

А. Н. Зелинский
Н. А. Денисова
Э. П. Выскребенцев

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ



Донбасский государственный технический университет

А. Н. Зелинский
Н. А. Денисова
Э. П. Выхребенцев

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

Учебное пособие

Алчевск
2014

Зелинский А. Н., Денисова Н. А. Выскребенцев Э. П.

Рецензенты:

- С. В. Ковалевский* — доктор технических наук, профессор, проректор по научно-педагогической и учебной работе Донбасской государственной машиностроительной академии;
В. А. Витренко — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой технологии машиностроения и инженерного консалтинга Восточнукраинского университета им. В. Даля;
А. М. Новохатский — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой металлургии черных металлов Донбасского государственного технического университета.

*Рекомендовано ученым советом ДонГТУ
(Протокол № 6 от 05.06.2013)*

Зелинский А. Н.

3-48 Математические методы оптимизации в машиностроительном производстве : уч. пособ. Математичні методи оптимізації у машинобудівному виробництві. / А. Н. Зелинский, Н. А. Денисова, Э. П. Выскребенцев. — Алчевск : ДонГТУ, 2013. — 157 с.

В пособии рассмотрены модели и методы оптимизации в условиях определенности, риска и неопределенности. Приведены основные понятия, определения и сведения теории принятия решений, критерии и некоторые методы оптимизации, применимые к решению технологических и производственных задач машиностроительного производства. Содержит примеры решения задач, индивидуальные задания и вопросы для самоконтроля.

Для студентов высших учебных заведений, изучающих дисциплины «Математические методы оптимизации», «Математическое моделирование», «Технология машиностроения».

УДК 621.01:519.86
ББК К4:В12

© А. Н. Зелинский, Н. А. Денисова,
Э. П. Выскребенцев, 2014,

© ДонГТУ, 2014

© А. А. Дудка,
художественный дизайн обложки, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 ПОНЯТИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ. ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.....6	
<i>Вопросы для контроля</i>	11
2 МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ВИДЫ СВЯЗЕЙ АЛЬТЕРНАТИВ С ИСХОДАМИ	12
<i>Вопросы для контроля</i>	20
3 ОПТИМИЗАЦИЯ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ..... 21	
3.1 Оптимизация режимов обработки резанием	21
3.2 Задача коммивояжера. Оптимизация в планировании работ	27
3.3 Метод ветвей и границ для решения задачи коммивояжера..... 42	
3.4 Оптимизация операций для многооперационных станков с ЧПУ	50
3.5 Оптимизация решений по комплексу решений..... 54	
3.6 Формирование оптимальных операций при обработке ступенчатых валов	60
<i>Вопросы для контроля</i>	73
<i>Задания для самостоятельной подготовки</i>	75
4 КРИТЕРИИ ОПТИМИЗАЦИИ В УСЛОВИЯХ РИСКА	91
4.1 Понятие неопределенности и риска	91
4.2 Критерии оптимизации в условиях риска	94
4.3 Выбор критерия оптимизации в условиях риска..... 106	
<i>Вопросы для контроля</i>	107
<i>Задания для самостоятельной подготовки</i>	108
5 ОПТИМИЗАЦИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ..... 115	
5.1 Основные понятия и определения теоретико-игровых моделей 115	
5.2 Цена игры. Чистые стратегии..... 118	
5.3 Смешанные стратегии	126
5.4. Выбор оптимальной стратегии в условиях неопределенности	137
<i>Вопросы для контроля</i>	144
<i>Задания для самостоятельной подготовки</i>	145
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	156

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в условиях рыночных отношений и конкуренции, одновременно с дальнейшим развитием автоматизации, в машиностроении существенно повышается «цена» каждого решения, принимаемого на всех уровнях производственного цикла. Поэтому ясно, какое значение приобретает правильная и обоснованная поддержка этих решений информацией, расчетами и средствами АСНИ. Возрастают требования к обоснованию каждого решения, принимаемого на всех стадиях создания, освоения, выпуска, сбыта и снятия изделия с производства. Одновременно с концентрацией и специализацией производства осуществляется переход машиностроительных предприятий на принцип «трех С» (самостоятельность, самофинансирование, самоокупаемость), на усиление прямых связей между предприятиями, на облегчение выхода на внешние рынки. Поэтому все принимаемые решения, особенно связанные с той или иной долей риска, требуют глубоких профессиональных, организационных, технических, экономических и социальных знаний руководителей всех уровней производственного процесса.

Характер принимаемых производственных микрорешений таков, что их носители — рабочие и станочники, сборщики, операторы обрабатывающих центров и другие — смогут всю большую часть своих функций передавать машинам, которые становятся более «интеллектуальными», особенно при прямом участии ЭВМ.

Компьютеризация производства позволяет не только повысить его гибкость, легко и быстро перенастраиваться на выпуск новой продукции, повысить эффективность использования оборудования, но и помочь в принятии макрорешений, осуществляемом руководством предприятия, конструкторами, технологами. Именно эти специалисты принимают решения, определяющие направление развития и саму судьбу производства: максимизировать выпуск продукции, стабилизировать номенклатуру выпускаемых изделий, повысить качество, снижать себестоимость единицы продукции, увеличивать прибыль, осваивать новые виды изделий и т.п.

Процессы выработки эффективных решений в реальной производственно-организационной среде сложны и неоднозначны. Варианты решений непросто сформулировать и разграничить друг от друга, трудно дать им вероятностные или какие-либо иные оценки, а последствия их реализации вообще нелегко предвидеть. Все это характеризуется единым понятием *ограниченной рациональности*, согласно которому существуют пределы способности человека описывать и правильно передавать информацию о сложных ситуациях, осмысливать эту информацию, анализировать одновременно несколько вариантов поведения и выбирать из каких-либо соображений только один.

Более того, одна из характерных черт любого предприятия состоит в множественности, многосторонности интересов и в наличии сторон, выражающих эти интересы. Задачи различных подразделений предприятия очень противоречивы. Различие целей, столкновение интересов, конфликт являются необходимым атрибутом существования и развития каждого производства. Например, такой простой вопрос, как размер запасов на складе. Интересы производства требуют иметь большой запас заготовок и материалов, однако это ведет к увеличению незавершенного производства и снижению выпуска готовой продукции за счет уменьшения средств, требуемых непосредственно на процесс изготовления изделий. В то же время отдел маркетинга требует больших запасов готовой продукции на складе и внедрения гибких производственных линий, которые можно перенастраивать на выпуск небольших заказов. А бухгалтерия настаивает на увеличении оборачиваемости капитала и соответственно на минимизации запасов и др. Интенсификация режимов обработки для повышения производительности влечет увеличение затрат на режущий инструмент. А постоянный «конфликт» технолог — конструктор, ОТК — производственный отдел?

Даже приведенный краткий перечень организационно-технических ситуаций на производстве свидетельствует о сложности решаемых задач и требует их анализа и исследования для принятия рациональных решений. Такие исследования, как правило,

проводятся на моделях с привлечением соответствующего математического аппарата.

Для выбора и обоснования оптимальных решений широко применяются различные математические методы специальных разделов прикладной математики: теории графов, теории вероятностей, динамического программирования, теории статистических решений, теории игр и др.

Основные сведения и понятия теории систем, системного подхода, теории моделирования и теории принятия решений изложены в источниках [1]–[6], учебном пособии [7] и методических указаниях [12]–[14].

Данное учебное пособие содержит краткое изложение методов и критериев оптимизации принимаемых решений, которые могут найти применение в решении ряда задач машиностроительного производства. Приведенные теоретические сведения иллюстрированы решениями для конкретных производственных ситуаций. Пособие также содержит вопросы для самоподготовки студентов и варианты задач для условий определенности, риска и неопределенности, с которыми сталкиваются работники машиностроительных предприятий.

1 ПОНЯТИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ. ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Математические методы и модели принятия решений придают техническим, организационным и экономическим решениям необходимое научное обоснование, снижают элемент субъективности и позволяют в значительной мере прогнозировать и сравнивать исходы при выборе той или иной стратегии действий, а следовательно и оптимизировать отдельные процессы управления на производстве.

Выбор «лучшего» варианта решения зависит в первую очередь от поставленной цели, конкретной ситуации и обстоятельств, объема достоверной информации о проблеме, а также точки зрения лица принимающего решение. Сравнение возможных вариантов-альтернатив чаще всего основано на количественном подходе и

связано с использованием соответствующих математических моделей и критериев оценки ожидаемых результатов-исходов, от прогнозируемых действий лица принимающего решение. Выбор критерия оценки является наиболее сложным и ответственным этапом, и зависит от самого понятия оптимальности для каждой конкретной ситуации.

В силу неопределенности, динамизма, сложности, целостности и других свойств, вопросы оптимальности даже в теоретико-игровой литературе весьма запутаны. В достаточно общей модели принятия решения трудно указать лицу принимающему решение, какую альтернативу выбрать, или какая стратегия является оптимальной. Поэтому в настоящее время имеется целый ряд определений оптимальности в зависимости от области использования, конкретных ситуаций, применяемого математического аппарата моделирования, и основных мотивов при обосновании выбора оптимальности.

В зависимости от содержания задачи ситуацию, как правило, удастся описать наборами благ (выигрышами). В этом случае общей задачей является нахождение правил принятия решений, при которых данная система функционирует согласно интересам и возможностям всех ее участников.

Главное в модели — прогноз максимизации «полезности» решений особенно в условиях риска и неопределенности. Поэтому оптимальность в теории игр, например, и понимается как ожидаемое, возможное. А оптимальными исходами называются исходы, возможные в условиях допустимых действий сторон, совершаемых согласно их интересам. Иначе говоря, *оптимальным считается исход, возможный в условиях тех реализаций, которые получаются в результате действий, направленных на достижение наиболее предпочитаемых исходов*. Точный смысл этого выражения может быть весьма различным и тогда понятие оптимального исхода требует уточнения исходя из предпочтений на исходах.

Разработка понятий оптимальности тесно связана с проблемой их реализуемости, то есть существования оптимальных в соответствующем смысле решений. С прикладной точки зрения жела-

тельно, чтобы оптимальный исход был достаточно надежным предсказанием результатов. Решение различных прикладных задач иногда требует уточнения принципа оптимальности, что в ряде случаев делает его настолько сложным, что его математический анализ становится необозримым.

В общем случае можно сказать, что принцип оптимальности с точки зрения практических приложений, является таким правилом, какое необходимо для решения рассматриваемой проблемы.

Приведем ряд терминов и определений понятий, которые применяются в теории принятия решений.

Система — целостная совокупность взаимосвязанных частей или подсистем, взаимодействующая с внешней средой и, как правило, предназначенная для достижения определенной цели (целей).

Системный подход — совокупность принципов, формулирующих направление и концепции исследования сложных объектов произвольной природы, рассматриваемых как единое целое.

Управление — целенаправленный выбор воздействий на объект управления, имеющихся в распоряжении субъекта управления — руководителя — и ведущих к достижению поставленной цели (целей).

Проблема — 1) *в теории решений* — логическое высказывание вида «Требуется W », где W — цель, а исходные условия явно не определены. См. также «Задача» и «Ситуация»; 2) *в практике управления* — ситуация, характеризующаяся таким различием между необходимым (желаемым) и существующим состоянием объекта управления, которое препятствует нормальному функционированию или развитию этого объекта.

Задача — 1) *в теории решений* — логическое высказывание вида «Дано V , требуется W », где V — исходное состояние объекта управления, W — целевое состояние (см. также «Проблема» и «Ситуация»);

2) *в хозяйственно-управленческой практике* — задание, поручение, даваемое руководителем работнику аппарата управления

или вышестоящим органом управления подчиненной организации или предприятию для исполнения.

Ситуация — *в теории решений* — логическое высказывание вида «Дано V », где V — исходные условия, а цель явно не определена. См. также «Задача» и «Проблема».

Формализация — использование формальных средств (главным образом математических) для отображения, описания и объяснения каких-либо процессов и явлений. Формализация является этапом моделирования, предшествующим постановке и подготовке к решению задачи.

Моделирование — метод опосредствованного (теоретического или практического) познания и изучения объектов, процессов или явлений реального мира с помощью построения и анализа вспомогательных замещающих их объектов-моделей (в частности, математических).

Модель — описание с той или иной степенью приближения существенных свойств и взаимосвязей исследуемого объекта, процесса или явления реального мира.

Технология моделирования — совокупность методов, способов и процедур разработки, испытания, документирования и использования математических моделей.

Переменная — величина, которая может принимать любое значение из заданного множества значений. Являясь элементами математических моделей, переменные могут быть управляемыми и неуправляемыми.

Ограничение — лимитирующее условие, при котором ищется решение задачи (проблемы). Ограничение может являться элементом математической модели, характеризующим допустимые пределы изменения переменных величин. В таком случае обычно имеет вид неравенства.

Решение — процесс или результат выбора одного варианта из множества рассматриваемых вариантов решения задачи (проблемы), осуществляемый по некоторым критериям выбора.

Целевая функция — количественная форма выражения критерия, с помощью которого сравниваются варианты решения.

Цель решения — конечный результат, которого стремится достигнуть лицо, принимающее решение.

Принятие решения — 1) *в широком смысле* — особый вид человеческой деятельности, связанный с творческим процессом выбора наилучших в определенном смысле действий, ведущих к поставленной цели (целям); 2) *в теории решений* — выбор одного из вариантов решения задачи (проблемы) из множества рассматриваемых вариантов.

Вариант решения — один из возможных способов решения задачи или проблемы для достижения поставленной цели или желаемого конечного результата.

Стратегия — 1) *в исследовании операций* — способ использования средств и ресурсов, направленный на достижение цели (целей) операции; 2) любое правило, предписывающее определенные действия в каждой ситуации принятия решений.

Критерий — показатель, на основании которого производится оценка системы (например, качество ее функционирования), сравнение вариантов решений (например, их эффективности), классификация объектов, процессов и явлений.

Лицо, принимающее решения — лицо, осуществляющее выбор варианта решения задачи (проблемы) и несущее ответственность за свое решение.

Обоснование решения — процесс, в ходе которого специалисты отсеивают неэффективные (нерациональные) варианты решения задачи (проблемы) и отбирают один или несколько вариантов, обладающих определенными преимуществами перед отклоненными, для последующего их представления лицу, ответственному за принятия решения.

Поддержка решений — оказание помощи лицу, ответственному за принятие решений, осуществляемое систематически, по определенным процедурам, в индивидуальном порядке или при работе группы или коллектива и ориентированное на выработку

конкретных конечных решений сложных неструктурированных проблем. Основные формы поддержки решений — информационная и вычислительная.

Система поддержки решений — система, представляющая собой совокупность различных методов и средств оказания помощи лицу, ответственному за принятия решений. Различают два важных класса: системы поддержки управленческих решений и системы поддержки проектных решений.

Основание для решения — определенная совокупность состояний объекта управления, внутренних и внешних факторов, документов, необходимых для выработки решения.

Технология поддержки решений — совокупность методов, способов и процедур анализа ситуаций, постановки проблем, выработки и оценки вариантов решений, обеспечивающих достижение поставленной цели, организации и контроля решений.

Оптимизация — *в математическом программировании* — процесс нахождения наилучшего, с точки зрения критерия оптимальности, варианта решения задачи из множества допустимых.

Вопросы для контроля

1. Что понимают под оптимизацией?
2. Что такое система, системный подход?
3. Определите понятие «проблема» с точки зрения теории решений и в практике управления.
4. Объясните смысловое значение понятий «решение», «цель решения», «обоснование решения».
5. Какой этап моделирования предшествует постановке и подготовке к решению задачи?
6. Что называется моделью, моделированием, технологией моделирования?
7. Приведите примеры источников конфликта на предприятиях.
8. Какой элемент математического моделирования может быть управляемым и неуправляемым?
9. Что понимают под критерием, ограничением, стратегией?

10. Что называют целевой функцией?
11. Чем объясняется неоднозначность понятия оптимальности?
12. Какие средства применяют для обоснования решения?
13. Что называют поддержкой решений и какова система поддержки решений?
14. Какие специальные разделы прикладной математики применяют для обоснования оптимальных решений?

2 МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ВИДЫ СВЯЗЕЙ АЛЬТЕРНАТИВ С ИСХОДАМИ

Одной из особенностей, присущих производственным проблемам является то, что они, как правило, являются сложными плохо формализуемыми проблемами, решение которых весьма затруднительно. В силу этого, решение таких проблем может осуществляться простым перебором всех возможных вариантов. Затем оценивают и сравнивают результаты различных вариантов решений и принимают лучший (оптимальный) вариант.

Методы решения, основанные на переборе получили название *комбинаторных*. Комбинаторный аспект заложен в каждой проблеме принятия решения, а решение любой проблемы состоит в выборе последовательности действий, наиболее приемлемой для заданной исходной ситуации.

В зависимости от выбираемой математической модели методы принятия решений делятся на следующие три класса, принципиально отличающиеся по подходу к проблеме:

- 1) *комбинаторные*, то есть основанные на организации поиска (перебора) решений;
- 2) *аналитические*, основанные на преобразованиях аналитических формул;
- 3) *сетевые*, основанные на построении потоков в сетях.

Хотя аналитические и сетевые методы доказали свою эффективность при решении большого числа конкретных проблем, область их применения весьма ограничена. Значительно более широкой является область применимости комбинаторных методов.

Одним из основных путей нахождения оптимального решения задач, связанных с функционированием технических систем, является применение научных принципов, методов и средств.

Процедуру решения задач по этому методу можно разбить на следующие этапы: 1) постановка задачи; 2) построение математической модели; 3) нахождение решения; 4) проверка модели и оценка решения; 5) реализация решения и контроль его правильности.

Для постановки задачи требуется: а) определить возможные стратегии, задавая тем самым управляемые переменные; б) определить условия среды, задавая тем самым неуправляемые переменные; в) определить критерий выбора, задавая тем самым цели и определяя их относительную значимость. Любой процесс характеризуется большим количеством факторов, между которыми существуют сложные связи. Поэтому важно выбрать наиболее существенные факторы. Часто упрощение физической ситуации бывает вынужденным, так как природа отдельных факторов зачастую остается невыясненной. Этап постановки задачи очень важен, так как он в значительной мере определяет, насколько найденное решение будет соответствовать действительному процессу.

Модели как отражения действительности позволяют получать ясные и компактные описания выражаемых ими явлений, вскрывать механизм их работы. Анализируя модели и экспериментируя на них, обычно удается определить, как влияют изменения в рассматриваемой системе на качество ее функционирования. Можно построить модели более простые, чем отображаемые ими объекты, так как для определения основных особенностей явления обычно достаточно небольшого числа переменных. Сложность заключается в выборе нужных переменных и правильном определении соотношения между ними. Модели могут быть разных типов.

Для отыскания решения можно применять все классические методы математики, например дифференциальное исчисление, интегральные и другие уравнения. Применение этих методов будет оправдано, если ограничения являются равенствами и число управляемых переменных невелико. Примем обозначения:

X_i — управляемые переменные;
 Y_i — неуправляемые переменные;
 E — ожидаемая эффективность.
Ограничения, входящие в модель.

$$\Phi(X_i \cdot Y_i) \geq 0.$$

Решение такой модели определяется значением X_i (как функции Y_i), максимизирующим или минимизирующим E .

Если невозможно выразить ожидаемую эффективность E в виде простой функции от X_i и Y_i , следует воспользоваться набором правил, позволяющим вычислить значение эффективности при любом фиксированном значении X_i и Y_i . В таких случаях классические методы малоэффективны и приходится прибегать к какому-либо итеративному методу. Сущность итеративных методов заключается в том, что вычислительный процесс начинают с некоторого пробного решения, а затем применяют алгоритм, обеспечивающий улучшение этого решения. Это продолжается до тех пор, пока не станет ясно, что дальнейшее улучшение не возможно. К итеративным методам относятся хорошо известные методы линейного, нелинейного и динамического программирования [1]. Итеративные методы делятся на три класса. Об алгоритмах первого класса заранее известно, что при их использовании на каждой итерации (шаге) решение улучшается и после конечного числа шагов дальнейшее улучшение решения невозможно (например, формирование станочной операции из множества известных переходов). Ко второму классу относятся алгоритмы, обеспечивающие улучшение решения на последовательных итерациях, но гарантирующие получение оптимального решения как предела некоторого бесконечного вычислительного процесса. Третий класс итеративных методов включает алгоритмы, основанные на методе проб и ошибок. При использовании этого метода последовательные пробы позволяют улучшить результат, но монотонное улучшение решения не гарантируется.

К итеративным методам относятся методы поиска оптимального варианта технологического процесса, которые применяются

при оптимизации станочных операций и переходов. Простейшим методом решения задачи является просчет всех возможных вариантов (сочетаний искомых величин). Он применяется, когда искомые величины (например, режимы резания) имеют конечное и притом не очень большое число различных значений. С увеличением количества оптимизируемых переменных число просматриваемых вариантов быстро растет, и этот метод становится трудно реализуемым. Поэтому был разработан и практически использован ряд методов поиска, исключающих полный перебор.

Регулярный поиск решения задачи можно проводить во много раз быстрее, чем полный перебор вариантов, при условии выполнения ряда условий. При регулярном поиске оптимальный вариант процесса находится на границе области допустимых решений. Это используется, например, при нахождении режимов резания с учетом возможности процесса по лимитирующим условиям: стойкости инструмента, эффективной мощности резания, точности и др. Для начала перебора находят один допустимый режим и, двигаясь от него, переходят к границе возможных решений. Затем производят перебор конечного множества возможных режимов, расположенных около границы решений. Двигаясь вдоль границы множества, перебирают все крайние режимы резания и находят оптимальный режим для полного перебора.

Метод регулярного поиска применяют для одноинструментной и многоинструментной обработки. Он позволяет сглаживать режимы обработки, т.е. находить оптимальные режимы не для каждой отдельной поверхности, а совокупности поверхностей. Регулярный поиск эффективен для двух-трех оптимизируемых переменных, что практически имеет место при вычислении режимов резания (вычислений t , s , V). Преимуществом этого метода является возможность использования нелинейных ограничений и целевой функции. При использовании регулярного поиска с дискретными значениями режимов за ряд итераций (шагов) можно получить оптимальные значения, не полностью соответствующие абсолютному экстремуму по целевой функции. Однако простота метода, несмотря на

некоторые недостатки, позволяет рекомендовать его для решения целого класса технологических задач.

Направленный поиск наилучшего варианта технологического процесса обработки рассматривают как граф, вершины которого соответствуют какому-нибудь показателю обработки (точность, затраты), а ребра, соединяющие две вершины, — определенным параметрам процесса. Особенностью этого метода поиска оптимального варианта обработки является его направление, определяемое сводом технологических правил и ограничений. Направленный поиск в сочетании с чисто математическими методами оптимизации многофакторных явлений наиболее эффективен при решении широкого круга технологических задач: нахождении оптимального маршрута обработки поверхности детали, выборе оптимального варианта станочной операции и др.

При решении технологических задач находит применение и вычислительный метод геометрического программирования.

Используют также сетевые способы выбора маршрута. Например, производится определенное количество переходов (сверление отверстий различных диаметров, зенкерование их и развертывание) на многооперационном станке с ЧПУ. Часть отверстий может быть одного диаметра (с одинаковыми требованиями к точности). Задача заключается в определении такой последовательности обработки отверстий, при которой время холостых перемещений станка было бы минимальным (нахождение маршрута наименьшей протяженности). Это определение сводится к «задаче коммивояжера», итеративный метод решения ее получил название метода ветвей и границ. Идея этого метода заключается в том, что множество всех допустимых замкнутых маршрутов (циклов) задачи делят определенным образом на два непересекающихся подмножества и вычисляют оценки каждого из них. Далее подмножество с минимальной оценкой вновь делят на два и вычисляют их оценки. На каждом шаге вычисляют оценки и выбирают подмножество с наименьшей из всех полученных до этого шага оценок и производят его деление. В конце получают подмножество, содержащее один цикл, время

которого равно нижней границе этого подмножества. Такой маршрут является оптимальным.

Представляет интерес формулирование задачи о назначении. Например, на многшпиндельном токарном полуавтомате выявлена позиция с лимитирующим временем при обработке детали. На оставшихся позициях нет смысла обрабатывать поверхности детали за время, меньшее, чем найденное лимитирующее время. Для повышения точности обработка на всех позициях должна быть начата и закончена в одно и то же время. Задача заключается в нахождении параметров обработки на некритических позициях, позволяющих минимизировать суммарный момент сил, вызывающих смещение стола станка, и решается как задача о назначении. Все такие задачи записывают в виде квадратной матрицы оценок. Используя венгерский метод (метод Флора), удастся найти оптимальную матрицу назначения той же размерности, что и матрица оценок, с помощью которой и находят нужные параметры режимов резания на каждой позиции.

Задачи математического программирования, в которых некоторые из параметров являются случайными величинами, называются стохастическими задачами математического программирования. Цель решения задач математического программирования состоит в определении оптимального набора управляемых переменных. Оптимальные значения этих переменных являются функциями различных параметров, встречающихся в задачах (например, штучное время при выполнении операции на конкретном станке). Обычно при изменении одного или нескольких параметров изменяются также и оптимальные значения некоторых или всех управляемых переменных. Но стандартные методы (например, симплекс-метод) дают оптимальное решение только для определенного набора значений параметров. При использовании этих методов нельзя получить точное представление о наборе оптимальных значений управляющих переменных как функций от всех параметров. Изучение этих зависимостей потребовало бы очень большого объема вычислений.

Математическая модель задачи принятия решения представляет собой формальное описание цели, средств и результатов, а также способа связи средств с результатами. При анализе задач принятия решений выделяют в них две компоненты: первая — описание средств и результатов, а также способа их связи, а вторая — описание цели. Формальное описание средств и результатов можно производить, задав два множества: множество X , элементы которого называют *альтернативами*, и множество A , элементы которого называют *исходами*. Иначе говоря, альтернативы — это то, что мы выбираем, а исходы — то, к чему приходим. Одна и та же ситуация принятия решения может иметь различные модельные описания.

Можно выделить три основных типа зависимости исходов от альтернатив как способ связи средств с результатами.

1. Простейший тип связи альтернатив с исходами — когда каждая альтернатива приводит к *единственному исходу*. В этом случае имеется функциональная зависимость исходов от альтернатив.

Связи между альтернативами и исходами можно представить с помощью графа следующего вида. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — множество альтернатив, $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ — множество исходов. Изобразив альтернативы вершинами, расположенными на одном уровне, и исходы — вершинами на другом уровне, граф строится так (рис. 2.1, а), что из некоторой вершины O дуги идут ко всем альтернативам. Из альтернативы x_i идет дуга к исходу a_k в том и только в том случае, когда исход a_k возможен при выборе альтернативы x_i ($i=1, \dots, n; k=1, \dots, r$). Построенный таким образом граф называют *графом связи альтернатив с исходами*.

Принятие решения в условиях *определенности* характеризуется тем, что на графе связей альтернатив с исходами из каждой вершины x_i исходит точно одна стрелка. При этом допускается, что к одной вершине a_k дуги могут сходить, это соответствует тому, что разные альтернативы приводят к одному и тому же исходу. Так как в условиях определенности каждой альтернативе соответствует только один исход, то в этом случае все равно, выбираем ли мы альтернативы или исходы.

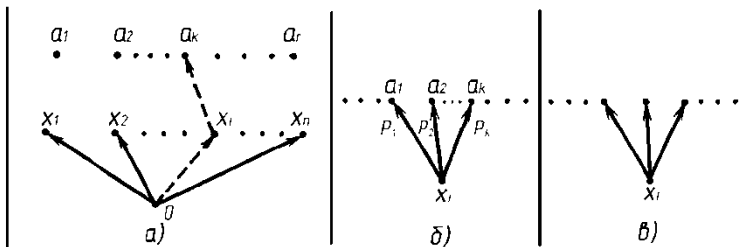


Рисунок 2.1 — Граф связей альтернатив с исходами.

Возможны различные варианты информированности лица принимающего решение (ЛПР) о возможностях появления тех или иных состояний среды. Если ЛПР точно знает состояние среды, то получают задачу принятия *решения в условиях определенности*.

1. Если каждая альтернатива x_i может привести к одному из нескольких исходов, каждый из которых имеет определенную вероятность появления, то получают задачу принятия решения в *условиях риска*. Здесь имеет место стохастическая зависимость исходов от альтернатив, каждой из которых соответствует своя *вероятностная мера* на множестве исходов.

Если обозначим через q_j вероятность появления состояния $y_j (j=1, \dots, m)$, то должно выполняться условие:

$$q_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^m q_j = 1.$$

Если обозначим через $p_i(a)$ вероятность наступления исхода $a \in A$ при выборе альтернативы x_i , то

$$p_i(a) = \sum_{F(x_i, y_j)=a} q_j$$

На графе (рис. 2.1, б) для каждой дуги, идущей от альтернативы к исходу, указывается вероятность p_k наступления этого исхода при выборе данной альтернативы.

2. Если каждая альтернатива может привести к одному из нескольких исходов (рис. 2.1, в), причем отсутствует даже стохастическая зависимость исходов от альтернатив (или ЛПР не располагает никакой информацией о вероятностях появления состояний среды), то такие условия принятия решения квалифицируют как *условия неопределенности*. В целом, очевидно, что проблема оптимизации, в том числе и задач машиностроительного производства, в первую очередь, сводится к выбору соответствующей математической модели поиска научно обоснованного решения. Технологию же важно знать, что оптимизация технологических и производственных процессов механической обработки путем математического моделирования позволит значительно повысить их эффективность.

Вопросы для контроля

1. Какие методы решений называют комбинаторными?
2. Этапы решения задач комбинаторным методом.
3. Что необходимо для постановки задач в комбинаторном методе?
4. В чем суть итеративных методов?
5. Охарактеризуйте три класса итеративных методов принятия решений.
6. В чем состоит метод регулярного поиска? Назовите область его применения.
7. Достоинства и недостатки направленного поиска наилучшего варианта.
8. Какова роль решения задач математического программирования?
9. Что такое альтернатива и исходы?
10. Чем характеризуются комбинаторные, аналитические и сетевые методы принятия решений?
11. В чем заключаются особенности различных зависимостей исходов от альтернатив?

3 ОПТИМИЗАЦИЯ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В настоящее время известны различные математические способы и методы, а также специальные прикладные разделы математики поиска оптимальных решений в условиях определенности. В частности, в учебном пособии [7] приведены примеры оптимизации на графах, применительно к машиностроительному производству, даны решения задачи о раскрое листового материала, производственные задачи об использовании ресурсов, симплекс-метод, решение транспортной задачи методом потенциалов, задачи о назначениях, задачи определения оптимальной последовательности обработки деталей методом ветвей и границ. В методических указаниях [12] и [13] изложены методы динамической оптимизации в планировании работ и решение задачи коммивояжера.

Рассмотрим примеры оптимизации режимов обработки резанием, формирования оптимальных операций и определения последовательности переходов при изготовлении ступенчатых валов.

3.1 Оптимизация режимов обработки резанием

Оптимизация технологических процессов и режимов резания, в частности, основывается на построении математических моделей. Для установления математической модели выделяют технические ограничения, которые в наибольшей степени определяют описываемый процесс и оценочную функцию (критерий оптимальности).

Выбор тех или иных технических ограничений зависит от вида обработки и определяется конкретными условиями технологического, конструкционного и организационно-производственного характера. Однако можно выделить ряд наиболее важных технических ограничений, которые составляют основу математических моделей процесса резания при точении, фрезеровании, сверлении и других методах обработки. Такими ограничениями являются режущие возможности инструмента, определяемые его стойкостью; мощность электродвигателя привода главного движения; наимень-

шая и наибольшая скорости резания (частота вращения шпинделя) и подача, допускаемые кинематикой станка; прочность и жесткость режущего инструмента; точность обработки; шероховатость поверхности [9].

В качестве оценочной функции при оптимизации по двум параметрам (n , S) обычно используют минимальную себестоимость

$$F_{min} = c / (nS) \quad (3.1)$$

где c — коэффициент, не зависящий от режимов резания n и S . Из этого выражения видно, что функция F_{min} будет наименьшей, когда произведение $n \cdot S$ будет максимальным.

Технические ограничения строятся на основе известных зависимостей. Так техническое ограничение по стойкости инструмента для точения будет получено из выражений для скорости резания:

$$V = \frac{C_v}{T^m t^{x_v} S^{y_v}} K_v \quad V = \frac{\pi D n}{1000}, \quad (3.2)$$

где T — период стойкости инструмента, мин; m — показатель относительной стойкости; t — глубина резания, мм; D — диаметр заготовки, мм; C_v , x_v , y_v — коэффициенты, характеризующие условия обработки; K_v — общий поправочный коэффициент.

После преобразований получим техническое ограничение в следующем виде:

$$n S^{y_v} \leq \frac{318 C_v K_v}{D T^m t^{x_v}}. \quad (3.3)$$

Аналогично определяют и другие технические ограничения. Для выбора оптимальных значений режимов резания с использованием методов линейного программирования все технические ограничения и оценочная функция приводятся к линейному виду логарифмированием. Так, выражение (3.3) после логарифмирования будет иметь вид

$$\ln n + y_v \ln S = \ln \frac{318 C_v K_v}{DT^m t^{x_v}}. \quad (3.4)$$

Введем обозначения

$$x_1 = \ln n, \quad x_2 = \ln 100 S,$$

$$b_l = \ln \frac{318 C_v K_v}{DT^m t^{x_v}} 100^{y_v}$$

(в обозначении x_2 подача S умножается на 100, чтобы избежать получения отрицательных значений логарифмов) и получим первое техническое ограничение в линейном виде:

$$x_1 + y_v x_2 \leq b_l. \quad (3.5)$$

Для оценочной функции с учетом ее вида (3.1) после логарифмирования будем иметь

$$f_0 = (x_1 + x_2)_{\max}. \quad (3.6)$$

Приведение всех технических ограничений к линейному виду и представление их в виде системы неравенств в совокупности с оценочной функцией дает математическую модель процесса резания металлов. Определение оптимальных режимов резания с помощью построенной математической модели может выполняться аналитическим или графическим методом.

Пример 3.1[9]. Построить математическую модель процесса резания и определить оптимальные режимы резания для точения поверхности заготовки типа вал диаметром $D = 100$ мм и длиной $L = 700$ мм, материал — сталь 45, требуемая шероховатость $R_z = 40$ мкм, глубина резания $t = 2,5$ мм.

Решение. Учитывая размеры заготовки для обработки, выбираем токарно-винторезный станок с ЧПУ 16К20Ф3. Точение производим проходным резцом с режущей пластиной Т15К6 с охлаждением. Размеры державки резца принимаются $B = 12$ мм, $H = 16$ мм, вылет резца $l_{ер} = 50$ мм. Выделим наиболее важные ограничения:

Ограничение 1. Режущие возможности инструмента, определяемые периодом стойкости.

Согласно зависимости (3.3) находим значение периода стойкости инструмента и коэффициентов, входящих в уравнение для V [10, с. 268–271]:

$$T = 60 \text{ мин}; \quad C_V = 350 \quad x_v = 0,15 \quad x = 0,35 \quad m = 0,2,$$

$$K_V = K_{mv} \cdot K_{nv} \cdot K_{\phi 1v} \cdot K_{rv} \cdot K_{qv} \cdot K_{0v} = 1,44.$$

Тогда

$$nS^{0,35} \leq \frac{318350}{100 \cdot 60^{0,2} \cdot 2,5^{0,15}} 1,44 \text{ или } nS^{0,35} \leq 613,95.$$

Приведем полученное неравенство к линейному виду логарифмированием и после обозначения получим

$$x_1 + 0,35x_2 \leq b_1; \quad b_1 = \ln(613,95 \cdot 100^{0,35}) = 8,03.$$

Ограничение 2. Мощность электродвигателя привода главного движения станка. Это ограничение выражается условием $N_{эф} \leq N \cdot \eta$: N — мощность электродвигателя главного привода станка, кВт; η — КПД кинематической цепи от электродвигателя к инструменту.

Эффективная мощность, кВт, затрачиваемая на процесс резания,

$$N_{эф} = \frac{P_z V}{102 \cdot 60}, \quad (3.7)$$

где P_z — сила резания, которая согласно [10, с.271] определяется как

$$P_z = C_{pz} \cdot t^{x_{pz}} \cdot S^{y_{pz}} \cdot V^{n_{pz}} K_p.$$

Подставляя в выражение (3.7) значение составляющей силы резания P_z , получим для второго технического ограничения

$$n^{n_{pz}+1} S^{y_{pz}} \leq \frac{6120(10^3)^{n_{pz}+1} N\eta}{C_{pz} t^{x_{pz}} D^{n_{pz}+1} \pi^{n_{pz}+1} K_p} \quad (3.8)$$

Значение коэффициентов для рассматриваемого примера [10, с. 273 — 274]:

$$C_{P_z} = 300; \quad x_{P_z} = 1,0; \quad y_{P_z} = 0,75; \quad n_{P_z} = -0,15;$$

$$K_p = K_{mp} \cdot K_{\varphi p} \cdot K_{\eta p} \cdot K_{\lambda p} \cdot K_{rp} = 1,05.$$

Мощность электродвигателя для станка 16К20Ф3 $N = 10$ кВт, $\eta = 0,85$. Тогда

$$n^{0,85} S^{0,75} \leq \frac{6120(10^3)^{0,85} \cdot 10 \cdot 0,85}{300 \cdot 2,5^{1,0} \cdot 100^{0,85} \cdot \pi^{0,85} \cdot 1,05} \leq 177,1.$$

После приведения к линейному виду и введения обозначений получим

$$0,85x_1 + 0,75x_2 \leq b_2, \text{ где } b_2 = \ln(177,1 \cdot 100^{0,75}) = 8,63.$$

Ограничение 3. Наименьшая допустимая скорость резания, определяемая кинематикой станка.

Для частоты вращения шпинделя станка n это ограничение имеет вид $n \geq n_{cm \min}$. Для станка 16К20Ф3 $n_{cm \min} = 12,5 \text{ мин}^{-1}$.

Тогда $x_1 \geq b_3$, где $b_3 = \ln 12,5 = 2,52$.

Ограничение 4. Наибольшая допустимая скорость резания, определяемая кинематикой станка. Для частоты вращения шпинделя станка это ограничение имеет вид $n \leq n_{cm \max}$. Для станка 16К20Ф3 $n_{cm \max} = 200 \text{ мин}^{-1}$. Тогда $x_1 \leq b_4$, где $b_4 = \ln 2000 = 7,6$.

При аналогичных преобразованиях были получены в линейном виде последующие ограничения: ограничение 5 — по наименьшей подаче; ограничение 6 — по наибольшей подаче; ограничение 7 — по прочности режущего инструмента; ограничение 8 — по жесткости режущего инструмента; ограничение 9 — по жесткости заготовки; ограничение 10 — по требуемой шероховато-

сти поверхности. Ограничения 5 — 10 совместно с рассмотренными выше ограничениями образуют математическую модель процесса резания в аналитическом виде. Кроме технических ограничений, представляемых в виде системы неравенств, в состав модели входит оценочная функция f_o .

$$\begin{aligned} X_1 + 0,35x_2 &\leq 8,03; \\ 0,85x_1 + 0,75x_2 &\leq 8,63; \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 2,52;$$

$$x_1 \leq 7,6;$$

$$x_2 \geq 1,61;$$

$$x_2 \leq 5,63;$$

$$-0,15x_1 + 0,75x_2 \leq 1,81;$$

$$-0,15x_1 + 0,75x_2 \leq 2,84;$$

$$-0,3x_1 + 0,6x_2 \leq 3,34;$$

$$x_2 \leq 4,09;$$

$$f_0 = (x_1 + x_2)_{max}.$$

Определение оптимальных значений $x_{1\text{опт}}$ и $x_{2\text{опт}}$ производится с использованием численных методов линейного программирования с применением ЭВМ. В рассматриваемом примере задача будет решаться графическим методом. В этом случае каждое техническое ограничение представляется граничной прямой, которая определяет полуплоскость, где возможно существование решений системы неравенств. Граничные прямые, пересекаясь, образуют многоугольник решений ABCD (рис. 3.1), внутри которого любая точка удовлетворяет всем без исключения неравенствам.

Для определения оптимальных значений $x_{1\text{опт}}$ и $x_{2\text{опт}}$ под углом 45° к осям x_1 и x_2 строится вектор максимизации M для оценочной функции $f_o = x_1 + x_2$, которая изображается прямой (штриховая линия), перпендикулярной этому вектору. В точке D, где прямая оценочной функции коснется многоугольника решений, функция принимает минимальное значение $f_{o\text{ min}}$, а в точке В — максимальное $f_{o\text{ max}}$. Координаты этой точки являются оптимальными значениями $x_{1\text{опт}}$ и $x_{2\text{опт}}$, они определяются графически (см. рис. 3.1) с учетом принятого масштаба $x_{1\text{ опт}} = 6,5$ и $x_{2\text{ опт}} = 3,8$.

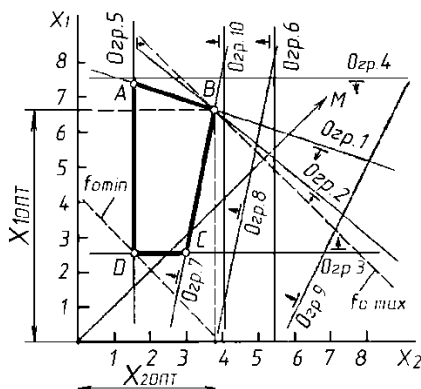


Рисунок 3.1 — Графическое построение математической модели определения оптимальных режимов резания

Численные значения оптимального режима резания вычисляются по следующим зависимостям:

$$n_{opt.} = e^{x_{1opt.}} = e^{6.5} = 665 \text{ мин}^{-1}$$

$$S_{opt.} = \frac{1}{100} e^{x_{2opt.}} = \frac{1}{100} e^{3.8} = 0,447 \text{ мм/об}$$

3.2 Задача коммивояжера. Оптимизация в планировании работ

Имеется множество задач, связанных с определением оптимальной последовательности обработки деталей, выбором последовательности выполнения переходов при обработке поверхностей заготовки, объездом ряда пунктов и возвращением в исходный пункт, соединением отдельных пунктов линиями водопровода, газоснабжения, электроснабжения и т.п. В математике задачи подобного вида получили название задач коммивояжера.

Коммивояжер (агент, рекламирующий товар своей фирмы), должен посетить $(n-1)$ городов и вернуться в исходный пункт. Известны расстояния между городами. Требуется установить, в каком

порядке коммивояжер должен посещать города, чтобы общее пройденное расстояние было минимальным.

Если задан пункт, в котором начинается и заканчивается маршрут коммивояжера, такой вид задачи считают основным и называют **замкнутым** вариантом задачи коммивояжера. Если не требуется возвращения в исходный пункт или не задан начальный пункт, то такие варианты задачи называют **незамкнутыми**. Незамкнутые варианты легко приводятся к замкнутому.

Задачу коммивояжера наглядно можно представить в виде графа $G=(X,U)$ вершины которого соответствуют городам, а ребра — дорогам, соединяющим города (рис. 3.2). Каждому ребру, соединяющему города i, j , приписывается число l_{ij} , называемое длиной ребра и равное расстоянию между городами i и j . Задача сводится к отысканию пути на графе, причем такого, чтобы любая его вершина была пройдена только один раз. Элементарный путь на графе, проходящей через все вершины, называют гамильтоновым. Если найти на графе кратчайший гамильтонов цикл (контур), то получим решение замкнутого варианта задачи коммивояжера.

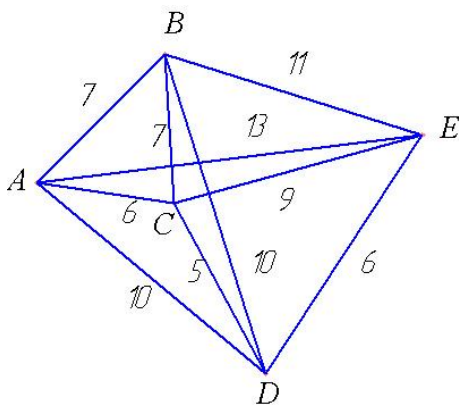


Рисунок 3.2 — Граф к задаче коммивояжера.

Вообще решить эту задачу в каждом конкретном случае в принципе просто, поскольку число возможных маршрутов конечно.

Для этого достаточно выполнить полный перебор всех без исключения маршрутов, вычислить их длины, сравнить между собой и выбрать самый короткий путь.

Например, на рисунке 3.3 показано полное граф-дерево маршрутов коммивояжера для задачи, заданной графом на рисунке 3. 2.

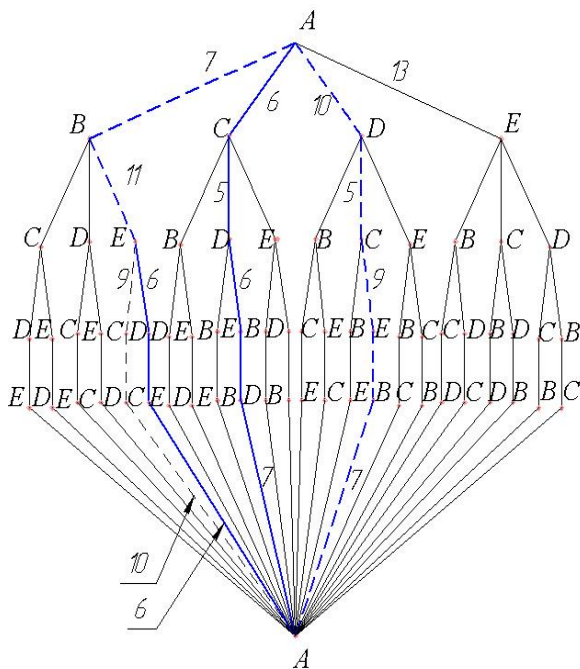


Рисунок 3.3 — Полное граф-дерево маршрутов коммивояжера

Здесь максимальный по длине гамильтонов контур выделен штриховой линией, а минимальный путь коммивояжера

$$l(\mu)_{\min} = l(\mu)_{ACDEBA} = l(\mu)_{ABEDCA} = 35.$$

Количество маршрутов, начинающихся и завершающихся в городе A, $k=(n-1)!=(5-1)!=24$.

Количество маршрутов $k=(n-1)!$ очень быстро растет по мере увеличения числа n вершин графа. Так, $5!=120$; $10!=3628800$. Сопоставить и оценить такую массу маршрутов трудно даже с помощью ЭВМ. Отсюда вытекает необходимость поиска других методов решения задачи коммивояжера, в том числе и основанных на существовании гамильтоновых путей.

Проблема заключается в том, чтобы резко сократить перебор вариантов, отбрасывая в процессе решения заведомо непригодные. Как это сделать? Оказывается, можно например, с помощью метода *динамического планирования*.

Суть метода рассмотрим на следующем примере.

Пример 3.2. Пусть имеются пять пунктов: A_0 – механический цех со складом готовых деталей и A_1, A_2, A_3, A_4 — участки для сборки различных наименований выпускаемой продукции, расположенные как в других пролетах здания, так и в отдельно стоящих зданиях завода. Известные расстояния между ними (например, в метрах) сведены в матрицу. Автопогрузчик должен периодически поставлять детали со склада для каждого из сборочных участков и возвращаться обратно. Определить кратчайший маршрут движения погрузчика.

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_0	0	300	250	200	400
A_1	300	0	500	350	600
A_2	250	500	0	250	200
A_3	200	350	250	0	250
A_4	400	600	200	250	0

Решение.

Матрица симметрична по главной диагонали, поэтому достаточно информации одной из ее половин. Расстояния определяются для конкретных путей сообщения необязательно по прямой. Для определения самого короткого пути погрузчика рассмотрим варианты его передвижения последовательно, пункт за пунктом.

Начнем с вариантов, которые состоят из трех участков. Например, отправляясь с начального пункта A_0 , можно добраться в третий пункт A_3 шестью способами:

$$\begin{array}{cccc}
 A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\
 A_0 & A_2 & A_1 & A_3 \\
 A_0 & A_1 & A_4 & A_3 \\
 A_0 & A_4 & A_1 & A_3 \\
 A_0 & A_2 & A_4 & A_3 \\
 A_0 & A_4 & A_2 & A_3
 \end{array}$$

Зная, расстояния между пунктами, можно рассчитать суммарный путь для каждого из шести вариантов.

Например, сравнивая варианты $A_0 A_1 A_2 A_3$ и $A_0 A_2 A_1 A_3$ получим, что для первого варианта суммарный путь будет равен:

$$300+500+250=1050 \text{ м}$$

Для второго пути:

$$250+500+350=1100 \text{ м.}$$

Поскольку оба варианта имеют одинаковое множество пунктов и все заканчиваются в пункте A_3 , то в дальнейшем оба варианта могут развиваться одинаково. Понятно, что проигрыш в 50м, полученный для второго варианта, делает его бесперспективным по сравнению с первым при любом его дальнейшем развитии. Отсюда следует, что второй вариант можно откинуть, как бесперспективный. Также откидываются и все полученные из него варианты дальнейшего движения, число которых при больших значениях n может быть огромным.

Аналогично, рассмотрим все другие варианты движения: от начального до первого, от начального до второго, от начального до четвертого.

Результаты сведем в таблицу.

Таблица 3.1 — Перспективы вариантов движения

Варианты движения	Расстояние, м	Перспективно или нет
$A_0 A_2 A_3 A_1$	850	Да
$A_0 A_3 A_2 A_1$	950	Нет
$A_0 A_2 A_4 A_1$	1050	Да
$A_0 A_4 A_2 A_1$	1100	Нет
$A_0 A_3 A_4 A_1$	1050	Нет
$A_0 A_4 A_3 A_1$	1000	Да
$A_0 A_1 A_3 A_2$	900	Да
$A_0 A_3 A_1 A_2$	1050	Нет
$A_0 A_1 A_4 A_2$	1100	Да
$A_0 A_4 A_1 A_2$	1500	Нет
$A_0 A_3 A_4 A_2$	650	Да
$A_0 A_4 A_3 A_2$	900	Нет
$A_0 A_1 A_2 A_3$	1050	Да
$A_0 A_2 A_1 A_3$	1100	Нет
$A_0 A_1 A_4 A_3$	1150	Да
$A_0 A_4 A_1 A_3$	1350	Нет
$A_0 A_2 A_4 A_3$	700	Да
$A_0 A_4 A_2 A_3$	850	Нет
$A_0 A_1 A_2 A_4$	1000	Да
$A_0 A_2 A_1 A_4$	1350	Нет
$A_0 A_1 A_3 A_4$	900	Да
$A_0 A_3 A_1 A_4$	1150	Нет
$A_0 A_2 A_3 A_4$	750	Нет
$A_0 A_3 A_2 A_4$	650	Да

После заполнения таблицы, выделяем только перспективные варианты (их будет 12), дополняем их номером не посещенного населенного пункта и повторяем процедуру: определяем перспективность движения уже для четырех участков пути. Для этого к расчетному расстоянию перспективного пути (см. табл. 3.1) при-

бавляем расстояние до не посещенного еще населенного пункта. Результаты расчета сведем в таблицу 3.2.

Таблица 3.2 — Перспективы выделенных вариантов движения

Варианты движения	Расстояние, м	Перспективно или нет
$A_0 A_2 A_3 A_1 A_4$	1450	Нет
$A_0 A_2 A_4 A_1 A_3$	1400	Нет
$A_0 A_4 A_3 A_1 A_2$	1500	Нет
$A_0 A_1 A_3 A_2 A_4$	1100	Да
$A_0 A_1 A_4 A_2 A_3$	1350	Нет
$A_0 A_3 A_4 A_2 A_1$	1150	Нет
$A_0 A_1 A_2 A_3 A_4$	1350	Нет
$A_0 A_1 A_4 A_3 A_2$	1400	Нет
$A_0 A_2 A_4 A_3 A_1$	1050	Да
$A_0 A_1 A_2 A_4 A_3$	1250	Да
$A_0 A_1 A_3 A_4 A_1$	1100	Да
$A_0 A_3 A_2 A_4 A_1$	1250	Нет

Аналогично вышеизложенному, выбираем из таблицы 3.2 четыре перспективных варианта:

$$\begin{array}{ccccc}
 A_0 & A_1 & A_3 & A_2 & A_4 \\
 A_0 & A_2 & A_4 & A_3 & A_1 \\
 A_0 & A_1 & A_2 & A_4 & A_3 \\
 A_0 & A_1 & A_3 & A_4 & A_1
 \end{array}$$

Так как нам необходимо вернуться в начальный пункт, то выделенные перспективные варианты движения дополняем начальным пунктом A_0 . Рассчитаем для них суммарные расстояния и занесем результаты в таблицу 3.3.

Из таблицы видно, что есть два оптимальных маршрута прохождения автопогрузчика $A_0 A_2 A_4 A_3 A_1 A_0$ и $A_0 A_1 A_3 A_4 A_1 A_0$, так как имеют минимальную из всех возможных маршрутов длину, равную 1350 м.

Таблица 3.3 — Суммарные расстояния перспективных вариантов движения

Варианты движения	Расстояние, м
$A_0 A_1 A_3 A_2 A_4 A_0$	1500
$A_0 A_2 A_4 A_3 A_1 A_0$	1350
$A_0 A_1 A_2 A_4 A_3 A_0$	1450
$A_0 A_1 A_3 A_4 A_1 A_0$	1350

Как видно из приведенного примера, исключение из рассмотрения на каждом шагу решения бесперспективных вариантов, является достаточно громоздким особенно при численности пунктов $n > 5$.

Удалось найти и другой метод решения задачи коммивояжера, например, путем динамической оптимизации в планировании работ.

Пример 3.3. Планируется реконструкция механических участков A_1 , A_2 , A_3 цеха в связи с производством новых изделий. Реконструкция каждого участка состоит из следующих четырех основных стадий работ, выполняемых последовательно: 1) освоение производственных площадей; 2) транспортные и электро-монтажные работы; 3) монтаж оборудования и средств межоперационного транспорта; 4) пуск и наладка оборудования. Возможности служб главного механика ограничены и не позволяют вести один и тот же вид работ одновременно на нескольких участках.

Считая, что работа на каждом участке должна продолжаться непрерывно с момента начала реконструкции и до его окончания, требуется запланировать сроки начала работ и их оптимальную последовательность для каждого объекта так, чтобы суммарный срок реконструкции всех участков был минимальным. Определить этот срок.

Продолжительность каждого вида работ, например в рабочих днях, задана в таблице.

Таблица 3.4 — Продолжительность работ

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	1	3	4	2
A_2	3	2	3	1
A_3	2	2	1	4

Решение.

Считая, что работа на каждом объекте должна продолжаться безостановочно с момента начала до его окончания, необходимо определить срок начала работ каждого объекта так, чтобы суммарный срок реконструкции всех участков был минимальным.

Последовательность стадий работ может быть любой:

$$A_1 \quad A_2 \quad A_3$$

$$A_1 \quad A_3 \quad A_2$$

$$A_2 \quad A_1 \quad A_3$$

$$A_2 \quad A_3 \quad A_1$$

$$A_3 \quad A_1 \quad A_2$$

$$A_3 \quad A_2 \quad A_1$$

Необходимо определить последовательность, при которой суммарный срок реконструкции был бы минимальным.

Покажем, как оценивается суммарное время работ для одного из вариантов, например $A_1 \quad A_2 \quad A_3$. Сроки окончания работ на первом объекте будут следующими:

- окончание первой стадии 1 день;
- окончание второй стадии $1+3=4$ дня;
- окончание третьей стадии $4+4=8$ дней;
- окончание четвертой стадии $8+2=10$ дней.

Время t_2 начала работ на втором объекте должно удовлетворять следующим неравенствам:

$$t_2 \geq 1;$$

$$t_2 + 3 \geq 4;$$

$$t_2 + 5 \geq 8;$$

$$t_2 + 8 \geq 10.$$

Эти неравенства выражают требования, при которых каждая стадия работ на объекте A_2 начиналась только после окончания работ соответствующих стадий на объекте A_1 . Одновременно (параллельно) производить тот же вид работ в организации не представляется возможным по условию задачи.

Первое неравенство выражает требования, чтобы первая стадия работ на другом объекте начиналась только после окончания первой стадии работ на первом объекте, т.е. через один день.

Второе неравенство выражает требование, чтобы вторая стадия работ на втором объекте начинается только после окончания второй стадии работ на первом объекте, т.е. через четыре дня. При этом необходимо помнить, что первая стадия работ на другом объекте уже выполнена (t_2+3).

Третье неравенство выражает требование, чтобы третья стадия работ на втором объекте начиналась только после окончания третьей стадии работ на первом объекте, т.е. через 8 дней (первая и вторая стадии работ на втором объекте уже выполнены t_2+5).

Четвертое неравенство выражает требование, чтобы четвертая стадия работ на втором объекте начиналась только после окончания четвертой стадии работ на первом объекте, т.е. через 10 дней (первая, вторая и третья стадии работ на втором объекте выполнены, т.е. t_2+8).

Наименьшее значение t_2 , которое удовлетворяет этим неравенствам, равно 3. Отсюда самый ранний возможный срок начала реконструкции второго объекта A_2 — 3 дня после начала работ на первом объекте A_1 . Зная это значение, несложно определить срок окончания соответствующих стадий работ:

- окончание первой стадии $3+3=6$ дней;
- окончание второй стадии $6+2=8$ дней;
- окончание третьей стадии $8+3=11$ дней;
- окончание четвертой стадии $11+1=12$ дней.

Зная срок окончания стадий работ на втором объекте, аналогично определим срок t_3 начала работ третьего объекта (A_3). Для него неравенства будут следующими:

$$\begin{aligned}t_3 &\geq 6; \\t_3 + 2 &\geq 8; \\t_3 + 4 &\geq 11; \\t_3 + 5 &\geq 12.\end{aligned}$$

что приводит к минимальному сроку $t_3=7$ дней. Следовательно, сроки окончания отдельных стадий работ третьего объекта будут соответственно:

- окончание первой стадии $7+2=9$ дней;
- окончание второй стадии $9+2=11$ дней;
- окончание третьей стадии $11+1=12$ дней;
- окончание четвертой стадии $12+4=16$ дней.

Таким образом, для выбранной последовательности реконструкции участков $A_1 A_2 A_3$ цеха общее время работ (которое совпадает со сроком завершения работ на объекте A_3) равно 16 дней.

Аналогично можно определить сроки и для других объектов строительства:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & A_3 & A_2, \\ A_2 & A_1 & A_3, \\ A_2 & A_3 & A_1, \\ A_3 & A_1 & A_2, \\ A_3 & A_2 & A_1. \end{array}$$

Поскольку в рассматриваемом примере всего $3!=6$ вариантов последовательности реконструкции участков, то выбор лучшего варианта может быть осуществлен простым перебором вариантов. Современные ЭВМ позволяют сделать это достаточно быстро.

Показанные методы динамического программирования (или динамического планирования) относят к классу многошаговых (или многоэтапных). Видно, что на каждом из этапов осуществляется анализ, оценка, выделение и запоминание лучших (перспективных) последовательностей с последующим повторением всех отмеченных процедур расчета. На каждом из шагов количество вариантов уменьшается. Когда количество выделенных вариантов становится минимальным, происходит окончательный выбор.

При планировании в любом производстве приходится рассматривать различные варианты выполнения задания. Получать сырье и заготовки можно из разных источников, выпускать продукцию разного вида, сорта и качества, обрабатывать изделия на стан-

ках различных типов и в различной последовательности. Иногда незначительное изменение плана распределения (источника снабжения, виды продукции, типы станков на предприятии) может дать существенный выигрыш в продукции и снижении затрат. В связи с рассмотрением вопросов о нахождении оптимальных вариантов при решении различных планово-производственных задач, а также значений параметров, которые с некоторой точки зрения были бы наилучшими, возникло математическое программирование. К таким задачам относятся задачи поиска рационального способа использования сырья и материалов, определения оптимальных производственных режимов, повышения эффективности работы транспортных средств и т.д.

Постановка задач математического программирования

Математическое программирование занимается исследованием свойств и разработкой методов решения задач следующего вида: найти значения переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, принадлежащих некоторому заданному множеству X и доставляющих максимум (минимум) заданной функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ этих переменных.

Краткая запись задачи максимизации имеет вид

$$\max \left\{ F(x) \middle/ x \in X \right\}.$$

Если определены условия, при которых осуществляется выбор решения, и указан критерий, в соответствии с которым будет оцениваться его качество (т.е. если заданы множество X и функция $F(x)$), то получают ранее сформулированную в общем виде задачу математического моделирования. Источником такого рода задач является любая область практической деятельности человека, и прежде всего производство, распределение, обмен и потребление материальных благ.

В соответствии с принятой в математическом программировании терминологией элементы множества X называются допустимыми планами (точками, векторами, решениями).

Задача математического программирования, для которой существуют допустимые планы, называется *допустимой*.

Функция $F(x)$, подлежащая максимизации (минимизации), называется *целевой функцией*.

Допустимый план, доставляющий наибольшее (наименьшее) значение целевой функции, называется *оптимальным планом* (точкой, вектором, решением) задачи.

Множество X допустимых планов задается обычно как множество решений некоторой системы уравнений и (или) неравенств.

Система уравнений и неравенств, определяющих множество X , называется *системой ограничений (условий)* задачи, а каждое из уравнений или неравенств — *ограничением (условием)* задачи.

В зависимости от особенностей целевой функции и функций, задающих ограничения, задачи математического программирования разделяются на ряд классов.

Задачи линейного программирования возникают, если все соотношения в их формулировке линейны: целевая функция имеет линейную форму

$$Z = Cx = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n,$$

переменных ($x_1, x_2, \dots, x_n$) ограничения представляют собой линейные равенства и неравенства.

Различия в свойствах этого множества, определяемые особенностями системы ограничений, приводит к тому, что среди задач линейного программирования выделяются частные постановки: транспортная, распределительная, блочная и другие задачи.

Задачи нелинейного программирования — такие задачи, в постановке которых нелинейна хотя бы одна из функций. Если о свойствах функций ничего более не сообщается, задача является общей задачей нелинейного программирования.

Задачи целочисленного программирования — такие задачи математического программирования, в постановке которых присутствует требование целочисленности всех или части переменных (соответственно полностью или частично целочисленные задачи).

Целочисленные задачи линейного и нелинейного программирования являются частным случаем более широкого класса задач дискретного программирования, которое охватывает задачи, определенные на конечных множествах допустимых решений.

Математика, как известно, исследует не реальные объекты и отношения, а их модели — формальное описание изучаемого явления, отражающее его наиболее существенные для данного конкретного случая черты.

Рассмотрим на примере, как могут возникать задачи математического линейного программирования.

Задача о раскрое [7]. Листовой материал поступает на предприятие обычно в виде стандартных форм, из которых затем в заготовительном цехе получают заготовки необходимых размеров. При разделении листов на заготовки все остатки идут в отходы. Количество отходов зависит от принятых вариантов раскроя. Каждый вариант характеризуется количеством заготовок различного вида, выкраиваемых на листе.

Задача состоит в том, чтобы составить оптимальный план раскроя, т.е. указать, сколько листов кроить по каждому из вариантов, чтобы получить необходимое количество заготовок каждого типа при минимальных суммарных отходах.

Введем обозначения. Пусть имеется всего m различных видов заготовок. Заготовки вида i требуются в количестве B_i , $i = \overline{1, m}$. Пусть с учетом возможностей расположения заготовок на листе, а также технологических, организационных и других факторов отобрано n рациональных вариантов раскроя листа. Пусть при этом количество заготовок i -го типа, получаемых из одного листа при использовании j -го варианта раскроя, равно a_{ij} , а отходы — c_j , $j = \overline{1, n}$.

Если обозначать количество листов, раскраиваемых по варианту j , неравенством $x_j \geq 0$, то набор чисел $x_j = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ будет представлять некоторый план раскроя. Для того чтобы он был допустим, необходимо выпускать каждую заготовку i в количестве, не меньшем заданного, т.е. выполнить условие

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, i = \overline{1, m}.$$

Кроме того, по своему смыслу переменные x_j — компоненты плана — не могут быть отрицательными числами, что тоже должно быть отражено в условиях задачи:

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$$

Для того чтобы этот план был оптимален, следует подобрать значения x_j так, чтобы суммарные отходы Z были минимальными. Это условие запишется в виде

$$\min Z = \sum_{j=1}^n C_j x_j.$$

Таким образом, задача записывается условиями указанными выше.

Более сложные постановки задач могут включать требование целочисленности неизвестных x_j , существенное при малых значениях переменных, отражать наличие листов различного формата, учитывать другие критерии качества.

Пример [7]. Построить модель задачи раскроя при следующих исходных данных. Из листового проката необходимо вырезать заготовки двух типов (А и В) для производства 60 изделий. Для одного изделия требуется три заготовки типа А и восемь заготовок типа В. Размер листа, а также размеры и конфигурация заготовок позволяют выбрать четыре рациональных варианта раскроя листа, приведенных в таблице.

Заготовка i	Варианты раскроя, j				Потребность b_j
	1	2	3	4	
А	4	3	2	1	180
В	0	4	6	10	480
Отходы, C_j	12	5	3	0	

Так, при раскрое листа по первому варианту получаем четыре заготовки типа А, отход составляет 12 условных единиц. При раскрое по второму варианту получаем три заготовки типа А, четыре заготовки типа В, отход составляет 5 условных единиц и т.д. Математическая модель задачи примет вид

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &\geq 180; \\ 4x_2 + 6x_3 + 10x_4 &\geq 480; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0; \\ \min Z &= 12x_1 + 5x_2 + 3x_3. \end{aligned}$$

Приведем другой пример постановки задачи математического линейного программирования.

Пример. Предприятие может использовать для производства однородного продукта (деталей, изделий) n различных технологий и m видов ресурсов. Запас ресурса каждого вида i (сырье, заготовки, инструмент, энергия, труд, оборудование и т.д.) ограничен величиной b_j , $i = \overline{1, m}$. Известно, что при использовании технологии j в единицу времени расходуется a_{ij} единиц i -го ресурса и производится C_j единиц продукта.

Требуется определить интенсивность использования каждой технологии, чтобы при наличных ресурсах выпустить максимальное количество продуктов (изделий).

Решение приведенных задач, а также задачи транспортного типа, задачи о назначениях, о распределении исполнителей по работам и другие приведены в пособии [7].

3.3 Метод ветвей и границ для решения задачи коммивояжера

Итеративный (шаговый) метод решения задачи коммивояжера, предложенный Литтом и др. называют методом «ветвей и границ». Идея метода заключается в том, что множество всех допустимых замкнутых маршрутов (циклов) задачи разбивается определенным образом на два непересекающихся подмножества и вычисляются оценки каждого из них. Далее подмножество с минимальной

оценкой вновь разбивается на два подмножества и вычисляются их оценки. Оценки вычисляются на каждом шаге, и выбирается подмножество с наименьшей из всех полученных до этого шага оценок и опять производится его разбивка. В конце получают подмножество, содержащее один цикл, стоимость которого равна нижней границе этого подмножества.

После преобразования на каждом шаге матрицы путем приведения и оценки приводящих констант получают минимальный гамильтонов цикл на графе, найденный маршрут и будет оптимальным.

Математикам удалось найти условия существования эйлеровых путей на графе, т.е. путей, проходящих по каждому ребру один раз. Задача Эйлера решена полностью. На первый взгляд, по аналогии с эйлеровыми путями, задача о нахождении гамильтоновых маршрутов кажется разрешимой. Однако это не так. Пока не удалось сформулировать требования, которым должен удовлетворять граф, чтобы на нем от вершины к вершине можно было провести гамильтонов путь. Найдено лишь достаточное условие существования гамильтонового пути, которое можно сформулировать так: если степень каждой вершины графа, который имеет n вершин ($n \geq 3$), не меньше $n/2$, то на этом графе можно построить гамильтонов путь. Условия существования такого пути не найдены, т.е. в общем случае задача о построении гамильтоновых путей (а значит, и задача коммивояжера) не решена.

В соответствии с методом «ветвей и границ» шаг за шагом строится не полное, а усеченное граф-дерево, когда часть ветвей в ходе его «выращивания» отсекается, а оставшиеся ветви ведут к решению.

Задача о коммивояжере в самом общем виде оказалась задачей «на графе», т.е. дана некоторая граф-схема и на ней необходимо найти требуемый путь. Постановка задачи потребовала применения графа, и решение ее найдено с использованием другого усеченного граф-дерева.

Рассмотрим постановку задачи и пример определения оптимальной последовательности обработки деталей на станке.

Пример 3.4. Пусть n различных наименований деталей, пронумерованных от 1 до n , требуется обработать на одном станке. При переходе от обработки детали наименования i к детали наименования k требуется время t_{ik} , на переналадку станка, различное для разных i и k . Значения t_{ik} могут быть заданы в виде таблицы 3.5 или матрицы. Требуется определить такой порядок обработки деталей, при котором общее время на обработку будет минимальным.

Таблица 3.5 — Исходные данные времени переналадки станка

i	k			
	1	2	...	n
1	-	t_{12}	...	t_{1n}
2	t_{21}	-	...	t_{2n}
...	...	...	...	...
n	t_{n1}	t_{n2}	...	-

Так как основное время, затрачиваемое непосредственно на обработку всех партий деталей n наименований, будет одним и тем же при любом порядке обработки, то минимизация общего времени обработки сводится к минимизации времени на переналадку станка.

Пусть требуется обрабатывать партии деталей шести наименований. Известно время в минутах на переналадку станка при переходе от обработки каждой детали i к детали j и наоборот. Эти сведения представлены в матрице.

Найти последовательность запуска партий деталей шести наименований такую, чтобы время на переналадку оборудования было минимальным.

В матрицу введен символ ∞ , чтобы исключить из расчетов время на переналадку деталей в партии одного наименования. Время $t(i, j)$ в общем случае не совпадает с $t(j, i)$.

$$J = \begin{array}{c} i=1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \infty & 13 & 25 & \boxed{11} & 18 & 30 \\ 14 & \infty & \boxed{18} & 20 & 22 & 24 \\ 24 & 20 & \infty & 16 & \boxed{18} & 22 \\ 18 & 16 & 14 & \infty & 1 & \boxed{10} \\ \boxed{7} & 15 & 16 & 8 & \infty & 3 \\ 10 & \boxed{8} & 10 & 6 & 17 & \infty \end{array} \begin{array}{c} 11 \\ 14 \\ 16 \\ 10 \\ 3 \\ 6 \end{array}$$

$$\sum h_i = 60$$

Решение.

Решить задачу можно методом простого перебора. Для этого требуется выписать $(n-1)! = (6-1)! = 120$ путей на графе, просчитать длины каждого гамильтонового пути, сравнить их между собой и выбрать минимальный путь. Чтобы записать 120 различных возможных замкнутых контуров, не повторяясь и не упустив ни одного из них, целесообразно построить вспомогательный граф — граф-дерево, как на рисунке 3. 4. Такой путь решения трудоемок даже с использованием ЭВМ.

Другой путь решения возможен методом простого просмотра матрицы. Метод заключается в выборе для каждой строки матрицы минимального значения времени. Таким образом, можно приближенно наметить последовательность запуска партий деталей. Для данного случая путь $\mu = (1, 4); (4, 6); (6, 2); (2, 3); (3, 5); (5, 1) = \{1, 4, 6, 2, 3, 5, 1\}$ будет иметь длину $l_\mu = 11 + 10 + 8 + 18 + 18 + 7 = 72$. Однако полученное решение не обязательно является оптимальным.

Оптимальное решение поставленной задачи найдем путем применения метода ветвей и границ. В основе этого метода лежит преобразование матрицы, называемое *приведением*. *Приведение* — это уменьшение элементов любой строки или любого столбца матрицы на какое-либо число, называемое *приводящей константой*. На эту же величину уменьшаются длины всех гамильтоновых путей.

Например, уменьшив элементы первой строки матрицы на 11. Получим строку $\{\infty, 2, 14, 0, 7, 19\}$.

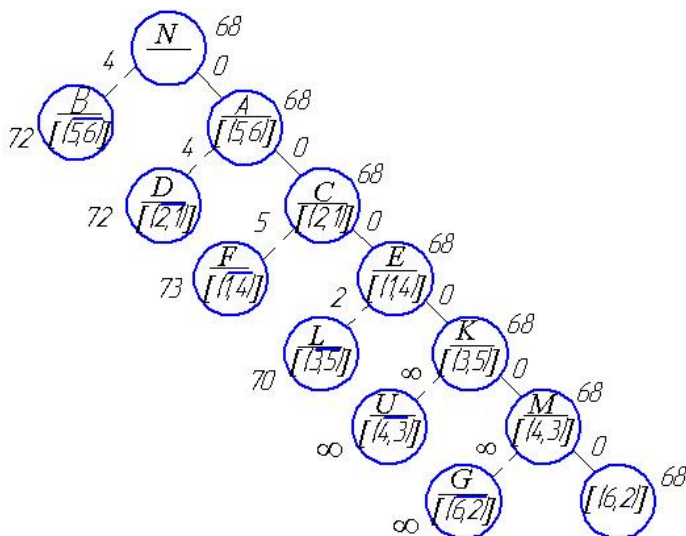


Рисунок 3.4 — Граф-дерево разбиений

Выполним первый шаг — приведение исходной матрицы до получения в каждой строке и в каждом столбце хотя бы по одному нулю. Приводящие константы запишем в матрицу T . После приведения по строкам получим матрицу T_1 :

$$T_1 = \begin{matrix} J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i=1 & \infty & 2 & 14 & 0 & 7 & 19 \\ 2 & 0 & \infty & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 8 & 4 & \infty & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & \infty & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 12 & 13 & 5 & \infty & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 4 & 0 & 11 & \infty \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\sum h_j = 8$$

$$T_1 = \begin{matrix} & J = & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i=1 & \infty & 2 & 14 & 0 & 7 & 19 \\ 2 & 0 & \infty & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 8 & 4 & \infty & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & \infty & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 12 & 13 & 5 & \infty & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 4 & 0 & 11 & \infty \end{bmatrix} \\ T_1 = & \end{matrix}$$

$$\sum h_j = 8$$

Приводим по столбцам матрицу T_1 и получим матрицу T_2 . Длины всех гамильтоновых путей в матрице T_2 уменьшены на сумму вычтенных из каждой строки и каждого столбца чисел Σh_i и Σh_j :

$$T_2 = \begin{matrix} & J = & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i=1 & \infty & 0 & 10 & 0 & 5 & 19 \\ 2 & 0 & \infty & 0 & 6 & 6 & 10 \\ 3 & 8 & 2 & \infty & 0 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 4 & 0 & \infty & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 10 & 9 & 5 & \infty & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} \\ T_2 = & \end{matrix}$$

$$q = \sum h_i + \sum h_j = 60 + 8 = 68.$$

Величину q называют уточненной оценкой снизу длин гамильтоновых путей, определяющей вес исходной вершины дерева разбиений, т.е. минимальную протяженность пути, меньше которого пути на графе быть не может. Дерево разбиений (рис.3.4) множества N всех гамильтоновых путей на подмножества строится следующим образом.

Возьмем некоторую дугу (i,j) . К первому подмножеству A отнесем все гамильтоновы пути, в которые эта дуга входит. Обозначим это множество $[(i,j)]$. Ко второму множеству B отнесем все гамильтоновы пути, в которые дуга (i,j) не входит. Обозначим это

множество $[(i, j)]$. В качестве дуги (i, j) следует брать такую, у которой в приведенной матрице величина $t_{i,j}=0$, а увеличение оценки для множества $[(i, j)]$ будет максимальным. Обозначим увеличение оценки множества $[(i, j)]$ через $\Delta(i, j)$. Значение этой величины получают сложением наименьших чисел в i -й строке и j -м столбце.

Второй шаг решения — последовательное улучшение оценки снизу и приближение ее к значению

$$q^* = \max_{i \in N} q_i$$

Для матрицы T_2 значения $\Delta(i, j)$:

$$\begin{aligned} \Delta(1, 2) &= 0 + 0 = 0; & \Delta(2, 3) &= 0 + 0 = 0; & \Delta(4, 3) &= 0 + 0 = 0; \\ \Delta(1, 4) &= 0 + 0 = 0; & \Delta(3, 4) &= 0 + 0 = 0; & \Delta(4, 6) &= 0 + 0 = 0; \\ \Delta(2, 1) &= 0 + 4 = 4; & \Delta(3, 5) &= 0 + 0 = 0; & \Delta(5, 6) &= 4 + 0 = 4; \\ \Delta(6, 2) &= 0 + 0 = 0; & \Delta(6, 3) &= 0 + 0 = 0; & \Delta(6, 4) &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Наибольшее увеличение оценки q подмножества путей $[(i, j)]$ получается для дуг $(2, 1)$ и $(5, 6)$. Увеличение оценки этих дуг равны между собой, поэтому выбираем любую из них, например дугу $(5, 6)$. Отмечаем это на дереве разбиений рис. 3.4. Чтобы отсечь пути подмножества B , не проходящие через намеченную дугу $(5, 6)$, исключаем пятую строку и шестой столбец из приведенной матрицы T_2 . Получаем матрицу T_3 путей для множества $[(5, 6)]$:

$$T_3 = \begin{matrix} & J = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} i = 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \infty & \text{X} & 10 & 0 & 5 \\ 0 & \infty & 0 & 6 & 6 \\ 8 & 2 & \infty & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & \infty & 0 \\ 4 & 10 & 9 & 5 & \infty \\ 4 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{bmatrix} \end{matrix}$$

При преобразованиях матриц нужно строго следить за тем, чтобы не получилось путей, не являющихся гамильтоновыми. Поскольку дуга $(5,6)$ уже введена в намечаемый гамильтонов путь, нужно наложить запрет на дугу $(6,5)$, отметив клетку $(6,5)$ матрицы T_2 символом ∞ , так как дуга $(6,5)$ совместно с $[(5,6)]$ образует замкнутый цикл без остальных вершин графа. Это недопустимо.

Последовательное улучшение оценки снизу q_i производится до тех пор, пока не будет получена матрица размером 2×2 .

Для матрицы T_3 улучшение оценки снизу $\Delta(i, j)$:

$$\begin{array}{lll} \Delta(1,2)=0; & \Delta(3,4)=0; & \Delta(6,2)=0; \\ \Delta(1,4)=0; & \Delta(3,5)=0; & \Delta(6,3)=0; \\ \underline{\Delta(2,1)=4}; & \Delta(4,3)=0; & \Delta(6,4)=0. \\ \Delta(2,3)=0; & \Delta(4,5)=0; & \end{array}$$

В дерево разбиений вносим дугу $(2,1)$ подмножества путей $[(2,1)]$. Дугу $(1,2)$ заменяем символом ∞ . Исключая из матрицы T_3 вторую строку и первый столбец, получаем матрицу T_4 .

$$T_4 = \begin{array}{c} J = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ i=1 & \infty & 10 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & \infty & 0 & 0 \\ 4 & \cancel{X} & 0 & \infty & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

Из матрицы T_4 $\Delta(1,4)=5$; $\Delta(6,2)=2$. Дугу $[(1,4)]$ вносим в дерево разбиений. Из матрицы T_4 исключаем первую строку и четвертый столбец. Получим матрицу T_5 , для которой улучшение оценки снизу $\Delta(i, j)$:

$$T_5 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & \infty & 0 \\ 4 & \infty & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{\Delta(3,5)=2+0=2} \\ \Delta(4,3)=0+0=0 \\ \Delta(4,5)=0+0=0 \\ \Delta(6,2)=0+2=2 \\ \Delta(6,3)=0+0=0. \end{array}$$

Исключаем третью строку и пятый столбец. Получаем матрицу T_6 размерностью 2×2 .

$$T_6 = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \infty & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\Delta(4,3)=\infty+0=\infty}$$

$$\underline{\Delta(6,2)=0+\infty=\infty}$$

$$\Delta(6,3)=0+0=0.$$

Максимальные значения увеличения оценки $\Delta(i, j)$ в матрице T_6 получились равными для дуг $(4, 3)$ и $(6, 2)$, поэтому обе эти дуги можно отнести к намечаемому гамильтоновому пути, получая таким образом последовательность дуг $\{(2, 1), (1, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 2)\}$ длиной $(14+11+14+18+3+8=68)$, равной $68 < 72$ длины пути, полученной ранее методом просмотра строк матрицы.

Анализируя «отсеченные» ранее (рис.3.4) подмножества дуг $[(\overline{5,6})]$, $[(\overline{6,2})]$, $[(\overline{2,1})]$, $[(\overline{1,4})]$, $[(\overline{4,3})]$, $[(\overline{3,5})]$ убеждаемся, что их оценки снизу больше, чем 68. Эти подмножества не могут содержать гамильтонового пути, короче найденного. Следовательно, дальнейшая проверка не требуется и полученный гамильтонов путь — оптимален.

Таким образом, для обеспечения минимального времени на переналадку станков при обработке партий деталей шести различных наименований их следует запускать в обработку, соблюдая последовательность $\{2, 1, 4, 3, 5, 6\}$. Начинать обработку можно с любого наименования деталей, но обязательно выдерживать указанную последовательность.

3.4 Оптимизация операций для многооперационных станков с ЧПУ

Одним из распространенных видов станков с ЧПУ для обработки корпусных деталей являются станки фрезерно-сверлильно-расточной группы как обычные, так и типа обрабатывающих центров. Эти станки позволяют выполнить следующие переходы: свер-

ления, зенкерования, развертывания, цекования, нарезания резьбы, растачивания, расфрезерования (отверстий и внутренних контуров) и фрезерования. Сверление отверстий в металле — один из самых распространенных методов механической обработки. Сверла составляют до 30% всего количества режущего инструмента. Дальнейшая обработка отверстий мерным инструментом зависит от типа отверстия, его размеров и требуемой точности, она выполняется зенкерованием и развертыванием. Обработка отверстий на многооперационных станках с ЧПУ может быть выполнена мерным инструментом за один установ, но это снижает точность обработки.

Решение задачи оптимизации маршрута обработки отверстий многовариантно, так как должны быть учтены конструктивные особенности и компоновка станка, наличие автоматической смены инструмента, точности позиционирования. Поэтому на станках с программным управлением машиновспомогательное время является функцией количества переходов, скорости позиционирования, скорости поворота (индексации) стола и смены приспособления-спутника, габаритных размеров обрабатываемой детали, скорости смены инструмента. Продолжительность элементов вспомогательного времени может быть снижена за счет повышения быстродействия механизмов холостых ходов и механизмов закрепления и перезакрепления заготовки на столе станка (закрепление с перехватом), за счет применения унифицированного инструмента и сведения к минимуму времени смены инструмента, достигающего 40% вспомогательного времени. Время смены инструмента может быть сокращено за счет рационального построения маршрута обработки, а количество необходимого инструмента за счет метода контурного фрезерования отверстий, а также применением расточного резца, регулируемого на размер от программносителя. Подсчет вспомогательного времени можно производить по формуле:

$$t_{\text{в}} = \sum_1^m [t'_{\text{си}} + t_{\text{бош}} (2n - 1) = t_{\text{поз}} (n - 1) + kt_{\text{пс}}] - \sum t_{\text{сов}} + \sum t_{\text{пс}} + 2t_{\text{ссп}} \quad (3.9)$$

где m — число смен инструмента;

n — количество переходов, выполняемых одним инструментом;

k — число поворотов стола при обработке одним инструментом;

t'_{cu} , $t_{сов}$, $t_{Бонш}$, $t_{Бхш}$, $t_{поз}$, $t_{пс}$, $t_{ссп}$ — элементы вспомогательного времени: смены инструмента, совмещения переходов, быстрого отвода шпинделя в зону смены инструмента, обработки, подвода (отвода) шпинделя в зону (из зоны) обработки, позиционирования, поворота стола, смены спутника соответственно.

Из анализа формулы следует, что сокращение t_e возможно главным образом за счет уменьшения числа смен инструмента при увеличении объема обработки одним инструментом. При использовании обычных станков с ЧПУ отдельные составляющие вспомогательного времени отсутствуют, например $t_{Бонш}$, $t_{Бхш}$ и $t_{ссп}$.

Задачу построения оптимального варианта обработки отверстий мерным инструментом на станках с ЧПУ решают за два этапа: 1) оптимизацией маршрута обработки множества отверстий; 2) оптимизацией переходов обработки отдельной поверхности (отверстия) [11].

При оптимизации маршрута обработки множества отверстий в качестве целевой функции принимается время холостых перемещений инструмента t_x . Часть обрабатываемых отверстий может быть одного размера с одинаковыми требованиями по точности. Требуется определить такую последовательность обработки, при которой время холостых перемещений инструмента будет минимальным (т.е. найти маршрут наименьшей протяженности). Возможны три варианта обработки. В первом варианте все отверстия могут быть разбиты на группы по величине диаметра. Целесообразно сначала проводить полную обработку отверстий одной группы, а затем переходить к другой. Причем, отверстия одной группы сначала все проходят обработку сверлением, затем зенкерованием и, наконец, развертыванием. Вся задача разбивается на несколько (по числу групп отверстий) однотипных задач. Формулируют задачу следующим образом: имеется несколько отверстий одного диамет-

ра, расстояние между любыми двумя из них известны; необходимо выбрать кратчайший замкнутый маршрут, проходящий один и только один раз через каждое отверстие. Таким образом, задача сводится к «симметричной задаче коммивояжера».

Во втором варианте считают целесообразным искать маршрут для всех отверстий при одном виде обработки, т.е. все отверстия всех диаметров сначала должны пройти обработку сверлением, затем — зонкерованием и разверткой. Следовательно, имеют место три одинаковых задачи (по числу видов обработки) выбора маршрута. Для всех отверстий известны расстояния между любыми двумя. При переходе от отверстия одного диаметра к отверстию другого диаметра нужно учитывать время смены инструмента t'_{cu} . Зная скорость позиционирования V_{noz} находят путь, который прошел бы инструмент за время t'_{cu} . Заполняют таблицу оценок. Для отверстий одного диаметра записывают в матрицу расстояния между ними, а для отверстий разных диаметров к расстоянию между ними прибавляют величину, равную произведению t'_{cu} на скорость перемещения инструмента при холостом ходе, $a_{ij} = d_{ij}$, если i и j — номера отверстий одного диаметра; $a_{ij} = d_{ij} + t'_{cu} V_{noz}$, если i и j — номера отверстий разных диаметров. Здесь d_{ij} — расстояние между отверстиями с номерами i и j . Нумерацию отверстий начинают в верхнем левом углу и ведут слева направо, нумеруя по порядку все отверстия на верхней горизонтальной оси, затем слева направо все отверстия на следующей горизонтальной оси и т.д., не обращая внимания на диаметры отверстий. Полученную матрицу оценок исследуют методом “ветвей и границ”, получая наименьший по продолжительности маршрут.

В третьем варианте, не вводя ограничений, считают, что все отверстия должны пройти три вида обработки. Заполняют матрицу оценок. Если во втором варианте размер матрицы равен числу отверстий, то здесь число отверстий нужно умножить на три (по числу видов обработки). Каждое отверстие перенумеруется три раза. Сначала все отверстия нумеруются так же, как во втором варианте,

затем опять начинают с верхнего левого угла, продолжая нумерацию по порядку чисел, а затем повторяют это еще раз. Каждое отверстие будет иметь три номера, например первое: $1; k + 1; 2k + 1$ (k — число отверстий). Если отверстия одного диаметра из одной и той же серии (первая серия от 1 до k , вторая серия от $(k + 1)$ до $2k$, третья серия от $(2k + 1)$ до $3k$), то $a_{ij} = d_{ij}$, где i и j — номера отверстий, а d_{ij} — расстояние между ними.

Если отверстия разных диаметров и из одной и той же серии, то $a_{ij} = d_{ij} + t_{\text{си}} V_{\text{поз}}$ (см. второй вариант). Если отверстия из соседних серий, то к расстоянию между ними добавляют произведение $V_{\text{поз}}$ за время, необходимое для смены инструмента. Для того, чтобы не допустить пропуск какого-нибудь вида обработки, т.е. обеспечить определенную последовательность в обработке каждого отверстия (сверление, зенкерование и развертывание), в определенные клетки матрицы ставят знак ∞ (бесконечность), тем самым устраняют из маршрута ненужные ребра. Получают «несимметричную задачу коммивояжера», которую решают тем же методом «ветвей и границ». Значительная трудность в данном случае обусловлена размерностью матрицы оценок $3k \times 3k$, где k — число отверстий).

3.5 Оптимизация решений по комплексу решений

Выбор оптимального решения по комплексу нескольких критериев является задачей многокритериальной и осуществляется в условиях полной определенности.

Математические модели исследуемых явлений или процессов могут быть заданы в виде таблиц, элементами которых являются значения частных критериев эффективности функционирования системы, вычисленные для каждой из сравниваемых стратегий при строго заданных внешних условиях. Для рассматриваемых условий принятие решений может производиться:

- по одному критерию;
- по нескольким критериям.

Один из подходов к решению многокритериальных задач управления связан с процедурой образования обобщенной функции

$F_i(a_{i1}; a_{i2}; a_{i3}; \dots a_{in})$, монотонно зависящей от критериев $a_{i1}; a_{i2}; a_{i3}; \dots a_{in}$. Данная процедура называется *процедурой (методом) свертывания критериев*. Существует несколько методов свертывания, например:

- метод аддитивной оптимизации;
- метод многоцелевой оптимизации и др.

Рассмотрим подробнее *метод аддитивной оптимизации*.

Пусть

$$F_i(a_{ij}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{ij} . \quad (3.10)$$

Здесь выражение (3.10) определяет аддитивный критерий оптимальности. Величины λ_i являются весовыми коэффициентами, которые определяют в количественной форме степень предпочтения j -го критерия по сравнению с другими критериями. Другими словами, коэффициенты λ_i определяют важность j -го критерия оптимальности. При этом более важному критерию приписывается больший вес, а общая важность всех критериев равна единице, то есть

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda \geq 0, j = \overline{1, n} .$$

Обобщенная функция цели (3.10) может быть использована для свертывания частных критериев оптимальности, если:

- частные (локальные) критерии количественно соизмеримы по важности, то есть каждому из них можно поставить в соответствие некоторое число λ_j , которое численно характеризует его важность по отношению к другим критериям;
- частные критерии являются однородными (имеют одинаковую размерность).

В этом случае для решения задачи многокритериальной оптимизации оказывается справедливым применение аддитивного критерия оптимальности.

Если заданные локальные критерии не однородны, то есть имеют различные единицы измерения, в этом случае требуется нормализация критериев.

Под *нормализацией критериев* понимается такая последовательность процедур, с помощью которой все критерии приводятся к единому, безразмерному масштабу измерения. К настоящему времени разработано большое количество схем нормализации. Рассмотрим некоторые из них.

Определим максимум и минимум каждого локального критерия, то есть

$$a_j^+ = \max a_{ij}, i=\overline{1, m},$$

$$a_j^- = \min a_{ij}, i=\overline{1, m}.$$

Выделим группу критериев a_j , $j = \overline{1, l}$, которые максимизируются при решении задачи, и группу критериев a_j , $j = \overline{l+1, n}$, которые минимизируются при решении задачи.

Тогда в соответствии с принципом максимальной эффективности нормализованные критерии определяются из следующих соотношений:

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+}, j=\overline{1, l},$$

$$\hat{a}_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+}, j=\overline{l+1, n},$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^-}{a_j^+ - a_j^-}, j=\overline{1, l},$$

или

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_i^+ - a_{ij}}{a_j^+ - a_j^-}, j=\overline{l+1, n}.$$

Оптимальным будет тот вариант (стратегия), который обеспечивает максимальное значение функции цели (3.10):

$$F_i = \sum_{j=1}^n \lambda_i \cdot \hat{a}_{ij}, j=\overline{1, m}. \quad (3.11)$$

В соответствии с принципом минимальной потери нормализованные критерии определяются из соотношений:

$$\hat{a}_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+}, j=\overline{1, l},$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+}, j=\overline{l+1, n},$$

или

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_j^+ - a_{ij}}{a_j^+ - a_j^-}, j=\overline{1, l},$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^-}{a_j^+ - a_j^-}, j=\overline{l+1, n}.$$

При этом оптимальным будет тот вариант (стратегия), который обеспечивает минимальное значение функции цели (3.11).

Рассмотренный подход к решению многокритериальных задач зачастую применяется при решении технико-экономических задач, связанных с оценкой качества промышленной продукции и оценкой уровня технического совершенства технических устройств и систем по нескольким показателям.

Другим возможным методом решения многокритериальных задач является **метод последовательных уступок**. В начале критерии ранжируются и нумеруются в порядке убывания важности. Абсолютное значение коэффициентов важности λ_j на этом этапе не играет никакой роли. Оптимизируется первый по важности критерий a_1 , и определяется его экстремальное значение a_1^* . Затем назначается величина допустимого отклонения критерия от оптимального значения (уступка) Δa_1 и ищется экстремальное значение второго по важности критерия a_2 , при условии, что отклонение первого от оптимального значения не превзойдет величины уступки. Затем назначается уступка для второго критерия, и задача оптимизируется по третьему критерию и т.д. Таким образом, многокритериальная

задача оптимизации заменяется последовательностью однокритериальных задач. Решение каждой предыдущей задачи используется при решении последующих для формирования дополнительных условий, состоящих в ограничении на величину уступки.

Рассмотрим пример принятия решения по комплексу критериев методом аддитивной оптимизации.

Пример 3.5. Предприятию требуется выбрать оптимальную стратегию по обеспечению нового производства оборудованием. С помощью экспериментальных наблюдений были определены значения частных критериев функционирования соответствующего оборудования (a_{ij}) , выпускаемого тремя заводами-изготовителями. Рассмотрим данные для выбора оптимальной стратегии в условиях полной определенности:

Варианты оборудования (стратегии решения)	Частные критерии эффективности оборудования			
	производительность, д.е.	стоимость оборудования, д.е.	энергоёмкость, у.е.	надёжность, у.е.
Оборудование завода 1 X_1	$a_{11}=5$	$a_{12}=7$	$a_{13}=5$	$a_{14}=6$
Оборудование завода 2 X_2	$a_{21}=3$	$a_{22}=4$	$a_{23}=7$	$a_{24}=3$
Оборудование завода 3 X_3	$a_{31}=4$	$a_{32}=6$	$a_{33}=2$	$a_{34}=4$
* Значения частных критериев даны в условных единицах				

На основе экспертных оценок были также определены веса частных критериев $\lambda_j, j = \overline{1, n}$:

$$\lambda_1=0,4; \lambda_2=0,2; \lambda_3=0,1; \lambda_4=0,3.$$

Решение.

Очевидно, выбор оптимальной стратегии (варианта оборудования) по одному критерию в задаче не вызывает затруднений. Например, если оценить оборудование по надёжности, то лучшим является оборудование завода 1 (стратегия X_1).

Допустим в задаче необходимо выбрать оптимальный вариант оборудования по двум однородным локальным критериям:

— производительность (д.е.);

— стоимость оборудования (д.е.).

Пусть на основе экспертных оценок были определены весовые коэффициенты этих двух частных критериев: $\lambda_1=0,667$, $\lambda_2=0,333$. Вычислим аддитивный критерий оптимальности для трех вариантов:

$$F_1(a_{1j}) = \lambda_1 \cdot a_{11} + \lambda_2 \cdot a_{12} = 0,667 \cdot 5 + 0,333 \cdot 7 = 5,666;$$

$$F_2(a_{2j}) = \lambda_1 \cdot a_{21} + \lambda_2 \cdot a_{22} = 0,667 \cdot 3 + 0,333 \cdot 4 = 3,333;$$

$$F_3(a_{3j}) = \lambda_1 \cdot a_{31} + \lambda_2 \cdot a_{32} = 0,667 \cdot 4 + 0,333 \cdot 6 = 4,666.$$

Очевидно, первый вариант оборудования по двум частным стоимостным критериям будет оптимальным, так как $F_{max}=F_1(a_{ij})=5,666$. В рассматриваемом примере четыре локальных критерия не однородны, то есть имеют различные единицы измерения. Определим оптимальную стратегию выбора оборудования из трех возможных ($m=3$) с учетом четырех локальных критериев ($n=4$).

1. Определим *max* и *min* каждого локального критерия:

$$a_1^+ = 5; a_2^+ = 7; a_3^+ = 7; a_4^+ = 6.$$

2. При решении задачи максимизируются первый (производительность) и четвертый (надежность) критерии, а минимизируются второй (стоимость оборудования) и третий (энергоёмкость) критерии.

3. Исходя из принципа максимизации эффективности, нормализуем критерии:

$$\hat{a}_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_1^+};$$

$$\hat{a}_{24} = \frac{a_{24}}{a_4^+} = \frac{3}{6} = 0,5;$$

$$\hat{a}_{11} = \frac{a_{11}}{a_1^+} = \frac{5}{5} = 1;$$

$$\hat{a}_{34} = \frac{a_{34}}{a_4^+} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

$$\hat{a}_{21} = \frac{a_{21}}{a_1^+} = \frac{3}{5} = 0,6;$$

$$\hat{a}_{i2} = 1 - \frac{a_{i2}}{a_2^+};$$

$$\hat{a}_{31} = \frac{a_{31}}{a_1^+} = \frac{4}{5} = 0,8;$$

$$\hat{a}_{12} = 1 - \frac{a_{12}}{a_2^+} = 1 - \frac{7}{7} = 0;$$

$$\begin{aligned}
\hat{a}_{i4} &= \frac{a_{i4}}{a_4^+}; & \hat{a}_{22} &= 1 - \frac{a_{22}}{a_2^+} = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}; \\
\hat{a}_{i4} &= \frac{a_{i4}}{a_4^+} = \frac{6}{6} = 1; & \hat{a}_{32} &= 1 - \frac{a_{32}}{a_2^+} = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}; \\
\hat{a}_{i3} &= 1 - \frac{a_{i3}}{a_3^+}; & \hat{a}_{23} &= 1 - \frac{a_{23}}{a_3^+} = 1 - \frac{7}{7} = 0; \\
\hat{a}_{i3} &= 1 - \frac{a_{i3}}{a_3^+} = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}; & \hat{a}_{33} &= 1 - \frac{a_{33}}{a_3^+} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}.
\end{aligned}$$

4. Определим обобщенную функцию цели по каждому варианту:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \lambda_1 \cdot \hat{a}_{11} + \lambda_2 \cdot \hat{a}_{12} + \lambda_3 \cdot \hat{a}_{13} + \lambda_4 \cdot \hat{a}_{14} = 0,4 \cdot 1 + 0,2 \cdot 0 + 0,1 \cdot \frac{2}{7} + 0,3 \cdot 1 \approx 0,729; \\
F_2 &= \lambda_1 \cdot \hat{a}_{21} + \lambda_2 \cdot \hat{a}_{22} + \lambda_3 \cdot \hat{a}_{23} + \lambda_4 \cdot \hat{a}_{24} = 0,4 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot \frac{3}{7} + 0,1 \cdot 0 + 0,3 \cdot 0,5 \approx 0,476; \\
F_3 &= \lambda_1 \cdot \hat{a}_{31} + \lambda_2 \cdot \hat{a}_{32} + \lambda_3 \cdot \hat{a}_{33} + \lambda_4 \cdot \hat{a}_{34} = 0,4 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot \frac{1}{7} + 0,1 \cdot \frac{5}{7} + 0,3 \cdot \frac{2}{3} \approx 0,603.
\end{aligned}$$

Оптимальным является первый вариант оборудования, так как

$$F_{max} = F_1 = 0,729.$$

3.6 Формирование оптимальных операций при обработке ступенчатых валов

Под содержанием операции понимают последовательность выполнения и объединения переходов обработки того или иного количества поверхностей на одном станке. Определение оптимального содержания операций ведут с учетом множества переходов, методов настройки, числа подналадок или переналадок, модели оборудования и его технологических возможностей. При формировании операций необходимо общую совокупность переходов упорядочить и разбить на множества с учетом термической обработки, минимизации количества установок и холостых перемещений инструмента. В одном случае все переходы могут быть объединены в

одно множество, т.е. обработка может выполняться за одну операцию и один установ. В другом, предельном варианте черновые и чистовые группы переходов могут быть выполнены за несколько операций и установов.

Определение очередности выполнения переходов в множествах позволяет минимизировать холостые перемещения инструмента. Очередность переходов в множествах назначают с учетом разделения их на черновые, получистовые и чистовые. При этом учитывают промежуточные допуски на обрабатываемые поверхности и фактические глубины резания на каждом переходе. На рисунке 3.5 показаны примеры различных комбинаций последовательности выполнения переходов.

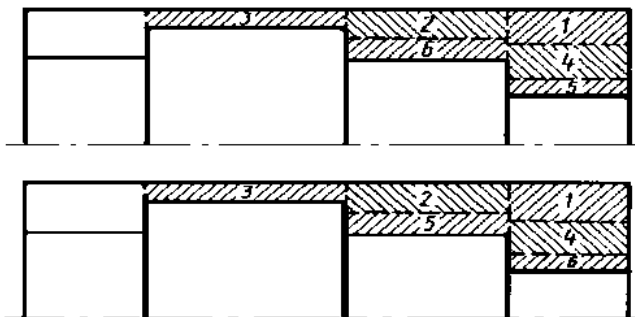


Рисунок 3.5 — Возможные комбинации последовательности выполнения переходов во множестве: 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — номера последовательности выполнения переходов при обработке

В условиях серийного производства структура операций может изменяться от однопереходной до многопереходной. Например, обработка поверхностей на простом универсальном станке, обработка поверхностей на токарном гидрокопировальном полуавтомате (токарном станке с гидросуппортом) или на токарном станке с ЧПУ (рис. 3.6). При построении операции определяют общие режимы обработки, исходя из содержания оптимальных переходов на отдельные поверхности. Например, при выполнении операции на

токарном станке с гидросуппортом требуется установить определенные (общие) частоты вращения шпинделя n_i и величины подачи s_j , а на токарном станке с ЧПУ — только частоты вращения (имеются модели станков, у которых меняют по программе подачу и частоту вращения на каждом переходе). Общие режимы обработки назначают с учетом обеспечения нормальных технологических условий выполнения операции.

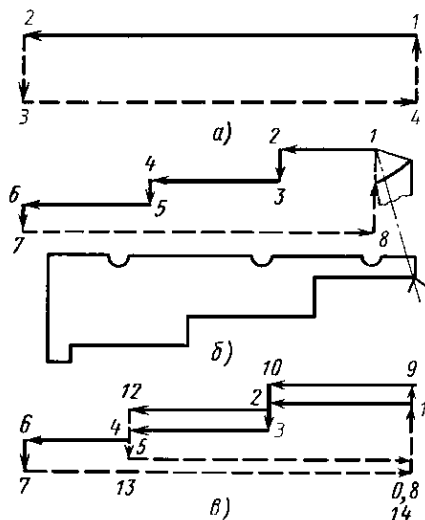


Рисунок 3.6 — Схемы выполнения станочной операции:
 а — на токарном станке; б — на токарном станке с гидросуппортом;
 в — на токарном станке с ЧПУ ; 1, 2, ..., 14 — опорные точки; — — рабочий ход инструмента; ---- — холостой ход инструмента

Для формирования оптимальной станочной операции используют *метод последовательного анализа вариантов* [11]. В результате сравнения устанавливается доминирование одних вариантов над другими. Зная технологические возможности станков, оптимальное количество переходов на деталь и математическую модель, отражающую физическую сущность процесса многопереходной операции, переходят к формированию оптимальных станочных операций с

использованием метода последовательного анализа вариантов. Кроме того, необходимо знать место термической обработки в технологическом процессе, так как в этом случае заранее можно сказать о наличии не одной, а нескольких операций (например, токарных или шлифовальных).

Задача построения оптимальных операций носит многовариантный характер, и область решений можно ограничить двумя предельными случаями (рис. 3.7): каждый переход соответствует однопереходной операции и все переходы выполняются в одной операции.

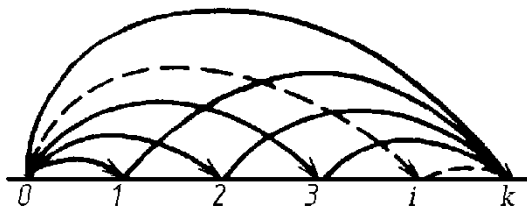


Рисунок 3.7 — Каскадный граф, отображающий многовариантность операций

При обработке ступенчатых поверхностей деталей (цилиндрических наружных и внутренних), когда заготовки имеют напуск, возникает задача совмещения снятия слоя металла с нескольких поверхностей за один или несколько переходов (проходов). От количества переходов в значительной степени зависят величины основного и вспомогательного времени, связанного с холостыми перемещениями инструмента. При решении данной задачи используются в основном две схемы обработки [11]. Рассмотрим методику их выбора на примере токарной обработки ступенчатых валов. По первой схеме (рис. 3.8, *a*), число переходов определяют в первую очередь для крайней правой шейки вала, имеющей минимальный диаметр, затем для других шеек по мере увеличения их диаметров.

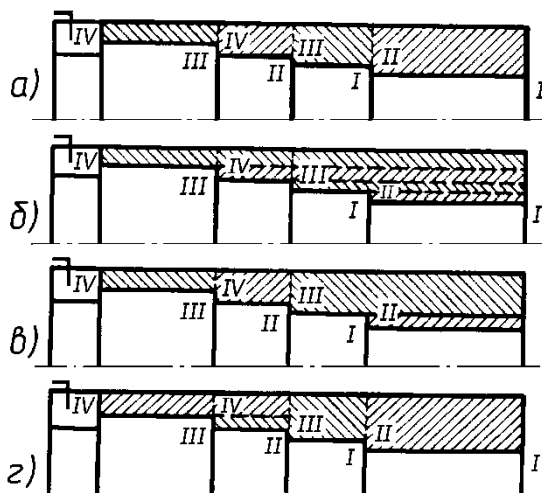


Рисунок 3.8 — Варианты схем обработки шеек ступенчатого вала

При этом стремятся снять весь напуск и припуск за один переход. По второй схеме (рис. 3.8, б) определение числа переходов начинают для ступени вала наибольшего диаметра, а заканчивают решение формированием схемы обработки для шеек вала наименьшего диаметра. При назначении переходов на каждую поверхность $I—I$, $II—II$, $III—III$ (рис. 3.10, б) следует учитывать, что получаемая конечная погрешность на поверхность $I—I$ является исходной погрешностью при расчете числа переходов на поверхность $II—II$ и т.д. В большинстве случаев, кроме двух основных схем обработки, создают различные комбинированные схемы (рис. 3.8, в, г). Количество комбинированных схем зависит от числа одновременно рассматриваемых шеек вала. Отсутствие технологических правил затрудняет выбор оптимальной схемы обработки из множества различных вариантов.

Под оптимальной схемой понимают такую, которая обеспечивает минимальное основное и вспомогательное время. Количество шеек ступенчатого вала, которое нужно рассматривать одно-

временно при определении оптимальной схемы обработки, зависит от вида заготовки, конфигурации детали и способа передачи заготовке крутящего момента. При изготовлении ступенчатых валов различной конфигурации используют заготовки из горячекатаного проката или штампованные. Если штампованная заготовка полностью повторяет конфигурацию детали, определение количества переходов идет по первой схеме (см. рис. 3.8, *а*) для заготовок, изображенных на рисунке 3.9, появляется многовариантность выбора схемы обработки валов. При этом оптимальное количество переходов определяется для 1–3-й ступеней вала (рис. 3.9, *б*); на четвертую ступень вала с максимальным диаметром переходы назначают по первой схеме.

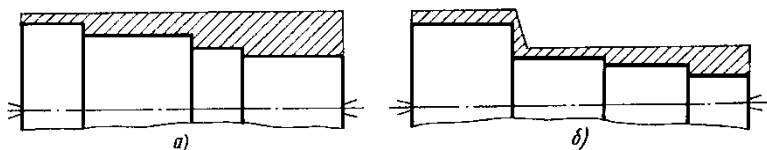


Рисунок 3.9 — Виды заготовок для ступенчатых валов:

а — горячекатаный прокат; *б* — поковка, штамповка

Во всех случаях стремятся вести обработку максимального количества ступеней вала за один установ, но с учетом возможности обработки закрытых шеек и способа передачи крутящего момента заготовке. Например, в случае обработки вала (рис. 3.9, *а*) с использованием поводкового устройства ступень, имеющая максимальный диаметр, не участвует (или участвует частично при значительной длине ступени) в определении оптимальной схемы обработки для первых трех ступеней. Обработка ее возможна только при переустановке и поэтому переходы на нее назначаются отдельно.

При определении совокупности ступеней вала, для которых необходим поиск оптимальной схемы обработки, следует учитывать конфигурацию детали. При двустороннем расположении ступеней вала (рис. 3.10) существуют две группы поверхностей: первая груп-

па, состоящая из максимального количества ступеней I , включая шейку с наибольшим диаметром (рис. 3.10, a), вторая группа II — все остальные шейки вала. Для вала, показанного на рисунке 3.10, $б$, поиск оптимальной схемы производится только для I — IV ступеней; на остальные ступени вала схему обработки назначают в соответствии с рисунком 3.10, a .

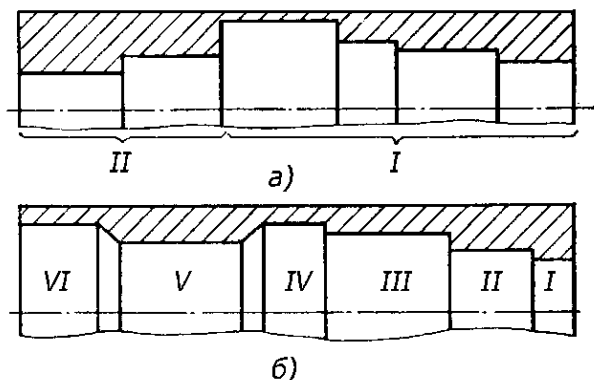


Рисунок 3.10 — Виды заготовок
с двухсторонним расположением ступеней.

Определение оптимальной схемы обработки для всей совокупности ступеней вала затруднено. Поэтому для решения этой задачи разработана методика [11], в составе которой используют следующее положение: для двух ступеней вала число переходов назначают только по двум схемам (рис 3.11), а любой ступенчатый вал можно разбить на ряд сочетаний по две поверхности, причем каждое новое сочетание должно формироваться сдвигом на одну ступень. Решение задачи проводится направленным шаговым методом, начиная с шейки вала с максимальным диаметром при двустороннем расположении ступеней. При одностороннем расположении — с шейки наибольшего диаметра, с учетом конфигурации вала и способа передачи крутящего момента заготовке. Исходной инфор-

На каждом шаге рассчитывается время на обработку двух шеек по основным схемам. Сплошными стрелками показан возможный выбор схем. В узлах *б* и *в* сетевого графа происходит формирование вариантов схем для каждого сочетания поверхностей с учетом оптимального решения на предыдущих шагах (итерациях). Штриховой стрелкой показано образование комбинированной схе-

мы в случае, когда на предыдущем шаге оказалась оптимальной первая схема. Формирование схем обработки для каждого сочетания поверхностей в ходе решения задачи показано на рисунке 3.13.

После анализа первой половины вала переходят ко второй. Определение количества переходов механической обработки у второй половины вала производится аналогично первой. Такой подход к решению позволяет сохранить оптимальную схему, полученную на предыдущем шаге, независимо от результата на следующем. Анализ вариантов на каждом шаге решения производится с помощью целевой функции, которую можно представить зависимостью

$$\Delta t'_{on} = \Delta t_o + \Delta t_x, \quad (3.12)$$

где $\Delta t'_{on}$ — разница в неполном оперативном времени выполнения механической обработки между основными схемами на каждом шаге, мин;

Δt_o — разница в основном времени, мин;

Δt_x — разница во времени, затрачиваемом на холостые перемещения суппорта, мин.

Разница в основном времени

$$\Delta t_o = \sum_{i=1}^{p_1} \frac{L_{pi}}{n_{i1} s_{j1}} - \sum_{i=1}^{p_2} \frac{L_{pi}}{n_{i2} s_{j2}}, \quad (3.13)$$

где L_{pi} — расчетная длина обработки при выполнении i -го перехода, мм; n_i, s_j — частота вращения (об/мин) и подача (мм/об) при выполнении i -го перехода;

p — число переходов (проходов); индексы 1 и 2 относятся соответственно к первой и второй схемам обработки.

В ходе решения задачи величина $\Delta t'_{on}$ может принимать как отрицательные, так и положительные значения, что является определяющим признаком выбора оптимальной схемы. Если $\Delta t'_{on} < 0$, то целесообразна первая схема (см. рис. 3.8, а), а при $\Delta t'_{on} > 0$ — вторая схема (см. рис. 3.8, б). Если же $\Delta t'_{on} = 0$ — схемы равнозначны.

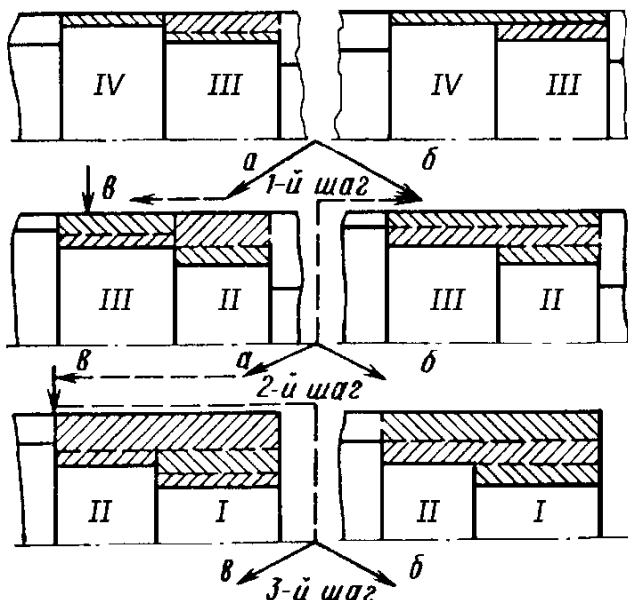


Рисунок 3.13 — Формирование схемы обработки для каждого сочетания поверхностей вала (см. рис. 3.12) на каждом шаге решения задачи (I — IV — шейки вала)

Пример 3.6 [11]. В качестве примера приведем расчеты оптимального количества переходов проведенные для ряда валов, изготавливаемых на станкостроительном заводе «Красный пролетарий» им. Ефремова. Исходная информация, необходимая для проведения расчетов, взята по заводским условиям (чертеж детали и заготовки, данные о станке и инструменте). В качестве заготовки был принят горячекатаный прокат. Материал режущей части инструмента — твердый сплав Т15К6. Резец проходной упорный с геометрией: $\varphi = 90^\circ$; $\varphi_1 = 5^\circ$; $\alpha = 8^\circ$; $\lambda = 5^\circ$; $f = 0,2 — 0,3$ мм. Расчет производится для условий обработки заготовок в центрах на станке модели 1К62. Заданная точность токарной обработки шеек валов представлена в таблице 3.6.

Таблица 3.6 — Заданная точность токарной обработки валов (в мм)

Номер вала	Материал вала	Номер шейки вала				
		I	II	III	IV	V
1	Сталь 45X	–0,2	–0,2	–0,6	–0,2	–0,2
2		–0,25	–0,25	–0,25	–0,6	–

Решение.

Оценка целесообразности применения приведенной выше методики проведена путем сравнения расчетных схем обработки с базовыми схемами. В качестве базовых принимают схемы обработки, у которых весь комплекс расчетов осуществляется по общемашиностроительным нормативам (обычным способом, вручную). В результате сравнения затрат времени на холостые перемещения суппорта по базовым и расчетным схемам выявлена целесообразность применения последних (рис. 3.14). Незначительная разница в затратах времени на холостые ходы суппорта при сравнении схем обработки вала (рис. 3.14, а) объясняется однопереходной обработкой поверхности IV по базовому варианту. Окончательная точность поверхности IV вала достигается удалением значительного припуска с помощью шлифования. По расчетной схеме заданная точность этой поверхности достигается за два перехода при сохранении нормативного припуска под шлифование. Остальное различие расчетной схемы от базовой объясняется более полным использованием мощности главного привода станка и стойкости материала режущей части инструмента при достижении заданной точности и шероховатости поверхности. Анализ расчетной и базовой схем обработки вала (рис. 3.14, б) указывает на необоснованное увеличение числа переходов. Это приводит к увеличению основного и вспомогательного времени в базовом варианте. Разнообразие схем обработки зависит от конструктивных особенностей детали и вида заготовки (форма и длина, требуемая точность обработки и шероховатость поверхности, расположение наиболее точных поверхностей на валу и др.).

Для обоснования этого положения проведен расчет оптимального количества переходов для валов (рис. 3.15).

Во всех случаях условия обработки, принятые выше при расчетах, сохранились. Изменялась только требуемая точность и шероховатость при обработке валов. Результаты расчетов приведены на рисунке 3.15.

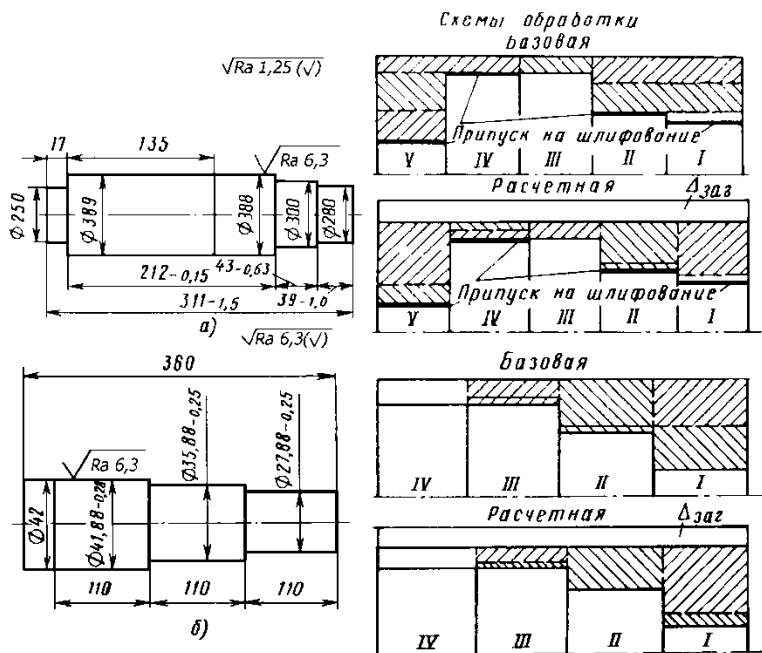


Рисунок 3.14 — Расчетные и базовые схемы обработки ступенчатых валов.

Основное время и время холостых перемещений согласно базовым и расчетным схемам:

$$a - \sum_{l=1}^p t_o = 2,03 \text{ мин}, = 0,293 \text{ мин}, \sum_{l=1}^p t_o = ,39 \text{ мин}, \sum_{l=1}^p t_x = 0,289 \text{ мин};$$

$$\delta - \sum_1^p t_o = 3,36 \text{ мин}, \quad \sum_1^p t_x = 0,16 \text{ мин}, \quad \sum_1^p t_o = 1,71 \text{ мин}, \quad \sum_1^p t_x = 0,21 \text{ мин}.$$

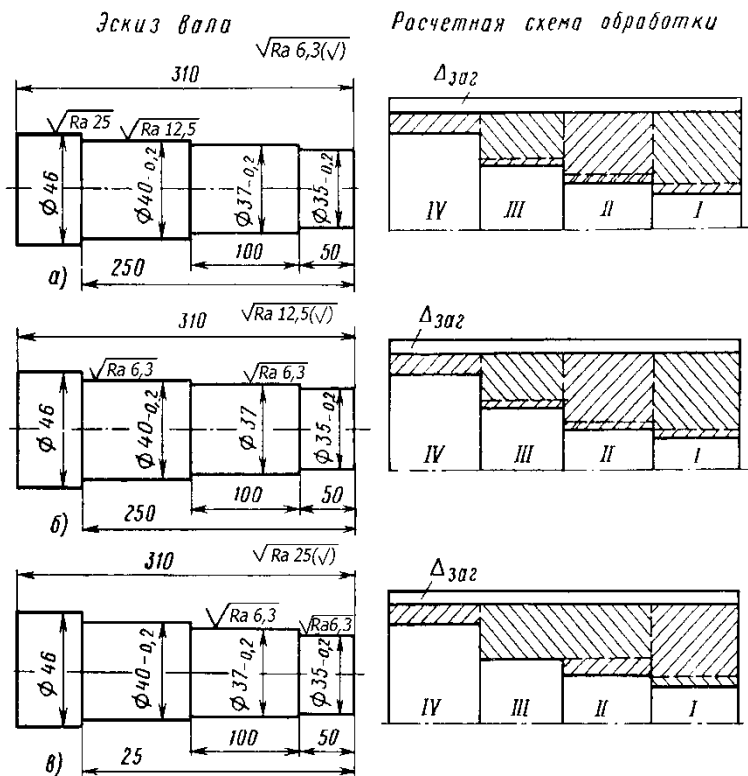


Рисунок 3.15 — Влияние заданной точности и шероховатости на схему

обработки: а — $\sum_1^n t_o = 1,95$ мин; б — $\sum_1^n t_o = 1,95$ мин; в — $\sum_1^n t_o = 1,66$ мин

Схема обработки первого вала отличается от схемы обработки второго только содержанием второго перехода (рис. 3.15, а, б). Это отличие объясняется тем, что поверхность II вала (рис. 3.15, б) обрабатывается по 14 квалитету. Черновая обработка на проход I и

II поверхностей невозможна. При выполнении обоих переходов с глубиной резания, равной 6 мм, нижний предельный размер *II* поверхности второго вала выйдет за пределы заданного допуска. В последнем случае (рис. 3.15, *в*) точность поверхности *III* вала достигается за один переход, и схема обработки видоизменяется.

Показанные на рисунках 3.14 и 3.15 расчетные схемы обработки были проверены экспериментально. Результаты проверки подтвердили правильность изложенной методики. Определение оптимального количества переходов на обработку рассматриваемых конструкций ступенчатых валов позволило сократить основное время на 30–50% , а время на холостые перемещения суппорта на 15–30%.

Методика построения оптимальных операций обработки на универсальных станках, на токарных гидрокопировальных и вертикальных многошпиндельных полуавтоматах, шлифовальных полуавтоматах изложена в литературе [11]. Здесь же Капустин Н.М. на основании производственной проверки указывает, что оптимальное построение токарных операций обработки основных поверхностей ступенчатых валов по сравнению с операциями, построение которых производилось по нормативам обычным способом, обеспечивает сокращение штучного времени на 30–60% за счет уменьшения основного и вспомогательного времени, а так же позволяет уменьшить трудоемкость расчетов при проектировании копиров и сократить подготовительно-заключительное время на 25–70%.

Вопросы для контроля

1. От каких факторов зависит выбор технических ограничений для оптимизации режимов обработки резанием?
2. Что принимается в качестве оценочной функции технических ограничений в математической модели процесса резания?
3. Какие типы задач можно отнести к задаче коммивояжера?
4. В чем состоит сущность методов динамического планирования и динамической оптимизации в планировании работ?

5. Какие виды производственных задач могут решаться методами линейного математического программирования?
6. На чем основана идея метода «ветвей и границ»?
7. Охарактеризовать эйлеровы и гамильтоновы пути на графах, их значение и применение для решения практических задач.
8. Какую информацию содержит и какой порядок построения графа-дерева разбиений в методе ветвей и границ?
9. Какие действия выполняются для приведения матриц в методе ветвей и границ?
10. Как определить уточненную оценку снизу и улучшение оценки длин гамильтоновых путей?
11. Каким образом можно простым просмотром матрицы найти минимальный путь?
12. Какие факторы необходимо учитывать при оптимизации операций выполняемых на многооперационных станках с ЧПУ?
13. Сокращение каких составляющих вспомогательного времени ведет к снижению машинно-вспомогательного времени на многооперационных станках с ЧПУ?
14. Охарактеризовать три основных варианта оптимизации обработки отверстий мерным инструментом на многооперационных станках с ЧПУ?
15. В чем заключается сущность метода аддитивной оптимизации решений по комплексу критериев?
16. Что понимают под нормализацией критериев в решении многокритериальных задач?
17. В чем состоит сущность метода последовательных уступок в решении многокритериальных задач?
18. Какие схемы обработки применяют при обработке ступенчатых валов?
19. Какую схему обработки ступенчатых валов считают оптимальной?
20. Какие факторы влияют на выбор оптимальной схемы обработки валов?

21. Каким образом и с какой целью строится сетевой график последовательности обработки шеек ступенчатого вала?
22. Перечислите основные технико-экономические показатели, улучшение которых достигается оптимальным построением операций обработки ступенчатых валов?

Задания для самостоятельной подготовки

Варианты заданий к разделу 3.1 «Оптимизация режимов обработки резанием»

Задача 3.1.1

Построить математическую модель процесса резания и определить оптимальные режимы (n , S) для точения заготовки типа вал диаметром D и длиной L с учетом вида и материала заготовки, требуемой точности, шероховатости поверхности Rz и глубины резания t .

Номера вариантов и исходные данные приведены в таблице.

+	Материал заготовки	Вид заготовки	Глубина резания t , мм	D , мм	L , мм	Rz , мкм	Квалитет
1	Латунь ЛС59–1	Прокат	2	30	220	20	10
2	Алюминиевый сплав АЛ 9	»	3	42	200	20	10
3	Сталь 30ХГСА	»	3,5	56	300	20	10
4	Бронза БраЖ9-4	»	2,5	64	360	20	10
5	Сталь 45	Поковка	3	92	420	40	10
6	Сталь 30ХГСА	»	3	90	300	40	10
7	Сталь 12Х18Н9Т	»	3	96	500	40	12
8	Сталь 20	Прокат	2,5	120	560	40	12
9	Сталь 45	»	4	140	700	60	12
10	Сталь 40Х	То же	2	160	820	60	12

Задача 3.1.2

Построить математическую модель процесса резания и определить оптимальные режимы (n , S) для сверления в заготовке типа плита отверстия диаметром d и глубиной t по 12 качеству точности.

Номера вариантов и исходные данные приведены в таблице.

Вариант	Материал заготовки	d , мм	L , мм
1	Сталь 45	6	16
2	Чугун СЧ 20	8	20
3	Чугун ВЧ 45	16	24
4	Сталь 12Х18Н9Т	24	32
5	Алюминиевый сплав АЛ 9	30	40
6	То же	36	50
7	Сталь 20	40	80
8	Чугун СЧ 20	42	100
9	Чугун ВЧ 45	48	120
10	Сталь 40Х	40	120

Задача 3.1.3

Построить математическую модель процесса резания и определить оптимальные режимы (n , S) для фрезерования торцевой фрезой на вертикально-фрезерном станке плоскости заготовки типа плита шириной B и длиной L с учетом вида материала заготовки, требуемой шероховатости поверхности R_z , глубины фрезерования t и качества.

Номера вариантов и исходные данные приведены в таблице.

Вариант	Материал заготовки	B , мм	L , мм	Глубина фрезерования t , мм	R_z , мкм	Квалитет
1	Сталь 45	60	120	3	10	10
2	Чугун СЧ 20	66	100	5	20	10
3	Чугун ВЧ 45	88	300	5	40	10
4	Сталь 12Х18Н9Т	100	200	5	40	10
5	То же	150	200	10	40	12
6	Алюминиевый сплав АЛ 9	166	400	20	60	12
7	Чугун СЧ 20	180	500	25	60	12
8	Сталь 20	276	600	10	40	12
9	Сталь Ст 3	300	600	15	60	12
10	Чугун СЧ 20	400	800	12	60	12

Варианты заданий к разделу 3.2 «Оптимизация в планировании работ»

Задача 3.2

Планируется реконструкция механических участков A_1, A_2, A_3 цеха в связи с производством новых изделий. Реконструкция каждого участка состоит из следующих 4-х основных стадий работ, выполняемых последовательно: 1) освобождение производственных площадей; 2) транспортные и электромонтажные работы; 3) монтаж оборудования и средств межоперационного транспорта; 4) пуск и наладка оборудования. Возможности служб главного механика ограничены и не позволяют вести один и тот же вид работ одновременно на нескольких участках.

Считая, что работа на каждом участке должна продолжаться непрерывно с момента начала реконструкции и до ее окончания, требуется запланировать сроки начала работ и их оптимальную последовательность для каждого объекта так, чтобы суммарный срок реконструкции всех участков был минимальным. Определить этот срок.

Продолжительность каждого вида работ, например в рабочих днях, задана в таблицах вариантов заданий.

Вариант 1

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	2	1	4	5
A_2	3	2	6	1
A_3	1	5	3	4

Вариант 2

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	1	2	5	2
A_2	3	2	4	1
A_3	5	2	1	4

Вариант 3

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	2	4	1	6
A_2	3	5	1	4
A_3	1	3	4	6

Вариант 4

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	2	4	3	5
A_2	1	3	5	3
A_3	3	1	4	2

Вариант 5

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	2	5	4	3
A_2	1	4	2	6
A_3	3	4	3	4

Вариант 6

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	3	1	4	5
A_2	2	4	2	4
A_3	3	3	1	6

Вариант 7

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	1	4	2	5
A_2	2	3	5	5
A_3	3	2	6	2

Вариант 8

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	2	4	4	3
A_2	1	5	3	2
A_3	4	3	5	1

Вариант 9

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	2	4	3	5
A_2	1	5	3	3
A_3	1	3	2	4

Вариант 10

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	1	2	5	2
A_2	3	2	3	4
A_3	2	5	2	4

Вариант 11

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	2	3	5	2
A_2	1	2	2	6
A_3	2	1	5	4

Вариант 12

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	2	3	4	2
A_2	1	2	4	1
A_3	2	2	1	5

Вариант 13

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	2	3	4	1
A_2	3	4	3	1
A_3	1	2	5	4

Вариант 14

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	1	3	4	2
A_2	4	2	3	1
A_3	2	2	6	2

Вариант 15

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	4	1	4	5
A_2	3	5	3	1
A_3	2	2	6	4

Вариант 16

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	4	2	4	2
A_2	3	2	3	1
A_3	5	1	3	4

Вариант 17

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	3	4	4	2
A_2	6	4	3	1
A_3	5	1	3	2

Вариант 18

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	5	1	4	2
A_2	3	2	3	4
A_3	2	4	2	4

Вариант 19

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	1	4	4	5
A_2	5	2	3	1
A_3	2	5	1	4

Вариант 20

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	3	1	4	5
A_2	3	2	2	4
A_3	1	2	5	4

Вариант 21

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	2	3	3	5
A_2	3	2	4	1
A_3	5	1	1	4

Вариант 22

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	1	3	4	2
A_2	3	2	3	4
A_3	1	5	6	1

Вариант 23

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	1	3	4	2
A_2	3	5	3	1
A_3	5	2	4	4

Вариант 24

Объекты	Виды (стадии) работ			
	1	2	3	4
A_1	1	3	4	2
A_2	3	2	3	1
A_3	6	2	1	1

Варианты заданий к разделу 3.3 «Метод ветвей и границ для решения задачи коммивояжера»

Задача 3.3.1

На станке с ЧПУ требуется обработать последовательно пять отверстий в детали. Координаты центров отверстий заданы чертежом, а расстояния между отверстиями сведены в таблицы вариантов заданий.

Найти последовательность обработки отверстий, обеспечивающую кратчайший путь перемещения режущего инструмента относительно заготовки такой, чтобы суммарные холостые перемещения инструмента, а значит, машинно-вспомогательное время были минимальными.

Вариант 1

	1	2	3	4	5
1	0	120	180	100	190
2		0	80	220	200
3			0	90	185
4				0	250
5					0

Вариант 2

	1	2	3	4	5
1	0	200	350	200	160
2		0	190	300	80
3			0	150	200
4				0	280
5					0

Вариант 3

	1	2	3	4	5
1	0	150	200	170	210
2		0	60	190	220
3			0	250	130
4				0	100
5					0

Вариант 4

	1	2	3	4	5
1	0	180	250	200	300
2		0	170	350	200
3			0	150	280
4				0	250
5					0

Вариант 5

	1	2	3	4	5
1	0	175	230	200	180
2		0	150	190	220
3			0	150	200
4				0	280
5					0

Вариант 6

	1	2	3	4	5
1	0	100	250	160	300
2		0	400	150	120
3			0	250	200
4				0	170
5					0

Вариант 7

	1	2	3	4	5
1	0	140	200	210	100
2		0	150	190	220
3			0	250	200
4				0	170
5					0

Вариант 8

	1	2	3	4	5
1	0	240	150	300	90
2		0	300	310	190
3			0	250	220
4				0	250
5					0

Вариант 9

	1	2	3	4	5
1	0	300	270	220	100
2		0	400	80	130
3			0	50	200
4				0	250
5					0

Вариант 10

	1	2	3	4	5
1	0	100	250	300	100
2		0	400	150	200
3			0	350	220
4				0	190
5					0

Вариант 11

	1	2	3	4	5
1	0	200	150	300	100
2		0	120	350	200
3			0	150	250
4				0	150
5					0

Вариант 12

	1	2	3	4	5
1	0	220	250	200	300
2		0	180	190	230
3			0	250	200
4				0	150
5					0

Вариант 13

	1	2	3	4	5
1	0	130	250	180	400
2		0	100	350	200
3			0	150	300
4				0	170
5					0

Вариант 14

	1	2	3	4	5
1	0	300	200	200	100
2		0	300	250	180
3			0	250	200
4				0	170
5					0

Вариант 15

	1	2	3	4	5
1	0	100	350	200	400
2		0	500	350	200
3			0	150	300
4				0	250
5					0

Вариант 16

	1	2	3	4	5
1	0	300	220	200	400
2		0	300	250	200
3			0	250	100
4				0	250
5					0

Вариант 17

	1	2	3	4	5
1	0	190	250	180	200
2		0	300	150	200
3			0	210	100
4				0	90
5					0

Вариант 18

	1	2	3	4	5
1	0	100	350	200	120
2		0	130	350	210
3			0	250	300
4				0	150
5					0

Вариант 19

	1	2	3	4	5
1	0	110	200	320	140
2		0	200	350	100
3			0	350	200
4				0	150
5					0

Вариант 20

	1	2	3	4	5
1	0	280	150	300	100
2		0	170	300	200
3			0	150	200
4				0	270
5					0

Вариант 21						Вариант 22					
	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
1	0	200	190	170	300	1	0	120	180	100	190
2		0	200	150	260	2		0	80	220	200
3			0	150	200	3			0	90	185
4				0	140	4				0	250
5					0	5					0

Задача 3.3.2

При анализе методов получения поверхностей детали были выявлены планы обработки поверхностей, включающие в себя определенное количество ступеней обработки, которое отражено в таблицах вариантов заданий.

Определить план обработки с минимальным числом ступеней.

Вариант 1						Вариант 2						Вариант 3						
1 2 3 4 5						1 2 3 4 5						1 2 3 4 5						
$T=3$	1	0 3 1 4 6					1	0 1 6 2 3					1	0 4 5 3 1				
	2	3 0 2 5 1					2	1 0 4 5 2					2	4 0 2 6 4				
	3	1 2 0 3 2					3	6 4 0 1 3					3	5 2 0 3 2				
	4	4 5 3 0 4					4	2 5 1 0 5					4	3 6 3 0 6				
	5	6 1 2 4 0					5	3 2 3 5 0					5	1 4 2 6 0				

Обозначения: 1, 2, ..., 5 — индексы планов (последовательности) обработки поверхностей

Задача 3.3.3

При групповой обработке пяти наименований деталей необходимо осуществлять переналадку станка и смену комплекта режущего инструмента. На это затрачивается подготовительно-заключительное время $T_{пз}$, величина которого известна и приведена в таблицах вариантов заданий.

Определить последовательность обработки деталей различных наименований, обеспечивающую минимальное суммарное время на переналадку оборудования.

Вариант 1

	1	2	3	4	5
1	0	19	22	13	4
2	18	0	11	6	16
$T=3$	21	9	0	17	19
4	12	5	14	0	8
5	3	15	19	7	0

Вариант 2

	1	2	3	4	5
1	0	18	16	11	7
2	22	0	5	10	21
$T=3$	5	14	0	9	18
4	15	20	19	0	12
5	8	17	9	13	0

Вариант 3

	1	2	3	4	5
1	0	2	5	3	4
2	13	0	8	6	12
$T=3$	20	11	0	7	9
4	17	15	19	0	10
5	22	16	12	14	0

Вариант 4

	1	2	3	4	5
1	0	5	19	8	11
2	5	0	9	7	17
$T=3$	19	9	0	13	5
4	8	7	13	0	4
5	11	17	5	4	0

Вариант 5

	1	2	3	4	5
1	0	8	17	7	12
2	22	0	15	20	18
$T=3$	10	13	0	5	14
4	19	21	8	0	24
5	9	16	6	11	0

Вариант 6

	1	2	3	4	5
1	0	13	22	18	12
2	13	0	19	10	17
$T=3$	22	19	0	21	7
4	18	10	21	0	8
5	12	17	7	8	0

Обозначения: 1, 2, ... 5 — номера разных наименований деталей

Задача 3.3.4

Литейный цех поставяет заготовки четырем механообрабатывающим цехам. Отливки доставляются автопогрузчиком. Расстояния между цехами приведены в таблицах вариантов заданий.

Определить минимальную длину пути следования погрузчика.

Вариант 1						Вариант 2						
	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5	
T = 3	1	0	160	290	250	170	1	0	130	200	170	140
	2	160	0	150	210	180	2	130	0	180	150	220
	3	290	150	0	190	130	3	200	180	0	190	160
	4	250	210	190	0	270	4	170	150	190	0	120
	5	170	180	130	270	0	5	140	220	160	120	0

Вариант 3						
	1	2	3	4	5	
$T = 3$	1	0	120	220	170	200
	2	120	0	160	250	210
	3	220	160	0	190	180
	4	170	250	190	0	150
	5	200	210	180	150	0

Обозначения: 1, 2, ... 5 — пункты следования автопогрузчика.

Задача 3.3.5

Различные варианты выполнения переходов операции с получением промежуточных поверхностей при обработке детали требуют применения специально режущего и вспомогательного инструментов. Количество специальной оснастки для пяти различных вариантов обработки задано таблицами вариантов заданий.

Выбрать вариант последовательности обработки деталей с минимальным количеством замены специального инструмента.

Вариант 1						Вариант 2						
	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5	
T = 3	1	0	10	6	12	7	1	0	11	13	12	8
	2	10	0	5	8	2	2	11	0	7	2	5
	3	6	5	0	4	3	3	13	7	0	4	6
	4	12	8	4	0	1	4	12	2	4	0	9
	5	7	2	3	1	0	5	8	5	6	9	0

Вариант 3

	1	2	3	4	5
1	0	7	16	2	11
2	7	0	8	4	7
3	16	8	0	3	5
4	2	4	3	0	9
5	11	7	5	9	0

Обозначения: 1,2,...5 — номера вариантов выполнения переходов операции

Задача 3.3.6

Автоматический цеховой транспорт (тележка) обеспечивает грузопоток заготовок, деталей и изделий между складом заготовок, складом деталей, двумя механосборочными участками и складом готовых изделий. Расстояния между складами известны и заданы в таблицах вариантов заданий.

1. Выбрать наиболее короткий путь следования автоматической тележки.

2. Определить какому пункту следования тележки соответствуют склады и производственные участки?

Вариант 1

	1	2	3	4	5
1	0	140	130	110	50
2	140	0	120	60	70
3	130	120	0	80	90
4	110	60	80	0	100
5	50	70	90	100	0

Вариант 2

	1	2	3	4	5
1	0	40	100	120	80
2	40	0	50	90	130
3	100	50	0	70	110
4	120	90	70	0	60
5	80	130	110	60	0

Вариант 3

	1	2	3	4	5
1	0	50	80	60	40
2	50	0	70	110	90
3	80	70	0	120	100
4	60	110	120	0	140
5	40	90	100	140	0

Обозначения: 1, 2, ..., 5 — пункты прохождения тележки

Задание к разделу 3.4 «Оптимизация операций для многооперационных станков с ЧПУ»

Задача 3.4

Найти оптимальный маршрут обработки сверлением 15-ти отверстий в детали «панель». Расстояния между отверстиями приведены в матрице [11]:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	x	70	45	195	120	182	81	150	153	226	122	168	145	225	274
2	70	x	36	125	62	116	79	97	111	161	124	129	130	175	215
3	45	36	x	153	74	138	51	105	109	182	98	125	113	181	238
4	195	125	153	x	90	39	164	88	118	82	191	128	170	127	119
5	120	62	74	90	x	66	74	35	54	107	103	72	91	114	116
6	182	116	138	39	66	x	139	52	81	55	157	91	134	88	102
7	81	79	51	164	74	139	x	91	80	107	48	93	65	154	213
8	150	97	105	88	35	52	91	x	30	77	105	45	82	79	125
9	153	111	109	118	54	81	80	30	x	90	82	18	54	74	183
10	226	161	182	82	107	55	107	77	90	x	171	87	138	48	48
11	122	124	98	191	103	157	48	105	82	171	x	85	36	195	212
12	168	129	125	128	72	91	93	45	18	87	85	x	51	63	126
13	145	130	113	170	91	134	65	82	54	138	36	51	x	110	172
14	225	175	181	127	114	88	154	79	74	48	195	63	110	x	68
15	274	215	238	119	116	102	213	125	183	48	212	126	172	68	x

Указания к решению:

1. Решение методом ветвей и границ матрицы 15x15 «в ручную» состоит из большого числа простых периодически повторяющихся однообразных шагов, преобразований и переписываний матрицы, что в данном случае является весьма трудоемким и не рациональным процессом.

2. Определить наименьший путь перемещения инструмента методом простого просмотра матрицы.

3. Для решения задачи методом ветвей и границ предлагается самостоятельно составить программу для ПЭВМ и с ее помощью решить задачу по первому варианту раздела 3.4. Алгоритм каждого шага решения строго определен и изложен в разделе 3.3.

4. Сравнить оптимальный маршрут обработки отверстий, полученный с помощью ПЭВМ методом ветвей и границ с минимальным путем перемещения инструмента, полученным по п.2 методом простого просмотра матрицы.

5. С помощью программы для ПЭВМ решить постановку задачи по второму и третьему вариантам раздела 3.4. Второй вариант предусматривает обработку всех отверстий сверлением, зенкерованием и разверткой. При переходе от отверстия одного диаметра к отверстию другого диаметра следует учитывать время смены инструмента t_{cu} . По третьему варианту все отверстия должны пройти три вида обработки, каждое отверстие перенумеровывается три раза и необходимо учитывать скорость позиционирования V_{noz} . Полученный результат сравните с граф-деревом [11, с. 244, рис. 118; рис. 117, с. 242].

Задания к разделу 3.5 « Оптимизация решений по комплексу критериев»

Задача 3.5.1

Для пяти проектов технических систем определены относительные единичные показатели технического совершенства конструкции и коэффициенты весомости единичных показателей. Численные значения единичных показателей и коэффициентов весомости приведены в следующей таблице:

Варианты технических систем	Основные единичные показатели					
	сложности	веса	времени подготовки	автоматизации	мощности	унификации
I	1,0	0,088	1,0	1,0	0,72	0,614
II	0,720	1,0	0,800	0,780	0,81	0,420
III	0,658	0,358	0,765	0,782	0,525	0,915
IV	0,425	0,970	0,755	0,700	0,980	0,310
V	0,467	0,555	0,865	0,705	0,865	0,650
Коэффициенты веса	0,157	0,124	0,210	0,195	0,174	0,140

Проведите ранжирование проектов технических систем по комплексному критерию.

Задача 3.5.2

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по техническому обеспечению процесса управления производством. С помощью статистических данных и информации соответствующих заводов-изготовителей были определены локальные критерии функционирования необходимого оборудования. Исходные данные представлены в следующей таблице:

Варианты оборудования	Локальные критерии эффективности оборудования*			
	производительность, д.е.	стоимость оборудования, д.е.	объем памяти, у.е.	надежность, у.е.
I	100	5	5	8
II	150	6	8	5
III	120	4	6,5	6
IV	200	7	6	4
Коэффициенты веса	0,25	0,20	0,32	0,23

* Значения локальных критериев даны в условных единицах

Задача 3.5.3

Для шести проектов транспортных устройств определены относительные единичные показатели технического совершенства конструкций. Численные значения единичных показателей и соответствующие весовые коэффициенты приведены в следующей таблице:

Варианты транспортных устройств	Относительные единичные показатели					
	скорости, K_1	прочности, K_2	перегрузки, K_3	устойчивости, K_4	металлоемкости, K_5	мощности, K_6
I	1,0	0,798	0,92	1,0	1,0	0,77
II	1,0	1,0	0,65	0,92	0,94	0,92
III	1,0	0,93	0,924	1,0	0,98	0,95
IV	0,87	0,96	0,91	0,915	0,99	0,85
V	0,85	0,97	1,0	0,90	0,7	0,82
VI	0,88	0,78	0,75	0,967	0,8	1,0
Коэффициенты веса	0,210	0,195	0,174	0,157	0,124	0,140

Приведите ранжировку проектов технических систем по комплексному критерию.

Задача 3.5.4

Абсолютные показатели качества двигателей различных вариантов приведены в следующей таблице:

Варианты двигателей	Показатели качества		
	мощность, кВт	крутящий момент, Н·м	масса, кг
1	180	67	850
2	176	70	1000
3	176	68	860
4	181	67	820
5	177	68	860
6	180	66	800
7	175	69	900
8	176	67	850
9	180	68,2	880
10	179	38,5	870
Коэффициенты веса	0,4	0,24	0,36

Найдите оптимальный вариант двигателя.

Задача 3.5.5

Показатели эффективности работы предприятий приведены в следующей таблице:

Номер предприятия	Показатели эффективности работы предприятий				
	прибыль, д.е.	себестоимость единицы продукции, д.е.	доходы, д.е.	фондоотдача, у.е.	производительность, у.е.
I	30,0	40,0	20,0	0,2	300
II	25,0	20,0	30,0	0,3	200
III	40,0	45,0	54,0	0,1	250
IV	28,0	30,0	35,0	0,4	160
V	15,0	12,0	20,0	0,25	280
VI	50,0	30,0	40,0	0,21	120
Весовые коэффициенты	0,32	0,23	0,15	0,20	0,10

Выберите наиболее эффективно работающее предприятие.

4 КРИТЕРИИ ОПТИМИЗАЦИИ В УСЛОВИЯХ РИСКА

4.1 Понятие неопределенности и риска

Неопределенность является характеристикой внешней среды (природы), в которой выполняется решение различных производственных задач. *Под неопределенностью понимают отсутствие, неполноту, недостаточность информации об объекте, процессе, явлении или неуверенность в достоверности информации.*

Будем рассматривать неопределенность «природы», вызванную недостатком информации о действительных условиях (факторах), при которых развивается объект управления. Внешняя среда («природа») может находиться в одном из множества возможных состояний. Будем считать, что множество состояний конечно или, по крайней мере, количество состояний можно пронумеровать.

Пусть Y_j — состояние «природы», при этом $j = \overline{1, m}$, где m — число возможных состояний. Все возможные состояния известны, не известно только, какое состояние будет иметь место в условиях, когда планируется реализация принимаемого управленческого решения. Будем считать, что множество управленческих решений (планов) X_i так же конечно и равно n . Реализация x_i плана в условиях, когда «природа» находится в Y_j состоянии, приводит к определенному результату, который можно оценить, введя количественную меру. В качестве такой меры могут служить выигрыши от принимаемого решения; потери от принимаемого решения, а также полезность, риск и другие количественные критерии[1].

Данные, необходимые для принятия решения в условиях неопределенности, обычно задаются в форме матрицы, строки которой соответствуют возможным действиям (управленческим решениям) X_i , а столбцы — возможным состоянием «природы» Y_j .

Допустим, каждому x_i -му действию и каждому возможному Y_j -му состоянию «природы» соответствует исход a_{ij} определяющий результат (выигрыш, полезность) при выборе i -го действия и реализации j -го состояния.

	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m
x_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1j}	$\dots$	a_{1m}
x_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2j}	$\dots$	a_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	a_{i1}	a_{i2}	$\dots$	a_{ij}	$\dots$	a_{jm}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	a_{n1}	a_{n2}	$\dots$	a_{nj}	$\dots$	a_{nm}

(4.1)

Следовательно, математическая модель задачи принятия решений определяется множеством состояний $\{ Y_j \}$, множеством планов (стратегий) $\{ X_i \}$ и матрицей возможных результатов $\|a_{ij}\|$.

Неопределенность обуславливает появление ситуаций, не имеющих однозначного исхода (решения). Из-за наличия неопределенности, столкновения противоречивых интересов в процессе производства возникают *ситуации риска*. Ситуации риска сопутствуют три условия:

- наличие неопределенности;
- необходимость выбора альтернативы;
- возможность оценить вероятность осуществления выбираемых альтернатив.

Таким образом, если существует возможность определить степень вероятности того или иного варианта, то это и будет ситуация риска.

Риск — целенаправленные действия, в ходе которых имеется возможность количественно и качественно оценить вероятность достижения желаемого результата, неудачи и отклонения от цели (положительного или отрицательного).

Процесс установления рыночных отношений порождает различные виды рискованных ситуаций, более того, в работе предприятий риск становится необходимым и обязательным его компонентом. С точки зрения полноты исходных данных определенность и неопределенность представляют собой два крайних случая, а риск определяет промежуточную ситуацию, в которой приходится принимать

решение. В качестве результатов в отдельных задачах рассматривается *матрица рисков* $\|r_{ij}\|$.

Элементы матрицы рисков $\|r_{ij}\|$ связаны с элементами полезностей (выигрышей) следующим соотношением:

$$r_{ij} = a_j - a_{ij}, \quad (4.2)$$

где $a_j = \max_i a_{ij}$ — максимальный элемент в столбце j матрицы полезностей.

Если матрица возможных результатов $\|a_{ij}\|$ представляет собой матрицу потерь (затрат), то элементы матрицы рисков $\|r_{ij}\|$ следует определять по формуле

$$r_{ij} = a_{ij} - a_j, \quad (4.3)$$

где $a_j = \min_i a_{ij}$ — минимальный элемент в столбце j матрицы потерь.

Таким образом, риск — это разность между результатом, который можно получить, если знать действительное состояние «природы», и результатом, который будет получен при выбранной i -й стратегии.

Матрица рисков дает более наглядную картину неопределенной ситуации, чем матрица исходов (результатов).

Значения вероятностей, которые используются, основаны либо на уже имеющейся информации, либо на расчетах. Однако эти значения не постоянны, и поэтому, полезно знать, насколько велика зависимость выбора решения от изменения величины вероятности, то есть какова чувствительность решений.

Чувствительность (запас прочности) решений — степень зависимости выбора решения от изменения величины вероятности.

Суть анализа чувствительности заключается в числовой оценке изменения вероятности, определяющей выбор решения.

Неопределенность при принятии решений может быть уменьшена путем сбора дополнительной информации, однако за нее нужно платить. Максимальная сумма денег, которую стоит заплатить, и является *стоимостью достоверной информации*. Если заранее известно, какой из исходов осуществляется, то можно принять решение, ведущее к максимальному доходу, тем не менее, это не означает, что мы можем контролировать исходы.

Стоимость достоверной информации представляет собой разность ожидаемого дохода (рассчитанную как математическое ожидание) и максимального ожидаемого дохода без достоверной информации. Эта разность равна минимальным возможным потерям.

Если известна стоимость достоверной информации, то известен максимум, который можно заплатить за дополнительную информацию о вероятностях исходов.

Непосредственный анализ матриц выигрышей $\|a_{ij}\|$ или рисков $\|r_{ij}\|$ не позволяет в общем случае принять решение по выбору оптимальной стратегии (плана), за исключением простейшего случая, когда выигрыши при одной стратегии явно выше, чем при любой другой для каждого состояния «природы» (элементы матрицы выигрышей в некоторой строке больше, чем в любой из других строк). Другими словами, имеется в наличии «доминирующая» стратегия.

4.2 Критерии оптимизации в условиях риска

Для количественной оценки ситуации и принятия решения в условиях риска используют критерии Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица и математическое ожидание.

4.2.1 Математическое ожидание

В рамках системного описания предполагается, что исход (состояние системы) определяется двумя факторами: выбором альтернативы и состояния среды. Если обозначить через q_j вероятность появления состояния y_j ($j=1, \dots, m$) то должно выполняться условие

$$q_i \geq 0, \sum_{j=1}^m q_j = 1.$$

Если обозначить через $p_i(a)$ вероятность наступления исхода a при выборе альтернативы x_i , то

$$p_i(a) = \sum q_i.$$

В качестве оценки «полезности» альтернативы x_i , берется сумма попарных произведений, стоящих в строке x_i таблицы 4.1 численных значений на соответствующие им вероятности

$$W = \sum_{j=1}^m q_i \cdot a_{ij}. \quad (4.4)$$

Эту величину называют *математическим ожиданием*. Или другими словами «полезность» W альтернативы x_i есть сумма произведений численных значений вероятностей на исход по каждой строке x_i таблицы 4.1.

Наилучшей (оптимальной) следует считать альтернативу, которой соответствует наибольшее значение математического ожидания.

Пример 4.1. Литейно-механический завод поставляет отливки двум машиностроительным предприятиям A и B . Отливки доставляются одной машиной по разным дорогам (шоссейной и грунтовой). Заводу A необходимо доставить X_t груза, заводу B — Y_t груза. Если машина доставляет груз в пункт A , то с вероятностью P_1 она перевозит часть R_1 литья, а с вероятностью $(1-P_1)$ машина выходит из строя (из-за поломки). Если машина доставляет груз в пункт B , то с вероятностью P_2 она перевозит часть R_2 необходимого для этого объекта литья, и с вероятностью $(1-P_2)$ машина выходит из строя. На протяжении рабочей смены машина может успеть выполнить только четыре рейса с учетом погрузочно-разгрузочных работ.

В какой последовательности следует использовать машину для перевозки заготовок, чтобы математическое ожидание общего количества литья, доставленного предприятиям A и B , было максимальным? Найти это математическое ожидание.

Дано:

P_1	R_1	$X, т$	P_2	R_2	$Y, т$
0,9	0,4	20	0,8	0,7	30

Решение.

Математическое ожидание $\left(\max \sum_{j=1}^m q_i \cdot a_{ij} \right)$:

$$A \sim X \cdot R_1 \cdot P_1 + X(1 - P_1) \cdot 0 = 20 \cdot 0,4 \cdot 0,9 + 0 = 8 \cdot 0,9 = 7,2$$

$$B \sim Y \cdot R_2 \cdot P_2 + Y(1 - P_2) \cdot 0 = 30 \cdot 0,7 \cdot 0,8 + 0 = \underline{21} \cdot 0,8 = \underline{16,8} > 7,2.$$

Первым рейсом следует перевести 21 т груза в B . Вторым рейсом можно отправлять X груза в A или $Y(1 - R_2)$ в пункт B .

$$A \sim X \cdot R_1 \cdot P_1 + X(1 - P_1) \cdot 0 = 8 \cdot 0,9 = 7,2$$

$$B \sim Y(1 - R_2) \cdot P_2 + Y(1 - P_2) \cdot 0 = 30 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0 = 9 \cdot 0,8 = 7,2.$$

Выберем отправку вторым рейсом 8 т груза в A . Третьим рейсом можно отправлять остаток $X \cdot (1 - R_1)$ груза в A или $Y(1 - R_2)$ в пункт B .

$$A \sim X(1 - R_1) \cdot P_1 + X(1 - P_1) \cdot 0 = 20 \cdot 0,6 \cdot 0,9 + 0 = \underline{12} \cdot 0,9 = \underline{10,8} > 7,2.$$

Третьим рейсом целесообразнее отправить 12 т груза в A , так как математическое ожидание $10,8 > 7,2$. На четвертый рейс следующей смены осталось доставить $Y(1 - R_2) = 9$ т груза в B с математическим ожиданием

$$B \sim Y(1 - R_2) \cdot P_2 + Y(1 - P_2) \cdot 0 = 30 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0 = 9 \cdot 0,8 = \underline{7,2}$$

Максимальное математическое ожидание общего количества перевезенного в пункты A и B груза равно

$$\max q_i = \sum_{i=1}^n p_i = 16,8 + 7,2 + 10,8 + 7,2 = 42.$$

Таким образом, груз следует доставлять в пункты *A* и *B* в следующих объемах и последовательности:

Рейсы	<i>A</i>	<i>B</i>	
1	-	21т	
2	8т	-	
3	12т	-	
4	-	9т	
Итого	20т	30т	$\max q_i = 42$

4.2.2 Критерий Лапласа

Этот критерий опирается на «принцип недостаточного основания» Лапласа, согласно которому все состояния «природы» y_j , $j = \overline{1, m}$ полагаются равновероятными. В соответствии с этим принципом каждому состоянию y_j присваивается вероятность q_j , определяемая по формуле

$$q_j = \frac{1}{m}.$$

При этом в условиях риска выбирается действие x_i дающее наибольший ожидаемый выигрыш

$$\max_i \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_{ij}. \quad (4.5)$$

Для каждой строки матрицы рассчитывается средний элемент (сумма элементов строки, деленная на количество элементов). Из рассчитанных средних выбирается максимальное. По местоположению максимального среднего (какой строке соответствует) выбирается i -й вариант решения. Аналогично можно повторить эту процедуру и для столбцов. Недостаток стратегии — происходит усреднение выигрыша, в поисках компромисса часто теряется выигрыш. Стратегию наиболее целесообразно применять, если элементов строк матрицы много (три и более) и они имеют не слишком большой разброс относительно среднего значения в строке.

Если в исходной задаче матрица возможных результатов представлена матрицей рисков $\|r_{ij}\|$, то критерий Лапласа принимает следующий вид:

$$\min_i \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m r_{ij} . \quad (4.6)$$

4.2.3 Критерий Вальда

Применение данного критерия не требует знания вероятностей состояний Y_j . Этот критерий опирается на принцип наибольшей осторожности, поскольку он основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий X_i (стратегия «пессимиста»).

Если в исходной матрице (по условию задачи) результат a_{ij} представляет потери лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется *минимаксный критерий*. Для определения оптимальной стратегии x_i необходимо в каждой строке матрицы результатов найти наибольший элемент $\max_j \{a_{ij}\}$, а затем выбирается действие x_i (строка i), которому будет соответствовать наименьший элемент из этих наибольших элементов, т.е. действие, определяющее результат, равный

$$W = \min_i \max_j \{a_{ij}\} . \quad (4.7)$$

Если в исходной матрице по условию задачи результат a_{ij} представляет выигрыш (полезность) лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется *максиминный критерий*.

Для определения оптимальной стратегии x_i в каждой строке матрицы результатов находят наименьший элемент $\min_j \{a_{ij}\}$, а затем выбирается действие x_i (строка i), которому будут соответствовать наибольшие элементы из этих наименьших элементов, т.е. действие, определяющее результат, равный

$$W = \max_j \min_i \{a_{ij}\}. \quad (4.8)$$

Минимаксный критерий Вальда иногда приводит к нелогичным выводам из-за своей чрезмерной «пессимистичности». «Пессимистичность» этого критерия исправляет критерий Сэвиджа.

4.2.4 Критерий Сэвиджа

В критерии Сэвиджа используют матрицу рисков $\|r_{ij}\|$. Элементы данной матрицы можно определить по формулам (4.2), (4.3), которые перепишем в следующем виде:

$$r_{ij} = \begin{cases} \max_i \{a_{ij}\} - a_{ij}, & \text{если } A - \text{выигрыш,} \\ \min_i \{a_{ij}\}, & \text{если } A - \text{потери.} \end{cases} \quad (4.9)$$

Это означает, что r_{ij} есть разность между наилучшим значением в столбце j и значениями a_{ij} при том же j . Отметим, что независимо от того, является ли a_{ij} доходом (выигрышем) или потерями (затратами), r_{ij} в обоих случаях определяет величину потерь лица, принимающего решение. Следовательно, можно применять к r_{ij} только минимаксный критерий. Критерий Сэвиджа рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту стратегию x_i , при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален).

Применение критерия Сэвиджа позволяет любыми путями избежать большого риска при выборе стратегии, а значит, избежать большого проигрыша (потерь).

4.2.5 Критерий Гурвица

Основан на следующих двух предположениях: «природа» может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью $(1 - \alpha)$ и в самом выгодном состоянии с вероятностью α , где α — коэффициент доверия. Если результат a_{ij} прибыль, полезность, доход и т.п., то критерий Гурвица определяется по формуле:

$$W = \max_i \left[\alpha \cdot \max_j a_{ij} + (1 - \alpha) \min_j a_{ij} \right]. \quad (4.10)$$

Когда a_{ij} представляет затраты (потери), то выбирают действие, дающее

$$W_{\min} = \min_i \left[\alpha \cdot \min_j a_{ij} + (1 - \alpha) \max_j a_{ij} \right]. \quad (4.11)$$

Если $\alpha = 0$, получим пессимистический критерий Вальда.

Если $\alpha = 1$, то приходим к правилу вида $\max_i \max_j a_{ij}$ или, к

так называемому максимаксному критерию, к стратегии «здорового оптимиста», т.к. критерий слишком оптимистичный.

Критерий Гурвица устанавливает баланс между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма путем взвешивания обоих способов поведения соответствующими весами $(1 - \alpha)$ и α , где $0 \leq \alpha \leq 1$.

Значение α от 0 до 1 может определяться в зависимости от склонности лица, принимающего решение, к пессимизму или к оптимизму. При отсутствии ярко выраженной склонности значение $\alpha = 0,5$ представляется наиболее разумным.

Принимая стратегию Гурвица, ЛПР выбирает для себя, насколько рисковать, или страховаться. Для выбора стратегии по критерию Гурвица сначала для каждой строки матрицы определяются максимальный и минимальный элементы, затем они после умножения на соответствующие коэффициенты доверия складываются для каждой строки. Из полученных значений выбирается максимальное значение (для матрицы доходов) или минимальное (для матрицы затрат), соответствующие i -й строке. По нему определяется i -й вариант решения. Аналогичную процедуру можно повторить и для столбцов. Недостаток стратегии Гурвица — субъективность определения коэффициента значимости.

Пример 4.2 (замена оборудования) [1]

Установленное на предприятии сложное и дорогостоящее оборудование после k лет работы может оказаться в одном из трех состояний:

— y_1 — оборудование вполне работоспособно и требует лишь небольшого текущего ремонт;

— y_2 — некоторые детали значительно износились и требуют серьезного ремонта или замены;

— y_3 — основные детали износились настолько, что дальнейшая эксплуатация оборудования невозможна.

Прошлый опыт эксплуатации аналогичного оборудования показывает, что в 20% случаев оно может находиться в состоянии y_1 , в 50% — в состоянии y_2 и в 30% — в состоянии y_3 .

Для предприятия возможны три различных способа действия:

— x_1 — оставить оборудование в работе еще на год, проводя незначительный ремонт своими силами;

— x_2 — провести капитальный ремонт оборудования с вызовом специальной бригады ремонтников;

— x_3 — заменить оборудование новым.

Потери, которые понесет предприятие, при различных способах действия, приведены в таблице. В таблице также приведены априорные вероятности различных состояний природы. В потери входят стоимость ремонта или замены оборудования, а также убытки, связанные с ухудшением качества продукции и с простоями, вызванными неисправным оборудованием.

y	$q(y_j)$	$F(x_i, y_j)$		
		x_1	x_2	x_3
y_1	0,2	1	3	5
y_2	0,5	5	2	4
y_3	0,3	7	6	3

Найти оптимальную стратегию предприятия, при которой потери и риск потерь при наихудших условиях восстановления станочного парка были бы минимальны.

Решение.

Заданную таблицу потерь преобразуем в более удобную для решения форму (4.1) и представим в виде матрицы затрат М.

$M =$

q_j	$q_1 = 0,2$	$q_2 = 0,5$	$q_3 = 0,3$
Y_j			
X_i			
x_1	1	5	7
x_2	3	2	6
x_3	5	4	3

1. Ожидаемые средние потери при различных способах действия x_i с учетом прошлого опыта эксплуатации оборудования (вероятности событий) определим через *математическое ожидание* по формуле (4.4)

$$W_{\min} = \min \sum_{j=1}^m q_j \cdot a_{ij}$$

$$W(x_1) = 0,2 \times 1 + 0,5 \times 5 + 0,3 \times 7 = 4,8,$$

$$W(x_2) = 0,2 \times 3 + 0,5 \times 2 + 0,3 \times 6 = \underline{3,4} \leftarrow \min,$$

$$W(x_3) = 0,2 \times 5 + 0,5 \times 4 + 0,3 \times 3 = 3,9.$$

Выбираем стратегию x_2 (капитальный ремонт оборудования) с ожидаемыми средними минимальными потерями $W(x_2) = 3,4$.

2. *Критерий Лапласа* при равновероятных состояниях природы по формуле (4.5)

$$\min W(x_i) = \min \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_{ij}.$$

$$W(x_1) = \frac{1}{3}(1 + 5 + 7) \approx 4,33,$$

$$W(x_2) = \frac{1}{3}(3 + 2 + 6) \approx \underline{3,66} \leftarrow \min,$$

$$W(x_3) = \frac{1}{3}(5 + 4 + 3) \approx 4,00.$$

Минимальные средние потери будут также иметь место при выборе стратегии x_2 .

3. Критерий Вальда

3.1. При равновероятных состояниях природы для исходной матрицы М

М =

q_j	0,2	0,5	0,3			
	y_1	y_2	y_3	$\max_j$	$\min_i \max_j$	$\min_j$
x_1	1	5	7	7	—	1
x_2	3	2	6	6	—	2
x_3	5	4	3	5	5	3
$\min_i$	1	2	3			

минимаксный критерий

$$W(x_3) = \min_i \max_j \{a_{ij}\} = \min_i \{7; 6; 5\} = 5.$$

Оптимальной является стратегия x_3 — замена оборудования новым.

3.2. С учетом заданных вероятностей состояний природы q_j (y_j) матрица М потерь по формуле $a_{ij}(q_j) = q_j \cdot a_{ij}$, принимает вид

М₁ =

	y_1	y_2	y_3	$\max_j$	$\min_i \max_j$	$\min_j$
x_1	0,2	2,5	2,1	2,5	—	0,2
x_2	0,6	1,0	1,8	1,8	1,8	0,6
x_3	1,0	2,0	0,9	2,0	—	0,9
$\min_i$	0,2	1,0	0,9			

Здесь минимаксный критерий

$$W(x_2) = \min_i \max_j \{a_{ij}\} = \min_i \{2, 5; 1, 8; 2, 0\} = 1, 8.$$

Получаем оптимальную по критерию Вальда стратегию x_2 — капитальный ремонт.

4. Риск увеличения потерь в самой неблагоприятной ситуации определяется по критерию Сэвиджа (4.9).

Если A — потери $r_{ij} = a_{ij} - \min_i \{a_{ij}\}$.

4.1. Матрица рисков без учета заданных вероятностей состояний среды из матрицы M

$$\|r_{ij}\| =$$

	y_1	y_2	y_3	$\max_i$	$\min \max_{j \quad i}$
x_1	0	3	4	4	—
x_2	2	0	3	3	3
x_3	4	2	0	4	—

$$\min r(x_2) = \min_i \max_j \{r_{ij}\} = \min_i \{4; 3; 4\} = 3.$$

4.2. С учетом заданных вероятностей из матрицы M_1 матрица рисков примет вид

$$\|r_{ij}\|_1 =$$

	y_1	y_2	y_3	$\max_i$	$\min \max_{j \quad j}$
x_1	0	1,5	1,2	1,5	—
x_2	0,4	0	0,9	0,9	0,9
x_3	0,8	1,0	0	1,0	—

$$\min r(x_3) = \min_i \max_j \{r_{ij}\} = \min_i \{1, 5; 0, 9; 1, 0\} = 0, 9. .$$

Критерий Сэвиджа показывает, что при выборе стратегии x_2 риск увеличения затрат на восстановление станочного парка минимальный.

5. Критерий Гурвица. Примем коэффициент доверия $\alpha = 0,5$. Тогда оптимальная стратегия для матрицы затрат определяется по формуле (4.11)

$$W_{\min} = \min_i \left[\alpha \cdot \min_j \{a_{ij}\} + (1 - \alpha) \max_j \{a_{ij}\} \right].$$

С учетом заданных вероятностей из матрицы M_j

$W(x_i)$	$\min_j a_{ij}$	$\max_j a_{ij}$	[...]	$\min_i [...]$
$W(x_1)$	0,2	2,5	$0,5(0,2 + 2,5) = 1,35$	–
$W(x_2)$	0,6	1,8	$0,5(0,6 + 1,8) = 1,20$	1,2
$W(x_3)$	0,9	2,0	$0,5(0,9 + 2,0) = 1,45$	–

Критерий Гурвица также рекомендует выбор стратегии x_2 — ремонт оборудования.

Выводы

1. Капитальный ремонт оборудования специальной бригадой ремонтников (стратегия x_2) гарантирует предприятию, в самых неблагоприятных условиях его износа, средние затраты не более 3,4 ед. (п.1.).

2. При выборе стратегии x_2 риск увеличения затрат на восстановление станочного парка минимальный (п.2.).

3. Критерий Вальда (п.3.) показывает недостаточную надежность принятого решения, так как даже незначительное изменение вероятностей (0,2; 0,5; 0,3 вместо $q_j = \frac{1}{3} = 0,33$) ведет к изменению оптимальной стратегии x_2 .

4. Если на основе прошлого опыта удастся прогнозировать (точно установить) вероятности наступления событий, то их необходимо учитывать для определения оптимального способа действий. В противном случае принятое решение может оказаться не наилучшим (п.3.).

4.3 Выбор критерия оптимизации в условиях риска

Выбор критерия принятия решений в условиях неопределенности является наиболее сложным и ответственным этапом. Выбор критерия приходится производить с учетом конкретной специфики решаемой задачи и в соответствии с поставленными целями, а также опираясь на прошлый опыт и интуицию. В частности, если даже минимальный риск недопустим, то следует применять критерий Вальда. Если наоборот определенный риск вполне приемлем, то выбирают критерий Сэвиджа.

Рассмотренные критерии принятия решений в условиях риска приводят нередко к различным результатам. Для каждого конкретного случая применимо (и дает «наилучшее» для вас решение) какое-то определенное правило или критерий оценки.

1. *Максимаксное решение* — максимизация максимума доходов $\left(\max_i \max_j \{a_{ij}\} \right)$ — стратегия оптимиста. При выборе этой стратегии ЛПП в погоне за максимальной прибылью, рискует в случае неудачи потерять много.

2. *Равновероятный принцип Лапласа и критерий Вальда* позволяют принять решение без использования численных значений вероятностей исходов. По пессимистической стратегии Вальда ЛПП страхует себя от наихудших исходов выбирая наилучший вариант из наихудших $\left(\max_i \min_j \{a_{ij}\} \right)$.

3. *Правило минимакса* $\left(\min_i \max_j \{a_{ij}\} \right)$ — минимизация максимально возможных потерь. В данном случае больше внимания уделяется возможным потерям, чем доходам. Таблицу возможных потерь можно получить из таблицы доходов, находя наибольший доход для каждого исхода и сопоставляя его с другими доходами этого же исхода. Таблица возможных потерь дает представление о прибылях каждого исхода, потерянных в результате принятия неправильного реше-

ния. Минимаксную стратегию принятия решений называют также *правилом возможных потерь* или *упущенным доходом*.

4. *Критерий Гурвица* представляет собой компромисс между осторожным правилом максимина и оптимистичным правилом максимакса. В нем объединяются правила, не рассматривающие индивидуальные вероятности отдельных исходов, и те, в которых учитываются вероятности исходов. При использовании критерия Гурвица для каждого решения рассматриваются лучший и худший результаты. ЛПР придает вес (коэффициент значимости α) обоим результатам, и, умножив результаты на соответствующие веса и, суммируя их, выбирает решение с наибольшим результатом. Такое решение задачи предполагает, что имеется достаточно информации для определения весов. Недостаток стратегии состоит в том, что ЛПР нужно самому вычислить (определить) веса для исходов с низкими и высокими доходами.

5. *Ожидаемый максимальный доход* может быть определен расчетом математического ожидания по формуле (4.4). Значения вероятностей, которые используются, основаны либо на уже имеющейся информации, либо на расчетах. Однако эти значения непостоянны, и поэтому, полезно знать, насколько велика зависимость выбора решения от изменения величины вероятности, то есть какая чувствительность решений.

Вопросы для контроля

1. Что понимают под ситуацией неопределенности?
2. Какие условия сопутствуют ситуации риска?
3. Каким образом определяют элементы матрицы рисков?
4. Что понимают под чувствительностью (надежностью) решений в условиях риска?
5. Каким образом определяют стоимость достоверной информации?
6. Какие критерии применяют для количественной оценки ситуации и принятия решения в условиях риска?
7. Что такое математическое ожидание?
8. Как определить критерий Лапласа и в каких случаях целесообразно им пользоваться?

9. В чем сущность критерия Вальда и способ его определения?
10. Что гарантирует минимаксный критерий Сэвиджа ?
11. На чем основан компромиссный критерий Гурвица?
12. Какую стратегию называют упущенным доходом или правилом возможных потерь?
13. Какими критериями можно охарактеризовать ожидаемый максимальный доход?

Задания для самостоятельной подготовки

Варианты задач к разделу 4 «Критерии оптимизации в условиях риска»

Задача 4.1

Один из пяти станков должен быть выбран для изготовления партии изделий, размер которой Q может принимать три значения: 150; 200; 350. Производственные затраты C_i для i станка задаются следующей формулой:

$$C_i = P_i + c_i \cdot Q$$

Данные P_i и c_i приведены ниже в таблице:

Показатели	Модели станка				
	1	2	3	4	5
P_i	30	80	50	160	5
c_i	14	6	10	5	100

Выбрать оптимальное решение предприятия с помощью критериев Лапласа, Сэвиджа и Гурвица (при $\alpha = 0,6$) на основе сравнения и анализа полученных результатов.

Задача 4.2

Для производства изделий предприятие выбирает один из трех альтернативных технологических процессов:

T_1 — технологический процесс на основе обработки резанием;

T_2 — технологический процесс на основе обработки давлением;

T_3 — технологический процесс на основе литья.

Каждый из технологических процессов обеспечивает различные потери дорогостоящего материала, выраженные баллами от 1 до 5. Самые низкие потери (балл 5 — отлично) обеспечиваются самым дорогостоящим технологическим процессом. На потери также влияет спрос на эти изделия и, как следствие, объемы производства. Последние факторы не определены и могут быть выражены условиями:

Y_1 — спрос на изделия будет расти, следовательно, будут расти объемы производства;

Y_2 — спрос на изделия будет падать, следовательно, будут падать объемы производства.

Матрица принятия решений имеет вид:

$$\begin{matrix} & Y_1 & Y_2 \\ \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \\ q_{31} & q_{32} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Стратегия предприятия заключается в минимизации высоких потерь материала. Выберите критерий и примите решение.

Указания к решению: так как стратегия состоит в минимизации потерь дорогостоящего материала, следовательно, необходимо застраховать предприятие от высоких потерь. В этих условиях целесообразно применить правило пессимиста — попытаться «уйти» от минимального балла матрицы, соответствующего высоким потерям: $\max \min q_{ij}$.

Задача 4.3

В условиях предыдущей задачи предприятие меняет стратегию и стремится минимизировать общие затраты на технологический процесс, складывающиеся из стоимости выполнения самого технологического процесса и потерь на дорогостоящие материалы.

Требуется выбрать критерий и принять решение, исходя из условия, что стоимость технологического процесса для предприятия в 2 раза значимее, чем потери дорогостоящих материалов.

Указания к решению: Так как по условию задачи самые низкие потери обеспечиваются самым дорогостоящим технологическим процессом, следовательно, целесообразно применить комбинированную стратегию: попытаться совместить правило оптимиста (выделить самый дешевый технологический процесс по максимальному элементу) и правило пессимиста (застраховать себя от высоких потерь, «уходя» от минимального балла матрицы).

Так как приоритет известен (стоимость технологического процесса в 2 раза значимее, чем потери дорогостоящих материалов), следовательно, можно определить коэффициент значимости α . Он будет приближенно равен 0,66 ($0,33 \times 2 = 0,66$).

Варианты заданий к задачам 4.2. и 4.3

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
Балл q_{11}	9	9	8	6	5	6	5	7
Балл q_{12}	8	6	8	8	7	7	8	9
Балл q_{21}	7	8	7	9	6	5	6	5
Балл q_{22}	8	8	8	7	6	7	4	7
Балл q_{31}	7	7	9	6	5	9	9	8
Балл q_{32}	6	9	8	8	8	5	6	7

Номер варианта	9	10	11	12	13	14	15	16
Балл q_{11}	8	5	9	5	8	6	8	7
Балл q_{12}	5	3	6	7	7	8	5	6
Балл q_{21}	6	4	7	9	5	5	4	6
Балл q_{22}	8	8	8	7	9	4	7	6
Балл q_{31}	9	7	9	6	5	6	5	8
Балл q_{32}	8	9	8	8	5	7	4	8

Номер варианта	17	18	19	20	21	22	23	24
Балл q_{11}	4	5	7	6	6	7	8	9
Балл q_{12}	8	7	8	8	6	5	7	7
Балл q_{21}	5	8	5	9	8	8	5	4
Балл q_{22}	8	8	8	7	7	7	6	6
Балл q_{31}	9	7	9	6	5	8	7	5
Балл q_{32}	8	9	8	8	5	8	8	6

Задача 4.4

Литейно-механический завод поставляет отливки двум машиностроительным предприятиям A и B . Отливки доставляются одной машиной по разным дорогам (шоссейной и грунтовой). Заводу A необходимо доставить X_t груза, заводу B — Y_t груза. Если машина доставляет груз в пункт A , то с вероятностью P_1 она перевозит часть R_1 литья, а с вероятностью $(1-P_1)$ машина выходит из строя (из-за поломки). Если машина доставляет груз в пункт B , то с вероятностью P_2 она перевозит часть R_2 необходимого для этого объекта литья, и с вероятностью $(1-P_2)$ машина выходит из строя. На протяжении рабочей смены машина может успеть выполнить только четыре рейса с учетом погрузочно-разгрузочных работ.

В какой последовательности следует использовать машину для перевозки заготовок, чтобы математическое ожидание общего количества литья, доставленного предприятиям A и B , было максимальным? Найти это математическое ожидание.

Исходные данные приведены в таблице.

Варианты заданий к задаче 4.4

Номер варианта	P_1	R_1	X	P_2	R_2	Y
1	0,9	0,5	20	0,7	0,6	30
2	0,8	0,6	30	0,6	0,7	20
3	0,7	0,4	20	0,8	0,6	30
4	0,9	0,5	30	0,6	0,6	20
5	0,8	0,6	20	0,7	0,7	30
6	0,7	0,5	20	0,8	0,6	30
7	0,9	0,6	30	0,6	0,7	20
8	0,8	0,4	30	0,8	0,6	20
9	0,7	0,5	20	0,7	0,7	30
10	0,9	0,4	20	0,8	0,7	30

Задача 4.5

Создается новое гибкое автоматизированное производство (ГАП). Выявлены три концепции создания такого производства:

A_1 — ГАП на основе завода-автомата;

A_2 — ГАП на основе автоматизированных цехов;

A_3 — ГАП на основе отдельных быстро заменяемых модулей.

Будущее ГАП может эксплуатироваться при возможных условиях:

B_1 — механообработка сохранит в обозримом будущем свое доминирующее значение при обработке деталей;

B_2 — механообработка будет вытеснена каким-то более прогрессивными технологическими процессами.

В качестве элементов платежной матрицы рассматриваются показатели: производительность труда, фондоотдача, экономический эффект от эксплуатации ГАП. В результате анализа была получена матрица, состоящая из комплексных показателей, включающих в себя перечисленные частные показатели, сведенные к 100%,

$$\begin{matrix} & B_1 & B_2 \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 100 & 25 \\ 90 & 65 \\ 75 & 75 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Вероятности наступления условий (риска) следующие:

q_1 — вероятность того, что механообработка сохранит в обозримом будущем свое доминирующее положение равно $q(B_1)$;

q_2 — вероятность того, что механообработка будет вытесняться какими-то более прогрессивными технологическими процессами равна $q(B_2)$.

Требуется принять решение о варианте ГАП.

Варианты задания к задаче 4.5

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
Вероятность $q(B_1)$	0,85	0,72	0,65	0,45	0,36	0,25	0,30	0,48
Вероятность $q(B_2)$	0,15	0,28	0,35	0,55	0,64	0,75	0,70	0,52

Номер варианта	9	10	11	12	13	14	15	16
Вероятность $q(B_1)$	0,10	0,90	0,80	0,70	0,40	0,15	0,55	0,75
Вероятность $q(B_2)$	0,90	0,10	0,20	0,30	0,60	0,85	0,45	0,25

Номер варианта	17	18	19	20	21	22	23	24
Вероятность $q(B_1)$	0,35	0,23	0,47	0,55	0,60	0,95	0,78	0,66
Вероятность $q(B_2)$	0,65	0,77	0,53	0,45	0,40	0,05	0,22	0,34

Задача 4.6

Фирма рассматривает вопрос о строительстве станции технического обслуживания (СТО) автомобилей. Составлена смета расходов на строительство станции с различным количеством обслуживаемых автомобилей, а также рассчитан ожидаемый доход в зависимости от удовлетворения прогнозируемого спроса на предлагаемые услуги СТО (прогнозируемое количество обслуженных автомобилей в действительности). В зависимости от принятого решения — проектного количества обслуживаемых автомобилей в сутки (проект СТО) R_i и величины прогнозируемого спроса на услуги СТО — построена нижеследующая таблица ежегодных финансовых результатов (доход, д.е.):

Проекты СТО	Прогнозируемая величина удовлетворяемости спроса					
	0	10	20	30	40	50
20	−120	60	240	250	250	250
30	−160	15	190	380	390	390
40	−210	−30	150	330	500	500
50	−270	−80	100	280	470	680

Определить наилучший проект СТО с использованием критериев Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица (при $\alpha = 0,5$).

Задача 4.7

Намечается крупномасштабное производство легковых автомобилей. Имеются четыре варианта проекта автомобиля $R_i (i = \overline{1,4})$. Определена экономическая эффективность W_{ij} каждого проекта в зависимости от рентабельности производства по истечении трех сроков. $S_j (j = \overline{1,3})$. S_j рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены в таблице:

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	20	25	15
R_2	25	24	10
R_3	15	28	12
R_4	9	30	20

Требуется выбрать лучший проект легкового автомобиля для производства, используя критерии Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица при $\alpha = 0,1$. Сравните результаты решения и сделайте выводы.

Задача 4.8

Определить тип электростанции, которую необходимо построить для удовлетворения энергетических потребностей комплекса крупных промышленных предприятий. Множество возможных стратегий в задаче включает следующие параметры:

R_1 — сооружается гидростанция;

R_2 — сооружается тепловая станция;

R_3 — сооружается атомная станция.

Экономическая эффективность сооружения электростанции зависит от влияния случайных факторов, образующих множество состояний природы $S_j (j = \overline{1,5})$.

Результаты расчета экономической эффективности приведены в таблице:

Тип станции	Состояние природы				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
R_1	40	70	15	25	45
R_2	60	50	10	20	30
R_3	50	30	12	35	60

Выбрать оптимальное решение в соответствии с критериями Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица (при $\alpha = 0,5$).

5 ОПТИМИЗАЦИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

5.1 Основные понятия и определения теоретико-игровых моделей

В отличие от рассмотренных выше задач принятия решений в условиях определенности, риска и неопределенности, в которых внешняя среда (природа) предполагалась пассивной, в конфликтных ситуациях имеются противодействующие стороны, интересы которых противоположны. При конфликтных ситуациях решения принимаются в условиях неопределенности двумя или более разумными противниками, каждый из которых стремится оптимизировать свои решения за счет других. *Теория, занимающаяся принятием решений в условиях конфликтных ситуаций, называется теорией игр.* Математическая модель конфликтной ситуации представляет собой игру.

Игра — это совокупность правил, описывающих сущность конфликтной ситуации. *Эти правила устанавливают:*

- выбор образа действий игроков на каждом этапе игры;
- информацию, которой обладает каждый игрок при осуществлении таких выборов;
- плату для каждого игрока после завершения любого этапа игры.

Игру можно определить следующим образом:

- имеются n конфликтующих сторон (игроков), принимающих решения, интересы которых не совпадают;
- сформулированы правила выбора допустимых стратегий, известные игрокам;
- определен набор возможных конечных состояний игры (например, выигрыш, ничья, проигрыш);
- всем игрокам (участникам игры) заранее известны платежи, соответствующие каждому возможному конечному состоянию.

Теория игр вскрывает законы, знание которых приводит к тому, что результаты, полученные на моделях, называемых «играми», можно применять для выработки правил оптимального пове-

дения для широкого класса конфликтных ситуаций во многих областях деятельности. Такие случаи характерны и в сфере производства, особенно при наличии конкуренции. Рынок — это ни что иное как открыто признаваемый конфликт в области производственных и экономических интересов.

Формализованная модель конфликтной ситуации позволяет фиксировать процессы имитации рассуждений одного противника другим, а также исследовать явления взаимного управления, которые обычно возникают между конфликтующими сторонами.

Каждая взятая непосредственно из практики конфликтная ситуация очень сложна, и ее анализ затрудняется наличием многочисленных несущественных факторов. Чтобы сделать возможным математический анализ конфликтной ситуации, отвлекаются от всех второстепенных и малозначащих факторов и строят упрощенную схематическую модель. Такую модель и называют игрой. Таким образом, *игра — формализованная модель конфликтной ситуации*, представляющая собой совокупность правил, описывающих поведение игроков.

Действия, выбираемые игроками в конфликтной ситуации, называют *стратегиями*. Или другими словами, *стратегия игрока* — однозначное описание его выбора в каждой возможной ситуации, при которой он должен сделать личный «ход».

В соответствии с имеющейся информацией о противнике в основу выбора стратегии обычно закладывается *принцип гарантированного результата*. Принцип гарантированного результата конкретизируется в критериях выбора решения. Какое бы решение не принял противник, некоторый выигрыш должен быть нам гарантирован.

Каждый случай разыгрывания игры некоторым конкретным образом от начала и до конца представляет собой *партию игры*.

Развитие игры во времени представляется как ряд последовательных «ходов». Ходы могут быть сознательные и случайные. *Случайным ходом* называют результат, получаемый не решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (погодные условия, состояние инструмента и оборудования, поддержка с поставкой заготовок). При моделировании они опреде-

ляются вращением рулетки, бросанием кубика и другими методами. Во всех таких случаях должны быть указаны распределения вероятностей возможных исходов. *Сознательным ходом* называется выбор игроком одного из возможных вариантов действия (стратегии) и принятие решения о его осуществлении, например очередной заказ на оборудование, выбор последовательности обработки и пр.

Ходы — элементы игры. Правила игры предусматривают, какова должна быть последовательность ходов, и указывают характер каждого хода.

Личный ход — выбор игроком одного из заданного множества вариантов. *Выбор* — решение, принятое игроком при личном ходе.

Случайный ход — также выбор одного из множества вариантов, но здесь вариант выбирается не игроком, а некоторым механизмом случайного выбора.

Результатом игры будет победа или поражение, которые не всегда имеют количественные выражения, но обычно можно, хотя бы условно, выразить их числами.

Теоретико-игровые модели можно классифицировать с нескольких точек зрения. Игра называется *конечной*, если в ней существует конечное число возможных вариантов своих и чужих действий, конечное число ходов на каждом этапе игры, а также конечен размер выигрыша. Игры, не являющиеся конечными, называются *бесконечными*.

Игры различают по количеству информации, которой располагает игрок о сделанных ходах, а также по числу участников. Существуют *коалиционные игры*, в которых игроки группируются в команды.

Игры могут быть *вероятностные* и *детерминированные*.

Если в игре участвуют две стороны (два игрока), она называется *парной игрой*.

Игра, в которой алгебраическая сумма выигрышей всех сторон равна нулю, называется *игрой с нулевой суммой*. В таких играх интересы сторон прямо противоположны, то есть выигрыш одного

игрока равен проигрышу второго. При этом предполагается, что выбор, сделанный каждым из игроков, неизвестен его противнику. Однако оба противника знают все возможные варианты своих и чужих действий, а также размер выигрыша при любом парном их сочетании.

Игры, в которых один противник — *природа*, а другой — *человек*, называют *статистическими играми*, а теорию таких игр называют теорией статистических решений.

Понятие «природа» — вся совокупность внешних обстоятельств, в которых приходится принимать решение. Природа нейтральна. Она не стремится извлекать для себя максимальной выгоды и не имеет злого умысла по отношению к человеку. Природа — не разумный противник и не использует ошибки, совершаемые человеком.

Цель теории игр состоит в выработке рекомендаций для разумного поведения игроков в конфликтной ситуации, то есть указать оптимальную стратегию каждому из них. Если игра состоит только из сознательных ходов, то выбор стратегии игроков A и B однозначно определяет исход игры: выигрыш (положительный или отрицательный) игрока A . Если кроме сознательных ходов игра содержит и случайные, то оценкой выигрыша будет математическое ожидание, то есть средняя величина выигрыша при многократном повторении игры.

5.2 Цена игры. Чистые стратегии

Возможные варианты (исходы) игры можно свести в прямоугольную таблицу, строки и столбцы которой соответствуют различным стратегиям, а ее элементы — выигрышам одной стороны (равные проигрышам другой). Эта матрица называется *платежной матрицей* или *матрицей игры*.

Если первый игрок имеет m стратегий, а второй — n стратегий, то говорят, что мы имеем дело с игрой $m \times n$. Рассмотрим игру $m \times n$. Пусть заданы множество стратегий: для первого игрока $\{A_i\}$,

для второго игрока $\{B_j\}$, платежная матрица $\overline{A} \leftrightarrow m \times n = \|a_{ij}\|$, где a_{ij} — выигрыш первого игрока или проигрыш второго игрока при выборе ими стратегий A_i и B_j соответственно. Каждый из игроков выбирает однозначно с вероятностью 1 некоторую стратегию, т.е. пользуется при выборе решения *чистой стратегией*. При этом *решение* игры будет в чистых стратегиях. Поскольку интересы игроков противоположны, то первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш, а второй игрок, наоборот, минимизировать свой проигрыш.

Решение игры состоит в определении наилучшей стратегии каждым игроком. Выбор наилучшей стратегии одним игроком проводится при полном отсутствии информации о принимаемом решении вторым игроком. Следует отметить, что и первый, и второй игрок являются разумными противниками, которые находятся в состоянии конфликта. Поэтому для решения игры двух лиц с нулевой суммой используется очень «пессимистичный» критерий *минимакса-максимина*. Отличие заключается в том, что ранее «природа» не рассматривалась как активный противник, тогда как в теории игр каждый игрок действует разумно и, следовательно, пытается активно помешать своему противнику. Так, если первый игрок применяет стратегию A_i , то второй будет стремиться к тому, чтобы выбором соответствующей стратегии B_j свести выигрыш первого игрока к минимуму, что равнозначно сведению своего проигрыша к минимуму. Величина этого минимума

$$\alpha_j = \min_i a_{ij}, \quad i=\overline{1, m}. \quad (5.1)$$

Первый игрок (при любых ответах противника) будет стремиться найти такую стратегию, при которой α_i обращается в максимум:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}. \quad (5.2)$$

Величина α называется *нижней ценой игры*. Ей соответствует максиминная стратегия, придерживаясь которой первый игрок

при любых стратегиях противника обеспечит себе выигрыш, не меньший α . Другими словами, нижняя цена игры является гарантированным выигрышем первого игрока при любых стратегиях второго игрока.

Аналогично определим по каждому столбцу матрицы $\beta_j = \max_i a_{ij}$, $i=\overline{1, n}$, найдем минимальное значение β_j :

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}. \quad (5.3)$$

Величина β называется *верхней ценой игры*. Ей соответствует минимаксная стратегия второго игрока. Величина β представляет собой гарантированный проигрыш второго игрока при любой стратегии первого игрока.

Пример 5.1. Дана платежная матрица 3 x 4, которая определяет выигрыши игрока A . Вычислить нижнюю и верхнюю цены заданной игры.

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 11 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 20 \\ 6 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Представим игру в виде следующей таблицы:

Стратегии первого игрока, A_i	Стратегии второго игрока, B_j				Значение, α_i $\min_j a_{ij}$	α
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	10	4	11	7	4	—
A_2	7	6	8	20	6	6
A_3	6	2	1	11	1	—
Значение β_i	10	6	11	20		
β	—	6	—	—		

Если игрок A выбирает первую стратегию, он может получить выигрыш в размере 10, 4, 11 или 7 д.е. в зависимости от стратегии

выбранной игроком B . При этом выигрыш игрока A будет не меньше $\alpha_1 = \min \{10; 4; 11; 7\} = 4$ д.е. независимо от поведения игрока B .

Аналогично при выборе игроком A второй стратегии гарантированный выигрыш $\alpha_2 = \min \{7; 6; 8; 20\} = 6$ д.е. При выборе игроком A третьей стратегии выигрыш $\alpha_3 = \min \{6; 23; 1; 11\} = 1$ д.е.

Таким образом, минимальные значения α_i , $i = \overline{1,3}$ определяют минимально гарантированный выигрыш для игрока A , если он выбирает соответствующую стратегию i . Величина $\max_i \alpha_i = \max \{4; 6; 1\} = 6$ будет гарантированным выигрышем игрока A при любых стратегиях игрока B . Выбранная игроком A вторая стратегия называется *максиминной стратегией*, а соответствующее ее значение выигрыша $\alpha_2 = 6$ будет нижней ценой игры.

Второй игрок стремится минимизировать свой проигрыш. Выбрав первую стратегию β_1 , игрок B может проиграть не более чем $\beta_1 = \max \{10; 7; 6\} = 10$ независимо от выбора стратегии игроком A . Аналогично рассуждая, получим следующие результаты:

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \max \{4; 6; 2\} = 6; \quad \beta_3 = \max \{11; 8; 1\} = 11; \\ \beta_4 &= \max \{7; 20; 11\} = 20.\end{aligned}$$

Игрок B выбирает стратегию β_2 , которая минимизирует его максимальные проигрыши:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min \{10; 6; 20\} = 6.$$

Величина $\beta = 6$ будет гарантированным проигрышем игрока B при любых стратегиях игрока A . Выбранная игроком B вторая стратегия называется *минимаксной стратегией*, а соответствующее ее значение проигрыша $\beta_2 = 6$ будет верхней ценой игры.

Для любой матрицы $A = \|a_{ij}\|$ выполняется неравенство:

$$\beta \geq \alpha \quad (5.4)$$

Если $\beta = \alpha$, т.е. верхняя цена равна нижней цене игры, то соответствующие чистые стратегии называются оптимальными, а про игру говорят, что она имеет *седловую точку*. Седловая точка является минимальным элементом соответствующей строки и максимальным элементом соответствующего столбца. Эта точка есть точка равновесия игры, определяющая однозначно оптимальные стратегии. *Оптимальность* здесь означает, что ни один игрок не стремится изменить свою стратегию, так как его противник может на это ответить выбором другой стратегии, дающей худший для первого игрока результат.

Величина $D = \beta = \alpha$ называется *ценой игры*. Она определяет средний выигрыш игрока A и средний проигрыш игрока B при использовании ими оптимальных стратегий. В нашем примере цена игры $D = 6$, оптимальная пара стратегий — A_2 и B_2 , т.е. (A_2, B_2) .

Если в платежной матрице A все элементы $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ не меньше соответствующих элементов строки $A_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$, а по крайней мере один строго больше, то строка A_i называется *доминирующей*, а строка A_k — *доминируемой*.

Аналогичны понятия «доминирующий столбец» и «доминируемый столбец».

Первому игроку не выгодно применять стратегии, которым соответствуют доминируемые строки; второму игроку не выгодно применять стратегии, которым соответствуют доминирующие столбцы. Поэтому при решении игры можно уменьшить размеры платежной матрицы путем удаления из нее доминирующих столбцов и доминируемых строк.

Пример 5.2. Для игры с платежной матрицей

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \\ 6 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

найти стратегии игроков и цену игры.

Решение.

Элемент $a_{32} = -1$ является наименьшим в третьей строке и наибольшим во втором столбце, т.е. он является седловой точкой. Поэтому цена игры $D = -1$, а оптимальные стратегии игроков: первого A_3 , а второго — B_2 .

Используя понятия доминируемых строк и доминирующих столбцов, задачу можно решить следующим образом.

В матрице A третья строка доминирует над второй, поэтому вторую можно изъять из платежной матрицы. В результате получится матрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

В матрице A_1 первый и третий столбцы доминируют над вторым, следовательно, их можно изъять. В результате платежная матрица принимает вид

$$A_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

В матрице A_2 вторая строка доминирует. После вычеркивания получится матрица A_3 , состоящая из одного элемента:

$$A_3 = (-1).$$

Элемент матрицы A_3 и определяет решение задачи.

Пример 5.3. Конструктор получил задание разработать новое изделие. После длительного размышления он пришел к выводу, что задание может быть выполнено в виде одного из трех возможных вариантов конструкции: K_1 , K_2 , K_3 . Кроме того, каждый вариант конструкции может быть реализован одним из трех технологических процессов: T_1 , T_2 , T_3 . Предположим для простоты, что параметры изделия во всех случаях будут практически одинаковыми, но внешний вид различен.

Если первый конструктивный вариант K_1 будет реализован с помощью первого технологического процесса T_1 , то внешний вид

устройства окажется наилучшим и оценивается экспертами в 9 баллов. Этот же конструктивный вариант при реализации вторым технологическим процессом T_2 оценивается в 6 баллов, а третьим — в 5 баллов.

Конструктивный вариант K_2 при реализации технологическим процессом T_1 приводит к оценке 8 баллов, а при втором и третьем технологических процессах оценивается одинаково — 7 баллов.

Для варианта K_3 соответствующие оценки будут 7, 5 и 8 баллов.

Конфликтная ситуация возникает из-за того, что затраты на реализацию каждого конструктивно-технологического варианта не одинаковы. Для простоты расчетов и наглядности допустим, что затраты пропорциональны оценке внешнего вида, т.е. вариант, имеющий наибольшую оценку, оказывается и самым дорогим.

Конструктору надо выбрать и представить на утверждение только один вариант. Конечно, ему хочется предложить самый эстетичный, но понимает, что если он представит такой вариант, то найдутся сторонники реализации изделия с наименьшими затратами, даже в ущерб внешнему виду. Назовем такую группу работников условно «экономистами». Для конструктора это и есть противоборствующая сторона, мешающая ему внедрить совершенное изделие.

Задача конструктора — выбрать такой конструктивный вариант, чтобы обеспечить если не самый лучший, то, во всяком случае, оптимальный, как с точки зрения внешнего вида, так и стоимости.

Решение.

Сведем исходные данные в матрицу игры (табл. 5.1)

Таблица 5.1 — Матрица игры для конструктивного и технологического вариантов

Конструкции	Технологии			$\min_j a_{ij}$	$\max_i \min_j a_{ij}$
	T_1	T_2	T_3		
K_1	9	6	5	5	—
K_2	8	7	7	7	7
K_3	7	5	8	5	—
$\max_i a_{ij}$	9	7	8		
$\min_j \max_i a_{ij}$	—	7	—		

Если конструктор выберет вариант K_1 , то «экономисты» будут настаивать на технологии T_3 , и получится изделие, внешний вид которого оценивается в 5 баллов. На вариант K_2 ответ будет T_2 или T_3 , так как оба они приводят к одинаковым затратам и дают равноценный результат, оцениваемый в 7 баллов. На K_3 реакция «экономистов» будет T_2 , дающая 5 баллов. Очевидно, что с точки зрения конструктора, преимущество имеет конструктивный вариант K_2 , так как даже при неблагоприятных обстоятельствах получится изделие, оцениваемое в 7 баллов (выигрыш 7), а может быть даже 8, если удастся уговорить «экономиста» на технологический вариант T_1 .

Встанем теперь на позицию «экономистов» (нашего разумного противника) и посмотрим, какой технологический процесс для них наиболее выгоден с точки зрения снижения затрат. Если выбрать T_1 , то при конструктивном варианте K_1 затраты окажутся наибольшими — 9. При варианте T_2 может быть вариант K_2 с затратами 7, а при T_3 конструктивный вариант K_3 , требующий затрат 8. Таким образом, для «экономистов» оптимальным является технологический процесс T_2 , поскольку он потребует меньших затрат при различных конструктивных вариантах. Следовательно, в данном примере стратегия (K_2, T_2) с выигрышем 7 наиболее выгодная сразу для обеих сторон — максимальный выигрыш K совпадает с минимальным проигрышем T .

В таблице 5.1 приведены:

— нижняя цена игры

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \{5, 7, 5\} = 7$$

— верхняя цена игры

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min_j \{9, 7, 8\} = 7.$$

Так как $\alpha = \beta = D$, т.е. нижняя цена игры равна верхней, игра имеет седловую точку, а соответствующие ей чистые стратегии являются оптимальными. Цена игры $D = 7$.

5.3 Смешанные стратегии

Однако далеко не все матрицы имеют седловую точку. Поэтому какую-либо стратегию в чистом виде, т.е. путем выбора той или иной строки и столбца, для решения игры найти не удастся. Решение можно найти, применяя смешанные стратегии, т.е. чередуя случайным образом несколько чистых стратегий. *Смешанные стратегии представляют собой математическую модель изменчивой, гибкой тактики, при которой противник или конкурент не знает, с какой обстановкой ему придется встретиться.* Смешанная стратегия состоит в том, что в ходе игры происходит случайный выбор стратегии из некоторого множества смешанных стратегий и для каждой смешанной стратегии указывается вероятность ее выбора. Стратегии, которые смешиваются для получения оптимальных стратегий, называют *полезными*.

Смешанные стратегии S_A и S_B для игроков A и B задаются значениями вероятностей, содержащихся в них полезных стратегий

$$S_A = \begin{vmatrix} p(A_1) \\ p(A_2) \\ \dots \\ p(A_m) \end{vmatrix}; \quad S_B = \begin{vmatrix} p(B_1) \\ p(B_2) \\ \dots \\ p(B_n) \end{vmatrix},$$

где $p(A_i)$ — вероятность выбора i -й стратегии игроком A , удовлетворяющая следующим условиям:

$$p(A_i) \geq 0; \quad i = \overline{1, m}; \quad \sum_{i=1}^m p(A_i) = 1; \quad (5.5)$$

где $p(B_j)$ — вероятность выбора j -й стратегии игроком B , удовлетворяющая условиям:

$$p(B_j) \geq 0; \quad j = \overline{1, n}; \quad \sum_{j=1}^n p(B_j) = 1. \quad (5.6)$$

Игрок A выбирает стратегию P_i так, чтобы максимизировать наименьший *ожидаемый* выигрыш по столбцам платежной матри-

цы, тогда игрок B выбирает стратегию q_j с целью минимизировать наибольший *ожидаемый* проигрыш по строкам.

Доказано, что у игры $m \times n$ существует такое оптимальное решение, что число полезных стратегий с каждой стороны не превосходит двух. То есть всякая матрица размерностью $m \times n$ путем выбора доминирующих стратегий может быть преобразована в матрицу 2×2 .

Вероятности чистых стратегий в смешанной для матрицы 2×2 в играх двух лиц с нулевой суммой можно определить по формулам:

$$\left. \begin{aligned} p(A_1) &= \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}; \\ p(B_1) &= \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}; \\ p(A_2) &= \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}; \\ p(B_2) &= \frac{a_{11} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}; \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Свойство оптимальности означает, что любое отступление одного из игроков от оптимальной стратегии (при условии, что второй игрок продолжает придерживаться своей оптимальной стратегии) при многократном повторении игры может только уменьшить его средний выигрыш (увеличить средний проигрыш). *Этот средний гарантированный выигрыш называют ценой игры.*

При применении смешанной стратегии выбор определенных действий игроком должен оставаться неизвестным противнику.

Математически критерий минимакса при смешанных стратегиях может быть описан следующим образом. Игрок A выбирает стратегию P_i , дающую

$$\max_{P_i} \left\{ \min \left(\sum_{i=1}^m a_{i1} \cdot P_i, \sum_{i=1}^m a_{i2} \cdot P_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{in} \cdot P_i \right) \right\}. \quad (5.8)$$

Игрок B выбирает стратегию q_j , дающую

$$\min_{q_j} \left\{ \max \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot q_j, \sum_{j=1}^n a_{2j} \cdot q_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj} \cdot q_j \right) \right\}. \quad (5.9)$$

Когда стратегии P_i^0 и q_j^0 оптимальны, то выполняется строгое равенство между максиминным ожидаемым выигрышем и минимаксным проигрышем, а результирующее значение равно оптимальному (ожидаемому) значению игры.

Этот вывод следует из *теоремы фон Неймана о минимаксе*. Теорема утверждает, что выражения (5.8), (5.9.) имеют одно и то же значение $D(P_o, Q_o)$, называемое ценой игры. Если P_i^0 и q_j^0 — оптимальные решения для обоих игроков, каждому элементу платежной матрицы a_{ij} соответствует вероятность $P_i^0 \cdot q_j^0$. Следовательно, оптимальное ожидаемое значение игры

$$D(P_o, Q_o) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot P_i^0 \cdot q_j^0. \quad (5.10)$$

Цена игры заключена между нижней и верхней ценами, т.е.

$$\alpha \leq D(P_o, Q_o) \leq \beta.$$

Доказано, что у игры $m \times n$ существует такое оптимальное решение, что число полезных стратегий с каждой стороны не превосходит минимального из чисел m и n . Известно несколько методов нахождения оптимальных стратегий в играх двух лиц с нулевой суммой. Рассмотрим один из методов — *метод линейного программирования для нахождения решения игр*.

Пусть игра $m \times n$ не имеет оптимального решения непосредственно в чистых стратегиях, т.е. отсутствует седловая точка ($\alpha \neq \beta$). Оптимальное решение необходимо искать в области смешанных стратегий. Предположим, что все m стратегий игрока A полезные. Определим вероятности их применения в смешанной оптимальной стратегии. Обозначим эти вероятности через P_i , $i = \overline{1, m}$, а цену игры

— через D . Оптимальная смешанная стратегия игрока A определяется из условия (5. 8):

$$\max \left\{ \min \left(\sum_{i=1}^m a_{i1} \cdot P_i, \sum_{i=1}^m a_{i2} \cdot P_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{in} \cdot P_i \right) \right\}.$$

Пусть

$$D = \min \left(\sum_{i=1}^m a_{i1} \cdot P_i, \sum_{i=1}^m a_{i2} \cdot P_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{in} \cdot P_i \right). \quad (5.11)$$

Поскольку при оптимальной стратегии средний выигрыш не меньше D при любой стратегии противника, то справедлива система n неравенств:

$$\begin{aligned} P_1 \cdot a_{11} + P_2 \cdot a_{21} + \dots + P_m \cdot a_{m1} &\geq D; \\ P_1 \cdot a_{12} + P_2 \cdot a_{22} + \dots + P_m \cdot a_{m2} &\geq D; \\ P_1 \cdot a_{1n} + P_2 \cdot a_{2n} + \dots + P_m \cdot a_{mn} &\geq D \end{aligned} \quad (5.12)$$

или

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot P_i \geq D, \quad j=\overline{1, n} \quad (5.13)$$

Тогда задача отыскания оптимальной смешанной стратегии игрока A может быть сформулирована в виде линейного программирования.

Для этого необходимо максимизировать $Z = D$ при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot P_i &\geq D, \quad j=\overline{1, n} \\ \sum_{i=1}^m P_i &= 1, \quad P_i \geq 0, \quad j=\overline{1, m}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Введем новые неизвестные:

$$x_1 = \frac{P_1}{D}, \quad x_2 = \frac{P_2}{D}, \quad \dots, \quad x_m = \frac{P_m}{D}.$$

Чтобы исключить возможность деления на нуль, увеличим цену игры на положительное число C . Для этого достаточно ко всем элементам матрицы $\|a_{ij}\|$ прибавить одно и то же положительное число C , при этом все элементы a_{ij} сделать положительными. Следует отметить, что эта операция не меняет искомым оптимальных стратегий.

Поскольку $\sum_{i=1}^m P_i = 1$, то $\sum_{i=1}^m x_i = \frac{1}{D}$.

Разделим левую и правую части неравенств (5.13.) и (5.14.) на D получим:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m &\geq 1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m &\geq 1; \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m &\geq 1; \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = \frac{1}{D}. \tag{5.16}$$

В силу того, что

$$\max D = \min \frac{1}{D} = \min \{x_1 + x_2 + \dots + x_m\},$$

задача принимает вид

$$Z = x_1 + x_2 + \dots + x_m \tag{5.17}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot x_i \geq 1, \quad j = \overline{1, n}. \tag{5.18}$$

Для игрока B оптимальная стратегия определяется из условия (5.9):

$$\min_{q_j} \left\{ \max \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot q_j, \sum_{j=1}^n a_{2j} \cdot q_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj} \cdot q_j, \right) \right\}$$

при ограничениях

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1. \quad (5.19)$$

Эта задача записывается как симметричная двойственная задача линейного программирования к задаче игрока A (5.17), (5.18): максимизировать

$$L = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \quad (5.20)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot Y_j \leq 1; \quad Y_i \geq 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (5.21)$$

$$\text{где} \quad L = \frac{1}{D}, \quad Y_j = \frac{q_j}{D}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Задачи игроков A и B решают обычным симплекс-методом.

Решение игры обладает одним важным свойством: если игрок A использует свою оптимальную стратегию, а игрок B смешивает свои стратегии в любых пропорциях, то средний выигрыш игрока A не уменьшается.

В матрице игры могут быть такие ситуации, когда игрок A может получить лучший для себя выигрыш, сменив одну стратегию на другую. Такие ситуации называют *неустойчивыми*.

Неустойчивость какой-либо ситуации проявляется в том, что в случае ее возникновения ей угрожает распад, который обуславливается возможностями одного из игроков получить для себя лучший результат путем одностороннего изменения своей стратегии.

Если ни у одного из игроков нет оснований отступить от выбранных действий односторонне изменив свою стратегию, то такие устойчивые ситуации в теории игр называют *ситуациями равнове-*

сия или равновесными по Нэшу (именем американского математика Джона Нэша).

Равновесные ситуации можно рассматривать как *оптимальные совместные решения*, причем оптимальность проявляется в отношении ее стойкости. В ситуации равновесия каждый из игроков имеет выигрыш, не меньший, чем «свой» максимин. Однако компоненты ситуаций равновесия могут не составить снова ситуацию равновесия.

Пример 5.4. Рассмотрим игру 3×4 .

$$M =$$

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\min_j a_{ij}$	$\max_i \min_j a_{ij}$
A_1	4	3	2	-5	-5	—
A_2	-2	5	-1	4	-2	-2
A_3	-3	2	-3	6	-3	—
$\max_i$	4	5	2	6		
$\min_j \max_i$	—	—	2	—		

Нижняя цена игры равна максимуму $\alpha = -2$, верхняя цена игры равна минимаксу $\beta = 2$. Так как $\alpha \neq \beta$, то седловая точка игры отсутствует, задача должна решаться в смешанных стратегиях.

Нижняя цена игры — число отрицательное ($\alpha = -2$), поэтому, возможно, значение цены игры D не будет положительным. Число C , которое необходимо прибавить ко всем элементам матрицы, должно быть не меньше 2. Пусть $C = 6$.

Тогда матрица примет вид

$$M_1 =$$

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\min_j a_{ij}$	$\max_i \min_j a_{ij}$
A_1	10	9	8	1	1	—
A_2	4	11	5	10	4	4
A_3	3	8	3	12	3	—
$\max_i$	10	11	8	12		
$\min_j \max_i$	—	—	8	—		

Задача игрока B записывается в форме задачи линейного программирования

$$L_{\max} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 10Y_1 + 9Y_2 + 8Y_3 + Y_4 \leq 1 \\ 4Y_1 + 11Y_2 + 5Y_3 + 10Y_4 \leq 1 \\ 3Y_1 + 8Y_2 + 3Y_3 + 12Y_4 \leq 1; \end{cases} \quad Y_j \geq 0; \quad j = \overline{1, 4}$$

Решая задачу симплекс-методом, получим:

$$L_{\max} = 0,16; \quad Y_1 = 0; \quad Y_2 = 0; \quad Y_3 = 0,12; \quad Y_4 = 0,04.$$

Таким образом, решением исходной задачи будет следующее:

$$D = \frac{1}{L} \quad \text{---} \quad C = \frac{1}{0,16} \quad \text{---} \quad 6 = 0,25;$$

$$q_1^0 = \frac{Y_1}{L} = \frac{0}{0,16} = 0;$$

$$q_2^0 = \frac{Y_2}{L} = \frac{0}{0,16} = 0;$$

$$q_3^0 = \frac{Y_3}{L} = \frac{0,12}{0,16} = 0,75;$$

$$q_4^0 = \frac{Y_4}{L} = \frac{0,04}{0,16} = 0,25.$$

В нашем примере первая и вторая стратегии игрока B бесполезны, так как $q_1^0 = q_2^0 = 0$. При случайном чередовании третьей и четвертой стратегий с относительными частотами $q_3^0 = 0,75$ и $q_4^0 = 0,25$ соответственно игроку B обеспечен средний выигрыш в размере $D = 0,25$.

Оптимальные стратегии игрока A могут быть получены из решения двойственной задачи или следующим образом.

В матрице M_I нижняя цена игры $\alpha = 4$, верхняя цена игры равна минимаксу $\beta = 8$. Значение игры (цена) $D(M_I)$ для игрока A будет в диапазоне

$$\alpha = 4 < D(M_I) < \beta = 8.$$

Всякая матрица игры размерностью $m \times n$, может быть приведена к матрице 2×2 . При этом свойство матрицы не нарушаются. Исключая в матрице игры M_I доминируемую строку и доминирующий столбец соответственно для игроков A и B , получим матрицу 2×2 .

	B_3	B_4
A_1	8	1
A_2	5	10

Вероятности наличия чистых стратегий в смешанных определяем по формулам (5.7):

$$p(A_1) = \frac{10 - 5}{(8 + 10) - (1 + 5)} = \frac{5}{12} \approx 0,42; \quad p(A_2) = \frac{8 - 1}{12} = \frac{7}{12} \approx 0,58;$$

$$p(B_3) = \frac{10 - 1}{12} = \frac{9}{12} = 0,75; \quad p(B_4) = \frac{8 - 5}{12} = \frac{3}{12} = 0,25.$$

Оптимальные смешанные стратегии S_A и S_B заданные вероятностями входящих в них полезных стратегий

$$S(A) = \begin{vmatrix} 5/12 \\ 7/12 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,42 \\ 0,58 \\ 0 \end{vmatrix} \leftarrow \max \quad S(B) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 9/12 \\ 3/12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,75 \\ 0,25 \end{vmatrix} \leftarrow \max$$

Условия (5.5) и (5.6)

$$\sum_{i=1}^m p(A_i) = 0,42 + 0,58 = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^n p(B_j) = 0,75 + 0,25 = 1$$

выполняются.

Для третьей и четвертой стратегий игрока B получены такие же относительные частоты $p(B_3) = q_3^0 = 0,75$ и $p(B_4) = q_4^0 = 0,25$.

Цену игры (средний платеж) смешанной стратегии определим графически.

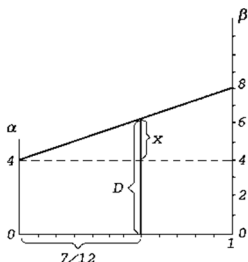
$$\frac{x}{8-4} = \frac{7}{12 \cdot 1}; \quad x = \frac{4 \cdot 7}{12} \approx 2,33.$$

Цена игры

$$D(A_2) = (4 + x) - C = (4 + 2,33) - 6 = 0,33.$$

Таким образом, при случайном чередовании первой и второй стратегии A_1 и A_2 с относительными частотами

$p(A_2) = 0,58$ и $p(A_1) = 0,42$ игроку A гарантировано обеспечен средний проигрыш в размере не более $D(A_i) = 0,33$.



Пример 5.5. Для матрицы M примера 4.2 (замена оборудования) найти оптимальную стратегию поведения предприятия и определить цену игры.

Решение.

Так как задана матрица затрат предприятия (игрок A) на восстановление оборудования, представим ее в виде

	B_1	B_2	B_3
A_1	-1	-5	-7
A_2	-3	-2	-6
A_3	-5	-4	-3

Ко всем элементам матрицы добавим $M =$ положительное число $C = 10$.

	B_1	B_2	B_3	$\min_j a_{ij}$	$\max \min a_{ij}$
$M_I = A_1$	9	5	3	3	—
A_2	7	8	4	4	—
A_3	5	6	7	5	5
$\max_i$	9	8	7		
$\min_j$	—	—	7		
$\max_i$					

Нижняя цена игры $\alpha = 5$

Верхняя цена игры $\beta = 7$.

$$\alpha = 5 \neq \beta = 7.$$

Седловая точка в заданной платежной матрице отсутствует. Игра не имеет решения в чистых стратегиях. Приведем матрицу M_I к размерности 2×2 . Получим

	B₂	B₃
A₂	8	4
A₃	6	7

Вероятности наличия чистых стратегий в смешанных определяем по формулам (5.7)

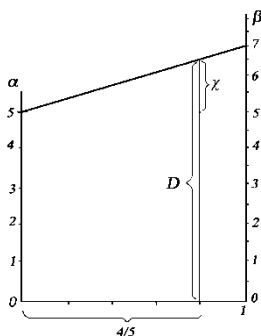
$$p(A_2) = \frac{7-6}{(8-7)-(4+6)} = \frac{1}{5}; \quad p(A_3) = \frac{8-4}{5} = \frac{4}{5};$$

$$p(B_2) = \frac{7-4}{5} = \frac{3}{5}; \quad p(B_3) = \frac{8-6}{5} = \frac{2}{5};$$

$$\sum_{i=1}^m p(A_i) = 0 + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1; \quad \sum_{j=1}^n p(B_j) = 0 + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1.$$

Оптимальные смешанные стратегии S_A и S_B , заданные вероятностями входящих в них чистых стратегий

$$S(A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1/5 \\ 4/5 \end{vmatrix} \leftarrow \max; \quad S(B) = \begin{vmatrix} 0 \\ 3/5 \\ 2/5 \end{vmatrix} \leftarrow \max.$$



Определяем цену игры смешанной стратегии

$$\frac{x}{(7-5)} = \frac{4}{5 \cdot 1}; \quad x = \frac{4 \cdot 2}{5} = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$\text{Цена игры } D(A_3) = (5 + 1,6) - 10 = -3,4.$$

Выводы.

1. Таким образом, предприятию, если на основе прошлого опыта не известны прогнозируемые вероятности состояния оборудования в дальнейшей эксплуатации, следует воспользоваться третьей стратегией — заменой оборудования.

2. При этом затраты на замену оборудования новым гарантировано составят не более 3,4 ед.

3. Полученные результаты согласуются с более «перестраховочным» критерием Вальда (5,0 ед.) и равновероятным критерием Лапласа (4,33 ед., С. 49)

5.4. Выбор оптимальной стратегии в условиях неопределенности

Подведем некоторые итоги:

1. Принятие решения в конфликтной ситуации связано с различием интересов сторон.

2. Принятие решений в конфликтной ситуации затрудняется из-за неопределенности в поведении противника. Противник стремится предпринять наименее выгодные для нас действия, с тем чтобы обеспечить себе наибольший успех. Мы не знаем, в какой мере наш противник умеет оценивать обстановку и возможные последствия и, в частности, как он оценивает наши намерения и возможности. Мы не можем точно предсказать действия противника, равно как и он не может точно предсказать наши действия. И тем не менее как нам, так и ему приходится принимать вполне определенные рациональные решения.

3. Необходимость обоснования оптимальных решений, принимаемых в тех или иных конфликтных ситуациях, привела к возникновению специального направления в современной математике — теории игр. Под термином «игра» понимается упрощенная математическая модель рассматриваемой конфликтной ситуации. В отличие от реального конфликта игра ведется по определенным правилам, которые четко определяют права и обязанности участников игры, а также исход игры.

Задолго до появления теории игр широко использовались подобные упрощенные модели конфликтов — игры в буквальном смысле слова: шахматы, шашки, домино, карточные игры и т.д. Собственно говоря, отсюда и происходит как название самой теории, так и различные термины, используемые в ней. Так, конфликтующие стороны, называют «игроками», одну реализацию игры «партией», выбор игроком того или иного действия (в пределах правил) «ходом» и т.д. Различают два вида ходов — личные и случайные. Личный ход предполагает сознательный выбор игроком того или иного действия, разрешенного правилами игры. Случайный ход не зависит от воли игрока — он может быть определен по результату бросания монеты или игральной кости, вынимания карты из колоды и т.п. Игры, состоящие только из случайных ходов, называют *азартными*. Характерный пример — игра в лото. Игры, в которых имеются личные ходы, называются *стратегическими*. Существуют стратегические игры, состоящие только из личных ходов (например, шахматы). Существуют также стратегические игры, состоящие как из личных, так и случайных ходов (например, карточные игры). В играх с личными и случайными ходами неопределенность выступает в двух видах:

- в виде неопределенности результата случайных ходов;
- в виде неопределенности поведения противника в его личных ходах.

4. *Задача теории игр* — определить такую стратегию игрока, при которой его шансы на выигрыш оказались бы наибольшими. В основе поиска оптимальных стратегий лежит следующее основное положение. Считается, что противник также разумен и активен, как и сам игрок, и предпринимает все меры для того, чтобы достичь успеха. Разумеется, на практике это не всегда выполняется. Часто наши действия в реальном конфликте оказываются оптимальными не тогда, когда мы исходим из наиболее разумного поведения противника, а тогда, когда нам удастся угадать, в чем противник оказывается глупым, и удастся воспользоваться этой «глупостью». При

этом мы рискуем. Известно, как рискованно рассчитывать на глупость противника.

Теория игр не учитывает элементов риска. Она выявляет лишь наиболее осторожные, «перестраховочные» варианты поведения в данной ситуации. Можно сказать, что теория игр дает нам мудрые советы. Учитывая эти советы, мы затем принимаем на практике те или иные решения, часто идя сознательно на некоторый риск. Как пишет Е. С. Вентцель в своей книге «Исследование операций»: «Теория игр ценна прежде всего самой постановкой задач, которая учит не забывать о том, что противник тоже мыслит, и учитывать его возможные хитрости и уловки. Пусть рекомендации, вытекающие из игрового подхода, не всегда определены и не всегда осуществимы — но все же полезно, выбирая решение, ориентироваться и на игровую модель. Не надо только выводы, вытекающие из этой модели, считать окончательными и непререкаемыми».

5. Возможные варианты и исходы игры можно свести в прямоугольную таблицу, называемую *платежной матрицей*. В теории игр наиболее исследованы конечные парные игры с нулевой суммой. Игра называется *парной*, если в ней участвует два игрока. Игра называется *конечной*, если у каждого игрока есть конечное число стратегий, т.е. конечное число вариантов поведения. Делая личный ход, игрок следует одной из стратегий. Игра с нулевой суммой есть игра, в которой выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

6. Стратегии игр без знания вероятностей риска могут быть различными. Например:

а) *Стратегия азартного игрока (или оптимиста) $\max \max (a_{ij})$* . В этой стратегии игрок рискует, выбирает из платежной матрицы максимальный элемент сначала по строкам i , затем из выбранных максимальных выбирает опять максимальный. По месту положения выбранного максимального элемента определяется, например, i — й вариант принятия решения. Недостаток: если альтернативы выбранному максимальному элементу наихудшие по сравнению с другими элементами матрицы, то игрок в случае неудачи может потерять очень много;

б) *Стратегия консервативного игрока (стратегия пессимиста)* $\min \max (a_{ij})$ или $\max \min (a_{ij})$. В этом случае игрок *страхует* себя от наихудших исходов, сознательно уходит от наихудшего максимального элемента матрицы (если максимальный элемент в игре считается наихудшим) или, наоборот, от наихудшего минимального элемента (если таковой считается наихудшим). Для этого необходимо сначала, например, выбрать в строках матрицы максимальные (или минимальные) элементы, а затем из выбранных максимальных (минимальных) выбрать один минимальный (максимальный). По месту нахождения выбранного (i или j) элемента определить вариант решения;

с) *Стратегия Гурвица:*

$$\alpha \cdot \max \max a_{ij} + (1 - \alpha) \cdot \max \min a_{ij},$$

или

$$\max \left(\alpha \max a_{ij} + (1 - \alpha) \min a_{ij} \right).$$

Это суммарная комбинация стратегии оптимиста и стратегии пессимиста. Игрок выбирает для себя, на сколько рисковать или страховать в игре. Предпочтение он реализует через назначение коэффициента значимости (доверия) α , который может принимать значения от 0 до 1. Сначала для каждой строки матрицы определяются максимальный и минимальный элементы, затем они складываются с назначенными коэффициентами значимости (также для каждой строки), из рассчитанных значений выбирается максимальное, соответствующее i -й строке. По нему и определяется i -й вариант решения. Аналогично процедуру можно повторить и для столбцов. Недостаток стратегии — субъективность определения коэффициента значимости (доверия);

d) *стратегия Лапласа.*

7. В игре без знания вероятностей риска с седловой точкой можно прийти к взаимному компромиссу. Например, в игре 3x3 платежная матрица имеет вид:

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Здесь как максимальный $\max \min (a_{ij})$, так и минимаксный $\min \max (a_{ij})$ выигрыши равны 4. Иными словами, в данной игре нижняя и верхняя цена игры совпадают, обе равны 4. Выигрыш 4 одновременно и максимальный из минимальных выигрышей для стратегий A_1, A_2, A_3 и минимальный из максимальных выигрышей для стратегий B_1, B_2, B_3 .

Таким образом, каждый из игроков должен придерживаться максиминной (минимаксной) стратегии. Эти стратегии являются оптимальными в игре с седловой точкой. Любое отклонение от них будет невыгодно для игрока, допустившего отклонение.

8) Если же игра не имеет седловой точки, то ни одна из стратегий A_i или B_j не является оптимальной. В этом случае необходимо случайное изменение стратегии. Рассмотрим матрицу:

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 8 & 3 & 10 \\ 3 & 10 & 1 \\ 10 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

Допустим, что мы и наш противник многократно играем в игру, матрица которой показана выше. Если мы выберем определенную стратегию, например максиминную стратегию A_1 , и будем придерживаться ее от игры к игре, то противник, поняв это. Будет выбирать каждый раз стратегию B_2 , в результате чего наш выигрыш не превысит нижней цены игры, т.е. будет равен 3. Если однако мы внезапно (для противника) сменим стратегию A_1 на стратегию A_2 , то получим выигрыш 10. Разгадав нашу новую стратегию (если, конечно, мы начнем ее придерживаться в дальнейшем), противник тут же сменит стратегию B_2 на стратегию B_3 , уменьшив наш выигрыш

до 1. И так далее. Здесь проявляется общее правило для игр без седловой точки: игрок, играющий по определенной (детерминированной) стратегии, оказывается в более худшем положении по сравнению с игроком, который меняет стратегию случайным образом.

Впрочем, случайные изменения стратегии надо делать не как попало, а с расчетом. Рассмотрим пример. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_m$ — возможные стратегии игрока A

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 & \dots & B_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Для получения лучшего эффекта необходимо использовать все или некоторые из этих стратегий случайным образом, но не с одинаковыми, а с разными (специально вычисленными) вероятностями. Пусть стратегия A_1 используется с вероятностью p_1 , стратегия A_2 с вероятностью p_2 и т.д. Говорят, что игрок A применяет смешанную стратегию $S_A(p_1, p_2, \dots, p_m)$. В отличие от смешанных стратегий S_A стратегии A называют чистыми. При надлежащем подборе вероятностей p_j смешанная стратегия может оказаться оптимальной. При этом выигрыш игрока A будет не меньше некоторого значения D , называемого ценой игры. Это значение больше нижней цены игры, но меньше верхней.

Аналогичным образом должен вести себя игрок B . Его оптимальная стратегия также есть некоторая смешанная стратегия. Обозначим ее как $S_B(q_1, q_2, \dots, q_n)$, где q_i — специально подобранные вероятности, с которыми игрок B использует стратегии B_j . При выборе игроком B оптимальной смешанной стратегии выигрыш игрока A будет не больше цены игры D .

Как же найти оптимальную смешанную стратегию?

Обозначим через $S_A(p_1, \dots, p_m)$ оптимальную смешанную стратегию игрока A . Требуется найти вероятности $p_1, p_2, \dots, p_m$ и определить цену игры D при условии, что известна платежная матрица игры. Допустим, что игрок B выбирает чистую стратегию B_j . Тогда средний выигрыш игрока A будет равен

$$a_{11} \times p_1 + a_{21} \times p_2 + \dots + a_{m1} \times p_m.$$

Этот выигрыш должен быть не меньше цены игры D , следовательно,

$$a_{11} \times p_1 + a_{21} \times p_2 + \dots + a_{m1} \times p_m \geq D.$$

Если игрок B выберет стратегию B_2 , то и в этом случае средний выигрыш игрока A должен быть не меньше цены игры D . Следовательно,

$$a_{12} \times p_1 + a_{22} \times p_2 + \dots + a_{m2} \times p_m > D.$$

Какую бы стратегию ни выбрал игрок B , выигрыш игрока A всегда должен быть не меньше цены игры D . Поэтому мы можем записать следующую систему из n неравенств (напомним, что n — число чистых стратегий игрока B):

[illegible]

При этом $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$.

Введя обозначения $x_1 = p_1/D$, $x_2 = p_2/D$, $x_m = p_m/D$, перепи-

шем неравенства в виде:

[illegible]

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1/D.$$

Желательно, чтобы цена игры D была как можно больше, следовательно, $1/D$ должна быть как можно меньше. Таким образом, поиск оптимальной смешанной стратегии свелся к решению следующей математической задачи: надо найти неотрицательные величины $x_1, x_2, \dots, x_m$, такие, чтобы они удовлетворяли показанным неравенствам и при этом обращали в минимум сумму $x_1 + x_2 + \dots + x_m$.

9. Принимая решения в условиях неопределенности и риска, необходимо в первую очередь определить для себя:

— можно ли оценить вероятностно возможные ходы противной стороны;

— если риск оценить вероятностно нельзя (или риск равензначен, а условия неопределенны), то необходимо попытаться найти седловую точку и прийти таким образом к взаимному компромиссу;

— если и седловой точки в платежной матрице нет, то необходимо применять оптимальную смешанную стратегию (наиболее выгодно, когда игра проходит многократно) или выбрать одну из чисто игровых стратегий: стратегию азартного игрока, стратегию консервативного игрока, стратегию Гурвица или стратегию Лапласа.

Вопросы для контроля

1. В чем заключается сущность, назначение и возможности теории игр?
2. Как можно определить игру, какие правила она устанавливает и в каких ситуациях?
3. Какую модель представляет собой игра?
4. Что понимают под принципом гарантированного результата?
5. Какие ходы игроков называют личными и какие случайными?
6. По каким признакам классифицируют игры?
7. Какие сведения содержит платежная матрица?
8. Что представляет собой седловая точка матрицы игры?

9. Какую стратегию игрока называют чистой?
10. Что понимают под ценой игры?
11. Каким образом определяют верхнюю и нижнюю цену игры?
12. В чем заключается методика определения максиминной и минимаксной стратегии?
13. Какую стратегию называют доминирующей и какую доминируемой?
14. Что представляет из себя смешанная стратегия и в каких ситуациях она имеет место?
15. Каким образом задаются вероятности игроков в смешанной стратегии?
16. В чем заключается метод линейного программирования для нахождения решения игр?
17. Какие ситуации называют равновесными по Нэшу?

Задания для самостоятельной подготовки

Варианты заданий к разделу 5 «Оптимизация в условиях неопределенности»

Задача 5.1.

Найдите седловую точку и значение цены игры для каждой из двух следующих игр. Платежные матрицы имеют вид:

$$\overline{A} = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 & 8 \\ 8 & 9 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \overline{B} = \|b_{ij}\| = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -4 & 6 \\ -5 & -6 & -7 & -1 \\ 5 & 10 & -3 & -5 \\ 7 & 2 & -10 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 5.2

Определите области значения x , для которых стратегии A_2 и B_2 будут оптимальными в следующих играх:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & x & 9 \\ 7 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 10 & x & 6 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Задача 5.3

В заданных матрицах игр проверить наличие чистых стратегий. Найдите две оптимальные смешанные стратегии, дающие стороне A максимально возможный для нее средний выигрыш, а стороне B — минимально возможный для нее средний проигрыш. Определить цену игры.

$$5.3.1 \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$5.3.2 \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5.3.3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5.3.4 \quad \begin{bmatrix} 5 & 11 & 5 & 5 \\ 6 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$5.3.5 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$5.3.6 \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$5.3.7 \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5.3.8 \quad \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5.3.9 \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 22 & 5 \end{bmatrix}$$

$$5.3.10 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5.3.11 \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$5.3.12 \quad \begin{bmatrix} 10 & 5 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 9 & 10 \\ 6 & 14 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$5.3.13 \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5.3.14 \quad \begin{bmatrix} 18 & 2 & 9 & 7 \\ 30 & 4 & 1 & 55 \\ 6 & 4 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$5.3.15 \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$5.3.16 \quad \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$5.3.17 \quad \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 17 & 81 \\ 9 & 15 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$5.3.18 \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 4 \\ 3 & 7 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$5.3.19 \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 9 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$5.3.20 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 8 & 6 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$5.3.21 \quad \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$5.3.22 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 9 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 9 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$5.3.23 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 7 \\ 3 & 40 & 15 & 5 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \\ 24 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5.3.24 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5.3.25 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 8 & 2 & 10 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$5.3.26 \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 8 & 10 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 7 & 3 & 7 & 9 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$5.3.27 \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$5.3.28 \quad \begin{bmatrix} 8 & 12 & 4 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 15 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 12 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5.3.29. \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 8 & 10 \\ 10 & 3 & 2 & 1 & 15 \\ 4 & 10 & 5 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$5.3.30 \quad \begin{matrix} \infty \\ a \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$$

Задача 5.4

Определите, будут ли значения следующих игр больше, меньше или равны нулю:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 9 & 6 \\ -5 & 3 & -2 & -4 \\ 8 & 5 & -3 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 & -3 \\ 5 & 9 & 1 & 0 \\ 5 & -8 & -3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 5 & 7 \\ -3 & 9 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \\ 8 & -1 & 9 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix};$$

Задача 5.5

Решите игру с платежной матрицей

$$5.5.1 \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$5.5.2 \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix};$$

$$5.5.3 \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5.5.4 \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix};$$

$$5.5.5 \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5.5.6 \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix};$$

$$5.5.7 \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$5.5.8 \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & 8 & 1 \\ 6 & -1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$5.5.9 \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$5.5.10 \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5.5.11 \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5.5.12 \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5.5.13 \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5.5.14 \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$5.5.15 \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Задача 5.6

Мелитопольский станкостроительный завод им. 23 Октября выпускает токарно-револьверные автоматы (ТРА) на базе модели 1Б118 двух классов:

1) высший класс — станки повышенной точности 1М118П, оснащенные дополнительными устройствами, значительно расширяющими технологические возможности ТРА;

2) серийная модель 1М118, стоимость которой существенно ниже стоимости модели 1М118П.

Рынком сбыта ТРА традиционно владеют фирмы «Index» и «Traub». Для развития производства и эффективной работы станкозаводу необходимо «прорваться» на рынок сбыта станков, занятый всемирно известными фирмами. Прибыль завода зависит от объема выпускаемых станков, их номенклатуры и возможной реализации в следующих регионах:

- | | |
|----------------|-----------------------------|
| 1) Украина, | 4) Страны Балтии, |
| 2) Россия, | 5) Страны восточной Европы. |
| 3) Белоруссия, | |

Для станкозавода эта прибыль в зависимости от региона сбыта и класса станков задана в таблице вариантов заданий.

Определить:

1. Оптимальную стратегию поведения станкозавода (номенклатуру и соотношение объемов выпуска станков различных классов, рынки сбыта).

2. Дать экономическую интерпретацию (гарантированную прибыль) оптимальной стратегии станкозавода.

Варианты заданий к задаче 5.6

Номер варианта	Класс станка	Прибыль				
		1	2	3	4	5
1	1	4	8	6	3	5
	2	7	4	9	11	12
2	1	7	3	5	1	4
	2	8	12	7	11	9
3	1	1	7	2	3	8
	2	4	11	9	6	2
4	1	2	8	3	4	9
	2	5	12	10	7	3
5	1	2	8	10	11	1
	2	7	3	4	8	9
6	1	5	1	4	6	1
	2	2	10	7	8	5
7	1	8	1	2	3	11
	2	0	9	6	7	4
8	1	11	7	5	3	9
	2	5	10	4	6	8
9	1	4	7	5	3	4
	2	5	10	4	6	8
10	1	8	4	7	9	4
	2	7	10	8	6	11
11	1	6	9	7	5	4
	2	7	3	6	8	10
12	1	6	2	5	7	2
	2	5	10	6	4	9
13	1	6	2	4	0	3
	2	7	11	6	10	8
14	1	8	12	9	5	8
	2	1	3	8	3	6
15	1	3	9	4	5	10
	2	6	13	11	8	4
16	1	3	9	11	12	2
	2	8	4	5	9	10
17	1	9	2	3	4	12
	2	1	10	7	8	5
18	1	6	7	5	3	9
	2	12	10	4	6	8
19	1	10	6	4	2	8
	2	4	9	3	5	7
20	1	7	10	8	6	15
	2	8	4	7	9	11

Задача 5.7

Машиностроительное предприятие собирается начать производство фильтров для горно-шахтного оборудования. Оно намерено завоевать часть рынка сбыта, несмотря на острую конкуренцию со стороны других предприятий, уже выпускающих аналогичные конструкции. Чтобы получить необходимую прибыль, предприятие должно четко сформулировать свою стратегию независимо от возможных действий конкурентов. После сбора необходимой информации и ее анализа предприятием установлено, что возможны шесть вариантов стратегии: первые три — его возможные действия, вторые три — действия конкурентов. В итоге удалось разработать матрицу (см. таблицу) возможных объемов реализации изделий (в тыс. шт.) в зависимости от соотношения стратегий.

Определить:

1. Имеется ли седловая точка в платежной матрице? Если да, то объяснить поведение предприятия и его конкурентов.
2. Найти наилучшую стратегию предприятия и гарантированный объем реализации фильтров.
3. Как поступят конкуренты при наличии у них такой же информации?

Варианты заданий к задаче 5.7

Номер варианта	Номер стратегии	4	5	6
1	1	6	4	9
	2	9	3	2
	3	7	1	5
2	1	3	1	4
	2	2	1	1
	3	2	3	1
3	1	7	4	9
	2	10	5	8
	3	4	6	2
4	1	5	7	3
	2	9	6	11
	3	12	7	10
5	1	6	8	4
	2	8	3	6
	3	11	4	9

Продолжение вариантов заданий к задаче 5.7

Номер варианта	Номер стратегии	4	5	6
6	1	3	10	6
	2	11	4	9
	3	4	12	10
7	1	11	6	7
	2	4	9	2
	3	6	1	10
8	1	6	3	9
	2	7	8	4
	3	2	3	9
9	1	7	6	13
	2	4	8	12
	3	9	1	3
10	1	7	6	2
	2	4	7	11
	3	12	10	4

Задача 5.8

Две конкурирующие фирмы выпускают автомобили. «Старая» фирма владеет рынком сбыта автомобилей, представляющим 5 регионов:

1. Западная Европа.
2. Восточная Европа.
3. Южная Америка.
4. Ближний Восток.
5. Африка.

Фирма «новичок», выпускающая два класса автомобилей: 1-высший класс и 2-«народный» автомобиль; «прорывается» на рынок сбыта, который занят «старой» фирмой. Прибыль фирмы зависит от объема выпускаемых автомобилей и их возможной реализации в различных регионах рынка сбыта. Для фирмы «новичка» эта прибыль в зависимости от региона и класса автомобиля задана в таблице вариантов заданий.

Определить:

1. Оптимальную стратегию поведения фирмы «новичка» (номенклатуру и соотношение объемов выпуска автомобилей различных классов, рынки сбыта).

2. Дать экономическую интерпретацию (гарантированную прибыль) оптимальной стратегии фирмы «новичка», объяснить поведение обеих фирм.

Варианты заданий к задаче 5.8

Номер варианта	Класс автомобиля	Прибыль				
		1	2	3	4	5
1	1	3	5	1	4	6
	2	7	4	9	5	3
2	1	10	5	8	6	4
	2	4	6	2	5	7
3	1	5	7	3	6	8
	2	9	6	11	7	5
4	1	12	7	10	8	6
	2	6	8	4	7	9
5	1	8	3	6	4	2
	2	11	4	9	3	5
6	1	3	10	6	4	2
	2	11	4	9	3	5
7	1	11	6	7	5	3
	2	4	12	10	4	6
8	1	4	9	2	3	4
	2	6	1	10	7	8
9	1	6	3	9	11	12
	2	7	8	4	5	9
10	1	2	3	9	4	5
	2	7	6	13	11	8

Задача 5.9

Предлагается три варианта конструкции нового изделия K_1 , K_2 , K_3 . Изготовить их можно с помощью одного из трех альтернативных технологических процессов: T_1 , T_2 , T_3 . Экспертами были оценены по десятибалльной шкале потребительские свойства конструкции i , изготовленной с помощью технологического процесса j . Конструкция, имеющая больший балл качества, соответственно обладает и большей себестоимостью.

$$\begin{matrix} & T_1 & T_2 & T_3 \\ \begin{matrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

где q_{ij} — балл качества и себестоимости конструкции.

Из-за ограниченности финансовых ресурсов возник конфликт между «экономистами» и «конструкторами».

Руководству предприятия требуется принять компромиссное решение в выборе конструкции, если таковое возможно. В случае невозможности компромисса попытаться обосновать выбор одного из критериев принятия решения.

Указания к решению:

а) определить, имеется ли седловая точка матрицы;

б) если седловая точка имеется, то компромисс возможен; если седловой точки нет, то необходимо принять решение по одному из игровых критериев: по правилу оптимиста, правилу Гурвица или правилу Лапласа;

в) обосновать выбор критерия.

Варианты заданий к задаче 5.9

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
Балл q_{11}	9	6	8	6	5	6	5	7
Балл q_{12}	8	7	8	8	7	7	8	9
Балл q_{13}	7	9	7	9	6	5	6	5
Балл q_{21}	8	8	8	7	6	7	4	7
Балл q_{22}	9	7	9	6	5	9	9	8
Балл q_{23}	8	9	8	8	8	5	6	7
Балл q_{31}	7	6	7	9	6	6	7	5
Балл q_{32}	9	9	7	5	7	9	8	4
Балл q_{33}	8	9	9	5	6	6	6	9

Номер варианта	9	10	11	12	13	14	15	16
Балл q_{11}	8	5	9	5	8	6	8	7
Балл q_{12}	5	3	6	7	7	8	5	6
Балл q_{13}	6	4	7	9	5	5	4	6
Балл q_{21}	8	8	8	7	9	4	7	6
Балл q_{22}	9	7	9	6	5	6	5	8
Балл q_{23}	8	9	8	8	5	7	4	8
Балл q_{31}	7	6	7	6	3	5	5	5
Балл q_{32}	9	9	7	5	6	4	7	9
Балл q_{33}	8	9	9	7	7	8	6	4

Номер варианта	17	18	19	20	21	22	23	24
Балл q_{11}	4	5	7	6	6	7	8	9
Балл q_{12}	8	7	8	8	6	5	7	7
Балл q_{13}	5	8	5	9	8	8	5	4
Балл q_{21}	8	8	8	7	7	7	6	6
Балл q_{22}	9	7	9	6	5	8	7	5
Балл q_{23}	8	9	8	8	5	8	8	6
Балл q_{31}	7	6	7	6	7	5	7	9
Балл q_{32}	9	9	7	5	9	8	8	8
Балл q_{33}	8	9	9	4	6	7	6	6

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики : учебн. пособ. / Ю. М. Коршунов. — М. : Энергоатомиздат, 1987. — 496 с.
2. Макаров И. М. Теория выбора и принятия решений / И. М. Макаров [и др.]. — М. : Наука, 1982. — 328 с.
3. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. / В. П. Сигорский. — К. : Техника, 1975. — 768 с.
4. Митрофанов С. П. Техническая подготовка гибких производственных систем. /С. П. Митрофанов [и др.]. — Л. : Машиностроение, 1987. — 352 с.
5. Лескин А. А. Системы поддержки управленческих и проектных решений./ А. А. Лескин, В. Н. Мальцев. — Л. : Машиностроение. 1990. — 167 с.
6. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. / Р. И. Трухаев. — М. : Наука, 1981. — 258 с.
7. Зелинский А. Н. Основы математического моделирования : учебн. пособ. / А. Н. Зелинский. — К. : УМК ВО, 1991. — 236 с.
8. Бережная Е. В. Математические методы моделирования экономических систем : учебн. пособ. /Е. В. Бережная, В. И. Бережной. — М. : Финансы и статистика, 2001. — 368 с.
9. Сборник задач и упражнений по технологии машиностроения: учебн. пособ. / В. И. Аверченков [и др.]. — М. : Машиностроение, 1988. —192 с.
10. Справочник технолога-машиностроителя : в 2-х т., т. 2 / под ред. А. Г. Косиловой, Р. К. Мещерякова. — М.: Машиностроение, 1986. — 496 с.
11. Капустин Н. М. Разработка технологических процессов обработки деталей на станках с помощью ЭВМ. / Н. М. Капустин. — М. : Машиностроение, 1976. — 288 с.
12. Модели и методы принятия решений. Ч.1. : метод. указан. /сост.: А. Н. Зелинский — Алчевск : ДГМИ, 2003. — 51 с.

13. Моделі і методи прийняття рішень. Ч.ІІ. Варіанти ситуацій і задач : метод. вказ./ укл.: А. М. Зелінський [та ін.]. — Алчевськ : ДГМІ, 2003. — 53 с.

14. Методи прийняття рішень. Ч.ІІІ. : метод. вказ. / укл.: А. М. Зелінський. — Алчевськ: ДонДТУ, 2006. — 45 с.

15. Экономика и организация безопасности хозяйствующих субъектов, — СПб.: Питер, 2004. — 288 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Зелинський Анатолій Миколайович — кандидат технічних наук, професор кафедри технології та організації машинобудівного виробництва Донбаського державного технічного університету, академік МАНЕБ;

Денисова Наталія Анатоліївна — кандидат технічних наук, доцент кафедри технології та організації машинобудівного виробництва Донбаського державного технічного університету;

Вискребенцев Едуард Петрович — інженер.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ В МАШИНОБУДІВНОМУ ВИРОБНИЦТВІ

Навчальний посібник

(російською мовою)

В авторській редакції

Комп'ютерне верстання

Н. Б. Трофімова

Художній дизайн обкладинки

А. О. Дудка

Формат 60×84¹/₁₆. Ум. друк. арк. 9,12.

Зам. № 506. Наклад 300 пр. (1-й запуск 1–70)

Видавець та виготовлювач:

Донбаський державний технічний університет

пр. Леніна, 16, м. Алчевськ, Луганська обл., 94204.

Видавництво «ЛАДО», каб. 113-а, II корпус, т/факс: (06442) 2-58-59

Web-site: www.testlado.com.ua, E-mail: info.lado@mail.ru

Свідоцтво суб'єкта видавничі справи ДК, №2010 від 12.11.2004

