эксплуатации. определяется одним из факторов и требует соответствующего конструктивного и технологического обеспечения. Прежде всего это касается обеспечения несущей способности узла. Предельное состояние конструкции (свая, рама, перекрывающая) определяется переходом в предельное состояние ее сечений и значения нагрузки, соответствующие реальному состоянию несущей способности конструкции, соответствующие значения от усилий, которые могут вызывать возмущения эти сечения (узлы), деформации пластичности.

Несущая способность узла в боковой стадии определяется устойчивостью его составных элементов. Местная потеря устойчивости, образование гофр, не только снижает величину максимальных усилий, которые могут быть восприняты узлом, но и с развитием пластических деформаций приводит к образованию разных осей, появлению изгибов или другим пластическим деформациям, которые способны разрушить материал, что приводит к более быстрому разрушению, воспринятой нагрузке. В результате элементы узла ограничивают его несущую способность может быть связано с максимальными разрывами в зонах конструктивных и технологических концентраторов напряжений, где концентрируются большие пластические деформации. С этой целью особенно важно дефекты сварных швов, плохо обработанные концентраторы свободные края. Понижение, особенно в сварную зону, приводит к резкому снижению устойчивости.

Изложенное свидетельствует о необходимости особенно тщательного конструктивного оформления в технологическом обеспечении за-

¹ На это обстоятельство ранее обращал также инженер В.В.Михайлов.

лов, в которых возможны различные пластические деформации. Это прежде всего касается перераспределения усилий элементов узла, особенно свободных концов; смещения концентрации напряжений; различного рода перемещения и контроля качества изготовления сварных швов. Может возникнуть изменение геометрических размеров и формы узла. Примером последнего служит получение в § 7 ограниченной размерной узлы, обеспечивающие образование пластического шарнира в сечении балки у конца кранов. При этом исключается возникновение в ней пластических деформаций, чем в значительной мере обеспечивается решение вопроса обеспечения устойчивости этой узлы.

Основываясь или на данных законах для практики вопроса расчета конструкций в пластическом состоянии, связанных с выбором расчетной схемы конструкции. Как известно, выбор и обоснование расчетной схемы — задача сложная, обеспечивающая минимизацию различной конструкции путем учета факторов, ведь каждый из которых результат, — один из многих ответственных и сложных этапов расчета. Применительно к упругой стадии расчетные схемы для параметров узловых конструкций строятся в соответствии с требованиями стандартов, основанных на результатах расчетов обычных без каких-либо специальных схем или конструктивных элементов. Автоматический процесс такой практики представляется на пластическом этапе не вполне оправдан и в некоторых случаях может даже повлечь за собой заметные ошибки. Связанные это связаны с тем, что развитие пластических деформаций приводит к перераспределению внутренних усилий в конструкции, а это соответственно может повлечь за собой изменение роли тех или иных факторов. Поэтому переход к расчету в пластической стадии требует пересмотра системы допущений, выполняемых в упругой расчет.

Поэтому рассмотрим примерами. Известно, что при работе балок в упругой стадии основная роль в сопротивлении перераспределению сил принадлежит стороне профиля, в то же время при развитии пластических деформаций на срезах ограничиваются вычислением средних касательных напряжений как $\tau_{cp} = Q / F_c$. Для равных профилей максимальные касательные напряжения отличаются от τ_{cp} не более чем на 10-20% [30]. В § 17 применительно к шарнирным соединениям типовых конструкций и факторов в проектировании показаны, что это допущение остается справедливым и в пластической стадии. По [17.1] предельный перераспределенный сдвиг равен

$$\sigma_{cp} = \sigma_T F_c \approx \frac{1}{2} \sigma_T F_c.$$

Рассмотрим, к чему приводит распространение последнего на другие типы балок, например рабы жесткости, перераспределение усилий. Расчетная схема конструкции, представленной на рис.110,а, где раба срезана «на ус», — балка, шарнирно опирающаяся по концам. Ее предельная нагрузка

$$q_o^{(a)} = \frac{8 M_0}{l^2}.$$

Перераспределенный сдвиг на предельную нагрузку балки не зависит, ибо пластический шарнир образуется поперек пролета, где $\theta = 0$.

Второй вариант этой конструкции (рис.110,б) отличается тем, что раба жесткости приварена к поперечным стенкам и образует непрерывную связь. Здесь расчетная схема — такая же балка, но жестко защемленная по концам. В сечении надзора θ имеет максимум, а сдвиг Q здесь достигает предельного значения Q_0 , может образоваться сплошной пластический шарнир. Предельная нагрузка, отвечающая последнему (см. § 17)

$$q_o^{(b)} = \frac{2 Q_0}{l}.$$

Согласно канонической экстремальной теории теории предельного равновесия $q_o^{(b)}$ всегда больше действительной предельной нагрузки балки или рамы вд.

Сопоставим полученные результаты. Очевидно, что

$$q_o^{(b)} > q_o^{(a)}, \quad \text{если } l > l_0, \quad \text{где } l_0 = \frac{8 M_0}{Q_0}$$

— значение l при $q_o^{(b)} = q_o^{(a)}$. Если в соответствии со схемой балки раба пролет $l_0 = l_c \approx \frac{1}{2} \sigma_T F_c$ и учесть, что

$$M_0 = \sigma_T W_0, \quad \text{то } l_0 = \frac{8 W_0}{F_c}. \quad \text{Вычисляем далее: для по-}$$



Рис. 110. Подразделение общей нагрузки (а) и перераспределение (б) нагрузки по высоте, 1 — радиус заострения; 2 — ширина щели; 3 — единица.

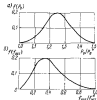


Рис. 112. Плотность распределения напряжений (а) в статическом профиле (б) однопролетной балки с жесткими опорами по высоте, нагруженной нагрузкой простого сферического действия.

полюса $M \approx 10 \cdot 10^6 = 75$ см, для полюса $M \approx 14^{\circ} \cdot 10^6 \cdot 10^3 = 420$ см, для полюса $M \approx 18^{\circ} \cdot 10^6 \cdot 10^3 = 120$ см. Таким образом, l_0 сокращается в 10 раз в реальном состоянии значительной длины ребра жесткости, и в реальной конструкции может быть $l < l_0$ и соответственно $q^{(b)} < q^{(a)}$. Это означает, что приращение длины

ребра и перераспределение напряжений может изменить его предельную нагрузку. Подобный вывод парадоксален и противоречит опыту. Это объясняет парадокс тем, что в реальном состоянии, как и в упругой стадии, перераспределение сил происходит только в стеной профиле и оно достигается при $Q = Q_c$. В действительности пластическая деформация приводит к перераспределению касательных напряжений τ в сечении и в реальном состоянии существенно повышается роль касовых и поперечных τ , особенно продольного касания. Это имеет отношение к решению, выполненному в § 8.

Тем не менее вопрос о влиянии перераспределения сил на предельную нагрузку балки вряд ли можно считать окончательно решенным.

Остается неустановленным принцип применимости предположений о восприятии перераспределенной силы всей площадью сечения балки (§ 8) для только плоского сечения ее стенок (§ 17). Выходя из предположения, в котором применимо использование этих предположений, составляет задача теории, не существует ли перераспределения, где определено промежуточное предположение: перераспределенная сила воспринимается в стенках, и плоскими профили, но в реальной стадии, причем площадь и зависимость от составленной размерности в форме сечения, отношение его высоты к длине балки может меняться в широких пределах. Эти задачи ждут своих исследователей.

Рассмотрим второй пример: регулярное перекрытие с одной симметрично расположенной перераспределенной силой, нагружающей равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q , которая воспринимается только балками главного направления; все балки перекрытия жестко связаны на прямоугольном опорном контуре.

Предельная нагрузка такого перекрытия q_0 определяется по формуле (§5.2). Теперь предположим, что перекрытие подкреплено промежуточными балками равного направления с предельным моментом сечения M_1' . Если это перекрытие, как и в других случаях гл. 4, представить в виде открытой системы перекрестных сил, то в отличие от неопределенного перекрытия здесь следует дополнительно рассмотреть еще один пластический механизм балочного типа, когда в реальном состоянии возникает только промежуточные балки равного направления, а перекрестные связи в основном балки главного направления остаются жесткими. Эту стадию предельной нагрузки

$$q_0' = 128 \frac{M_1'}{\alpha l}.$$

Здесь учтено, что интенсивность нагрузки на промежуточную балку $= \frac{1}{2} q \alpha$.

Согласно кинематической предельной теории теории предельного равновесия q_0' всегда будет действительной предельной нагрузкой перекрестного перекрытия или равна ей. Сравним ее

с q_0 - предельной нагрузкой непопереченного сечения.

Из (45,2) видно, что при $\bar{R}_0 = 18 \frac{M_0}{M_1} \frac{b}{L} \frac{a}{L} \approx 32$

получается $q_0^I < q_0$, если $M_1^I < \frac{1}{2} M_1$. Следовательно-

но, если предельный момент промежуточной балки главного направления в два раза или более меньше предельного момента основной балки главного направления, то усиление попереченной в виде двух промежуточных балок может уменьшить предельную нагрузку сечения.

Такой вывод является результатом неадекватного представления о разрушении механизма, образующий деформаций промежуточной балкой главного направления. Когда основные балки главного направления состоят из стальных, мы не вправе для рассмотрения эту балку как непопереченную: следовательно нестерпимости пластичности между основными балками, попереченной ребром (промежуточной балкой), так это сделано в одной из задач § 13. Следовательно свидетельствует о необходимости особой осторожности в оценке действительных пластических механизмов поведения, когда последние рассматриваются как стержневые системы.

Несколько замечаний о точности расчетов в пластической стадии. Известно, что в упругой стадии точность определения напряжений, деформаций и перемещений в конструкции от действий заданной системы внешних нагрузок почти однозначно определяется точностью используемого метода расчета. Это обосновывается линейной стабильностью значений упругих констант у стали - модуль упругости и коэффициенты Пуассона, а также достаточно хорошим соответствием экспериментальных зависимостей $\sigma - \epsilon$ закону Гука.

Для пластической стадии ситуация совершенно иная. Напряжения, деформации и перемещения конструкций в пластической стадии существенно зависят от механических характеристик материалов, последние же у стали сложной и той же мере имеют случайные разбросы в больших диапазонах значений. Это, соответственно, сильно осложняется на различных расчетах.

Предположим следующее примером. На рис. III, в представленная плотность распределения $f(P_0)$ предельной нагрузки одноосреденной балки с жесткими заделками по концам, нагруженной поперечной нагрузкой сосредоточенной силой P . Прямая частота

материала σ_T введена в расчет как случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения, с математическим ожиданием $m_{\sigma} = 300 \text{ МПа}$ и $\sqrt{D_{\sigma}} = 20 \text{ МПа}$, где D_{σ} - дисперсия, σ_T (это реальные оценки для стали с пределом текучести по ГОСТу $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$); P_0^H на рисунке - предельная нагрузка балки при $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$.

На рис. III, б дан тот же балки приведенная плотность распределения остаточных преобразов $f(f_{ост})$, рассчитанный для того же закона распределения σ_T в предположении, что материал балки упругопластический с линейным упрочнением ($\epsilon = F_0/E = 0,01$), а профиль - несимметричный двутавр ($\bar{F}_H/\bar{F}_C = 0,7$; $F_H/\bar{F}_C = 0,6$); $f_{ост}$ на рисунке - остаточный прогиб при $P/P_0 = 1,5$, где P_0 вычислено при $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$.

Из рисунка видно, сколь велика изменчивость результатов расчетов, особенно на остаточных преобразованиях. Это определяет, в частности, неадекватность в большинстве случаев уточнения формы зависимости $\sigma - \epsilon$, стремящаяся приблизить ее к реальной диаграмме напряжений при растяжении стали. Применение преобразованных диаграмм напряжений $\bar{\sigma} - \epsilon$ также оправдано, если они позволяют учесть основные эффекты, характерные для рассматриваемого материала. Также следует отметить недостаточность известных простых расчетных схем и приближенных методов, хотя и те, и другие требуют оценки ошибок, внесенных в результаты расчетов.

Из сказанного тем не менее не следует, что неадекватность расчетных оценок прочности конструкций в пластической стадии существенно или, по крайней мере по сравнению с соответствующими оценками для упругой стадии. Не говоря уже о том, что пластические методы позволяют гораздо полнее описать поведение конструкций, оценки прочности конструкций - это всегда занижено, являющийся пороком у расчетных схемных решений конструкций на величину действительных деформаций возникающих в верхах прочности.

Если в упругой стадии определение прочности ведется с использованием допущения напряжений, которые возникают в каждой от σ_T материала [48], то случайная изменчивость механизмо-

них характеристики материала предусматривает в упругом режиме в такой же степени, как и в пластическом. На практике в упругих расчетах используется значение σ_p по ГОСТу — минималь гарантируемый предел этой величины для данной марки стали. У материала реальной конструкции σ_p практически всегда выше. Это является допущением в отношении к запасу прочности. С равным основанием такой подход может быть использован и в пластических расчетах, когда речь идет о проектировании конструкции или проверке ее прочности. Однако отмеченным выше количеством результатов пластического расчета, без сомнения, должны учитываться при анализе напряжений конструкции на эксплуатационных стадиях, определения значений напряжений нагрузки по размерам этих напряжений (см. § 29), при решении технологических задач и т.д.

Подчеркнем, что затронутые выше вопросы — лишь некоторые из числа тех, которые будут возникать в процессе практического применения пластического метода расчета. Таких вопросов, естественно, будет еще немало. Встретимся снова вместе поражаем много проблем. Хотелось надеяться, что эти проблемы будут быстро и успешно разрешены, а данная книга окажется полезной в данном деле.

Т а б л и ц а 1. Пластические функции для балок прямоугольного профиля,
Л = 0

m	m_p	n_p	φ_1	ψ_1	χ_1	γ_1	Φ_1	χ_2
0,70	0,003	—	0,001	0,001	—	0,001	0,001	—
0,74	0,005	—	0,005	0,004	—	0,003	0,005	—
0,78	0,011	—	0,012	0,009	—	0,011	0,014	—
0,82	0,020	—	0,025	0,019	—	0,023	0,030	—
0,84	0,022	—	0,034	0,027	—	0,029	0,042	—
0,86	0,029	—	0,048	0,036	—	0,038	0,057	—
0,88	0,031	—	0,060	0,047	—	0,050	0,077	—
0,90	0,037	—	0,073	0,062	—	0,062	0,103	—
0,91	0,039	—	0,089	0,070	—	0,074	0,119	—
0,92	0,041	—	0,102	0,081	—	0,080	0,139	—
0,93	0,048	—	0,109	0,086	—	0,104	0,150	—
0,94	0,055	—	0,118	0,093	—	0,110	0,162	—
0,95	0,075	—	0,124	0,099	—	0,116	0,176	—
0,96	0,091	—	0,133	0,107	—	0,127	0,191	—
0,96	0,094	—	0,142	0,115	—	0,139	0,207	—
0,97	0,111	—	0,153	0,124	—	0,150	0,228	—
0,98	0,089	—	0,164	0,132	—	0,160	0,248	—
0,98	0,105	—	0,177	0,144	—	0,168	0,279	—
0,98	1,092	—	0,191	0,156	—	0,198	0,302	—
0,99	1,252	—	0,207	0,170	—	0,211	0,327	—
0,99	1,459	—	0,226	0,187	—	0,230	0,380	—
0,99	1,742	—	0,248	0,205	—	0,258	0,434	—
0,99	2,158	—	0,274	0,230	—	0,284	0,507	—
0,99	2,809	—	0,308	0,261	—	0,319	0,615	—
0,99	4,448	—	0,357	0,306	—	0,368	0,810	—

Продолжение табл. I

 $\pi = 0,05$

m	m_p	n_p	φ_1	φ_2	χ_1	φ_2	φ_3	χ_2
0,66	0,002	0	0	0	0	0	0	0
0,70	0,006	0,005	0,002	0,001	0,001	0,003	0,002	0,002
0,74	0,019	0,007	0,005	0,004	0,002	0,009	0,005	0,004
0,78	0,045	0,012	0,012	0,010	0,006	0,021	0,015	0,007
0,82	0,094	0,019	0,024	0,019	0,009	0,043	0,024	0,010
0,84	0,130	0,023	0,032	0,026	0,008	0,059	0,043	0,012
0,86	0,170	0,028	0,043	0,034	0,009	0,079	0,058	0,015
0,88	0,213	0,034	0,056	0,045	0,011	0,106	0,079	0,018
0,90	0,253	0,042	0,074	0,059	0,013	0,141	0,104	0,021
0,92	0,292	0,048	0,094	0,068	0,014	0,162	0,120	0,024
0,94	0,403	0,054	0,096	0,079	0,015	0,185	0,140	0,026
0,96	0,504	0,057	0,103	0,083	0,016	0,208	0,151	0,027
0,98	0,551	0,058	0,110	0,089	0,017	0,219	0,154	0,029
0,99	0,606	0,059	0,117	0,096	0,018	0,236	0,170	0,030
0,940	0,665	0,070	0,136	0,103	0,019	0,254	0,183	0,032
0,945	0,736	0,076	0,135	0,111	0,019	0,278	0,210	0,034
0,950	0,816	0,082	0,145	0,120	0,020	0,303	0,230	0,036
0,955	0,912	0,090	0,156	0,129	0,021	0,331	0,252	0,038
0,960	1,028	0,099	0,169	0,140	0,022	0,363	0,278	0,040
0,965	1,170	0,110	0,183	0,152	0,024	0,401	0,309	0,044
0,970	1,331	0,124	0,199	0,166	0,025	0,446	0,346	0,048
0,975	1,511	0,142	0,217	0,180	0,027	0,501	0,393	0,052
0,980	1,709	0,163	0,239	0,203	0,029	0,573	0,453	0,058
0,985	2,458	0,209	0,267	0,228	0,031	0,671	0,537	0,065
0,990	3,454	0,283	0,304	0,261	0,034	0,823	0,672	0,077
0,995	6,703	0,527	0,364	0,328	0,038	1,162	0,980	0,103

Продолжение табл. I

 $\pi = 0,10$

m	m_p	n_p	φ_1	φ_2	χ_1	φ_2	φ_3	χ_2
0,68	0,002	0	0	0	0	0	0	0
0,66	0,005	0,002	0,002	0,001	0,001	0,003	0,002	0,002
0,70	0,014	0,007	0,005	0,003	0,002	0,007	0,005	0,004
0,74	0,030	0,015	0,009	0,007	0,005	0,015	0,011	0,008
0,78	0,060	0,026	0,017	0,013	0,008	0,029	0,020	0,014
0,82	0,114	0,040	0,029	0,023	0,013	0,053	0,037	0,021
0,84	0,154	0,049	0,038	0,030	0,015	0,069	0,050	0,025
0,86	0,203	0,060	0,049	0,039	0,018	0,090	0,066	0,030
0,88	0,261	0,074	0,062	0,050	0,022	0,119	0,087	0,037
0,90	0,323	0,092	0,080	0,065	0,026	0,156	0,116	0,044
0,92	0,401	0,104	0,091	0,074	0,028	0,190	0,136	0,049
0,94	0,505	0,119	0,104	0,084	0,031	0,229	0,157	0,054
0,95	0,545	0,126	0,111	0,090	0,032	0,225	0,170	0,057
0,960	0,641	0,136	0,118	0,097	0,034	0,243	0,184	0,060
0,965	0,706	0,146	0,124	0,104	0,035	0,265	0,200	0,064
0,940	0,781	0,158	0,131	0,112	0,037	0,285	0,218	0,067
0,945	0,869	0,172	0,145	0,120	0,039	0,311	0,238	0,072
0,950	0,975	0,189	0,157	0,130	0,041	0,340	0,262	0,077
0,955	1,102	0,209	0,169	0,141	0,043	0,374	0,289	0,082
0,960	1,262	0,233	0,183	0,153	0,046	0,414	0,322	0,089
0,965	1,449	0,265	0,199	0,168	0,048	0,462	0,362	0,096
0,970	1,752	0,308	0,219	0,185	0,052	0,522	0,413	0,106
0,975	2,168	0,371	0,241	0,205	0,055	0,602	0,462	0,118
0,980	2,969	0,477	0,271	0,223	0,060	0,718	0,562	0,136
0,985	4,458	0,715	0,323	0,272	0,067	0,922	0,765	0,167

Продолжение табл.1

 $\lambda = 0,25$

m	m_p	n_p	φ_1	φ_2	χ_1	χ_2	ψ_1	ψ_2
0,58	0	0	0	0	0	0	0	0
0,62	0,004	0,002	0,002	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002
0,66	0,009	0,007	0,004	0,003	0,003	0,007	0,005	0,004
0,70	0,023	0,015	0,009	0,007	0,005	0,014	0,010	0,008
0,74	0,050	0,033	0,016	0,012	0,008	0,026	0,018	0,014
0,78	0,085	0,045	0,025	0,019	0,014	0,042	0,030	0,023
0,82	0,120	0,069	0,039	0,030	0,020	0,069	0,049	0,034
0,84	0,139	0,084	0,049	0,038	0,024	0,088	0,064	0,047
0,86	0,163	0,103	0,061	0,048	0,029	0,104	0,083	0,060
0,88	0,183	0,127	0,077	0,061	0,034	0,147	0,108	0,080
0,89	0,191	0,143	0,086	0,069	0,038	0,167	0,124	0,096
0,90	0,193	0,161	0,097	0,078	0,042	0,191	0,143	0,093
0,91	0,197	0,183	0,110	0,089	0,045	0,221	0,166	0,098
0,92	0,195	0,211	0,124	0,101	0,049	0,256	0,194	0,090
0,925	0,195	0,229	0,132	0,109	0,051	0,278	0,210	0,096
0,930	0,196	0,247	0,142	0,116	0,054	0,300	0,230	0,101
0,935	0,192	0,270	0,152	0,125	0,057	0,326	0,251	0,108
0,940	0,191	0,297	0,163	0,135	0,060	0,357	0,278	0,116
0,945	0,190	0,330	0,175	0,146	0,063	0,393	0,305	0,125
0,950	0,187	0,372	0,190	0,159	0,067	0,435	0,340	0,135
0,955	0,182	0,427	0,206	0,174	0,071	0,480	0,385	0,147
0,960	0,180	0,506	0,228	0,192	0,076	0,535	0,442	0,163
0,965	0,179	0,625	0,261	0,214	0,082	0,613	0,522	0,185
0,970	0,174	0,800	0,304	0,245	0,090	0,792	0,650	0,216
0,975	0,173	1,002	0,358	0,296	0,103	1,111	0,942	0,291

Продолжение табл.1

 $\lambda = 0,20$

m	m_p	n_p	φ_1	φ_2	χ_1	χ_2	ψ_1	ψ_2
0,54	0	0	0	0	0	0	0	0
0,58	0,003	0,002	0,002	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002
0,62	0,012	0,005	0,004	0,003	0,002	0,006	0,004	0,003
0,66	0,027	0,015	0,009	0,006	0,005	0,014	0,010	0,008
0,70	0,049	0,027	0,015	0,012	0,008	0,026	0,018	0,014
0,74	0,080	0,046	0,025	0,019	0,014	0,042	0,029	0,023
0,78	0,127	0,072	0,039	0,029	0,022	0,069	0,044	0,036
0,80	0,162	0,089	0,045	0,035	0,025	0,078	0,055	0,043
0,82	0,209	0,109	0,055	0,043	0,029	0,096	0,069	0,053
0,84	0,271	0,133	0,067	0,052	0,033	0,120	0,087	0,068
0,86	0,367	0,165	0,082	0,065	0,043	0,152	0,111	0,076
0,87	0,443	0,185	0,091	0,072	0,047	0,172	0,126	0,081
0,88	0,481	0,208	0,101	0,081	0,051	0,195	0,144	0,088
0,89	0,505	0,236	0,113	0,091	0,056	0,222	0,166	0,100
0,90	0,521	0,271	0,127	0,102	0,062	0,255	0,192	0,115
0,91	0,531	0,308	0,143	0,116	0,068	0,296	0,221	0,129
0,915	0,539	0,344	0,162	0,134	0,071	0,330	0,244	0,137
0,920	0,543	0,377	0,183	0,153	0,075	0,368	0,267	0,146
0,925	0,542	0,417	0,204	0,174	0,079	0,409	0,294	0,157
0,930	0,539	0,467	0,227	0,195	0,084	0,459	0,325	0,169
0,935	0,533	0,530	0,252	0,216	0,089	0,465	0,364	0,181
0,940	0,522	0,616	0,280	0,244	0,095	0,523	0,414	0,203
0,945	0,505	0,743	0,314	0,284	0,102	0,600	0,480	0,227
0,950	0,480	0,905	0,368	0,339	0,111	0,711	0,577	0,261
0,955	0,458	1,103	0,437	0,385	0,123	0,905	0,752	0,320

m	m_p	n_p	φ_1	ψ_1	χ_1	φ_2	ψ_2	χ_2
0,54	0,003	0,001	0,001	0,001	0	0,001	0,001	0,001
0,58	0,011	0,006	0,003	0,003	0,002	0,006	0,004	0,003
0,62	0,026	0,014	0,008	0,006	0,004	0,013	0,009	0,007
0,66	0,049	0,027	0,015	0,012	0,008	0,025	0,017	0,014
0,70	0,081	0,047	0,026	0,019	0,014	0,041	0,029	0,023
0,74	0,126	0,075	0,038	0,029	0,022	0,063	0,044	0,037
0,78	0,190	0,114	0,055	0,042	0,032	0,093	0,066	0,056
0,80	0,238	0,139	0,066	0,050	0,038	0,112	0,080	0,066
0,82	0,303	0,171	0,078	0,060	0,045	0,130	0,099	0,080
0,84	0,383	0,212	0,094	0,073	0,054	0,151	0,124	0,100
0,86	0,525	0,268	0,114	0,090	0,064	0,203	0,158	0,117
0,87	0,611	0,306	0,126	0,100	0,070	0,243	0,190	0,130
0,870	0,665	0,327	0,133	0,106	0,073	0,260	0,193	0,138
0,890	0,735	0,352	0,140	0,112	0,077	0,278	0,208	0,146
0,895	0,796	0,380	0,148	0,119	0,081	0,298	0,224	0,154
0,896	0,876	0,412	0,157	0,127	0,085	0,321	0,242	0,164
0,896	0,972	0,450	0,167	0,136	0,089	0,347	0,263	0,175
0,900	1,093	0,495	0,177	0,145	0,094	0,376	0,288	0,187
0,905	1,230	0,541	0,189	0,155	0,099	0,411	0,306	0,202
0,910	1,411	0,620	0,203	0,167	0,105	0,453	0,351	0,218
0,915	1,654	0,712	0,219	0,182	0,112	0,504	0,394	0,238
0,920	1,990	0,811	0,238	0,199	0,120	0,568	0,450	0,264
0,925	2,419	1,041	0,261	0,220	0,133	0,659	0,528	0,299
0,930	2,954	1,417	0,293	0,249	0,142	0,799	0,659	0,352
0,935	6,763	3,637	0,343	0,297	0,162	1,509	0,937	0,470

m	m_p	n_p	φ_1	ψ_1	χ_1	φ_2	ψ_2	χ_2
0,56	0,003	0,001	0,001	0	0	0,001	0,001	0,001
0,54	0,010	0,005	0,003	0,002	0,002	0,005	0,003	0,003
0,58	0,025	0,013	0,008	0,006	0,004	0,013	0,009	0,007
0,62	0,048	0,027	0,015	0,011	0,006	0,025	0,017	0,014
0,66	0,082	0,048	0,026	0,019	0,014	0,042	0,029	0,024
0,70	0,130	0,078	0,039	0,030	0,022	0,066	0,046	0,038
0,72	0,159	0,097	0,047	0,036	0,027	0,079	0,056	0,047
0,74	0,193	0,120	0,057	0,043	0,033	0,096	0,067	0,058
0,76	0,234	0,147	0,067	0,052	0,040	0,114	0,081	0,070
0,78	0,288	0,180	0,080	0,064	0,048	0,137	0,097	0,083
0,80	0,362	0,222	0,094	0,073	0,057	0,162	0,118	0,102
0,82	0,463	0,277	0,112	0,088	0,068	0,203	0,147	0,123
0,84	0,605	0,355	0,134	0,106	0,081	0,253	0,186	0,151
0,86	0,791	0,467	0,148	0,118	0,089	0,296	0,212	0,168
0,865	0,796	0,498	0,156	0,125	0,090	0,305	0,227	0,178
0,860	0,862	0,475	0,162	0,132	0,096	0,326	0,241	0,189
0,860	0,949	0,516	0,174	0,140	0,103	0,351	0,264	0,201
0,870	1,055	0,568	0,184	0,149	0,108	0,378	0,288	0,215
0,875	1,162	0,626	0,196	0,159	0,114	0,410	0,313	0,231
0,880	1,343	0,700	0,208	0,170	0,121	0,448	0,344	0,249
0,885	1,549	0,795	0,223	0,183	0,128	0,494	0,382	0,271
0,890	1,832	0,925	0,240	0,198	0,137	0,551	0,431	0,298
0,895	2,248	1,114	0,261	0,217	0,147	0,627	0,496	0,333
0,900	2,949	1,452	0,288	0,242	0,160	0,736	0,592	0,384
0,905	4,538	2,149	0,326	0,277	0,178	0,907	0,764	0,471

m	m_p	n_p	φ_1	ψ_1	χ_1	φ_2	ψ_2	χ_2
0,40	0,001	0,001	0	0	0	0,001	0,001	0
0,50	0,009	0,005	0,003	0,002	0,001	0,004	0,003	0,002
0,54	0,023	0,013	0,007	0,005	0,004	0,012	0,008	0,007
0,58	0,040	0,027	0,015	0,011	0,008	0,025	0,017	0,014
0,62	0,064	0,045	0,026	0,020	0,014	0,043	0,030	0,024
0,66	0,105	0,082	0,040	0,031	0,023	0,077	0,047	0,040
0,70	0,164	0,128	0,059	0,046	0,035	0,106	0,071	0,061
0,72	0,180	0,139	0,071	0,055	0,043	0,121	0,086	0,075
0,74	0,199	0,156	0,084	0,065	0,051	0,144	0,102	0,091
0,76	0,223	0,170	0,099	0,077	0,062	0,173	0,122	0,110
0,78	0,253	0,197	0,117	0,094	0,073	0,206	0,148	0,133
0,80	0,288	0,226	0,138	0,109	0,088	0,252	0,180	0,162
0,82	0,321	0,258	0,161	0,119	0,096	0,291	0,206	0,180
0,84	0,355	0,290	0,186	0,132	0,105	0,335	0,233	0,208
0,86	0,395	0,322	0,214	0,159	0,121	0,386	0,269	0,234
0,880	0,436	0,357	0,243	0,185	0,135	0,440	0,309	0,272
0,885	1,002	0,630	0,293	0,255	0,222	0,585	0,389	0,342
0,890	1,148	0,693	0,304	0,264	0,229	0,675	0,413	0,359
0,895	1,290	0,771	0,327	0,275	0,236	0,780	0,442	0,379
0,900	1,471	0,869	0,353	0,287	0,244	0,892	0,476	0,402
0,905	1,711	0,987	0,387	0,302	0,254	0,949	0,499	0,430
0,910	2,020	1,178	0,426	0,329	0,265	1,085	0,535	0,466
0,915	2,378	1,437	0,469	0,360	0,278	1,259	0,563	0,495
0,920	2,774	1,760	0,520	0,399	0,295	1,478	0,598	0,499
0,925	3,223	2,159	0,571	0,437	0,322	1,744	0,639	0,512

m	m_p	n_p	φ_1	ψ_1	χ_1	φ_2	ψ_2	χ_2
0,42	0,001	0	0	0	0	0	0	0
0,46	0,007	0,004	0,002	0,002	0,001	0,004	0,003	0,002
0,50	0,022	0,012	0,007	0,005	0,004	0,012	0,008	0,006
0,54	0,040	0,027	0,015	0,011	0,008	0,024	0,017	0,014
0,58	0,066	0,045	0,026	0,020	0,014	0,043	0,030	0,025
0,62	0,102	0,086	0,042	0,032	0,024	0,070	0,049	0,042
0,66	0,159	0,128	0,063	0,048	0,036	0,107	0,075	0,066
0,70	0,234	0,206	0,090	0,070	0,056	0,156	0,101	0,100
0,72	0,261	0,227	0,107	0,083	0,069	0,186	0,128	0,122
0,74	0,277	0,233	0,126	0,098	0,081	0,222	0,159	0,148
0,76	0,333	0,270	0,137	0,107	0,089	0,243	0,175	0,163
0,78	0,401	0,316	0,149	0,116	0,097	0,267	0,193	0,180
0,79	0,445	0,373	0,162	0,127	0,107	0,296	0,215	0,200
0,795	0,791	0,543	0,177	0,140	0,117	0,380	0,242	0,234
0,798	0,856	0,585	0,185	0,147	0,123	0,450	0,267	0,257
0,799	0,932	0,633	0,194	0,155	0,129	0,512	0,275	0,262
0,7995	1,049	0,689	0,204	0,163	0,136	0,566	0,284	0,269
0,800	1,135	0,755	0,213	0,172	0,143	0,625	0,317	0,286
0,805	1,252	0,834	0,227	0,182	0,151	0,697	0,344	0,307
0,810	1,412	0,933	0,247	0,194	0,160	0,786	0,375	0,332
0,815	1,619	1,061	0,266	0,208	0,170	0,842	0,414	0,361
0,820	1,902	1,233	0,274	0,223	0,182	0,900	0,460	0,397
0,825	2,268	1,486	0,285	0,243	0,195	0,976	0,528	0,445
0,830	2,679	1,809	0,302	0,268	0,213	1,066	0,604	0,512
0,835	3,166	2,206	0,301	0,303	0,237	1,206	0,706	0,629

Продолжение табл.1

 $\pi = 0,45$

m	m_p	n_p	y_1	ψ_1	x_1	y_2	ψ_2	x_2
0,38	0	0	0	0	0	0	0	0
0,42	0,006	0,003	0,002	0,002	0,001	0,003	0,002	0,002
0,46	0,021	0,012	0,007	0,003	0,004	0,021	0,008	0,006
0,50	0,048	0,027	0,013	0,005	0,008	0,024	0,027	0,014
0,54	0,089	0,053	0,027	0,010	0,015	0,046	0,031	0,025
0,58	0,149	0,093	0,044	0,014	0,026	0,074	0,052	0,045
0,62	0,236	0,153	0,067	0,022	0,042	0,113	0,081	0,072
0,66	0,360	0,244	0,098	0,034	0,063	0,170	0,122	0,101
0,70	0,529	0,362	0,139	0,109	0,091	0,247	0,177	0,169
0,72	0,563	0,403	0,153	0,129	0,111	0,297	0,205	0,203
0,738	0,704	0,525	0,172	0,135	0,115	0,312	0,237	0,219
0,750	0,751	0,560	0,179	0,142	0,122	0,328	0,258	0,234
0,755	0,805	0,599	0,186	0,148	0,126	0,346	0,262	0,244
0,760	0,865	0,633	0,196	0,155	0,134	0,365	0,267	0,259
0,765	0,935	0,694	0,206	0,163	0,141	0,387	0,284	0,275
0,7650	1,016	0,742	0,216	0,172	0,149	0,410	0,303	0,293
0,7655	1,112	0,810	0,225	0,181	0,157	0,437	0,324	0,312
0,7660	1,228	0,892	0,236	0,191	0,166	0,468	0,349	0,335
0,7665	1,370	0,991	0,252	0,202	0,175	0,504	0,378	0,360
0,770	1,551	1,117	0,267	0,215	0,186	0,547	0,414	0,394
0,775	1,791	1,282	0,284	0,230	0,198	0,599	0,457	0,428
0,780	2,130	1,514	0,304	0,248	0,213	0,668	0,514	0,474
0,785	2,656	1,874	0,327	0,271	0,230	0,757	0,583	0,536
0,790	3,454	2,560	0,361	0,300	0,253	0,869	0,713	0,635
0,795	6,903	4,746	0,414	0,350	0,290	1,212	1,005	0,848

Продолжение табл.1

 $\pi = 0,50$

m	m_p	n_p	y_1	ψ_1	x_1	y_2	ψ_2	x_2
0,34	0	0	0	0	0	0	0	0
0,38	0,005	0,003	0,002	0,001	0,001	0,002	0,002	0,001
0,42	0,020	0,011	0,006	0,005	0,003	0,021	0,007	0,006
0,46	0,048	0,028	0,015	0,011	0,008	0,025	0,027	0,014
0,50	0,089	0,056	0,028	0,021	0,016	0,046	0,033	0,027
0,54	0,160	0,102	0,046	0,036	0,028	0,079	0,056	0,048
0,58	0,260	0,172	0,072	0,055	0,045	0,125	0,089	0,080
0,62	0,408	0,265	0,108	0,084	0,070	0,190	0,138	0,128
0,64	0,503	0,363	0,131	0,102	0,088	0,232	0,167	0,150
0,66	0,623	0,462	0,157	0,124	0,106	0,283	0,204	0,189
0,67	0,691	0,521	0,172	0,135	0,118	0,311	0,225	0,223
0,68	0,776	0,591	0,188	0,149	0,130	0,343	0,249	0,249
0,685	0,825	0,632	0,197	0,155	0,137	0,361	0,263	0,263
0,690	0,881	0,679	0,206	0,163	0,144	0,381	0,278	0,279
0,695	0,946	0,731	0,216	0,171	0,152	0,402	0,294	0,296
0,700	1,021	0,791	0,226	0,180	0,160	0,426	0,313	0,315
0,705	1,109	0,861	0,237	0,189	0,169	0,452	0,333	0,337
0,710	1,215	0,945	0,250	0,200	0,179	0,482	0,357	0,360
0,715	1,342	1,043	0,263	0,211	0,190	0,516	0,385	0,388
0,720	1,502	1,167	0,276	0,224	0,201	0,556	0,417	0,419
0,725	1,709	1,326	0,295	0,238	0,215	0,604	0,457	0,457
0,730	1,992	1,542	0,314	0,256	0,230	0,664	0,507	0,504
0,735	2,408	1,857	0,333	0,276	0,249	0,743	0,575	0,564
0,740	3,108	2,387	0,367	0,303	0,278	0,887	0,673	0,654
0,745	4,698	3,522	0,408	0,341	0,303	1,055	0,781	0,761

m	m_p	n_p	φ_1	ψ_1	χ_1	φ_2	ψ_2	χ_2
0,30	0	0	0	0	0	0	0	0
0,34	0,004	0,002	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,001
0,38	0,019	0,011	0,006	0,003	0,003	0,010	0,007	0,005
0,42	0,049	0,028	0,015	0,007	0,008	0,025	0,017	0,014
0,46	0,098	0,059	0,032	0,017	0,017	0,049	0,034	0,029
0,50	0,170	0,113	0,050	0,029	0,030	0,085	0,060	0,053
0,54	0,280	0,200	0,080	0,062	0,051	0,139	0,099	0,091
0,58	0,475	0,346	0,123	0,096	0,082	0,219	0,157	0,151
0,60	0,600	0,450	0,150	0,118	0,102	0,271	0,196	0,190
0,62	0,758	0,588	0,183	0,147	0,120	0,336	0,244	0,246
0,635	0,803	0,623	0,198	0,152	0,126	0,354	0,258	0,262
0,650	0,851	0,672	0,208	0,160	0,132	0,373	0,272	0,276
0,665	0,902	0,720	0,212	0,168	0,132	0,394	0,286	0,296
0,680	0,965	0,774	0,222	0,177	0,140	0,415	0,304	0,325
0,695	1,035	0,836	0,234	0,186	0,150	0,439	0,323	0,338
0,710	1,116	0,907	0,246	0,196	0,160	0,466	0,343	0,360
0,725	1,212	0,990	0,259	0,207	0,171	0,496	0,366	0,384
0,740	1,328	1,090	0,273	0,219	0,202	0,529	0,393	0,413
0,755	1,470	1,211	0,283	0,232	0,215	0,567	0,423	0,446
0,770	1,631	1,365	0,305	0,247	0,230	0,613	0,460	0,485
0,785	1,831	1,567	0,325	0,264	0,246	0,668	0,508	0,532
0,800	2,080	1,850	0,347	0,283	0,265	0,729	0,565	0,591
0,815	2,398	2,220	0,365	0,308	0,288	0,805	0,647	0,672
0,830	2,754	2,617	0,411	0,341	0,319	0,903	0,777	0,796
0,845	3,203	3,104	0,468	0,394	0,367	1,029	1,075	1,067

m	m_p	n_p	φ_1	ψ_1	χ_1	φ_2	ψ_2	χ_2
0,30	0,003	0,002	0,001	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001
0,34	0,018	0,010	0,006	0,004	0,003	0,010	0,007	0,005
0,38	0,050	0,029	0,015	0,007	0,008	0,025	0,017	0,014
0,42	0,105	0,065	0,031	0,014	0,016	0,054	0,032	0,028
0,46	0,196	0,129	0,055	0,023	0,024	0,094	0,065	0,060
0,48	0,261	0,178	0,071	0,035	0,045	0,124	0,088	0,081
0,50	0,343	0,242	0,088	0,051	0,059	0,160	0,115	0,108
0,52	0,447	0,327	0,115	0,060	0,077	0,205	0,148	0,143
0,54	0,582	0,442	0,144	0,113	0,099	0,261	0,189	0,188
0,56	0,757	0,598	0,179	0,142	0,127	0,332	0,242	0,247
0,585	0,809	0,645	0,189	0,151	0,136	0,352	0,257	0,265
0,610	0,864	0,696	0,200	0,159	0,144	0,374	0,274	0,284
0,635	0,923	0,751	0,211	0,169	0,154	0,397	0,291	0,304
0,660	0,997	0,811	0,223	0,178	0,164	0,421	0,310	0,326
0,685	1,086	0,877	0,236	0,189	0,175	0,447	0,329	0,349
0,710	1,191	0,949	0,249	0,200	0,186	0,475	0,351	0,374
0,735	1,319	1,039	0,263	0,211	0,199	0,505	0,374	0,402
0,760	1,465	1,132	0,278	0,224	0,211	0,538	0,400	0,433
0,785	1,632	1,252	0,294	0,238	0,226	0,577	0,430	0,468
0,810	1,822	1,400	0,313	0,253	0,242	0,622	0,465	0,509
0,835	2,039	1,591	0,333	0,270	0,260	0,674	0,508	0,557
0,860	2,293	1,849	0,355	0,290	0,280	0,739	0,561	0,617
0,885	2,593	2,228	0,383	0,314	0,305	0,824	0,633	0,694
0,910	2,939	2,664	0,415	0,344	0,335	0,945	0,737	0,804
0,935	3,338	3,199	0,453	0,387	0,378	1,115	0,924	0,995

Продолжение табл.1

 $n = 0,85$

m	m_p	n_p	φ_1	φ_2	χ_1	φ_2	φ_3	χ_2
0,26	0,002	0,002	0,002	0,002	0	0,002	0,002	0,002
0,30	0,003	0,003	0,003	0,004	0,003	0,003	0,003	0,005
0,34	0,005	0,005	0,005	0,006	0,005	0,005	0,005	0,005
0,38	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,005
0,40	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008
0,42	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009
0,44	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,009
0,46	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012
0,48	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013
0,50	0,014	0,014	0,014	0,014	0,014	0,014	0,014	0,014
0,55	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016
0,60	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018
0,65	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020
0,70	0,022	0,022	0,022	0,022	0,022	0,022	0,022	0,022
0,75	0,024	0,024	0,024	0,024	0,024	0,024	0,024	0,024
0,80	0,026	0,026	0,026	0,026	0,026	0,026	0,026	0,026
0,85	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028
0,90	0,030	0,030	0,030	0,030	0,030	0,030	0,030	0,030
0,95	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032
1,00	0,034	0,034	0,034	0,034	0,034	0,034	0,034	0,034

Продолжение табл.1

 $n = 0,70$

m	m_p	n_p	φ_1	φ_2	χ_1	φ_2	φ_3	χ_2
0,22	0,002	0,002	0,002	0	0	0,002	0,002	0
0,26	0,003	0,003	0,003	0,004	0,003	0,003	0,003	0,005
0,30	0,005	0,005	0,005	0,006	0,005	0,005	0,005	0,005
0,32	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,005
0,34	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008
0,36	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009
0,38	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010
0,40	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012
0,42	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013
0,43	0,014	0,014	0,014	0,014	0,014	0,014	0,014	0,014
0,44	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016
0,46	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018
0,48	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020
0,50	0,022	0,022	0,022	0,022	0,022	0,022	0,022	0,022
0,55	0,024	0,024	0,024	0,024	0,024	0,024	0,024	0,024
0,60	0,026	0,026	0,026	0,026	0,026	0,026	0,026	0,026
0,65	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028
0,70	0,030	0,030	0,030	0,030	0,030	0,030	0,030	0,030
0,75	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032
0,80	0,034	0,034	0,034	0,034	0,034	0,034	0,034	0,034
0,85	0,036	0,036	0,036	0,036	0,036	0,036	0,036	0,036
0,90	0,038	0,038	0,038	0,038	0,038	0,038	0,038	0,038
0,95	0,040	0,040	0,040	0,040	0,040	0,040	0,040	0,040
1,00	0,042	0,042	0,042	0,042	0,042	0,042	0,042	0,042

Продолжение табл.1

 $\lambda = 0,75$

λ	m_p	n_p	φ_1	φ_2	χ_1	φ_3	φ_4	χ_2
0,10	0,004	0	0	0	0	0	0	0
0,20	0,008	0,009	0,005	0,004	0,003	0,003	0,006	0,005
0,30	0,012	0,018	0,010	0,004	0,007	0,007	0,022	0,010
0,40	0,016	0,028	0,015	0,007	0,010	0,010	0,035	0,015
0,50	0,020	0,040	0,020	0,010	0,013	0,013	0,050	0,020
0,60	0,024	0,054	0,025	0,013	0,016	0,016	0,065	0,025
0,70	0,028	0,070	0,030	0,016	0,019	0,019	0,080	0,030
0,80	0,032	0,088	0,035	0,019	0,022	0,022	0,100	0,035
0,90	0,036	0,108	0,040	0,022	0,025	0,025	0,120	0,040
1,00	0,040	0,130	0,045	0,025	0,028	0,028	0,140	0,045
1,10	0,044	0,154	0,050	0,028	0,031	0,031	0,160	0,050
1,20	0,048	0,180	0,055	0,031	0,034	0,034	0,180	0,055
1,30	0,052	0,208	0,060	0,034	0,037	0,037	0,200	0,060
1,40	0,056	0,238	0,065	0,037	0,040	0,040	0,220	0,065
1,50	0,060	0,270	0,070	0,040	0,043	0,043	0,240	0,070
1,60	0,064	0,304	0,075	0,043	0,046	0,046	0,260	0,075
1,70	0,068	0,340	0,080	0,046	0,049	0,049	0,280	0,080
1,80	0,072	0,378	0,085	0,049	0,052	0,052	0,300	0,085
1,90	0,076	0,418	0,090	0,052	0,055	0,055	0,320	0,090
2,00	0,080	0,460	0,095	0,055	0,058	0,058	0,340	0,095
2,10	0,084	0,504	0,100	0,058	0,061	0,061	0,360	0,100
2,20	0,088	0,550	0,105	0,061	0,064	0,064	0,380	0,105
2,30	0,092	0,598	0,110	0,064	0,067	0,067	0,400	0,110
2,40	0,096	0,648	0,115	0,067	0,070	0,070	0,420	0,115
2,50	0,100	0,700	0,120	0,070	0,073	0,073	0,440	0,120
2,60	0,104	0,754	0,125	0,073	0,076	0,076	0,460	0,125
2,70	0,108	0,810	0,130	0,076	0,079	0,079	0,480	0,130
2,80	0,112	0,868	0,135	0,079	0,082	0,082	0,500	0,135
2,90	0,116	0,928	0,140	0,082	0,085	0,085	0,520	0,140
3,00	0,120	0,990	0,145	0,085	0,088	0,088	0,540	0,145
3,10	0,124	1,054	0,150	0,088	0,091	0,091	0,560	0,150
3,20	0,128	1,120	0,155	0,091	0,094	0,094	0,580	0,155
3,30	0,132	1,188	0,160	0,094	0,097	0,097	0,600	0,160
3,40	0,136	1,258	0,165	0,097	0,100	0,100	0,620	0,165
3,50	0,140	1,330	0,170	0,100	0,103	0,103	0,640	0,170
3,60	0,144	1,404	0,175	0,103	0,106	0,106	0,660	0,175
3,70	0,148	1,480	0,180	0,106	0,109	0,109	0,680	0,180
3,80	0,152	1,558	0,185	0,109	0,112	0,112	0,700	0,185
3,90	0,156	1,638	0,190	0,112	0,115	0,115	0,720	0,190
4,00	0,160	1,720	0,195	0,115	0,118	0,118	0,740	0,195
4,10	0,164	1,804	0,200	0,118	0,121	0,121	0,760	0,200
4,20	0,168	1,890	0,205	0,121	0,124	0,124	0,780	0,205
4,30	0,172	1,978	0,210	0,124	0,127	0,127	0,800	0,210
4,40	0,176	2,068	0,215	0,127	0,130	0,130	0,820	0,215
4,50	0,180	2,160	0,220	0,130	0,133	0,133	0,840	0,220
4,60	0,184	2,254	0,225	0,133	0,136	0,136	0,860	0,225
4,70	0,188	2,350	0,230	0,136	0,139	0,139	0,880	0,230
4,80	0,192	2,448	0,235	0,139	0,142	0,142	0,900	0,235
4,90	0,196	2,548	0,240	0,142	0,145	0,145	0,920	0,240
5,00	0,200	2,650	0,245	0,145	0,148	0,148	0,940	0,245

Продолжение табл.1

 $\lambda = 0,50$

λ	m_p	n_p	φ_1	φ_2	χ_1	φ_3	φ_4	χ_2
0,10	0	0	0	0	0	0	0	0
0,20	0,008	0,009	0,005	0,004	0,003	0,003	0,006	0,005
0,30	0,012	0,018	0,010	0,009	0,006	0,006	0,020	0,010
0,40	0,016	0,028	0,015	0,010	0,010	0,010	0,035	0,015
0,50	0,020	0,040	0,020	0,013	0,013	0,013	0,050	0,020
0,60	0,024	0,054	0,025	0,016	0,016	0,016	0,065	0,025
0,70	0,028	0,070	0,030	0,019	0,019	0,019	0,080	0,030
0,80	0,032	0,088	0,035	0,022	0,022	0,022	0,100	0,035
0,90	0,036	0,108	0,040	0,025	0,025	0,025	0,120	0,040
1,00	0,040	0,130	0,045	0,028	0,028	0,028	0,140	0,045
1,10	0,044	0,154	0,050	0,031	0,031	0,031	0,160	0,050
1,20	0,048	0,180	0,055	0,034	0,034	0,034	0,180	0,055
1,30	0,052	0,208	0,060	0,037	0,037	0,037	0,200	0,060
1,40	0,056	0,238	0,065	0,040	0,040	0,040	0,220	0,065
1,50	0,060	0,270	0,070	0,043	0,043	0,043	0,240	0,070
1,60	0,064	0,304	0,075	0,046	0,046	0,046	0,260	0,075
1,70	0,068	0,340	0,080	0,049	0,049	0,049	0,280	0,080
1,80	0,072	0,378	0,085	0,052	0,052	0,052	0,300	0,085
1,90	0,076	0,418	0,090	0,055	0,055	0,055	0,320	0,090
2,00	0,080	0,460	0,095	0,058	0,058	0,058	0,340	0,095
2,10	0,084	0,504	0,100	0,061	0,061	0,061	0,360	0,100
2,20	0,088	0,550	0,105	0,064	0,064	0,064	0,380	0,105
2,30	0,092	0,598	0,110	0,067	0,067	0,067	0,400	0,110
2,40	0,096	0,648	0,115	0,070	0,070	0,070	0,420	0,115
2,50	0,100	0,700	0,120	0,073	0,073	0,073	0,440	0,120
2,60	0,104	0,754	0,125	0,076	0,076	0,076	0,460	0,125
2,70	0,108	0,810	0,130	0,079	0,079	0,079	0,480	0,130
2,80	0,112	0,868	0,135	0,082	0,082	0,082	0,500	0,135
2,90	0,116	0,928	0,140	0,085	0,085	0,085	0,520	0,140
3,00	0,120	0,990	0,145	0,088	0,088	0,088	0,540	0,145
3,10	0,124	1,054	0,150	0,091	0,091	0,091	0,560	0,150
3,20	0,128	1,120	0,155	0,094	0,094	0,094	0,580	0,155
3,30	0,132	1,188	0,160	0,097	0,097	0,097	0,600	0,160
3,40	0,136	1,258	0,165	0,100	0,100	0,100	0,620	0,165
3,50	0,140	1,330	0,170	0,103	0,103	0,103	0,640	0,170
3,60	0,144	1,404	0,175	0,106	0,106	0,106	0,660	0,175
3,70	0,148	1,480	0,180	0,109	0,109	0,109	0,680	0,180
3,80	0,152	1,558	0,185	0,112	0,112	0,112	0,700	0,185
3,90	0,156	1,638	0,190	0,115	0,115	0,115	0,720	0,190
4,00	0,160	1,720	0,195	0,118	0,118	0,118	0,740	0,195
4,10	0,164	1,804	0,200	0,121	0,121	0,121	0,760	0,200
4,20	0,168	1,890	0,205	0,124	0,124	0,124	0,780	0,205
4,30	0,172	1,978	0,210	0,127	0,127	0,127	0,800	0,210
4,40	0,176	2,068	0,215	0,130	0,130	0,130	0,820	0,215
4,50	0,180	2,160	0,220	0,133	0,133	0,133	0,840	0,220
4,60	0,184	2,254	0,225	0,136	0,136	0,136	0,860	0,225
4,70	0,188	2,350	0,230	0,139	0,139	0,139	0,880	0,230
4,80	0,192	2,448	0,235	0,142	0,142	0,142	0,900	0,235
4,90	0,196	2,548	0,240	0,145	0,145	0,145	0,920	0,240
5,00	0,200	2,650	0,245	0,148	0,148	0,148	0,940	0,245

Продолжение табл.1

 $\eta = 0,05$

m	m_p	n_p	φ_1	ψ_1	χ_1	φ_2	ψ_2	χ_2
0,12	0,008	0,002	0,001	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001
0,14	0,008	0,009	0,005	0,004	0,003	0,008	0,006	0,005
0,16	0,004	0,008	0,013	0,010	0,008	0,022	0,015	0,013
0,18	0,005	0,007	0,027	0,021	0,017	0,048	0,033	0,030
0,20	0,000	0,010	0,050	0,039	0,034	0,090	0,065	0,064
0,205	0,008	0,010	0,058	0,046	0,040	0,106	0,077	0,077
0,210	0,004	0,024	0,067	0,053	0,048	0,124	0,094	0,093
0,215	0,009	0,075	0,078	0,062	0,057	0,148	0,107	0,101
0,220	0,405	0,095	0,090	0,072	0,067	0,171	0,126	0,124
0,225	0,405	0,417	0,104	0,084	0,079	0,201	0,149	0,152
0,230	0,506	0,517	0,121	0,098	0,094	0,237	0,177	0,186
0,235	0,712	0,647	0,140	0,114	0,112	0,281	0,210	0,208
0,240	0,875	0,827	0,160	0,134	0,134	0,334	0,252	0,262
0,245	1,077	1,042	0,179	0,158	0,162	0,400	0,304	0,305
0,250	1,350	1,350	0,205	0,187	0,195	0,484	0,371	0,450
0,255	1,720	1,700	0,237	0,223	0,228	0,582	0,458	0,589
0,260	2,240	2,400	0,280	0,270	0,266	0,735	0,575	0,733
0,265	2,908	2,726	0,345	0,330	0,324	0,906	0,694	0,925
0,264	4,822	3,413	0,374	0,363	0,366	0,997	0,701	0,941
0,266	3,194	3,575	0,405	0,346	0,393	0,991	0,779	1,021
0,268	3,636	4,134	0,441	0,378	0,413	1,088	0,869	1,212
0,270	4,174	4,527	0,482	0,415	0,460	1,215	0,974	1,307
0,272	4,818	5,787	0,529	0,458	0,506	1,369	1,105	1,498
0,274	6,232	7,445	0,586	0,510	0,605	1,544	1,261	1,787
0,276	9,462	11,521	0,655	0,564	0,702			

Продолжение табл.1

 $\eta = 0,90$

m	m_p	n_p	φ_1	ψ_1	χ_1	φ_2	ψ_2	χ_2
0,08	0,002	0,005	0,001	0,001	0	0,001	0,001	0,001
0,10	0,009	0,011	0,006	0,004	0,003	0,009	0,007	0,005
0,105	0,008	0,016	0,008	0,006	0,005	0,013	0,009	0,008
0,110	0,006	0,023	0,010	0,008	0,006	0,019	0,013	0,011
0,115	0,049	0,032	0,014	0,011	0,008	0,024	0,017	0,015
0,120	0,065	0,044	0,018	0,014	0,011	0,028	0,022	0,020
0,125	0,086	0,060	0,023	0,018	0,015	0,040	0,029	0,027
0,130	0,112	0,082	0,029	0,022	0,019	0,051	0,037	0,036
0,135	0,146	0,111	0,036	0,028	0,025	0,065	0,047	0,047
0,140	0,189	0,149	0,045	0,036	0,032	0,083	0,061	0,062
0,145	0,247	0,200	0,056	0,045	0,041	0,106	0,077	0,082
0,150	0,324	0,279	0,069	0,056	0,053	0,134	0,099	0,108
0,155	0,430	0,385	0,087	0,070	0,066	0,172	0,128	0,144
0,160	0,561	0,544	0,109	0,089	0,085	0,220	0,168	0,185
0,165	0,802	0,789	0,138	0,114	0,112	0,283	0,224	0,245
0,170	1,147	1,106	0,179	0,149	0,150	0,366	0,308	0,330
0,172	1,340	1,435	0,198	0,167	0,165	0,448	0,369	0,440
0,174	1,579	1,704	0,222	0,187	0,207	0,543	0,402	0,555
0,176	1,862	2,075	0,249	0,212	0,237	0,662	0,487	0,607
0,178	2,201	2,565	0,282	0,241	0,274	0,808	0,548	0,723
0,180	2,763	3,262	0,321	0,277	0,320	0,970	0,650	0,871
0,182	3,476	4,126	0,369	0,321	0,378	0,966	0,782	1,085
0,184	4,445	5,379	0,430	0,376	0,431	1,173	0,938	1,228
0,186	5,662	7,288	0,509	0,449	0,549	1,456	1,201	1,604
0,188	8,419	10,719	0,605	0,545	0,683	1,880	1,573	1,901

m	m_p	n_p	ψ_p	ϕ_p	χ_p	φ_1	ψ_2	χ_2
0.04	0.004	0.004	0	0	0	0.004	0	0
0.045	0.004	0.004	0.001	0.001	0.001	0.004	0.001	0.001
0.050	0.005	0.005	0.002	0.002	0.002	0.005	0.002	0.002
0.052	0.012	0.008	0.004	0.003	0.002	0.006	0.004	0.004
0.054	0.010	0.040	0.005	0.004	0.003	0.008	0.006	0.005
0.056	0.021	0.013	0.006	0.005	0.004	0.010	0.007	0.006
0.058	0.026	0.017	0.007	0.005	0.004	0.013	0.008	0.008
0.060	0.030	0.022	0.009	0.007	0.006	0.015	0.011	0.010
0.062	0.041	0.026	0.011	0.008	0.007	0.019	0.014	0.013
0.064	0.050	0.036	0.013	0.010	0.008	0.023	0.017	0.016
0.066	0.062	0.046	0.016	0.012	0.011	0.028	0.022	0.020
0.068	0.077	0.059	0.019	0.015	0.013	0.034	0.026	0.025
0.070	0.095	0.075	0.022	0.018	0.016	0.042	0.030	0.031
0.072	0.117	0.096	0.027	0.021	0.019	0.050	0.037	0.039
0.074	0.145	0.122	0.032	0.026	0.024	0.061	0.045	0.048
0.076	0.180	0.158	0.038	0.031	0.029	0.074	0.055	0.060
0.078	0.228	0.206	0.045	0.037	0.036	0.090	0.068	0.075
0.080	0.290	0.272	0.054	0.045	0.045	0.111	0.084	0.097
0.082	0.375	0.365	0.064	0.054	0.056	0.138	0.105	0.128
0.084	0.495	0.501	0.080	0.067	0.071	0.174	0.134	0.164
0.086	0.670	0.708	0.099	0.083	0.091	0.224	0.175	0.220
0.088	0.941	1.030	0.125	0.106	0.119	0.290	0.234	0.304
0.090	1.399	1.606	0.161	0.138	0.160	0.406	0.325	0.436
0.092	2.283	2.699	0.215	0.188	0.226	0.597	0.479	0.664
0.094	4.025	5.112	0.307	0.273	0.341	0.931	0.777	1.174
0.096	6.162	12.272	0.431	0.417	0.504	1.750	1.505	2.291

Т а б л и ц а 2. Известные функции для данных прямоугольного профиля. (Случай предельного состояния сечения)

n	m_p	φ_1	ψ_1	χ_1
0	1,000	0,500	0,444	0
0,05	0,997	0,499	0,442	0,046
0,10	0,990	0,496	0,392	0,086
0,15	0,977	0,483	0,360	0,123
0,20	0,959	0,470	0,375	0,157
0,25	0,937	0,454	0,376	0,190
0,30	0,910	0,434	0,363	0,223
0,35	0,877	0,450	0,394	0,254
0,40	0,840	0,471	0,410	0,284
0,45	0,799	0,496	0,430	0,316
0,50	0,750	0,525	0,454	0,347
0,55	0,697	0,558	0,482	0,407
0,60	0,640	0,594	0,515	0,456
0,65	0,577	0,634	0,549	0,507
0,70	0,510	0,677	0,589	0,556
0,75	0,437	0,724	0,634	0,704
0,80	0,360	0,773	0,683	0,796
0,85	0,277	0,825	0,740	0,903
0,90	0,190	0,881	0,804	1,034
0,95	0,097	0,940	0,883	1,206

* * * * * 3. Аналитические функции для систем некоммутирующих
двухпробного профиля на элементарных
матрицах. *Известия АН УССР, 1978, № 1.*

$$\bar{F}_1 = 0.5, \quad \bar{F}_2/\bar{F}_3 = 0$$

M_1	$M_1 p$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p}$
0,500	0,000	0	0	0,000	0
0,62	0,009	0,003	0,002	0,005	0,003

m	$m_{\text{ср}}$	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,56	0,026	0,028	0,006	0,023	0,009
0,58	0,023	0,026	0,022	0,027	0,029
0,59	0,073	0,022	0,027	0,036	0,026
0,59	0,097	0,029	0,022	0,046	0,024
0,59	0,127	0,027	0,028	0,042	0,044
0,59	0,154	0,046	0,026	0,080	0,056
0,60	0,210	0,028	0,046	0,100	0,071
0,62	0,267	0,071	0,026	0,125	0,090
0,64	0,329	0,028	0,028	0,156	0,112
0,66	0,432	0,107	0,024	0,194	0,140
0,68	0,550	0,131	0,104	0,242	0,175
0,69	0,710	0,159	0,127	0,300	0,222
0,69	0,936	0,196	0,152	0,379	0,232
0,69	1,279	0,243	0,198	0,489	0,268
0,695	1,624	0,266	0,209	0,523	0,295
0,690	1,928	0,271	0,222	0,562	0,426
0,695	1,616	0,268	0,236	0,605	0,461
0,690	1,872	0,306	0,252	0,625	0,502
0,695	2,098	0,327	0,270	0,712	0,548
0,670	2,381	0,350	0,291	0,776	0,604
0,675	2,747	0,376	0,314	0,860	0,672
0,680	3,245	0,407	0,342	0,962	0,759
0,685	3,979	0,444	0,375	1,085	0,874
0,690	5,217	0,491	0,419	1,239	1,049
0,695	6,022	0,529	0,432	1,326	1,249

$$F_A' = 0,5;$$

$$\bar{F}_0/\bar{F}_0 = 0,3$$

m	$m_{\text{ср}}$	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,70	0,002	0	0	0	0
0,72	0,017	0,008	0,006	0,021	0,007
0,74	0,038	0,018	0,022	0,024	0,025
0,76	0,064	0,028	0,020	0,040	0,026
0,78	0,097	0,042	0,029	0,059	0,028
0,80	0,138	0,056	0,029	0,081	0,023
0,82	0,189	0,074	0,022	0,109	0,072
0,84	0,253	0,085	0,066	0,142	0,025
0,86	0,326	0,119	0,026	0,183	0,122
0,88	0,444	0,149	0,109	0,234	0,160
0,90	0,590	0,185	0,127	0,299	0,206
0,92	0,796	0,231	0,173	0,394	0,269
0,94	1,110	0,290	0,221	0,509	0,369
0,945	1,215	0,307	0,235	0,541	0,368
0,950	1,308	0,327	0,251	0,583	0,420
0,955	1,402	0,346	0,268	0,630	0,457
0,960	1,493	0,371	0,289	0,685	0,499
0,965	1,581	0,397	0,310	0,747	0,549
0,970	2,120	0,426	0,335	0,821	0,608
0,975	2,456	0,460	0,364	0,910	0,680
0,980	2,814	0,499	0,398	1,021	0,772
0,985	3,566	0,547	0,440	1,158	0,895
0,990	4,724	0,606	0,495	1,328	1,077
0,995	7,300	0,696	0,576	1,752	1,408

Продолжение табл.3

$$\bar{F}_D' = 0,3; \quad \bar{F}_D / \bar{F}_C = 0,6$$

m	m_p	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,76	0	0	0	0	0
0,78	0,006	0,008	0,005	0,010	0,006
0,80	0,010	0,023	0,015	0,032	0,020
0,82	0,013	0,042	0,029	0,059	0,037
0,84	0,019	0,064	0,044	0,086	0,059
0,86	0,021	0,090	0,063	0,131	0,085
0,88	0,025	0,122	0,086	0,180	0,119
0,90	0,043	0,161	0,115	0,244	0,164
0,92	0,058	0,209	0,152	0,328	0,224
0,94	0,082	0,273	0,202	0,446	0,309
0,96	0,096	0,292	0,217	0,483	0,327
0,98	1,105	0,323	0,234	0,525	0,368
0,985	1,202	0,326	0,252	0,572	0,404
0,99	1,304	0,361	0,273	0,621	0,445
0,995	1,469	0,393	0,287	0,687	0,493
0,999	1,799	0,422	0,323	0,761	0,550
0,995	2,097	0,459	0,364	0,860	0,621
0,990	2,504	0,502	0,391	0,961	0,710
0,985	3,103	0,555	0,437	1,100	0,831
0,980	4,113	0,623	0,497	1,322	1,041
0,955	6,405	0,731	0,597	1,699	1,329

Продолжение табл.3

$$\bar{F}_D' = 0,7; \quad \bar{F}_D / \bar{F}_C = 0$$

m	m_p	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,62	0	0	0	0	0
0,66	0,006	0,008	0,005	0,003	0,002
0,70	0,021	0,027	0,015	0,021	0,009
0,73	0,032	0,040	0,026	0,047	0,022
0,74	0,045	0,055	0,031	0,064	0,027
0,76	0,068	0,080	0,045	0,094	0,034
0,78	0,093	0,097	0,061	0,096	0,052
0,80	0,125	0,096	0,077	0,081	0,063
0,82	0,160	0,096	0,095	0,079	0,068
0,84	0,217	0,098	0,095	0,102	0,073
0,86	0,284	0,073	0,088	0,121	0,094
0,88	0,371	0,082	0,073	0,167	0,121
0,90	0,490	0,115	0,091	0,213	0,155
0,92	0,659	0,144	0,116	0,274	0,202
0,94	0,945	0,183	0,148	0,360	0,269
0,96	1,002	0,174	0,157	0,386	0,281
0,965	1,109	0,206	0,160	0,410	0,285
0,965	1,220	0,220	0,180	0,452	0,342
0,965	1,360	0,235	0,193	0,481	0,374
0,965	1,530	0,262	0,207	0,527	0,411
0,970	1,743	0,271	0,224	0,550	0,456
0,975	2,028	0,293	0,243	0,585	0,506
0,980	2,392	0,368	0,266	0,735	0,576
0,985	2,943	0,349	0,294	0,841	0,637
0,990	3,872	0,389	0,320	0,965	0,801
0,995	5,975	0,445	0,303	1,264	1,042

Продолжение табл.3

$$\bar{F}_D' = 0,7; \quad \bar{F}_D / \bar{F}_C = 0,3$$

m	m _p	φ_1	φ_1	φ_2	φ_2
0,74	0	0	0	0	0
0,76	0,004	0,007	0,004	0,009	0,006
0,78	0,008	0,016	0,008	0,020	0,014
0,80	0,014	0,028	0,019	0,040	0,026
0,82	0,020	0,043	0,033	0,060	0,039
0,84	0,047	0,069	0,042	0,086	0,057
0,86	0,077	0,099	0,066	0,113	0,078
0,88	0,097	0,104	0,075	0,136	0,106
0,90	0,098	0,134	0,088	0,170	0,143
0,92	0,061	0,073	0,127	0,208	0,192
0,94	0,078	0,232	0,167	0,374	0,263
0,945	0,069	0,237	0,179	0,405	0,286
0,950	0,062	0,264	0,192	0,439	0,312
0,955	1,071	0,272	0,207	0,477	0,341
0,960	1,036	0,292	0,224	0,521	0,375
0,965	1,268	0,314	0,242	0,572	0,415
0,970	1,565	0,340	0,264	0,632	0,462
0,975	1,810	0,369	0,288	0,705	0,521
0,980	2,036	0,403	0,319	0,796	0,594
0,985	2,569	0,444	0,364	0,916	0,694
0,990	3,031	0,497	0,401	1,090	0,841
0,995	5,485	0,574	0,472	1,396	1,110

Продолжение табл.3

$$\bar{F}_D' = 0,7; \quad \bar{F}_D / \bar{F}_C = 0,6$$

m	m _p	φ_1	φ_1	φ_2	φ_2
0,80	0	0	0	0	0
0,82	0,003	0,009	0,006	0,012	0,009
0,84	0,008	0,027	0,019	0,037	0,024
0,86	0,011	0,049	0,034	0,069	0,044
0,88	0,032	0,076	0,053	0,109	0,071
0,90	0,078	0,109	0,077	0,160	0,108
0,92	0,456	0,151	0,108	0,229	0,154
0,94	0,620	0,207	0,154	0,328	0,223
0,945	0,700	0,223	0,164	0,357	0,245
0,950	0,783	0,242	0,178	0,391	0,270
0,955	0,881	0,262	0,194	0,430	0,299
0,960	0,998	0,284	0,212	0,475	0,333
0,965	1,140	0,309	0,232	0,528	0,372
0,970	1,327	0,338	0,256	0,589	0,419
0,975	1,547	0,371	0,283	0,662	0,477
0,980	1,860	0,409	0,315	0,756	0,540
0,985	2,321	0,457	0,356	0,878	0,620
0,990	3,098	0,518	0,409	1,037	0,749
0,995	4,560	0,607	0,489	1,374	1,071

Продолжение табл.3

$$\bar{F}_N = 0,9; \quad \bar{F}_N / \bar{F}_C = 0$$

m	m_p	ψ_1	ψ_1	ψ_2	ψ_2
0,66	0	0	0	0	0
0,70	0,006	0,002	0,002	0,003	0,002
0,72	0,013	0,004	0,003	0,007	0,005
0,74	0,023	0,007	0,005	0,012	0,008
0,76	0,036	0,011	0,008	0,018	0,013
0,78	0,054	0,016	0,012	0,027	0,019
0,80	0,077	0,023	0,017	0,038	0,027
0,82	0,107	0,031	0,024	0,052	0,037
0,84	0,147	0,041	0,032	0,070	0,050
0,86	0,199	0,053	0,041	0,093	0,067
0,88	0,266	0,069	0,054	0,123	0,089
0,90	0,363	0,088	0,070	0,161	0,117
0,92	0,498	0,113	0,090	0,212	0,156
0,94	0,706	0,146	0,118	0,285	0,212
0,945	0,777	0,156	0,126	0,308	0,230
0,950	0,859	0,167	0,135	0,333	0,250
0,955	0,954	0,179	0,146	0,363	0,273
0,960	1,068	0,193	0,157	0,396	0,300
0,965	1,208	0,208	0,170	0,435	0,331
0,970	1,381	0,226	0,185	0,480	0,368
0,975	1,606	0,244	0,202	0,536	0,414
0,980	1,892	0,267	0,222	0,605	0,472
0,985	2,363	0,294	0,247	0,696	0,549
0,990	3,123	0,330	0,279	0,828	0,664
0,995	4,845	0,381	0,326	1,060	0,871

Продолжение табл.3

$$\bar{F}'_N = 0,9; \quad \bar{F}'_N / \bar{F}'_C = 0,3$$

m	m_p	ψ_1	ψ_1	ψ_2	ψ_2
0,70	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001
0,80	0,022	0,011	0,007	0,014	0,009
0,82	0,049	0,022	0,015	0,021	0,010
0,84	0,085	0,037	0,025	0,032	0,014
0,86	0,132	0,054	0,038	0,049	0,021
0,88	0,196	0,075	0,053	0,072	0,034
0,90	0,283	0,102	0,073	0,105	0,050
0,92	0,409	0,138	0,099	0,154	0,076
0,94	0,602	0,182	0,134	0,226	0,106
0,945	0,658	0,194	0,145	0,243	0,126
0,950	0,744	0,209	0,157	0,262	0,148
0,955	0,834	0,225	0,170	0,285	0,173
0,960	0,940	0,243	0,185	0,324	0,202
0,965	1,070	0,264	0,202	0,368	0,236
0,970	1,232	0,287	0,221	0,420	0,277
0,975	1,442	0,313	0,243	0,483	0,327
0,980	1,728	0,344	0,270	0,563	0,391
0,985	2,150	0,383	0,303	0,709	0,577
0,990	2,861	0,432	0,345	0,921	0,766
0,995	4,473	0,503	0,412	1,191	0,940

Продолжение табл.3

$$\bar{F}_D = 0,9; \quad \bar{F}_D / \bar{F}_C = 0,9$$

m	m_p	φ_1	φ_1	φ_2	φ_2
0,82	0	0	0	0	0
0,84	0,006	0,002	0,002	0,003	0,002
0,86	0,016	0,002	0,005	0,009	0,008
0,88	0,030	0,046	0,008	0,064	0,042
0,90	0,080	0,076	0,052	0,108	0,070
0,92	0,292	0,113	0,080	0,167	0,111
0,94	0,467	0,164	0,118	0,232	0,170
0,965	0,526	0,179	0,130	0,279	0,188
0,960	0,556	0,196	0,143	0,309	0,201
0,965	0,676	0,205	0,157	0,343	0,226
0,960	0,773	0,236	0,174	0,389	0,266
0,965	0,891	0,259	0,192	0,428	0,299
0,970	1,009	0,285	0,214	0,483	0,340
0,970	1,128	0,286	0,229	0,548	0,381
0,980	1,489	0,302	0,269	0,631	0,463
0,985	1,873	0,397	0,306	0,744	0,543
0,990	2,182	0,454	0,356	0,901	0,674
0,995	3,987	0,539	0,432	1,116	0,848

Т а б л и ц а 4. Расчетные функции для балок нелинейноупругого дуплексного профиля из углеродистого материала с линейным упрочнением ($E_D/E = 0,01$)

$$\bar{F}_D = 0,5; \quad \bar{F}_D / \bar{F}_C = 0$$

m	m_p	φ_1	φ_1	φ_2	φ_2
0,58	0,001	0	0	0,001	0
0,62	0,009	0,003	0,002	0,004	0,003

Продолжение табл.4

m	m_p	φ_1	φ_1	φ_2	φ_2
0,66	0,025	0,008	0,006	0,013	0,009
0,70	0,052	0,016	0,012	0,026	0,019
0,74	0,084	0,028	0,021	0,047	0,030
0,78	0,119	0,045	0,035	0,077	0,055
0,82	0,254	0,069	0,054	0,130	0,086
0,86	0,400	0,102	0,080	0,192	0,131
0,90	0,628	0,149	0,118	0,274	0,200
0,94	1,007	0,217	0,174	0,414	0,306
0,98	1,680	0,320	0,261	0,640	0,482
1,02	2,868	0,484	0,403	1,023	0,784
1,06	4,620	0,741	0,626	1,625	1,260
1,10	6,812	1,106	0,949	2,441	1,897
1,14	9,141	1,576	1,346	3,422	2,646
1,18	11,543	2,137	1,831	4,534	3,670
1,22	13,905	2,797	2,364	5,715	4,843
1,26	16,426	3,483	2,934	6,973	5,261
1,30	18,886	4,244	3,552	8,284	6,184
1,34	21,302	5,054	4,199	9,639	7,126
1,38	23,620	5,904	4,872	11,027	8,100
1,42	26,291	6,791	5,565	12,447	9,078
1,46	28,716	7,708	6,275	13,888	10,063
1,50	31,237	8,652	6,999	15,351	11,056

$$\bar{F}_0' = 0,54 \quad \bar{F}_0 / \bar{F}_c = 0,3$$

m	m_p	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
0,70	0,002	0	0	0	0
0,74	0,007	0,007	0,012	0,024	0,035
0,78	0,004	0,040	0,028	0,057	0,037
0,82	0,010	0,071	0,050	0,105	0,069
0,86	0,023	0,084	0,082	0,173	0,086
0,90	0,025	0,073	0,027	0,273	0,086
0,94	0,032	0,258	0,134	0,426	0,290
0,98	1,529	0,383	0,299	0,670	0,485
1,02	2,499	0,537	0,472	1,108	0,864
1,06	4,469	0,634	0,746	1,797	1,303
1,10	6,604	1,012	1,129	2,698	2,019
1,14	8,895	1,959	1,605	3,778	2,843
1,18	11,251	2,634	2,034	4,972	3,673
1,22	13,635	3,397	2,756	6,348	4,575
1,26	16,035	4,203	3,399	7,582	5,504
1,30	18,443	5,071	4,072	8,961	6,454
1,34	20,856	5,961	4,769	10,395	7,443
1,38	23,270	6,986	5,484	11,887	8,383
1,42	25,688	7,900	6,264	13,279	9,360
1,46	28,109	8,899	6,965	14,761	10,345
1,50	30,530	9,919	7,707	16,254	11,338

$$\bar{F}_0' = 0,5; \quad \bar{F}_0 / \bar{F}_c = 0,6$$

m	m_p	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
0,74	0	0	0	0	0
0,78	0,015	0,007	0,005	0,010	0,006
0,82	0,099	0,041	0,028	0,056	0,038
0,86	0,207	0,095	0,060	0,124	0,081
0,90	0,397	0,149	0,106	0,223	0,148
0,94	0,726	0,242	0,177	0,378	0,257
0,98	1,340	0,306	0,290	0,636	0,445
1,02	2,488	0,621	0,480	1,039	0,784
1,06	4,346	0,993	0,796	1,615	1,328
1,10	6,352	1,512	1,210	2,701	2,090
1,14	8,599	2,054	1,728	3,909	2,849
1,18	10,900	2,884	2,313	5,244	3,718
1,22	13,228	3,707	2,945	6,451	4,622
1,26	15,564	4,579	3,621	7,809	5,547
1,30	17,909	5,494	4,300	9,205	6,496
1,34	20,257	6,446	5,012	10,627	7,436
1,38	22,610	7,438	5,376	12,073	8,382
1,42	24,963	8,433	6,471	13,536	9,364
1,46	27,317	9,459	7,214	15,012	10,318
1,50	29,673	10,500	7,984	16,500	11,287

$$F'_n = 0,7; F_n / F_c = 0$$

m	m_p	φ_1	φ_1	φ_2	φ_2
0,62	0	0	0	0	0
0,66	0,006	0,002	0,001	0,003	0,002
0,70	0,020	0,006	0,003	0,011	0,007
0,74	0,047	0,024	0,012	0,034	0,027
0,78	0,082	0,027	0,020	0,045	0,032
0,82	0,140	0,045	0,035	0,077	0,055
0,86	0,229	0,071	0,055	0,125	0,090
0,90	0,350	0,109	0,086	0,200	0,145
0,94	0,512	0,168	0,125	0,321	0,237
0,98	1,420	0,263	0,215	0,538	0,407
1,02	2,820	0,435	0,365	0,970	0,753
1,06	5,571	0,746	0,638	1,746	1,374
1,10	7,996	1,219	1,052	2,832	2,224
1,14	10,970	1,840	1,587	4,130	3,281
1,18	13,982	2,584	2,217	5,571	4,381
1,22	17,038	3,429	2,949	7,116	5,408
1,26	20,082	4,397	3,677	8,739	6,562
1,30	23,131	5,355	4,479	10,432	7,745
1,34	26,226	6,421	5,316	12,132	8,948
1,38	29,261	7,517	6,181	13,820	10,164
1,42	32,348	8,644	7,088	15,721	11,391
1,46	35,424	9,848	7,974	17,548	12,626
1,50	38,482	11,053	8,896	19,397	13,860

$$F'_n = 0,7; F_n / F_c = 0,3$$

m	m_p	φ_1	φ_1	φ_2	φ_2
0,74	0	0	0	0	0
0,78	0,005	0,013	0,011	0,022	0,014
0,82	0,027	0,041	0,029	0,059	0,038
0,86	0,137	0,076	0,054	0,113	0,075
0,90	0,366	0,127	0,092	0,198	0,134
0,94	0,670	0,204	0,152	0,322	0,230
0,98	1,248	0,329	0,253	0,574	0,411
1,02	2,496	0,519	0,445	1,064	0,789
1,06	5,060	0,872	0,796	1,953	1,475
1,10	7,876	1,589	1,375	3,183	2,401
1,14	10,828	2,374	1,983	4,627	3,458
1,18	13,824	3,288	2,701	6,206	4,581
1,22	16,840	4,301	3,504	7,977	5,749
1,26	19,864	5,391	4,382	9,844	6,943
1,30	22,892	6,543	5,233	11,400	8,154
1,34	25,925	7,743	6,140	13,225	9,398
1,38	28,956	8,993	7,089	15,079	10,670
1,42	31,991	10,256	8,006	16,946	11,949
1,46	35,027	11,546	8,958	18,829	13,093
1,50	38,062	12,879	9,919	20,747	14,340

Продолжение табл.4

$$\bar{F}_0' = 0,7; \quad \bar{F}_0 / \bar{F}_c = 0,6$$

m	m_p	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
0,78	0	0	0	0	0
0,82	0,027	0,008	0,006	0,011	0,007
0,86	0,106	0,047	0,032	0,066	0,042
0,90	0,258	0,103	0,072	0,151	0,099
0,94	0,538	0,189	0,136	0,290	0,196
0,98	1,139	0,321	0,248	0,544	0,380
1,02	2,337	0,500	0,467	1,076	0,781
1,06	4,323	1,080	0,874	2,053	1,518
1,10	7,732	1,808	1,458	3,901	2,492
1,14	10,658	2,701	2,179	4,914	3,582
1,18	13,622	3,789	2,976	6,569	4,732
1,22	16,602	4,828	3,827	8,308	5,983
1,26	19,588	6,006	4,714	10,090	7,415
1,30	22,579	7,234	5,627	11,917	8,929
1,34	25,573	8,502	6,559	13,774	9,553
1,38	28,568	9,804	7,504	15,652	10,781
1,42	31,563	11,132	8,469	17,547	12,025
1,46	34,560	12,479	9,422	19,456	13,250
1,50	37,556	13,844	10,391	21,376	14,490

Продолжение табл.4

$$\bar{F}_0' = 0,9; \quad \bar{F}_0 / \bar{F}_c = 0$$

m	m_p	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
0,68	0	0	0	0	0
0,70	0,006	0,002	0,002	0,003	0,002
0,74	0,022	0,007	0,005	0,011	0,008
0,78	0,053	0,016	0,012	0,026	0,019
0,82	0,104	0,030	0,023	0,051	0,036
0,86	0,191	0,052	0,040	0,090	0,065
0,90	0,340	0,095	0,067	0,153	0,111
0,94	0,619	0,137	0,109	0,260	0,191
0,98	1,244	0,227	0,186	0,463	0,350
1,02	2,369	0,412	0,348	0,831	0,728
1,06	5,040	0,709	0,682	1,896	1,498
1,10	9,320	1,090	1,211	3,248	2,543
1,14	12,919	2,193	1,948	4,865	3,797
1,18	16,552	3,129	2,689	6,649	5,100
1,22	20,199	4,197	3,570	8,550	6,469
1,26	23,853	5,385	4,514	10,539	7,876
1,30	27,521	6,614	5,508	12,596	9,309
1,34	31,191	7,890	6,549	14,708	10,761
1,38	34,830	9,302	7,632	16,853	12,226
1,42	38,452	10,732	8,687	19,039	13,708
1,46	42,053	12,182	9,753	21,253	15,188
1,50	45,634	13,677	10,914	23,492	16,680

$$F'_c = 0,9; \quad F'_H / F'_c = 0,3$$

m	m _p	ψ_1	ψ_1	ψ_2	ψ_2
0,78	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001
0,82	0,003	0,002	0,003	0,003	0,003
0,86	0,005	0,003	0,005	0,005	0,005
0,90	0,008	0,005	0,008	0,008	0,008
0,94	0,012	0,008	0,012	0,012	0,012
0,98	0,018	0,012	0,018	0,018	0,018
1,02	0,025	0,018	0,025	0,025	0,025
1,06	0,035	0,025	0,035	0,035	0,035
1,10	0,048	0,035	0,048	0,048	0,048
1,14	0,065	0,048	0,065	0,065	0,065
1,18	0,085	0,065	0,085	0,085	0,085
1,22	0,110	0,085	0,110	0,110	0,110
1,26	0,140	0,110	0,140	0,140	0,140
1,30	0,175	0,140	0,175	0,175	0,175
1,34	0,215	0,175	0,215	0,215	0,215
1,38	0,260	0,215	0,260	0,260	0,260
1,42	0,310	0,260	0,310	0,310	0,310
1,46	0,365	0,310	0,365	0,365	0,365
1,50	0,425	0,365	0,425	0,425	0,425

$$F'_H = 0,9; \quad F'_H / F'_c = 0,6$$

m	m _p	ψ_1	ψ_1	ψ_2	ψ_2
0,82	0	0	0	0	0
0,86	0,004	0,001	0,004	0,004	0,004
0,90	0,010	0,002	0,010	0,010	0,010
0,94	0,018	0,003	0,018	0,018	0,018
0,98	0,028	0,005	0,028	0,028	0,028
1,02	0,040	0,008	0,040	0,040	0,040
1,06	0,055	0,012	0,055	0,055	0,055
1,10	0,075	0,018	0,075	0,075	0,075
1,14	0,100	0,025	0,100	0,100	0,100
1,18	0,130	0,035	0,130	0,130	0,130
1,22	0,165	0,048	0,165	0,165	0,165
1,26	0,205	0,065	0,205	0,205	0,205
1,30	0,250	0,085	0,250	0,250	0,250
1,34	0,300	0,110	0,300	0,300	0,300
1,38	0,355	0,140	0,355	0,355	0,355
1,42	0,415	0,175	0,415	0,415	0,415
1,46	0,480	0,215	0,480	0,480	0,480
1,50	0,550	0,260	0,550	0,550	0,550

4. Аргирес Д.А. Современные положения в методах расчета конструкций с применением металлов. М., Стройиздат, 1962.
5. Васильев В.М. О некоторых результатах В.М. Пандерова, относящихся к теории упругоэластических деформаций. - ИММ, 1966, вып. 40, с. 767-771.
6. Барановский В.В., Шемелюк Г.П. Экспериментальные исследования устойчивости стенок балки двутавровой формы при действии сжимающих усилий. - Труды ИИИ, 1975, вып. 503, с. 13-23.
7. Валуев Н.А. Расчет на предельную упругость, прочность и пластичность конструкций. - В кн.: Строительная механика в СССР, 1967-1967, М., Стройиздат, 1967, с. 213-238.
8. Белецкий Л.М. Вопросы проектирования переключателей. - Труды КИИПИА, 1962, вып. 16, с. 19-26.
9. Белецкий Л.М. Об учете степеней сбалансированности нагрузки при упругоэластическом изгибе. - Строительная механика в расчете конструкций, 1963, № 5, с. 29-32.
10. Белецкий Л.М. Вопросы сложного изгиба балки в плоскости деформации стенок при многоточечной нагрузке. - В сб. ИТО судостроения. Л., 1967, вып. 62, с. 90-103.
11. Белецкий Л.М. Основы принципов деформации корпуса промышленных судов. - В сб.: Судостроительная механика промышленности. Л., Транспорт, 1972, вып. 49, с. 37-40.
12. Белецкий Л.М. Базисные деформации судовых конструкций. Л., Судостроение, 1973.
13. Белецкий Л.М. Численные решения физических и геометрических нелинейных задач изгиба пластин. - В сб. ИТО судостроения. Л., 1973, вып. 100, с. 50-67.

14. Белецкий Л.М. О деформировании пластин сложного строения при больших изогнутых нагрузках. - В сб.: Вопросы судостроения. Серия I (Проектирование судов). Л., Судостроение, 1974, вып. 2(4), с. 23-32.
15. Белецкий Л.М. Вопросы технической эксплуатации корпусов промышленных судов. - Рыбное хозяйство, 1975, № 10, с. 35-38.
16. Белецкий Л.М. Справочные данные для расчета местных нагрузок, действующих на корпус судов. - Судостроение, 1976, № 4, с. 10-12.
17. Белецкий Л.М. Прямые нагрузки судовых переключателей при изогнутых изгибах. - В сб.: Вопросы судостроения. Серия «Проектирование судов». ИИИИ «Гидро», 1978, вып. 47, с. 25-37.
18. Белецкий Л.М., Неродов А.Ю. Некоторые особенности деформирования балки двутавровой формы при сжатии металла. - Труды КИИПИА, 1972, вып. 41, с. 23-27.
19. Белецкий Л.М., Науговец А.Е. К вопросу о прочности корпусов промышленных судов. - Научно-технический сборник. Регистр СССР. Л., Транспорт, 1976, вып. 5, с. 93-100.
20. Белецкий Л.М., Макаров В.В. Новые методы для изучения работы конструкций на предельную упругость. - Сборник научно-технической и промышленной информации. ТООИИИ, 1966, № 45-46-47-48-49-50.
21. Белецкий Л.М., Макаров В.В. Пластичность материалов при изгибах пластин переключателей. - Судостроительная механика промышленности, 1975, № 23, с. 49-62.
22. Белецкий Л.М., Тонкий В.В. Справочные данные для расчета местных нагрузок, действующих на борты промышленных судов при изогнутых изгибах. - В сб. ИТО судостроения. Труды института Строительная механика промышленности по совершенствованию методов расчета прочности судовых корпусных конструкций. Л., 1976, с. 56-67.
23. Белецкий Л.М., Набукин В.В. О изгибе тонких пластин грузами падающих судов с горизонтальным способом погружения. - Научно-технический сборник. Регистр СССР. Л., Транспорт, 1976, вып. 3, с. 328-337.
24. Белецкий Л.М., Набукин В.В. К оценке влияния многократных действующих местных нагрузок на прочность профилей обшивки. - Судостроение, 1978, № 3, с. 9-12.

22. Беликин В. П. Работы элементов плавучих перекрестий после аварии устойчивости. Л., Судостроение, 1966.
23. Баргер М. А. Крутые пластичные оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1946.
24. Белотих В. В., Гольденберг М. К., Смирнов А. Ф. Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития. М., Стройиздат, 1972.
25. Бейцон Г. В. Совершенствование несимметричных оболочек, работающих с оболочкой. - Труды ЦИМ им.акад. А.Н. Крылова, 1968, вып.190, с.158-161.
26. Бейцон Г. В., Невилев В. М., Таубин Г. О. Прочность судовых конструкций из алюминиевых сплавов. Л., Судостроение, 1962.
27. Бейцон Г. В., Радва О. М. Комплексный подход к проблеме обеспечения прочности судов. - В сб.: Прочность судов. Л., Судостроение, 1970, с.71-150.
28. Бонин В. Б., Сидоров Е. А. Основы теории двух итерационных методов в теории пластичности. - В сб.: Методы решения задач упругости и пластичности. Горький, 1973, вып.7, с.39-60.
29. Брейхман П. В. Исследования больших пластических деформаций в металле. М., МГ, 1966.
30. Бруке Е. М. Прочность стальных балок. М.-Л., Стройиздат, 1963.
31. Букурджия А. А., Катанов Л. М. Теория пластичности. - В кн.: Металлы в СССР за 50 лет. Механика твердого деформируемого тела. М., Наука, 1972, т.3, с.414-454.
32. Варвак П. М. Развитие и применение метода систем к расчету пластин. Ч.1, Киев, изд.АН УССР, 1949; Ч.2, Киев, изд.АН УССР, 1952.
33. Варвак П. М., Варвак Л. П. Метод систем в задачах расчета строительных конструкций. М., Стройиздат, 1977.
34. Волков В. М. Методы системных оценок и приложения теории пластичности. Горький, изд.ИТМ, 1972.
35. Волков А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., Наука, 1967.
36. Геммерлинг А. В., Кузнецов Б. Н. Прочность оболочек сшитых-пластичных стержней. - Строительная механика и расчет сооружений, 1967, № 6, с.21-25.
37. Гешвинд Л., Пратер В. Несущая способность крутых пластин. - Механика (Перевод, со.переводом), 1966, № 3.
38. Гохфельд Л. А. Несущая способность конструкций в условиях текучести. М., Машиностроение, 1970.
39. Гохфельд Л. А., Чернявский О. В. Теория предельной пластичности, ее современное состояние, приложения к несущим элементам. - Труды Челябинского политеха. ин-та, Челябинск, 1974, вып.151, с.3-32.
40. Гуляев Л. Н., Хали О. Р. Упругость и пластичность. М., МГ, 1960.
41. Дикевич Н. Л. Статика упругоупругих балок судовых конструкций. Л., Судостроение, 1967.
42. Дикевич Н. Л. Поведение упругоупругих стержней при резком увеличении от центра сжатия. - Докл.АН СССР, МТТ, 1976, № 4, с.98-107.
43. Дубинский А. М. Расчет несущей способности телескопических плит в оболочке. Киев, Будинкостроение, 1976.
44. Ершов Н. О., Свечников О. М. Прочность стальных и алюминиевых конструкций речных судов. Л., Судостроение, 1970.
45. Ершов Н. О., Свечников О. М. Прочность и конструктивная прочность конструкций судов внутреннего плавания. Л., Судостроение, 1977.
46. Тухов А. М. Некоторые особенности поведения металлов при упругоупругих деформациях. - В кн.: Вопросы теории пластичности. М., изд.АН СССР, 1961, с.30-37.
47. Зухов А. М. Задача прочности малопластичной стали при комбинированной температуре. - Проблемы прочности, 1972, № 4, с.54-60.
48. Зенкович О. Метод конечных элементов в механике. М., Мир, 1976.
49. Мизес Л. Д. Теория идеальной пластичности. М., Наука, 1966.
50. Мизес Л. Д., Бикенцев Г. В. Теория упругоупругих пластичных тел. М., Наука, 1971.
51. Мизес Л. Д. Пластичность. М.-Л., Гостехиздат, 1948.
52. Мизес Л. Д. Классическая теория упругости и устойчивости элементов арочного корпуса. Л., Судостроение, 1972.

53. Качанов Л. М. Теория пластичности. М., Сибиряк, 1960.
54. Качанов Л. М. Вариационные методы в теории пластичности. - В кн.: Механика твердого тела. М., Наука, 1966, с.177-190.
55. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М., Наука, 1969.
56. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. М., Наука, 1974.
57. Елинин В. Д. Курс по теории пластичности. М., изд. МГУ, 1972.
58. Елинин В. Д. Непротиворечивость пластических конструкций (обзор). - В сб.: Проблемы теории пластичности. Механика. Новое в зарубежной науке. М., Мир, 1976, № 7, с.145-177.
59. Ингето М. В. Основы современной вариационной и математической теории пластичности. Рига, Зинатне, 1971.
60. Кофтер В. Т. Основы теории теории упругопластических сред. М., ИИ, 1967.
61. Козляков В. В. О расчете плоских перекрытий в упругопластической стадии. - Труды ИГиЛ, 1967, вып.9, с.46-65.
62. Козляков В. В. Упругопластический метод сплошных перекрытий в форме из упругопластического материала с учетом деформаций сдвига. - В сб. НТО судпром. Л., 1962, вып.42, с.55-84.
63. Козляков В. В. Об оценке предельной прочности перекрытий, нагруженных поперечной нагрузкой, при одностороннем сдвиге. - В сб. НТО судпром. Л., 1966, вып.85, с.45-64.
64. Козляков В. В. Об использовании метода предельных нагрузок при оценке предельной прочности в проектировании сплошных перекрытий. - Научно-технический сборник. Регистр СССР, Л., 1974, вып.1, с.384-376.
65. Козляков В. В. Анализ запаса прочности решетчатых конструкций по методу предельных нагрузок. - В сб. НТО судпром. Л., 1974, вып.8, с.137-143.
66. Козляков В. В., Лазарев В. Е. Экспериментальное исследование упругопластического поведения моделей плоских перекрытий сплошных судов. - Труды ИГиЛ, 1962, вып.38, с.75-87.

67. Коробов В. И. Упругопластические деформации оболочек. М., Машиностроение, 1971.
68. Коробов В. И., Ростопцев Д. М., Сиверо Н. Л. Прочность оболочек. Л., Судостроение, 1974.
69. Купная Л., Леонов Р. О линейном программировании в теории предельного равновесия. - Механика (перевод. из пер.), 1966, № 2, с.150-160.
70. Кудрявцев Л. Н. Теоретический метод расчета прочности оболочек изогнутой плоской поверхности с учетом пластичности деформаций. - Труды ИГиЛ им. А. Н. Крылова, 1966, вып.89, с.45-49.
71. Лавров В. П. К вопросу о механических взаимодействиях трещин в корабельных сварных швах и в конструкциях трубчатых аппаратов трещинообразования. - Труды ИГиЛ, 1970, вып.82, с.29-36.
72. Лемский В. С. Введение в теорию пластичности. М., изд. МГУ, 1968.
73. Лемский В. Р. Пластические течения гибких кружков пластичных из упругопластического материала. - Труды ИГиЛ СССР, ГИИ, Механика и машиностроение, 1960, № 2.
74. Лемский В. Р. Равновесие упругопластических и упругопластических пластин и оболочек (обзор). - Изв. вузов, 1964, № 3, с.605-615.
75. Лемский В. Р. Некоторые вопросы теории гибких упругопластических пластин и оболочек. - В кн.: Материалы методической школы по проблеме «Механика и геометрические нелинейные теории пластин и оболочек», Тарту, изд. Тартуского гос. ун-та, 1966, т.1, с.73-103.
76. Лемский В. Р. Физическая теория пластичности. - В сб.: Проблемы теории пластичности, Механика. Новое в зарубежной науке. М., Мир, 1976, № 7, с.7-68.
77. Лемский В. Р., Рабров Л. И. Сущность метода оболочек. Л., Судостроение, 1973.
78. Лемский В. Р., Степанов В. Н. Алгоритмы расчета внутренней способности оболочек методом линейного программирования. - В сб. НТО судпром. Л., 1974, вып.39, с.87-92.
79. Лемский В. Р. Некоторые вопросы приспособленности упругопластической теории. - Строительная механика и расчет сооружений, 1967, № 1, с.31-34.

80. Макарова В. В. Экспериментальное исследование особенностей работы перекрывающих двутавровых балок. - Труды ИТНБ, 1970, вып. 53, с. 13-29.

81. Максимович А. М. Прочность морских транспортных судов. Л., Судостроение, 1976.

82. Максимов Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. 1-е изд. М., Машиностроение, 1968; 2-е изд., перераб. и дополн., 1976.

83. Матвеев П. М. Опыт проф. Райдер-Исбидена. - Труды НИИТОС, Л., 1939, вып. 3, с. 13-19.

84. Митинский А. Е. О неравномерном состоянии в статически неопределимых системах. - Труды НИИТОС, Л., 1939, вып. 3, с. 48-53.

85. Москвитин В. В. Пластичность при переменных нагрузках. М., изд. МГУ, 1968.

86. Ченда А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 1. М., ИЛ, 1964; Т. 2. М., Мир, 1968.

87. Нил Б. Г. Расчет конструкций с учетом пластических свойств материала. М., Гостройиздат, 1961.

88. Нормы прочности морских судов/Регистр СССР. Л., Морской флот, 1958; 1962.

89. Оден Л. Упругие элементы в нелинейной механике сплошных сред. М., Мир, 1976.

90. Олмах В., Мрув Э., Пажия П. Современное состояние теории пластичности. М., Мир, 1964.

91. Олмах В., Селчук А. Напряженное состояние объектов. М., Мир, 1963.

92. Флат В. Т. Пределные равновесия упругих конструкций объектов. - Механика (перевод с немецкого), 1962, № 4, с. 106-116.

93. Флат В. Т., Прегер В. Пределные равновесия объектов вращения. - Механика (перевод с немецкого), 1965, № 5, с. 107-119.

94. Павлюков В. А., Таубин Г. О., Флякман М. В. К расчету листов напряжений в изгибаемых пластинках с начальной погрешкой, работающим в условиях сложного упругопластического изгиба. - Труды ИИИ им.акад. А. Н. Крылова, 1966, вып. 227, с. 3-35.

95. Павлюков В. А., Таубин Г. О., Флякман М. В. Сложный упругопластический изгиб пластинок из анизотропной упругости сучных пластин, нагруженных переменной нагрузкой в жестких начальной поперечной погрешкой. - Труды ИИИ им.акад. А. Н. Крылова, вып. 227, с. 16-38.

96. Павлов О. М. Сложные методы и вопросы пластичности, пластичности и начальной упругопластичности. - Строительная механика и расчет сооружений, 1961, № 4, с. 19-23.

97. Павлов О. М. О перспективных направлениях исследований в области прочности транспортных судов. - В сб.: Вопросы строительства. Серия «Проектирование судов», изд. ИИИ «Руд», 1978, вып. 17, с. 3-47.

98. Павлов О. М., Павлюков В. А., Фераман О. Г. Сложный упругопластический деформированный пластин сучных конструкций. - В сб.: Вопросы строительства. Серия «Проектирование судов», изд. ИИИ «Руд», 1978, вып. 17, с. 30-40.

99. Павлов О. М., Спирин В. Е. Анизотропные объекты в строительстве. Л., Судостроение, 1977.

100. Нахворон В. М. О совместности методов упругих решений в теории упругопластических деформаций объектов. - ИИИ, 1949, вып. 13, с. 319-322.

101. Нахворон В. М. Труды по прочности морских. Л., Судостроение, 1956.

102. Нахворон В. М. Строительная механика морских. Т. 1-3. Л., Судостроение, 1961; Т. 4. Л., Судостроение, 1963.

103. Напряжения сучных конструкций. Л., Судостроение, 1977.

Авт.: Карабаев В. В., Иванов Н. А., Навков В. В., Окладов В. В., Числен М. М.

104. Погребинский М. В. Теория пластичности. - В сб.: Расчеты механики в СССР. М., Наука, 1967.

105. Постнов В. А. Теория пластичности и ползучести. Л., изд. ИИИ, 1975.

106. Постнов В. А. Численные методы расчета сучных конструкций. Л., Судостроение, 1977.

107. Постнов В. А., Хризуран М. Е. Метод конечных элементов в расчетах сучных конструкций. Л., Судостроение, 1974.

408. Почтовая В. М., Пятягорский В. И. Расчет и оптимальное проектирование конструкций с учетом пластичности. М., Наука, 1978.
409. Фраггер Э. Предельная теория пластичности. М., Высшая школа, 1964.
410. Ржицкий А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М., Гостройиздат, 1964.
411. Ржицкий А. Р. Расчет пластин и оболочек каноническим методом предельного равновесия. - В кн.: Материалы второй школы по проблеме "Аналитика и геометрические методы задачи теории пластин и оболочек", Тарту, изд. Тартуского гос. ун-та, 1968, т. 4, с. 418-428.
412. Ржицкий А. Р. Теория полноты. М., Стройиздат, 1968.
413. Работков В. М. Полноты элементов конструкций. М., Наука, 1968.
414. Семенов А. Н. Коллективные неустойчивые свойства изогнутой оболочки при местных нагрузках. - В сб. НИО судпрое, 1966, вып. 85, с. 413-418.
415. Сметов Е. Е. Устойчивость стержневых систем в упругопластическом состоянии. Л., Стройиздат, 1968.
416. Соколовский В. В. Теория пластичности. М., Высшая школа, 1969.
417. Соколовский Н. С., Абрамзон К. Г., Серов В. В. Прочность и устойчивость пластин и оболочек судного корпуса. Л., Судостроение, 1967.
418. Справочник по строительной механике корабля. Под ред. В. А. Шенникова. Т. 1 и 2. Л., Судостроение, 1968; Т. 3. Л., Судостроение, 1969.
419. Степанчук В. Н. Основы пластичности (общие закономерности и методы расчета). Киевское, изд. ВКН, 1974.
420. Степанчук В. Н., Лужинский О. В. Построение линий оценки неустойчивости прямоугольных пластин. - Труды ВКН, 1976, вып. 98, с. 28-32.
421. Стрелявская А. Е. Коллективные прочностные характеристики стержней на предельную упругость. Киев, изд. АН УССР, 1968.
422. Стрелявская А. Е. Предельное состояние рам на тонкостенных стержнях при изгибе с кручением. Киев, Научное круже, 1964.
423. Стрелявская А. Е. Упругопластическое деформирование и неустойчивость пластин оболочек (обзор). - Прикладная механика, 1973, в. 8, с. 3-25.
424. Стрелявская А. Е. Неразрывные методы упругопластического расчета оболочек при локальной нагрузке. - Прикладная механика, 1976, в. 4, с. 47-59.
425. Стрелявская А. Е., Колгана В. А., Матюшко С. Е. Напряжения в пластине на предельной упругости. Киев, Научное круже, 1971.
426. Строительная механика корабля и теория упругости. Т. 2. Л., Судостроение, 1968.
Авт.: Курдюмов А. А., Локшин А. Э., Мещеряков Р. А., Ковалев В. В.
427. Сулоев В. П., Качаев Ю. П., Сингтаренко В. Н. Строительная механика корабля и основы теории упругости. Л., Судостроение, 1973.
428. Тарова Г. О. Напряжения в судном корпусе, соединенном с обшивкой. - Труды ЦНИИ механики А. Н. Крылова, 1964, вып. 83, с. 54-65.
429. Теория пластичности. М., МГУ, 1948.
430. Угодчиков А. Г., Коретких Ю. Г. Некоторые методы решения на ЭВМ физических нелинейных задач теории пластин и оболочек. Киев, Научное круже, 1971.
431. Фериш А. Л. Систематическое исследование коллективных особенностей деформаций в пластине при многостепенной нагрузке. - Труды ЦНИИМХ, 1970, вып. 22, с. 261-287.
432. Фелиш А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т. 1. М., Наука, 1976.
433. Фришман Я. Е. Механические свойства материалов. 4.1 (Деформация и разрушение). М., Машиностроение, 1974.
434. Хейл С. Г. Расчет конструкций с учетом пластических свойств материалов. М., Наука, 1963.
435. Чаров А. А. Метод конечного программирования при расчете упругопластических систем. М., Стройиздат, 1969.
436. Чувпковский В. С. Численные методы расчета в строительной механике корабля. Л., Судостроение, 1976.
437. Чувпковский В. С., Павлов О. М., Смирнов В. М. Оболочки судных конструкций. Л., Судостроение, 1966.

438. Шабунина В. П. Экспериментальные исследования пластического течения вязких тел при прямоугольных деформациях. - Труды КТИИПХ, 1970, вып. 36, с. 75-83.

439. Шабунина В. П. Исследования остаточных напряжений и остаточной формы при обжатии поперечений. Доклады на Всесоюзном симпозиуме по проблемам пластичности, 1974, в 34, Ред. М. "Машинист", 1974, 118-122.

440. Шайхуров Г. С. О поведении пластичности и обжатия на примере упрочности. - В кн.: Пластичность твердого тела. М., Наука, 1966, с. 387-411.

441. Широков Е. Ф. Некоторые особенности упрочнения-пластического течения вязких тел при деформации. - В кн.: Пластичность и прочность вязких тел, 1970, вып. 1 и 2.

442. Широков Е. Ф. Прочность при статическом и циклическом нагружении. М., Наука, 1968.

443. Шимановский В. А. Сборник статей по деформации. М., Спутник, 1964.

444. Baker E. J., Eringen C. Plastic Design of Frames. London, Cambridge Univ. Press, 1968.

445. Belyukh I. P. Numerical Methods in Stress Analysis. - Introduction to Design and Planning. Moscow Univ. Press, Moscow, 1968.

446. Chakrabarti A., Chakrabarti S. Plastic phenomena. - London, Pitman, 1971.

447. Dorn J. L., Johnson R. Plastic Deformation and Failure of Thin Sheet Metals. Int. J. Mech. Sci., 1968, 10, p. 171.

448. Gao J. H. Plastic Element Analysis. London, New Jersey, Prentice Hall, 1970.

449. Gao J. H. An Approximation to the Plastic Deformation of a Rectangular Plate Under Uniform Load With Design Applications. - Int. J. Mech. Sci., 1971, 9, p. 11.

450. Gao J. H. The Plastic Design Method for Rectangles. New York, Wiley, 1971.

451. Gao J. H. The Plastic Design Method for Rectangles. New York, Wiley, 1971.

452. Liu S. H. Theory of Plasticity. New York, Wiley, 1968.

453. Mises H. V. Plasticity Phenomena and Generalized Flow. Cambridge, MIT Press, 1970.

454. Mises H. V. Plasticity, Theory and Application. New York, Macmillan Co., 1968.

455. Mises H. V. Plasticity and the Generalized Flow. Cambridge, MIT Press, 1970.

456. Mises H. V. Plasticity and the Generalized Flow. Cambridge, MIT Press, 1970.

457. Mises H. V. Plasticity and the Generalized Flow. Cambridge, MIT Press, 1970.

458. Mises H. V. Plasticity and the Generalized Flow. Cambridge, MIT Press, 1970.

459. Mises H. V. Plasticity and the Generalized Flow. Cambridge, MIT Press, 1970.

460. Mises H. V. Plasticity and the Generalized Flow. Cambridge, MIT Press, 1970.

Упрочнение обжатием	3
Вязкость	7

Глава 1. МАТЕРИАЛ КИРКА ЗА ПЛАСТИЧНОСТЬЮ	16
--	----

§ 1. Пластические деформации при одностороннем напряжении	16
состоянии	16
1.1. Вязкость напряжений при растяжении	16
1.2. Упрочнение вязкости	20
1.3. Вязкость и упрочнение при растяжении	20
1.4. Вязкость развития пластических деформаций	21
1.5. Упрочнение	24

§ 2. Упрочнение пластичности	25
состоянии	25
2.1. Упрочнение пластичности и деформирование	25
2.2. Упрочнение объема. Коэффициент упрочнения деформации	28
2.3. Упрочнение пластичности	30

§ 3. Пластические деформации при объемном напряжении	32
состоянии	32
3.1. Пластические деформации при объемном напряжении	32
3.2. Теория деформаций	33
3.3. Теория течения	36
3.4. Ассоциированный закон течения	37
3.5. Особенности ассоциированного закона течения	40

3.6. Ассоциативный закон в теории деформаций	41
3.7. Сопоставление теории деформаций и теории течений	42
3.8. Особенности напряжений в деформации	44
Глава 3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ НАГРУЗКИ БЕЗЫНЕРГИЧЕСКОГО НАБОРА	46
§ 4. Теория предельного равновесия	46
4.1. Доказание и задачи теории предельного равновесия	46
4.2. Предельный момент сечения балки при частом повороте	48
4.3. Предельная нагрузка балки	50
4.4. Статический метод определения предельной нагрузки	52
4.5. Кинематический метод определения предельной нагрузки	54
4.6. Заостренные теоремы теории предельного равновесия	57
§ 5. Одномерные балки	58
5.1. Вычисление предельных моментов сдвигания сдвигостойких профилей	58
5.2. Определение предельной нагрузки однопролетной балки	61
5.3. Пример. Прессовая нагрузка балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой	66
5.4. Задачи предельных нагрузок однопролетных примитивных балок. Особый случай	67
5.5. О применимости принципа независимости действия сил для определения предельных нагрузок	72
§ 6. Многопролетные балки	75
6.1. Влияние на предельную нагрузку симметрии и другой симметричности опор и нагрузок	75
6.2. Непрерывные многопролетные балки	79

6.3. Балки ступенчатого-переменного сечения	80
6.4. Особые случаи нагрузки	80
6.5. Предельные сдвигательные прогибы в предельном состоянии	82
§ 7. Балки переменного сечения. Учет влияния длины	85
7.1. Особенности предельного состояния балок переменного сечения	85
7.2. Предельная нагрузка балки, подкрепленной клином	87
§ 8. Влияние профилей и перерезывающих сил на предельные состояния сечений балки	90
8.1. Предельное состояние сечения балки при совместном действии изгибающего момента и продольной силы	90
8.2. Влияние продольной силы на предельный момент сдвигостойких профилей	91
8.3. Предельное состояние сечения при совместном действии изгибающего момента и перерезывающей силы	95
8.4. Влияние перерезывающей силы на предельный момент сдвигостойких профилей	100
8.5. О влиянии продольных и перерезывающих сил на предельную нагрузку балки	102
§ 9. Крайовые балки. Рамы	104
9.1. Особенности расчета крайовых балок	104
9.2. Клинбалки	106
9.3. Арки	107
9.4. Колыры	108
9.5. Крайовые балки	109
9.6. Особенности расчета рам с примитивными профилями	112
9.7. Простая шпалготная рама	113

§ 10. Кручение. Предельная нагрузка балок несомкнутого и скрепленного набора	115
10.1. Чистое кручение. Предельный момент сечения	115
10.2. Предельная нагрузка балок несомкнутого набора	120
10.3. Предельная нагрузка балок скрепленного набора	126

Глава 3. ИЗОБРАЖЕНИЕ БАЛОК СПЛОШНОГО НАБОРА ПРИ БОЛЬШОМ ПЕРИОДИЦИЗМЕ

128

§ 11. Изображение конструкций после составления предельного состояния	128
11.1. Предельная нагрузка как критерий прочности. Роль симметричности нагрузки	128
11.2. Деметрическая нагрузка. Задача оптимального решения	130
11.3. Статический метод	130
11.4. Кинематический метод	132
11.5. Устойчивость пластического течения	134

§ 12. Сложный метод балки. Роль распора	135
12.1. Особенности деформирования балок при сложном изгибе	135
12.2. Особенности расчета балок с распором	137
12.3. Балка, нагруженная одной сосредоточенной силой	142
12.4. Балка, нагруженная тремя сосредоточенными силами	146
12.5. Балка, нагруженная произвольным числом сосредоточенных сил	149
12.6. Балка, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой	150
12.7. Балка, нагруженная произвольно распределенной нагрузкой	156
12.8. Балка, нагруженная системой цилиндрическим потоком	157

§ 13. Большие пролеты прямоугольных балок и рам	161
13.1. Особенности деформирования прямоугольных балок	161
13.2. Косыно	163
13.3. Арка	165
13.4. Шпандар	166
13.5. Влияние продольной силы на работу рам с прямоугольным сечением	167

Глава 4. ПРЕДЕЛЬНАЯ НАГРУЗКА СПЛОШНО ПЕРИОДИЧНАЯ

171

§ 14. Особенности расчета стальных перекрытий как стальных перекрестных связей	171
14.1. Механика изгиба	171
14.2. Статический метод	171
14.3. Кинематический метод	174
14.4. Комбинированный метод	176
14.5. Составление расчетных моментов	177

§ 15. Нагрузки перекрытия	178
15.1. Расчетные схемы	178
15.2. Регулярные перекрытия с одной перекрестной связью	179
15.3. Регулярные перекрытия с двумя перекрестными связями	181
15.4. Регулярные перекрытия с тремя перекрестными связями	181
15.5. Регулярные перекрытия с большим числом перекрестных связей	184
15.6. Перекрытия с ромбовидными схемами нагружения	184
15.7. Анализ полученных решений	186
15.8. Перекрытия с линейным изгибом	187
15.9. Роль нагрузки, воспринимаемой краевой аркой. Влияние наклонного	189
15.10. Особенности расчета перекрытий с произвольными сложными контурами	190

§ 16. Бортовые перекрестия, Ломанные нагрузки	192
16.1. Особенности расчета бортовых перекрестий. Форма ломаной нагрузки	192
16.2. Пластические механизмы с одной перекрестной силой	194
16.3. Пластические механизмы с двумя перекрестными силами в случае, когда их деформационные участки одинаковы	197
16.4. Пластические механизмы с двумя перекрестными силами в случае, когда их деформационные участки неодинаковы	199
16.5. Случай, когда ломаная нагрузка приложена между перекрестной силой и опорным контуром перекрестия	200
16.6. Пластические механизмы с тремя и более перекрестными силами	201
16.7. Общий алгоритм	201
§ 17. Ломанные перекрестия	203
17.1. Особенности предельного состояния сечений балок ломаного перекрестия	203
17.2. Ломаные силы на контуре способности литейных балок	206
17.3. Перекрестия с одной перекрестной силой	212
17.4. Перекрестия с тремя перекрестными силами	213
17.5. Подкрепление стенок литейных балок	215

Глава 5. ПРЕДЕЛЬНЫЕ НАГРУЗКИ И ДЕФОРМИРАНИЕ ПЛАСТИН ОПОРНЫХ ПРИ БОЛЬШИХ ЦЕНТРУРАХ

§ 18. Особенности работы пластины опирающейся на край проката	219
18.1. Пределные нагрузки в плоской способности пластины опирающейся	219
18.2. Общие уравнения катбе пластины	220
18.3. Расчеты пластичности в асимметричном катбе течения	223

18.4. Расчеты пластичности при перекрестном катбе пластины	224
18.5. Упругая пластичность при цилиндрическом катбе пластины	226

§ 19. Прямоугольные нагрузки пластины

19.1. Общие схемы предельного расчета методом конечных элементов	229
19.2. Пластины, нагруженные сосредоточенной силой. Бесконечная и круглая пластины	233
19.3. Пластины, нагруженные сосредоточенной силой вдоль опорного контура	231
19.4. Прямоугольные пластины с ребром, нагруженным сосредоточенной силой	233
19.5. Прямоугольные пластины, нагруженные равномерно распределенной нагрузкой	236
19.6. Дополнение. Компьютерные методы линейного программирования	240

§ 20. Большие прокаты пластины

20.1. Постоянные нагрузки	242
20.2. Круглая пластины, нагруженные сосредоточенной силой	242
20.3. Бесконечная пластины, нагруженная сосредоточенной силой	247
20.4. Прямоугольные пластины с ребром, нагруженные сосредоточенной силой	249
20.5. Прямоугольные пластины, нагруженные равномерно распределенной нагрузкой	253
20.6. Дополнение. Разрушение пластины	257

6. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ДЕФОРМИРЫ БАЛОК СУХОГО ВАРИА

§ 21. Основные зависимости катбе балок в упруго-пластичной стадии	260
21.1. Общие зависимости	260
21.2. Балки из упруго-пластичного материала с линейным упрочнением	262

21.3. Свойства жестких балок прямоугольного сечения из клееного упругопластического материала	366
21.4. Поперечный изгиб балки несимметричного поперечного профиля из клееного упругопластического материала	369
§ 22. Расчет балки с произвольными жесткими функциями	
22.1. Поперечный изгиб. Пластические функции	370
22.2. Определение профилей и углов поворота. Примеры	374
22.3. Кусочно-линейная аппроксимация изгиба несимметричных моментов	376
22.4. Особые случаи	380
22.5. Статически неопределимые балки	383
22.6. Пластические функции для сложного изгиба балки	386
22.7. Равномерная балка сложного изгиба. Чет распре	389
22.8. Статические профили пластин, гнувшиеся по цилиндрической поверхности	391
§ 23. Несущая способность святик и святик-молотуны стержней	
23.1. Устойчивость святика стержня в упругопластической стадии	392
23.2. Влияние поперечных святиков святика	395
23.3. Несущая способность святик-молотуны стержней. Влияние амплитуды поворота на величину критической нагрузки	396
§ 24. Кривые. Упругопластический изгиб несимметричного набора	399
24.1. Упругопластическое кручение	399
24.2. Упругопластический изгиб несимметричного набора	402

7. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ ПЕРСОНАЖИ ПЛАСТИКИ	311
§ 25. Граничные упругопластические задачи пластики	311
25.1. Граничные задачи гибких пластин	311
25.2. Граничные задачи жестких пластин	314
25.3. Методы решения упругопластических задач	316
§ 26. Метод разрывов равновесия	317
26.1. Метод перемещаемых параметров упругости	317
26.2. Метод фактически изгибных	320
26.3. Метод поперечных изгибов	322
26.4. О сложности метода разрывов равновесия. Сложный метод	323
26.5. Упругопластический изгиб жесткой пластики	324
26.6. Упругопластический изгиб гибкой пластики	326
§ 27. Вариационные методы	331
27.1. Общие сведения, составление из вариационных параметров	331
27.2. Принцип минимума полной энергии в задачах упругопластического изгиба пластики. Вариационный метод	333
27.3. Применение метода Рунге	336
27.4. Приближенный метод А.А.Михайлова	340

Глава 8. МИКРОПЛАСТИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО СЛОЕВА ИЗОПРЕЖДЕНЫ ЗА ПРИМЕРОМ ПЕРТОСТИ 345

§ 28. Поведение материала при микротермическом нагружении	345
28.1. Основание способности работы материала при микротермическом нагружении	346
28.2. Теорема приспособляемости	347

28.3. Приспособленность остатка балки при совместном действии изгибающего момента и продольной силы	348
28.4. Приспособленность балки при поперечном изгибе	353
28.5. Приспособленность пластины при цилиндрическом изгибе с учетом действия продольной силы	354
§ 29. Нахождение остаточных прогибов в листовых оболочках	359
29.1. Остаточные напряжения	359
29.2. Особенности построения конструкций при наличии остаточных напряжений в условиях многократного нагружения	360
29.3. Нахождение остаточных прогибов в оболочках при многократном равномерном нагружении	364
29.4. Об определении максимальных значений местных нагрузок на остаточных прогибах оболочек	373
Заключение	376
Приложение	389
Указатель литературы	429

Леонов Николай Иванович, Белозерский
РАСЧЕТ СУЛОВОЙ КОНСТРУКЦИИ
В ПЛАСТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

Редактор В.М.Полухина. Технический редактор Р.Е.Частинкина.
Корректоры Т.Г.Мельникова, М.Л.Острогагорова, В.В.Свиридова.
Главный художник В.В.Воскресенский

ББ 354

Подписано в печать 12.07.85. №-10343. Формат 60х84/16.
Количество типографских № 1. Ротопресс. Лек.беч.л. 25,04.
70л. шп.-л. 26,04. Руч.-л. 21,8. Тираж 1000 экз.
Бад. № 3413-78. Цена 11. Цена 1 р. 40 к.

Издательство "Судостроение", 198065, Ленинград, ул. Гоголя, 9.
Тулеская типография Союзполиграфпрома при Государственном
комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной
торговли, Тула, пр. Ленина, 109.