

Математическая модель колебаний шпинделя токарного станка с консольным закреплением заготовки

к.т.н. В. Г. Мирошниченко, А. В. Авилов

При токарной обработке необходимо управлять траекторией формообразующих движений в целях обеспечения заданных показателей качества изготавливаемых деталей. Традиционно решение этой задачи связано с выбором технологических режимов на заданной длине обработки. Используемая обычно процедура выбора режимов, которые в совокупности задают траектории формообразующих движений, не учитывает упругих деформаций звеньев технологической системы (ТС) и их относительных перемещений.

Взаимодействие ТС с процессом резания определяет характер ее поведения и точность обработки. Таким образом, процесс резания является сложным объектом со случайными во времени характеристиками, зависящими от большого числа переменных. Так, режущие свойства инструмента (резца) непрерывно изменяются вследствие износа и деформаций, возникающих при его контакте с заготовкой. Последней, в свою очередь, свойственны колебания входных параметров (шероховатости, волнистости), а также погрешности установки.

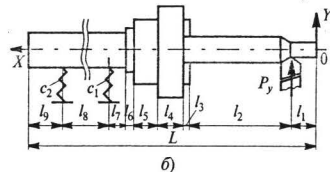
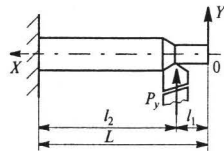
К указанным переменным принадлежат также упругие отжатия суппорта, колебания шпиндельного узла, изменение мод собственных колебаний ТС по длине заготовки. Поэтому при составлении математической модели следует рассматривать ТС, включающую в себя шпиндель, заготовку и резец, как систему с распределенными параметрами и бесконечным множеством мод собственных колебаний.

Рассмотрим сначала ТС с распределенными параметрами при жестком консольном закреплении заготовки в шпинделе (рис. 1, а). Математическая модель такой ТС может быть составлена с использованием метода начальных параметров для случая нестационарных вынужденных движений.

Рассмотрим колебания заготовки длиной L с массой единицы длины m , изгибной жесткостью EI и коэффициентом демпфирования μ . Дифференциальное уравнение поперечных колебаний имеет

вид [1] $\partial^4 y / \partial x^4 + (m/EI) \partial^2 y / \partial t^2 + \mu \partial y / \partial t = 0$, где y — поперечное перемещение заготовки; x — продольная координата; t — время.

Рис. 1. Схемы ТС токарной обработки при консольном закреплении заготовки: а — жестком; б — в шпинделе на упругих опорах



Если перейти от функции $y(x, t)$ к ее изображению $\tilde{y}(x, p)$, используя операционное преобразование Лапласа—Карсона, т. е. $\tilde{y}(x, p) = p \int_0^\infty e^{-pt} y(x, t) dt$, то при нулевых начальных условиях $[y(x, 0) = 0; \dot{y}(x, 0) = 0]$, получим

$$\tilde{y}^4 + \alpha^4 \tilde{y} = 0, \quad (1)$$

где $\alpha = [(mp^2/EI + \mu p)/4]^{0,25}$.

Применив к уравнению (1) операционное преобразование вида

$$\Psi(r, p) = r \int_0^\infty e^{-rx} \tilde{y}(x, p) dx \quad (2)$$

(где r — оператор преобразования), запишем

$$r^4 \left[\Psi(r) - \frac{\tilde{y}(0, p)}{r} - \frac{\tilde{y}'(0, p)}{r^2} - \frac{\tilde{y}''(0, p)}{r^3} - \frac{\tilde{y}'''(0, p)}{r^4} \right] + 4\alpha^4 \Psi(r) = 0. \quad (3)$$

Следует заметить, что в уравнении (2) функция $\Psi(r)$ параметрически зависит от оператора p .

После преобразования уравнения (3) и перехода от $\Psi(r)$ к $\tilde{y}(x, p)$ находим

$$\tilde{y}(x, p) = \tilde{y}(0, p) S_1(\alpha x) + [\tilde{y}'(0, p)/\alpha] S_2(\alpha x) + [\tilde{y}''(0, p)/\alpha^2] S_3(\alpha x) + [\tilde{y}'''(0, p)/\alpha^3] S_4(\alpha x), \quad (4)$$

где функции А. Н. Крылова $S_1(\alpha x) = \text{ch}(\alpha x) \cos(\alpha x)$; $S_2(\alpha x) = 0,5[\text{ch}(\alpha x) \sin(\alpha x) + \text{sh}(\alpha x) \cos(\alpha x)]$; $S_3(\alpha x) = \text{sh}(\alpha x) \sin(\alpha x)$; $S_4(\alpha x) = 0,25[\text{ch}(\alpha x) \sin(\alpha x) - \text{sh}(\alpha x) \cos(\alpha x)]$.

После дифференцирования уравнения (4) получаем следующее выражение в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(x_i, p) \\ \tilde{y}'(x_i, p)L \\ M(x_i, p)L^2/EI \\ Q(x_i, p)L^3/EI \end{bmatrix} = [H_i(x_i, p)] \times \begin{bmatrix} \tilde{y}(0, p) \\ \tilde{y}'(0, p)L \\ M(0, p)L^2/EI \\ Q(0, p)L^3/EI \end{bmatrix} \times [H_{i-1}(x_{i-1}, p)], \quad (5)$$

где x_i — длина i -го участка, заключенного между $(i-1)$ -м и i -м сечениями заготовки; $M(x_i, p)$ и $Q(x_i, p)$ — изгибающий момент и поперечная сила в сечении с координатой x_i ; $M(0, p)$ и $Q(0, p)$ — то же в начальном сечении (при $x = 0$); $[H_i(x_i, p)]$ — квадратная матрица, преобразующая изображение параметров $(i-1)$ -го сечения в изображении параметров i -го сечения.

Данная матрица имеет вид

$$[H_i(x_i, p)] = \begin{bmatrix} S_1(\alpha_i x_i) & \frac{S_2(\alpha_i x_i)}{\alpha_i L} & \frac{S_3(\alpha_i x_i)}{\alpha_i^2 L^2 \gamma_i} & \frac{S_4(\alpha_i x_i)}{\alpha_i^3 L^3 \gamma_i} \\ -4\alpha_i L S_4(\alpha_i x_i) & S_1(\alpha_i x_i) & \frac{S_2(\alpha_i x_i)}{\alpha_i L} & \frac{S_3(\alpha_i x_i)}{\alpha_i^2 L^2 \gamma_i} \\ -4\alpha_i^2 L^2 \gamma_i S_3(\alpha_i x_i) & -4\alpha_i L \gamma_i S_4(\alpha_i x_i) & S_1(\alpha_i x_i) & \frac{S_2(\alpha_i x_i)}{\alpha_i L} \\ -4\alpha_i^3 L^3 \gamma_i S_2(\alpha_i x_i) & -4\alpha_i^2 L^2 \gamma_i S_3(\alpha_i x_i) & -4\alpha_i L S_4(\alpha_i x_i) & S_1(\alpha_i x_i) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где α_i — значение α в i -м сечении; $\gamma_i = EI_i/EI$; EI_i — жесткость i -го участка.

Проанализируем частотные свойства исследуемой ТС, рассматривая в качестве возмущающего воздействия радиальную составляющую P_y силы резания: $P_y = K t_p$, где K — статическая жесткость; t_p — глубина резания.

В соответствии с работой [2], граничными условиями на концах заготовки и выражением (5), а также с учетом действия силы P_y , зависимость между параметрами участка заготовки, положение которого определяется переменными размерами l_2 и l_1 (см. рис. 1, а), можно записать следующим образом:

$$[\tilde{y}(L)] = [H_2(l_2, p)][H_1(l_1, p)][\tilde{y}(0)] + [P], \quad (7)$$

где $[H_2(l_2, p)]$ и $[H_1(l_1, p)]$ — матрицы начальных условий;

$$[\tilde{y}(L)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M(L, p)L^2}{EI} \\ \frac{Q(L, p)L^3}{EI} \end{bmatrix}; [\tilde{y}(0)] = \begin{bmatrix} \tilde{y}(0) \\ \tilde{y}'(0)L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; [P] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{P_y L^3}{EI} \end{bmatrix}.$$

В дальнейшем используем в уравнении (7) блочное представление матриц начальных условий и матриц (6) для каждого участка:

$$[H_2(l_2, p)] = \begin{bmatrix} [H_{21}] & [H_{22}] \\ [H_{23}] & [H_{24}] \end{bmatrix}; [H_1(l_1, p)] = \begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] \\ [H_{13}] & [H_{14}] \end{bmatrix}; \quad (8)$$

$$[\tilde{y}(0)] = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{12} \\ 0 \end{bmatrix}; [\tilde{y}(L)] = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{y}_{34} \end{bmatrix},$$

где $[H_{21}]$, $[H_{22}]$, ..., $[H_{14}]$ — компоненты матриц $[H_2]$ и $[H_1]$;

$$\tilde{y}_{12} = \begin{bmatrix} \tilde{y}(0) \\ \tilde{y}'(0)L \end{bmatrix}; \tilde{y}_{34} = \begin{bmatrix} M(L, p)L^2/EI \\ Q(L, p)L^3/EI \end{bmatrix}.$$

Подставляя выражения (8) в уравнение (7), получим

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{y}_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_{21}][H_{11}] + [H_{22}][H_{13}] \\ [H_{23}][H_{11}] + [H_{24}][H_{13}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_{12} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [H_{22}] \\ [H_{24}] \end{bmatrix} \frac{P_y L^3}{EI}. \quad (9)$$

Выделив из выражения (9) два уравнения с нулевой левой частью, можно определить неизвест-

ный вектор граничных условий для правого конца заготовки:

$$\begin{aligned} [\tilde{y}_{12}] &= \begin{bmatrix} \tilde{y}(0) \\ \tilde{y}'(0)L \end{bmatrix} = \\ &= -[H_{21}][H_{11}] + [H_{22}][H_{13}]^{-1}[H_{22}]\frac{P_y L^3}{EI}. \quad (10) \end{aligned}$$

Граничные условия (10) позволяют записать выражение для передаточной функции ТС и оценить поперечные перемещения заготовки в произвольном сечении под действием силы P_y . Например, при условии $x = l_1$ эти перемещения определяются выражением

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(l_1, p) \\ \tilde{y}'(l_1, p)L \end{bmatrix} = [H_{11}][\tilde{y}_{12}].$$

На рис. 2, а представлена амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) рассматриваемой ТС при следующих условиях: используется резец с пластиной из твердого сплава Т15К6; диаметр заготовки 50 мм; подача 0,21 мм/об; $t_p = 1$ мм; $L = 200$ мм; скорость резания рассчитывали по

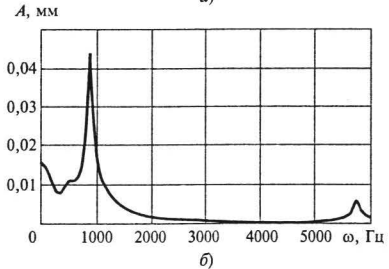
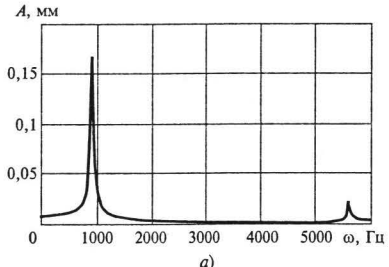


Рис. 2. АЧХ ТС: а — при жестком закреплении заготовки; б — при закреплении в шпинделе на упругих опорах (А — амплитуда; ω — частота)

справочнику [3]. Как видно из рис. 2, а, данная АЧХ имеет характерные резонансные частоты $\omega = 892$ и 5588 Гц.

Рассмотрим теперь аналогичную ТС, но при консольном закреплении заготовки в шпинделе, установленном на упругих опорах с жесткостью c_1 и c_2 (рис. 1, б).

Начальные условия можно записать в виде

$$[\tilde{y}(L)] = \begin{bmatrix} \tilde{y}(L, p) \\ \tilde{y}'(L, p)L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad [\tilde{y}(0)] = \begin{bmatrix} \tilde{y}(0) \\ \tilde{y}'(0)L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матричное уравнение, связывающее правый и левый концы исследуемой модели, с учетом выражений (5) и (6) имеет вид

$$[\tilde{y}(L)] = [B][\tilde{y}(0)] + [D][P], \quad (11)$$

где $[B] = [H_5(l_5, p)][R_8(l_8, p)][R_7][H_7(l_7, p)][H_6(l_6, p)] \times [H_5(l_5, p)][H_4(l_4, p)][H_3(l_3, p)][H_2(l_2, p)][H_1(l_1, p)]$; $[D] = [B]/[H_1(l_1, p)]$; $[H_3], [H_4], \dots, [H_9]$ — матрицы начальных условий для участков $l_3, l_4, \dots, l_9$ (см. рис. 1, б); $[R_7]$ и $[R_8]$ — переходные матрицы упругих опор шпинделя:

$$[R_7] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{c_1 l_7}{EI} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [R_8] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{c_2 l_8}{EI} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Выделив из выражения (11) два уравнения с нулевой левой частью, определяем неизвестный вектор граничных условий для правого конца заготовки:

$$[\tilde{y}_{34}] = \begin{bmatrix} \tilde{y}(0) \\ \tilde{y}'(0)L \end{bmatrix} = -[B_{13}]^{-1}[D_{24}]\frac{P_y L^3}{EI}, \quad (12)$$

где $[B_{13}]$ и $[D_{24}]$ — компоненты матриц $[B]$ и $[D]$ при их блочном представлении.

Полученные граничные условия позволяют записать выражение для перемещения произвольного сечения заготовки, закрепленной в шпинделе, под действием силы P_y . При условии $x = l_1$, определяющем сечение, в котором находится резец, получаем выражение для передаточной функции ТС:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(l_1, p) \\ \tilde{y}'(l_1, p)L \end{bmatrix} = [H_{11}][\tilde{y}_{34}]. \quad (13)$$

Выражение (13) позволяет теоретически оценить АЧХ исследуемой ТС (рис. 2, б) при таких же условиях, как в первом случае (при жестком закреплении заготовки). Для расчета использовали размеры шпинделя станка мод. 16К20Ф3. Как видно из рис. 2, б, данная АЧХ имеет характерные резонансные частоты $\omega = 0 \div 10; 900$ и 5720 Гц.

Сравнение двух АЧХ (см. рис. 2, а и б) показывает, что во втором случае в области высоких частот наблюдается увеличение резонансной частоты на 132 Гц (с 5588 до 5720 Гц), что обусловлено упругими свойствами шпиндельной группы станка мод. 16К20Ф3, а в области низких частот наблюдается более расширенный спектр частот, относящихся к шпиндельной группе. Поэтому для более точного описания частотных свойств ТС в области высоких и средних частот целесообразно пользоваться моделью с закреплением заготовки в шпинделе на упругих опорах.

Результаты анализа частотных свойств шпиндельной группы не противоречат результатам ранее проведенных исследований [4].

Полученные выражения (10) и (12) позволяют оценить изменение мод собственных колебаний ТС при различной конструкции шпиндельного узла, исследовать резонансные явления в процессе обработки и точность изготовленной детали по всей длине обрабатываемой поверхности.

Список литературы

1. Бабак И. М. Теория колебаний. — М.: Наука, 1968. — 559 с.
2. Ивович В. А. Переходные матрицы в динамике упругих систем. — М.: Машиностроение, 1969. — 199 с.
3. Справочник по обработке металлов резанием / Ф. Н. Абрамов, В. В. Коваленко, В. Е. Любимов и др. — Киев: Техника, 1983. — 239 с.
4. Путь А. В., Зверев И. А. Шпиндельные узлы. — М.: Изд-во "Станкин", 2000. — 197 с.

“Библиотека Машиностроителя”
www.lib-bkm.ru