

УДК 539.3

В. М. ГРЕШНОВ, И. В. ПЯТАЕВА, В. Е. СИДОРОВ**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ
И ПОЛЗУЧЕСТИ МЕТАЛЛОВ**

Развивается теория необратимых деформаций металлов, основанная на ранее предложенной концепции синтеза основных положений и методов математической теории пластичности и физики прочности и пластичности. С единых позиций получены скалярные и тензорные определяющие соотношения, описывающие пластическую деформацию и ползучесть металлов в широком диапазоне температур, скоростей деформаций и напряжений в условиях сложного нагружения и с учетом истории нагружения. *Пластичность; ползучесть; физико-феноменологический подход; определяющие соотношения; физико-математическая теория*

ВВЕДЕНИЕ

В математических теориях пластичности и ползучести металлов не полностью решены вопросы описания процессов деформирования в условиях сложного нагружения и с учетом истории нагружения [1, 2]. И это, видимо, принципиальные трудности теории, связанные с чисто феноменологическим методом описания неравновесных процессов деформации (без учета структуры материала и ее эволюции). Поэтому расчетные методы, базирующиеся на данных теориях, являются, в отмеченных случаях, весьма приближенными и имеют известные ограничения. Кроме того, базовые экспериментальные методы определения входящих в определяющие уравнения материальных констант и функций трудоемки и сложны.

Со времени пионерской работы [3] предпринимаются попытки дальнейшего развития теории на основе учета современных положений физики пластической деформации и ползучести металлов [4–6]. Однако к настоящему времени ни одна из предложенных концепций не получила развития до создания расчетных методов, обеспечивающих решение прикладных задач.

В работах [7–9] предложен подход к развитию теории необратимых деформаций, основанный на синтезе методов и основных положений механики и физики пластической деформации. С использованием уравнений кинетического баланса применительно к плотностям дислокаций выводится скалярное (одноосное напряженное состояние) уравнение пластического течения, которое представляет

собой записанный в дифференциальной форме функционал напряжения течения от характеристик структуры, макропараметров деформации и их функций от времени. Полученное скалярное уравнение, в отличие от феноменологического функционала сопротивления металлов пластической деформации [10], раскрывает микромеханизмы основных процессов, протекающих в металлах при различных термомеханических условиях деформирования. Поэтому оно облегчает выбор функции нагружения, формулировку соответствующего принципа максимума и получение тензорного уравнения пластического течения с использованием основного метода математической теории пластичности.

В данной работе обобщаются и уточняются полученные ранее теоретические результаты и, в рамках разрабатываемого подхода в теории пластичности, выводятся уравнения дислокационной ползучести металлов.

**1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
ПЛАСТИЧНОСТИ**

В основу модели пластической деформации положены следующие положения физики прочности и пластичности:

1) доминирующим механизмом деформации является дислокационное скольжение в зернах (это положение, в том числе, определяет в основном и область применимости модели).

2) сопротивление деформации обусловлено торможением потока дислокаций барьерами различной природы, на которых они оста-

навливаются. Основными барьерами являются неподвижные дислокации (лес дислокаций). Причиной упрочнения является повышение плотности неподвижных дислокаций.

3) разупрочнение связано с уменьшением плотности неподвижных дислокаций за счет преодоления некоторыми из них потенциальных барьеров, а так же за счет аннигиляции, динамических процессов полигонизации и рекристаллизации, образования микронарушений сплошности (деформационной поврежденности). При этом необходимую энергию они получают за счет термической активации и работы действующих напряжений. Микромеханизмы перечисленных процессов, в основном, имеют диффузионную природу, следовательно, высота барьера равна энергии активации самодиффузии.

4) при низких температурах (холодная деформация) дислокации преодолевают барьеры силовым способом, то есть только за счет работы действующих напряжений.

Система уравнений модели, при допущении достаточной производительности источников дислокаций, для жесткопластической среды включает [7]:

1) кинетическое уравнение баланса скалярных плотностей подвижных и неподвижных дислокаций

$$\frac{d\rho_s}{dt} = \rho_g \nu_{gs} - \rho_s \nu_{sg}, \quad (1.1)$$

где ρ_s и ρ_g — усредненные по объему плотности неподвижных (сидящих на барьерах) и подвижных (вносящих вклад в деформацию) дислокаций соответственно; ν_{gs} — частота превращения подвижных дислокаций в неподвижные; ν_{sg} — суммарная частота исчезновения подвижных дислокаций за счет преодоления барьеров и превращения снова в подвижные, аннигиляции при переползании, протекания процессов динамической полигонизации и рекристаллизации, образования зародышевых микротрещин (деформационной поврежденности).

При этом для термически активируемых необратимых процессов

$$\nu_{sg} = \nu_0 \exp\left(-\frac{U - \sigma V/m}{kT}\right), \quad (1.2)$$

где ν_0 — предэкспоненциальный множитель; U — усредненная по вышеперечисленным процессам энергия активации; σ — интенсивность напряжений; k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура; V —

активационный объем; m — фактор Тейлора для поликристаллов (при хаотической ориентировке зерен для разных типов кристаллических решеток $m = 2,8 \div 3,1$).

2) физические уравнения связи макрохарактеристик пластической деформации с характеристиками дислокационной структуры

$$\dot{\epsilon} = \rho_g b v, \quad (1.3)$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 \exp\left(-\frac{U - \sigma V/m}{kT}\right), \quad (1.4)$$

где b — усредненный по системам скольжения модуль вектора Бюргера дислокаций (для металлов $b = 3 \cdot 10^{-8}$ см); v — средняя скорость скольжения подвижных дислокаций.

Так как три из четырех перечисленных выше микромеханизмов исчезновения неподвижных дислокаций имеют диффузионную природу, а энергия активации дислокационного зарождения микротрещин близка к ней (энергия сублимации) [11], то U в (1.2) и (1.4) считается одинаковой и равной энергии активации самодиффузии $U = \beta G b^3$, где $\beta = 0,38 \div 0,45$ для разных металлов, G — модуль сдвига. В качестве объема активации взят объем одноатомной цепочки длиной $1/\sqrt{\rho_s}$ (сегмент дислокации между двумя барьерами), то есть $V = b^2/\sqrt{\rho_s}$. Частота ν_0 равна частоте тепловых колебаний этого сегмента $\nu_0 = \nu_D b \sqrt{\rho_s}$, где $\nu_D = 10^{12} \text{с}^{-1}$ — частота Дебая. Установлено, что $\dot{\epsilon}_0 = \dot{\epsilon}_* b \sqrt{\rho_s}$, где $\dot{\epsilon}_* \cong \nu_D$ [8].

Решением системы уравнений (1.1–1.4) является функционал напряжения течения

$$\sigma = \beta(T) m G(T) b \left[1 - \frac{kT(t)}{\beta G(T) b^3} \ln \frac{\dot{\epsilon}_* b \sqrt{\rho_s}}{\dot{\epsilon}(t)} \right] \left\{ \int_0^t \left[\frac{\dot{\epsilon}(t)}{b \lambda} - \rho_s^{3/2} \nu_D b \times \exp\left(\frac{\beta(T) G(T) b^3 - \sigma b^2/m \sqrt{\rho_s}}{kT(t)}\right) \right] dt \right\}^{1/2}, \quad (1.5)$$

где $\lambda = v/\nu_{gs}$ — средняя длина свободного пробега подвижных дислокаций.

В случае $\dot{\epsilon}, T = \text{const}$ из (1.5) следует

$$\sigma = \beta(T) m G(T) b \times \left[1 - \frac{kT}{\beta(T) G(T) b^3} \ln \frac{\dot{\epsilon}_* b \sqrt{\rho_s}}{\dot{\epsilon}} \right] \sqrt{\rho_s}, \quad (1.6)$$

где ρ_s — накопленная за время деформирования t или при степени деформации $\varepsilon = \dot{\varepsilon} \cdot t$ плотность неподвижных дислокаций.

Для учета истории нагружения, обусловленной зависимостями $\dot{\varepsilon}(t)$ и $T(t)$, и численного интегрирования запишем (1.5) в виде следующего оператора. Из (1.6) получаем

$$d\sigma_{(g)} = \left[\frac{\beta(T) mG(T) b}{2\sqrt{\rho_{s(g)}}} - \frac{mkT_g}{2b^2\sqrt{\rho_{s(g)}}} \times \left(1 + \ln \frac{\dot{\varepsilon}_* b \sqrt{\rho_{s(g)}}}{\dot{\varepsilon}_{(g)}} \right) \right] d\rho_{s(g)}. \quad (1.7)$$

Из (1.1) имеем

$$d\rho_{s(g)} = \left[\frac{1}{b\lambda} - \frac{\rho_{s(g-1)}}{\dot{\varepsilon}_{(g)}} \nu_D b \sqrt{\rho_{s(g-1)}} \times \exp \left(- \frac{\beta(T) G(T) b^3 - \frac{\sigma_{(g-1)} b^2}{m\sqrt{\rho_{s(g-1)}}}}{kT_{(g)}} \right) \right] d\varepsilon_{(g)}, \quad (1.8)$$

где $d\varepsilon_{(g)} = \dot{\varepsilon}_{(g)} \cdot dt_{(g)}$; $g = 1, 2, \dots, n$ — номер расчетного шага при численном расчете диаграммы $\sigma(\varepsilon)$, на котором интенсивность деформации получает приращение $d\varepsilon_{(g)} \cong \cong 0,05 \div 0,1$.

Уравнения (1.7) и (1.8) дополним соотношениями:

$$\rho_{s(g)} = \rho_{s(g-1)} + d\rho_{s(g)}; \quad (1.9)$$

$$d\varepsilon_{(g)} = dU_{z(g)} / H_{(g)}; \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_{(g)} = \varepsilon_{(g-1)} + d\varepsilon_{(g)}; \quad (1.11)$$

$$\dot{\varepsilon}_{(g)} = d\varepsilon_{(g)} / dt_{(g)}; \quad (1.12)$$

$$dt_{(g)} = dU_{z(g)} / v_{(g)}; \quad (1.13)$$

$$H_{(g)} = H_{(g-1)} - dU_{z(g)} \quad (1.14)$$

(при испытании образцов осадкой);

$$\sigma_{(g)} = \sigma_{(g)}^T + d\sigma_{(g)}; \quad (1.15)$$

$$\sigma_{(g)}^T = \beta(T) mG(T) b \times \left[1 - \frac{kT_{(g)}}{\beta(T) G(T) b^3} \ln \frac{\dot{\varepsilon}_* b \sqrt{\rho_{s(g-1)}}}{\dot{\varepsilon}_{(g)}} \right] \sqrt{\rho_{s(g-1)}}, \quad (1.16)$$

где $\sigma_{(g)}^T$ — начальное напряжение течения на расчетном шаге g ; $dU_z = (0,5 \div 10)$ мм — изменение размера образца при испытании или приращение перемещения рабочего органа деформирующей машины; $H_{(g)}$ — текущий размер образца при испытании; $v_{(g)}$ — скорость деформирования на шаге g (скорость перемещения рабочего органа деформирующей машины).

Уравнения (1.11) и (1.15) записаны при допущении соосности тензоров ε_{ij} , $d\varepsilon_{ij}$ и $d\sigma_{ij}^T$, $d\sigma_{ij}$ из-за малости $d\varepsilon_{ij}$ и $d\sigma_{ij}$.

Исходное напряжение течения материала (начальный «предел текучести») ¹ при $g = 1$ определяется из (1.6), как

$$\sigma_T = \beta(T) mG(T) b \times \left[1 - \frac{kT_{(1)}}{\beta(T) G(T) b^3} \ln \frac{\dot{\varepsilon}_* b \sqrt{\rho_{so}}}{\dot{\varepsilon}_{(1)}} \right] \sqrt{\rho_{so}}, \quad (1.17)$$

где ρ_{so} — исходная в материале (до нагрева и деформации) плотность неподвижных дислокаций.

При экспериментальной проверке модели установлено, что коэффициент β с ростом температуры T увеличивается в соответствии с эмпирическим уравнением $\beta(T) = 5 \cdot 10^{-5} \times T + 0,3639$. Это объясняется доминированием объемной диффузии (по телу зерен) при высоких T и трубочной (по ядрам дислокаций) при низких. Последняя, как известно [11], имеет меньшую энергию активации.

Из изложенной модели как частные случаи вытекают модели холодной ($T < 0,2T_s$), теплой ($0,4T_s \geq T \geq 0,2T_s$) и горячей ($T > 0,4T_s$) деформации, где T_s — температура плавления в °K. Установлено [8], что при холодной деформации дислокации преодолевают барьеры силовым способом, то есть энергия активации преодоления барьеров целиком обеспечивается работой действующих напряжений. Условия холодной деформации:

$$\beta G b^3 = \sigma b^2 / m \sqrt{\rho_s}; \quad (1.18)$$

¹Кавычки означают, что у вязкопластичного материала отсутствует предел текучести в смысле его общепринятого определения [9]. При уменьшении σ материал не переходит в упругое состояние, деформация прирастает при меньшей $\dot{\varepsilon}$.

$$\dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}_* b \sqrt{\rho_s} = \dot{\varepsilon} = \nu_0 = \nu_D b \sqrt{\rho_s} = \nu_{sg}. \quad (1.19)$$

С учетом (1.18) и (1.19) из (1.6) и (1.8) для холодной деформации имеем

$$\sigma = \beta m G b \sqrt{\rho_s}, \quad (1.20)$$

$$d\rho_s = \left(\frac{1}{b\lambda} - \rho_s \right) d\varepsilon. \quad (1.21)$$

Интегрируя (1.21) при начальных условиях $\varepsilon = 0$, $\rho_s = \rho_{so}$ получаем

$$\rho_s = \frac{(b\lambda)^{-1} [\exp(\varepsilon) - 1] + \rho_{so}}{\exp(\varepsilon)}, \quad (1.22)$$

$$\sigma = \beta m G b \left\{ \frac{(b\lambda)^{-1} [\exp(\varepsilon) - 1] + \rho_{so}}{\exp(\varepsilon)} \right\}^{1/2}. \quad (1.23)$$

Начальный предел текучести для жесткопластического тела из (1.23) при $\varepsilon = 0$ или из (1.17) с учетом (1.19) определяется как

$$\sigma_T = \beta m G b \sqrt{\rho_{so}}. \quad (1.24)$$

Теплая деформация протекает в условиях переменного активационного объема $V = b^2 / \sqrt{\rho_s}$, который уменьшается с увеличением ε и ρ_s и эволюционное уравнение соответствует (1.8). Горячая деформация протекает в условиях $V = b^2 / \sqrt{\rho_s} = \text{const}$ и уравнение (1.8) в этом случае имеет вид

$$d\rho_{s(g)} = \left[\frac{1}{b\lambda} - \frac{\rho_{s(g-1)}}{\dot{\varepsilon}_{(g)}} \nu_D b \sqrt{\rho_{s(g-1)}} \times \right. \\ \left. \times \exp \left(- \frac{\beta(T)G(T)b^3 - \frac{\sigma_{(g-1)}b^2}{m\sqrt{\rho_{so}}}}{kT_{(g)}} \right) \right] d\varepsilon_{(g)}. \quad (1.25)$$

Для расчета зависимостей $\sigma(\varepsilon)$ по изложенной модели необходимо определение двух параметров ρ_{so} и λ , которые являются характеристиками исходной дислокационной структуры металлов. Это можно сделать известными металлографическими методами. Возможно также их определение на основе экспериментально полученной при стандартных испытаниях цилиндрических образцов осадкой в условиях холодной деформации диаграммы деформирования по формулам [7, 8]:

$$\rho_{so} = (\sigma_T^{\text{exp}})^2 / (\beta m G b)^2; \quad (1.26)$$

$$\lambda = \frac{b(\beta m G)^2 [\exp(\varepsilon) - 1]}{\sigma^2 \exp(\varepsilon) - (\beta m G b)^2 \rho_{so}}, \quad (1.27)$$

где σ_T^{exp} — экспериментальный предел текучести материала при холодной деформации; ε и σ — интенсивность деформации из интервала $(0,1 \div 0,5)$ и соответствующее ей на экспериментальной диаграмме деформирования значение интенсивности напряжений. Эти формулы получены из (1.24) и (1.23).

Из модели следует утверждение: физико-феноменологический функционал вида $\sigma = F[t, \varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t), T(t), \rho_s(t)]$ при известной диаграмме деформирования $\sigma(\varepsilon)$ материала, полученной в условиях холодной деформации, позволяет определять его напряжение течения в температурно-скоростном диапазоне, в котором доминирующим механизмом деформации является дислокационное скольжение, а основным механизмом упрочнения — блокировка подвижных дислокаций барьерами дислокационного типа (дислокации леса, границы зерен и субзерен).

С целью экспериментальной проверки этого утверждения и одноосной модели пластической деформации были получены экспериментальные диаграммы деформирования качественных сталей 10, 20, 38ХГНМ, 20Г2Р, 30Г1Р в широком диапазоне температур и скоростей деформаций. Диаграммы строились по результатам стандартных испытаний образцов на осадку по методике, изложенной в [8].

На рис. 1 в качестве примера приведены экспериментальные (точки) и теоретические (сплошные кривые) диаграммы деформирования стали 10: 1 (◆) — скорость деформации 10^{-2} с^{-1} ; 2 (●) — 10^{-3} с^{-1} ; 3 (■) — 10^{-2} с^{-1} ; 4 (▲) — 10^{-1} с^{-1} . Значения $G(T)$ брали из [12]. Характеристики стали: $\rho_{so} = 1,3 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$; $\lambda = 4,7 \times 10^{-4} \text{ см}$; $G(20^\circ \text{C}) = 78000 \text{ МПа}$; $G(450^\circ \text{C}) = 75000 \text{ МПа}$; $G(650^\circ \text{C}) = 51000 \text{ МПа}$; $G(850^\circ \text{C}) = 53400 \text{ МПа}$. Отрезки на точках обозначают симметричное десятипроцентное отклонение от экспериментально определенной величины.

Проверка показала удовлетворительное совпадение экспериментальных и теоретических кривых $\sigma(\varepsilon)$.

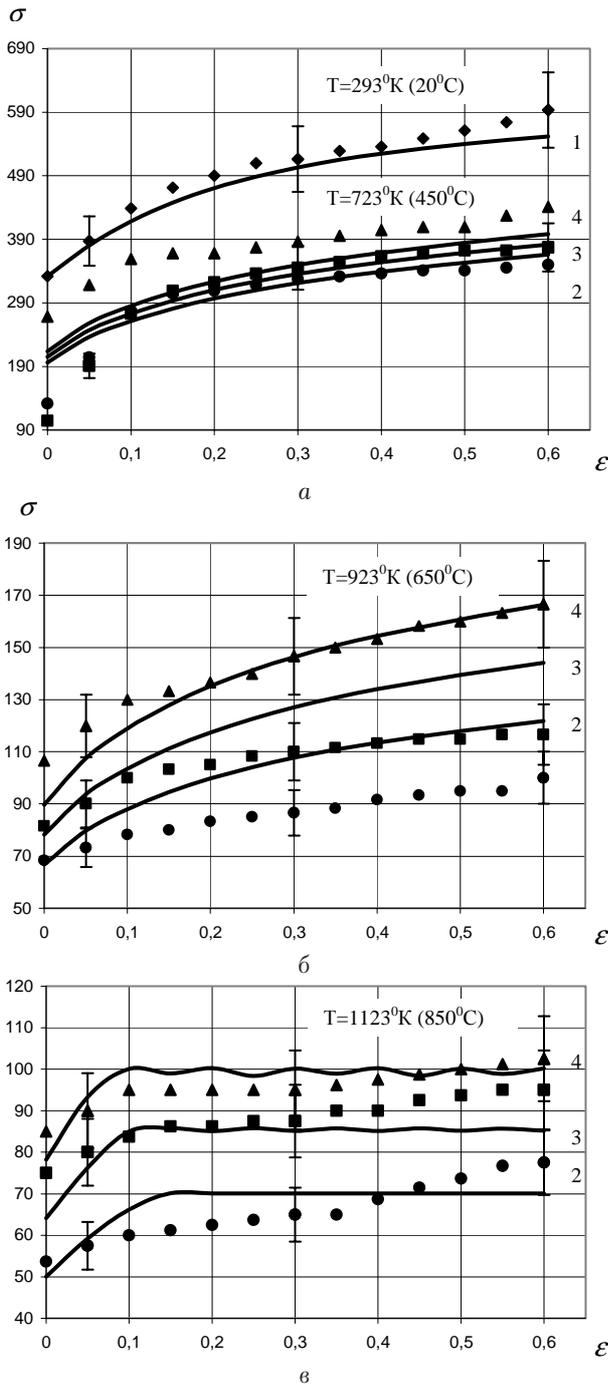


Рис. 1

Для решения прикладных задач теории пластичности, например, при математическом моделировании технологических операций и процессов обработки металлов давлением, необходимы физико-феноменологические определяющие уравнения пластического течения для объемного напряженно-деформированного состояния. Необходимые предпосылки для их получения в рамках идеологии математической теории пластичности бы-

ли изложены в [9]. Однако некоторые формулировки нуждаются в уточнении.

В работе [19] было показано, что в случае вязкопластического тела (деформация металлов при повышенных температурах) уменьшение напряжения не переводит его из пластического состояния в упругое, а сопровождается уменьшением скорости деформации. Поэтому процесс разгрузки для него не имеет места. Дополнительно к процессам нагружения и нейтрального нагружения для вязкопластического тела были выведены понятия термических и динамических упрочнения и возврата [9]. Введены также понятия мгновенных на расчетном шаге g функций нагружения, условия пластичности Губера–Мизеса и сформулирован новый для вязкопластического тела принцип максимума работы пластической деформации, учитывающий влияние истории нагружения.

При горячей деформации возникающая кристаллографическая текстура, обуславливающая деформационную анизотропию, «размывается» динамической рекристаллизацией и материал остается изотропным.

Возьмем мгновенную на расчетном шаге g функцию нагружения в виде

$$f_{(g)} \left[\left(\sigma_{ij}^T + d\sigma_{ij(g)} \right), \Phi_{(g)} \left(\sum_1^{g-1} d\varepsilon_{(g)} + d\varepsilon_{(g)} \right) \right] = 0 \quad (1.28)$$

и, соответственно, мгновенное условие пластичности Губера–Мизеса

$$f_{(g)} \left(\sigma_{ij}^T + d\sigma_{ij(g)} \right) = \frac{3}{2} \left(s_{ij}^T + ds_{ij(g)} \right) \left(s_{ij}^T + ds_{ij(g)} \right) - \left[\Phi_{(g)} \left(\sum_1^{g-1} d\varepsilon_{(g)} + d\varepsilon_{(g)} \right) \right]^2 = 0, \quad (1.29)$$

где s_{ij}^T и $ds_{ij(g)}$ – девиаторы тензоров σ_{ij}^T , $d\sigma_{ij(g)}$.

Из (1.29) следует

$$\sigma_{(g)} = \sigma_{(g)}^T + d\sigma_{(g)} = \Phi_{(g)} \left(\sum_1^{g-1} d\varepsilon_{(g)} + d\varepsilon_{(g)} \right).$$

Как видно, выбор условия пластичности в виде (1.29) означает, что интенсивность напряжения на шаге нагружения g определяется оператором (1.7)÷(1.16).

Ассоциированный закон течения вязкопластического тела будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial (\sigma_{ij(g)}^T + d\sigma_{ij(g)})} \left[(\sigma_{ij(g)}^T + d\sigma_{ij(g)}) \times \right. \\ \left. \times d\varepsilon_{ij(g)} - d\lambda_{(g)} f_{(g)} \right] = 0;$$

$$d\varepsilon_{ij(g)} = d\lambda_{(g)} \frac{\partial f_{(g)}}{\partial (\sigma_{ij(g)}^T + d\sigma_{ij(g)})} = \\ = 3d\lambda_{(g)} (s_{ij}^T + ds_{ij(g)}).$$

Множитель Лагранжа определяется как

$$d\lambda_{(g)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{d\varepsilon_{(g)}}{\left[\frac{\partial f_{(g)}}{\partial (\sigma_{ij(g)}^T + d\sigma_{ij(g)})} \right]^{\frac{1}{2}}} \times \\ \times \frac{1}{\left[\frac{\partial f_{(g)}}{(\sigma_{ij(g)}^T + d\sigma_{ij(g)})} \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{d\varepsilon_{(g)}}{2(\sigma_{(g)}^T + d\sigma_{(g)})}.$$

Определяющие соотношения для вязкопластического тела выглядят следующим образом:

$$d\varepsilon_{ij(g)} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{(g)}}{\sigma_{(g)}^T + d\sigma_{(g)}} (s_{ij}^T + ds_{ij(g)}), \quad (1.30)$$

где $\sigma_{(g)}^T$ и $d\sigma_{(g)}$ на каждом шаге нагружения рассчитываются по (1.16) и (1.7) соответственно.

Заметим, что из (1.30) как частный случай следуют определяющие соотношения классической теории течения [1]

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon}{\sigma} s_{ij}.$$

Действительно, приняв независимость σ от истории нагружения, получим $\sigma_{(g)}^T + d\sigma_{(g)} = \sigma_{(g)}$ и $s_{ij(g)}^T + ds_{ij(g)} = s_{ij(g)}$.

При решении прикладных задач вязкопластичности с применением численного метода конечных элементов, который реализует необходимый пошаговый алгоритм расчета, удобно использовать (1.30) в виде двух уравнений [9]

$$d\varepsilon_{ij(g)} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{(g)}}{d\sigma_{(g)}} ds_{ij(g)},$$

$$d\varepsilon_{ij(g)} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{(g)}}{\sigma_{(g)}^T} s_{ij(g)}^T.$$

Подчеркнем также, что модель, включая расчет текущей плотности неподвижных дислокаций $\rho_{s(g)}$, позволяет прогнозировать текущее структурное состояние материала, в частности, линейный размер зерен и субзерен d по известной в металлофизике формуле $d = 1/\sqrt{\rho_s}$ [13].

При холодной направленной пластической деформации в металлах возникает деформационная анизотропия, одним из проявлений которой является эффект Баушингера. Анизотропия определяет влияние на σ характера траектории нагружения. В работе [13] предложена физико-феноменологическая модель эффекта Баушингера, имеющая вид

$$\sigma = \beta m G b \left\{ \frac{\rho_{so} + Ae^+}{\exp(\varepsilon)} + \frac{\exp(\varepsilon) - 1}{1,5 \lambda b \exp(\varepsilon)} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.31)$$

Уравнение (1.31) описывает диаграмму деформирования материала с учетом предварительной деформации с обратным знаком (e^+). Для определения коэффициента A предложен достаточно простой эксперимент, включающий волочение или прямое прессование (вид деформации – простое растяжение) прутка со степенью деформации e^+ из диапазона $0,25 \div 0,7$ и последующую осадку изготовленных из него образцов с определением предела текучести на сжатие σ_T^S . Значение A находится по формуле

$$A = \frac{(\sigma_T^S)^2 - (\beta m G b)^2 \rho_{so}}{(\beta m G b)^2 e^+}.$$

В общем случае сложного нагружения и деформирования, сопровождающегося сменной знака деформации, (1.31) можно записать в виде

$$\sigma = \beta m G b \left\{ \frac{\rho_{so} + A\varepsilon}{\exp(\varepsilon)} + \frac{\exp(\varepsilon) - 1}{1,5 \lambda b \exp(\varepsilon)} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.32)$$

Для получения определяющих соотношений изотропного материала с анизотропным упрочнением примем условие текучести Губера–Мизеса в виде

$$f = \frac{3}{2} \left(s_{ij}^{(1)} s_{ij}^{(1)} + s_{ij}^{(2)} s_{ij}^{(2)} \right) -$$

$$- [\Phi_1(\varepsilon)]^2 - [\Phi_2(\varepsilon)]^2 = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} - [\Phi(\varepsilon)]^2 = 0, \quad (1.33)$$

где в соответствии с (1.32):

$$\sqrt{\frac{3}{2} s_{ij}^{(1)} s_{ij}^{(1)}} = \sigma_1 = \beta m G b \left(\frac{\rho_{so} + A\varepsilon}{\exp(\varepsilon)} \right)^{1/2};$$

$$\sqrt{\frac{3}{2} s_{ij}^{(2)} s_{ij}^{(2)}} = \sigma_2 = \beta m G b \left(\frac{\exp(\varepsilon) - 1}{1,5 b \lambda \exp(\varepsilon)} \right)^{1/2};$$

$$\sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sigma;$$

$s_{ij}^{(1)}, s_{ij}^{(2)}, s_{ij}$ — девиаторы тензоров $\sigma_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(2)}, \sigma_{ij}$ соответственно. При этом $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}$ и, следовательно, $s_{ij} = s_{ij}^{(1)} + s_{ij}^{(2)}$.

Ассоциированный закон течения [1]

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - d\lambda f) = 0, \quad (1.34)$$

$$d\varepsilon_{ij} = 3 d\lambda s_{ij} = 3 d\lambda (s_{ij}^{(1)} + s_{ij}^{(2)}).$$

Как известно [1],

$$d\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}} = \frac{1}{2} \frac{d\varepsilon}{\sigma}. \quad (1.35)$$

Подстановкой (1.35) в (1.34) окончательно получаем

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon}{\sigma} (s_{ij}^{(1)} + s_{ij}^{(2)}), \quad (1.36)$$

где σ определяется для каждой ε по (1.32).

Видно, что по форме уравнения (1.36) совпадают с известными феноменологическими определяющими соотношениями теории пластичности изотропного материала с анизотропным упрочнением. Однако значение (1.36) состоит в том, что они получены в рамках единой концепции — физико-математической теории необратимых деформаций металлов.

2. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОЛЗУЧЕСТИ МЕТАЛЛОВ

Современные расчетные методы феноменологической теории ползучести металлов (технические теории течения, упрочнения и старения) базируются, в основном, на фундаментальных результатах, развитых и обобщенных в [2]. Во введении были отмечены их недостатки. Проблема ползучести — это проблема вязкопластичности. Поэтому можно полагать, что на основе изложенной выше модели вязкопластичности могут быть получены основные уравнения дислокационной ползучести, контролируемой термодинамически активированными возвратом и скольжением дислокаций.

Для вывода уравнения, описывающего ползучесть при одноосном напряженном состоянии, из (1.6) выразим скорость деформации

$$\dot{\varepsilon}_{(g)}^c = \dot{\varepsilon}_* b \sqrt{\rho_{s(g-1)}} \exp \left[-\frac{\beta(T) G(T) b^3}{k T_{(g)}} \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{\sigma_{(g)}^c}{\beta(T) m G(T) b \sqrt{\rho_{s(g-1)}}} \right) \right], \quad (2.1)$$

где верхний индекс «с», здесь и далее, обозначает макрохарактеристики ползучести.

Для введения в модель основной переменной — времени — в уравнение (1.8) подставим $d\varepsilon_{(g)} = \dot{\varepsilon}_{(g)} dt_{(g)}$ и изменение плотности неподвижных дислокаций при ползучести под действием приложенного напряжения $\sigma_{(g)}^c$ найдется как

$$d\rho_{s(g)} = \left[\frac{\dot{\varepsilon}_{(g)}^c}{b \lambda} - (\rho_{s(g-1)})^{3/2} \nu_D b \times \right. \\ \left. \times \exp \left(-\frac{\beta(T) G(T) b^3 - \sigma_{(g)}^c b^2 / m \sqrt{\rho_{so}}}{k T_{(g)}} \right) \right] dt_{(g)}. \quad (2.2)$$

Для численного расчета кривых ползучести $\varepsilon^c(t)$ уравнения (2.1) и (2.2) дополним очевидными соотношениями:

$$\rho_{s(g)} = \rho_{s(g-1)} + d\rho_{s(g)}; \quad (2.3)$$

$$d\varepsilon_{(g)}^c = \dot{\varepsilon}_{(g)}^c dt_{(g)}; \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_{(g)}^c = \varepsilon_{(g-1)}^c + d\varepsilon_{(g)}^c; \quad (2.5)$$

$$t_{(g)} = t_{(g-1)} + dt_{(g)}. \quad (2.6)$$

Оператор (2.1)–(2.6) описывает ползучесть металлов как в условиях $T, \sigma^c = \text{const}$, так и $T(t), \sigma^c(t)$. Следует заметить, что полученная модель объединяет современные технические теории ползучести: теорию старения $\sigma^c = f_1(\varepsilon^c, t)$, течения $\sigma^c = f_2(\dot{\varepsilon}^c, t)$ и упрочнения $\sigma^c = f_3(\dot{\varepsilon}^c, \int d\varepsilon^c)$.

Условием установившейся (стационарной) стадии ползучести при $T, \sigma^c = \text{const}$ будет $d\rho_s/dt = 0$ и ползучесть протекает при постоянной минимальной скорости $\dot{\varepsilon}_{\min}^c$. Для этой стадии из (2.2) имеем

$$\frac{\dot{\varepsilon}^c}{b\lambda} = \rho_s^{\frac{3}{2}} \nu_D b \times \exp\left(-\frac{\beta(T)G(T)b^3 - \sigma^c b^2 / m\sqrt{\rho_{so}}}{kT}\right). \quad (2.7)$$

Подстановкой (2.1) в (2.7) получаем уравнение для определения стационарной плотности неподвижных дислокаций на установившейся стадии, которое после преобразований имеет вид

$$\ln(\lambda\rho_s\nu_D b/\dot{\varepsilon}_*) = \frac{\sigma^c b^2}{mkT} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho_s}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_{so}}} \right]. \quad (2.8)$$

Точное решение этого уравнения представляет собой сложное и громоздкое выражение. Поэтому ограничимся приближенным решением. Учитывая, что логарифмическая функция медленно изменяется с изменением аргумента при больших его значениях, примем $\ln(\lambda\rho_s\nu_D b/\dot{\varepsilon}_*) \approx \ln(\lambda\rho_{so}\nu_D b/\dot{\varepsilon}_*)$ и приближенное решение уравнения (2.8) будет иметь вид

$$\sqrt{\rho_s^c} = \sqrt{\rho_{so}} \left[\frac{mkT\sqrt{\rho_{so}} \ln(\lambda\rho_{so}\nu_D b/\dot{\varepsilon}_*)}{\sigma^c b^2} + 1 \right]^{-1}, \quad (2.9)$$

где ρ_s^c — стационарная плотность дислокаций на установившейся стадии.

Экспериментальными исследованиями влияния деформации ползучести на структуру металлов установлено, что общей закономерностью является формирование к началу установившейся стадии субзеренной структуры [14]. Для оценки линейных размеров субзерен предложено эмпирическое соотношение

$$d = \frac{10,5Gb}{\sigma^c}. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) позволяет оценить d как

$$d = \frac{1}{\sqrt{\rho_s^c}} = (\sqrt{\rho_{so}})^{-1} \times \left[\frac{mkT\sqrt{\rho_{so}} \ln(\lambda\rho_{so}\nu_D b/\dot{\varepsilon}_*)}{\sigma^c b^2} + 1 \right]. \quad (2.11)$$

Видно, что (2.11) полнее отражает влияние различных факторов на структуру металла, чем (2.10). Подстановка (2.9) в (2.1) дает уравнение для определения минимальной скорости ползучести $\dot{\varepsilon}_{\min}^c$. При проверке адекватности модели использовали экспериментальные результаты работы [15]. На рис. 2 в качестве примера приведены экспериментальные точки и теоретические (сплошные линии) кривые ползучести стали 08 при $T = 773^\circ \text{K}$ (500°C) и $\sigma^c = 71 \text{ МПа}$ (кривая 1) и $\sigma^c = 75 \text{ МПа}$ (кривая 2). Характеристики стали 08: $\rho_{so} = 2,12 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$; $\lambda = 3,6 \times 10^{-4} \text{ см}$; $G(20^\circ \text{C}) = 78000 \text{ МПа}$; $G(500^\circ \text{C}) = 50000 \text{ МПа}$. Общий результат проверки состоит в том, что модель весьма удовлетворительно описывает кривые ползучести различных материалов в широком диапазоне T и σ .

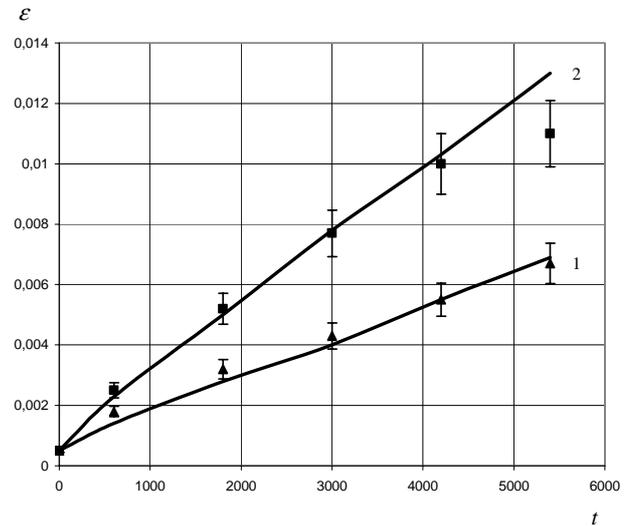


Рис. 2

Одноосная модель ползучести (2.1)–(2.6), (2.9), (2.11) выведена из одноосной модели пластичности (1.6)–(1.16). Следовательно, для нее остаются в силе определяющие соотношения (1.30). Из этого следует, что в рамках предлагаемой модели постановка и решение краевых задач ползучести эквивалентны постановке и решению краевых задач пластичности при повышенных температурах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе объединения микро- и макропредставлений, методов микро- и макроописания необратимых деформаций в рамках единой концепции разработана модель дислокационной пластичности и ползучести металлов. В отличие от классических феноменологических теорий физико-математическая теория последовательно учитывает историю нагружения и позволяет прогнозировать структуру и, следовательно, свойства материалов после деформации. В связи со спецификой уравнений модели (дифференциальная форма), краевые задачи пластичности и ползучести целесообразно решать численным методом конечных элементов. Модель позволяет естественным образом осуществлять линеаризацию определяющих соотношений методом мгновенных касательных модулей при численном пошаговом расчете необратимых деформаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ишлинский, А. Ю.** Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. М. : Физматлит, 2001. 704 с.
2. **Работнов, Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкции / Ю. Н. Работнов. М. : Наука, 1966. 752 с.
3. **Батдорф, С. Б.** Математическая теория пластичности на основе концепции скольжения / С. Б. Батдорф, Б. А. Будянский // Механика. М. : Мир, 1962. № 1. С. 135–155.
4. **Киселев, С. П.** Модель упругопластического деформирования материалов на основе калибровочной теории дефектов с учетом диссипации энергии / С. П. Киселев // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т. 45, № 2. С. 177–187.
5. **Гриняев, Ю. В.** Полевая теория дефектов на мезоуровне / Ю. В. Гриняев, В. Е. Панин // Доклады РАН. 1997. Т. 353, № 1. С. 37–39.
6. **Лихачев, В. А.** Структурно-аналитическая теория прочности / В. А. Лихачев, В. Г. Малинин. СПб. : Наука, 1993. 471 с.
7. **Грешнов, В. М.** Физико-феноменологическая модель сопротивления металлов пластической деформации для расчета технологических процессов обработки металлов давлением. Сообщ. 1. Постановка задачи и вывод общего уравнения / В. М. Грешнов, Ф. Ф. Сафин, М. В. Грешнов // Проблемы прочности. 2002. № 6. С. 107–115.
8. **Грешнов, В. М.** Физико-феноменологическая модель сопротивления металлов пластической деформации для расчета технологических процессов обработки металлов давлением. Сообщ. 2. Частные случаи модели и ее экспериментальная проверка / В. М. Грешнов, Ф. Ф. Сафин, М. В. Грешнов // Проблемы прочности. 2003. № 1. С. 87–97.
9. **Грешнов, В. М.** Модель вязкопластического тела с учетом истории нагружения / В. М. Грешнов // Механика твердого тела. 2005. № 2. С. 117–125.
10. **Колмогоров, В. Л.** Механика обработки металлов давлением / В. Л. Колмогоров. Екатеринбург : Изд-во Уральск. гос. техн. ун-та — УПИ, 2001. 836 с.
11. **Штремель, М. А.** Прочность сплавов. Ч. 1. Дефекты решетки. М. А. Штремель. М. : Металлургия, 1982. 280 с.
12. **Сорокин, В. Г.** Марочник сталей и сплавов / под общ. ред. В. Г. Сорокина. М. : Машиностроение, 1989. 640 с.
13. **Грешнов, В. М.** Прогнозирование разрушения металлов в процессах холодной пластической деформации. Сообщ. 2. Учет анизотропного упрочнения и экспериментальная проверка модели пластической деформации и разрушения / В. М. Грешнов [и др.] // Проблемы прочности. 1999. № 2. С. 74–84.
14. **Пуарье, Ж. П.** Высокотемпературная пластичность кристаллических тел / Ж. П. Пуарье. М. : Металлургия, 1982. 272 с.
15. **Дегтярев, В. П.** Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций / В. П. Дегтярев. М. : Машиностроение, 1967. 131 с.

ОБ АВТОРАХ



Грешнов Владимир Михайлович, проф., зав. каф. обр-ки металлов давлением. Дипл. инж.-мех. (УАИ, 1974). Д-р физ.-мат. наук по физ. тверд. тела (ИПМ АН Украины, 1992). Иссл. в обл. физ. и мех. пласт. деформ.



Пятаева Ирина Владимировна, асп. той же каф. Дипл. магистр техн. и технол. по спец. «Машины и технология обработки металлов давлением» (УГАТУ, 2007). Готовит дис. в обл. физ.-мат. теории пластичности.



Сидоров Валерий Евгеньевич, ст. преп. той же каф. Дипл. инж.-мех. по спец. «Авиационные двигатели» (УАИ, 1979). Иссл. в обл. физ.-мат. теории ползучести.