Метод определения аналитических приближений для численных передаточных функций бесконтактных опор жидкостного трения

д. т. н. В. А. Коднянко

При исследовании динамики бесконтактных опор жидкостного трения (гидро- и газостатических) ввиду сложности их математических моделей используют метод линеаризации. Однако даже в линеаризованном виде модели весьма сложны и содержат одну, а чаще несколько взаимосвязанных краевых задач, требующих решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Получить аналитическое решение таких задач удается либо для моделей простейших конструкций, либо при дальнейших упрощениях зависимостей, что снижает точность расчетов. Кардинально преодолеть этот недостаток позволяют численные методы [1].

Колебания линейной системы оценивают путем анализа передаточной функции (ПФ) при помощи динамических показателей, важную роль среди которых играют критерии устойчивости. При использовании численных методов формульные зависимости отсутствуют, но имеется алгоритм нахождения значения ПФ по заданному значению переменной s преобразования Лапласа.

Этот алгоритм может служить для определения устойчивости частотными методами, например методом Найквиста [2]. Однако использование указанного и других подобных критериев пригодно лишь для ПФ с малым числом полюсов. Применительно к газостатическим опорам такие методы неэффективны, поскольку данные опоры представляют собой системы с распределенными параметрами [3 и 4] и, следовательно, ПФ, полученные численными методами, являются многополюсными (точные ПФ — это трансцендентные функции с бесконечным числом полюсов).

При использовании численных методов линейные модели опор можно приближенно представить с необходимой точностью с помощью рациональных функций переменной s [1]. Это позволяет корректно заменить численную ПФ соответствующим аналитическим приближением в целях использования характеристического полинома (ХП) системы для оценки ее устойчивости корневыми методами [2].

Известны методы рационального приближения функции (например, метод Паде [5]), основанные на использовании ее производных. Для численного интегрирования дифференциальных задач подобный подход неприемлем, поскольку при численном определении производной с увеличением ее порядка заметно снижается точность расчетов. Ниже предложен метод нахождения аналитического приближения ПФ, который при определенных условиях требует вычисления только ее первой производной.

Чтобы найти аналитическую зависимость для численной ПФ, представим ее в виде рациональной функции [2]:

$$\Phi(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_j s^j + \ldots + b_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_k s^k + \ldots + a_n s^n}, \qquad (1)$$

где b_j и a_k — коэффициенты; $j = \overline{0, m}$; $k = \overline{1, n}$; $n > m$; n и m — порядки ХП.

Разность порядков полиномов $x = n - m > 0$ можно найти путем решения целочисленного уравнения

$$L = \lim_{s \to \infty} [s^x \Phi_ч(s)] = b_m / a_n \neq 0, \qquad (2)$$

где $\Phi_ч$ — численная ПФ.

Обычно $1 \leqslant x \leqslant 2$, поэтому процесс решения уравнения (2) быстро сходится. Для модели любой бесконтактной опоры уравнение (2) следует решить 1 раз, так как для конкретной ПФ всегда $x = \text{const}$. В моделях газостатических опор (динамических систем с распределенными параметрами) значения n и m могут изменяться; в моделях же гидростатических опор значения этих величин для конкретной ПФ обычно постоянны.

Аналитические атрибуты n, m, b_j и a_k можно найти методом неопределенных коэффициентов [6]. Для этого ПФ (1) следует представить в виде, удобном для составления системы линейных алгебраических уравнений относительно $n + m$ неизвестных коэффициентов для различных значений переменной s:

$$b_1 + b_2 s + \ldots + b_m s^{m-1} -$$
$$- \Phi_ч(s)(a_1 + a_2 s + \ldots + a_n s^{n-1}) = [\Phi_ч(s) - b_0]/s, \qquad (3)$$

где $b_0 = \Phi_ч(0)$.

Последовательно подставляя в уравнение (3) значения $s = e_1, e_2, \ldots, e_j, \ldots, e_{n+m}$, где $e_j = e_0^j$; $e_0 = \exp[-2\pi i/(n + m)]$; $i = (-1)^{1/2}$, получим искомую систему уравнений в матричной форме:

$$A\bar{u} = \bar{v}. \qquad (4)$$

Здесь $\bar{u} = (b_1, b_2, \ldots, b_m, a_1, a_2, \ldots, a_n)^т$ и $\bar{v} = (F_1, F_2, \ldots, F_j, \ldots, F_{n+m})^т$ — векторы; $F_j = [\Phi_ч(e_j) - b_0]/e_j$; $j = \overline{1, n+m}$; A — матрица системы линейных уравнений с элементами

$$A_{pq} = \begin{cases} e_g \text{ при } q \leq m; \\ \Phi_ч(e_p) e_h \text{ при } q > m, \end{cases}$$

где p, $q = 1, 2, \ldots, n + m$; $g = p(q - 1)\mathrm{mod}(n + m)$; $h = p(q - m - 1)\mathrm{mod}(n + m)$; запись вида $u \,\mathrm{mod}\, v$ означает остаток от деления u на v.

Решение уравнений (4) дает коэффициенты полиномов (1), но не позволяет найти значения n и m. Для их определения построен сходящийся итерационный процесс, который начинается с $m = 0$ и продолжается до тех пор, пока не будет выполнено некоторое условие его сходимости.

Например, можно сравнивать отношение найденных коэффициентов при старших степенях полиномов (1) со значением правой части решенного уравнения (2). Однако предпочтительнее использовать формулу первой производной ПФ:

$$\Phi'(0) = b_1 - b_0 a_1. \qquad (5)$$

Это объясняется тем, что численное определение первой производной функции выполнить значительно проще, быстрее и точнее, чем численное нахождение предела.

Для систем с сосредоточенными параметрами, к которым принадлежат линеаризованные модели большинства гидростатических опор, значения n и m постоянны, поэтому для конкретной модели их следует определить 1 раз. В дальнейших расчетах при известных n и m для каждого сочетания значений входных параметров потребуется отыскивать лишь коэффициенты полиномов (1), а затем — требуемые динамические критерии. При этом численное дифференцирование ПФ не нужно вообще.

Пример. Пусть численная ПФ $\Phi_ч(s)$ описывает систему с сосредоточенными параметрами, т. е. имеется алгоритм вычисления ПФ $\Phi(s)$. Требуется найти аналитические атрибуты последней. Предположим, что после их нахождения ПФ примет следующий вид:

$$\Phi(s) = \frac{3 + 12s + 5s^2}{1 + 2s + 6s^2 + 8s^3 + 4s^4}. \qquad (6)$$

Решение уравнения (2) дает $x = n - m = 2$; $L = 1{,}25$. В результате вычислений получено $b_0 = \Phi_ч(0) = 3$; $\Phi_ч'(0) = 6$. Далее выполняем итерационный процесс нахождения аналитических атрибутов ПФ, результаты которого приведены в таблице.

Видно, что при $m < 2$ условия (2) и (5) не выполняются, т. е. порядки полиномов ПФ еще недостаточны. При $m = 2$ оба условия впервые выполнены, следовательно, $n = m + x = 2 + 2 = 4$, и ПФ имеет вид (6).

ISSN 0869-7566

Значения атрибутов ПФ при		
$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
$a_1 = 0{,}109$; $a_2 = 2{,}041$; $b_1 - b_0 a_1 = -0{,}3$; $\Phi_ч'(0) = 6 \neq 0{,}3$; $1{,}25 \neq 1/a_2 = 0{,}49$	$b_1 = 2{,}483$; $a_1 = 0{,}158$; $a_2 = 1{,}814$; $a_3 = 2{,}785$; $b_1 - b_0 a_1 = 2{,}0$; $\Phi_ч'(0) = 6 \neq 2{,}0$; $1{,}25 \neq b_1/a_2 = 0{,}89$	$b_1 = 12$; $b_2 = 5$; $a_1 = 2$; $a_2 = 6$; $a_3 = 8$; $a_4 = 4$; $b_1 - b_0 a_1 = 6{,}0$; $\Phi_ч'(0) = 6 = 6$; $1{,}25 = b_2/a_4 = 1{,}25$

Для систем с распределенными параметрами (моделей газостатических опор, для которых решение линеаризованных краевых задач с уравнением Рейнольдса получено численными методами) верхний предел значения n неограничен. Чем больше значение этого параметра, тем точнее результаты определения корневых критериев оценки свободных колебаний системы [1] (степени устойчивости, нормированной степени устойчивости, затухания колебаний за период и др. [2]).

Анализ расчетных данных, полученных для 75 конструкций газостатических опор (от простых до весьма сложных) при помощи специализированной среды СИГО [7], в которой предложенный метод использован для расчета корневых критериев устойчивости конструкций, показал его высокую надежность. Установлено, что в зависимости от значений входных параметров и точности расчетов $n = 3 \div 7$.

Реже, при больших значениях ряда входных параметров (прежде всего это относится к числу сдавливания σ [3] для всех без исключения газостатических опор в случае, когда демпфирование смазочных тонкослойных пленок весьма значительно), $n = 8 \div 12$ [1]. Это позволяет предположить, в частности, что довольно распространенный в исследованиях метод оценки динамики газостатических опор по параметрам гармонического осциллятора ($n = 2$) имеет низкую точность вне зависимости от конструкции опоры и методов упрощения ее математической модели.

Список литературы

1. **Коднянко В. А.** Информационная технология и компьютерная среда моделирования, расчета и исследования газостатических опор. — Красноярск: Изд-во СФУ, 2007. — 250 с.
2. **Юревич Е. И.** Теория автоматического управления. — Л.: Энергия, 1975. — 460 с.
3. **Пинегин С. В., Табачников Ю. Б., Сипенков И. Е.** Статические и динамические характеристики газостатических опор. — М.: Наука, 1982. — 265 с.
4. **Сиразетдинов Т. К.** Устойчивость систем с распределенными параметрами. — Казань: Казанск. гос. ун-т, 1971. — 180 с.
5. **Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.** Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986. — 502 с.
6. **Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З.** Численные методы анализа. — М.: Наука, 1967. — 368 с.
7. **Интегрированная** компьютерная среда моделирования, расчета, исследования и проектирования конструкций с газостатическими опорами (Среда СИГО): Свид. РОСПАТЕНТа об офиц. рег. программы для ЭВМ № 2003610237 от 22.01.2003.